



**ESCUELA TÉCNICA SUPERIOR DE INGENIEROS CAMINOS, CANALES Y
PUERTOS**



UNIVERSIDAD DE CANTABRIA

TESIS DOCTORAL

TÍTULO	<i>Desarrollo de teoría sobre impactos. Método simplificado de cálculo de impactos en estructuras</i>
TITLE	<i>Development of theory on impacts. Simplified method of calculation of impacts in structures</i>
AUTOR	<i>Javier Sánchez Haro</i>
DIRECTOR <i>Javier Torres Ruiz</i>	FECHA <i>Abril 2017</i>



- Desarrollo de teoría sobre impactos -
- Método simplificado de cálculo de impactos en estructuras -





- Desarrollo de teoría sobre impactos -
- Método simplificado de cálculo de impactos en estructuras -



A mis padres, porque pa'ciencia la suya



- Desarrollo de teoría sobre impactos -
- Método simplificado de cálculo de impactos en estructuras -





- Desarrollo de teoría sobre impactos -
- Método simplificado de cálculo de impactos en estructuras -



“Nunca trato de resolver problemas difíciles. Por el contrario, como conozco muy bien mis limitaciones, le doy muchas vueltas al problema antes de plantearlo de manera definitiva, y cuando lo hago, ya casi no queda problema”

Félix Candela



- Desarrollo de teoría sobre impactos -
- Método simplificado de cálculo de impactos en estructuras -





Agradecimientos:

En primer lugar, quería agradecer a mi director de tesis, **Javier Torres Ruiz**, su inestimable ayuda para la realización de la tesis. No sólo por los conocimientos transmitidos en teoría de estructuras, si no por mostrarme que éstos son la consecuencia de tomar el camino de la reflexión y la ilusión como método de cálculo. Este conocimiento me transportará mucho más lejos de los muros que encerraban los misterios de esta investigación.

Esta tesis no hubiera sido posible sin el apoyo y facilidades que **Francisco Ballester y Jokin Rico**, como cabezas visibles del grupo Giteco e Ingecid S.L., han puesto a mi disposición en forma de tiempo, recursos y buena voluntad. Mi más sincero agradecimiento. Ellos hacen Universidad.

Para la realización de los ensayos mostrados en la presente tesis, el grupo GiaDe del laboratorio de estructuras de la Universidad de Cantabria, encabezado **por Carlos Alonso Cobo**, ha puesto sus equipos de instrumentación, su tiempo y su buen hacer, a disposición del doctorando para todo aquello que fuera necesario. Gracias a todos ellos por su inestimable colaboración.

No puedo olvidarme de **Sergio Saiz** de Ingzero que, de manera desinteresada y tras una conversación informal, realizó todas las gestiones necesarias para que me fuera facilitada la licencia del Midas NFX, así como la renovación anual de dicha licencia. Sin duda, este programa ha sido un pilar fundamental para las comprobaciones realizadas a lo largo de la tesis.

Por último, agradecer a **Joaquín Díaz** y a **Christian Karl Baier** todas sus atenciones, y por hacer del periodo de investigación en la Universidad Technische Hochschule Mittelhessen en Giessen (Alemania) realizado para la presente tesis, un tiempo fructífero y apasionante en todos los aspectos.

A todos ellos, muchas gracias.



- Desarrollo de teoría sobre impactos -
- Método simplificado de cálculo de impactos en estructuras -





ÍNDICE

1	ABSTRACT / RESUMEN DE TESIS	33
1.1	INTRODUCTION	33
1.2	SUBJECT OF THE RESEARCH	34
1.3	JUSTIFICATION FOR THE RESEARCH	34
1.4	DESCRIPTION OF THE RESEARCH	37
1.4.1	State of the Art	37
1.4.2	Central collision of free masses.....	38
1.4.3	Development of a theory and formulation for the calculation of impact on structures	38
1.4.4	Experimental analysis.....	40
1.4.5	Conclusions.....	40
1.5	INTRODUCCIÓN	41
1.6	TEMÁTICA DE LA INVESTIGACIÓN	41
1.7	JUSTIFICACIÓN DE LA INVESTIGACIÓN.....	42
1.8	DESCRIPCIÓN DE LA INVESTIGACIÓN	45
1.8.1	Estado del arte	45
1.8.2	Choque central de masas libres	46
1.8.3	Desarrollo de teoría y formulación para el cálculo de impactos en estructuras.46	
1.8.4	Análisis experimental	48
1.8.5	Conclusiones.....	48
2	ESTADO DEL ARTE	49
2.1	EVOLUCIÓN HISTÓRICA DEL ESTUDIO DE LOS IMPACTOS	49
2.1.1	René Descartes (1596-1650)	52
2.1.2	Jhon Wallis (1616-1703).....	54
2.1.3	Christopher Wren (1632-1723)	55
2.1.4	Christian Huygens (1629-1695).....	55
2.1.5	Edmé Mariotte (1620-1684).....	57
2.1.6	Isaac Newton (1642-1727)	58
2.1.7	Leonhard Euler (1707-1783)	59
2.1.8	Sólidos deformables	60
2.2	INTRODUCCIÓN A LOS IMPACTOS DE BAJA VELOCIDAD DE CUERPOS RÍGIDOS	61
2.2.1	Tipos de impactos.....	61
2.2.2	Hipótesis de un impacto entre cuerpos rígidos	66
2.2.3	Impactos de baja velocidad.....	68



2.3	IMPACTOS DE CUERPOS RÍGIDOS	71
2.3.1	Impactos estéreo-mecánicos	71
2.3.2	Impactos de cuerpos rígidos co-lineales con superficies suaves	83
2.3.3	Impacto excéntrico de cuerpos rígidos con superficies rugosas.....	92
2.3.4	Modelización de la zona de contacto.....	95
2.4	IMPACTOS DE CUERPOS FLEXIBLES.....	103
2.4.1	Teoría de ondas axiales	104
2.4.2	Impactos axiales	112
2.4.3	Teoría de vibraciones transversales.....	121
2.4.4	Impactos transversales.....	127
2.4.5	Cálculo de impactos mediante elementos finitos. Método explícito	133
3	CHOQUE CENTRAL DE MASAS LIBRES	139
3.1	FORMULACIÓN CLÁSICA.....	139
3.2	FORMULACIÓN DESARROLLADA PARA MASAS LIBRES	141
3.2.1	Choque elástico perfecto	145
3.2.2	Choque plástico perfecto	147
3.3	ANÁLISIS DEL PÉNDULO DE NEWTON	149
3.3.1	Descripción	149
3.3.2	Análisis del impacto de una bola.....	151
3.3.3	Análisis de impacto de dos bolas	156
3.3.4	Análisis de impacto de tres bolas.....	157
3.3.5	Análisis de impacto de cuatro bolas.....	160
3.3.6	Conclusiones.....	160
4	DESARROLLO DE TEORÍA Y FORMULACIÓN PARA EL CÁLCULO DE IMPACTOS EN ESTRUCTURAS	161
4.1	IDEALIZACIÓN DE LA ESTRUCTURA COMO SISTEMA DE MUELLES Y MASAS.....	163
4.1.1	Rigidez de un punto.....	164
4.1.2	Masa equivalente de un punto	194
4.1.3	Aplicación al modo fundamental de vibración.....	207
4.1.4	Aplicación considerando todos los modos de vibración	223
4.2	DESARROLLO TEÓRICO Y APLICACIÓN DE LA FORMULACIÓN OBTENIDA	233
4.2.1	Hipótesis de partida	234
4.2.2	Planteamiento inicial del impacto.....	235
4.2.3	Condición adicional: Masa del proyectil > Masa estructural	241
4.2.4	Aplicación a vigas sometidas a impactos de masas grandes.....	250
4.2.5	Análisis del peso propio en los impactos	269



4.2.6	Aplicación a vigas sometidas a impactos de masas grandes incluyendo el efecto del peso propio	281
4.2.7	Generalización del modelo para masa cualquiera	301
4.2.8	Aplicación a vigas sometidas a impactos de masa cualquiera.....	313
4.2.9	Aplicación a vigas continuas de dos vanos.....	341
4.2.10	Aplicación a vigas continuas de tres vanos.	355
4.2.11	Aplicación a placas.	371
4.2.12	Aplicación a impactos longitudinales	383
4.2.13	Aplicación para el cálculo de la fuerza de contacto	401
4.2.14	Aplicación a impacto excéntrico: Cálculo de desplazamientos.....	429
5	ANÁLISIS EXPERIMENTAL	449
5.1	ENSAYOS DE MEDICIÓN DE DESPLAZAMIENTOS	449
5.1.1	Descripción de los ensayos.....	450
5.1.2	Equipo de medida	453
5.1.3	Impacto transversal en viga flexible.....	458
5.1.4	Impacto trasversal en viga rígida	473
5.1.5	Viga Rígida Vs. Viga Flexible.	487
5.2	ENSAYOS DE MEDICIÓN DE FUERZAS.....	489
5.2.1	Descripción del ensayo.....	489
5.2.2	Cálculo ensayo 1.....	491
5.2.3	Cálculo ensayo 2.....	493
5.2.4	Cálculo ensayo 3.....	495
5.2.5	Comparación de resultados.	497
6	CONCLUSIONS/CONCLUSIONES	499
6.1	ABOUT THE CURRENT WAY OF CALCULATING IMPACT	499
6.2	ABOUT THE IDEALISATION OF STRUCTURE AS RIGIDITY AND EQUIVALENT MASS... 500	
6.3	ABOUT THE THEORY OF IMPACT DEVELOPED HEREIN	501
6.3.1	Breakdown of effects in an impact	501
6.3.2	Gravitational term of an impact.....	501
6.3.3	Kinetic term of an impact.....	502
6.3.4	Combination of the gravitational and kinetic terms	503
6.3.5	Applicability of the theory.....	503
6.4	ABOUT THE FORMULATION DEVELOPED HEREIN	504
6.5	ABOUT THE RESEARCH	506
6.6	SOBRE LA SITUACIÓN ACTUAL DEL CÁLCULO DE IMPACTOS	509



6.7	SOBRE LA IDEALIZACIÓN DE LA ESTRUCTURA COMO RIGIDEZ Y MASA EQUIVALENTE..	510
6.8	SOBRE LA TEORÍA DE IMPACTOS DESARROLLADA.....	511
6.8.1	Descomposición de efectos en un impacto	511
6.8.2	Término gravitatorio del impacto	511
6.8.3	Término cinético del impacto.....	512
6.8.4	Combinación del termino gravitatorio y del término cinético.....	513
6.8.5	Aplicabilidad de la teoría.....	513
6.9	SOBRE LA FORMULACIÓN DESARROLLADA	514
6.10	SOBRE LA INVESTIGACIÓN	516
7	FUTURAS LINEAS DE INVESTIGACIÓN	519
8	BIBLIOGRAFÍA	521



ÍNDICE DE ILUSTRACIONES

Figura 1-Illustración obtenida del documento "De Proportione Motus" de Marcus Marci para el análisis de impactos de masas libres.	51
Figura 2-Péndulo de Newton	51
Figura 3-Esfera analizada por Descartes sobre el plano rígido CBE.	53
Figura 4-Dibujo realizado por Huygens para estudiar los péndulos en un barco en movimiento (sistema de referencia móvil).....	56
Figura 5-Solucion de un impacto oblicuo por el método geométrico de Mariotte.	57
Figura 6-Dibujo recogido en Principia sobre los experimentos de impactos entre péndulos. Las marcas R, S, T y V estaban identificadas para corregir los efectos del aire en la caída de los cuerpos.....	58
Figura 7-Impactos centrales. Centros de gravedad y punto de contacto alineados.....	62
Figura 8-Impacto rotacional en un péndulo (en este caso además excéntrico).	63
Figura 9- Impactos excéntricos. Centros de gravedad y punto de contacto no alineados	63
Figura 10-Impacto ideal entre partículas.	64
Figura 11-El impacto de palo de golf con una bola se asemeja a un impacto de cuerpos rígidos.	64
Figura 12-Impacto flexible transversal y longitudinal.	65
Figura 13-Coeficientes de restitución de esferas del mismo material y tamaño en función de la velocidad de impacto. Ensayos realizados por Raman C.(1918) ^{6,7}	72
Figura 14- Coeficientes de restitución de esferas del mismo material y distintas relaciones de pesos en función de la velocidad de impacto. Ensayos realizados por Goldsmith W.(1952),Haughton S.(1862),Hodgkinson E.(1835) y Tait P.G. (1900) ⁸⁻¹¹	72
Figura 15-Hipótesis de fases producidas durante el impacto estéreo-mecánico. Goldsmith W.(2001) ¹²	73
Figura 16-Impacto central liso sin rotación entre dos esferas.	75
Figura 17-Impacto excéntrico. Esfera impacta en barra.	76
Figura 18-Impacto excéntrico rugoso plano. Planteamiento general.....	77
Figura 19-Resolución gráfica para los casos de deslizamiento inicial (izquierda) y deslizamiento continuo (derecha).....	79
Figura 20-Choque sin rozamiento e inelástico de una barra rígida contra un plano horizontal. 81	
Figura 21-Eschema de impacto de cuerpos rígidos. Partícula deformable intermedia.	83
Figura 22-Fases de compresión y restitución en un impacto en función del coef. de restitución.	85
Figura 23-Relación fuerza-deformación en un impacto plástico.	86
Figura 24-Variación del impulso durante el impacto.	86
Figura 25-Trasición de velocidades frente al tiempo.	87
Figura 26-Trasición de velocidades frente al espacio.	87
Figura 27-Consecuencias de la disipación de energía relativas a deformación y al trabajo en el impacto.	89
Figura 28-Eschema general de impacto excéntrico rugoso.....	93
Figura 29-Tabla con algunos radios de giro para elementos 2Dy elemento 3D.	94
Figura 30-Eschema del modelo viscoelástico de Maxwell.....	96
Figura 31-Valor de la fuerza de impacto en función del amortiguamiento.....	98
Figura 32-Modelo de zona de contacto para impactos entre cuerpos rígidos.	99
Figura 33-Eschema de cuerpos que impactan según Hertz.....	100



Figura 34-Impacto axial en cuerpo libre (a), impacto axial en estructura (b), impacto transversal en cuerpo libre (c), e impacto transversal en estructura (d).	103
Figura 35-Eschema diferencial para ondas longitudinales.	104
Figura 36-Evolución temporal del desplazamiento inicial sobre una barra de longitud infinita.	106
Figura 37-Diagrama característico para una barra libre de longitud L sometida a una onda de tensión σ durante un tiempo τ (se indican velocidad y la tensión).	109
Figura 38-Distribución de tensiones en una barra para $t > L/C_0$ después de la reflexión desde el extremo libre.	110
Figura 39-Eschema de cálculo para un impacto axial en una barra.	112
Figura 40-Diagrama característico para los componentes del frente de onda en una barra virtual extendida. La barra se localiza realmente entre $0 < x/L < 1$	114
Figura 41-Tensión en el extremo del impacto en función del tiempo para distintos valores de α	116
Figura 42-Tensión máxima en el amortiguador para el caso de empotramiento en función de la relación de masas. En continuo la solución de onda elástica, en trazos la solución dinámica asumiendo deformación uniforme y en punto y trazo la solución cuasi-estática.	117
Figura 43-Impacto coaxial de una esfera en una barra en el extremo libre.	118
Figura 44-Eschema de viga de canto constante.	121
Figura 45-Elemento diferencial de cálculo (dcha.) y los modos de vibración para los tres primeros valores de j (izda.).....	123
Figura 46-Modelo de cálculo del método de un grado de libertad simplificado.	126
Figura 47-Calculo de frecuencias por método exacto, por la aproximación de Rayleigh y por el método de 1 grado de libertad.	127
Figura 48-Eschema deformación global de la estructura y deformación local.	130
Figura 49-Choque central de masas libres sin rozamiento.	140
Figura 50-Eschema planteamiento inicial para impactos de masas libres.	142
Figura 51-Instante inicial del impacto.	142
Figura 52-Instante cualquiera durante el impacto.....	142
Figura 53-Fases durante un impacto elástico perfecto.....	145
Figura 54- Fase de compresión durante un impacto plástico perfecto.	147
Figura 55-Péndulo de Newton en reposo.	149
Figura 56-Secuencia de impactos en el péndulo de Newton.....	150
Figura 57-Eschema de la conservación de energía en el péndulo de Newton.....	151
Figura 58-Eschema del péndulo de Newton como impacto de 2 masas y un muelle.....	151
Figura 59-Eschema de impacto con $M_p=M$ y $M_e=4M$	152
Figura 60-Estudio paramétrico de la Cantidad de Movimiento en función de la relación de masas.....	154
Figura 61-Opciones de absorber el impacto que "tiene" el péndulo cuando la bola izquierda colisiona con el resto.....	155
Figura 62- Eschema de impacto de dos bolas en el péndulo de Newton.....	156
Figura 63- Opciones de absorber el impacto que "tiene" el péndulo cuando las 2 bolas izquierdas colisionan con el resto	156
Figura 64- Eschema de impacto de tres bolas en el péndulo de Newton.	157
Figura 65-Posicionamiento del observador en el conjunto de 3 bolas en el impacto de dos bolas.	158



Figura 66- Posicionamiento del observador en el conjunto de 2 bolas en el impacto de dos bolas.	158
Figura 67- Posicionamiento del observador en el conjunto de 3 bolas en el impacto de tres bolas.	159
Figura 68-Secuencia de impacto de tres bolas.....	159
Figura 69- Secuencia de impacto de cuatro bolas	160
Figura 70-Representacion de la ecuación que relaciona fuerza y deformada.....	164
Figura 71- Caso de estudio: Cálculo de rigidez en el centro de la viga para una fuerza estática aplicada en dicho punto. Esta fuerza produce una deformación en la viga representada en rojo y cuyo valor en cada punto viene dado por $w(x)$	165
Figura 72:-Deformada obtenida por el programa de cálculo Midas Civil 2016.	166
Figura 73-Comparativa gráfica entre los resultados de deformada exacta y aproximación. ...	167
Figura 74- Comparativa numérica entre los resultados de deformada exacta y aproximación.	167
Figura 75- Representación gráfica de las fuerzas elástica de la viga al deformarse	168
Figura 76-Fuerzas por unidad de longitud que realiza la viga al deformarse.	169
Figura 77-Viga de 10 m bajo carga uniformemente repartida.....	169
Figura 78-Apoyo ficticio central para calcular la condensación de fuerzas.	170
Figura 79-Línea de influencia del apoyo central.	170
Figura 80-Línea de influencia de la fuerza en el centro de luz de la viga.....	170
Figura 81-Fuerza elástica por unidad de longitud y fuerza condensada en el centro del vano.	172
Figura 82-Resultados numéricos de línea de influencia, fuerzas elásticas por unidad de longitud y condesadas y valor de rigidez resultante.	172
Figura 83-Comparativa de valores de rigidez según el método.....	174
Figura 84-Viga biapoyada sobre la que se calcula la rigidez del punto central para el modo fundamental.	175
Figura 85-Deformada del modo fundamental de la viga.	175
Figura 86-Comparativa gráfica de las deformadas de carga puntual calculada con Midas Civil y con el método aproximado y la deformada del primer modo de vibración calculada con Midas Civil.	176
Figura 87-Comparativa de valores de las deformadas de carga puntual calculada con Midas Civil y con el método aproximado y la deformada del primer modo de vibración calculada con Midas Civil.	176
Figura 88- Viga continua de dos vanos sobre la que se calcula la rigidez del punto central de un vano para el modo fundamental.....	177
Figura 89-Cargas puntuales aplicadas de 10 KN con sentidos contrarios en el centro de cada vano de 10 m. Caso 2 vanos.	177
Figura 90-Deformada del modo 1 o fundamental de la viga continua de dos vanos.	178
Figura 91- Comparativa gráfica de las deformadas de carga puntual calculada con Midas Civil y la deformada del primer modo de vibración calculada con Midas Civil para el caso de la viga de dos vanos.....	178
Figura 92-Tabla de valores de las deformadas para el caso de las cargas puntuales y del modo 1 de vibración. Caso 2 vanos.	179
Figura 93- Viga continua de tres vanos sobre la que se calcula la rigidez del punto central del vano central para el modo fundamental.	180



Figura 94- Cargas puntuales aplicadas de 10 KN con sentidos contrarios en el centro de cada vano de 10 m. Caso 3 vanos.	180
Figura 95- Deformada del modo 1 o fundamental de la viga continua de tres vanos.....	181
Figura 96-Comparativa gráfica de las deformadas de carga puntual calculada con Midas Civil y la deformada del primer modo de vibración calculada con Midas Civil para el caso de la viga de tres vanos.	181
Figura 97-Tabla de valores de las deformadas para el caso de las cargas puntuales y del modo 1 de vibración. Caso 3 vanos.....	182
Figura 98- Placa sobre la que se calcula la rigidez del punto central para el modo fundamental.	183
Figura 99-Caso de carga puntual centrada calculada con el Midas Civil para el caso de placa cuadrada.....	184
Figura 100-Deformada de placa del modo 1 de vibración. Análisis modal realizado con Midas Civil.....	184
Figura 101- Comparativa gráfica de deformadas en placa para el caso de carga puntal, para la aproximación senoidal y para el modo 1 de vibración.	185
Figura 102-Comparativa numérica de deformadas en placa para el caso de carga punta, para la aproximación senoidal y para el modo 1 de vibración.	186
Figura 103-Vigas diagonales equivalentes a la placa	187
Figura 104- Ménsula sobre la que se calcula la rigidez del punto del extremo libre para el modo fundamental axial.....	188
Figura 105-Modelo de ménsula bajo carga puntual.	189
Figura 106- Deformada axial de la ménsula debida al modo 1 de vibración longitudinal.....	189
Figura 107-Comparativa entre deformadas debidas a carga puntual y al modo de vibración axial.	190
Figura 108- Comparativa numérica de deformadas en la ménsula para el caso de carga puntal y para el modo 1 de vibración axial.	190
Figura 109-Rebanada diferencial de la estructura trabajando a axil.	192
Figura 110-Campo de desplazamientos (y de aceleraciones) del modo 1 de vibración de la viga.	195
Figura 111-Representacion grafica de la función U(x) campo de aceleraciones por ud. de longitud de la viga.	196
Figura 112-Valores del campo de aceleraciones por unidad de longitud para el modo 1 de la viga biapoyada,	196
Figura 113-Aproximación de la línea de influencia por una función seno.....	197
Figura 114-Comparativa de fuerza de inercia en cada punto de la viga y fuerza de inercia de cada punto condensada en el punto central.	198
Figura 115-Cálculo de fuerzas de inercia y condensación en punto central a partir de la línea de influencia.....	198
Figura 116-Cálculo de fuerza equivalente y masas equivalente de la viga biapoyada para el modo 1.	198
Figura 117-Modo 1 de viga de acero biapoyada de 10 m de longitud y 0.1 x 0.1 de sección. T=0.426 segundos.	199
Figura 118- Modo 1 de viga de acero biapoyada de 10 m de longitud por vano de dos vanos y 0.1 x 0.1 de sección. T=0.426 segundos.....	201
Figura 119- Modo 1 de viga de acero biapoyada de 10 m de longitud por vano de tres vanos y 0.1 x 0.1 de sección. T=0.426 segundos.....	202



Figura 120-Modo de vibración 1 de la placa de hormigón de 10 m x 10 m x 0.1 m. T=0.834 segundos	203
Figura 121-Periodo natural de vibración del modo axial de la ménsula. T=0.00387segundos	204
Figura 122-Caso de fuerza constante centrada sobre viga calculada con Midas Civil con un único modo de vibración.....	208
Figura 123-Desplazamiento del centro de luz para carga contante de 10 KN aplicada en centro de luz, mediante Midas Civil y mediante método simplificado.	208
Figura 124-Caso de fuerza cíclica de 10 Hz y 10 KN centrada sobre viga calculada con Midas Civil con un único modo de vibración.	209
Figura 125- Desplazamiento del centro de luz para carga cíclica de 10 KN y de 10 Hz aplicada en centro de luz, mediante Midas Civil y mediante método simplificado.....	210
Figura 126-Caso de fuerza constante de 10 KN centrada en el vano izquierdo sobre viga continua de 2 vanos calculada con Midas Civil con un único modo de vibración.	211
Figura 127-Modelo para el cálculo de la rigidez equivalente en viga de dos vanos.....	211
Figura 128-Línea de influencia de la fuerza en el centro del vano izquierdo para viga de dos vanos.	212
Figura 129-Condensación de fuerza exterior a partir de la línea de influencia en viga de dos vanos.	212
Figura 130-Registro desplazamiento del centro de luz del vano izquierdo-tiempo para un modo de vibración calculado con Midas Civil y con el método simplificado.	214
Figura 131- Caso de fuerza constante de 10 KN centrada en el vano central sobre viga continua de 3 vanos calculada con Midas Civil con un único modo de vibración.	215
Figura 132- Condensación de fuerza exterior a partir de la línea de influencia en viga de tres vanos.	216
Figura 133- Sistemas equivalentes de distribución de fuerzas para el caso de tres vanos.	216
Figura 134- Registro desplazamiento del centro de luz del vano central-tiempo para un modo de vibración calculado con Midas Civil y con el método simplificado.	217
Figura 135- Caso de fuerza constante de 100 KN centrada sobre placa de 10 x 10 x 0.1 en hormigón calculada con Midas Civil con un único modo de vibración.	218
Figura 136- Registro desplazamiento del centro de la placa -tiempo para un modo de vibración calculado con Midas Civil y con el método simplificado.	219
Figura 137- Caso de fuerza constante de 10 KN en el extremo de ménsula de 10 x 0.01 x 0.01 en acero calculada con Midas Civil con un único modo de vibración.....	220
Figura 138-Registro desplazamiento del extremo de la ménsula un modo de vibración calculado con Midas Civil y con el método simplificado.....	221
Figura 139-Carga aplicada en el centro de la viga. Calculo modal realizado con Midas Civil para 3 modos de vibración.	223
Figura 140-Modo 1 de Flexión. T=0.4264 s. Análisis multimodal.	224
Figura 141-Modo 2 de Flexión. T=0.1067 s. Análisis multimodal.	224
Figura 142-Modo 3 de Flexión. T=0.04743s. Análisis multimodal.	224
Figura 143-Descomposición modal que realiza el método simplificado en la ecuación (287).	229
Figura 144-Comparativa de carga centrada constante calculado con 3 tres modos de vibración, mediante Midas Civil y calculado mediante método simplificado.	229
Figura 145-Carga cíclica aplicada en el centro de la viga. Calculo modal realizado con Midas Civil para 3 modos de vibración.	230
Figura 146-Contribución al desplazamiento del punto central de la viga de cada modo según el método simplificado.	231



Figura 147- Comparativa con carga cíclica de 20 Hz calculado con 3 tres modos de vibración, mediante Midas Civil y mediante método simplificado.....	232
Figura 148-Eschema de cálculo que representa la estructura y el proyectil tipo.	233
Figura 149-Detalle genérico "t" durante el impacto.	235
Figura 150-Se añade al modelo un muelle "K" que representa la deformabilidad en la zona de contacto debido a otros modos vibración distinto al fundamental.....	242
Figura 151-Deformación Δ de la estructura adicional al modo de vibración fundamental.....	243
Figura 152-Fase compresión: el muelle que representa el modo fundamental, a efectos prácticos, no trabaja.....	244
Figura 153-En instante de tiempo las masas igualan sus velocidades como si el impacto fuese de dos masas libres.	244
Figura 154-Una vez que las velocidades son iguales la masa del proyectil pasa a formar parte de la estructura. El modo 1 aumenta su masa.....	245
Figura 155-Ya como una única masa, proyectil y estructura son frenados por el muelle de modo 1.	246
Figura 156-Presentación de los resultados. Identificación de curvas.....	251
Figura 157-Impacto en centro luz en viga metálica biapoyada. Velocidad de impacto 25 m/s. $M_p > M_e$ ($\alpha > 1$).....	252
Figura 158-Cálculo de impactos con Midas NFX con análisis no lineal para diferentes valores de M_p	253
Figura 159-Deformada del modo de vibración con la masa del proyectil añadida en el punto de impacto.	255
Figura 160-Comparación de deformadas del primer modo de vibración incluyendo la masa del proyectil para el caso de $\alpha=10$ y la deformada bajo carga puntual centrada.....	255
Figura 161-Comparación de deformaciones del punto central de la viga para Midas NFX (azul trazo continuo) y para la formulación desarrollada (rojo trazo continuo) para el caso de $\alpha=10$	257
Figura 162- Comparación de deformaciones del punto central de la viga para Midas NFX (azul trazo continuo) y para la formulación desarrollada (rojo trazo continuo) para el caso de $\alpha=5$	259
Figura 163-Comparación de deformaciones del punto central de la viga para Midas NFX (azul trazo continuo) y para la formulación desarrollada (rojo trazo continuo) para el caso de $\alpha=3$	261
Figura 164- Comparación de deformaciones del punto central de la viga para Midas NFX (azul trazo continuo) y para la formulación desarrollada (rojo trazo continuo) para el caso de $\alpha=2$	264
Figura 165- Comparación de deformaciones del punto central de la viga para Midas NFX (azul trazo continuo) y para la formulación desarrollada (rojo trazo continuo) para el caso de $\alpha=1$	266
Figura 166-Casuística de desplazamientos producidos en el centro de la viga tras el impacto en dicho punto de un proyectil de masa α veces M_e	268
Figura 167-Instante genérico "t" para un impacto vertical considerando peso propio.	271
Figura 168-Impacto en centro de luz de viga metálica con consideración de peso propio. Impacto vertical.....	281
Figura 169-Modelo de elementos finitos en Midas NFX para el estudio de impactos considerando el peso propio.....	282
Figura 170-Comparativa de deformadas entre Midas NFX y la formulación desarrollada para $\alpha=5$ y $V_p(0)=1.4$ m/s considerando el efecto del peso propio.....	285
Figura 171- Comparativa de deformadas entre Midas NFX y la formulación desarrollada para $\alpha=3$ y $V_p(0)=0.14$ m/s considerando el efecto del peso propio.....	288



Figura 172- Comparativa de deformadas entre Midas NFX y la formulación desarrollada para $\alpha=3$ y $V_p(o)=1.4$ m/s considerando el efecto del peso propio.....	291
Figura 173- Comparativa de deformadas entre Midas NFX y la formulación desarrollada para $\alpha=3$ y $V_p(o)=5$ m/s considerando el efecto del peso propio.....	294
Figura 174- Comparativa de deformadas entre Midas NFX y la formulación desarrollada para $\alpha=3$ y $V_p(o)=5$ m/s considerando el efecto del peso propio.....	297
Figura 175- Comparativa de deformadas entre Midas NFX y la formulación desarrollada para $\alpha=3$ y en función del coeficiente de peso propio C_{pp}	298
Figura 176-Análisis energético realizado para los casos de impactos estudiados.....	303
Figura 177-Esquema de viga biapoyada para comparar modos sin y con masa del proyectil en el centro de luz.....	310
Figura 178-Modo 1 de viga simplemente apoyada sin considerar (imagen superior) y considerando (imagen inferior) la masa del proyectil con $\alpha=10$ en el centro de la viga.....	310
Figura 179- Modo 3 de viga simplemente apoyada sin considerar (imagen superior) y considerando (imagen inferior) la masa del proyectil con $\alpha=10$ en el centro de la viga.....	311
Figura 180-Impacto en centro de luz de viga metálica para valores de M_p cualquiera.....	313
Figura 181-Modo de vibración 2 de la viga biapoyada.....	316
Figura 182-Modo de vibración 3 de la viga.....	317
Figura 183-Modo de vibración 4 de flexión de la viga.....	319
Figura 184-Comparativa de desplazamientos del centro de la viga entre Midas NFX, y formulación teniendo en cuenta el modo 1, y teniendo en cuenta la suma de modos 1,2 y 3. ($\alpha=5$).....	321
Figura 185- Modo de vibración 5 de flexión de la viga.....	322
Figura 186- Comparativa de desplazamientos del centro de la viga entre Midas NFX, y formulación teniendo en cuenta el modo 1, y teniendo en cuenta la suma de modos del 1 al 5. ($\alpha=1$).....	329
Figura 187- Comparativa de desplazamientos del centro de la viga entre Midas NFX, y formulación teniendo en cuenta el modo 1, y teniendo en cuenta la suma de modos del 1 al 5. ($\alpha=0.5$).....	331
Figura 188- Comparativa de desplazamientos del centro de la viga entre Midas NFX, y formulación teniendo en cuenta el modo 1, y teniendo en cuenta la suma de modos del 1 al 5. ($\alpha=0.25$).....	333
Figura 189- Comparativa de desplazamientos del centro de la viga entre Midas NFX, y formulación teniendo en cuenta el modo 1, y teniendo en cuenta la suma de modos del 1 al 5. ($\alpha=0.1$).....	336
Figura 190-Resultados la formulación generalizada en función del parámetro α	337
Figura 191-Representación gráfica de los resultados energéticos de los casos de impactos analizados en el apartado 4.2.6.....	338
Figura 192-Esquema de impacto en el punto central del vano izquierdo en viga continua de dos vanos.....	341
Figura 193-Modelo de elementos finitos de Midas NFX para el análisis de impactos en viga de dos vanos.....	341
Figura 194-Modo de vibración fundamental de la viga de dos vanos. $T=0.0213$ seg.....	343
Figura 195-Modo de vibración fundamental de la viga de dos vanos con la masa del proyectil añadida en el punto de contacto. $T=0.0451$ seg.....	344
Figura 196-Comparativa de desplazamientos en centro de vano en viga de dos vanos entre Midas NFX y la formulación de desarrollada en función de $C_k M_p$. Caso $\alpha=5$ $V_p=3$ m/s.....	347



Figura 197- Comparativa de desplazamientos en centro de vano en viga de dos vanos entre Midas NFX y la formulación de desarrollada en función de Ck Mp . Caso $\alpha=5$ $V_p=6$ m/s.	350
Figura 198- Comparativa de desplazamientos en centro de vano en viga de dos vanos entre Midas NFX y la formulación de desarrollada en función de Ck Mp . Caso $\alpha=5$ $V_p=1$ m/s.	353
Figura 199- Comparativa de desplazamientos en centro de vano en viga de dos vanos entre Midas NFX y la formulación de desarrollada en función de Ck Mp . Caso $\alpha=5$ $V_p=1$ m/s, $V_p=3$ m/s y $V_p=6$ m/s.	354
Figura 200- Esquema de impacto en el punto central del central en viga continua de tres vanos.	355
Figura 201- Modelo de elementos finitos de Midas NFX para el análisis de impactos en viga de tres vanos.	356
Figura 202- Modo de vibración fundamental de la viga de tres vanos con la masa del proyectil añadida en el punto de contacto. $T=0.222$ seg.	358
Figura 203- Comparativa de desplazamientos en centro de vano en viga de tres vanos entre Midas NFX y la formulación desarrollada en función de Ck Mp . Caso $\alpha=3$ $V_p=0.5$ m/s	360
Figura 204- Modo de vibración fundamental de la viga de tres vanos con la masa del proyectil añadida en el punto de contacto. $T=0.287$ seg.	361
Figura 205- Comparativa de desplazamientos en centro de vano en viga de tres vanos entre Midas NFX y la formulación desarrollada en función de Ck Mp . Caso $\alpha=3$ $V_p=0.5$ m/s	364
Figura 206- Modo de vibración fundamental de la viga de tres vanos con la masa del proyectil añadida en el punto de contacto. $T=0.169$ seg.	365
Figura 207- Comparativa de desplazamientos en centro de vano en viga de tres vanos entre Midas NFX y la formulación desarrollada en función de Ck Mp . Caso $\alpha=1$ $V_p=0.5$ m/s.	368
Figura 208- Comparativa de desplazamientos en centro de vano central en viga de tres vanos entre Midas NFX y la formulación de desarrollada en función de Ck Mp . Casos $\alpha=1$ $\alpha=3$ y $\alpha=6$ s con $V_p=0.5$ m/s.	369
Figura 209-Caso de impacto central en placa de hormigón apoyada en las 4 esquinas.	371
Figura 210-Modelo de elementos finitos en Midas Civil para el análisis modal de la placa.	371
Figura 211-Modo de vibración fundamental de la placa incluyendo la masa del proyectil en el punto central de la placa de valor 74988 Kg. $T=2.195$ seg.	372
Figura 212-Comparativa de deformadas de carga puntual, modo 1 sin incluir masa del proyectil (natural) y modo 1 incluyendo la masa del proyectil.	373
Figura 213-Vista frontal (arriba) y perspectiva (abajo) del modelo de placa realizado en MIDAS NFX.	374
Figura 214-Análisis de impacto central en placa mediante Midas NFX.	375
Figura 215- Comparativa de desplazamientos en centro de la placa entre Midas NFX y la formulación desarrollada. Caso $\alpha=6$ $V_p=0.5$ m/s.	377
Figura 216- Comparativa de desplazamientos en centro de la placa entre Midas NFX y la formulación desarrollada. Caso $\alpha=4$ $V_p=0.5$ m/s.	379
Figura 217- Comparativa de desplazamientos en centro de la placa entre Midas NFX y la formulación desarrollada. Caso $\alpha=2$ $V_p=0.5$ m/s.	381
Figura 218- Comparativa de desplazamientos en centro de la placa entre Midas NFX y la formulación desarrollada. Casos $\alpha=2$ $\alpha=4$ y $\alpha=6$ s con $V_p=0.5$ m/s.	382
Figura 219- Caso de impacto axial en ménsula metálica.	383
Figura 220-Modelo en Midas NFX para el estudio de impacto en la ménsula "A".	384
Figura 221- Modelo en Midas NFX para el estudio de impacto en la ménsula "B".	385



Figura 222- Comparativa de deformadas de carga puntual, modo 1 sin masa del proyectil (natural) y modo 1 incluyendo la masa del proyectil.....	387
Figura 223- Comparativa de desplazamientos en el extremo de la ménsula entre Midas NFX y la formulación desarrollada. Caso $\alpha=10$ $V_p=3$ m/s.....	389
Figura 224- Comparativa de desplazamientos en el extremo de la ménsula entre Midas NFX y la formulación desarrollada. Caso $\alpha=10$ $V_p=5$ m/s.....	393
Figura 225- Comparativa de desplazamientos en el extremo de la ménsula entre Midas NFX y la formulación desarrollada. Caso $\alpha=2$ $V_p=5$ m/s.....	395
Figura 226- Comparativa de desplazamientos en el extremo de la ménsula entre Midas NFX y la formulación desarrollada. Caso $\alpha=1$ $V_p=5$ m/s.....	397
Figura 227- Comparativa de desplazamientos en el extremo de la ménsula entre Midas NFX y la formulación desarrollada. Caso $\alpha=0.5$ $V_p=5$ m/s.....	399
Figura 228- Comparativa de desplazamientos en el extremo de la ménsula entre Midas NFX y la formulación desarrollada. Casos $\alpha=0.5$ $\alpha=1$ $\alpha=2$ y $\alpha=10$ con $V_p=5$ m/s.....	400
Figura 229-Análisis de fuerza de contacto en modelo de muelle y masa.....	402
Figura 230-Estudio de fuerza de contacto en extremo libre de la ménsula.....	403
Figura 231-Zona de análisis de las tensiones normales para la obtención de la fuerza de contacto.....	403
Figura 232- Comparativa de fuerzas de contacto en el extremo de la ménsula entre Midas NFX y la formulación desarrollada considerando un modo. Caso $\alpha=10$ $V_p=5$ m/s.....	406
Figura 233- Comparativa de fuerzas de contacto en el extremo de la ménsula entre Midas NFX y la formulación desarrollada considerando dos modos. Caso $\alpha=10$ $V_p=5$ m/s.....	407
Figura 234- Comparativa de fuerzas de contacto en el extremo de la ménsula entre Midas NFX y la formulación desarrollada considerando 3 modos. Caso $\alpha=10$ $V_p=5$ m/s.....	408
Figura 235- Comparativa de fuerzas de contacto en el extremo de la ménsula entre Midas NFX y la formulación desarrollada considerando un modo. Caso $\alpha=2$ $V_p=5$ m/s.....	410
Figura 236- Comparativa de fuerzas de contacto en el extremo de la ménsula entre Midas NFX y la formulación desarrollada considerando dos modos. Caso $\alpha=2$ $V_p=5$ m/s.....	412
Figura 237- Comparativa de fuerzas de contacto en el extremo de la ménsula entre Midas NFX y la formulación desarrollada considerando tres modos. Caso $\alpha=2$ $V_p=5$ m/s.....	413
Figura 238- Comparativa de fuerzas de contacto en el extremo de la ménsula entre Midas NFX y la formulación desarrollada considerando 1 modo. Caso $\alpha=1$ $V_p=5$ m/s.....	415
Figura 239- Comparativa de fuerzas de contacto en el extremo de la ménsula entre Midas NFX y la formulación desarrollada considerando tres modos. Caso $\alpha=1$ $V_p=5$ m/s.....	416
Figura 240- Comparativa de fuerzas de contacto en el extremo de la ménsula entre Midas NFX y la formulación desarrollada considerando un modo. Caso $\alpha=0.5$ $V_p=5$ m/s.....	419
Figura 241- Comparativa de fuerzas de contacto en el extremo de la ménsula entre Midas NFX y la formulación desarrollada considerando tres modos. Caso $\alpha=0.5$ $V_p=5$ m/s.....	420
Figura 242- Comparativa de fuerzas de contacto en el extremo de la ménsula entre Midas NFX y la formulación desarrollada considerando 3 modos. Caso $\alpha=0.5$ $V_p=5$ m/s.....	422
Figura 243- Comparativa de desplazamientos en el extremo de la ménsula entre Midas NFX y la formulación desarrollada. Caso $\alpha=10$ $V_p=0.31$ m/s.....	425
Figura 244- Comparativa de fuerzas de contacto en el extremo de la ménsula entre Midas NFX y la formulación desarrollada considerando tres modos. Caso $\alpha=10$ $V_p=0.31$ m/s.....	427
Figura 245- Caso de impacto excéntrico en viga metálica biapoyada.....	429
Figura 246- Modelo de elementos finitos con Midas NFX para el estudio de impacto excéntrico. Alzado.....	430



Figura 247- Modelo de elementos finitos con Midas NFX para el estudio de impacto excéntrico. Perspectiva.	431
Figura 248-Representación gráfica de la línea de influencia y el campo de aceleraciones para el modo 1.	432
Figura 249- Representación gráfica de la línea de influencia y el campo de aceleraciones para el modo 2.	434
Figura 250- Representación gráfica de la línea de influencia y el campo de aceleraciones para el modo 3.	435
Figura 251- Representación gráfica de la línea de influencia y el campo de desplazamientos para el modo 1.	438
Figura 252- Representación gráfica de la línea de influencia y el campo de desplazamientos para el modo 2.	439
Figura 253- Representación gráfica de la línea de influencia y el campo de desplazamientos para el modo 3.	441
Figura 254-Representación gráfica del parámetro $X(p)$ para impacto en $L/6$ y los tres primeros modos de flexión de la viga.....	443
Figura 255- Comparativa de desplazamientos en punto de contacto entre Midas NFX y la formulación desarrollada. Caso $\alpha=10$ $V_p=0.5$ m/s.....	445
Figura 256- Comparativa de desplazamientos en punto de contacto entre Midas NFX y la formulación desarrollada. Caso $\alpha=10$ $V_p=0.5$ m/s.....	447
Figura 257- Comparativa de desplazamientos en impacto excéntrico de viga entre Midas NFX y la formulación desarrollada. Casos $\alpha=10$ y $\alpha=0.31$ con $V_p=0.5$ m/s.....	448
Figura 258-Esquema de ensayos realizados en el Laboratorio de estructuras de la Universidad de Cantabria.	450
Figura 259-Sección de las vigas metálicas ensayadas.	451
Figura 260-Ensayo sobre viga “flexible”.....	452
Figura 261-Ensayo sobre viga “rígida”.	452
Figura 262-Esquema de conexión de medio puente de Wheatstone.....	454
Figura 263-Cadena completa de equipo de medida.	455
Figura 264-Equipo de adquisición de datos PXI.	455
Figura 265-Fuente de alimentación.	456
Figura 266-Sistema de alimentación ininterrumpida.....	456
Figura 267-Extensómetro bidireccional de 120Ω	457
Figura 268-Transductor de desplazamiento para calibración.....	457
Figura 269-Registro desplazamiento-tiempo del centro de viga. Ensayo 1: $\alpha=7.2$ $V=0$ m/s.	460
Figura 270- Registro desplazamiento-tiempo del centro de viga. Ensayo 2: $\alpha=7.2$ $V=0.66$ m/s.	462
Figura 271- Registro desplazamiento-tiempo del centro de viga. Ensayo 3: $\alpha=7.2$ $V=1.37$ m/s.	465
Figura 272- Registro desplazamiento-tiempo del centro de viga. Ensayos 1,2 y 3.....	466
Figura 273- Registro desplazamiento-tiempo del centro de viga. Ensayo 4: $\alpha=9.9$ $V=0.17$ m/s.	468
Figura 274- Registro desplazamiento-tiempo del centro de viga. Ensayo 5: $\alpha=9.9$ $V=0.67$ m/s.	471
Figura 275- Registro desplazamiento-tiempo del centro de viga. Ensayos 4 y 5.....	472
Figura 276- Registro desplazamiento-tiempo del centro de viga. Ensayo 6: $\alpha=2.5$ $V=0.17$ m/s	474



Figura 277- Registro desplazamiento-tiempo del centro de viga. Ensayo 7: $\alpha=2.5$ $V=0.67$ m/s	477
Figura 278- Registro desplazamiento-tiempo del centro de viga. Ensayos 6 y 7.....	478
Figura 279- Registro desplazamiento-tiempo del centro de viga. Ensayo 8: $\alpha=3.5$ $V=0.43$ m/s	480
Figura 280- Registro desplazamiento-tiempo del centro de viga. Ensayo 9: $\alpha=3.5$ $V=0.85$ m/s	482
Figura 281- Registro desplazamiento-tiempo del centro de viga. Ensayo 9: $\alpha=3.5$ $V=1.47$ m/s	484
Figura 282- Registro desplazamiento-tiempo del centro de viga. Ensayos 8,9 y 10.....	486
Figura 283-Comparativa de desplazamientos en los ensayos 5 y 7. $H=0.023$ m; $M_p=3.5$ Kg... ..	487
Figura 284-Mecanismo diseñado por Schwieger para la realización del ensayo de impacto. .	489
Figura 285-Fuerza de contacto para el ensayo 1. $\alpha=0.21$ y $V=0.5$ m/s.	492
Figura 286- Fuerza de contacto para el ensayo 1. $\alpha=0.21$ y $V=0.5$ m/s.	494
Figura 287- Fuerza de contacto para el ensayo 3. $\alpha=0.21$ y $V=1.5$ m/s.	496
Figura 288- Comparativa gráfica de los valores de fuerza de contacto según el ensayo de Schwieger y según la formulación desarrollada.....	497



- Desarrollo de teoría sobre impactos -
- Método simplificado de cálculo de impactos en estructuras -





ÍNDICE DE TABLAS

Tabla 1-Tipos de impactos de baja velocidad.	69
Tabla 2-Impacto central en viga biapoyada. Caso $\alpha=5$ para formulación generalizada. Datos de partida.	314
Tabla 3-Resultados por modo sobre impacto central de $\alpha=5$ $V_p=2\text{m/s}$ en viga biapoyada de 10 m.	320
Tabla 4- Impacto central en viga biapoyada. Caso $\alpha=1$ para formulación generalizada. Datos de partida.	322
Tabla 5- Resultados por modos sobre impacto central de $\alpha=1$ $V_p=2\text{m/s}$ en viga biapoyada de 10 m.	328
Tabla 6- Impacto central en viga biapoyada. Caso $\alpha=0.5$ para formulación generalizada. Datos de partida.	330
Tabla 7-Resultados por modos sobre impacto central de $\alpha=0.5$ $V_p=2\text{m/s}$ en viga biapoyada de 10 m.....	330
Tabla 8- Impacto central en viga biapoyada. Caso $\alpha=0.25$ para la formulación generalizada. Datos de partida.	332
Tabla 9- Resultados por modos sobre impacto central de $\alpha=0.25$ $V_p=2\text{m/s}$ en viga biapoyada de 10 m.....	332
Tabla 10- Impacto central en viga biapoyada. Caso $\alpha=0.1$ para la formulación generalizada. Datos de partida.	334
Tabla 11- Resultados por modos sobre impacto central de $\alpha=0.1$ $V_p=2\text{m/s}$ en viga biapoyada de 10 m.....	335
Tabla 12-Resultados energéticos de los casos de impactos analizados en el apartado 4.2.6. .	338
Tabla 13- Impacto en viga de dos vanos. Caso $\alpha=5$ $V_p=3\text{m/s}$. Datos de partida	342
Tabla 14-Parámetros resultantes para viga de dos vanos para los valores $C_k M_p = 1$; $C_k M_p = 1.462$; $C_k M_p = 2$. Caso $\alpha=5$ $V_p=3\text{m/s}$	346
Tabla 15- Impacto en viga de dos vanos. Caso $\alpha=5$ $V_p=6\text{m/s}$. Datos de partida	348
Tabla 16- Parámetros resultantes para viga de dos vanos para los valores $C_k M_p = 1$; $C_k M_p = 1.462$; $C_k M_p = 2$. Caso $\alpha=5$ $V_p=6\text{m/s}$	349
Tabla 17- Impacto en viga de dos vanos. Caso $\alpha=5$ $V_p=1\text{m/s}$. Datos de partida	351
Tabla 18- Parámetros resultantes para viga de dos vanos para los valores $C_k M_p = 1$; $C_k M_p = 1.462$; $C_k M_p = 2$. Caso $\alpha=5$ $V_p=1\text{m/s}$	352
Tabla 19- Impacto en viga de tres vanos. Caso $\alpha=3$ $V_p=0.5\text{m/s}$. Datos de partida	356
Tabla 20- Parámetros resultantes para viga de tres vanos para los valores $C_k M_p = 1$; $C_k M_p = 2.1$; $C_k M_p = 3$. Caso $\alpha=3$ $V_p=0.5\text{m/s}$	359
Tabla 21- Impacto en viga de tres vanos. Caso $\alpha=6$ $V_p=0.5\text{m/s}$. Datos de partida.....	361
Tabla 22- Parámetros resultantes para viga de tres vanos para los valores $C_k M_p = 1$; $C_k M_p = 1.98$; $C_k M_p = 3$. Caso $\alpha=6$ $V_p=0.5\text{m/s}$	363
Tabla 23- Impacto en viga de tres vanos. Caso $\alpha=1$ $V_p=0.5\text{m/s}$. Datos de partida.....	365
Tabla 24- Parámetros resultantes para viga de tres vanos para los valores $C_k M_p = 1$; $C_k M_p = 2.42$; $C_k M_p = 3$. Caso $\alpha=1$ $V_p=0.5\text{m/s}$	367
Tabla 25- Impacto central en placa. Caso $\alpha=6$ $V_p=0.5\text{m/s}$. Datos de partida.....	375
Tabla 26- Parámetros resultantes para placa Caso $\alpha=6$ $V_p=0.5\text{m/s}$	376
Tabla 27- Impacto central en placa. Caso $\alpha=4$ $V_p=0.5\text{m/s}$. Datos de partida.....	378
Tabla 28- Parámetros resultantes para placa Caso $\alpha=4$ $V_p=0.5\text{m/s}$	378
Tabla 29- Impacto central en placa. Caso $\alpha=4$ $V_p=0.5\text{m/s}$. Datos de partida.....	380
Tabla 30- Parámetros resultantes para placa Caso $\alpha=2$ $V_p=0.5\text{m/s}$	380



Tabla 31- Impacto en extremo de ménsula A. Caso $\alpha=10$ y $V_p=3$ m/s. Datos de partida.	385
Tabla 32- Parámetros resultantes para ménsula A Caso $\alpha=10$ $V_p=3$ m/s.....	388
Tabla 33- Impacto en extremo de ménsula B. Caso $\alpha=10$ y $V_p=5$ m/s. Datos de partida.....	391
Tabla 34- Parámetros resultantes para ménsula B Caso $\alpha=10$ $V_p=5$ m/s.....	392
Tabla 35- Impacto en extremo de ménsula B. Caso $\alpha=2$ y $V_p=5$ m/s. Datos de partida.....	393
Tabla 36- Parámetros resultantes para ménsula B Caso $\alpha=2$ y $V_p=5$ m/s.	394
Tabla 37- Impacto en extremo de ménsula B. Caso $\alpha=1$ y $V_p=5$ m/s. Datos de partida.....	395
Tabla 38- Parámetros resultantes para ménsula B Caso $\alpha=1$ y $V_p=5$ m/s.	396
Tabla 39- Impacto en extremo de ménsula B. Caso $\alpha=0.5$ y $V_p=5$ m/s. Datos de partida.	397
Tabla 40- Parámetros resultantes para ménsula B Caso $\alpha=0.5$ y $V_p=5$ m/s.	398
Tabla 41- Estudio de Fuerza de contacto. Caso $\alpha=10$ y $V_p=5$ m/s. Datos de partida.	404
Tabla 42- Estudio de Fuerza de contacto. Caso $\alpha=10$ y $V_p=5$ m/s. Parámetros resultantes. ...	405
Tabla 43- Estudio de Fuerza de contacto. Caso $\alpha=2$ y $V_p=5$ m/s. Datos de partida.	409
Tabla 44- Estudio de Fuerza de contacto. Caso $\alpha=2$ y $V_p=5$ m/s. Parámetros resultantes.	409
Tabla 45- Estudio de Fuerza de contacto. Caso $\alpha=1$ y $V_p=5$ m/s. Datos de partida.	414
Tabla 46- Estudio de Fuerza de contacto. Caso $\alpha=2$ y $V_p=5$ m/s. Parámetros resultantes.	414
Tabla 47- Estudio de Fuerza de contacto. Caso $\alpha=0.5$ y $V_p=5$ m/s. Datos de partida.	417
Tabla 48- Estudio de Fuerza de contacto. Caso $\alpha=0.5$ y $V_p=5$ m/s. Parámetros resultantes. ..	418
Tabla 49- Estudio de Fuerza de contacto. Caso $\alpha=0.5$ y $V_p=5$ m/s. Parámetros resultantes modos 4-6.	421
Tabla 50- Estudio de Fuerza de contacto. Caso $\alpha=10$ y $V_p=0.31$ m/s. Datos de partida	424
Tabla 51- Estudio de Fuerza de contacto. Caso $\alpha=10$ y $V_p=31$ m/s. Parámetros resultantes. .	424
Tabla 52- Valores de línea de influencia y fuerzas de inercia condensadas para el modo de vibración 1.....	432
Tabla 53- Masa equivalente del modo 1 en el punto de contacto.	433
Tabla 54- Valores de línea de influencia y fuerzas de inercia condensadas para el modo de vibración 2.....	433
Tabla 55- Masa equivalente del modo 2 en el punto de contacto.	434
Tabla 56- Valores de línea de influencia y fuerzas de inercia condensadas para el modo de vibración 3.....	435
Tabla 57- Masa equivalente del modo 3 en el punto de contacto.	436
Tabla 58- Comparativa de masas equivalentes en viga para impacto excéntrico en $L/6$ y para impacto central.	436
Tabla 59- Valores de línea de influencia y fuerzas elásticas condensadas para el modo de vibración 1.....	437
Tabla 60- Rigidez del modo 1 en el punto de contacto.....	438
Tabla 61- Valores de línea de influencia y fuerzas elásticas condensadas para el modo de vibración 2.....	439
Tabla 62- Rigidez del modo 2 en el punto de contacto.....	440
Tabla 63- Valores de línea de influencia y fuerzas elásticas condensadas para el modo de vibración 3.....	440
Tabla 64- Rigidez del modo 1 en el punto de contacto.....	441
Tabla 65- Comparativa de rigideces para el punto de contacto en impacto excéntrico ($L/6$) y para impacto central.	441
Tabla 66- Impacto excéntrico. Caso $\alpha=10$ y $V_p=0.5$ m/s. Datos de partida.	442
Tabla 67- Impacto excéntrico. Caso $\alpha=10$ y $V_p=0.5$ m/s. Parámetros resultantes.	444
Tabla 68- Impacto excéntrico. Caso $\alpha=0.31$ y $V_p=0.5$ m/s. Datos de partida.	445



Tabla 69- Impacto excéntrico. Caso $\alpha=10$ y $V_p=0.5$ m/s. Parámetros resultantes.....	446
Tabla 70-Casística de ensayos realizados.....	451
Tabla 71-Ensayo 1: $\alpha=7.2$ $V=0$ m/s. Datos de partida	458
Tabla 72- Parámetros resultantes para ensayo 1 Caso $\alpha=7.2$ $V_p=0.0$ m/s.....	459
Tabla 73- Ensayo 2: $\alpha=7.2$ $V=0.66$ m/s. Datos de partida	461
Tabla 74- Parámetros resultantes para ensayo 2 Caso $\alpha=7.2$ $V_p=0.66$ m/s.	461
Tabla 75- Ensayo 3: $\alpha=7.2$ $V=1.37$ m/s. Datos de partida	463
Tabla 76- Parámetros resultantes para ensayo 3 Caso $\alpha=7.2$ $V_p=1.37$ m/s.	464
Tabla 77- Ensayo 4: $\alpha=9.9$ $V=0.17$ m/s. Datos de partida	467
Tabla 78- Parámetros resultantes para ensayo 4 Caso $\alpha=9.9$ $V_p=0.17$ m/s.	467
Tabla 79- Ensayo 4: $\alpha=9.9$ $V=0.67$ m/s. Datos de partida	469
Tabla 80- Parámetros resultantes para ensayo 5 Caso $\alpha=9.9$ $V_p=0.67$ m/s.	470
Tabla 81- Ensayo 6: $\alpha=2.5$ $V=0.17$ m/s. Datos de partida	473
Tabla 82- Parámetros resultantes para ensayo 6 Caso $\alpha=2.5$ $V_p=0.17$ m/s	473
Tabla 83- Ensayo 7: $\alpha=2.5$ $V=0.67$ m/s. Datos de partida	475
Tabla 84- Parámetros resultantes para ensayo 7 Caso $\alpha=2.5$ $V_p=0.17$ m/s	476
Tabla 85- $\alpha=3.5$ $V=0.43$ m/s. Datos de partida	479
Tabla 86- Parámetros resultantes para ensayo 8 Caso $\alpha=3.5$ $V_p=0.43$ m/s	479
Tabla 87- $\alpha=3.5$ $V=0.85$ m/s. Datos de partida	481
Tabla 88- Parámetros resultantes para ensayo 9 Caso $\alpha=3.5$ $V_p=0.85$ m/s	481
Tabla 89- $\alpha=3.5$ $V=1.47$ m/s. Datos de partida	483
Tabla 90- Parámetros resultantes para ensayo 10 Caso $\alpha=3.5$ $V_p=1.47$ m/s	483
Tabla 91-Ensayo 1 Schwieger. Caso $\alpha=0.21$ y $V=0.5$ m/s. Datos de partida.	491
Tabla 92- Parámetros resultantes para ensayo 1 Schwieger. Modos 1,3 y 5. Caso $\alpha=0.21$ $V_p=0.5$ m/s.....	491
Tabla 93- Parámetros resultantes para ensayo 1 Schwieger. Modos 7,9,11 y 13. Caso $\alpha=0.21$ $V_p=0.5$ m/s.....	492
Tabla 94- Ensayo 2 Schwieger. Caso $\alpha=0.21$ y $V=1.0$ m/s. Datos de partida.	493
Tabla 95- Parámetros resultantes para ensayo 2 Schwieger. Modos 1,3 y 5. Caso $\alpha=0.21$ $V_p=1.0$ m/s.....	493
Tabla 96- Parámetros resultantes para ensayo 2 Schwieger. Modos 7,9,11 y 13. Caso $\alpha=0.21$ $V_p=1.0$ m/s.....	494
Tabla 97- Ensayo 3 Schwieger. Caso $\alpha=0.21$ y $V=1.5$ m/s. Datos de partida.	495
Tabla 98- Parámetros resultantes para ensayo 3 Schwieger. Modos 1,3 y 5. Caso $\alpha=0.21$ $V_p=1.5$ m/s.....	495
Tabla 99- Parámetros resultantes para ensayo 3 Schwieger. Modos 7,9,11 y 13. Caso $\alpha=0.21$ $V_p=1.5$ m/s.....	496
Tabla 100-Comparativa numérica de los valores de fuerza de contacto según el ensayo de Schwieger y según la formulación desarrollada.....	497



- Desarrollo de teoría sobre impactos -
- Método simplificado de cálculo de impactos en estructuras -





Lista de símbolos para el estado del arte:

a	Distancia hasta la que aparecen presiones de contacto desde el punto central de la zona de contacto entre cuerpos
a	Radio de curvatura de la superficie local de contacto
A	Área de la sección transversal
b	Desplazamiento normal según <i>Boussinesq</i>
c	Coefficiente de fuerza en amortiguador viscoso
C	Velocidad relativa de compresión
C_o	Velocidad de la onda axial
e	Coefficiente de restitución obtenido a partir de velocidades
e^*	Coefficiente de restitución obtenido a partir de energía
E	Módulo de elasticidad
f	Coefficiente de fricción tangencial entre cuerpos
F_n	Fuerza de contacto en un impacto normal al plano del impacto
$F(t)$	Fuerza de contacto en un impacto
G	Centro de gravedad de un cuerpo
h	Altura caída
h_{cr}	Altura caída crítica
$h(x)$	Desplazamiento inicial
I	Momento de inercia de un cuerpo
k	Número de onda
k	Radio de giro
\tilde{k}	Rigidez equivalente de la estructura
K	Rigidez de muelle elástico
M	Momento flector
M	Masa equivalente conjunta de dos cuerpos que impactan
\tilde{M}	Masa equivalente de la estructura
m	Masa de un cuerpo
m	Masa de un cuerpo por unidad de longitud
m_{eff}	Masa eficaz de un cuerpo
L	Longitud de un elemento
l	Distancia del punto de contacto al centro de gravedad
Q	Fuerza generalizada de Lagrange
Q	Punto de contacto entre cuerpos
p	Presión en la zona de contacto
p_o	Presión en el punto central de la zona de contacto
p_o	Presión media de la zona de contacto
ρ	Impulso relativo
P	Cantidad de movimiento o impulso en términos absolutos
P_c	Cantidad de movimiento en la fase de aproximación o fase de compresión
P_n	Componente de cantidad de movimiento en dirección normal al impacto
P_t	Componente de cantidad de movimiento en la dirección tangencial
q_i	Coordenada generalizada de Lagrange
$q_o(t)$	Función que modula en el tiempo la deformada del modo de vibración
r	Distancia al punto de central de la zona de contacto
r	Vector posición
R	Radio de la superficie de contacto entre cuerpos
S	Velocidad relativa de deslizamiento
T	Energía cinética del sistema
T_o	Energía cinética inicial del sistema
T_c	Energía cinética de la fase de compresión o aproximación
t	Variable temporal
t_c	Tiempo en el que finaliza la fase de compresión o aproximación
t_f	Tiempo en el que finaliza la fase de restitución
$u(t)$	Desplazamiento a nivel global de la estructura



v	Velocidad relativa ente cuerpos
v_o	Velocidad relativa inicial ente cuerpos
V	Velocidad genérica de un cuerpo
V	Energía potencial de un sistema
V_o	Velocidad de un cuerpo antes del impacto
V_f	Velocidad de un cuerpo después del impacto
x	Coordenada espacial
x_o	Punto de contacto de la fuerza en la estructura
X_o	Longitud incompresible del muelle
$X(x)$	Modo de vibración de la estructura
y	Coordenada espacial
Y_o	Longitud incompresible del amortiguador
Y_G	Coordenada Y del centro de gravedad
w	Velocidad angular de un cuerpo
$w(x,t)$	Ley de deformación de una estructura para la coordenada x el tiempo t
W	Peso del cuerpo
W	Trabajo
W_n	Trabajo en la dirección normal del impacto
z	Coordenada espacial
α	Relación entre la masa del proyectil y la masa de la estructura
γ	Variable que relaciona la rigidez de la sección con la masa de la misma
τ	Constante relativa de amortiguador viscoelástico
δ	Deformación de partícula elástica en impactos rígidos
$\delta(t)$	Indentación local
$\delta(x)$	Función Delta Dirac
δ_y	Deformación local de plastificación
ϵ_{ijk}	Permutador para formación de un tensor
η	Variable espacial
θ	Ángulo girado con respecto al eje y
Δ	Incremento de una variable
μ_o	Constante de amortiguador viscoelástico
ν	Coefficiente de poisson
ξ	Variable espacial
ξ	Amortiguamiento relativo
ρ	Densidad
σ_I	Tensión de la onda incidente
σ_R	Tensión de la onda reflejada
τ	Duración del impacto
ϕ	Angulo de fase
Ω	Frecuencia de la fuerza de contacto.
w_o	Frecuencia natural de vibración
w_d	Frecuencia natural amortiguada de vibración



Lista de símbolos para la formulación desarrollada:

A	Área de la sección
b	Ancho de viga
$C_k(M_p)$	Coficiente de rigidez función de la masa del proyectil
$C_k(P)$	Coficiente de rigidez función de la fuerza P
$C_{k,n}(P)$	Coficiente de rigidez función de la fuerza P para el modo n
C_m	Tanto por uno de la masa del proyectil frente a la masa conjunta de masa del proyectil y masa equivalente del modo fundamental de la estructura
$C_{m,n}$	Tanto por uno de la masa del proyectil frente a la masa conjunta de masa del proyectil y masa equivalente del modo n de la estructura
C_{pp}	Coficiente de influencia de peso propio
$C.M.$	Cantidad de movimiento
$d_e(t)$	Desplazamiento de la estructura durante el impacto para el modo fundamental
$d_{e,n}(t)$	Desplazamiento de la estructura durante el impacto del modo n
$d_{e,pp}(t)$	Desplazamiento de la estructura durante el impacto debido a la acción del peso propio del proyectil
$d_p(t)$	Desplazamiento del proyectil durante el impacto
$d_{e,Total}(t)$	Desplazamiento de la estructura durante el impacto considerando n modos
$d_{e,Vp}(t)$	Desplazamiento de la estructura durante el impacto debido al término cinético
E	Módulo de elasticidad
$E_{A,n}$	Energía analizada hasta el modo n
$E_{c,n}$	Energía cinética absorbida por el modo n en la fase de aproximación
$E_{D,n}$	Energía disponible para cada modo
$E_{F,n}$	Energía absorbida por el modo n debida a la fuerza de contacto $F(t)$ en la fase de restitución
E_o	Energía cinética del proyectil previa al impacto
E_n	Energía total absorbida por el modo n
f	Flecha máxima en una estructura bajo la acción de una fuerza exterior.
F	Fuerza estática exterior
$F(t)$	Fuerza de contacto entre las masas que impactan.
F_{eq}	Resultante de fuerzas condensadas en un punto.
$F_n(t)$	Componente de la fuerza de contacto entre las masas que impactan correspondiente al modo n
$F_{pp}(t)$	Término gravitatorio de la fuerza de contacto.
F_{TOTAL}	Resultante de fuerzas que actúan en una estructura.
$F_{Vp}(t)$	Término cinético de la fuerza de contacto.
h	Canto de viga.
I	Inercia de la sección.
K	Rigidez genérica en un punto.
K_e	Rigidez en el punto de contacto para el modo de vibración fundamental.
K_{eq}	Rigidez equivalente.
$K_{eq,n}$	Rigidez equivalente del modo n .
K_n	Rigidez en el punto de contacto para el modo de vibración n
$K_{PROYECTIL}$	Rigidez axial del proyectil
L	Longitud de viga
$L_{ef,n}$	Longitud de efectiva del modo de vibración
$LdI(x)$	Valor de la línea de influencia en la coordenada espacial x
$m(x)$	Masa en la coordenada espacial x
M_e	Masa equivalente de la estructura para el modo de vibración fundamental
M_{eq}	Masa equivalente de una estructura
$M_{e,n}$	Masa equivalente de la estructura para el modo de vibración n
M_p	Masa del proyectil que impacta en la estructura
$M_{p,eq}$	Masa de proyectil condensada en el punto de estudio
M_{TOTAL}	Masa total de una estructura



$n(x)$	Axil por unidad de longitud
$N(t)$	Axil producido en función de la variable temporal t
P	Fuerza puntual
p	Punto de impacto entre en proyectil y estructura
$q(x, t)$	Fuerza exterior por metro lineal
q_{eq}	Fuerza condesada en un punto
R	Resultante de fuerzas
T	Periodo de vibración natural.
T_{ep}	Periodo de vibración de la estructura durante el impacto.
t	Variable temporal
t_f	Tiempo en el que el proyectil se detiene.
t_{fi}	Tiempo en el que se finaliza la fase de compresión o aproximación
$U(x)$	Componente espacial de la deformada dinámica de una estructura.
V_I	Velocidad inicial de proyectil y estructura en el inicio de la fase de restitución para el modo fundamental
$V_e(t)$	Velocidad de la estructura durante el impacto
$V_{I,n}$	Velocidad inicial de proyectil y estructura en el inicio de la fase de restitución para el modo n
$V_p(t)$	Velocidad del proyectil durante el impacto
$V_{p,o}$	Velocidad inicial del proyectil previa al impacto
$V_{p,n}$	Velocidad inicial del proyectil del modo n previa al impacto con el modo n
$w(x, t)$	Desplazamiento de punto cualquier de una estructura
W_{ext}	Trabajo realizado por la fuerza $F(t)$
x	Coordenada espacial en una estructura
$X(p)$	Coefficiente de ponderación de M_p en función del punto de contacto p
y	Variable de integración
$Z(t)$	Componente temporal de la deformada dinámica de una estructura
α	Cociente entre la masa del proyectil y la masa equivalente del modo fundamental de vibración de la estructura.
α_n	Cociente entre la masa del proyectil y la masa equivalente del modo n de vibración de la estructura.
ε	Deformación
Δ	Incremento de una variable
ρ	Densidad del material
Ω	Frecuencia de excitación de una acción externa
w_e	Frecuencia de vibración angular natural de la estructura para el modo fundamental
$w_{e,n}$	Frecuencia de vibración angular natural de la estructura para el modo n
w_{ep}	Frecuencia de vibración angular de la estructura durante el impacto para el modo fundamental de vibración
$w_{ep,n}$	Frecuencia de vibración angular de la estructura durante el impacto para el modo n de vibración



1 ABSTRACT / RESUMEN DE TESIS

A continuación se expone, primero en inglés (apartados 1.1 al 1.4) y después en español (apartados 1.5 al 1.8), un breve resumen del contenido y de los principales apartados que componen esta tesis. En este punto se describe el hilo conductor del documento, así como la explicación del desarrollo establecido en el mismo.

A brief abstract, first in English (section from 1.1 to 1.4) and then in Spanish (section from 1.5 to 1.8), is given hereunder of the contents and main sections that comprise this thesis. This section outlines the guiding structure of the paper, as well as an explanation of how it has been undertaken.

1.1 INTRODUCTION

At present, calculating impact on structures is a difficult task to tackle. The reason for such difficulty lies in the absence of a global theory on impacts. The theories that have been developed up to now have two main drawbacks:

- They are specific theories for a certain type of structure (beam theory, floor plate theory, etc.)
- Mathematically, these theorems are so complex that their effective use in practical terms is impeded.

The outcome of these two drawbacks is that currently the only way of calculating impact is by using finite element software. The use of such programs also presents three major hurdles:

- There is no control over the results or any way of contrasting them.
- They do not always converge to provide a solution.
- There is no criterion for optimally designing structures against impact.

This thesis addresses the problem of impact on structures and develops a new theory that enables impacts on structures to be calculated in a simple way. The three major contributions that this new theory achieves are the following:

- It is of a general nature and therefore valid for any structure.
- It enables the results obtained from finite element programs to be tested.



- It allows for control over the impact such that it generates criteria for designing structures against impact.

Throughout the paper, we compare the results obtained using this new formulation in different impact scenarios with the results obtained using finite element software and experimental trials.

1.2 SUBJECT OF THE RESEARCH

The main subject of study in this thesis is an analysis of masses (projectiles) impacting at low velocity (elastic range) on structures, from the theoretical point of view.

When an object or projectile of a certain mass and at a certain velocity hits a structure, a force between the contact surfaces on both bodies occurs for a very short period of time. That force produces deflection and associated stress in both the structure and the projectile. From the perspective of this thesis, the research focuses on analysing the following variables:

- The contact force between bodies as a result of impact.
- The duration in time of the impact force.
- The deformation of the structure during impact.

The projectile is assumed to be infinitely rigid, as that is the worst-case scenario for the structure. All the energy that the projectile is able to absorb due to its own deformation during the impact is energy that will not be transmitted to the structure. Therefore, the hypothesis of a rigid projectile that does not deform during impact is the most conservative for the structure. The rest of the hypotheses used to analyse impact are explained in section 4.2.1.

1.3 JUSTIFICATION FOR THE RESEARCH

Nowadays, a problem involving impact on a given structure can be solved, in principle, by using finite element programs. Therefore, the first question to be answered is undoubtedly the reason why this research is considered necessary. As explained in section 2, there is **no absolute impact theory** that explains the physical phenomenon of impact. This situation is unique within Structural Engineering, since both static and dynamic stress are covered by extensive and well-contrasted treatises.



The study of impact differs from the classic study of dynamic calculation. The main differences between the two fields are as follows:

- In dynamic calculation, the force that puts the structural system under stress is always known – it is the starting-point datum. Therefore, dynamic analysis focuses on how the structure is deformed by a given force. In contrast, in impact analysis, one of the main problems is to **determine what contact force**, in terms of intensity and form, occurs when two bodies collide.
- Furthermore, in the field of dynamic calculation, the application of force does not modify the mechanical properties of the structure, which remain constant. However, during **an impact**, the mass of the projectile **modifies the behaviour of the original structure**, and quantifying that change is a major challenge.

Thus, dynamic calculation and impact study are related but nevertheless independent types of analysis.

The use of finite element programs to calculate impact provides for solutions that are numerical but which still do not relate to any theory that allows them to be contrasted. From a more theoretical viewpoint, calculating impact in this way entails leaving a number of very important questions unanswered, apart from the significant degree of uncertainty in the results obtained:

- Does a pattern of general behaviour against impact exist for all structures?
- What are the main variables that govern impact on a structure?
- What modes of vibration are activated in the structure during an impact, and why?
- What variables regulate excitation intensity in each mode?
- How and to what extent does the projectile's own weight influence an impact?

The research presented in this **thesis has led to a theory that does provide answers to all these questions** and thus helps towards understanding what happens and why during the brief moments that an impact lasts. **The theory developed in this paper simplifies the problem of impact to its essential core**, rendering the mechanics of the impact readily understandable and therefore manageable. In other words, unlike what occurs when finite elements are used, this new theorem provides control of the physical phenomenon of the impact in order to reach a solution in a simple and accurate way.

From a more practical perspective, the formulation obtained in this research by developing a simplified method is a powerful tool for the structural engineer. As far as the calculation of



impact is concerned, the main contributions made by this simplified method are summarised in the following points:

- The simplified method provides a formulation that unveils:
 - The impact force
 - The length of time the impact force lasts.
 - The deformation of the structure during impact.

That is to say, this simplified method is a simple test that the engineer can carry out to avoid having to blindly rely on the results of finite element software over which he has no control.

- In addition, being able to estimate the result in advance of the solution delivered by finite elements enables **the numeric integration parameters in those programs to be defined** more rigorously. That way, it is no longer necessary to perform iterations of the numerical resolution of the impact until the integration parameters are seen to bear no influence on the final result.
- However, the greatest contribution provided by the results obtained in this research is of unquestionable interest to structural designers. Once the structure has been defined, software enables that structure design to be calculated. But when the structure has yet to be defined, **what criterion should be used to afford optimal structure design against impact?** The answer can only be found in the compression of the impact, which is determined by using a number of variables that the engineer must keep in mind when designing. Understanding and managing impact using a small number of variables is precisely the main achievement of the research presented in this paper. The illustrious engineer Juan José Arenas de Pablo, a reference figure for the entire profession, pondered on this question in the following terms:

“I must have been a very poor teacher because it has often been of less importance to me that my students learned the details of theoretical formulation than they should understand the reason for what they were doing, and also the underlying static, ethical and aesthetic grounds that serve as the firm base for their inalienable responsibility as engineers”.

Existing theorems on impacts are very complex in their mathematical development and narrowly limited to a particular type of structure (theory of impact on bars, theory of impact on beams, theory of impact on floor slabs, etc.). This fact makes it impossible to use them in a



general and effective way. Only finite element calculation has managed to provide apparently uniform solutions obtained from approximations and significant discretization of elements. Unlike the above, the theory developed in this research is applicable to all types of structures.

1.4 DESCRIPTION OF THE RESEARCH

This thesis is organised into five large blocks, each with a main purpose:

- **STATE OF THE ART:** explains the context and need for the research.
- **CENTRAL COLLISION OF FREE MASSES:** explains the main idea that led to this thesis being undertaken.
- **DEVELOPMENT OF THEORY AND FORMULATION FOR THE CALCULATION OF IMPACT ON STRUCTURES:** provides details of the new theory and the model derived from it, as well as examples of its application.
- **EXPERIMENTAL TESTING:** compares the results provide by the new formulation with the results from actual tests.
- **CONCLUSIONS:** the results of the research are summarised in a series of conclusions.

Each one of these blocks is briefly described hereunder:

1.4.1 State of the Art

The first part of section 2, **STATE OF THE ART**, provides a brief historical overview listing the initial advances, together with their corresponding authors, made in the specific field of impact.

The second part of section 2 outlines the basic theories for calculating **impacts on rigid bodies** in somewhat greater technical detail. These bodies are an idealisation of infinitely rigid free masses (not structures), although with a very small elastic part in the contact area. They are the earliest theorems of impact calculation to be developed and some of them are still widely used, given the simplicity they embody.

The last part of section 2 describes today's most comprehensive theorems for calculating both longitudinal and transverse **impact on flexible bodies**. It is restricted to existing theories for bar



and beam type elements, since the remaining theorems do not contribute any additional concepts but merely add greater mathematical complexity.

Apart from outlining the context in which the research in this thesis has been carried out, the main purpose of Section 2, STATE OF THE ART, is, as mentioned, to **reveal the mathematical complexity of current theorems**, even for the simplest elements such as bars or beams. The reality depicted in the section on State-of-the-art constitutes the best justification of the need for the research undertaken here.

1.4.2 Central collision of free masses

In Section 3, **CENTRAL COLLISION OF FREE MASSES**, an **alternative simple model** for studying impacts on rigid bodies is given. The results of this new model are identical to current models already outlined in the previous section, but **its added value is the different viewpoint used**, more focused on engineering, more simplified and therefore more accessible. This new viewpoint is the first abstraction towards the core problem of impact analysis and served as the basis for the later model for calculating impact on structures. The last point in the block describes a **study of the Newton pendulum** using the new alternative model. It is from this analysis using the new viewpoint that the **main conclusion of our impact study on structures expounded in the following block is achieved**.

1.4.3 Development of a theory and formulation for the calculation of impact on structures

Section 4, entitled **DEVELOPMENT OF A THEORY AND FORMULATION FOR THE CALCULATION OF IMPACT ON STRUCTURES**, comprises the fundamental part of the research in this thesis. To sum up, it is possible to synthesise the topics discussed in Section 4 in the following points:

- A new theorem for calculating impact on structures is developed.
- A new method is devised for transforming any structure into a system of springs and masses.



- A model for calculating impact associated with the new theory and the system of springs and masses is generated, i.e. a theorem valid **for all types of structures** (beams, cables, floor slabs, etc.).
- This calculation model is then tested by contrasting the results of the formulation against the results obtained with MIDAS NFX finite element software.

Given the fundamental character of Section 4, a few of the topics discussed there are outlined briefly below.

The first part of Section 4 describes **how to transform any structure into a system of springs and masses**. Once such transformation has been performed, it is tested by applying other dynamic loads rather than an impact load to ensure the system reproduces the dynamic behaviour of the original structures properly. To do that, the results offered by the spring and mass system are compared to those obtained with Midas Civil finite element software for different structures.

Subsequently, **using the springs and masses model that can represent any structure**, parametric analysis of an impact is carried out to obtain the theoretical solution based on certain simplifying assumptions. The theory is developed for 2 scenarios:

- When the effect of the projectile's own weight is NOT taken into account.
- When the effect of the projectile's own weight IS taken into account.

In both cases, the new formulation is applied to various types of structures (beams, floor slabs etc.) and the results in terms of displacements and impact forces obtained from the new formulation is compared to the results obtained from the Midas NFX finite element software. Both the theoretical development and the practical case trials were structured in two distinct phases:

- As a first approach, both for the development of the theory and in the first cases of impact, **only the fundamental structural vibration mode was considered**.
- Subsequently, having assessed the limitations that taking only the fundamental vibration mode into account entails, **the model was made more generic to cover all vibration modes**.

All the trials performed to test the formula using Midas NFX involved impacts at the structure's centre of gravity for greater simplicity (i.e. central collisions), whereas to demonstrate the



model's wider applicability, a single case of impact at another point (i.e. eccentric collision) was analysed.

The author wishes to express his gratitude for the selfless collaboration provided by the Korean multinational **Midas IT** and its subsidiary in Spain, **Simulsoft Ingenieros S.L.** Midas NFX finite element analysis software for calculating impacts was made available free of charge for almost the entire duration of this research, together with all manner of facilities and technical support from the companies named above. As is credited throughout the paper, this software has proven to be a fundamental cornerstone as a calculation tool for testing the newly-developed theory.

1.4.4 Experimental analysis

Section 5, **EXPERIMENTAL ANALYSIS**, aims to broaden the outcome of our research beyond a simple comparison with the results of a finite element program by comparing the results of the new formula with actual test results, some of which were specifically designed and performed by the author for this thesis. Earlier test results from other researchers have also been used. The objective of all these tests is to obtain real results that can be used to check and test the results of the newly-developed formulation.

1.4.5 Conclusions

Finally, on the basis of all the above analyses, the main ideas established during the investigation are set down in Section 6, **CONCLUSIONS**, which also includes future lines of research which, in the opinion of this doctoral candidate, need to be addressed in order to delve more deeply into the subject of this research in later studies.



1.5 INTRODUCCIÓN

El cálculo de impactos en estructuras es, hoy en día, un estudio difícil de abordar. La razón de esta dificultad reside en la ausencia de una teoría global de impactos. Las teorías que han sido desarrolladas hasta ahora presentan dos problemas principales:

- Son teorías específicas para un tipo estructural (teoría de vigas, teoría de placas, etc.)
- Son teorías tan complejas matemáticamente que, en la práctica, impiden un uso de las mismas de manera eficaz.

Estas dos características provocan que, en la actualidad, el cálculo de impactos sólo se realice mediante el empleo de programas de elementos finitos. El empleo de estos programas presenta tres grandes problemas:

- No se tiene control sobre los resultados, ni forma de contrastarlos.
- No siempre convergen a una solución.
- No se tiene criterio para diseñar estructuras de manera óptima frente a impacto.

En la presente tesis se aborda el problema de los impactos en estructuras y se desarrolla una nueva teoría que permite calcular impactos en estructuras de manera simple. Las tres grandes aportaciones que la teoría desarrollada ha conseguido son las siguientes:

- Es una teoría general, válida para cualquier estructura.
- Permite comprobar los resultados obtenidos de los programas de elementos finitos.
- Permite tomar el control sobre el impacto, obteniendo de él criterios de diseño de estructuras frente a impacto.

A lo largo de la tesis, se comparan los resultados obtenidos con la nueva formulación para distintos casos de impactos con los resultados obtenidos mediante programas de elementos finitos y mediante ensayos experimentales.

1.6 TEMÁTICA DE LA INVESTIGACIÓN

El asunto principal de la presente tesis consiste en analizar masas (proyectiles) que impactan a baja velocidad (rango elástico) en estructuras, desde un punto de vista teórico.



Cuando un objeto o proyectil, con una cierta masa y una determinada velocidad, impacta en una estructura, se produce una fuerza entre la superficie de contacto de ambos cuerpos durante un tiempo muy reducido. A partir de esta fuerza, la estructura y el proyectil sufren unas deformaciones y unas tensiones asociadas a éstas. Desde el punto de vista de la tesis, el estudio se centra en el análisis de las siguientes variables:

- Fuerza de contacto entre cuerpos debida al impacto.
- Tiempo de duración de la fuerza de impacto.
- Deformación de la estructura durante el impacto.

El proyectil se asumirá que es infinitamente rígido, dado que ésta es la peor situación posible para la estructura. Toda aquella energía que el proyectil, debido a su propia deformación durante el impacto, sea capaz de absorber, es energía que no le será transmitida a la estructura. Por esta razón, la hipótesis de un proyectil rígido que no se deforme durante el impacto es pésima desde el punto de vista estructural. El resto de hipótesis de partida para analizar el impacto serán expuestas en el apartado 4.2.1.

1.7 JUSTIFICACIÓN DE LA INVESTIGACIÓN

Hoy en día, un problema de impacto sobre una estructura dada se puede resolver, en principio, mediante el empleo de programas de elementos finitos. Sin duda, la primera pregunta que ha de responderse entonces es el porqué de la necesidad de esta investigación. Como se explicará en el apartado 2 del documento, **no existe una teoría cerrada sobre impactos** que permita comprender el fenómeno físico del impacto. Esta situación es singular dentro de la ingeniería estructural, dado que tanto el área estática como dinámica cuentan con un desarrollo teórico extenso y contrastado.

El campo de estudio del impacto es distinto del campo de estudio del cálculo dinámico clásico. Las principales diferencias entre ambas áreas son las siguientes:

- En el ámbito del cálculo dinámico, la fuerza que solicita al sistema estructural siempre es conocida, es un dato de partida. Por lo tanto, el estudio en el ámbito dinámico se centra en cómo se deforma la estructura a partir de una fuerza dada. Por el contrario, en el ámbito del impacto, uno de los principales problemas es **poder determinar qué fuerza de contacto**, en intensidad y forma, se produce al chocar dos cuerpos.



- Por otro lado, en el ámbito del cálculo dinámico la aplicación de la fuerza no modifica las características mecánicas de la estructura, éstas son constantes. Sin embargo, durante **un impacto**, la masa del proyectil **modifica el comportamiento de la estructura** original, siendo un problema capital poder cuantificar esta modificación.

Cálculo dinámico y estudio de impactos son, por tanto, análisis relacionados pero diferentes.

El uso de programas de elementos finitos para resolver impactos, permite obtener soluciones numéricas pero ajenas a toda teoría que permita contrastarlas. Desde un punto de vista más teórico, resolver de esta forma los impactos supone, además de una gran incertidumbre en los resultados obtenidos, dejar una serie de preguntas muy importantes sin explicación:

- ¿Existe un patrón de comportamiento general frente a impacto para todas las estructuras?
- ¿Cuáles son las principales variables que gobiernan el impacto en una estructura?
- ¿Qué modos de vibración de la estructura se activan, y porqué, durante un impacto?
- ¿Qué variables regulan la intensidad de excitación de cada uno de los modos?
- ¿Cómo y cuánto influye el peso propio del proyectil en un impacto?

La investigación realizada en la **presente tesis, desarrolla una teoría que sí proporciona respuestas a todas estas preguntas**, ayudando a comprender qué es lo que sucede y por qué sucede, durante los breves instantes que dura el impacto. **La teoría desarrollada en la presente tesis simplifica el problema del impacto hasta que su esencia se pone de manifiesto**, haciendo la mecánica del impacto fácilmente comprensible y, por tanto, manejable. Es decir, a diferencia de lo que ocurre con el uso de elementos finitos, a partir de la teoría desarrollada se toma el control del fenómeno físico del impacto obteniendo su solución de manera sencilla y precisa.

Desde un punto de vista más práctico, la formulación obtenida en la investigación a partir del desarrollo de un método simplificado, supone una potente herramienta para el ingeniero estructural. En lo referente al cálculo de impactos, las principales aportaciones que el método simplificado realiza se resumen en los siguientes puntos:

- El método simplificado obtiene una formulación que permite conocer:
 - La fuerza de impacto.
 - El tiempo de duración de la fuerza de impacto.
 - La deformación estructural durante el impacto.



Es decir, el método simplificado supone una comprobación sencilla que el ingeniero puede realizar para no tener que creerse a ciegas los resultados procedentes del software de elementos finitos sobre los que no se tiene control alguno.

- Además, poder estimar el resultado previamente a la resolución mediante el uso de elementos finitos, **permite definir los parámetros de integración numérica** en dichos programas más rigurosamente. De esta forma, no será necesario hacer iteraciones en la resolución numérica del impacto hasta comprobar que los parámetros de integración no tienen influencia en el resultado final.
- Pero, sin duda, la mayor potencia de los resultados obtenidos en la presente tesis es proporcionada para el diseñador estructural. Cuando la estructura está definida, un software permite el cálculo de la estructura. Pero cuando la estructura está por definir, **¿cuál es el criterio para diseñar una estructura de manera óptima frente a impacto?** Esta respuesta sólo se encuentra en la comprensión del impacto, la cual se manifiesta con el uso de unas pocas variables que el ingeniero debe tener en la cabeza a la hora de diseñar. La comprensión y el manejo del impacto a partir de unas pocas variables es, justamente, el principal resultado de la investigación expuesta en este documento. El ilustre ingeniero Juan José Arenas de Pablo, referente de toda la profesión, hacía la siguiente reflexión al respecto:

“He debido ser muy mal profesor porque a menudo me ha importado poco que mis alumnos aprendieran el detalle de la formulación teórica, sino el que entendieran el porqué de lo que hacían, y también cuales son los fundamentos estáticos, éticos y estéticos que debían servir de base firme a su irrenunciable responsabilidad como ingenieros”.

Las teorías existentes sobre impactos son muy complejas en su desarrollo matemático y limitadas a cada tipología estructural (teoría de impacto en barras, teoría de impactos en vigas, teoría de impactos en placas, etc.). Este hecho hace imposible su uso de manera general y eficaz. Sólo el desarrollo de los elementos finitos ha conseguido, a partir de las aproximaciones y una elevada discretización de elementos, uniformizar aparentemente las soluciones. La teoría desarrollada en la investigación, a diferencia de las nombradas anteriormente, es de aplicación a todo tipo de estructuras.



1.8 DESCRIPCIÓN DE LA INVESTIGACIÓN

La tesis se ha organizado en cinco grandes bloques, cada uno de ellos con una finalidad principal:

- **ESTADO DEL ARTE:** Explica el contexto y la necesidad de la investigación.
- **CHOQUE CENTRAL DE MASAS LIBRES:** Explica la idea principal que dio lugar al desarrollo de la tesis.
- **DESARROLLO DE TEORÍA Y FORMULACIÓN PARA EL CÁLCULO DE IMPACTOS EN ESTRUCTURAS:** Detalla el nuevo desarrollo teórico y el modelo que se deriva de él, así como ejemplos de aplicación.
- **ANÁLISIS EXPERIMENTAL:** Se comparan los resultados ofrecidos por la formulación desarrollada con los resultados en ensayos reales.
- **CONCLUSIONES.** Se resumen los resultados de la investigación en una serie de conclusiones.

A continuación, se describe brevemente cada una de estos bloques:

1.8.1 Estado del arte

En la primera parte del apartado 2 **ESTADO DEL ARTE**, se realiza un breve recorrido histórico enumerando los primeros avances, y sus autores correspondientes, que se han realizado en el área específica de los impactos.

En la segunda parte del apartado 2, ya entrando en detalle técnico, se describen las teorías fundamentales de resolución de **impactos de cuerpos rígidos**. Estos cuerpos son una idealización de masas libres (no estructuras) infinitamente rígidas, aunque con una pequeñísima parte elástica en la zona de contacto. Son las primeras teorías desarrolladas de cálculo de impactos y alguna de ellas, por la simplicidad que atesoran, siguen siendo muy utilizadas.

En la última parte del apartado 2, se describen las teorías actuales más completas para el cálculo de **impactos en cuerpos flexibles**, tanto en impacto longitudinal como transversal. Se describen únicamente las teorías existentes para elementos tipo barra y tipo viga, dado que el resto de teorías no aportan ningún concepto adicional, pero sí una mayor, si cabe, complejidad matemática.



Además de contextualizar la investigación desarrollada en la presente tesis, la principal función del apartado 2 ESTADO DEL ARTE es, como se ha comentado, **poner de manifiesto la complejidad matemática de las teorías actuales** incluso para los elementos más simples como son elementos barra o elementos viga. La descripción de la realidad mostrada en el apartado del estado del arte, constituye la mejor justificación de la necesidad de la investigación aquí desarrollada.

1.8.2 Choque central de masas libres

En el apartado 3 **CHOQUE CENTRAL DE MASAS LIBRES**, se desarrolla un **modelo sencillo alternativo** para el estudio de impactos de cuerpos rígidos. Los resultados de este nuevo modelo son idénticos a los modelos ya existentes expuestos en el apartado anterior, pero **el valor añadido es el diferente punto de vista utilizado**, más ingenieril, más simplificado y, por tanto, más accesible. Este nuevo punto de vista es la primera abstracción hacia la esencia del problema del impacto, y ha servido de base para el modelo posterior de cálculo de impactos en estructuras. En el último punto de este bloque, y a partir del modelo alternativo generado, se realiza un **estudio del péndulo de Newton**. Es en este análisis, y utilizando el nuevo punto de vista, donde **se obtiene la conclusión principal para el estudio de impactos en estructuras** expuesto en el siguiente bloque.

1.8.3 Desarrollo de teoría y formulación para el cálculo de impactos en estructuras.

El apartado 4 titulado **DESARROLLO DE TEORÍA Y FORMULACIÓN PARA EL CÁLCULO DE IMPACTOS EN ESTRUCTURAS**, es el apartado fundamental de la investigación mostrada en la presente tesis. De manera resumida, se puede sintetizar los temas desarrollados en el apartado 4 en los siguientes puntos:

- Se desarrolla una nueva teoría de cálculo de impactos en estructuras.
- Se desarrolla un nuevo método para transformar cualquier estructura en un sistema de masas y muelles.
- Se obtiene un modelo de cálculo de impactos asociado a la nueva teoría desarrollada y al sistema de muelles y masas, es decir, válido **para todo tipo de estructuras** (vigas, cables, placas, etc.).



- Se realiza una comprobación del modelo de cálculo obtenido, contrastando los resultados de la formulación desarrollada con los resultados ofrecidos por el programa de elementos finitos MIDAS NFX.

A continuación, por tratarse del apartado fundamental, se amplía brevemente la temática desarrollada en el apartado 4.

En la primera parte del apartado 4, se muestra **como transformar cualquier estructura en un sistema de masas y muelles**. Una vez la transformación se ha realizado, se comprueba mediante la aplicación de cargas dinámicas, distintas a una carga impacto, que dicho sistema reproduce adecuadamente el comportamiento dinámico de las estructuras originales. Para ello, se comparan los resultados ofrecidos por el sistema de muelles y masas con los ofrecidos por el programa de elementos finitos Midas Civil para distintas estructuras.

Posteriormente, y **ya bajo el modelo de masas y muelles que puede representar a cualquier estructura**, se analiza un impacto de forma paramétrica y se obtiene la solución teórica al mismo a partir de unas hipótesis simplificadoras. El desarrollo teórico se hace para 2 situaciones:

- Sin tener en cuenta el efecto del peso propio del proyectil.
- Teniendo en cuenta el efecto del peso propio del proyectil.

Para ambos casos, y aplicando la nueva formulación a varios tipos de estructuras (vigas, placas etc.), se comparan las soluciones en desplazamientos y fuerzas de impacto ofrecidas por la formulación desarrollada y por el programa de elementos finitos Midas NFX. Tanto el desarrollo teórico como las comprobaciones de los casos prácticos, se han estructurado en dos fases diferenciadas:

- En una primera aproximación, tanto en el desarrollo teórico como en los primeros casos de impactos considerados, sólo **se considera el modo de vibración fundamental de la estructura**.
- Posteriormente, tras analizar las limitaciones que supone solo considerar el modo fundamental de vibración, **se generaliza este modelo para todos los modos de vibración**.

Todos los casos planteados para la comprobación de la formulación mediante el Midas NFX, se realizan para impactos en el centro de gravedad de las estructuras por simplicidad (choques centrales), pero para demostrar la generalidad del modelo se analiza un único caso de impacto en otro punto cualquiera (choque excéntrico).



Se ha de resaltar la colaboración que, de manera desinteresada, se ha obtenido por parte de la Multinacional Coreana **Midas IT** y de su filial en España **Simulsoft Ingenieros S.L.** El software de elementos finitos con capacidad de cálculo de impactos Midas NFX, ha sido utilizado de manera gratuita durante casi todos los años que ha durado la investigación, con todo tipo de facilidades y soporte técnico por parte de las empresas nombradas anteriormente. Como queda acreditado a lo largo del presente documento, este software ha sido un pilar fundamental como herramienta de cálculo para la comprobación de la teoría desarrollada.

1.8.4 Análisis experimental

En el apartado 5 **ANALISIS EXPERIMENTAL**, y para que no sólo se comparen los resultados de la investigación con los resultados de un programa de elementos finitos, se comparan los resultados que ofrece la formulación desarrollada con los resultados de ensayos reales, alguno de ellos diseñado y llevado a cabo por el doctorando para la presente tesis de manera específica. También se han utilizado resultados de ensayos realizados por otros investigadores en el pasado. El objetivo de todos estos ensayos es obtener resultados reales procedentes de los mismos, y que éstos sirvan de comprobación de los resultados de la formulación desarrollada.

1.8.5 Conclusiones

Finalmente, y partir de todo lo analizado, se sintetizan las principales ideas establecidas durante la investigación en el apartado 6 **CONCLUSIONES**, añadiendo las futuras líneas de investigación que, a juicio del doctorando, deben ser abordadas para detallar y completar la presente investigación en posteriores estudios.



2 ESTADO DEL ARTE

Se puede establecer que la investigación y desarrollo de la ciencia que ha analizado los impactos entre cuerpos se empezó a desarrollar a principios del siglo XVII. Mucho ha sido lo avanzado desde entonces con el desarrollo de varias teorías que han sabido abarcar distintas temáticas, impactos de cuerpos rígidos, impactos de cuerpos deformables, teorías de impactos elásticas, teorías de impactos plásticas etc. Este desarrollo es tan complejo, que la investigación histórica sobre impactos que en este punto se detalla, parte de sus inicios más genéricos aproximándose en su exposición a los impactos más relacionados con los analizados en la investigación de la presente tesis. Estos son impactos centrales en estructuras en régimen elástico.

Todas las teorías desarrolladas históricamente han ido aumentando su complejidad matemática hasta hacer necesario nuevas teorías más simplificadas que permitan el cálculo de impactos de manera más ágil. En realidad, lo que subyace bajo esta complejidad y el elevado número de teorías existentes, **es la ausencia de una teoría cerrada** y completa sobre impactos en general y, por tanto, tampoco sobre impactos en estructuras.

La descripción de los avances históricos en el campo de los impactos que se expone a continuación pretende contextualizar el estudio de los impactos a lo largo de la historia, mostrar la **complejidad relativa** de cálculo con respecto a otras áreas estructurales y evidenciar la necesidad del desarrollo de una teoría general que permita la comprensión del impacto. En definitiva, este estado del arte pretende ser, sin entrar en excesivos detalles, un relato en el que se evidencie y se justifique la necesidad de la investigación que en los apartados sucesivos se expondrá.

2.1 EVOLUCIÓN HISTÓRICA DEL ESTUDIO DE LOS IMPACTOS

Antes de la publicación “Principia” de Newton en (1687)¹ la dinámica era una ciencia empírica que establecía una serie de leyes que describían el comportamiento observado de los cuerpos en movimiento, pero sin ninguna explicación de las fuerzas que causaban dichos movimientos. Por ejemplo, Kepler (1571-1630) descubrió, tras un laborioso trabajo, las leyes de los movimientos de los planetas a partir de las mediciones realizadas anteriormente por Tycho Brahe. Del mismo modo, Galileo introdujo leyes para la descripción del movimiento de caída libre de cuerpos. Aunque supuso que debía haber alguna relación general que relacionara la



aceleración y deceleración de los cuerpos, no llegó a establecer la relación causa-efecto. Estos sabios tenían un escaso conocimiento explícito del concepto “fuerza”.

En tiempos de Galileo (1564-1642), el desarrollo de la dinámica se centraba en el estudio de la balística para su aplicación en la guerra, de la mecánica celeste para su aplicación en la navegación y en la percusión. La percusión se puede considerar como origen del estudio del impacto, y por esta época se realizaban estudios sobre los efectos de los martillos en las piezas de trabajo de los herreros.

Galileo se dedicó al estudio de la mecánica celeste, pero tuvo muchos problemas con la Iglesia por pensar que La Tierra no era el centro del universo y se movía alrededor del Sol. Quizá por este motivo, también se dedicó al estudio de movimientos de los cuerpos en la Tierra. Realizó varios ensayos lanzando objetos (la leyenda dice que desde lo alto de la torre de Pisa) con importantes avances, si bien Galileo nunca estableció claramente el principio de inercia de Newton ni lo utilizó de manera analítica alguna. En lo referente al estudio de impactos, en sus dibujos se puede ver que identificó un importante efecto del impacto, la “brusquedad del impacto” es proporcional a la velocidad normal relativa de los cuerpos que impactan, aunque sin ser capaz de descomponer el impacto en las componentes normal y tangencial.

Un contemporáneo de Galileo, el profesor Marcus Marci, escribió un tratado con algunas consideraciones observaciones interesantes sobre los impactos. El escribió que, en un choque elástico entre dos cuerpos iguales, si antes del choque un cuerpo tiene velocidad v y el otro se encuentra en reposo, después del choque la situación se ha invertido. A partir de los dibujos originales realizados en su tratado *De Proportione Motus*², se puede intuir como el autor analizaba esta idea a partir del choque de masas libres en los casos concretos de una cañón y de un billar, como muestra la Figura 1.

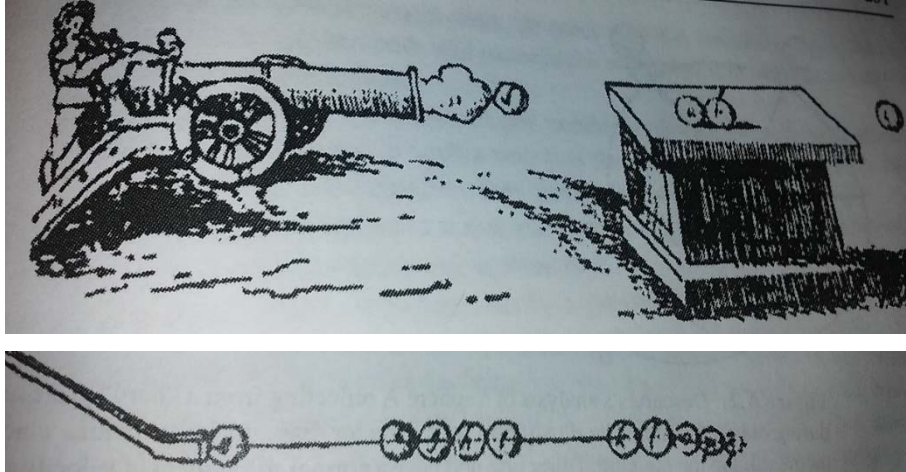


Figura 1-Illustración obtenida del documento "De Proportione Motus" de Marcus Marci para el análisis de impactos de masas libres.

En la Figura 1 se puede observar en la parte superior las bolas de un cañón antes y después del impacto intercambiando velocidades. En la parte inferior, se aprecia un esquema en el que una bola de billar que choca contra un grupo de bolas desplaza solo la última. Este último dibujo se puede considerar como el antecesor del actual péndulo de Newton, el cual se muestra en la Figura 2.



Figura 2-Péndulo de Newton

A continuación, y con el único objetivo de hacer una aproximación histórica a los inicios del estudio del impacto, se exponen brevemente los primeros autores que sentaron las bases de los principales conceptos físicos utilizados posteriormente para el estudio de los impactos.



2.1.1 René Descartes (1596-1650)

Descartes es conocido hoy en día como un gran filósofo, matemático y físico. A grandes rasgos, se pueden destacar en su obra estas ideas como más importantes en lo que a impactos se refiere:

Conservación de la cantidad de movimiento:

En 1644, René Descartes, escribió *Principia Philosophiae* donde mencionaba las siguientes leyes de la naturaleza.

1-Primera ley de la Naturaleza: Todo cuerpo siempre conserva el mismo estado, de esta manera si algo se está moviendo continuará moviéndose salvo “causas externas”.

2-Segunda ley de la Naturaleza: Todo movimiento por sí mismo es rectilíneo.

En este documento se introduce la primera aproximación del concepto cantidad **de movimiento**, dado que en él estaba definido como el producto del peso de un cuerpo, en vez de su masa, por su velocidad.

Con esta definición de la cantidad de movimiento y con el enunciado de las leyes de la naturaleza, Descartes es considerado como el precursor del **principio de inercia**. Descartes no explicó que causaba el cambio de velocidad en los cuerpos, ni utilizaba como tal el término fuerza.

Impacto de cuerpos

En su libro *Diotropics* Descartes relacionaba mediante una analogía, la reflexión de la los rayos de luz y el rebote de una bola que impacta con una superficie con un ángulo de incidencia como muestra la Figura 3.

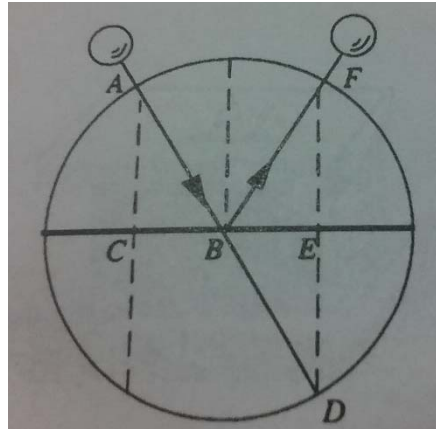


Figura 3-Esfera analizada por Descartes sobre el plano rígido CBE.

A partir de estos estudios, Descartes introdujo en el libro *Principia Philosophiae*³ algunas reglas para los impactos elásticos directos:

1-Si dos cuerpos iguales inciden en otro con igual velocidad, cada uno de ellos retrocede con su propia velocidad.

2-Si uno de los cuerpos es más grande que el otro, y las velocidades iguales, el más pequeño retrocederá y ambos se moverán en la misma dirección con las velocidades previas al impacto.

3-Si dos cuerpos iguales con velocidades desiguales inciden uno en el otro, el cuerpo más lento será arrastrado de tal forma que la velocidad común será la media de las velocidades previas al choque.

4-Si uno de los cuerpos está en reposo y otro incide sobre él, este último retrocederá sin comunicar cualquier movimiento.

5-Si un cuerpo está en reposo y un cuerpo más grande incide sobre él, este será arrastrado y ambos se moverán en la misma dirección con una velocidad que será a la masa del cuerpo que incide como la masa de este último a la suma de las masas de cada cuerpo.

6-Si un cuerpo está en reposo y otro igual le golpea con velocidad por ejemplo 4, le dará velocidad 1 al que estaba en reposo y el que incide retrocederá con velocidad 3.

Descartes era un gran pensador, pero su principal defecto fue que no era muy experimental. Lo más importante de estas reglas fue que era fácil, mediante ensayos, demostrar que la mayoría eran erróneas, y esto sirvió de estímulo para Huygens, Newton, Wallis y Wren cuando estudiaron los impactos. Solo la regla 3 de Descartes permanece a día de hoy vigente.



2.1.2 Jhon Wallis (1616-1703)

Jhon Wallis fue un Profesor de Geometría de la Universidad de Oxford. Realizó importantes avances en álgebra los cuales recogió en el libro *Mechanica sive Tracttus motu*⁴ en 1670.

En este tratado, Wallis **extendió el concepto de fuerza, incluyendo en él otras fuerzas además de la gravitatoria**. Por otra parte, expresó por primera vez la relación entre fuerza y momento en cuerpos que son acelerados desde el reposo (aunque utilizaba el peso en lugar de la masa).

Wallis se dedicó al estudio **de impactos perfectamente plásticos** en cuerpos que llamaba *rígidos*, explicando que durante la fase de aproximación (fase inicial de los impactos en la que los cuerpos se comprimen, explicada en el apartado 2.3.1.1) no acumulaban energía de deformación por ser indeformables. Distinguió estos impactos de los llamados *impactos suaves* o aquellos donde los cuerpos absorbían energía por deformación.

Wallis considero una velocidad común final para los impactos de dos cuerpos perfectamente inelásticos, proponiendo que dicha velocidad común de los dos cuerpos que chocan fuese:

$$V_f = \frac{WV_o + W'V_o'}{W + W'} \quad (1)$$

Siendo W y W' el peso de los cuerpos, V_o y V_o' las velocidades respectivas antes del impacto y V_f la velocidad final de ambos cuerpos.

El valor resultante de esta velocidad final es correcto, el problema reside en que conceptualmente es la masa y no el peso el que interviene en la ecuación. Por otra parte, Wallis no llegó a considerar que en este tipo de impactos no se conservaba la energía del sistema.

En lo que se refiere a impactos elásticos, él identificó que la fuerza de contacto cambiaba la cantidad de movimiento en la fase de restitución (última fase del impacto, posterior a la fase de aproximación, en la que los cuerpos se expanden, explicada en el apartado 2.3.1.1) tal y como lo hacía en la fase de aproximación. Además, **sugirió el caso del choque parcialmente elástico** donde las velocidades finales oscilan entre los límites que establecen el caso elástico perfecto y plástico perfecto.



2.1.3 Christopher Wren (1632-1723)

Christopher Wren tuvo una distinguida carrera en la ciencia a pesar de que a los 30 años giró su profesión hacia la arquitectura, con trabajos tan importantes como la planificación de la reconstrucción de Londres tras el gran incendio de 1666, la catedral de St. Paul de Londres o la librería Trinity en Cambridge.

En lo referente a los impactos, estudió el choque de **dos cuerpos elásticos**, definiendo la *velocidad apropiada* de cada cuerpo, la cual es la velocidad inversamente proporcional a su peso. Estudió los impactos desde el punto de vista de una palanca, y con esta analogía **desarrolló la correcta relación entre las velocidades salientes de los cuerpos tras los impactos.**

La **principal aportación de Wren** fue que con **sus ensayos** se comprobaron las teorías de Newton. Wren esencialmente llegó a las mismas conclusiones que Huygens, pero no presentó los principios generales que se derivaban de sus resultados.

2.1.4 Christian Huygens (1629-1695)

Huygens fue un brillante matemático y físico. Realizó importantes trabajos en el campo de la óptica y en la teoría de ondas de la luz. Con sus conocimientos se construyeron los telescopios que permitieron descubrir el anillo de Saturno, llegando a visualizar él mismo a Titán, la primera de las lunas de Saturno que fue identificada. Fue el padre, si no el inventor, del reloj con péndulo. Además, proporcionó una expresión para calcular el momento de inercia de los cuerpos sólidos y dio la primera explicación correcta, así lo reconoció Newton, sobre la fuerza centrífuga.

Huygens también trabajó en el área de los impactos con importantes avances. **Distinguió entre cantidad de movimiento y energía cinética**, aunque sin entender muy bien sus variables. Usó el concepto de conservación de momento que usaba Galileo para **definir la conservación de la energía mecánica del sistema**, señalando que esta idea tenía un significado especial (más tarde Leibnitz usó este concepto para definir la conservación de la energía). Estos trabajos hubieran tenido más repercusión histórica si Huygens no hubiera sido tan reticente a publicar sus investigaciones. Se tardó más de 40 años en publicar su libro póstumo que fue escrito en 1659, y para entonces *Principia* de Newton llevaba 15 años publicada.



Aunque tanto Wallis, como Wren, como Huygens, dieron con la solución correcta, fue Huygens quien hizo una mejor distinción para reconocer que el cambio de velocidades ocurrido en los cuerpos tras un impacto estaba relacionado con la velocidad relativa entre ellos. Él usó sistemas de referencia móviles para estudiar los impactos y determinó que el centro de gravedad de los cuerpos que chocan, siempre va hacia la misma dirección y en línea recta antes y después del impacto. Para llegar a esta conclusión se basó en dos principios:

1-Si das explícitamente una velocidad al sistema de referencia tal que el centro de gravedad del conjunto de los cuerpos sea estacionario antes del impacto, también lo será después.

2-Si das dos esfuerzos iguales y contrarios a dos cuerpos, relativos a un sistema de referencia en movimiento, cada cuerpo tiene una velocidad inversamente proporcional a su peso, que es una afirmación muy similar a que dio Wren con sus experimentos, pero más general.

En la Figura 4 se puede apreciar un dibujo realizado por Huygens sobre un barco, durante su estudio sobre la influencia del sistema de referencia.

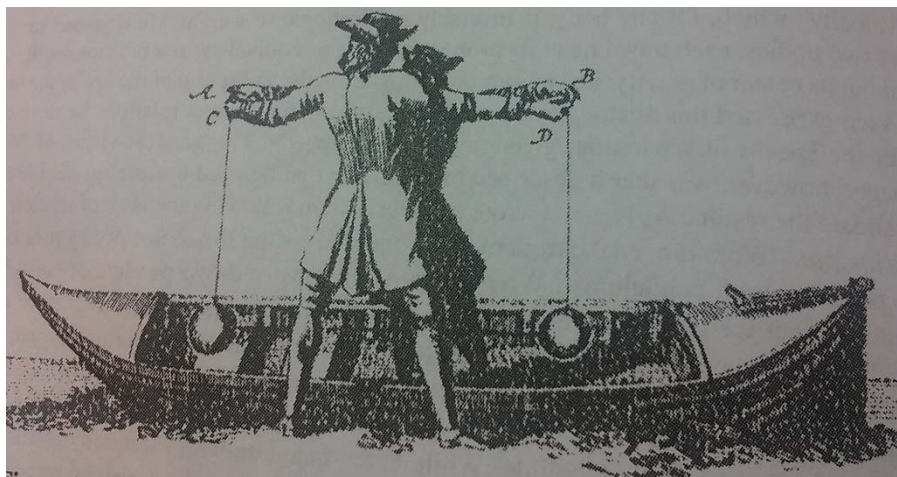


Figura 4-Dibujo realizado por Huygens para estudiar los péndulos en un barco en movimiento (sistema de referencia móvil)



2.1.5 Edmé Mariotte (1620-1684)

Mariotte fue un católico romano que fue más conocido por **su experimentación** que por contribuir a entender los principios del impacto. Sin embargo, escribió un libro muy útil que tenía un método geométrico muy sencillo para resolver los impactos. El método geométrico dividía el estudio del problema en **dos direcciones, la normal y la tangencial** al plano de la tangente común del punto de contacto.

A través de proporciones geométricas resolvía la dirección y velocidad de los impactos, las cuales no eran otra cosa que la expresión la conservación de la cantidad de movimiento. En la Figura 5 se puede observar un esquema del método geométrico desarrollado por Mariotte, en el caso concreto de un impacto oblicuo.

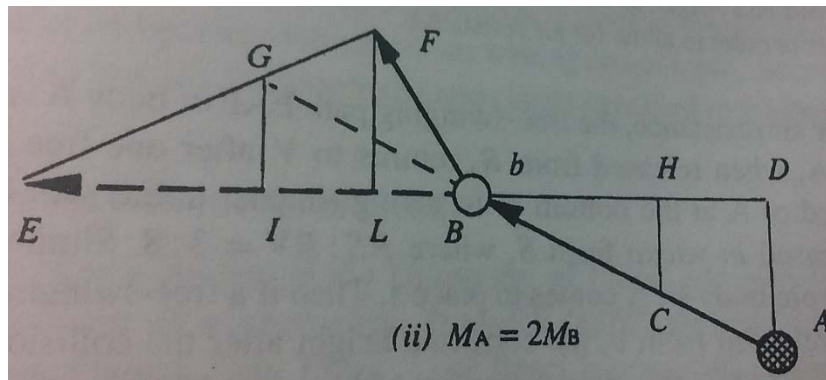


Figura 5-Solución de un impacto oblicuo por el método geométrico de Mariotte.

Para el ejemplo de la Figura 5, la masa A es dos veces la masa B. La componente normal de la velocidad relativa previa al impacto es \overline{DB} . Tras el impacto, la bola A tiene velocidad \overline{BF} , la bola B tiene velocidad \overline{BE} y la velocidad del centro de masas conjunto tras el impacto es \overline{BG} . El triángulo \overline{BHC} representa al centro de masas previo al impacto, y el triángulo \overline{BIG} representa el centro de masas tras impacto. Como el conjunto es igual antes y después, los triángulos son iguales. \overline{HD} es la mitad que \overline{BH} , porque la relación de masas es 2 dos a uno.



2.1.6 Isaac Newton (1642-1727)

Isaac Newton, el más importante de los autores nombrados, estudió en el Trinity College en Cambridge, aunque posteriormente pasó una larga temporada estudiando en solitario recluso en su casa. Este último periodo, en el que desarrolló sus ideas en las áreas de matemáticas, óptica y mecánica fue especialmente fructífero, pues muchas de ellas fueron recogidas posteriormente en su obra *Principia*¹ (1687). Después volvió a Cambridge donde se hizo profesor. Años más tarde su extraordinaria contribución a la ciencia fue reconocida por su país nombrándole presidente de la Royal Society.

Además de los desarrollos individuales que Newton desarrolló en su obra, su mayor contribución fue una nueva forma de aproximarse a los problemas. Él **buscó explicar las causas** del problema más que limitarse a describir su desarrollo. Fue un maestro de sintetizar, por ejemplo, la ley de gravitación universal no es más que una consecuencia de su tercera ley. En su época no hubo ningún otro lugar donde el empleo de experimentos para contrastar la teoría fue tan claro como en sus trabajos sobre impactos.

En su novedosa metodología de ensayos, intentaba eliminar las fuentes de error. Por ejemplo, en el estudio de dos cuerpos pendulares que impactaban, como muestra el dibujo manuscrito de la Figura 6, intentaba corregir la resistencia que ofrecía el aire sobre los cuerpos al caer, modificando la posición de su lanzamiento.

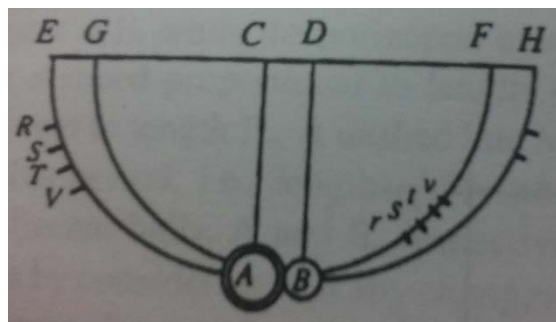


Figura 6-Dibujo recogido en *Principia* sobre los experimentos de impactos entre péndulos. Las marcas R, S, T y V estaban identificadas para corregir los efectos del aire en la caída de los cuerpos.

Newton usó el principio de la tercera ley, acción y reacción, para encontrar que independientemente de la dureza de los cuerpos, los cambios en las velocidades de los elementos que impactan eran directamente proporcionales a la velocidad relativa entre los cuerpos antes del impacto. Sin embargo, encontró que dicha velocidad era dependiente de los cuerpos, esencialmente de su material. Esto ocurrió porque los péndulos que utilizaba tenían



grandes movimientos, y los impactos eran tan bruscos que superó el límite elástico de los materiales, plastificando las superficies de contacto. A pesar de esto, se reconoce que el avance que supuso el escrito de Newton con respecto a los escritos previos sobre impactos representa un tremendo salto desde el punto de vista de la calidad, el estilo y el rigor.

Newton no fue el autor más importante porque consiguiera explicar con su teoría lo sucedido en los impactos, sino porque con misma ley que utilizaba en los impactos ($F=ma$) conseguía explicar también el movimiento de los planetas.

2.1.7 Leonhard Euler (1707-1783)

Euler fue un estudiante de la Universidad de Basel, donde fue dirigido por John Bernoulli, profesor de matemáticas. En 1727 fue nombrado profesor de física de la academia de la Física en San Petersburgo. Es el autor más importante de artículos de matemáticas de cualquier periodo.

Por esas fechas, la real Academia de las Ciencias en París propuso un premio para el más excepcional de los artículos razonados con la percusión o la dinámica de impactos. En 1727 **Colin McLaurin**, profesor de matemáticas de la Universidad de Aberdeen, ganó el premio por su artículo *Demonstration des lois du choc des corps*. McLaurin dijo que las fuerzas que se producen en el punto de contacto son iguales y de sentido contrario (3ª ley de Newton) y usó la **construcción física de un muelle elástico entre las zonas de contacto** de los cuerpos para demostrar la dependencia del fenómeno a la velocidad relativa entre cuerpos y establecer claramente las **fases de aproximación y restitución**.

La primera investigación de dinámica de colisiones **entre cuerpos rígidos en vez de partículas** en colisión fue realizada por **Euler** en 1731 utilizando el concepto, formulado previamente por J. Bernoulli, de momento de inercia de un cuerpo. Los cuerpos que Euler estudió podían trasladarse y rotar, pero se despreciaba la fricción en la zona de contacto, es decir, la fuerza tangencial. **Los centros de gravedad de los cuerpos tenían una excentricidad con respecto al punto de contacto**, por tanto, la configuración del impacto estudiada era no co-lineal.

Euler consideró los casos de impacto perfectamente elástico y perfectamente plástico. Utilizó la idea de McLaurin de representar un elemento elástico infinitesimal para representar la zona de contacto entre cuerpos. Aunque había similitudes, ambos modelos tenían una velocidad relativa distinta durante la colisión. Euler fue el primero que dispuso la fuerza de contacto con una



excentricidad respecto al centro de gravedad de cada cuerpo, donde la velocidad relativa era la suma de la traslación y la rotación. Utilizó el muelle dispuesto en las superficies para determinar las pérdidas de energía en los casos no elásticos.

2.1.8 Sólidos deformables

El estudio de los sólidos deformables supone **la era contemporánea del análisis de impactos**. A continuación, se enumeran algunos autores importantes, mientras que las principales contribuciones serán expuestas más detalladamente en los puntos siguientes.

Uno de los primeros estudios en cuerpos deformables fueron las vibraciones producidas en una barra elástica bajo un impacto longitudinal, que fueron examinadas primeramente por Bernoulli, Navier (1823) y Poisson (1833). Young (1807) y Cox (1849) obtuvieron relaciones simples para deformaciones dinámicas transversales en vigas.

El estudio de las fuerzas producidas en la zona local de contacto fue realizado por Hertz (1881) elaborando la teoría que lleva su nombre.

Sears (1908) aplicó la teoría de Hertz a un impacto longitudinal, mientras que Timoshenko (1913) usó estos resultados para investigar el impacto transversal de una esfera en una viga. Otros autores desarrollaron aplicaciones basados en estos resultados para placas, pilares etc.

Los primeros estudios de impacto que incluían teoría de plasticidad, fueron realizados por autores como Donnell (1930) y Malvern (1951). Posteriormente a estos autores, han sido evaluadas aproximaciones mediante la teoría de propagación de ondas, resultando más rigurosas. Rayleigh (1945) añadió una corrección para la inercia lateral en las ecuaciones para una dimensión en barras. Timoshenko, por su parte, también añadió una corrección a las ecuaciones de Euler para incluir el cortante. Los resultados de estas teorías han sido comparados con las soluciones elásticas en cuerpos 3D y correlaciones similares también han sido empleadas para el cálculo en placas.



2.2 INTRODUCCIÓN A LOS IMPACTOS DE BAJA VELOCIDAD DE CUERPOS RÍGIDOS

Dentro de la amplia casuística que compone el abanico de impactos, se va a proceder en los apartados siguientes a establecer una clasificación general de los impactos, indicando cuales son los más importantes desde el punto de vista de la relación con el presente documento de tesis. De esta manera, se definirá el concepto de **impacto de baja velocidad y de impacto central**, marco principal de la presente investigación.

2.2.1 Tipos de impactos

Existen, de manera general, tres clasificaciones independientes de impactos ya sea según su **velocidad** de impacto, según su **geometría** y según la **naturaleza** de los elementos que intervienen en el impacto.

2.2.1.1 Impactos según la velocidad de impacto

1-Impactos de baja velocidad. En este tipo de impactos los cuerpos que intervienen se mantienen dentro del rango elástico, siendo todas las deformaciones que aparezcan en los mismos recuperables una vez desaparecida la sollicitación. La presente tesis doctoral está enfocada a este tipo de impactos, suponiendo por tanto que los materiales se encuentran en **rango elástico** independientemente del análisis tensional.

2-Impactos de velocidad media. En los impactos de velocidad media se producen **pequeñas plastificaciones** debido a las altas presiones desarrolladas durante el impacto, pero estas están muy concentradas **en la zona de contacto** entre cuerpos. El resto de elementos fuera de dicha zona, la cual por definición se considera pequeña con respecto al total del cuerpo, se mantiene en rango elástico.

3-Impactos de alta velocidad. El impacto de alta velocidad es tan brusco que se desarrollan grandes deformaciones y los cuerpos que interviene en él, con carácter general, se encuentran en **rango plástico**, desarrollando incluso comportamientos viscosos.

2.2.1.2 Impactos según la geometría del impacto



1-Impactos centrales:

En los impactos centrales los centros de gravedad de los cuerpos que impactan y el punto de contacto entre ellos, se encuentran alineados como muestra la Figura 7. Las componentes normal y tangencial del impacto están desacopladas y se pueden tratar de manera independiente. Este tipo de impactos sería el que ocurre por ejemplo en el choque entre bolas de billar.

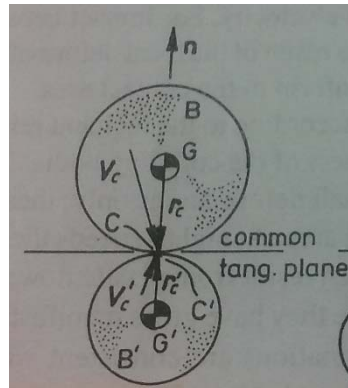


Figura 7-Impactos centrales. Centros de gravedad y punto de contacto alineados.

2-Impactos rotacionales

Este tipo de impacto se produce cuando una colisión implica un **cambio en la velocidad angular de alguno de los cuerpos**. Un ejemplo de este tipo de impactos podría ser, por ejemplo, el caso anterior de las bolas de billar, pero si cada una de ellas además de trasladarse estuviera rotando sobre sí misma con diferentes velocidades angulares. En el momento del contacto, el rozamiento aparecido entre ellas debido a las velocidades angulares distintas provocaría un cambio en cada una de dichas velocidades angulares. **Los centros de gravedad y el punto de contacto están alineados** en este tipo de impactos, como en el caso del impacto central. En la Figura 8 se muestra el caso de una bala impactando contra un péndulo, como otro ejemplo de impacto rotacional.

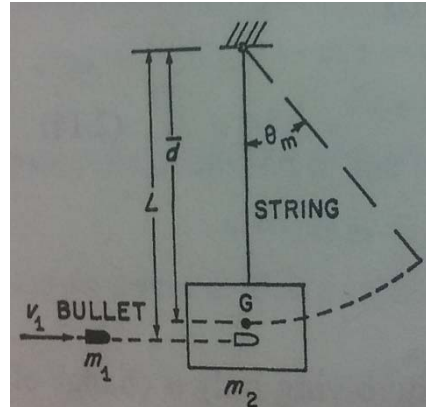


Figura 8-Impacto rotacional en un péndulo (en este caso además excéntrico).

3-Impactos excéntricos

Este tipo de impactos ocurre cuando **los centros de gravedad de los cuerpos que impactan y el punto de contacto entre ellos no están alineados**. Pueden provocar, o no, el cambio de la velocidad angular de los cuerpos que intervienen en el impacto. Si los cuerpos se consideran rugosos en la zona de contacto, la fuerza de rozamiento puede desarrollarse. Bajo estas condiciones, los movimientos en la dirección normal y tangencial están relacionados, dado que la fuerza máxima tangencial que se puede desarrollar depende de la fuerza normal en cada instante. En la Figura 9 se muestra un esquema de dos cuerpos cualquiera en situación de impacto excéntrico.

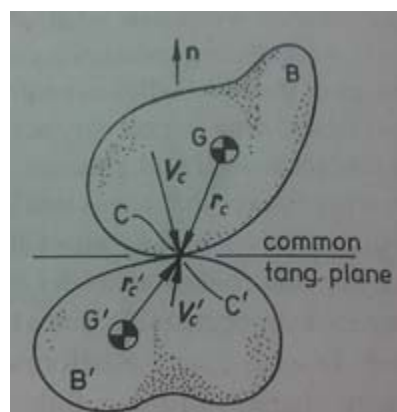


Figura 9- Impactos excéntricos. Centros de gravedad y punto de contacto no alineados



2.2.1.3 Impactos según la naturaleza de los elementos que colisionan.

1- Impactos entre partículas

Es una aproximación analítica, pues el elemento es puntual, esférico y suave (sin rozamiento) como muestra la Figura 10. Debido a estas hipótesis, estos impactos sólo permiten calcular cambios en la dirección normal del impacto. En estos impactos ideales, las incógnitas con interés de resolver son únicamente las velocidades finales de las partículas y no la fuerza producida en el impacto. Cualquier cambio de velocidad que se considere instantáneo en un cuerpo, lleva implícita la hipótesis de fuerza infinita porque la aceleración necesaria para un cambio de velocidades instantáneo es infinita.

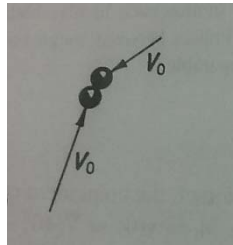


Figura 10-Impacto ideal entre partículas.

2- Impactos entre cuerpos rígidos

Este tipo de impacto ocurre cuando impactan cuerpos considerados **infinitamente rígidos, pero con una zona de contacto elástica pequeña** en comparación con el resto del elemento. Esta zona de contacto es deformable, de alta rigidez, y absorbe energía por deformación. El tiempo de impacto depende de dicha rigidez y de la masa de los cuerpos. Un ejemplo clásico de este tipo de impactos es la colisión entre un palo de golf y la pelota como muestra la Figura 11.



Figura 11-El impacto de palo de golf con una bola se asemeja a un impacto de cuerpos rígidos.



3- Impactos entre cuerpos flexibles

Los impactos en cuerpos flexibles son aquellos impactos en los que las deformaciones a nivel global en, al menos, uno de los cuerpos que impacta, tienen influencia tanto en la fuerza de contacto como en el tiempo de duración del impacto. Con carácter general, se puede indicar que la deformación de los cuerpos tiende a hacer más suave y más lento el impacto. Para cuerpos flexibles todas las bibliografías distinguen claramente, al menos, entre dos subtipos de impactos: impactos transversales e impactos longitudinales. Ambos serán analizados en la presente tesis.

Los impactos transversales son aquellos en los que, alejados de la zona de contacto, la componente de flexión desarrollada por al menos uno de los cuerpos durante el impacto es importante en el desarrollo del mismo. Las **ondas trasversales** generadas por la flexión absorben energía disminuyendo la fuerza de contacto y ampliando el tiempo de impacto. Un martillo golpeando transversalmente una barra, es un ejemplo de impacto trasversal, como muestra la Figura 12 izquierda.

Los impactos axiales generan **ondas longitudinales** que, del mismo modo que en la flexión, absorben energía disminuyendo la fuerza de contacto y ampliando, generalmente, el tiempo de impacto. Dos elementos impactando según su eje longitudinal, como muestra la Figura 12 derecha, es un ejemplo de impacto axial.

Tanto en los impactos transversales como en los longitudinales la presencia de **puntos de apoyo** en el cuerpo influye generalmente en desarrollo de la onda y es la principal frontera entre el impacto entre **estructuras** (se consideran apoyadas y por tanto impedidos los movimientos de traslación y rotación) y **los cuerpos libres**.

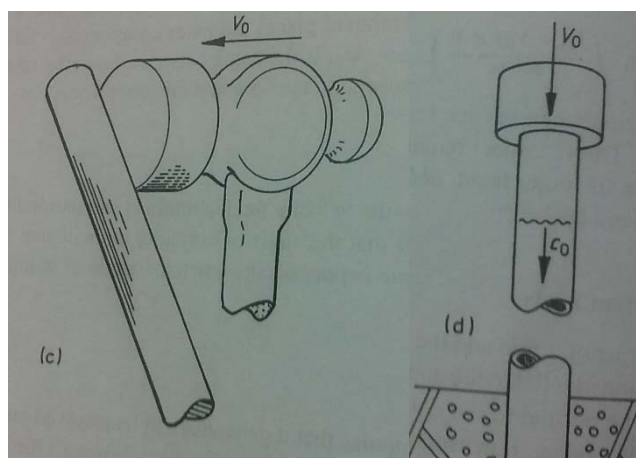


Figura 12- Impacto flexible trasversal y longitudinal.



2.2.2 Hipótesis de un impacto entre cuerpos rígidos

Para estos impactos, los cuerpos que intervienen se consideran infinitamente rígidos salvo la pequeña zona local de contacto entre los cuerpos. Esta zona elástica, pero muy rígida, genera con pequeñas deformaciones grandes presiones que componen la fuerza de contacto. Debido a dicha rigidez, esta fuerza es muy elevada y cambia rápidamente la componente normal de las velocidades de los cuerpos involucrados en el impacto.

Las grandes presiones de la zona de contacto pueden exceder el límite elástico del material. Según la bibliografía consultada, como por ejemplo el libro *Impacts mechanics* de Stronge WJ.⁵, para pequeñas velocidades relativas de impacto (del orden de 0.1m/s en metales estructurales) se producen pequeñas deformaciones plásticas que disipan energía, consecuentemente se produce pérdida de energía y, por tanto, de movimiento relativo en la mayoría de los choques metálicos. Aunque las tensiones de la zona de contacto son muy elevadas, estas desaparecen muy rápidamente si te alejas de la zona de contacto. Por este motivo, **para los impactos de cuerpos solidos la hipótesis de que las deformaciones están concentradas en la zona de contacto, es una hipótesis adecuada.**

Derivada de la hipótesis de zona de contacto pequeña con una rigidez muy elevada, se deduce que el **tiempo de contacto entre cuerpos es muy pequeño**. Este tiempo tan pequeño provoca que el movimiento producido en los cuerpos durante el impacto sea prácticamente nulo, pudiéndose considerar este tipo de impacto como **“instantáneo”**.

A partir de estas consideraciones, se pueden enumerar las hipótesis de cálculo bajo las cuales la teoría de cuerpos rígidos puede ser aplicada.

1-**La zona de contacto** entre cuerpos es **pequeña** en comparación con la sección transversal y la longitud (perpendicular al plano de contacto) de los cuerpos que colisionan.

2-**El tiempo de impacto** o tiempo durante el cual se produce el contacto entre cuerpos, es muy corto debido a elevada rigidez de la zona de contacto. Tan corto, que afectos de cálculo se puede considerar **instantáneo**.

3-Dado que se puede considerar instantáneo, el movimiento producido en los cuerpos es despreciable y se pueden obtener las ecuaciones del movimiento de los cuerpos tras el impacto por simples **relaciones algebraicas**.



4-Las fuerzas de contacto son tan elevadas que otras fuerzas como **la gravitatoria, magnética etc. se consideran despreciables.**

La simulación de la zona de contacto entre cuerpos rígidos se realiza, entre otras formas, suponiendo una partícula infinitesimal deformable entre los cuerpos que colisionan. Esta construcción física permite resolver los cambios en la velocidad normal relativa entre los cuerpos rígidos. Esta componente normal del impulso es equivalente a la integral de la fuerza normal de contacto a lo largo del tiempo de impacto. La variación de la velocidad de los cuerpos durante un impacto “instantáneo” se resuelve eligiendo una variable independiente, normalmente **la variación de la componente normal de la cantidad de movimiento con respecto al tiempo**. Esta solución proporciona una transición suave entre las velocidades de los cuerpos inicial y final.

Existen 3 situaciones principales en las que la teoría de cuerpos rígidos no puede ser aplicada:

1-La zona de contacto no es pequeña frente a la sección completa. Si esto fuera así, la fuerza de rozamiento entre cuerpos podría no ser despreciable y por tanto debería tenerse en cuenta. Con la teoría de cuerpos rígidos la variación sólo se produce en la componente normal de la cantidad de movimiento.

2- En impactos donde se desarrolle ondas longitudinales cuya energía de vibración no pueda ser considerada despreciable.

3-En impactos donde se desarrollen ondas transversales cuya energía de vibración no pueda ser considerada despreciable.



2.2.3 Impactos de baja velocidad

Los impactos de baja velocidad son aquellos en los que las deformaciones sufridas durante la colisión sobre los cuerpos no son relativamente grandes. Además, las velocidades son tan bajas que **no se producen plastificaciones** o éstas son totalmente anecdóticas desde el punto de vista del comportamiento general de los cuerpos.

Las principales teorías para analizar, de menor a mayor grado de precisión, los cambios de velocidad en cuerpos que colisionan para impactos considerados de baja velocidad son las siguientes:

-Impacto estéreo-mecánico: En esta teoría, la más sencilla, los cuerpos son infinitamente rígidos. Los cuerpos sufren cambios de velocidad instantáneos. Solo se pueden obtener las velocidades finales de los cuerpos.

-Impacto de cuerpos rígidos: Como se ha comentado previamente, en esta teoría los cuerpos que colisionan siguen siendo infinitamente rígidos, pero disponen de una pequeña zona elástica en la zona de contacto entre cuerpos. Estos impactos son tan rápidos debido a la rigidez de la zona de contacto que se considera que, aunque uno de estos cuerpos esté apoyado en otro, la fuerza de impacto depende únicamente de la zona local de contacto. Es decir, la fuerza que se produce durante el impacto se considera independiente de las reacciones de los apoyos (ver esquema en Tabla 1).

-Impacto de cuerpos apoyados elásticamente: Esta teoría es una mejora de la teoría de cuerpos rígidos. Propone lo mismo que la teoría de cuerpos rígidos, pero con la diferencia de que tiene en cuenta en los cálculos las reacciones de los apoyos a la hora de calcular la fuerza de contacto surgida entre los cuerpos que colisionan.

-Impacto elástico: Esta es la teoría más completa, dado que a flexibilidad de los cuerpos que colisionan se tiene en consideración porque la energía de deformación desarrollada durante el impacto puede no ser despreciable.

En la Tabla 1 se recogen de manera esquemática estas teorías, indicando su esfuerzo de cálculo.



Tabla 1-Tipos de impactos de baja velocidad.

TEORIA DE IMPACTO	VARIABLE INDEPENDIENTE	ESFUERZO DE CÁLCULO	ILUSTRACIÓN
ESTEREO-MECÁNICA	Ninguna	Muy Bajo	
CUERPOS RÍGIDOS	Cantidad de movimiento	Bajo	
APOYOS ELASTICOS	Tiempo	Moderado	
CUERPOS ELASTICOS	Tiempo	Alto	

Las tres primeras teorías expuestas en la Tabla 1, con el paso del tiempo y debido a su proximidad, se han englobado dentro de una teoría general para impactos de cuerpos rígidos. En los apartados 2.3 y 2.4 se describen las teorías de impactos en cuerpos rígidos y en cuerpos flexibles, respectivamente.



- Desarrollo de teoría sobre impactos -
- Método simplificado de cálculo de impactos en estructuras -





2.3 IMPACTOS DE CUERPOS RÍGIDOS

2.3.1 Impactos estéreo-mecánicos

El impacto llamado como estéreo-mecánico, o simplemente mecánico según la bibliografía que se consulte, es el más utilizado en la historia de los impactos por su sencillez y su gran utilidad.

La gran ventaja de esta teoría de impactos reside en que, si se conoce el llamado coeficiente de restitución de los objetos que colisionan, además obviamente de las velocidades y posiciones de los cuerpos previas al impacto, se conocen automáticamente las velocidades finales de los objetos, y por tanto sus posiciones en el espacio para cualquier tiempo.

Antes de definir de manera más precisa el **coeficiente de restitución**, el cual es de vital importancia para esta teoría, se puede describir este valor como el parámetro que regula el grado de plasticidad del impacto. El valor del coeficiente de restitución varía entre 0 y 1, siendo 1 el valor en los casos elásticos perfectos (se conserva el 100% de la energía mecánica durante el impacto) y 0 en los casos plásticos perfectos (los cuerpos quedan pegados tras el impacto). Entre 0 y 1, este parámetro determina la amplia casuística existente entre los límites del elástico perfecto y del plástico perfecto.

Las limitaciones que presenta esta teoría son dos principalmente:

- El coeficiente de restitución depende de muchos factores, de los materiales (originariamente se creía que sólo dependía de este parámetro), de las masas, de las formas, de las velocidades, etc. Este hecho provoca que prácticamente cada caso requiera de su propio coeficiente de restitución, los cuales se obtienen en su mayoría por experimentación. Para mostrar lo específico de este coeficiente, se exponen en la Figura 13 y en la Figura 14, los resultados experimentales de distintos ensayos para obtener el coeficiente de restitución, identificado en el eje de ordenadas, entre esferas que colisionan a distintas velocidades, mostradas en el eje de abscisas. En la Figura 13 se pueden ver distintas curvas en función del material de las esferas, mientras que en la Figura 14, se incluyen curvas según la relación de pesos de las esferas.

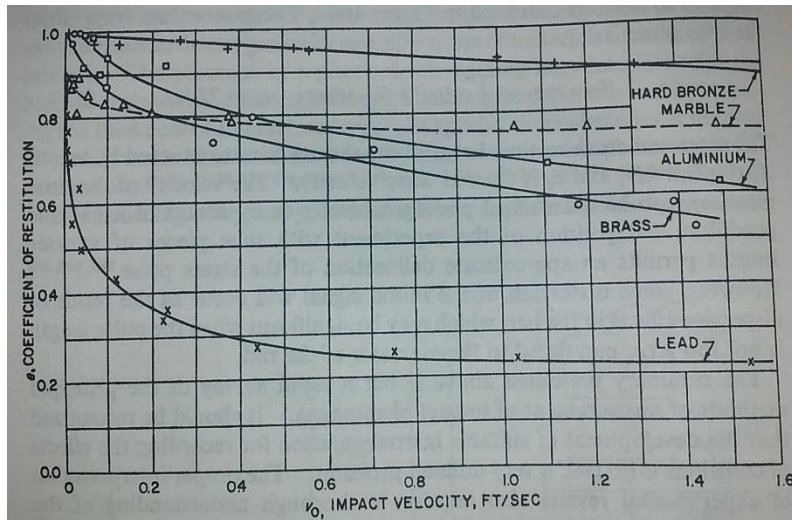


Figura 13- Coeficientes de restitución de esferas del mismo material y tamaño en función de la velocidad de impacto. Ensayos realizados por Raman C. (1918) ^{6,7}.

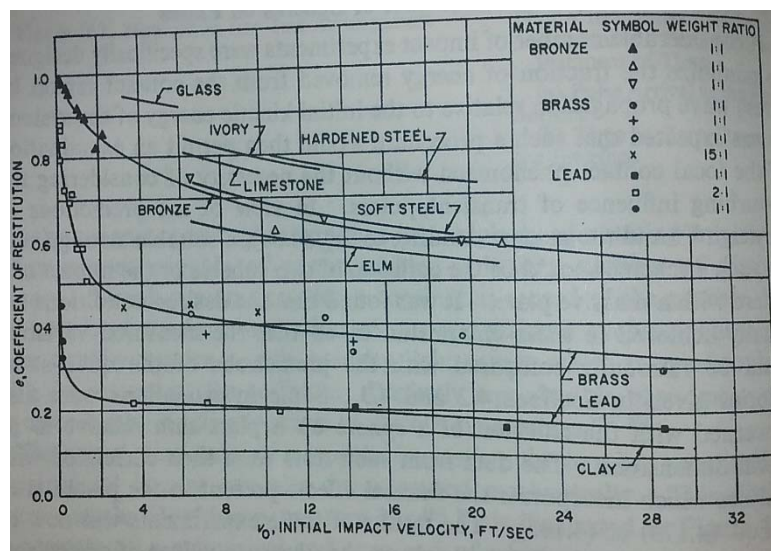


Figura 14- Coeficientes de restitución de esferas del mismo material y distintas relaciones de pesos en función de la velocidad de impacto. Ensayos realizados por Goldsmith W. (1952), Haughton S. (1862), Hodgkinson E. (1835) y Tait P.G. (1900) ⁸⁻¹¹.

- Esta teoría no aporta nada de información sobre las fuerzas que se producen durante el impacto, por lo que, si el objeto del estudio además de conocer las posiciones finales de los cuerpos es saber si los cuerpos resistirán el impacto, la teoría se convierte en inadecuada.



2.3.1.1 Fases del impacto

Para esta teoría, y en general para todas las que en este documento se exponen, se asumen dos fases durante el impacto.

- **La primera fase o fase de aproximación.**
- **La segunda fase o fase de restitución.**

Durante la fase de aproximación los cuerpos incrementan su deformación al estar “juntándose” por la compresión del impacto, mientras que en la fase de restitución los cuerpos se están “separando” o descomprimiendo. La deformación en cada fase del impacto a lo largo del tiempo que dura el impacto, en función del grado de plasticidad del impacto, se muestra en la Figura 15.

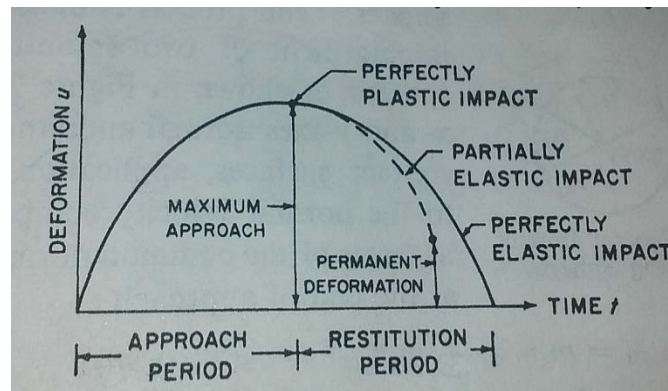


Figura 15-Hipótesis de fases producidas durante el impacto estéreo-mecánico. Goldsmith W.(2001)¹²

Como se puede ver en la Figura 15, sólo la fase de restitución está afectada por el grado de plasticidad del impacto. Si el impacto es perfectamente plástico ($e = 0$), la fase de restitución no existe, y si es perfectamente elástico ($e = 1$), la fase de restitución es idéntica a la fase de aproximación. En un impacto general parcialmente elástico ($0 < e < 1$), la fase de restitución será de menor duración que la fase de aproximación.

A partir de estas dos fases se define el coeficiente de restitución, como la relación de la cantidad de movimiento P entre la fase de restitución (P_2) y la fase de aproximación (P_1)

$$e = P_2/P_1 \quad (2)$$

Esta relación de e es equivalente a la relación de velocidades relativas después del impacto (V_f) y previas (V_o) de dos cuerpos (A y B). Esta última relación es la que permite medir, de manera muy sencilla, el coeficiente de restitución en un ensayo.



$$e = \frac{V_{A,f} - V_{B,f}}{V_{A,o} - V_{B,o}} \quad (3)$$

Ambas relaciones de e expresadas en la ecuación (2) y la ecuación (3) son equivalentes.

Como se puede deducir de la expresión (3) para un impacto perfectamente elástico ($e = 1$) las velocidades relativas entre los cuerpos antes del impacto y después, son la misma. Para un impacto parcialmente elástico ($0 < e < 1$) la velocidad relativa entre los cuerpos después del impacto es menor que antes, por este motivo el coeficiente de restitución es una medida de la pérdida de la cantidad del movimiento, y por tanto de energía, del sistema en un impacto.

2.3.1.2 Resolución del impacto

Conocido el coeficiente de restitución, todos los impactos estéreo-mecánicos, se resuelven de la misma manera. Esta forma es con la conservación del momento lineal o conservación de la cantidad de movimiento (4) y la conservación del momento angular (5):

$$\Delta mV = \int_0^t F(t)dt = P \quad (4)$$

$$\Delta Iw = \int_0^t F(t)r dt = P \quad (5)$$

Donde m es la masa, I es el momento de inercia sobre el eje de rotación, V la velocidad lineal, w la velocidad angular, r es la distancia al punto del que se toma momento, $F(t)$ es la fuerza de impacto y t el tiempo.

A continuación, se exponen unos ejemplos de resolución, de más simple a más compleja, para distintos tipos de impactos.

2.3.1.3 Impacto central-liso

En el impacto central y no rugoso, por definición, el impacto sólo provoca cambios en la componente normal al plano de impacto (eje x en la Figura 16) dado que la componente tangencial se desprecia. Para este caso, si las esferas estuvieran rotando sobre su propio eje, a la vez que se trasladan, no sufrirían cambio alguno en su rotación.

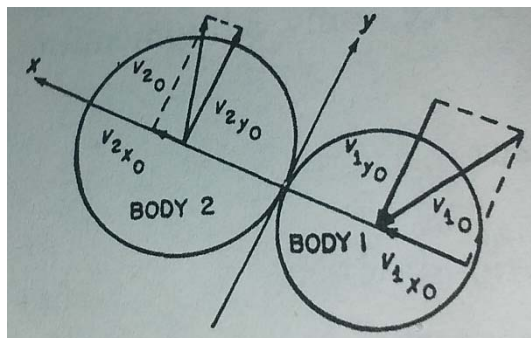


Figura 16-Impacto central liso sin rotación entre dos esferas.

Dado que, en su caso, no hay cambios en la rotación y el movimiento es únicamente de traslación, basta con establecer la ecuación de la conservación del momento lineal (6) y del coeficiente de restitución (7), ambas para la componente normal al plano de impacto.

$$m_1 V_{1,x0} + m_2 V_{2,x0} = m_1 V_{1,xf} + m_2 V_{2,xf} \quad (6)$$

$$e = \frac{V_{2,xf} - V_{1,xf}}{V_{2,x0} - V_{1,x0}} \quad (7)$$

Del sistema de ecuaciones (6) y (7) se pueden obtener las velocidades finales de la componente normal del movimiento (la componente tangencial se mantiene intacta por ser cuerpos lisos) una vez producido el impacto:

$$V_{1,xf} = V_{1,x0} - (1 + e) \frac{m_2 V_{1,x0} - m_2 V_{2,x0}}{m_1 + m_2} \quad (8)$$

$$V_{2,xf} = V_{2,x0} + (1 + e) \frac{m_1 V_{1,x0} - m_1 V_{2,x0}}{m_1 + m_2} \quad (9)$$

2.3.1.4 Impacto excéntrico-liso

Como se ha comentado con anterioridad, el impacto excéntrico es aquél en el que el punto de impacto y los centros de gravedad de los cuerpos que impactan no están alineados.

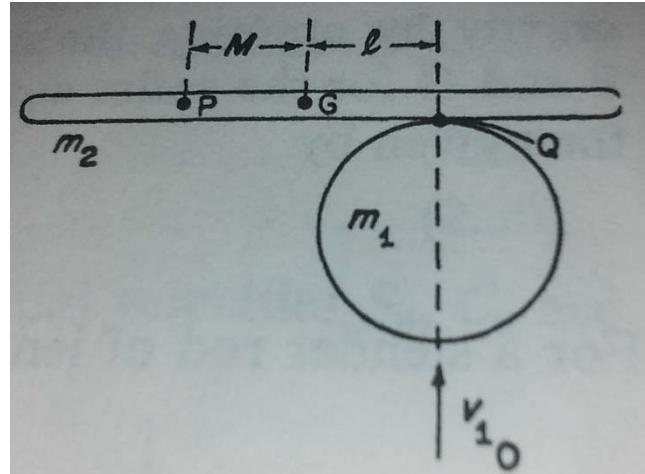


Figura 17-Impacto excéntrico. Esfera impacta en barra.

Para el ejemplo mostrado en la Figura 17, se va a hacer impactar de manera elástica una esfera (m_1) con una velocidad inicial ($V_{1,0}$) con una barra (m_2, I_2) en reposo en un punto (Q), situado a una distancia (l) del centro de gravedad de la barra. Para este caso, y dado que se van a producir cambios en la velocidad angular (de la barra) hay que aplicar la conservación del momento lineal y del momento angular. Además, se define la velocidad del punto Q en la barra como la suma del movimiento de traslación (del centro de gravedad G) más el movimiento de rotación sobre su eje (w).

$$V_{2,Q} = v_{2,G} + wl \quad (10)$$

Conservación del momento lineal

$$m_1 V_{1,0} - m_1 V_{2,Q} = m_2 V_{2,G} = \int_0^t F_n(t) dt \quad (11)$$

Conservación del momento angular

$$I_2 w = l \int_0^t F_n(t) dt \quad (12)$$

El momento de inercia de la barra es el producto de la masa por una distancia (k), que varía según la geometría de la barra, al cuadrado.

$$I_2 = m_2 k^2 \quad (13)$$

A partir de las ecuaciones (10) (11) (12) y (13) se puede resolver la velocidad final de la barra en el punto (Q) tras el impacto, ya que son 4 ecuaciones con cuatro incógnitas.



$$V_{2,Q} = \frac{m_1 V_{1,o}}{m_1 + m_{2,eff}} \quad (14)$$

Siendo,

$$m_{2,eff} = \frac{m_2 k^2}{k^2 + l^2} \quad (15)$$

Esta forma de presentar el resultado final en función de la masa eficaz $m_{2,eff}$, como una parte de la masa m_2 es muy interesante porque permite, conocido este porcentaje, **tratar el caso del impacto excéntrico como impacto central entre dos masas, m_1 y $m_{2,eff}$** . Para este ejemplo, el valor de e se ha tomado la unidad, pero un caso inelástico se resuelve de manera sencilla si se aplica el coeficiente de restitución e al impacto central entre m_1 y $m_{2,eff}$.

2.3.1.5 Impacto excéntrico-rugoso

Para un impacto en el plano, el caso más general es el que se plantea a continuación. Dos cuerpos con velocidades de traslación y de rotación colisionan de manera excéntrica con un coeficiente de fricción entre ellos de valor f . El impacto presenta un coeficiente de restitución e . En la Figura 18 se puede observar los signos de velocidades y fuerzas, así como las coordenadas de los centros de gravedad de los objetos para el sistema de coordenadas establecido en el punto de contacto. La nomenclatura de los parámetros es la es la utilizada anteriormente.

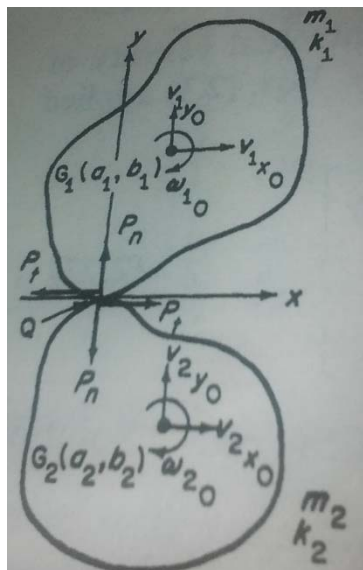


Figura 18-Impacto excéntrico rugoso plano. Planteamiento general.



Los cambios producidos en las velocidades de los cuerpos durante el impacto están gobernados por el coeficiente de fricción f y el coeficiente de restitución e . Los coeficientes de fricción para impactos dinámicos determinados experimentalmente no tienen una precisión muy elevada, no obstante, se mantiene el valor genérico f .

Por analogía del concepto habitual de fricción se determina la relación:

$$P_t = f P_n \text{ para situación de deslizamiento} \quad (16)$$

$$P_t < f P_n \text{ para situación de no deslizamiento} \quad (17)$$

Siendo P_n y P_t la cantidad movimiento normal y tangencial respectivamente.

La solución del problema pasa por plantear las ecuaciones del momento lineal por componentes y la ecuación del momento angular.

$$\begin{aligned} m_1(V_{1,x} - V_{1,x0}) &= -P_t \\ m_1(V_{1,y} - V_{1,y0}) &= P_n \\ m_1 k_1^2 (w_1 - w_{1,o}) &= -P_t b_1 + P_n a_1 \\ m_2(V_{2,x} - V_{2,x0}) &= P_t \\ m_1(V_{2,y} - V_{2,y0}) &= -P_n \\ m_2 k_2^2 (w_2 - w_{2,o}) &= -P_t b_2 + P_n a_2 \end{aligned} \quad (18)$$

La velocidad relativa de deslizamiento se define con la letra S y la velocidad relativa de compresión con la letra C , y se obtienen con las siguientes relaciones:

$$S = V_{1,x} - b_1 w_1 - (V_{2,x} + w_2 b_2) \quad (19)$$

$$C = V_{2,y} - a_2 w_2 - (V_{1,y} + w_1 a_1) \quad (20)$$

Donde si $S > 0$ significa que el cuerpo 1 desliza sobre el cuerpo 2 y $C > 0$ siempre por definición.

A partir de las ecuaciones (18), (19) y (20) se obtienen las siguientes expresiones:

$$S = S_o - B_1 P_t - B_3 P_n \quad (21)$$

$$C = C_o - B_3 P_t - B_2 P_n \quad (22)$$



Donde las constantes S_0 y C_0 son las velocidades relativas de deslizamiento y compresión iniciales, y B_1, B_2 y B_3 son constantes del Sistema. Los valores de todas ellas se muestran a continuación a partir de los parámetros iniciales:

$$\begin{aligned}
 B_1 &= \frac{1}{m_1} + \frac{1}{m_2} + \frac{b_1^2}{m_1 k_1^2} + \frac{b_2^2}{m_2 k_2^2} \\
 B_2 &= \frac{1}{m_1} + \frac{1}{m_2} + \frac{a_1^2}{m_1 k_1^2} + \frac{a_2^2}{m_2 k_2^2} \\
 B_3 &= \frac{a_1 b_1}{m_1 k_1^2} - \frac{a_2 b_2}{m_2 k_2^2}
 \end{aligned}
 \tag{23}$$

$$S_0 = v_{1,x0} - b_1 w_{1,0} - (v_{2,x0} + w_{2,0} b_2)$$

$$C_0 = v_{2,y0} - a_2 w_{2,0} - (v_{1,y0} + w_{1,0} a_1)$$

Para un caso general, como es el descrito, en el que los cuerpos son parcialmente rugosos y parcialmente elásticos, ha de recurrirse a un método gráfico para su resolución. Para ello se elabora un gráfico con las ecuaciones (18) a (23). El gráfico, en términos genéricos, está representado en las figuras inferiores. Para el caso de la figura de la izquierda, tras una primera fase de deslizamiento que termina en el punto Q_1 , los cuerpos dejan de deslizar. En la imagen de la derecha, tras la fase inicial de deslizamiento que termina en Q_1 aparece un deslizamiento en sentido contrario, es decir los cuerpos siempre están deslizando en esta situación.

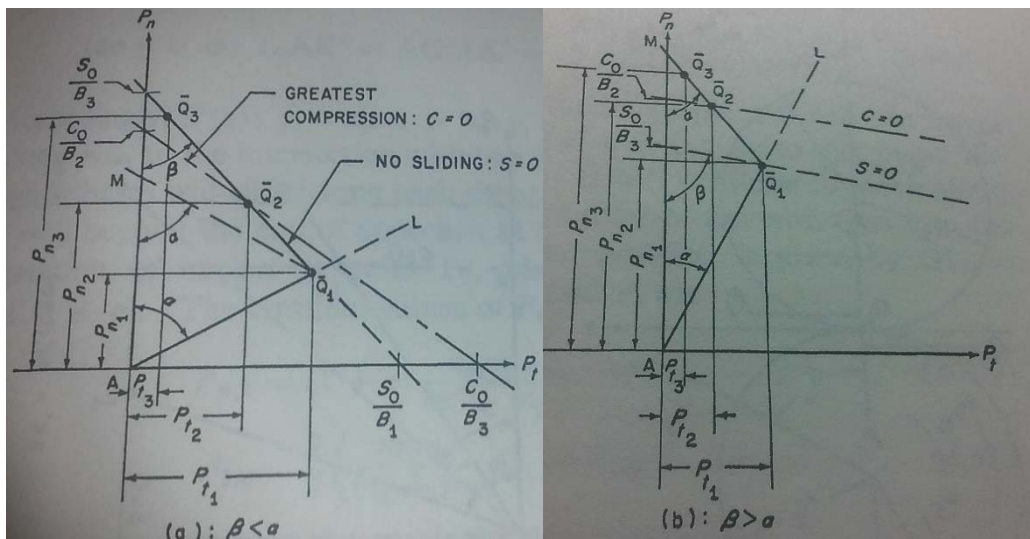


Figura 19-Resolución gráfica para los casos de deslizamiento inicial (izquierda) y deslizamiento continuo (derecha).



El punto Q_2 , en ambos casos, es el punto donde se termina la fase de aproximación y empieza la fase de restitución. El punto Q_3 es el punto donde finaliza la fase de restitución, es decir, los cuerpos se separan (excepto en el caso de perfectamente plástico).

No es el caso entrar en el detalle de la resolución problema, se puede consultar en el capítulo *Impact of two bodies in plane motion* del libro *Impacts* de Stronge WJ.¹³, pero la resolución pasa por obtener gráficamente el punto Q_2 y a partir del coeficiente de restitución e obtener $P_{n,3}$ mediante la relación:

$$P_{n,3} = P_{n,2} (1 + e) \quad (24)$$

Obteniendo $P_{t,3}$ de las ecuaciones expuestas anteriormente (18).

Este ejemplo se ha desarrollado para un caso de dos dimensiones por simplicidad, resolviéndose en tres dimensiones de manera análoga, pero incluyendo la dimensión restante.

2.3.1.6 Ecuación de Lagrange para movimiento con impulsos

Por último, se mostrará a continuación como resolver impactos del tipo estéreo-mecánicos a partir de la ecuación de Lagrange.

La ecuación de Lagrange para el movimiento se suele escribir de la siguiente forma:

$$\frac{d}{dt} \left[\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_i} \right] - \frac{\partial T}{\partial q_i} + \frac{\partial V}{\partial q_i} = Q_i \quad \text{con } i = 1, 2, \dots, n \quad (25)$$

Donde V es la energía potencial, T la energía cinética, Q es la fuerza externa generalizada correspondiente a la coordenada general q_i .

Esta ecuación es un claro ejemplo de la dificultad de entender de física la herramienta matemática. La ecuación (25) expresa, traducida a un lenguaje más accesible, que la acción de las fuerzas de inercia son las responsables de la variación de la energía cinética, mientras que la acción de la fuerza exterior es la responsable de la variación de la energía potencial. Es decir, que la acción de las fuerzas sobre el sistema son las responsables de los cambios en la energía del propio sistema.



Esta ecuación puede ser fácilmente adaptada a un periodo de tiempo de duración de un impacto

τ . La integración de la ecuación (25) sobre un intervalo desde t hasta $t + \tau$ queda:

$$\int_t^{t+\tau} d/dt [\partial T / \partial \dot{q}_i] dt - \int_t^{t+\tau} \partial T / \partial q_i dt + \int_t^{t+\tau} \frac{\partial V}{\partial q_i} dt \quad (26)$$

$$= \int_t^{t+\tau} Q_i dt$$

El primer término de la ecuación (26) puede ser integrado directamente, resultando:

$$[\partial T / \partial \dot{q}_i]_{t+\tau} - [\partial T / \partial \dot{q}_i]_t = \Delta [\partial T / \partial \dot{q}_i] \quad (27)$$

Si se considera el intervalo de tiempo τ lo suficientemente pequeño, éste no supondrá un cambio de la posición significativa de los objetos que impactan. Si la posición se considera constante, la variación de la energía con respecto a la posición será nula en ese intervalo y, por tanto, el segundo y el tercer término de la ecuación (26) pueden considerarse despreciables. Por otro lado, el término de la derecha representa el impulso.

$$\Delta [\partial T / \partial \dot{q}_i] = P_i \quad (28)$$

De esta forma queda directamente relacionado el incremento de momento con el impulso producido por la fuerza.

Como ejemplo de aplicación de la ecuación (28) se calcula el impacto inelástico, sin rozamiento, de una barra rígida en movimiento contra el plano horizontal como indica la Figura 20.

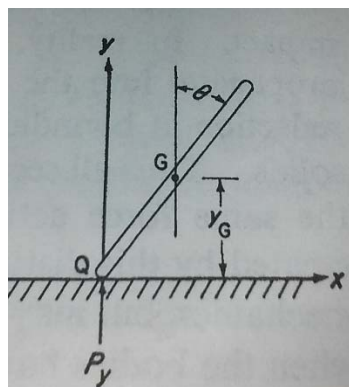


Figura 20-Choque sin rozamiento e inelástico de una barra rígida contra un plano horizontal.

La barra de longitud L y masa m tiene un momento de inercia respecto del plano horizontal de valor $\frac{1}{12} mL^2$. Las coordenadas generalizadas utilizadas son en este caso la altura del centro de



gravedad de la barra (Y_G) y el ángulo de la barra con respecto al eje vertical (θ). Estos valores son fijos dado que el cambio de velocidades que origina el impacto es considerado instantáneo para este tipo de impactos. La energía cinética del sistema resulta.

$$T = \frac{1}{2} m \dot{Y}_G^2 + \frac{1}{2} \left(\frac{1}{12} mL^2 \right) \dot{\theta}^2 \quad (29)$$

La reacción que origina el impulso vertical en el punto de contacto Q produce los impulsos generalizados P_y y $\frac{1}{2} P_y L \text{sen}(\theta)$ para las coordenadas generalizadas Y_G y θ respectivamente (los subíndices f y o hacen referencia al instante justo después y justo antes del impacto, respectivamente).

$$\Delta \left[\frac{\partial T}{\partial \dot{Y}_G} \right] = m(\dot{Y}_{G,f} - \dot{Y}_{G,o}) = P_y \quad (30)$$

$$\Delta \left[\frac{\partial T}{\partial \dot{\theta}} \right] = \frac{1}{12} mL^2 (\dot{\theta}_f^2 - \dot{\theta}_o^2) = \frac{1}{2} P_y L \text{sen}(\theta) \quad (31)$$

La condición de contorno se establece en el punto Q donde no se produce despegue del contacto durante el impacto.

$$\frac{1}{2} \dot{\theta}_f L \text{sen}(\theta) + \dot{Y}_{G,f} = 0 \quad (32)$$

Sustituyendo (32) en (30) y (31) resulta:

$$\dot{Y}_{G,f} = (-L \text{sen}(\theta) [3\dot{Y}_{G,o} \frac{\text{sen}(\theta)}{L} + \frac{1}{2} \dot{\theta}_o]) / (1 + 3 \text{sen}(\theta)^2) \quad (33)$$

$$\dot{\theta}_f = (\dot{\theta}_o + 6\dot{Y}_{G,o} \text{sen}(\theta)/L) / (1 + 3 \text{sen}(\theta)^2) \quad (34)$$

$$P_y = m(\dot{Y}_{G,o} - \frac{1}{2} L \dot{\theta}_o \text{sen}(\theta)) / (1 + 3 \text{sen}(\theta)^2) \quad (35)$$

De esta forma queda determinada la trayectoria del centro de gravedad, y por extensión de toda la barra, tras el impacto.



2.3.2 Impactos de cuerpos rígidos co-lineales con superficies suaves

En el punto anterior, denominado de impactos estéreo-mecánicos, los cuerpos que chocaban eran completa e infinitamente rígidos. No es el caso de los impactos estudiados en este apartado denominados de cuerpos rígidos, donde una pequeña zona de los cuerpos que impactan, concretamente la zona de contacto, es deformable a diferencia del resto del cuerpo.

En este apartado, además de lo dicho, los impactos estudiados son los impactos co-lineales, es decir, sin excentricidad entre los centros de gravedad y el punto de contacto, y sin rozamiento. Debido a esto, la fuerza de contacto en el plano tangente común es nula. Es un tipo de impacto muy importante, a pesar de su sencillez, pues permite dar respuesta a un gran número de casos. Desde el punto de vista de la tesis, es el caso más importante, dado que uno de los objetivos principales de la tesis es entender conceptualmente el impacto y para ello es importante liberarse de fuerzas de rozamiento, excentricidades etc. que aportan complejidad de resolución, pero no de concepto. La expresión de un tipo más complejo de impacto será obvia una vez determinada la expresión conceptual.

En la Figura 21 se puede observar el esquema de cálculo de este tipo de impactos, donde una partícula deformable en la zona de contacto permite el cálculo y la resolución del mismo.

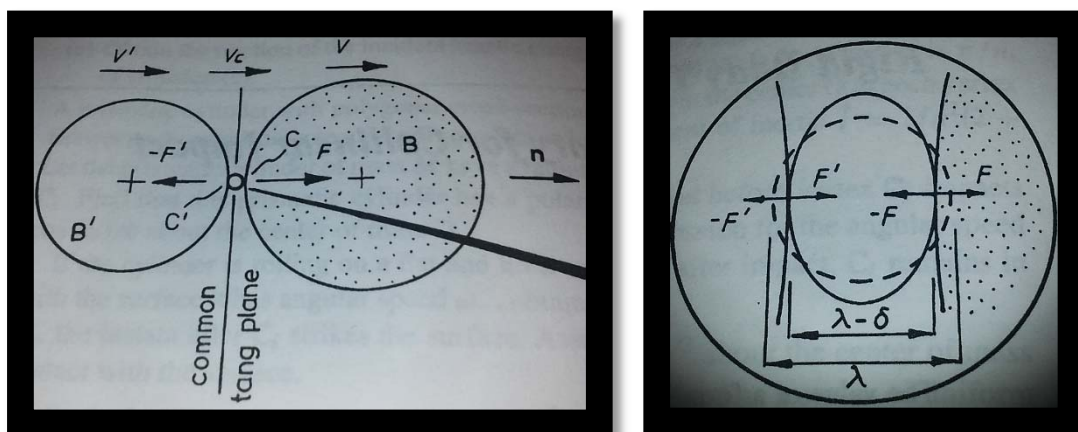


Figura 21-Eschema de impacto de cuerpos rígidos. Partícula deformable intermedia.



2.3.2.1 Ecuación del movimiento relativo para el impacto directo

La asunción de la deformación de los cuerpos que impactan se concentra en una partícula infinitesimal y deformable en el punto de contacto como muestra la Figura 21. **Esta partícula es la que permite obtener, de manera suave, los cambios en la velocidad relativa entre los cuerpos que impactan.**

En el punto de contacto, los cuerpos B y B^I están sujetos a las fuerzas $F(t)$ y $F^I(t)$ respectivamente, componentes normales de las fuerzas dado que no existe rozamiento. Estas reacciones generan el impulso $P(t)$ y $P^I(t)$ respectivamente.

$$dP = F dt ; dP^I = F^I dt \quad (36)$$

La traslación de cada cuerpo según la dirección normal se puede expresar:

$$m dV = dP ; m^I dV^I = dP^I \quad (37)$$

La velocidad relativa entre ambos cuerpos se puede obtener como resta de velocidades de cada uno:

$$v = V - V' \quad (38)$$

Como las fuerzas tienen direcciones opuestas, los impulsos tienen signos contrarios:

$$dP = -dP^I \quad (39)$$

Si se toma como positivo el sentido de la fuerza F y negativo el de la fuerza F^I , y partir de las ecuaciones (36), (37) y (38) la ecuación diferencial del movimiento relativo se puede expresar:

$$dv = \frac{1}{M} dP \quad (40)$$

Siendo

$$M = \frac{1}{\frac{1}{m} + \frac{1}{m^I}} = \frac{m m^I}{m + m^I} \quad (41)$$

La integración de la ecuación (40), aplicando la condición de contorno de velocidad relativa inicial v_0 queda:



$$v = v_0 + M^{-1} P; \quad (42)$$

con $v_0 > 0$ para que los cuerpos se estén acercando.

De esta forma se puede determinar los cambios en la velocidad relativa de los cuerpos durante el impacto si se conoce el impulso en el instante en el que los cuerpos se separan P_f (el cual depende del coeficiente de restitución e). La teoría de cuerpos rígidos es muy útil en el sentido de que experimentalmente se puede obtener el coeficiente de restitución e que tiene en cuenta la posible disipación de energía, fijando la cantidad de movimiento final (P_f) quedando, por tanto, definida la ecuación del movimiento de los cuerpos que impactan.

2.3.2.2 Fases de aproximación y restitución.

Durante la primera parte del impacto, las fuerzas de contacto comprimen la partícula reduciendo su volumen una cierta cantidad δ , es la llamada fase de aproximación o fase de compresión. Sin más caracterización de la partícula no se puede obtener el valor de dicha cantidad δ , pero sí se puede saber que el máximo valor se toma cuando la velocidad relativa se hace nula. La velocidad relativa nula se alcanza cuando la fuerza de contacto es máxima.

En función del coeficiente de restitución e se recupera el volumen inicial de la partícula o no, como indica la Figura 22 y la Figura 23. Estas fases son similares a las expuestas para la teoría de impactos estéreo mecánicos.

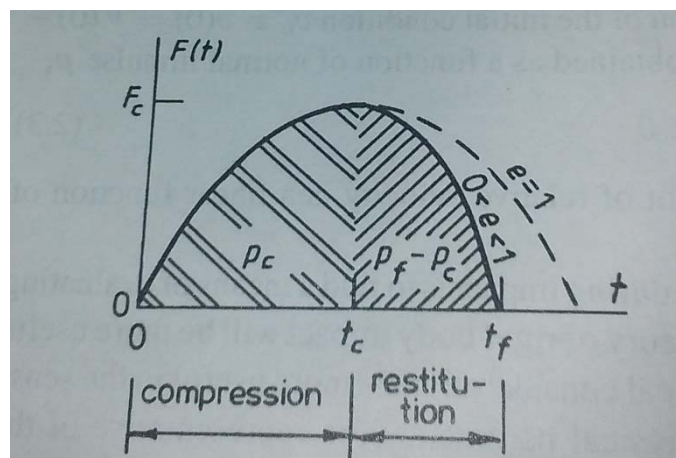


Figura 22-Fases de compresión y restitución en un impacto en función del coef. de restitución.

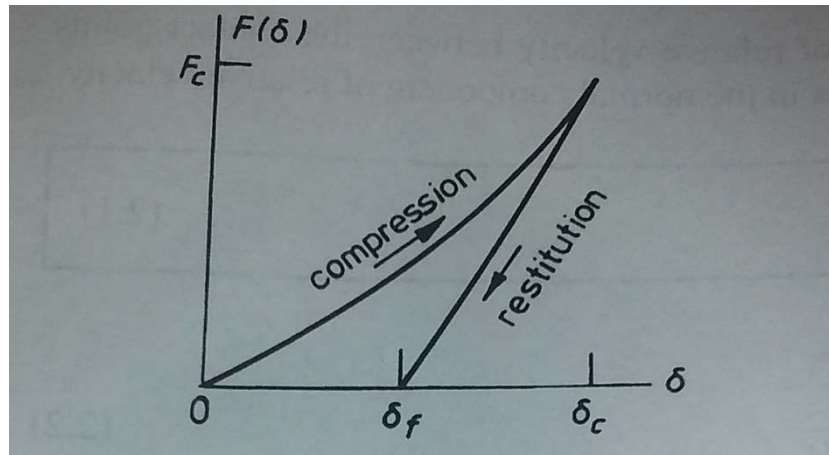


Figura 23-Relación fuerza-deformación en un impacto plástico.

En la Figura 22 y en la Figura 23, se puede observar cómo la fuerza máxima se produce para la máxima deformación de la partícula (punto c) que es donde la velocidad relativa se hace nula (ver Figura 25). Para un caso general inelástico, existirá una deformación remanente tras el impacto δ_f .

El impulso producido durante el impacto es monótono creciente a lo largo de todo el impacto, es decir en ambas fases, como indica la Figura 24:

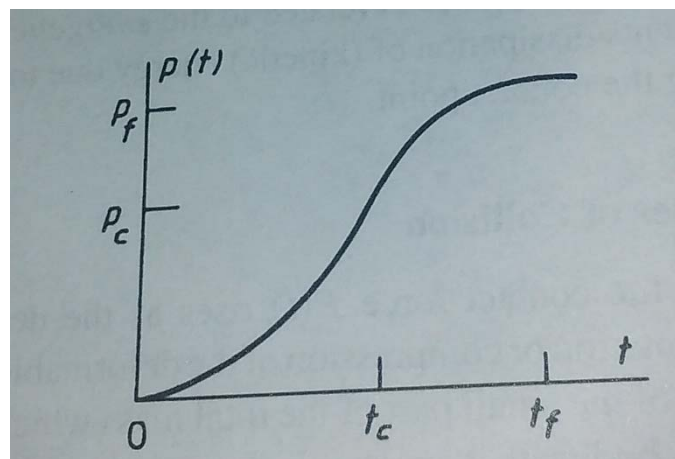


Figura 24-Variación del impulso durante el impacto.

A partir de la ecuación (42) se determina las transiciones que sufren las velocidades normales de cada cuerpo hasta llegar a la velocidad final tras el impacto. En las Figura 25 se observa como las velocidades iniciales de ambos cuerpos, V_o y V_o^I respectivamente, se igualan en el instante final de la fase de restitución t_c , siendo la velocidad en ambos cuerpos para ese instante V_c . Posterior a este instante, el cuerpo que se estaba acelerando continua, de igual forma que el cuerpo que se estaba frenando mantiene la deceleración. En el instante t_f , final de la fase de



restitución, los cuerpos tienen sus velocidades finales tras el impacto de valor V_f y V_f^I , respectivamente.

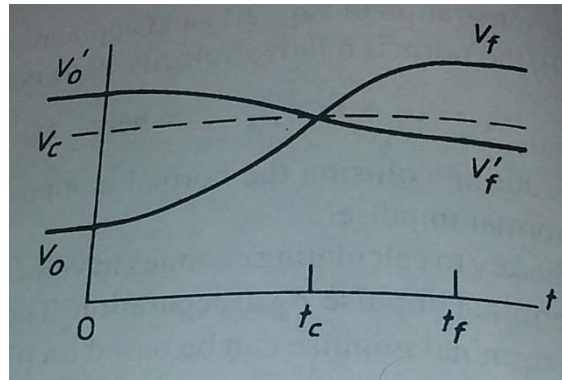


Figura 25-Transición de velocidades frente al tiempo.

Si el análisis descrito de los cambios de velocidades se representa en función de la cantidad de movimiento en vez de con respecto al tiempo, se obtiene la gráfica mostrada en la Figura 26.

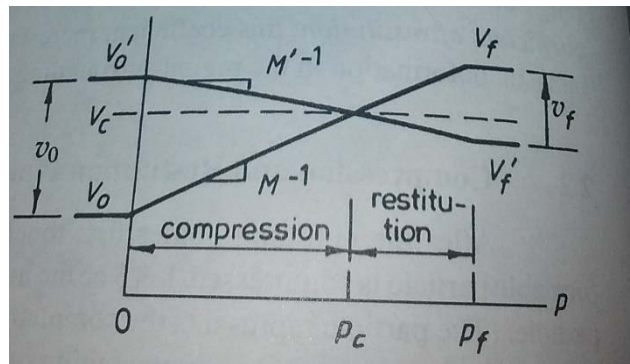


Figura 26-Transición de velocidades frente al espacio.

De la Figura 26 se puede deducir que el impulso en el punto de máxima fuerza P_c vale:

$$P_c = Mv_0 \tag{43}$$

2.3.2.3 Energía cinética del movimiento relativo normal.

Durante el impacto, como se deduce de las relaciones expresadas, las velocidades de cada cuerpo se pueden expresar:

$$V = V_0 + \frac{P}{m} \tag{44}$$



$$V^I = V_o^I - \frac{P}{m^I} \quad (45)$$

Estas ecuaciones proporcionan los cambios en la componente normal de la velocidad relativa:

$$v = v_o + \frac{P}{M} \quad \text{donde } v = V - V^I \quad (46)$$

La fase de compresión termina para el instante t_c cuando la velocidad relativa normal se hace cero, es decir, las velocidades de los cuerpos son iguales. En este instante, el impulso P_c toma el valor $P_c = Mv_o$, como se ha indicado en la ecuación (43). La velocidad de los cuerpos para el instante t_c vale:

$$V(P_c) = V_o - \frac{M}{m} v_o \quad (47)$$

$$V^I(P_c) = V_o^I - \frac{M}{m^I} v_o \quad (48)$$

De esta forma, si el sistema tiene energía cinética inicial, en el punto C de velocidad relativa nula se obtiene la siguiente energía cinética:

$$T_c = T_o - \frac{1}{2} M v_o^2 \quad (49)$$

En cuerpos elásticos, la energía cinética perdida se ha transformado en energía de deformación.

2.3.2.4 Trabajo de la Fuerza de contacto.

El trabajo realizado por la fuerza de contacto durante las fases de compresión o aproximación, y la fase de restitución, proporciona la relación entre el impulso entre fases P_c y el impulso final P_f . La fuerza de contacto por un lado deforma la partícula intermedia, proporcionándole energía de deformación durante la fase de compresión. Esta energía, por acción y reacción de dicha fuerza de contacto, es la que modifica la energía cinética de los cuerpos que impactan. En un impacto inelástico, sólo parte de esa energía será recuperada en la fase de restitución.

El trabajo hecho por la fuerza de contacto en la partícula deformable se puede expresar:

$$W_n = \int_0^t Fv dt' = \int_0^P v dP \quad (50)$$



2.3.2.5 Coeficiente de restitución energética

Incluso si se produce un impacto entre 2 cuerpos a velocidades muy bajas, existe un porcentaje de energía que se disipa. Este hecho puede ser debido a plastificaciones, vibraciones, comportamiento visco-plástico, ruido, calor, etc. Sea cual sea la causa, está siempre tiene como consecuencia **la no recuperación de la deformación δ de la partícula elástica**. El choque elástico perfecto es una situación teórica que no se da en la realidad, aunque ciertos impactos se aproximen mucho a esta situación.

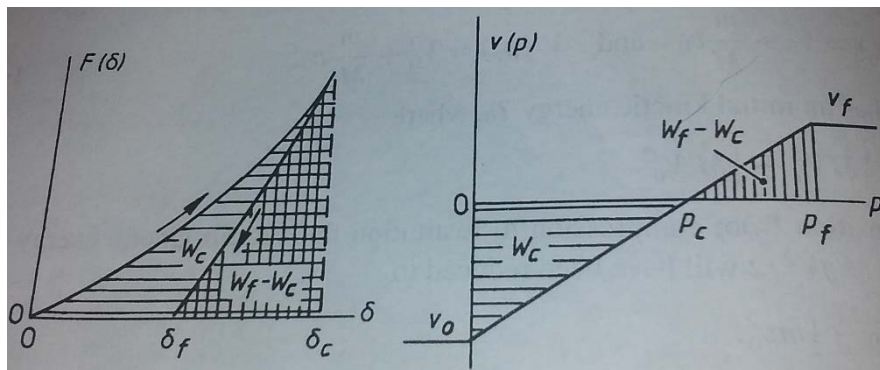


Figura 27-Consecuencias de la disipación de energía relativas a deformación y al trabajo en el impacto.

En la Figura 27 izquierda se puede observar cómo para un impacto inelástico, al final del impacto existe una deformación remanente en la partícula deformable δ_f . En la Figura 27 derecha se puede observar cómo, debido a esta deformación remanente, el trabajo realizado durante la fase de compresión es mayor que en la fase de restitución.

Es sencillo calcular el trabajo realizado por ambas fases. Integrando la ecuación (46) se obtiene el trabajo realizado en la fase de compresión o aproximación:

$$W_n = \int_0^{P_c} v(P)dP = v_0 P_c + \frac{1}{2} M^{-1} P_c^2 = -\frac{1}{2} M v_0^2 \quad (51)$$

Este valor es justo la energía cinética perdida durante la fase de compresión.

Durante la siguiente fase, los cuerpos rígidos recuperan algo de la energía cinética a partir de las fuerzas de contacto:

$$W_n(P_f) - W_n(P_c) = \int_{P_c}^{P_f} (v_0 + M^{-1}P)dP = M v_0^2 / 2 \left(1 - \frac{P_f}{P_c}\right)^2 \quad (52)$$

Con $v_0 > 0$



Este valor de trabajo realizado es igual a la energía de deformación recuperada en la fase de restitución. A partir de estos valores de los trabajos realizados en cada fase, se define el coeficiente de restitución según la siguiente expresión:

$$e^{*2} = -\frac{W_n(P_f) - W_n(P_c)}{W_n(P_c)} \quad (53)$$

Este coeficiente e^* toma valores entre 0 y 1 siendo el valor 1 para impacto perfectamente elástico y 0 para el caso de perfectamente plástico. En el caso perfectamente elástico no se disipa nada de energía, toda la energía de deformación se recupera y en el caso perfectamente plástico los cuerpos permanecen unidos tras el impacto.

El impulso final P_f se obtiene a partir del coeficiente de restitución e^* según la siguiente expresión:

$$P_f = -Mv_o(1 + e^*) = P_c(1 + e^*) \quad (54)$$

Para un impacto co-lineal directo la componente normal de la velocidad relativa se puede obtener según:

$$V_f = v_o + M^{-1}P_f \quad (55)$$

Por tanto, la relación final entre velocidades relativas o impulsos relativos está directamente relacionada con el coeficiente de restitución e^* :

$$e^* = v_f/v_o \quad (56)$$

$$e^* = \frac{P_f - P_c}{P_c} \quad (57)$$

Estas expresiones del coeficiente de restitución se han obtenido a partir de considerar un impacto co-lineal sin rozamiento. La definición del coeficiente de restitución según la ecuación (53) se le llama coeficiente de restitución **energético**, al definido según la ecuación (56) se le llama coeficiente de restitución **cinemático** y al coeficiente de restitución definido en la ecuación (57) se le llama coeficiente de restitución **cinético**. Los tres son equivalentes a menos que el impacto considere rozamiento, cuerpos excéntricos y variación de la dirección del deslizamiento. Lo que equivale a decir que, en la inmensa mayoría de los casos más comunes, las tres definiciones son equivalentes.



2.3.2.6 Velocidades en el instante de separación de los cuerpos.

Las velocidades finales resultantes se obtienen según las siguientes expresiones:

$$V_f = V_o + m^{-1}P_f = V_o - \frac{Mv_o}{m}(1 + e^*) \quad (58)$$

$$V_f^I = V_o^I + M'^{-1}P_f = V_o^I - \frac{Mv_o}{m^I}(1 + e^*) \quad (59)$$

Siendo, por tanto, la velocidad relativa final:

$$v_f = v_o + M^{-1}P_f = -e^*v_o \quad (60)$$

La energía cinética final resulta:

$$T_f = T_c + \frac{M}{2}v_f^2 \quad (61)$$

Donde

$$T_c = \frac{(m + m^I)v_f^2}{2} \quad (62)$$

También se puede obtener una relación entre velocidades y energía cinética según el coeficiente de restitución:

$$-\frac{v_f}{v_o} = \left(\frac{T_f - T_c}{T_o - T_c}\right)^{0,5} = e^* \quad (63)$$

Obteniéndose de manera rápida la cantidad de energía cinética perdida en el impacto en función del coeficiente de restitución según la expresión:

$$T_o - T_f = \frac{(1 - e^{*2})Mv_o^2}{2} \quad (64)$$



2.3.3 Impacto excéntrico de cuerpos rígidos con superficies rugosas

A continuación, se describe brevemente la resolución de los impactos excéntricos de cuerpos rígidos con superficies rugosas. Este tipo de impactos es el más general de los impactos de cuerpos rígidos, aunque restringido a dos dimensiones. Añadir la tercera dimensión solo complica matemáticamente la resolución del mismo, sin añadir ninguna complejidad conceptual. El motivo de que la descripción de este punto sea más general y menos detallada es debido a que los impactos que se han analizado mayoritariamente en la presente tesis son colineales y sin rozamiento. Desde el punto de vista estructural los impactos con componente tangencial solicitan menos a la estructura, y, por otro lado, los puntos de contacto en prácticamente todos los impactos analizados posteriormente han sido centros de vigas, placas etc. no habiendo lugar a excentricidades entre centros de gravedad.

En este punto no se recoge en detalle la resolución de este tipo de impactos, sólo se presentará la formulación que permite el planteamiento de la ecuación del movimiento. Todo el detalle del cálculo y resolución de impactos en cuerpos rígidos planos o tridimensionales se puede encontrar en el libro *Impact Mechanics*, de **Stronge W.J.**, en el capítulo 3¹⁴ y en el capítulo 4¹⁵ respectivamente.

Los impactos excéntricos tienen como principal característica que se modifica la velocidad angular de los cuerpos.

2.3.3.1 Ecuación del movimiento relativo del punto de contacto

Se supone que se produce el impacto entre dos cuerpos B y B^I , representados en la Figura 28, con masas m y m^I , en el punto C . Los radios de giro derivados de los momentos de inercia respecto del centro de gravedad de cada cuerpo son k_r y k_r^I . Los centros de gravedad de los cuerpos se definen, respecto de C , con los vectores posición r y r^I . Cada centro de gravedad de cada cuerpo tiene su velocidad angular y su velocidad de traslación w , w^I , V_g y V_g^I respectivamente. Por acción y reacción sobre cada cuerpo actúan las fuerzas F y F^I . Sobre cada uno de estos parámetros se aplica el subíndice 1, 2 o 3 según la componente en la dirección del espacio, con el criterio dibujado en la Figura 28 (siendo 2 la dirección perpendicular al plano).

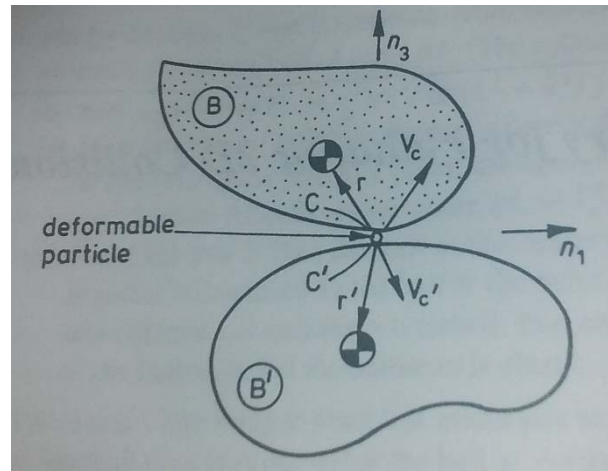


Figura 28-Esquema general de impacto excéntrico rugoso.

Según lo expuesto anteriormente, se pueden deducir las siguientes relaciones:

$$dP_i = F dt \quad i = 1, 2, 3. \quad (65)$$

$$dP_i^I = F^I dt \quad i = 1, 2, 3. \quad (66)$$

Aplicando la segunda ley de Newton para la traslación se obtiene,

$$dV_{g,i} = m^{-1} dP_i \quad (67)$$

$$dV_{g,i}^I = m^{I-1} dP_i^I \quad (68)$$

Aplicando la segunda ley de Newton para la rotación se obtiene,

$$dw_i = (mk_r^2)^{-1} \varepsilon_{ijk} r_j dP_k \quad (69)$$

$$dw_i^I = (m^I k_r^{I2})^{-1} \varepsilon_{ijk} r_j^I dP_k^I \quad (70)$$

Donde el subíndice repetido indica suma y la permutación del tensor viene dada por el término ε_{ijk} . Si los subíndices están en ciclo $\varepsilon_{ijk} = 1$, si están en orden anticíclico $\varepsilon_{ijk} = -1$, y $\varepsilon_{ijk} = 0$ si los subíndices se repiten.

En la Figura 29 se incluyen algunos valores, en forma paramétrica, de radios de giro para elementos 2D y elementos 3D.



Shape	Area A	In-plane Radius of Gyration, \hat{k}	Polar Radius of Gyration, $\hat{k}_2 = \hat{k}_r$
Rectangle – height a , base b	ab	$a/\sqrt{12}$	$\sqrt{(a^2 + b^2)/12}$
Thin circular disk – radius a	πa^2	$a/2$	$a/\sqrt{2}$
Thin circular ring – radius a , thickness b	$2\pi ab$	$a/2$	$a/\sqrt{2}$
Triangle – height a , base b	$ab/2$	$a/\sqrt{18}$	$\sqrt{(a^2 + b^2)/18}$
Ellipse – axes a, b	πab	$a/2$ or $b/2$	$\sqrt{a^2 + b^2}/2$
3D Bodies			
Body	Volume V	Cross-section Radius of Gyration, \hat{k}	Axial Radius of Gyration, \hat{k}_2
Circular cylinder – radius a , length L	$\pi a^2 L$	$\sqrt{(a^2 + b^2)/12}$	$a/\sqrt{2}$
Thin-walled circular cylinder – radius a , thickness b , length L	$2\pi abL$	$\sqrt{(6a^2 + L^2)/12}$	a
Sphere – radius a	$4\pi a^3/3$	$a\sqrt{2/5}$	$a\sqrt{2/5}$
Thin-walled spherical shell – radius a , thickness b	$4\pi a^2 b$	$a\sqrt{2/3}$	$a\sqrt{2/3}$
Ellipsoid – axes $2a, 2b, 2c$	$4\pi abc/3$	$\sqrt{(b^2 + c^2)/5}$	$\sqrt{(a^2 + b^2)/5}$

Figura 29-Tabla con algunos radios de giro para elementos 2Dy elemento 3D.

Con la construcción de una partícula deformable entre puntos de contacto, la velocidad relativa del punto de contacto se obtiene como una función del impulso P durante el contacto. Como son cuerpos rígidos, la velocidad del punto de contacto (V_i y V_i^I) se relación con la velocidad del centro de gravedad de cada cuerpo según:

$$V_i = V_{g,i} + \varepsilon_{ijk} w_j \Gamma_k \quad (71)$$

$$V_i^I = V_{g,i}^I + \varepsilon_{ijk} w_j^I r_k^I \quad (72)$$

Quedando definida la velocidad relativa del punto de contacto:

$$v_i = V_i - V_i^I \quad (73)$$

Sustituyendo las ecuaciones (67), (68), (71) y (72) en la expresión (73) las ecuaciones diferenciales para los cambios de velocidad según la dirección, se obtienen en términos de impulsos. De igual forma como la partícula deformable tiene masa despreciable, el impulso diferencial en el otro cuerpo es igual pero opuesto. Es decir,

$$dp_i = dP_i = -dP_i^I \quad (74)$$

Consecuentemente, se obtiene

$$dv_i = M_{ij}^{-1} dp_j \quad (75)$$

Siendo M la masa conjunta equivalente como se expresó en la ecuación (41).

Para el caso de impacto plano, la ecuación (75) se expresa matricialmente:



$$\begin{Bmatrix} dv_1 \\ dv_3 \end{Bmatrix} = M^{-1} \begin{Bmatrix} \beta_1 & -\beta_2 \\ -\beta_2 & \beta_3 \end{Bmatrix} \begin{Bmatrix} dp_1 \\ dp_3 \end{Bmatrix} \quad (76)$$

Siendo:

$$\beta_1 = 1 + M \frac{r_3^2}{m k_r^2} + M \frac{r_3^{I2}}{m^I k_r^{I2}} \quad (77)$$

$$\beta_2 = M \frac{r_1 r_3}{m k_r^2} + M \frac{r_1^I r_3^I}{m^I k_r^{I2}} \quad (78)$$

$$\beta_3 = 1 + M \frac{r_1^2}{m k_r^2} + M \frac{r_1^{I2}}{m^I k_r^{I2}} \quad (79)$$

Para resolver el sistema (76) se debe hacer respecto a una única variable monótona creciente como es el impulso normal p_3 . El valor del impulso final $p_{3,f}$, se obtiene a partir del coeficiente de restitución e , supuesto conocido. Si el impacto es, además, sin rozamiento $dp_1 = dp_2 = 0$, y, por tanto, el sistema es resoluble.

Si, por el contrario, el impacto es con rozamiento, se debe buscar relaciones entre el impulso normal y el tangencial (en las dos direcciones si el impacto es en 3D) para poder resolver el sistema. Los principales métodos de resolución están recogidos en la bibliografía expresada al inicio del presente apartado.

2.3.4 Modelización de la zona de contacto

En la teoría de cuerpos rígidos, como se ha explicado anteriormente, se asume que existe una partícula elástica de masa despreciable en la zona de contacto entre los cuerpos que impactan. Esta partícula es la encargada en hacer la transición suave entre las velocidades de los cuerpos inmediatamente anterior e inmediatamente posterior al impacto. Para poder estudiar las fuerzas producidas durante la colisión, y el tiempo de duración de la misma, es necesario caracterizar esta partícula.

A continuación, se mencionan dos modelos para esta zona de contacto, uno para impactos sin rozamiento y otro para impactos con rozamiento. De igual manera que en apartados anteriores de la presente tesis, se mostrará un poco más en detalle para el modelo sin rozamiento, dado que la componente tangencial desde un punto de vista estructural no produce el mismo nivel



de daño que la componente normal. El modelo que permite tener en cuenta el rozamiento se menciona de manera testimonial.

Los modelos estudiados a continuación pueden simular comportamientos viscoelásticos, aunque bastará con hacer el parámetro que regula la viscosidad nulo para tener un modelo elástico adaptado al objeto del estudio de esta investigación.

2.3.4.1 Impacto sin rozamiento-Modelo Lineal Viscoelástico de Maxwell

El modelo de Maxwell es un modelo general de impacto para materiales con un comportamiento viscoelástico en el que la fuerza de rozamiento es despreciable. Un ejemplo de este tipo de impactos puede ser el de un palo de golf con la bola o el golpeo de un bate de béisbol con la pelota.

El modelo de Maxwell para la partícula entre los cuerpos que impactan, el cual se muestra en la Figura 30, se compone de muelle de rigidez K y una longitud incompresible X_0 , mientras que el amortiguador tiene una constante de fuerza de amortiguamiento c y una longitud incompresible Y_0 . El desplazamiento relativo x , por tanto, tiene una parte de desplazamiento de amortiguador.

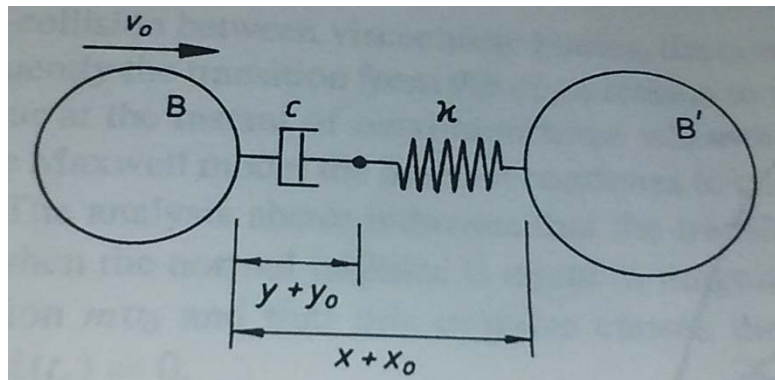


Figura 30-Esquema del modelo viscoelástico de Maxwell

Muelle y amortiguador, al estar conectados en serie soportan la misma fuerza $F(t)$.

$$F = -k(x - y) = -c\dot{y} \quad (80)$$

Los cuerpos involucrados en el impacto, B y B^I , tienen masas m y m^I respectivamente. La masa conjunta M se define según la ecuación (41). De esta forma, se puede establecer la ecuación del movimiento:

$$M\ddot{x} = -K(x - y) \quad (81)$$



Diferenciando la ecuación (80) y añadiéndolo a la ecuación del movimiento, se obtiene otra ecuación (83) en términos de la variable z , definida como:

$$z = x - y \quad (82)$$

$$\ddot{z} + 2\xi w_o \dot{z} + w_o^2 z = 0 \quad (83)$$

Siendo:

$$w_o^2 = K/M \quad (84)$$

$$\xi = \frac{Mw_o}{2c} \quad (85)$$

Las condiciones de contorno para la velocidad relativa inicial v_o son:

$$x(0) = y(0) = z(0) = 0 \quad (86)$$

$$\dot{x}(0) = \dot{z}(0) = v_o \quad (87)$$

$$\dot{y}(0) = 0 \quad (88)$$

Bajo esas condiciones de contorno, la solución que se obtiene de la ecuación (83) es la siguiente:

$$z = -w_d^{-1} v_o e^{-\xi w_o t} \text{sen}(w_d t) \quad w_d t \leq \pi \quad (89)$$

Siendo w_d la frecuencia amortiguada según la relación:

$$w_d = w_o \sqrt{1 - \xi^2} \quad (90)$$

Suponiendo que no es posible un esfuerzo de tracción en el muelle, el tiempo t_f en el que se produce la separación de los cuerpos es:

$$t_f = \pi/w_d \quad (91)$$

En ese instante, se obtiene la velocidad normal de separación:

$$\dot{x}_f = \dot{x}(t_f) + \frac{K}{c} z(t_f) = v_o e^{-\xi \pi \sqrt{1 - \xi^2}} \quad (92)$$

La fuerza producida durante el impacto en el muelle y en el amortiguador se obtiene de la siguiente forma:

$$F(t) = -Kz = \frac{1}{\sqrt{1 - \xi^2}} M w_o v_o e^{-\xi w_o t} \text{sen}(w_d t) \quad w_d t \leq \pi \quad (93)$$

La Figura 31 muestra la fuerza producida en tres supuestos, choque totalmente elástico ($c = \infty$ o $\xi = 0$), y dos impactos plásticos para valores de $c = Mw$ ($\xi = 0.5$) y $c = 0.75 mw$.

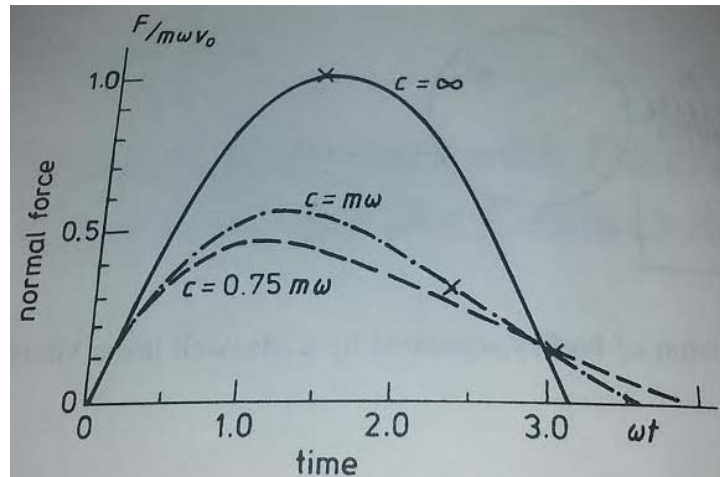


Figura 31-Valor de la fuerza de impacto en función del amortiguamiento.

El modelo de Maxwell proporciona una fuerza asimétrica que se reduce si aumenta el efecto del amortiguamiento. El impulso normal que produce esa fuerza es:

$$p(t) = M v_0 \left(1 - e^{-\xi \omega_0 t} \left(\cos(\omega_d t) + \frac{\xi}{\sqrt{1-\xi^2}} \operatorname{sen}(\omega_d t) \right) \right) \quad (94)$$

A partir de la expresión (94) se puede calcular el impulso al final de la fase de compresión P_c y el impulso al final de la fase de restitución P_f :

$$\frac{P_f}{P_c} = 1 + e^{-\xi \pi / \sqrt{1-\xi^2}} \quad (95)$$

La expresión (95) nos da directamente el coeficiente de restitución e^* para el modelo lineal viscoelástico, independiente de la velocidad relativa inicial:

$$e^* = e^{-\xi \pi / \sqrt{1-\xi^2}} \quad (96)$$

Existen otros modelos, no lineales, más complejos. Los más utilizados son los de Walton¹⁶ y Simon¹⁷.



2.3.4.2 Modelo de zona de contacto para cuerpos rugosos

Los impactos oblicuos y con rozamiento no son objeto de desarrollo en la presente tesis.

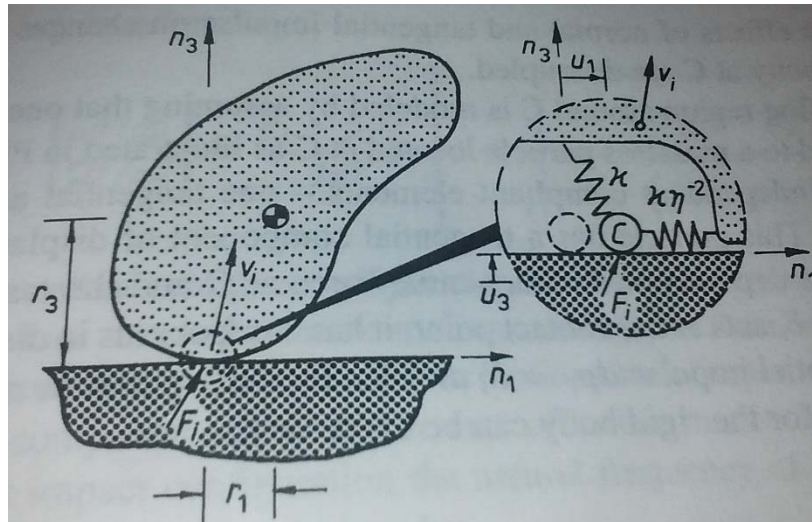


Figura 32-Modelo de zona de contacto para impactos entre cuerpos rígidos.

A título descriptivo, se muestra el esquema de cálculo de este tipo de modelos, expuesto en la Figura 32. Se puede observar dos muelles, uno para la dirección normal y otro por para la dirección tangencial. La rigidez del muelle tangencial se expresa como una proporción de la rigidez normal según el coeficiente η .

Existen muchos modelos en función del tipo de elementos que impactan, barras, esferas etc...

Cada modelo es aplicable solo a cada elemento concreto porque utilizan la teoría de Hertz, que será expuesta más adelante, para el cálculo de la indentación de unos cuerpos en otros.

Algunos de los trabajos más importantes son lo de Stronge¹⁵, Brach¹⁸ o Goldsmith¹⁹.

2.3.4.3 Obtención de la constante de rigidez

Existen diversas teorías sobre la rigidez de las superficies que soportan el contacto entre dos cuerpos que impactan. Teorías elásticas, elasto-plásticas, viscoelásticos etc. Dado el carácter elástico de la presente investigación, a continuación, se recoge la teoría elástica más utilizada. Esta teoría fue desarrollada por Hertz (1882)²⁰ y proporciona buenas aproximaciones **cuando la zona de contacto es pequeña en comparación con el tamaño de ambos cuerpos.**



Hertz supone dos superficies de contacto esféricas entre los cuerpos que colisionan B y B' con radios R_B y $R_{B'}$ cerca de la zona de contacto. El esquema del impacto estudiado se muestra en la Figura 33.

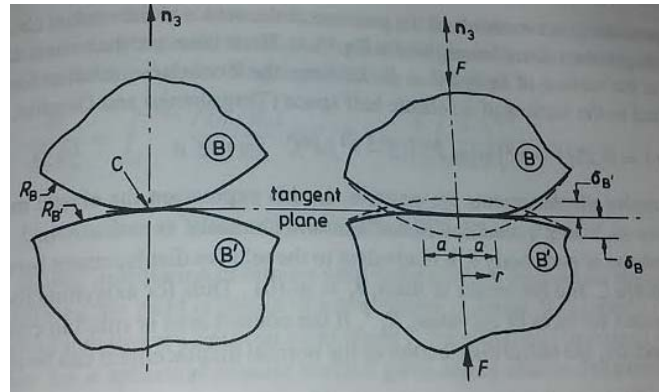


Figura 33-Esquema de cuerpos que impactan según Hertz.

Si dos fuerzas iguales y opuestas derivadas del impacto comprimen la zona de contacto, la teoría de Hertz propone que alrededor del punto de inicial de contacto, hasta una distancia a aparece una distribución de presiones elíptica según la relación:

$$p(r) = p_o(1 - (r/a)^2)^{1/2} \quad r < a \quad (97)$$

Donde r es la distancia al punto central de contacto y p_o es la presión en dicho punto.

Esta ley de presiones genera la siguiente reacción:

$$F = \int_0^a p(r)2\pi r dr = \frac{2\pi}{3} p_o a^3 \quad (98)$$

Para esta distribución de presión, Hertz obtuvo el desplazamiento normal (b) en la superficie de los cuerpos anteriormente descritos a partir de la solución de *Boussinesq* para una fuerza normal aplicada en la superficie de un espacio semielástico:

$$b_i(r) = 0.25 (1 - \nu_i^2)\pi a \frac{p_o}{E_i} \left(2 - \frac{r^2}{a^2} \right) \quad r < a \quad (99)$$

Donde E_i es el módulo de elasticidad y ν_i el coeficiente de Poisson para cada cuerpo i .

La deformación por compresión de cada cuerpo δ_i es equivalente al desplazamiento entre en el punto de contacto C y el centro de cada cuerpo, es decir, $\delta_i = b_{(r=0)}$. Para cuerpos asimétricos con superficies de contacto convexas de curvatura $1/R_i$, si el área de contacto es pequeña en comparación con la sección transversal, la distribución radial del desplazamiento transversal se puede expresar según:



$$b(r) \approx \delta_i - r^2 / (2R_i) \quad (100)$$

La indentación total $\delta = \delta_B + \delta_B^I$ puede ser relacionada con la presión en el punto central p_o .

$$\delta = \pi a p_o / (2E^*) \quad (101)$$

Donde un efectivo radio R^* y modulo E^* se definen como:

$$R^* = \left(\frac{1}{\frac{1}{R_B} + \frac{1}{R_B^I}} \right) \quad (102)$$

$$E^* = \left(\frac{1}{\frac{1 - \nu_B^2}{E_B} + \frac{1 - \nu_B^I{}^2}{E_B^I}} \right) \quad (103)$$

El tamaño del área de contacto, a partir de las ecuaciones (99) y (101) puede ser determinado.

Así, el radio máximo de la zona de contacto puede ser determinado en relación a la fuerza F :

$$\frac{\delta}{R^*} = \frac{a^2}{R^{*2}} = \frac{3F}{4aE^*R^*} \quad (104)$$

Reorganizado, se obtiene:

$$\frac{a}{R^*} = \left(\frac{3F}{4E^*R^{*2}} \right)^{1/3} \quad (105)$$

$$\frac{\delta}{R^*} = \frac{a^2}{R^{*2}} = \left(\frac{3F}{4E^*R^{*2}} \right)^{2/3} \quad (106)$$

$$\frac{p_o}{E^*} = \frac{3F}{2\pi a^2 E^*} = \left(\frac{6F}{\pi^3 E^* R^{*2}} \right)^{1/3} \quad (107)$$

La presión media \bar{p} en la zona de contacto y la relación con la fuerza de contacto F e obtiene de las ecuaciones (106) y (107):

$$\frac{\bar{p}}{E^*} = \frac{4}{3\pi} \sqrt{\frac{\delta}{R^*}} \quad (108)$$

$$\frac{F}{E^* R^{*2}} = \frac{4}{3} \left(\frac{\delta}{R^*} \right)^{3/2} \quad (109)$$

De la ecuación (109) se obtiene la relación entre Fuerza y desplazamiento δ en la zona de contacto, es decir, se obtiene **la rigidez de la zona de contacto (K_s)** en función del material equivalente E^* y de la geometría, definida por su radio equivalente, R^* .

El área de la zona de contacto A_c se puede aproximar por el área del círculo de radio $a = \sqrt{R^* \delta}$, obtenido éste de la expresión (106).



- Desarrollo de teoría sobre impactos -
- Método simplificado de cálculo de impactos en estructuras -





2.4 IMPACTOS DE CUERPOS FLEXIBLES

La teoría de cuerpos rígidos, expresada en las diferentes casuísticas expuestas anteriormente, es la teoría base que dio origen al análisis de impactos. No obstante, es la teoría de cuerpos flexibles la que está mucho más próxima, y por tanto de mayor interés, a la investigación realizada para la presente tesis. Las estructuras se consideran cuerpos deformables en su conjunto, no sólo en una pequeña zona de contacto, y por tanto es de aplicación la teoría de cuerpos flexibles. Si bien esta teoría es más amplia, cuando ésta se aplique a impactos entre objetos cuyas condiciones de contorno, de al menos uno ellos, sean tales que los movimientos de translación y rotación estén impedidos, se estará considerando la **teoría de impactos en estructuras**.

En comparación con los impactos de cuerpos rígidos, las deformaciones producidas en los impactos sobre cuerpos flexibles son mayores y, como consecuencia, se amplían el periodo de contacto y se reducen la fuerza máxima desarrollada durante la colisión. Además, transfieren cierta cantidad de energía a la estructura por deformación.

En los siguientes apartados se estudiará la teoría de cuerpos flexibles brevemente, para converger hacia la teoría de impactos en estructuras. Es decir, con las condiciones de contorno adecuadas para que los cuerpos flexibles se comporten como estructuras pudiendo, por definición, deformarse para absorber el impacto. Como se ha comentado en el apartado 2.2.1, la teoría de impactos en cuerpos flexible distingue entre impactos axiales e impactos transversales según el mecanismo de generación de ondas. Las condiciones de contorno, por tanto, definen la frontera entre teoría de cuerpo libre y teoría de estructuras. En la Figura 34 se ilustra esquemáticamente la diferencia entre impacto axial y transversal, y la diferencia entre impacto en cuerpo libre y en estructura.

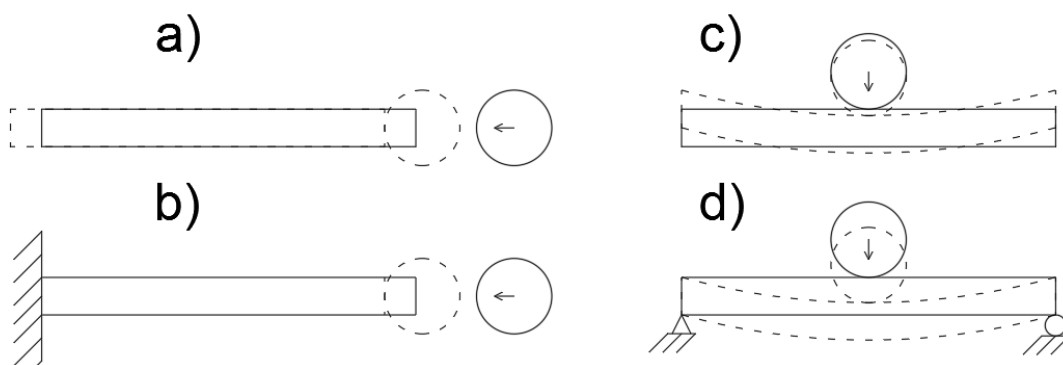


Figura 34-Impacto axial en cuerpo libre (a), impacto axial en estructura (b), impacto transversal en cuerpo libre (c), e impacto transversal en estructura (d).



2.4.1 Teoría de ondas axiales

Los impactos axiales en un cuerpo elástico resultan de una perturbación según su eje longitudinal, la cual inicialmente se propaga en dicha dirección desde el punto de impacto con una velocidad específica. Esta perturbación es una onda de desplazamiento de partículas y, en consecuencia, de tensiones.

2.4.1.1 Ondas longitudinales en una barra elástica uniforme.

Se considera una barra uniforme de sección A , modulo elástico E y densidad ρ . La barra contiene una región con tensiones $\sigma(x,t)$ que se propaga hacia el sentido positivo del eje axial x como muestra la Figura 35.

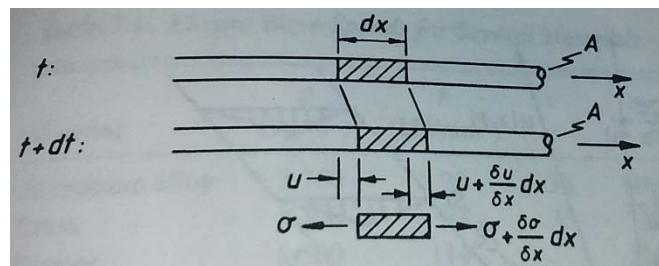


Figura 35-Esquema diferencial para ondas longitudinales.

Supóngase un elemento diferencial de esta barra, localizado en la coordenada x , y con un desplazamiento axial $u(x,t)$ para un tiempo t . El pulso de tensiones proporciona una fuerza diferencial $A \frac{\partial \sigma}{\partial x} dx$ en el elemento diferencial. Esta fuerza se equilibra con la fuerza de inercia del elemento diferencial $\rho A \frac{\partial^2 u}{\partial t^2}$. A partir de este planteamiento, se deduce la ecuación diferencial del movimiento axial para el elemento:

$$\rho A \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = A \frac{\partial \sigma}{\partial x} \tag{110}$$

Para un material elástico lineal y una dimensión para la tensión, la ley de Hooke proporciona la relación:

$$\sigma = E \frac{\partial u}{\partial x} \tag{111}$$



Donde E , A y ρ son independientes de x . Sustituyendo la ecuación (111) en la ecuación (110) resulta la ecuación lineal de ondas:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = C_o^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \quad C_o^2 = E/\rho \quad (112)$$

Donde la velocidad de propagación de onda C_o es conocida como la velocidad de barra. La ecuación (112) es homogénea, lineal e hiperbólica parcial. Es lineal porque la variable independiente $u(x,t)$ y su derivada están sólo en primer grado. Consecuentemente, si u_1 y u_2 son soluciones independientes, la suma $C_1 u_1 + C_2 u_2$ será también solución con C_1 y C_2 constantes arbitrarias.

Existe una solución general a la ecuación (112) de propagación de ondas:

$$u(x,t) = \frac{1}{2}(f(x - C_o t) + g(x + C_o t)) = 1/2(f(\eta) + g(\xi)) \quad (113)$$

Las funciones f y g son determinadas según las condiciones iniciales del problema. La función f representa una onda en dirección creciente de x y la función g representa una onda en dirección decreciente de x .

2.4.1.2 Condiciones iniciales:

Si una compresión (o tracción) actúa en un segmento de la barra, un desplazamiento inicial $u(x,0)$ resulta en dicho punto de la barra. Las condiciones iniciales ($t = 0$) de desplazamiento y velocidad, en forma general, resultan:

$$u(x,0) = \frac{1}{2}(f(x) + g(x)) \quad (114)$$

$$\dot{u}(x,0) = \frac{C_o}{2}(-f'(x) + g'(x)) \quad \text{donde} \quad \frac{\partial f(x)}{\partial(t)} = \frac{\partial f}{\partial \eta} \frac{\partial \eta}{\partial t} = -C_o f' \quad (115)$$

$$\eta = x - C_o t$$

A partir del planteamiento de estas condiciones iniciales, se estudia a continuación tres casos específicos:

- Caso 1: Desplazamiento inicial con velocidad nula
- Caso 2: Velocidad inicial con desplazamiento nulo.
- Caso 3: Fuerza aplicada bruscamente



Caso 1: Desplazamiento inicial $u(x,0) = h(x)$ con velocidad inicial nula $\dot{u}(x,0) = 0$

Para esta situación las condiciones iniciales resultan:

$$u(x,0) = \frac{1}{2}(f(x) + g(x)) = h(x) \quad (116)$$

$$\dot{u}(x,0) = \frac{C_0}{2}(-f'(x) + g'(x)) = 0 \quad (117)$$

La segunda condición (117) es usada para obtener la relación entre las funciones f y g ($f(x) = g(x)$).

Así, sustituido en la primera (116) $f(x) = g(x) = h(x)$. De esta forma la ecuación (113) resulta:

$$u(x,t) = \frac{1}{2}(h(x - C_0 t) + h(x + C_0 t)) \quad (118)$$

Esta ecuación nos dice que a partir de una perturbación aparecen dos ondas, una para cada sentido, con la amplitud mitad de la perturbación inicial y velocidad $C_0 = \sqrt{E/\rho}$.

En la Figura 36 se muestra, para una barra de longitud infinita, como se desplaza la zona comprimida inicialmente de longitud l . Al comprimirse la zona central de longitud l y liberarse bruscamente, aparece una onda hacia el eje positivo del eje x y otra hacia el eje negativo x en aplicación de la ecuación (118). Es decir, la mitad de la compresión inicial "corre" hacia adelante y la mitad de la compresión "corre" hacia atrás como muestra dicha figura.

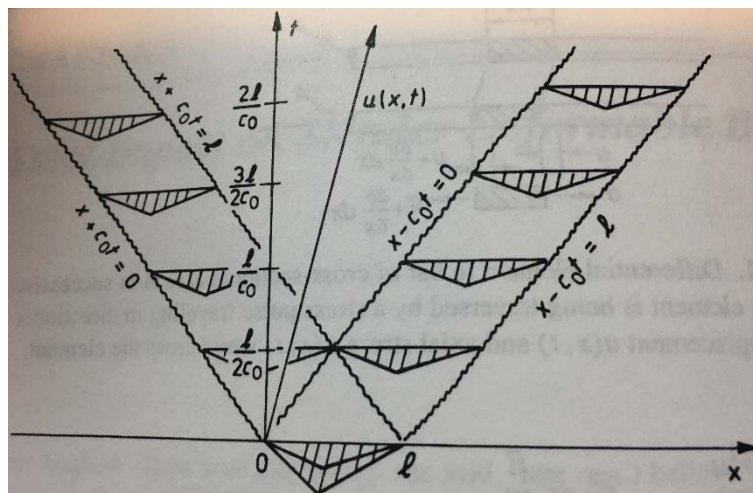


Figura 36-Evolución temporal del desplazamiento inicial sobre una barra de longitud infinita.



Caso 2: Desplazamiento nulo $u(x,0) = 0$ y velocidad inicial $\dot{u}(x,0) = h(x)$

Para estas condiciones de contorno, la ecuación del movimiento resulta:

$$u(x,0) = 0 \rightarrow f(x) = -g(x) \rightarrow f'(x) = g'(x) \quad (119)$$

$$\dot{u}(x,0) = h(x) \rightarrow h(x) = -\frac{C_o}{2} (f'(x) + f''(x)) \quad (120)$$

$$f(x) = -\frac{1}{C_o} \int_0^x h(\bar{x}) d\bar{x} \quad (121)$$

$$u(x,t) = \frac{1}{2C_o} \left(\int_0^{x-C_o t} h(\bar{x}) d\bar{x} - \int_0^{x+C_o t} h(\bar{x}) d\bar{x} \right) = \frac{1}{2C_o} \int_{x-C_o t}^{x+C_o t} h(\bar{x}) d\bar{x} \quad (122)$$

Es decir, si se le aplica una perturbación repentina en forma de velocidad inicial a una partícula de una barra, esta velocidad inicial de partícula se propaga por la barra con velocidad C_o .

Caso 3: Fuerza F_o repentina aplicada en el extremo de una barra

Una fuerza F_o es aplicada en el final de una barra infinita ubicada en el semiespacio infinito $0 < x < \infty$. La onda es saliente de la fuente que ocasiona la perturbación, así que $g(\xi)=0$ y:

$$u(x,t) = f(x - C_o t) \quad \text{para } x < C_o t \quad (123)$$

De esta ecuación se deduce que $\frac{\partial u}{\partial x} = f'$ y $\frac{\partial u}{\partial t} = -C_o f'$. Consecuentemente, para una onda viajando en la dirección positiva de x :

$$\frac{\partial u}{\partial x} = -\frac{1}{C_o} \frac{\partial u}{\partial t} \quad \text{para } x < C_o t \quad (124)$$

Las discontinuidades en cualquier variable independiente son indicadas por un braket []. La ecuación (124) indica que, para la onda propagándose para el lado positivo del eje x , cualquier discontinuidad está relacionada:

$$[\sigma(F_o)] = E \left[\frac{\partial u}{\partial x} \right] = -\rho C_o [\dot{u}] \quad (125)$$

Igualmente, si F_o es aplicada en el final de barra donde $-\infty < x < 0$ la solución general implica $f=0$ y $u(x,t)=g(x+C_o t)$. Por lo tanto, la ecuación (125) queda:

$$[\sigma(F_o)] = E \left[\frac{\partial u}{\partial x} \right] = \rho C_o [\dot{u}] \quad (126)$$



Lógicamente, estas ecuaciones (125) y (126) indican que la onda puede viajar en ambas direcciones, y escogerá la dirección en función del sentido de la fuerza de aplicación F_o , la cual impone el signo a la velocidad de propagación C_o .

2.4.1.3 Onda de reflexión para una barra libre

En este caso, a diferencia de los anteriores, la barra analizada no es infinita si no de longitud L . Al tener un extremo, aparece una onda de reflexión que devuelve la onda incidente.

Si una fuerza constante en el tiempo F_o es repentinamente aplicada en uno de los extremos de una barra elástica libre, una onda de tensión de magnitud F_o/A se moverá desde la zona de aplicación hacia el resto de la barra con velocidad C_o ; detrás de la onda, es decir para $x < C_o t$, la tensión y la velocidad de la partícula son constantes $\dot{u}(x, t) = -\frac{\sigma_o}{\rho C_o}$ debido a que la fuerza F_o es mantenida. Si la barra tiene longitud L , el frente de onda alcanzará el extremo libre al tiempo $t=L/C_o$. Después de la incidencia de la onda en el extremo libre, la ecuación (125) resulta una tensión (σ_1) y una velocidad de partícula (\dot{u}_1) detrás del frente de onda reflejado.

$$\sigma_1 - \sigma_o = -\rho(-C_o) \left[u_1 - \left(-\frac{\sigma_o}{\rho C_o} \right) \right] \quad \frac{L}{C_o} < t < 2L/C_o \quad (127)$$

En el extremo libre hay una condición de contorno $\sigma(L,t)=0$, entonces $\sigma_1=0$. De esta forma:

$$\begin{aligned} & \frac{L}{C_o} < t < 2L/C_o \\ & \sigma(x, t) = \sigma_o \quad y \quad \dot{u}(x, t) = -\frac{\sigma_o}{\rho C_o} \quad x < 2L - C_o t \\ & \sigma(x, t) = 0 \quad y \quad \dot{u}(x, t) = \dot{u}_1 = -\frac{2\sigma_o}{\rho C_o} \quad x > 2L - C_o t \end{aligned} \quad (128)$$

Detrás de la onda reflejada propagándose desde el extremo libre, la tensión es nula para satisfacer las tensiones de contorno y la velocidad de la partícula es dos veces la velocidad incidente. En la Figura 37 se muestra este análisis.

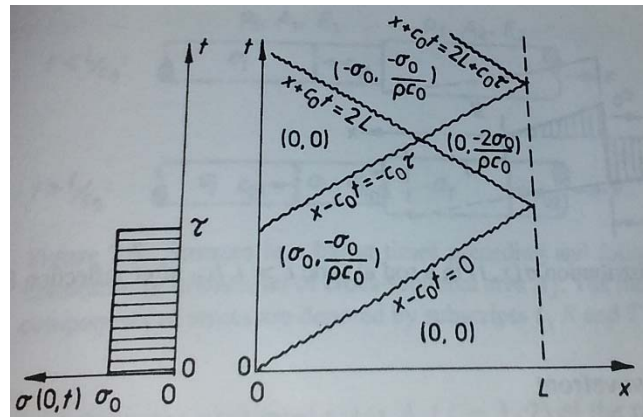


Figura 37-Diagrama característico para una barra libre de longitud L sometida a una onda de tensión σ_0 durante un tiempo τ (se indican velocidad y la tensión).

En la parte izquierda de la Figura 37 se muestra la presión σ_0 actuando durante el tiempo τ en el punto $x=0$. En la parte derecha de la Figura 37, se muestra cómo se desplaza ese “tren” de tensiones σ_0 por la barra. La interpretación de esta parte de la figura es la siguiente: cuando llegue la primera tensión σ_0 a una partícula situada en x , ésta estará tensionada durante un tiempo τ hasta que pase el “tren” de tensiones, y esto le pasará a cada partícula cuando le llegue. Es decir, el “tren” de tensiones se va desplazando y lo hace con velocidad constante C_0 , por lo que tarda en pasar el tiempo τ por cada partícula. Hasta que llega el “tren”, la tensión y la velocidad de partícula es nula, como indica el triángulo inferior de la figura derecha. Cuando llegue el “tren” de tensiones, las partículas tendrán tensión σ_0 y velocidad de partícula $\frac{\sigma_0}{\rho C_0}$ en este caso, como indica la zona ubicada en la figura encima de la anterior. Cuando llegue el “tren” al final de la barra, y se refleje la onda en el extremo libre, en función del instante considerado habrá una zona donde las tensiones se anulen porque las ondas incidente y reflejada se superponen y otra en la que no, que tendrá la tensión de la onda reflejada $-\sigma_0$. Cuando las ondas se superponen, la velocidad de partícula se duplica.

Si en vez del caso analizado de tensión constante σ_0 , se aplicara en el extremo de la barra ($x=0$) una onda arbitraria de tensión $f(x-C_0t)$, ésta tendría la siguiente solución general:

$$u(x, t) = \begin{cases} f(x - C_0 t) & x < C_0 t \\ 0 & C_0 t < x < L \end{cases} \quad (129)$$

Si el pulso de tensiones es reflejado desde el extremo libre, entonces después de la incidencia durante el periodo $L/C_0 < t < 2L/C_0$ la solución, debido a la superposición o no de la onda reflejada con la incidente, será:



$$u(x, t) = \left\{ \begin{array}{ll} f(x - C_0 t) & x < 2L - C_0 t \\ f(x - C_0 t) + g(x + C_0 t) & 2L - C_0 t < x < L \end{array} \right\} \quad (130)$$

La componente g de la onda reflejada es determinada por las condiciones de contorno en el extremo libre, la deformación $\partial u(x, t) / \partial x = f'(x - C_0 t) + g'(L + C_0 t)$ para $x = L$ en cualquier instante debe ser nula dado que el extremo es libre.

$$0 = \frac{\partial u(L, t)}{\partial x} = f'(L - C_0 t) + g'(L + C_0 t) \quad (131)$$

Como $\xi' = L + C_0 t$ la condición de contorno (131) resulta $g'(\xi') = -f'(2L - \xi')$. Consecuentemente y por extensión $g'(x + C_0 t) = -f'(2L - x - C_0 t)$, quedando la tensión tras la onda reflejada:

$$\sigma(x, t) = \frac{E \partial u(x, t)}{\partial x} = E \{ f'(x - C_0 t) - f'(2L - x - C_0 t) \} \quad (132)$$

La tensión tras el frente de onda reflejado se calcula mediante la expresión (132) pero, quizá, es más fácil visualizar estas tensiones como se indica en la Figura 38.

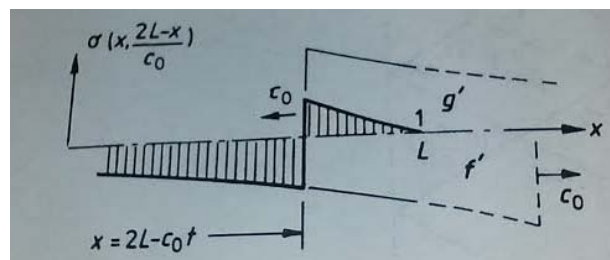


Figura 38-Distribución de tensiones en una barra para $t > L/C_0$ después de la reflexión desde el extremo libre.

En esta figura, se puede ver en la parte negativa del eje de ordenadas las tensiones debida a la onda incidente, y en la parte positiva de dicho eje las tensiones tras el frente de onda reflejado obtenida de la ecuación (132). Estos valores tensiones, se puede obtener sumando a la onda incidente otra onda de signo contrario. En concreto, supuesto una barra virtual de longitud $2L$, si en el mismo instante que nace la onda incidente en $x=0$, nace otra de iguales características y signo contrario en el otro extremo de la barra virtual ($x=2L$), cuando se junten ambas ondas para $t > L/C_0$, producirán las mismas tensiones que las calculadas mediante la ecuación (132). En la Figura 38, las tensiones de la onda incidente y reflejada virtual, previamente a ser sumadas, se muestran con línea continua en la parte de barra real y con línea discontinua en la parte de barra virtual.

La velocidad de la partícula reflejada tiene el mismo signo que la velocidad de la partícula incidente. El desplazamiento para un tiempo $t > L/C_0$ es:



$$u(x, t) = f(x - C_0 t) + f(2L - x - C_0 t) \quad (133)$$

Para $2L - C_0 t < x < L$ y $t > L/C_0$

El segundo término de la ecuación (133) es el correspondiente a la onda reflejada desde el extremo libre.

2.4.1.4 Onda de reflexión para una barra fijada

Para una fuerza F_0 aplicada de manera brusca en el final de una barra elástica de longitud L fijada en el extremo opuesto, se genera una onda de amplitud σ_0 . Esta se inicia en el punto de aplicación y se propaga hacia el extremo fijado con velocidad C_0 . En el extremo fijo,

$$\dot{u}(L, t) = 0 \quad t > 0 \quad (134)$$

La ecuación (127) proporciona la tensión y la velocidad de partícula durante $L/C_0 < t < 2L/C_0$:

$$\sigma(x, t) = \sigma_0 \quad \dot{u}(x, t) = -\frac{\sigma_0}{\rho C_0} \quad x < 2L - C_0 t \quad (135)$$

$$\sigma(x, t) = 2\sigma_0 \quad \dot{u}(x, t) = \dot{u}_I = 0 \quad x > 2L - C_0 t \quad (136)$$

En el extremo fijo, la tensión detrás de la onda reflejada es dos veces la tensión de la onda incidente, mientras la velocidad de la partícula detrás de la onda reflejada es nula.

Esta situación se produce debido a la condición que impone el extremo fijo de la barra sobre la velocidad nula de partícula. Es decir, el apoyo genera una reacción, que produce una onda, en el instante previo a reflejarse la onda incidente. Esta onda ejerce la misma presión σ_0 , pero de sentido contrario, para anular la velocidad de partícula de la onda incidente y conseguir la condición de velocidad nula en el extremo. Tras ese instante, la onda incidente se refleja y se suma a la onda generada por la reacción del apoyo, duplicándose la tensión total.



2.4.2 Impactos axiales

En los apartados previos dedicados a la teoría de ondas axiales, se ha considerado la onda generada por una fuerza F actuando, durante un tiempo determinado, sobre la dirección axial de una barra. En el presente apartado, la onda estará generada por la colisión de una masa, con una determinada velocidad inicial, en la dirección axial de la barra. Por tanto, este apartado se adentra en la teoría de impactos axiales, la cual está basada en la teoría de ondas axiales mostrada previamente.

Para ilustrar la teoría de impactos axiales con un ejemplo, se considera una barra uniforme de longitud L , contra la que choca un cuerpo rígido de masa M que se mueve con velocidad V_0 . En el extremo que no se produce el impacto, y por dotar al ejemplo de mayor generalidad, se dispone un amortiguador viscoelástico de constante μ_0 . Se asume que los cambios en las tensiones son tan rápidos que son transmitidas por ondas de propagación de carácter elástico con velocidad de onda C_0 . Para una onda viajando en la dirección decreciente de x , según la Figura 39, la tensión y la velocidad de partícula están relacionadas por la conservación del momento lineal en el frente de onda según la ecuación (125) y (126):

$$[\sigma] = \rho C_0 [\dot{u}] \quad C_0 < 0 \quad (137)$$

$$[\sigma] = -\rho C_0 [\dot{u}] \quad C_0 > 0 \quad (138)$$

Donde $\dot{u}(x, t)$ es la velocidad de la partícula x .

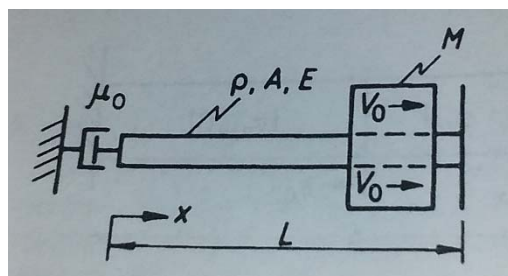


Figura 39-Esquema de cálculo para un impacto axial en una barra.

2.4.2.1 Condiciones de contorno en el extremo del impacto

En cualquier instante considerado, la tensión y la velocidad de la partícula de cada extremo de la barra es una suma de la onda incidente y reflejada con magnitudes σ_I y σ_R , respectivamente. La masa impacta en el extremo $x=L$ con velocidad previa al impacto V_0 , desarrollando durante el



impacto una velocidad $V(t)$. Esta teoría realiza la siguiente hipótesis para el cálculo: mientras dura el contacto, la velocidad de la masa es la misma que la velocidad de la partícula en el extremo de la barra $\dot{u}(L, t)$. Esta condición de contorno se expresa:

$$V(t) = \dot{u}_I(L, t) + \dot{u}_R(L, t) \quad (139)$$

La aceleración, o deceleración en ese caso, de la masa que impacta, depende de la fuerza en el extremo de la barra donde se genera el impacto:

$$\begin{aligned} M \frac{dV}{dt} &= -[\sigma_I(L, t) - \sigma_R(L, t)]A = \rho C_o A [\dot{u}_I(L, t) - \dot{u}_R(L, t)] = \\ &= \rho C_o A [2\dot{u}_I(L, t) - V(t)] \end{aligned} \quad (140)$$

Donde la anterior igualdad se deduce de la ecuación (139). Si se define el parámetro α como la relación entre masas ($\alpha=M/\rho AL$), se obtiene la siguiente solución a la ecuación diferencial (140):

$$V(t) = \left(\frac{2C_o}{\alpha L}\right) e^{-\frac{C_o t}{\alpha L}} \left\{ C + \int_0^t \dot{u}_I(L, t') e^{-\frac{C_o t'}{\alpha L}} dt' \right\} \quad (141)$$

En el instante inicial, según esta teoría, $V(0)=V_o$ y además $\dot{u}_I(L, t') = 0$, de lo que se deduce, aplicando estas condiciones, el valor de la constante $C = \frac{\alpha L}{2C_o} V_o$. Como $\dot{u}_I(L, t') = 0$, la ecuación (141) dividida por V_o resulta:

$$\frac{V(t)}{V_o} = \frac{\dot{u}(L, t')}{V_o} = e^{-C_o t/\alpha L} \quad C_o t < 2L \quad (142)$$

Durante la primera parte del impacto, la onda reflejada del extremo del impacto es obtenida por extensión de esta condición de contorno en el extremo del impacto a cualquier punto de la barra sustituyendo el término $C_o t$ por el término $C_o t + x - L$. De esta forma, la ecuación (142) resulta finalmente:

$$\frac{\dot{u}_R(x, t)}{V_o} = \frac{\sigma_R(x, t)}{\rho C V_o} = e^{-(C_o t + x - L)/\alpha L} \quad (143)$$



2.4.2.2 Condiciones de contorno en el extremo del amortiguador

La fuerza del amortiguador es proporcional a la velocidad en el extremo en el que está dispuesto, es decir proporcional a $\dot{u}_I(0, t) + \dot{u}_R(0, t)$. Si la constante de proporcionalidad es μ_o , el equilibrio de fuerzas proporciona la siguiente condición de contorno para $x=0$:

$$0 = [\sigma_I(0, t) + \sigma_R(0, t)]A - \mu_o[\dot{u}_I(0, t) + \dot{u}_R(0, t)]$$

$$= \rho C_o A [\dot{u}_I(0, t) - \dot{u}_R(0, t)] - \mu_o[\dot{u}_I(0, t) + \dot{u}_R(0, t)] \quad (144)$$

Si definimos $\gamma = \mu_o/\rho AC_o$ y se reordena la ecuación anterior, se obtiene el coeficiente de reflexión Υ_R :

$$\Upsilon_R = \frac{\sigma_R(0, t)}{\sigma_I(0, t)} = \frac{\dot{u}_R(0, t)}{\dot{u}_I(0, t)} = -\frac{\gamma - 1}{\gamma + 1} \quad (145)$$

Durante el primer periodo $L/C_o < t < 3L/C_o$ la onda reflejada en el amortiguador ($x=0$) es determinada por la onda incidente según la ecuación (144) y coeficiente de reflexión expresado en la ecuación (145). La velocidad de la onda reflejada en el extremo del amortiguador para este periodo resulta:

$$\dot{u}_R(0, t) = \Upsilon_R \dot{u}_I(0, t) = -V_o e^{-\frac{C_o t - L}{\alpha L}} \quad \frac{L}{C_o} < t < \frac{3L}{C_o} \quad (146)$$

Análogamente a lo realizado con la velocidad de partícula, la onda reflejada en cada punto de la barra es obtenida por extensión de la condición de contorno (146). Para ello se reemplaza el termino $(C_o t - L)$ por el termino $(C_o t - x - L)$, resultando:

$$\frac{\dot{u}_R(0, t)}{V_o} = -\Upsilon_R e^{-\frac{C_o t - x - L}{\alpha L}} \quad x < C_o t - L \quad \& \quad \frac{L}{C_o} < t < \frac{3L}{C_o} \quad (147)$$

En la Figura 40 se muestra los resultados de la propagación de la onda por la barra a partir del impacto inicial, con sus correspondientes reflexiones.

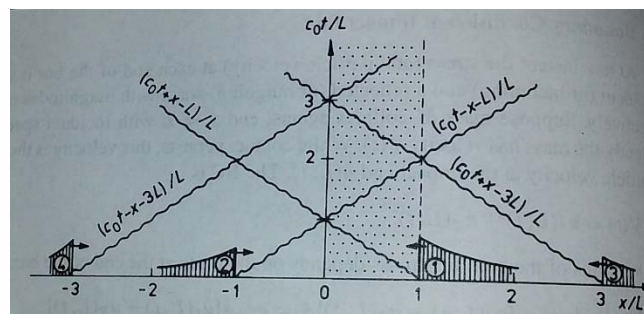


Figura 40-Diagrama característico para los componentes del frente de onda en una barra virtual extendida. La barra se localiza realmente entre $0 < x/L < 1$.



En el eje de abscisas de la Figura 40, se muestra la longitud de la barra en términos relativos (x/L), es decir, la barra está ubicada entre los valores 0 y 1 del eje de abscisas. En el eje de ordenadas se representa, en términos relativos, la variable temporal. Una unidad en este eje representa el tiempo que tarda la onda en llegar desde un extremo de la barra a otro. Es decir, en 0 la onda sale del extremo impactado, en 1 llega al extremo con amortiguador, en 2 vuelve al extremo impactado etc. La onda se sigue reflejando indefinidamente. Fuera de los límites de la barra ($x/L < 0$ y $x/L > 1$) la Figura 40 muestra los impactos virtuales sobre barras virtuales que, al juntar su onda con la onda real, producirían una onda de reflexión igual a calculada por el método descrito. Esta composición virtual es análoga a la expuesta en el apartado 2.4.1.3.

2.4.2.3 Distribución de tensiones y velocidad de partícula

Hasta ahora la solución al problema se ha acotado temporalmente para el periodo que engloba una única reflexión ($L/C_o < t < 3L/C_o$). Las componentes de las tensiones en las ondas para cualquier instante se obtienen por la continuación de la solución con las sucesivas condiciones de contorno, superponiéndose para obtener la respuesta al impacto. Por tanto, para cualquier instante, la solución para la región $0 < x < L$ es la suma de esas componentes las cuales son generadas por el impacto inicial y las consiguientes reflexiones.

Si se calculan las sucesivas reflexiones, a partir del concepto de barra virtual expuesto anteriormente, como una onda entrando en el extremo correspondiente en el periodo $C_o t/L$ como se ilustra en la Figura 40, la constante de integración en la ecuación (141) para cada caso es determinada por la continuidad de la velocidad $V(t)$:

$$\frac{\sigma_1}{\rho C_o V_o} = \frac{\dot{u}_1}{V_o} = \exp\left(-\frac{1}{\alpha}\left(\frac{C_o t}{L} + \frac{x}{L} - 1\right)\right) \quad x > L - C_o t \quad (148)$$

$$\frac{\sigma_2}{\rho C_o V_o} = \frac{\dot{u}_2}{V_o} = \exp\left(-\frac{1}{\alpha}\left(\frac{C_o t}{L} - \frac{x}{L} - 1\right)\right) \quad x < -L + C_o t \quad (149)$$

$$\frac{\sigma_3}{\rho C_o V_o} = \frac{\dot{u}_3}{V_o} = -\gamma R \left(1 - \frac{2}{\alpha}\left(\frac{C_o t}{L} + \frac{x}{L} - 3\right)\right) \exp\left(-\frac{1}{\alpha}\left(\frac{C_o t}{L} + \frac{x}{L} - 3\right)\right) \quad x > 3L - C_o t \quad (150)$$



$$\frac{\sigma_4}{\rho C_0 V_0} = \frac{\dot{u}_4}{V_0} = -\gamma R^2 \left(1 - \frac{2}{\alpha} \left(\frac{C_0 t}{L} - \frac{x}{L} - 3 \right) \right) \exp \left(-\frac{1}{\alpha} \left(\frac{C_0 t}{L} - \frac{x}{L} - 3 \right) \right) \quad x < 3L + C_0 t \quad (151)$$

La colisión finaliza en el tiempo $t_f \geq 2L/C_0$ cuando la tensión se haga nula ($\sigma(L, t_f)=0$). De este modo la onda reflejada en el extremo libre justo anula la tensión de la onda incidente $\sigma_I(L, t)$.

La Figura 41 muestra la variación temporal de las tensiones, en términos relativos, de la sección de la barra donde se produce el impacto. En la figura se muestra la solución para dos casos distintos. El primero corresponde al impacto de dos masas iguales ($\alpha=1$) mostrado en línea continua, y el segundo para una masa del proyectil cuatro veces mayor que la de la barra ($\alpha=4$) mostrado en línea discontinua. La condición de contorno en el extremo con amortiguador utilizada para los cálculos es un empotramiento perfecto ($r \gg 1$).

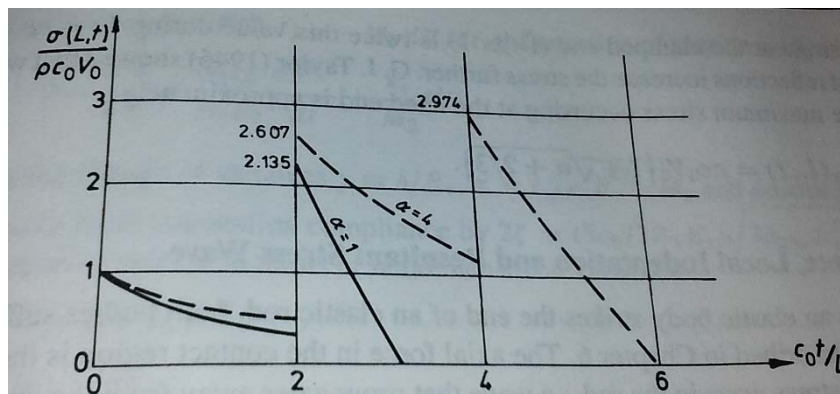


Figura 41-Tensión en el extremo del impacto en función del tiempo para distintos valores de α .

Como se puede ver en la Figura 41, después de la incidencia inicial, la masa ligera ($\alpha=1$) rápidamente decelera, separándose la masa del proyectil de la barra para el valor de tiempo relativo $C_0 t/L \approx 3$. Sin embargo, en el caso de la masa más pesada ($\alpha=4$), la separación ocurre para $C_0 t/L \approx 6$.

En ambos casos analizados, en el extremo del impacto existe un salto en tensiones para cada vez que la onda inicial vuelve.

Del análisis mostrado en la Figura 41, se puede obtener la tensión máxima para cada caso analizado. En la Figura 42, se presenta, también en términos relativos, la tensión máxima durante el impacto para varios casos según el parámetro α , en esta ocasión en el extremo del empotramiento. La máxima tensión calculada a partir de la teoría de impactos de onda elástica descrita, se muestra en la Figura 42 con línea continua gruesa, y con línea continua fina su valor medio. Para la comparación, se muestran los resultados de la tensión máxima, asumiendo deformación uniforme en la barra, para la solución dinámica (línea de trazos) y para la solución



cuasi-estática (línea de punto trazo). A la vista de los resultados, la teoría de impactos de ondas elástica proporciona el mayor valor de tensión máxima.

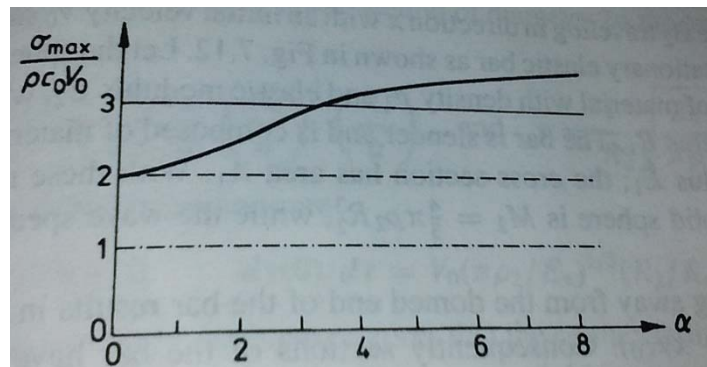


Figura 42-Tensión máxima en el amortiguador para el caso de empotramiento en función de la relación de masas. En continuo la solución de onda elástica, en trazos la solución dinámica asumiendo deformación uniforme y en punto y trazo la solución cuasi-estática.

2.4.2.4 Experimentos

Jhon Hopkinson(1872)²¹ y Beltram Hopkinson (1913)²² realizaron experimentos con esferas de acero impactando con el final de un cable de acero. El cable estaba enroscado a un agujero en la esfera, y la esfera se lanzaba desde una altura h . Con un gran rango de masas para la esfera, la mínima altura requerida para romper el cable resultó independiente de la masa M de la esfera. Además, el cable rompió en el extremo fijo y no en el extremo impactado. Si la altura de lanzamiento pasaba de un cierto valor crítico h_{cr} , la rotura ocurría en el extremo de la esfera.

Estos resultados fueron explicados en términos de ondas en cables elásticos. La tensión en el extremo de impacto es:

$$\sigma(0, t) = \rho C_o V_o e^{-C_o t / \alpha L} \quad (152)$$

Mientras la tensión en el extremo fijo empotrado es dos veces este valor durante $L < C_o t < 3L$. Consecuentemente la reflexión incrementaba la tensión.

Más adelante, Taylor G. I. (1946)²³ mostró que, sin rotura, la máxima tensión ocurría en el extremo fijo y tenía el valor aproximado:

$$\sigma_{\max}(L, t) = \rho C_o V_o \left(1 + \sqrt{\alpha + \frac{2}{3}}\right) \quad (153)$$



2.4.2.5 Impacto, deformación local y resultados de la teoría ondas para las tensiones.

En el apartado anterior, todos los cálculos han sido realizados asumiendo que, en el instante inicial del impacto, la velocidad de la partícula de la barra que recibe el impacto tenía la velocidad inicial del proyectil. Para poder considerar otra velocidad distinta, es necesario completar la teoría expuesta en el apartado anterior con una deformación o indentación local que permita una transición suave de velocidades. Para ello se supone que cuando un cuerpo elástico impacta en el extremo de una barra elástica, ambos cuerpos experimentan una indentación durante el impacto. La fuerza axial de dicha indentación en la zona de contacto, es el origen de una onda, con sus tensiones correspondientes, que se propaga desde el punto de impacto.

Para poder considerar la deformación local, es necesario caracterizarla. Para ello, se supone una esfera B_2 , elástica, que viaja en dirección x con una velocidad V_0 y repentinamente impacta con una barra estática tal y como muestra la Figura 43.

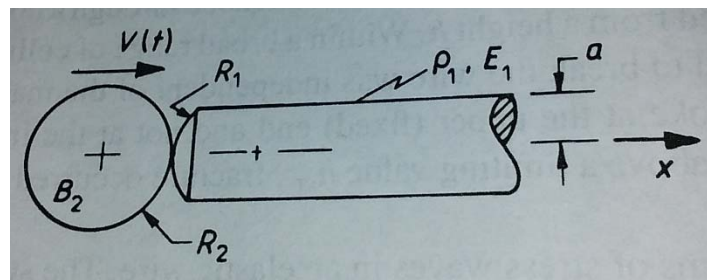


Figura 43-Impacto coaxial de una esfera en una barra en el extremo libre.

La esfera tiene un radio R_2 , y está compuesta de un material de densidad ρ_2 y un módulo de elasticidad E_2 . El extremo de la barra presenta un radio R_1 , y la barra tiene una densidad ρ_1 y un módulo de elasticidad E_1 con un área constante A_1 . La masa de la esfera es $M_2=4/3\pi \rho_2 R_2^3$. La velocidad de onda en este caso es $C_0 = \sqrt{E_1/\rho_1}$.

Las tensiones generan una onda de desplazamientos que se propaga desde la zona redondeada de la barra hacia el otro extremo según la función $u(x, t) = f(t - \frac{x}{C_0})$. Consecuentemente, las partículas de la barra en cada sección tienen una ley de velocidades:

$$\dot{u}(x, t) = f'(t - x/C_0) \quad (154)$$

Y una ley de deformaciones:

$$\varepsilon(x, t) = -\frac{1}{C_0} f'(t - \frac{x}{C_0}) \quad (155)$$



En la zona del impacto existe una deformación local o indentación $\delta(t)$, cuya velocidad viene dada por la siguiente expresión:

$$\dot{\delta} = V(t) - \dot{u}(0, t) = V(t) - f'(t) \quad (156)$$

En la superficie de contacto ($x=0$) la fuerza de contacto $F(0,t)$ está relacionada con la deformación local y global, y se expresa según la siguiente ecuación:

$$F(0, t) = \frac{A_1 E_1}{C_0} f'(t) = K_s \delta^{3/2} \quad (157)$$

Donde $E^* = E_1 E_2 / (E_1 + E_2)$ y $R^* = R_1 R_2 / (R_1 + R_2)$ definen la rigidez $K_s = 4/3 E^* R^{*1/2}$ de acuerdo con la ecuación (109). Esta fuerza se propaga con la onda generada.

Después de sustituir la expresión de f' dentro de la ecuación (147) y sabiendo que $F(0,t) = -M_2 dV/dt$ se obtiene:

$$0 = \frac{d^2 \delta}{dt^2} + \frac{K_s C_0}{A_1 E_1} \frac{d\delta^{3/2}}{dt} + \frac{K_s}{M_2} \delta^{3/2} \quad (158)$$

Realizando el cambio de variables $y = \delta/R^*$, $\tau = \sqrt{K_s \frac{R^{*1/2}}{M_2}}$ y $2\xi = \left(\frac{3C_0}{2A_1 E_1}\right) \sqrt{M_2 K_s R^{*1/2}}$ se obtiene

la ecuación del movimiento en términos de variables adimensionales:

$$0 = \ddot{y} + 2\xi \dot{y}^{1/2} + y^{3/2} \quad (159)$$

Donde $\dot{y} = \frac{dy}{d\tau}$

Para interpretar los resultados adimensionales que se obtienen del análisis, es útil considerar que si la barra presenta una sección circular de diámetro $2a$, los parámetros pueden ser expresados como:

$$\xi^2 = E^* \frac{\rho_2}{\pi E_1 \rho_1} \left(\frac{R_2}{a}\right)^3 \left(\frac{R^*}{a}\right) \quad y \quad \tau = \frac{t}{R_2} \sqrt{\frac{E^* R^*}{\pi \rho_2 R_2}} \quad (160)$$

Donde las condiciones de contorno iniciales son:

$$y(0) = 0 \quad \frac{dy(0)}{d\tau} = V_0 (\pi \rho_2 E^*)^{1/2} \left(\frac{R_2}{R^*}\right)^{5/4} \quad (161)$$



El análisis expuesto en las ecuaciones anteriores necesita que el radio de la zona de contacto sea pequeño en comparación con el radio de la barra para que la tensión de Hertz sea representativa de las condiciones de contacto. De esta forma, cuanto más se aproxime el límite asintótico $R^*/a \rightarrow \infty$ peor será la solución para impactos axiales descrita por esta teoría.

Con la aportación de la teoría de Hertz de deformación local descrita en este apartado, y previa a la solución diferencial descrita en la ecuación (159), se obtiene la fuerza de contacto $F(0,t)$ y el tiempo de duración de la misma. Con estos valores conocidos, se puede aplicar la teoría de impactos axiales general descrita a lo largo del apartado 2.4.2 para calcular la propagación de la onda de tensiones por la barra.

Como ha quedado demostrado en el presente apartado, el cálculo de la fuerza de contacto mediante la teoría de deformación local para impactos axiales, es totalmente independiente de la barra a nivel global.



2.4.3 Teoría de vibraciones transversales

En los impactos transversales, el mecanismo básico de absorción de energía por parte del elemento que recibe el impacto es la flexión. En este tipo de impactos, la dirección de la masa que impacta es perpendicular a la directriz del objeto que recibe el impacto. A continuación, se muestra la principal teoría de resolución de impactos sobre estructuras trasversales, realizando un breve estudio previo por la teoría de ondas transversales en estructuras.

2.4.3.1 Vibración libre de una viga uniforme

Para ilustrar la teoría de vibraciones en estructuras, se realiza el desarrollo teórico sobre una viga como muestra la Figura 44.

Los desplazamientos transversales para una viga de sección constante $w(x, t)$ con una masa por unidad de longitud $m = \rho A(x)$ y rigidez a flexión $EI(x)$, están representados por la ecuación general (162). Dicha ecuación desprecia la inercia de rotación y el efecto del cortante transversal, lo cual implica que su aplicación está restringida a longitudes de onda mayores que la dimensión de la sección transversal.

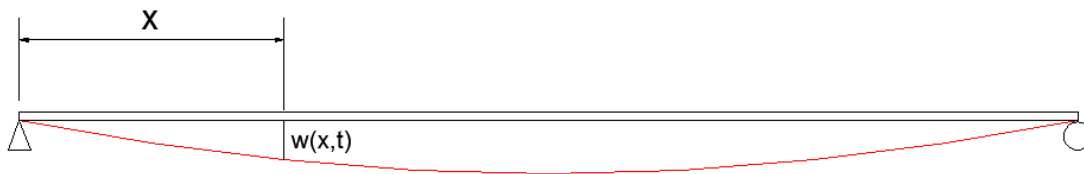


Figura 44-Esquema de viga de canto constante.

Si se aplica la segunda ley de Newton de manera diferencial:

$$-\frac{\partial^2}{\partial x^2} \left(EI \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \right) = \rho A \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} \quad (162)$$

Si la viga es de sección constante y lineal, la ecuación (162) se puede expresar:

$$0 = \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} + \frac{EI}{\rho A} \frac{\partial^4 w}{\partial x^4} \quad (163)$$



La ecuación (163) tiene solución como producto de dos funciones independientes entre sí, una dependiente de tiempo y otra del espacio.

$$w(x, t) = X(x) (A_1 \cos(w_o t) + A_2 \text{seno}(w_o t)) \quad (164)$$

Donde w_o es la frecuencia angular de vibración. Si se sustituye la ecuación (164) en la (163) resulta:

$$0 = \frac{\partial^4 X}{\partial x^4} - \frac{\rho A}{EI} w_o^2 X \quad (165)$$

Esta ecuación de orden cuatro tiene solución de raíces repetidas. Esta solución puede expresarse en términos de dos pares de funciones trigonométricas, una simétrica y otra antimétrica.

$$X(x) = C_1(\cos(kx) + \cosh(kx)) + C_2(\cos(kx) - \cosh(kx)) \quad (166) \\ + C_3(\text{sen}(kx) + \text{senh}(kx)) + C_4(\text{sen}(kx) - \text{senh}(kx))$$

Donde $k = \sqrt{w_o \frac{\rho A^{0.5}}{EI^{0.5}}}$ es el número de onda y los C_i son coeficientes a determinar según las condiciones de contorno.

2.4.3.2 Modos de vibración libre de una viga biempotrada de sección constante

Para obtener los modos de vibración o auto-vectores de una viga, por ejemplo, de sección constante biempotrada, solo hace falta sustituir en la ecuación (166) las condiciones de contorno correspondientes. Para el caso de la viga biempotrada se impone desplazamiento y giro nulos en los extremos:

$$X(0) = X(L) = 0 \quad \frac{dX(0)}{dx} = \frac{dX(L)}{dx} = 0 \quad (167)$$

Aplicando las condiciones expuestas en (167), se obtienen las siguientes relaciones para los coeficientes C_i :

$$C_1 = C_3 = 0 \quad (168)$$



$$\frac{C_2}{C_4} = \frac{\cos(kL) - \cosh(kL)}{\sin(kL) - \sinh(kL)} = -\frac{\sin(kL) - \sinh(kL)}{\cos(kL) - \cosh(kL)} \quad (169)$$

De la ecuación (169) resulta la siguiente igualdad, que nos permite calcular el autor valor k:

$$\cos(kL) \cosh(kL) = 1 \quad (170)$$

Este método sería exacto (y se referirá a él como tal) si se determinara el valor de k con exactitud. Obtenerlo no es sencillo, dado que la ecuación (170) es muy inestable desde el punto de vista numérico, por lo que se considera suficiente una estimación de su valor. El valor de k se puede aproximar mediante:

$$kL \approx (j + 0.5)\pi \quad \text{con } j = 1, 2, \dots \infty \quad (171)$$

Cada valor de k que se produce con cada j permite calcular la frecuencia de los distintos modos

según $k_j = \sqrt{w_j \frac{\rho A^{0.5}}{EI^{0.5}}}$. Los primeros 5 autovalores están listados en la tabla de la Figura 47.

Conocido el valor de k, y a partir de los constantes calculadas anteriormente en las ecuaciones (168) y (169) y sustituidos en la ecuación (166), se puede calcular el autovector o modo de vibración j de la viga biempotrada de sección constante que ha servido de ejemplo:

$$X_j = C_j (\sin(k_j L) - \sinh(k_j L)) \left(\frac{\sin(k_j x) - \sinh(k_j x)}{\sin(k_j L) - \sinh(k_j L)} - \frac{\cos(k_j x) - \cosh(k_j x)}{\cos(k_j L) - \cosh(k_j L)} \right) \quad (172)$$

Los primeros 3 modos de vibración se muestran en la Figura 45.

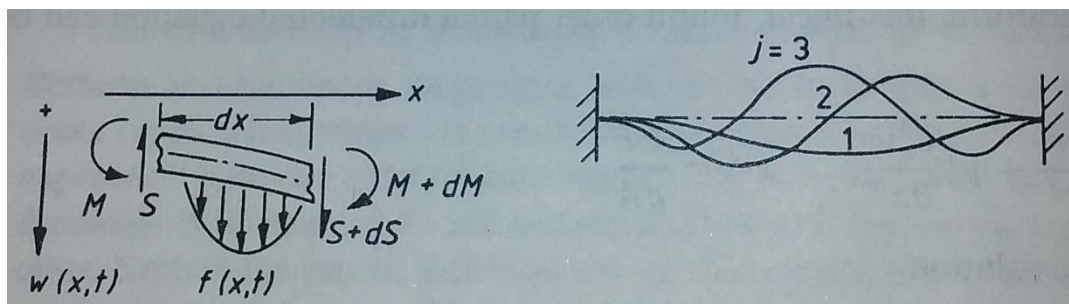


Figura 45-Elemento diferencial de cálculo (dcha.) y los modos de vibración para los tres primeros valores de j (izda.)

La constante C_j es el parámetro que escala la amplitud del modo. Se puede escoger el valor de C_j para que el modo sea normalizado según:



$$1 = \int_0^L X_j X_j dx \quad (173)$$

También se puede obtener C_j para que la máxima amplitud sea la unidad:

$$1 = X_{j,max} \quad (174)$$

Así, para la ecuación lineal (163) la solución se puede establecer por superposición de modos según la expresión:

$$w(x, t) = \sum X_j (A_{1,j} \cos(w_j t) + A_{2,j} \text{sen}(w_j t)) \quad (175)$$

Donde los coeficientes $A_{1,j}$ y $A_{2,j}$ se obtienen de las condiciones iniciales de desplazamiento y velocidad del problema considerado.

2.4.3.3 Aproximación de las frecuencias de vibración por el método Rayleigh-Ritz

Cuando solo unos pocos modos de vibración son necesarios para representar la respuesta estructural, un conjunto de funciones de forma X_j que aproximen la forma de los modos es una solución suficientemente precisa para dar una estimación de las frecuencias modales.

Para un elemento estructural con propiedades uniformes, las funciones empleadas para aproximar la deformada deben ser continuas y satisfacer las condiciones de contorno. Además, se simplifica el análisis si los conjuntos de funciones son ortogonales para que las ecuaciones de los modos estén desacopladas. Así, la aproximación se puede expresar:

$$w(x, t) = \sum_{j=0}^{\infty} A_j X_j \text{sen}(w_j t - \phi_j) \quad (176)$$

Donde ϕ_j es el ángulo de fase y A_j es la amplitud para cada modo. A partir de la expresión (176) se puede deducir la energía cinética T_j para el modo j :

$$T_j = \frac{1}{2} \int_0^L \rho A \dot{w}_j^2(x, t) dx = \frac{((A_j w_j \cos(w_j t - \phi_j))^2}{2} \int_0^L \rho A X_j^2(x) dx \quad (177)$$

Según la expresión anterior, la energía cinética máxima asociada con el modo j , tiene un valor de:



$$T_{j,max} = \frac{A_j^2 w_j^2}{2} \int_0^L \rho A w_j^2(x) dx \quad (178)$$

Análogamente, la energía de deformación U_j del modo X_j de una viga trabajando a flexión se calcula:

$$U_j = \frac{1}{2} \int_0^L M(x,t) \frac{d^2 w(x,t)}{dx^2} dx = \frac{1}{2} \int_0^L EI \left(\frac{d^2 w_j(x,t)}{dx^2} \right)^2 dx \quad (179)$$

Donde la curvatura $\frac{d^2 w}{dx^2}$ está relacionada con el momento flector según $M(x,t) = EI \frac{d^2 w}{dx^2}$.

El máximo valor de la energía de deformación está determinado y se obtiene según la expresión:

$$U_{j,max} = \frac{A_j^2}{2} \int_0^L EI \left(\frac{d^2 X_j}{dx^2} \right)^2 dx \quad (180)$$

En un sistema conservativo los valores máximos de energía cinética y energía potencial o de deformación son iguales, así que igualando las expresiones (178) y (180) se puede obtener el valor de frecuencia de vibración:

$$w_j^2 = \frac{\int_0^L EI \left(\frac{d^2 X_j}{dx^2} \right)^2 dx}{\int_0^L \rho A X_j^2(x) dx} \quad (181)$$

2.4.3.4 Aproximación por el método simplificado de un grado de libertad

Si la masa del cuerpo que impacta M^I es suficientemente pequeña con respecto a la masa de la estructura \tilde{M} , se puede desarrollar un método simplificado muy útil para estimar la respuesta estructural en un impacto. El grado de libertad aproximado es esencialmente una estimación de la deformada del modo X_j . En este método, el desplazamiento de la estructura $w(x,t)$ se asume separado en dos funciones independientes $w(x,t) = q_o(t)X_j$.

En la Figura 46 se puede apreciar el modelo de cálculo utilizado por esta teoría, con un muelle de rigidez equivalente \tilde{k} obtenido de la energía de deformación donde la función para la deformación X_j está normalizada según el criterio de la ecuación (174). Por ejemplo, para una viga uniforme trabajando a flexión, la rigidez se calcula:



$$U_{max} = \frac{1}{2} q_o^2 \int_0^L EI \left(\frac{d^2 X_j}{dx^2} \right)^2 dx = \frac{1}{2} \tilde{k} q_{o,max}^2 \quad (182)$$

Si es el máximo desplazamiento vale 1, la rigidez equivalente resulta:

$$\tilde{k} = \int_0^L EI \left(\frac{d^2 X_j}{dx^2} \right)^2 dx \quad (183)$$

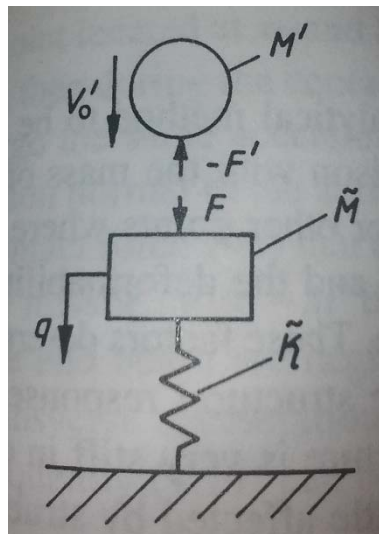


Figura 46-Modelo de cálculo del método de un grado de libertad simplificado.

De forma similar, una masa equivalente es obtenida para el máximo de energía cinética:

$$\tilde{M} = \int_0^L \rho A X^2 dx \quad (184)$$

La frecuencia se calcula a partir de las ecuaciones (183) y (184):

$$\omega^2 = \tilde{k} / \tilde{M} \quad (185)$$

Por comparar el método exacto, con la aproximación de Rayleig y el método simplificado, se calculará para estos dos últimos métodos el caso de la viga biempotrada de sección constante, inercia I y módulo de elasticidad E . Las funciones de forma para el modo 1 y 2 (para el método simplificado solo se puede obtener la del modo 1), las cuales son ortogonales y cumplen con las condiciones de contorno, son:



$$X_1 = 1 - \cos\left(\frac{2\pi x}{L}\right) \quad (\text{Simétrico}) \quad (186)$$

$$X_2 = \text{sen}\left(\frac{2\pi x}{L}\right) - \text{sen}\left(\frac{4\pi x}{L}\right) \quad (\text{Antisimétrico}) \quad (187)$$

Se define la variable γ como:

$$\gamma^2 = \frac{EI}{\rho A} \quad (188)$$

Se pueden comparar los resultados de los tres métodos para el caso de la viga uniforme biempotrada y muestran en la Figura 47.

Mode no.	Wave number		Modal Frequency $L^2\omega_j/\gamma$		
	$k_j L$ (rad)	C_2/C_4	Exact	Rayleigh Approx.	Single DOF Approx.
1	4.730	-0.98	22.37	22.80	22.80
2	7.853	-1.00	61.67	78.98	-
3	10.996	-1.00	120.91	-	-
4	14.137	-1.00	199.85	-	-
5	17.279	-1.00	298.56	-	-

Figura 47-Calculo de frecuencias por método exacto, por la aproximación de Rayleigh y por el método de 1 grado de libertad.

2.4.4 Impactos transversales

Para un impacto transversal en una estructura flexible, el método analítico que debe ser empleado depende de la masa de los cuerpos que impactan en comparación con la de la estructura, el punto de impacto respecto de los apoyos y de la deformabilidad de la zona de contacto en comparación con la deformabilidad de la estructura. Estos factores determinan el número de modos significativos que han de considerarse para el cálculo y el tiempo de duración del impacto. Si la estructura es muy rígida en comparación con la rigidez de la zona de contacto, los resultados se aproximarán a la teoría de cuerpos rígidos. En cambio, si la estructura es



relativamente flexible las vibraciones serán parte importante de la respuesta estructural, debiendo ser de aplicación la teoría de cuerpos flexibles.

2.4.4.1 Vibración forzada en estructuras flexibles

Para simplificar la explicación, se va a utilizar el ejemplo de una viga para ilustrar la teoría. Extrapolar la ecuación diferencial a cada estructura, y proceder de manera similar a lo que se expondrá a continuación, es conceptualmente sencillo.

Para una viga uniforme que trabaja a flexión sobre la que actúa una fuerza transversal $f(x, t)$ distribuida en un elemento diferencial, la ecuación diferencial del movimiento es la siguiente:

$$Y^2 \frac{\partial^4 w}{\partial x^4} + \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} = \frac{f(x, t)}{\rho A} \quad (189)$$

Una solución de funciones separadas se puede deducir de la forma $w(x, t) = X(x)q(t)$, siendo $X(x)$ autofunciones (modos de vibración) obtenidas de la ecuación de vibraciones libres, es decir $f(x, t) = 0$.

Para vibraciones forzadas, el principio de trabajos virtuales resulta:

$$\sum_{j=1}^n \left\{ Y^2 q_j(t) \int_0^L \left(\frac{d^2 X_j}{dx^2} \right)^2 dx + \frac{d^2 q_j}{dt^2} \int_0^L X_j^2 dx \right\} = \int_0^L X_j \frac{f(x, t)}{\rho A} dx \quad (190)$$

Si obtenemos la frecuencia de cada modo de vibración del principio de los trabajos virtuales, se obtiene:

$$w_j^2 / Y^2 = \frac{\int_0^L \left(\frac{d^2 X_j}{dx^2} \right)^2 dx}{\int_0^L X_j X_j} dx = k_j^4 \quad (191)$$

Con $k_j = \sqrt{w_j / Y}$.

Si se sustituye la ecuación (191) en la (190), la ecuación (190) resulta una ecuación diferencial dependiente de la función temporal q_j asociada a cada modo de vibración. Si, además, la fuerza $f(x, t)$ actúa en un único punto x_0 :

$$f(x, t) = F(t)\delta(x_0) \quad (192)$$

Con $\delta(x)$ siendo la función Delta Dirac, la ecuación diferencial (190) resulta:



$$w_j^2 q_j + \frac{d^2 q_j}{dt^2} = \frac{F(t)}{\rho A} \frac{X_j(x_0)}{\int_0^L X_j^2(x) dx} \quad \text{con } w_j^2 = \gamma^2 k^4 \quad (193)$$

La solución de la ecuación diferencial, se obtiene por superposición de las funciones de impulsos respuesta de cada modo de vibración. Para una fuerza $F(t)$ aplicada en una estructura en reposo, se obtiene la solución:

$$q_j = \frac{X_j(x_0)}{\rho A w_j} \frac{\int_0^t F(t') \text{sen}(w_j(t-t')) dt'}{\int_0^L X_j^2(x) dx} \quad (194)$$

Finalmente, los desplazamientos de las autofunciones o modos propios son sumados para obtener la distribución de los desplazamientos totales de la estructura en respuesta de la aplicación de la fuerza $F(t)$:

$$w(x, t) = \sum_{j=1}^{\infty} \frac{X_j X_j(x_0)}{\rho A w_j} \frac{\int_0^t (F(t')) \text{sen}(w_j(t-t')) dt'}{\int_0^L X_j^2(x) dx} \quad (195)$$

2.4.4.2 Efecto de la deformabilidad local en la zona del impacto

Según Stronge ²⁴, el efecto de la deformabilidad local de la estructura en la zona de impacto, normalmente, prolonga la duración del impacto y reduce la fuerza producida durante el mismo. La magnitud de estos efectos, según Stronge, depende de la diferencia entre los periodos de contacto entre la zona local y el modo fundamental de la estructura.

Para ilustrar esta consideración se representa el caso de un proyectil impactando contra una viga en el punto x_0 . La deformación en el punto de contacto se define según la ecuación (196):

$$w(x_0, t) = \sum_{j=1}^{\infty} \frac{X_j X_j(x_0)}{\rho A w_j} \frac{\int_0^t F(t') \text{sen}(w_j(t-t')) dt'}{\int_0^L X_j^2(x) dx} \quad (196)$$

Simultáneamente, una fuerza igual y contraria desacelera el proyectil desde la velocidad inicial V_0 . Se considera que la fuerza actúa sobre la dirección del centro de gravedad y, por tanto, no produce rotación. El esquema del impacto considerado se muestra en la Figura 48.

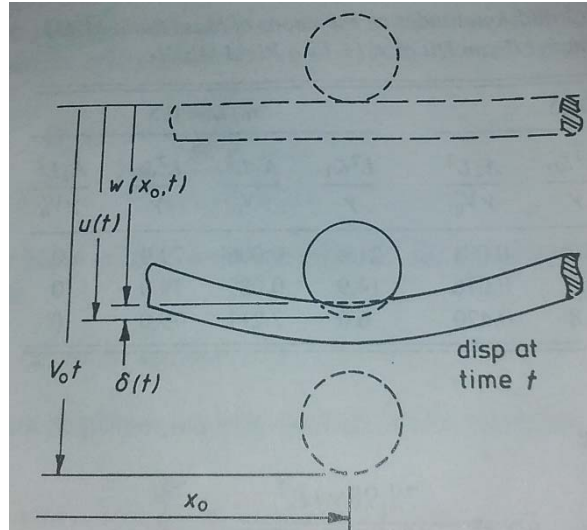


Figura 48-Esquema deformación global de la estructura y deformación local.

El desplazamiento de la masa del proyectil M^I , desde el punto de contacto con la viga en adelante se puede expresar según la siguiente ecuación:

$$u(t) = V_0 t - \int_0^t (t - t') F(t') dt' \quad (197)$$

La deformación local de indentación $\delta(t)$ en el impacto, se puede identificar en la Figura 48. La relación entre esta deformación local y la fuerza de contacto depende de la geometría de las superficies de contacto. Existen distintas teorías para caracterizar esta relación, para deformaciones menores de la deformación de plastificación δ_y :

$$\delta(t) = K^{-1} F \quad \text{Aproximación lineal} \quad (198)$$

$$\delta(t) = k_c^{-1} F; \quad \delta < \delta_y \quad \text{Sup. de contacto cilíndricas y elásticas} \quad (199)$$

$$\delta(t) = k_s^{-2/3} F^{2/3}; \quad \delta < \delta_y \quad \text{Sup. de contacto esféricas y elásticas(Hertz)} \quad (200)$$

De esta forma, y referido a la Figura 48, se puede definir la ecuación del movimiento teniendo en cuenta la deformación de la estructura a nivel global $u(t)$ y a nivel local $\delta(t)$:

$$\delta(t) = V_0 t - \frac{1}{M^I} \int_0^t (t - t') F(t') dt' - \sum_{j=1}^{\infty} \frac{X_j X_j(x_0)}{\rho A w_j} \frac{\int_0^t F(t') \text{sen}(w_j(t - t')) dt'}{\int_0^L X_j^2(x) dx} \quad (201)$$



La ecuación (201) es la expresión más completa para impactos y fue planteada por primera vez por **Timoshenko (1913)**²⁵, que obtuvo soluciones numéricas para casos particulares para contactos con superficies esféricas. Timoshenko discretizó la integral y resolvió $F(t)$ para cada incremento de tiempo.

Lennertz (1937)²⁶ desarrollo una solución aproximación a la ecuación de Timoshenko basada en la respuesta estructural de los bajos modos de vibración. Este método fue mejorado y extendido por Lee (1940)²⁷. Lee desarrolló una metodología que permite obtener resultados aproximados a la ecuación (201), si el periodo de la zona de contacto es pequeño en comparación con el modo fundamental de vibración.

El método de Lee asume la hipótesis que durante el contacto entre cuerpos la fuerza de reacción es una fuerza sinusoidal que varía con el tiempo con una frecuencia Ω y una amplitud F_c . Estos parámetros se obtienen de la respuesta estructural. Por ejemplo, si la fuerza es de la forma:

$$F(t) = F_c \text{sen}(\Omega t) \quad 0 < t < \Pi/\Omega \quad (202)$$

Si se sustituye la ecuación (202) en la ecuación (201) y se integra, la deformación local resulta:

$$\delta(t) = V_o t - \frac{F_c}{\Omega^2 M^I} (\Omega t - \text{sen}(\Omega t)) - \frac{F_c}{w_1 \tilde{M}_1(x_o)} \left\{ \frac{\Omega \text{sen}(w_1 t) - w_1 \text{sen}(\Omega t)}{\Omega^2 - w_1^2} \right\} \quad (203)$$

Donde \tilde{M}_1 es una masa equivalente para la viga en el punto de contacto x_o .

$$\tilde{M}_1 = \frac{\rho A \int_0^L X_1^2(x)}{\int_0^L X_1^2(x_o)} \quad (204)$$

Si el periodo de contacto Π/Ω es pequeño en relación al periodo fundamental de la estructura, ésta estará en la fase inicial de su movimiento y, por tanto, la relación $\text{sen}(w_1 t) \approx (w_1 t)$ mientras dura el contacto. Si se sustituye esta aproximación en la ecuación (203) resulta:

$$\delta(t) = V_o t - \frac{F_c}{\Omega^2 M^I} \left\{ \frac{(\tilde{M}_1 + M^I)\Omega^2 - w_1^2 \tilde{M}_1}{\tilde{M}_1(\Omega^2 - w_1^2)} \right\} (\Omega t - \text{sen}(\Omega t)) \quad (205)$$

Con las aproximaciones realizadas por Lee, y bajo los supuestos descritos, la ecuación (205) presenta la solución a la ecuación diferencial de Timoshenko, a falta de determinar los parámetros F_c y Ω de la supuesta función fuerza. Para determinarlos, se utilizan las teorías de indentación local. Se exponen a continuación los resultados de implementar la teoría lineal y la teoría de Hertz.



Indentación lineal $\delta(t) = K^{-1}F$

A partir de la ecuación (205), y separando ésta en dos términos independientes, uno dependiente de t y otro dependiente de Ωt , se obtienen las expresiones (206) y (207):

$$M^I \frac{\Omega^2}{K} = \frac{(1 + \alpha) \Omega^2 - w_1^2}{\Omega^2 - w_1^2} = B(\Omega) \quad (206)$$

$$M^I \frac{V_o \Omega}{F_c} = B(\Omega) \quad (207)$$

Donde α es la relación entre masas $\alpha = M^I / \tilde{M}_1$.

De ambas expresiones se puede obtener los parámetros buscados F_c y Ω :

$$\Omega^2 = \frac{1}{2} \left(w_1^2 + \frac{(1 + \alpha)K}{M^I} \right) + \frac{1}{2} \left\{ \left(w_1^2 + \frac{(1 + \alpha)K}{M^I} \right)^2 - \frac{4Kw_1^2}{M^I} \right\} \quad (208)$$

$$F_c = KV_o / \Omega \quad (209)$$

Indentación de Hertz $\delta(t) = K_s^{-2/3} F^{2/3}$

Para resolver la ecuación no lineal resultante de la viga con el contacto de Hertz, Lee adopto la siguiente aproximación para la función sinusoidal, $\text{sen}(\Omega t)^{\frac{2}{3}} \approx 1.093 \Omega t$. Para el periodo de contacto, esta aproximación resulta igual al pulso de Hertz. Con esta aproximación la ecuación (205) resulta:

$$\frac{1.093 M^I \Omega^2}{K_s^{2/3} F_c^{1/3}} = \frac{M^I V_o \Omega}{F_c} = B(\Omega) \quad (210)$$

De las dos igualdades de la ecuación (210) se obtienen los parámetros de buscados F_c y Ω :

$$\Omega = \left(\frac{K_s^2 B(\Omega)^2 V_o}{1.306 M^I} \right)^{1/5} \quad (211)$$

$$F_c = \left(\frac{V_o}{1.306 \Omega} \right)^{3/2} \quad (212)$$

Para un contacto esférico elástico según Hertz, la rigidez del muelle K_s que representa la deformación local se obtiene de la ecuación (109). Si el periodo estructural es mucho más grande que el periodo de contacto $\Omega \gg w_1$, entonces $B(\Omega) \approx (1 + \alpha)$ y las expresiones descritas anteriormente para fuerza y frecuencia se pueden escribir:

$$\Omega = \left(\frac{K_s^2 (1 + \alpha)^2 V_o}{1.306 M^I} \right)^{1/5} \quad (213)$$



$$F_c = 1.437K_s \left(\frac{T_o^I}{(1 + \alpha)K_s} \right)^{3/5} \quad (214)$$

Donde T_o^I es la energía cinética inicial del movimiento relativo. Aunque la aproximación de $\text{sen}(\Omega t)^{\frac{2}{3}} \approx 1.093\Omega t$ puede ser mejorada por aproximaciones sucesivas, en general, este esfuerzo no merece la pena.

Independientemente del uso de la teoría de indentación lineal o la teoría Hertz, en el punto de impacto x_o el desplazamiento de la viga $w(x_o, t)$ y el centro de la masa que impacta M^I viene dado por ecuaciones:

$$w(x_o, t) = \frac{F_c}{(\Omega^2 - w_1^2)\tilde{M}_1(x_o)} \left(\frac{\Omega}{w_1} \text{sen}(w_1 t) - \text{sen}(\Omega t) \right) \quad (215)$$

$$u(t) = V_o t - \frac{F_c}{(\Omega^2)M^I} (\Omega t - \text{sen}(\Omega t)) = \frac{V_o t}{1 + \alpha} \left(\alpha + \frac{\text{sen}(\Omega t)}{\Omega t} \right) \quad t < t_f \quad (216)$$

2.4.5 Cálculo de impactos mediante elementos finitos. Método explícito

A lo largo del apartado 2.4 se han expuesto las teorías más importantes para impactos axiales y para impactos transversales en vigas. Como ha quedado demostrado, estas teorías son excesivamente complejas, motivo que las hace poco prácticas. La prueba más evidente, son los diferentes intentos, como el realizado por Lee (1940) y mostrado en el apartado anterior, para buscar una solución más fácil a la ecuación de Timoshenko, es decir, a la ecuación (201).

Existen otras teorías, más complejas aun desde el punto de vista del aparato matemático, para impactos trasversales en columnas, placas, estructuras tridimensionales etc. No merece la pena entrar en ellas porque, en la práctica, todas las estructuras se calculan frente a impacto mediante el uso de software de elementos finitos.

En este apartado no se entrará en el detalle de cómo calculan los programas de elementos finitos los impactos en las estructuras, dado que dicho procedimiento se muestra en cualquier manual de los programas. Lo que se mostrará en este apartado, es una breve explicación de todo ese procedimiento que aparecen en los manuales a un lenguaje más accesible para que, además del programador, el utilitario sea consciente de lo que hacen estos programas.



Le ecuación más completa para el cálculo de impactos mostrada en el apartado 2 de la presente tesis, es la ecuación (201) obtenida por Timoshenko. En dicha ecuación, a diferencia de las ecuaciones mostradas en la teoría de impactos axiales, la deformación local y la deformación global de la estructura están presentes en la misma expresión. Aunque esa ecuación fue calculada exclusivamente para vigas, **la idea que de ella se desprende es la que utilizan los programas de elementos finitos para calcular los impactos**. Por este motivo se realiza a continuación un análisis más en detalle de los términos de la ecuación (201):

$$\delta(t) = V_0 t - \frac{1}{M^I} \int_0^t (t - t') F(t') dt' - \sum_{j=1}^{\infty} \frac{X_j X_j(x_0)}{\rho A w_j} \frac{\int_0^t F(t') \text{sen}(w_j(t - t')) dt'}{\int_0^L X_j^2(x) dx}$$

- $V_0 t - \frac{1}{M^I} \int_0^t (t - t') F(t') dt'$

Este término representa el desplazamiento de la masa del proyectil M^I desde el momento que empieza el contacto del proyectil con la estructura. Presenta a su vez dos términos. En primer lugar, el término $V_0 t$ representa lo que hubiera avanzado el proyectil en el instante t si no chocara con nada. En segundo lugar, el término $-\frac{1}{M^I} \int_0^t (t - t') F(t') dt'$ representa el movimiento que hace la masa M^I debido exclusivamente a la acción de la fuerza de contacto $F(t')$. Dado que esta fuerza frena a la masa, este segundo término tiene sentido contrario al primero.

- $\sum_{j=1}^{\infty} \frac{X_j X_j(x_0)}{\rho A w_j} \frac{\int_0^t F(t') \text{sen}(w_j(t - t')) dt'}{\int_0^L X_j^2(x) dx}$

Este término, aunque su expresión parezca más compleja, simplemente representa el movimiento de una estructura cualquiera para un instante t que, partiendo de reposo, está sometida a la fuerza arbitraria $F(t')$.

- $\delta(t) = K_s^{-2/3} F(t)^{2/3}$

Los dos términos expuestos anteriormente, no son exactamente iguales. La masa del proyectil tiene un movimiento mayor que la estructura, por lo que se produce una penetración del proyectil en la estructura $\delta(t)$, para un instante dado. Esta indentación se observa esquemáticamente en la Figura 48. La rigidez de la zona local del contacto K_s , los programas la calculan con la ecuación (109), o similar.

En esencia, la idea que emerge detrás de la ecuación (201) es la siguiente: **el movimiento de la estructura más la penetración del proyectil en la estructura, es igual al movimiento del**



proyectil. Y esta es la idea que está implementada en los programas de elementos finitos, al igual que hizo Timoshenko, mediante la discretización temporal de la ecuación del movimiento de los objetos que impactan. Es decir, la compatibilidad que implementan los elementos finitos basándose en la ecuación (201) es la siguiente:

Indentación local = Desplazamiento proyectil - Desplazamiento estructura

Para resolver esta compatibilidad en un caso de impacto con un mínimo de precisión, los programas necesitan de una elevada discretización de elementos, tanto para el proyectil como sobre todo para la estructura. De esta forma, se obtiene unas matrices de rigidez muy grandes que el propio software tiene dificultades para invertir. Como además hay que invertirla en cada intervalo temporal en el que se discretice el problema, se necesitarían unos tiempos de cálculo tan elevados que imposibilitan en la práctica la resolución del problema por esta vía.

Para evitar este problema, los programas de elementos finitos utilizan el **método explícito** para resolver problemas de impacto. Este método no resuelve el problema por la inversión de la matriz de rigidez. Resuelve el problema mediante un proceso iterativo a partir de la diagonal principal de dicha matriz. Para ilustrar de forma simplificada cómo procede el método explícito, se muestra a continuación un ejemplo considerando únicamente el término de rigidez de la ecuación del movimiento. La secuencia de resolución se puede resumir de la siguiente forma:

1-Para un instante temporal cualquiera t , el programa ha de resolver para la estructura el sistema de ecuaciones $\vec{F} = \vec{K} \vec{\Delta}$ que, para el ejemplo de fuerzas inerciales nulas, representa la ecuación del movimiento. Este sistema, planteado en términos de vector de fuerzas \vec{F} supuesto conocido, matriz de rigidez \vec{K} y vector de movimientos de los grados de libertad del problema $\vec{\Delta}$, se muestra en la siguiente ecuación matricial:

$$\begin{pmatrix} F_1 \\ \dots \\ F_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} K_{11} & \dots & K_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ K_{n1} & \dots & K_{nn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \Delta_1 \\ \dots \\ \Delta_n \end{pmatrix}$$

La ecuación matricial anterior se puede expresar como un sistema de ecuaciones:

$$F_1 = K_{11}\Delta_1 + \dots + K_{1n}\Delta_n$$

$$\dots = \dots$$

$$F_n = K_{n1}\Delta_1 + \dots + K_{nn}\Delta_n$$

2-El método explícito supone, para una primera iteración del problema, que todos los elementos de la matriz de rigidez que no están en la diagonal principal son cero.



$$\begin{pmatrix} F_1 \\ \dots \\ F_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} K_{11} & \dots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & K_{nn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \Delta_1^{(1)} \\ \dots \\ \Delta_n^{(1)} \end{pmatrix}$$

De tal forma que el sistema de ecuaciones se reduce a:

$$F_1 = K_{11}\Delta_1^{(1)}$$

... = ...

$$F_n = K_{nn}\Delta_n^{(1)}$$

3- A partir del sistema de ecuaciones anterior, se pueden obtener los movimientos en los grados de libertad para la primera iteración $(\Delta_1^{(1)}, \dots, \Delta_n^{(1)})$.

4- Estos valores de movimientos en los grados de libertad, se implementan en el sistema de ecuaciones completo para obtener los movimientos en los grados de libertad para la segunda iteración $(\Delta_1^{(2)}, \dots, \Delta_n^{(2)})$.

$$F_1 = K_{11}\Delta_1^{(2)} + \dots + K_{1n}\Delta_n^{(1)}$$

... = ...

$$F_n = K_{n1}\Delta_1^{(1)} + \dots + K_{nn}\Delta_n^{(2)}$$

5- Se obtienen los nuevos movimientos en los grados de libertad para la segunda iteración $(\Delta_1^{(2)}, \dots, \Delta_n^{(2)})$.

6- Se repite los pasos 4 y 5 para los nuevos valores de los movimientos de los grados de libertad hasta que la solución converja a un valor menor que un cierto error.

Para que este método converja a una solución correcta, es necesario que la onda de presiones ejercida en cada elemento no haya llegado al siguiente elemento en el intervalo de discretización temporal utilizado, por lo que este método exige incrementos temporales muy pequeños.

Haciendo este procedimiento tanto para la estructura como para el proyectil, el programa puede calcular en cada iteración temporal el vector de fuerzas que compatibiliza el movimiento de ambos.



Tanto estructura como proyectil son tratados por el programa como elementos deformables, por lo que el método explícito sí considera la deformación del proyectil en los cálculos, incluida la deformación local. Una penetración excesiva del proyectil en la estructura puede ser motivo de error en el programa y provocar que no se llegue a la solución del sistema.

El método explícito ha de ser **no lineal** para hacer la compatibilidad de desplazamientos en la posición deformada de cada instante.

En definitiva, los programas de elementos finitos utilizan su capacidad de aproximar desplazamientos sobre cualquier objeto deformable para una fuerza dada, en principio desconocida en un impacto, para resolver el impacto por compatibilidad. A partir de un proceso iterativo que converge a una solución para cada intervalo temporal de integración, el programa calcula la fuerza necesaria que le permite compatibilizar los desplazamientos de los objetos que chocan, incluyendo la penetración entre ellos. Esta penetración local es completamente necesaria para el método de explícito, dado que, sin ella en el instante inicial del impacto, sería imposible compatibilizar movimientos.

Si la fuerza necesaria para compatibilizar movimientos saliese negativa en algún paso de la integración, el programa supone la fuerza de contacto nula, dado que el contacto no absorbe tracciones. Como, además, el programa realiza los cálculos en la posición deformada y con el espacio real ocupado por los objetos, el método de los elementos finitos es capaz de reproducir todos los micro-impactos que se pueden producir durante un impacto.

Como se puede apreciar el método explícito de los elementos finitos es muy completo, aunque presenta los siguientes inconvenientes:

- Tiempos de cálculo elevados.
- Problemas de convergencia.
- Necesita de la definición de parámetros por parte del usuario previos al cálculo que, *a priori*, no se sabe si este tendrá influencia en los resultados finales (por ejemplo, el incremento de tiempo para la integración numérica Δt).
- Dependencia de los resultados de la correcta modelización de la zona de contacto.
- Su cálculo es tan complejo que no es posible una comprobación manual, y obliga al ingeniero a creerse los resultados.



- Desarrollo de teoría sobre impactos -
- Método simplificado de cálculo de impactos en estructuras -





3 CHOQUE CENTRAL DE MASAS LIBRES

Este apartado de la tesis muestra el origen de la formulación desarrollada en esta investigación para los impactos en estructuras, aunque en él se estudie el impacto de masas libres. El tipo de impacto estudiado es el impacto central liso, es decir, sin considerar rozamiento. La razón para estudiar este tipo de impactos se sintetiza en que las colisiones que más daño pueden provocar en una estructura, el cual es el objeto final de estudio, son centrales, ya que provocan la máxima componente flectora, y sin rozamiento. En términos generales, si toda la energía se concentra en un impacto perpendicular, este será más brusco y más peligroso desde el punto de vista de la seguridad estructural.

La formulación que a continuación se va a exponer muestra los mismos resultados que la formulación clásica ya existente sobre masas libres. Es decir, el nuevo enfoque que aquí se desarrolla obtiene las mismas velocidades finales de las masas y la fuerza producida durante un impacto, que en la teoría de cuerpos rígidos. Las expresiones finales para la obtención de estos parámetros coinciden con las propuestas por las teorías expuestas en el apartado 2.3. La finalidad de exponer una “nueva” formulación se debe a que el punto de vista desde el que se estudia el impacto en este apartado es distinto, más ingenieril y menos físico-matemático. Por ejemplo, las expresiones se obtienen en base a conceptos como la rigidez y se evitan conceptos como el momento lineal. Además, las expresiones se muestran en términos absolutos y no relativos. Estos cambios pueden parecer un asunto menor, pero es justo el que ha permitido extrapolar estas ecuaciones de las masas libres a las estructuras, donde ya no existe una formulación similar.

3.1 FORMULACIÓN CLÁSICA

Las velocidades finales de dos masas que chocan, para un coeficiente de restitución dado, son conocidas desde hace mucho tiempo, tanto que se puede considerar formulaciones clásicas. De igual manera, aunque ligeramente más reciente, modelos que describen cómo se produce la transición de velocidades entre inicial y final, a partir de la fuerza producida durante el impacto, han sido desarrollados y se pueden englobar dentro de la formulación clásica (véase punto 2.3). Por las razones ya comentadas, la formulación clásica expuesta en este apartado es la derivada de los choques centrales sin rozamiento. El problema a analizar se esquematiza en Figura 49

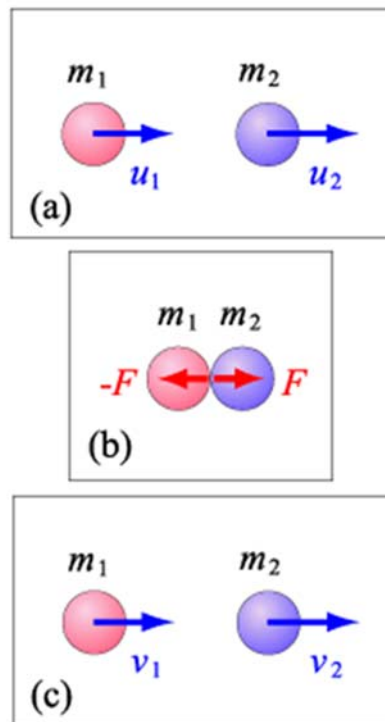


Figura 49-Choque central de masas libres sin rozamiento.

Donde m_1 y m_2 , u_1 y u_2 son las masas y las velocidades iniciales de los objetos que sufren el choque frontal (Figura 49 a), F es la fuerza en el punto de impacto a la que se ve sometido cada uno de los objetos y que responde a la tercera ley de Newton (Figura 49 b) y v_1 y v_2 son las velocidades finales de cada objeto tras sufrir el impacto (Figura 49 c)

En el apartado 2.3.1 del presente documento se describe cómo se pueden obtener las velocidades finales en un impacto conocido el coeficiente de restitución e según las ecuaciones (8) y (9). Estas mismas ecuaciones, tratadas convenientemente se pueden expresar también de la siguiente forma:

$$v_1 = \frac{(m_1 - m_2 e)u_1 + m_2(1 + e)u_2}{m_1 + m_2} \quad (217)$$

$$v_2 = \frac{(m_2 - m_1 e)u_2 + m_1(1 + e)u_1}{m_1 + m_2} \quad (218)$$



Para estudiar la transición de las velocidades iniciales u_1 y u_2 hasta las velocidades finales v_1 y v_2 , en el punto 2.3.4 del presente documento se desarrolla el modelo viscoelástico de Maxwell. Ese modelo permite calcular, según la ecuación (93), la fuerza producida durante el impacto. Si se conoce la fuerza de impacto, la transición de velocidades queda definida. Para un amortiguamiento nulo ($\xi=0$) la ecuación (93) resulta:

$$F(t) = M w_o v_o \text{sen}(w_o t) \quad (219)$$

Donde M y w_o están definidas según las ecuaciones (41) y (84) respectivamente y v_o es la velocidad relativa inicial entre las masas que impactan.

La formulación desarrollada en el siguiente apartado se comparará con esta solución (ecuaciones (217), (218) y (219) para validar sus resultados.

3.2 FORMULACIÓN DESARROLLADA PARA MASAS LIBRES

Para la formulación desarrollada para impactos en masas libres que se expone a continuación, no se utilizará la nomenclatura de la teoría clásica. La formulación aquí desarrollada es el origen de la formulación que se desarrollará posteriormente para impactos en estructuras. Por este motivo, y para dar continuidad al relato e identificar los nexos entre ambas teorías, se usará la misma nomenclatura que en la teoría de impactos en estructuras.

Para el planteamiento del problema se suponen dos esferas de masas M_p y M_e . Ambas son infinitamente rígidas en términos globales, pero la masa M_p tiene una pequeña zona local deformable. Esta zona está caracterizada por una constante de elasticidad K . El punto de contacto en la masa M_p se denota como P_a , mientras que en la otra masa como P_b . Las velocidades de M_p y M_e tras el impacto son, respectivamente, $V_p(t)$ y $V_e(t)$, siendo $V_{p,o}$ y $V_{e,o}$ las velocidades iniciales ($t=0$). Antes del impacto, las masas tienen un movimiento rectilíneo uniforme. En la Figura 50 se muestra un esquema de la situación inicial al problema planteado.

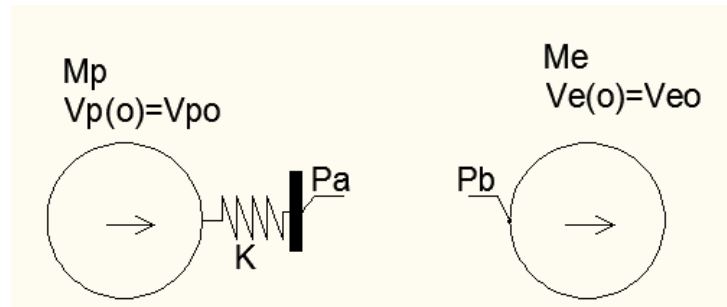


Figura 50-Esquema planteamiento inicial para impactos de masas libres.

Las flechas en la Figura 50 indican la dirección de movimiento de cada una de las masas, análogo al mostrado en la Figura 49 a; y la zona deformable se representa como un muelle de constante elástica K .

En el instante t_0 en que se produce el contacto, aparecen dos fuerzas, iguales en magnitud y contrarias en sentido, de valor $F(t)$. La situación en la que se encuentran las masas en ese instante se ilustra en la Figura 51, siendo esta análoga a la Figura 49 b.

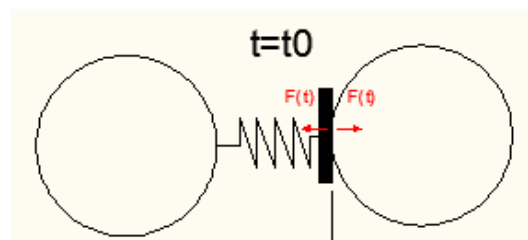


Figura 51-Instante inicial del impacto.

En la Figura 52, se representa, para un instante cualquiera t desde el contacto inicial t_0 , el espacio recorrido relativo entre las dos masas:

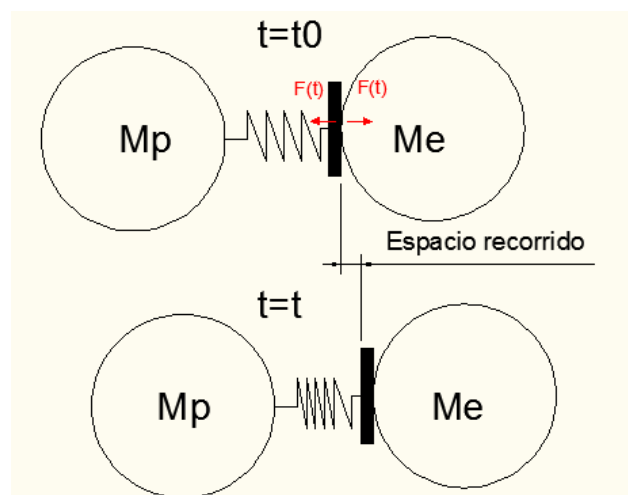


Figura 52-Instante cualquiera durante el impacto.



El espacio recorrido $d(P_a)$ del punto de contacto P_a se puede expresar como velocidad inicial $V_{p,o}$ por el tiempo t , menos lo que deja de recorrer por la pérdida de velocidad provocada por la fuerza de contacto en ese tiempo, y menos el acortamiento del muelle para ese instante:

$$d(P_a) = V_{p,o} t - \iint \frac{F(t)}{M_p} - \frac{F(t)}{K} \quad (220)$$

El espacio recorrido $d(P_b)$ del punto de contacto se puede expresar de manera análoga como el espacio recorrido debido a la velocidad inicial, pero sumando el espacio recorrido debido a la aceleración producida por la fuerza de contacto hasta el instante t :

$$d(P_b) = \iint \frac{F(t)}{M_e} + V_{e,o} t \quad (221)$$

Dado que durante el impacto los puntos de contacto P_a y P_b están solapados, el espacio recorrido ha de ser el mismo por ambos puntos. Por lo tanto:

$$V_{p,o} t - \iint \frac{F(t)}{M_p} - \frac{F(t)}{K} = \iint \frac{F(t)}{M_e} + V_{e,o} t \quad (222)$$

Por simplicidad, se realiza el siguiente cambio de variable:

$$y = \iint F(t) \quad (223)$$

$$\ddot{y} = F(t) \quad (224)$$

$$V_{p,o} - V_{e,o} = V_r \quad (225)$$

$$w_{ep}^2 = \left(\frac{K}{M_p} + \frac{K}{M_e} \right) \quad (226)$$

Así, la ecuación (222) resulta:

$$K V_r t = y w_{ep}^2 + \ddot{y} \quad (227)$$

A la ecuación general anterior se le aplican las condiciones de contorno siguientes:



1-La fuerza inicial es nula.

$$\ddot{y}(t = t_0) = 0 \quad (228)$$

2-El espacio recorrido en el instante inicial del impacto es nulo.

$$y(t = t_0) = 0 \quad (229)$$

La solución a la ecuación diferencial (227), aplicando las condiciones de contorno, resulta:

$$y = \frac{K V_r}{w_{ep}^2} t - \frac{K V_r}{w_{ep}^3} \text{sen}(w_{ep} t) \quad (230)$$

Y, por tanto, sus derivadas:

$$\dot{y} = \frac{K V_r}{w_{ep}^2} - \frac{K V_r}{w_{ep}^2} \cos(w_{ep} t) \quad (231)$$

$$\ddot{y} = F(t) = \frac{K (V_{p,o} - V_{e,o})}{w_{ep}} \text{sen}(w_{ep} x t) \quad (232)$$

La expresión de la fuerza desarrollada durante el impacto obtenida en la ecuación (232) es totalmente análoga a la que se deduce del modelo de Maxwell para amortiguamiento nulo (ecuación (219)). La única diferencia está en que la expresión (232) se expresa en términos absolutos y la (219) en términos relativos, además de la diferente nomenclatura ($w_{ep} = w_o$).

A partir de la solución obtenida para el movimiento de las masas, se puede calcular también la velocidad de la masa M_e durante el impacto:

$$V_e(t) = \frac{d}{dt} \left(\frac{y}{M_e} + V_{e,o} t \right) \quad (233)$$

$$V_e(t) = \frac{\dot{y}}{M_e} + V_{e,o} = \frac{K V_r}{M_e w_{ep}^2} - \frac{K V_r}{M_e w_{ep}^2} \cos(w_{ep} t) + V_{e,o} \quad (234)$$

Análogamente, la velocidad de la masa M_p durante el impacto se expresa:

$$V_p(t) = \frac{d}{dt} \left(V_{p,o} t - \frac{\dot{y}}{M_p} \right) \quad (235)$$

$$V_p(t) = V_{p,o} - \frac{K V_r}{M_p w_{ep}^2} - \frac{K V_r}{M_p w_{ep}^2} \cos(w_{ep} t) \quad (236)$$



3.2.1 Choque elástico perfecto

Si el impacto es elástico perfecto, el contacto entre las masas M_e y M_p se producirá mientras $F(t)$ sea positiva (compresión), ya que el contacto no puede absorber tracciones. De esta manera, podemos obtener cuando dura el tiempo de contacto $t_{f,e}$, entendido este como la suma de la fase de compresión o de aproximación más la fase de restitución, en la situación elástica. En la Figura 53 se muestra como varía la fuerza calculada con la ecuación (232) a lo largo de ese tiempo de contacto:



Figura 53-Fases durante un impacto elástico perfecto.

La fuerza de contacto, en términos de velocidad relativa, se expresa según la ecuación:

$$F(t) = \frac{K V_r}{w_{ep}} \times \text{sen}(w_{ep} t) \quad (237)$$

Esta fuerza es de compresión (positiva) si se cumple la condición:

$$F(t) > 0 \quad \text{si} \quad t w_{ep} < \Pi \quad (238)$$

Por tanto

$$t_{f,e} = \Pi / w_{ep} \quad (239)$$

Resultando la fuerza máxima de contacto en $t_{f,e}/2$ y de valor:

$$F(t)_{max} = \frac{K V_r}{w_{ep}} \quad (240)$$



Por tanto, conocido el tiempo final del impacto, $t_{f,e}$, se puede calcular la velocidad final $V_{e,f}$ de la masa M_e . Sustituyendo en la ecuación (239) en la ecuación (234):

$$V_{e,f} = \frac{K V_r}{M_e w_{ep}^2} - \frac{K V_r}{M_e w_{ep}^2} (-1) + V_{e,o} = \frac{2(V_{p,o} - V_{e,o})}{M_e \left(\frac{1}{M_e} + \frac{1}{M_p} \right)} + V_{e,o} \quad (241)$$

$$V_{e,f} = \frac{2 M_p V_{p,o} + V_{e,o} (M_e - M_p)}{M_p + M_e} \quad (242)$$

Esta velocidad final tras el impacto de la masa M_e es idéntica a la que predice la formulación clásica mostrada en la ecuación (218) para la masa m_2 , sustituyendo en ella $e=1$ (choque elástico).

De la misma manera, se puede calcular la velocidad final $V_{p,f}$ de la masa M_p , sustituyendo la ecuación (239) en la ecuación (236):

$$V_{p,f} = V_{p,o} - \frac{K (V_{p,o} - V_{e,o})}{M_p w_{ep}^2} - \frac{K (V_{p,o} - V_{e,o})}{M_p w_{ep}^2} (-1) \quad (243)$$

$$V_{p,f} = V_{p,o} - \frac{2(V_{p,o} - V_{e,o})}{M_p \left(\frac{1}{M_e} + \frac{1}{M_p} \right)} \quad (244)$$

$$V_{p,f} = \frac{2 M_e V_{e,o} + V_{p,o} (M_p - M_e)}{M_p + M_e} \quad (245)$$

Del mismo modo, esta velocidad es exactamente la misma que la expuesta por la formulación clásica en la ecuación (217) para la masa m_1 , sustituyendo $e=1$.

Se comprueba que, para el choque elástico perfecto, con la formulación desarrollada y sin hacer uso del coeficiente de restitución e , se obtienen los mismos resultados que con la formulación clásica para $e=1$ (choque elástico perfecto).



3.2.2 Choque plástico perfecto

Cuando el choque es perfectamente inelástico, el contacto se producirá mientras la velocidad de M_p sea mayor que la velocidad de M_e porque, al ser totalmente inelástico, el muelle de rigidez K no se podrá descomprimir. Para que esto ocurra, $F(t)$ deberá ser creciente, es decir, la derivada de $F(t)$ debe ser positiva. De esta manera, se puede obtener cuando dura el tiempo de contacto $t_{f,i}$ en la situación totalmente inelástica:

$$F(t) = \frac{K V_r}{w_{ep}} \operatorname{sen}(w_{ep} t) \quad (246)$$

$$\frac{dF(t)}{dt} = K V_r \cos(w_{ep} t) \quad (247)$$

$$\frac{d(F(t))}{dt} > 0 \quad \text{si} \quad t w_{ep} < \Pi/2 \quad (248)$$

$$t_{f,i} = \frac{\Pi}{2 w_{ep}} \quad (249)$$

El tiempo final en un choque totalmente plástico $t_{f,i}$ es el tiempo donde se acaba la fase de compresión y comenzaría (en caso de no ser plástico perfecto) la fase de restitución. Ambas fases se representan en la Figura 54 en la que se observa cómo varía la fuerza con el tiempo. Se puede ver como el máximo de dicha gráfica corresponde con la fuerza máxima, $F(t)_{max}$, en el instante $t_{f,i}$. La fase de restitución no llega a producirse porque el muelle de constante K , al comportarse de forma plástica perfecta, no tiene capacidad de recuperar su forma inicial.

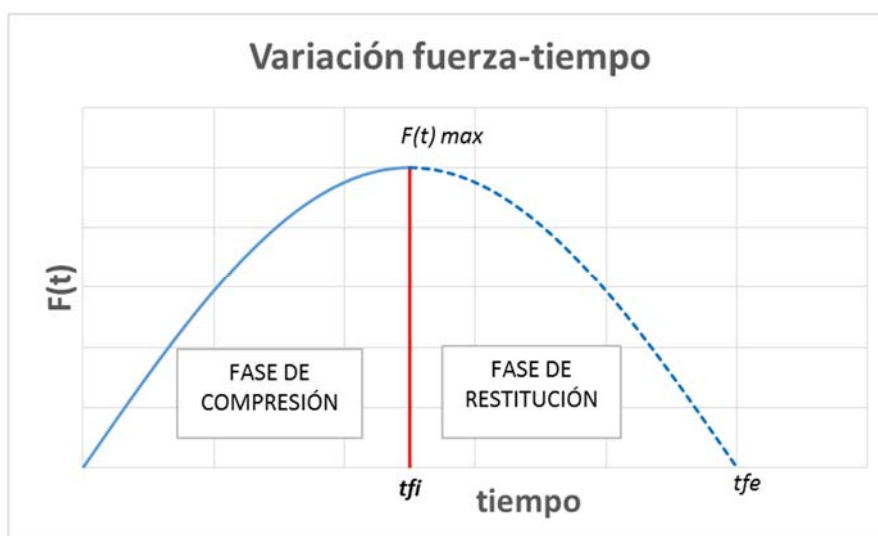


Figura 54- Fase de compresión durante un impacto plástico perfecto.



Conocido el tiempo final $t_{f,i}$, se pueden calcular las velocidades finales de M_p y de M_e tras el impacto que, dado que es perfectamente plástico, han de ser iguales ($V_{e,f}^* = V_{p,f}^*$). Para ello se sustituye, por ejemplo, en el término referido a M_e , la ecuación (249) en la ecuación (234):

$$V_{e,f}^* = \frac{K (V_{p,o} - V_{e,o})}{M_e w_{ep}^2} - \frac{K (V_{p,o} - V_{e,o})}{M_e w_{ep}^2} (0) + V_{e,o} \quad (250)$$

$$V_{e,f}^* = \frac{M_p V_{p,o} + M_e V_{e,o}}{M_p + M_e} = V_{p,f}^* \quad (251)$$

La ecuación (251) presenta unas velocidades finales de las masas que colisionan idénticas a las que describe la formulación clásica según las ecuaciones (217) y (218) para $e=0$ (choque plástico perfecto).

Un caso intermedio entre el elástico perfecto y el plástico perfecto, tendrá un tiempo de impacto entre $t_{f,i}$ y $t_{f,e}$. Por tanto, sus velocidades finales serán un caso intermedio entre los valores establecidos para ambas situaciones. Para obtener estos valores, se debe sustituir en las velocidades finales de M_p y M_e el valor el tiempo de impacto específico de manera similar a como se ha realizado en estos 2 casos extremos.

La formulación desarrollada predice unas velocidades finales de las masas idénticas a las de la formulación clásica, y además la fuerza de impacto que define las transiciones entre velocidades coincide también con la presentada por el modelo elástico de Maxwell. Por este motivo, se concluye que la formulación presenta unos los resultados iguales a los ya contrastados.

El hecho más destacable y novedoso de la formulación desarrollada en este apartado, es obtener las velocidades de las masas durante el impacto, ecuaciones (234) y (236), en función de la rigidez de la zona elástica K y de la frecuencia del sistema durante el impacto w_{ep} , y no en función del momento lineal P como en las ecuaciones (58) y (59). Además, se sustituye el concepto de coeficiente de restitución como coeficiente de ignorancia que se obtiene experimentalmente para ajustar los resultados, por la capacidad del muelle para recuperar su posición inicial, el cual define el grado de elasticidad y, por tanto, de conservación de energía en el impacto.



3.3 ANÁLISIS DEL PÉNDULO DE NEWTON

3.3.1 Descripción

El péndulo de Newton fue, curiosamente, ideado por el físico francés Edme Mariotte, el cual demostró por primera vez las leyes de impactos entre cuerpos. Sin embargo, su nombre se debe al físico Isaac Newton ya que éste reunió todos estos conocimientos adquiridos por Mariotte en su “Philosophiae Naturalis Principia Mathematica”. Además, este dispositivo representa las tres famosas leyes de Newton. Es un sistema formado por un conjunto de bolas, generalmente 5 de idénticas características de tamaño y masa, de madera o metal. Cada una de ellas está sostenida por un cable a modo de péndulo. El péndulo de Newton se puede observar en Figura 55.



Figura 55-Péndulo de Newton en reposo.

Este artilingo se ha utilizado a lo largo de la historia, entre otras razones, porque **ilustra de manera muy visual la conservación de la energía**. Es un sistema que posee poco rozamiento y si se pone en movimiento, el tiempo que tarda en disipar la energía es relativamente elevado. La situación más característica a este respecto es lanzar la bola de un extremo contra las otras 4, observando cómo tras el impacto la bola del extremo no impactado, inicialmente en reposo, sale con cierta velocidad hasta alcanzar aproximadamente la altura de caída de la primera bola. Por el contrario, esta primera bola que generó el impacto, tras el mismo, se queda en absoluto reposo pegado al resto. Cuando la bola que salió despedida tras el impacto comienza a caer y choca con las otras cuatro, se reproduce la situación descrita anteriormente en sentido inverso. Este proceso ocurre de manera indefinida hasta que el amortiguamiento disipa toda la energía,



volviendo a quedar el sistema en reposo. La secuencia del movimiento descrito se puede observar en la Figura 56.



Figura 56-Secuencia de impactos en el péndulo de Newton.

Ver cómo la bola que genera el impacto se queda en reposo con las otras tres, mientras se observa que la otra bola del extremo alcanza la misma altura desde donde se lanzó la primera, muestra de manera muy evidente, que la energía potencial de la bola de un extremo ha sido transferida totalmente a la bola del otro extremo.

En esta tesis no se aborda de manera detallada el estudio de qué ocurre durante el impacto, pero sí se contestan unas preguntas y se presentan algunas conclusiones básicas que surgieron de la observación del péndulo, y que fueron el origen de la resolución de la investigación realizada en la presente tesis.



3.3.2 Análisis del impacto de una bola

La secuencia completa para la conservación de la energía en el péndulo de Newton cuando se lanza una bola contra el resto se esquematiza en la Figura 57.

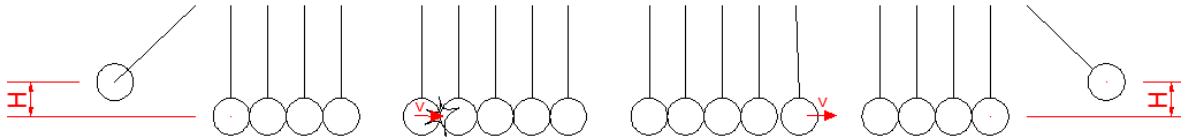


Figura 57-Esquema de la conservación de energía en el péndulo de Newton.

Se lanza una bola desde una altura H dotando a la bola de energía potencial. Ésta se transforma completamente en energía cinética justo antes de producirse el impacto. Tras la colisión, la bola del otro extremo sale con la misma velocidad que la bola que origina el impacto. Es decir, despreciando la disipación de energía, la bola del extremo ha absorbido toda la energía cinética que llegó al sistema. Por último, esta bola asciende hasta perder totalmente velocidad y llegar a la misma altura inicial H , empezando a caer de nuevo y provocando un nuevo ciclo en la secuencia descrita, pero de sentido contrario.

Si no hay disipación de energía en el impacto, éste se puede considerar totalmente elástico. A partir de la formulación desarrollada en el apartado 3.2.1 del presente documento, se puede interpretar el impacto como si las tres bolas centrales se comportaran como un muelle de rigidez K , y la masa proyectil M_p y la masa M_e fueran iguales. Esta idea se esquematiza en la Figura 58.

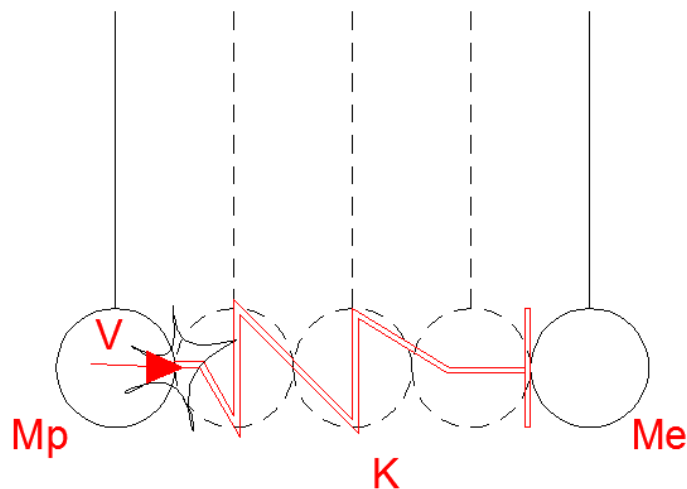


Figura 58-Esquema del péndulo de Newton como impacto de 2 masas y un muelle.



Como se puede calcular según las expresiones (242) y (244) si $M_p=M_e$, e independientemente de K , la velocidad de M_p tras el impacto es nula. La velocidad de M_e , inicialmente en reposo, es $V_{p,o}$, es decir, la velocidad que tenía M_p previa al impacto. El comportamiento del péndulo, por tanto, es coherente con la predicción de las formulas analizadas anteriormente para impactos elásticos.

Sin embargo, a la vista de los resultados cabe formularse una pregunta. Dado que las bolas transmiten el esfuerzo de compresión como un continuo, **¿por qué el impacto no se ha producido como si una bola de masa M , chocara con un cuerpo de masa $4M$** (véase Figura 59)?

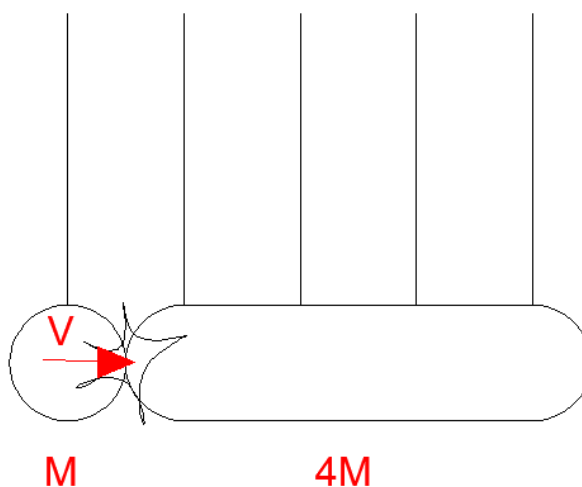


Figura 59-Esquema de impacto con $M_p=M$ y $M_e=4M$

Si el impacto fuese de esta manera y, asumiendo que la velocidad de la masa M en el momento en el que choca con la masa $4M$ es $V_{p,o}=V$, se obtendría según las ecuaciones (242) y (245), que la velocidad final de la masa M es de $-0.6V$, es decir, retrocedería, y la velocidad final de la masa $4M$ es de $0.4V$, es decir, avanzaría. Dicho de otra forma, en un caso en el que la masa M impactara con $V=1$ m/s, las 4 bolas inicialmente en reposo de masa total $4M$, se moverían juntas con una velocidad de 0.4 m/s mientras que la velocidad de la bola que originó el impacto sería de 0.6 m/s, pero rebotada hacia atrás. El muelle elástico para este caso podría suponerse como una deformación local de las bolas. En este proceso, lógicamente, también se habría conservado la energía.

Si la conservación de la energía, la cual ocurre tanto en el caso real como en el hipotético planteado, no es lo que determina que se produzca el caso de choque de masas iguales ($M_p=M_e=M$) en vez del choque entre masas distintas ($M_e=4M_p$) entonces, ¿qué lo determina? la respuesta, de manera cualitativa, es que el péndulo puede “elegir” como chocar y “elige” la



opción que, siendo capaz de detener a M_p , **menos le cuesta al sistema**. Esta opción es la que produce mínima cantidad de movimiento.

Se puede calcular la cantidad de movimiento $C.M.$ producido en ambos impactos a partir de la ecuación 232:

$$C.M. = \int_0^{t_{f,e}} F(t) dt = \int_0^{t_{f,e}} \frac{K (V_{p,o} - V_{e,o})}{w_{e,p}} \operatorname{sen}(w_{e,p} t) dt \quad (252)$$

$$C.M. = \int_0^{t_{f,e}} F(t) dt = -\frac{K (V_{p,o} - V_{e,o})}{w_{e,p}} \frac{1}{w_{e,p}} [\cos(w_{e,p} x t)]_0^{t_{f,e}} \quad (253)$$

Sustituyendo $w_{e,p}$ y $t_{f,e}$ y según las ecuaciones (226) y (239) respectivamente:

$$C.M. = -\frac{K (V_{p,o} - V_{e,o})}{\frac{K}{M_p} + \frac{K}{M_e}} [\cos(\Pi) - \cos(0)] \quad (254)$$

$$C.M. = \frac{2 (V_{p,o} - V_{e,o})}{\frac{1}{M_p} + \frac{1}{M_e}} \quad (255)$$

Si se expresa la ecuación anterior en términos de velocidad relativa entre M_e y M_p :

$$C.M. = \frac{2 V_r}{\frac{1}{M_p} + \frac{1}{M_e}} \quad (256)$$

En la Figura 60, se ha representado paramétricamente ($V_r=100$ m/s y $M_p=1$ m/s) la ecuación (256), junto con la velocidad final de M_p según la ecuación (244) para distintos valores de M_e/M_p :

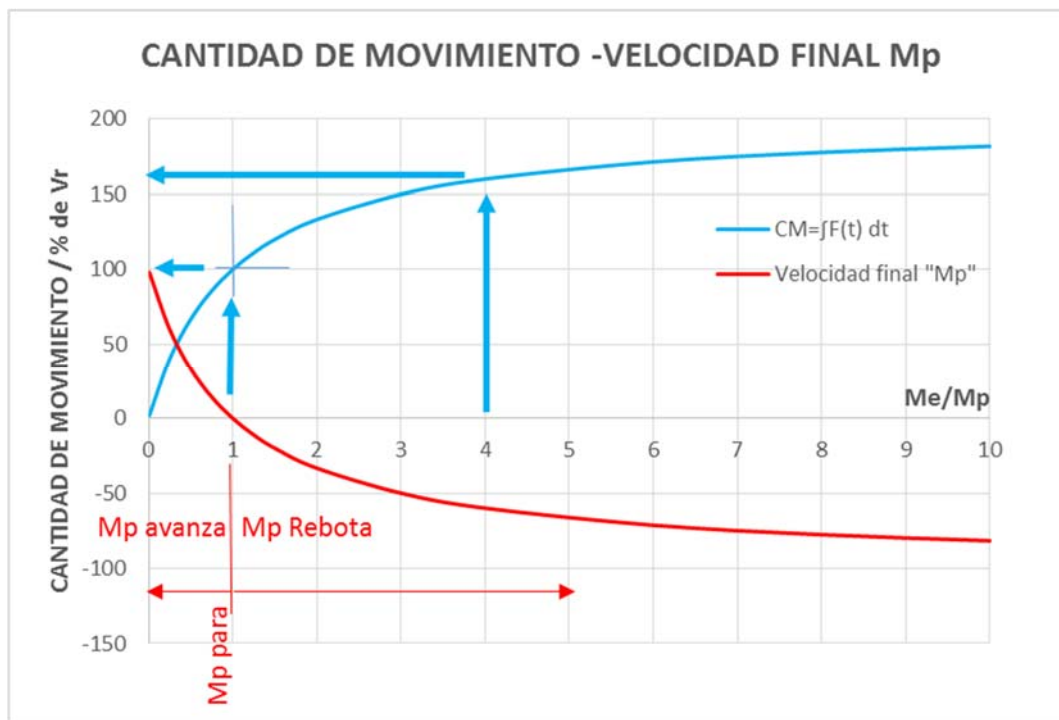


Figura 60-Estudio paramétrico de la Cantidad de Movimiento en función de la relación de masas.

La línea azul representa la cantidad de movimiento. Esta línea tiene un mínimo para la relación $M_e/M_p=0$, crece para valores de M_e/M_p crecientes y presenta un comportamiento asintótico para valores de M_e/M_p muy grandes.

La velocidad porcentual de M_p , representada en línea roja, tiene un máximo para $M_e/M_p =0$ y se muestra decreciente para valores crecientes de M_e/M_p . Tiene dos zonas: para $M_e/M_p <1$, M_p no se detiene en el impacto y continua con velocidad positiva; para valores de $M_e/M_p >1$ la velocidad de M_p es negativa y por tanto rebota tras el impacto.

Para el caso de analizado de una bola impactando en el extremo izquierdo, el péndulo podría elegir entre 4 opciones, mostradas en la Figura 61, para absorber dicho impacto:

- A) $M_e/M_p=4$. Tras el impacto, se mueven las 4 bolas que estaban en reposo hacia la derecha y M_p sale rebotada (por ser $M_e/M_p >1$).
- B) $M_e/M_p=3$. Tras el impacto, se mueven 3 de las 4 bolas que estaban en reposo hacia la derecha, M_p sale rebotada (por ser $M_e/M_p >1$) mientras la bola que recibe directamente el impacto de M_p queda en reposo haciendo la función de muelle elástico.
- C) $M_e/M_p=2$. Tras el impacto, se mueven 2 de las 4 bolas que estaban en reposo hacia la derecha, M_p sale rebotada (por ser $M_e/M_p >1$) mientras la bola que recibe



directamente el impacto de M_p y la contigua quedan en reposo haciendo la función de muelle elástico.

- D) $M_e/M_p=1$. Tras el impacto, se mueve 1 (la del extremo derecho) de las 4 bolas que estaban en reposo, M_p queda en reposo igual que el resto de las bolas intermedias (la situación que verdaderamente ocurre).

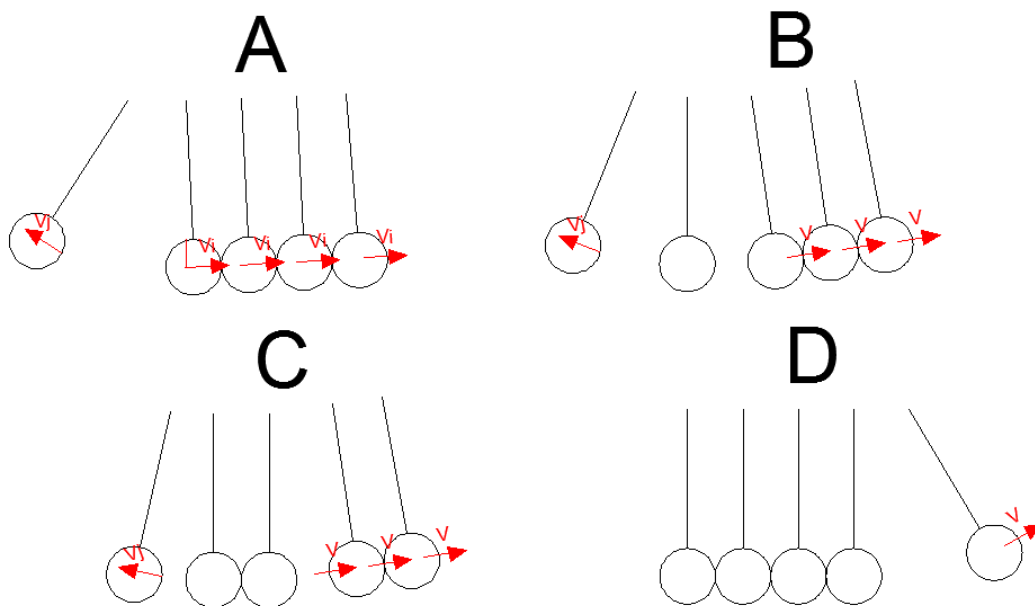


Figura 61-Opciones de absorber el impacto que "tiene" el péndulo cuando la bola izquierda colisiona con el resto.

De las 4 opciones representadas en la Figura 61, y tal como se puede ver en la gráfica de la Figura 60 entrando en la línea azul para los distintos valores de M_e/M_p de cada caso, la opción D es la opción de las 4 que produce la mínima de cantidad de movimiento. Es decir, la que produce un valor mínimo de $\int F(t)dt$.



3.3.3 Análisis de impacto de dos bolas

A continuación, se analiza de manera análoga el caso del impacto de dos bolas (se lanzan dos bolas juntas) contra las tres que están en reposo, tal como indica el croquis de la Figura 62.

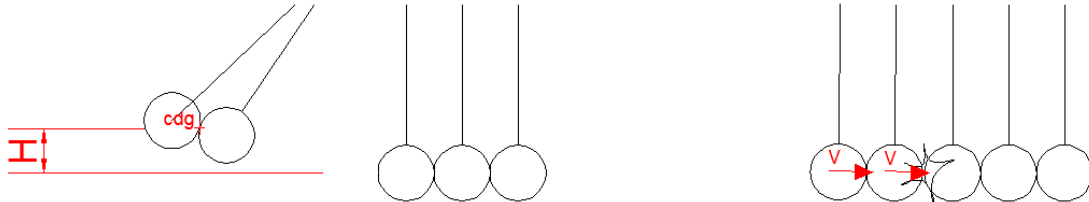


Figura 62- Esquema de impacto de dos bolas en el péndulo de Newton.

El péndulo, ante el choque de las 2 bolas del extremo izquierdo (M_p ahora son dos bolas), podría elegir entre 3 opciones, mostradas en la Figura 63, para absorber dicho impacto:

- A) $M_e/M_p=0.5$ Tras el impacto, se mueve la bola del extremo derecho y las dos bolas intermedias son las que hacen de muelle quedando en reposo.
- B) $M_e/M_p=1$. Tras el impacto, se mueven 2 de las 3 bolas que estaban en reposo (las más próximas al extremo derecho), mientras que M_p (que son dos bolas) queda en reposo como la bola intermedia (quedan 3 en reposo).
- C) $M_e/M_p=1.5$ Tras el impacto, se mueven las 3 bolas que estaban en reposo, mientras M_p sale rebotada hacia la izquierda por ser $M_e/M_p < 1$.

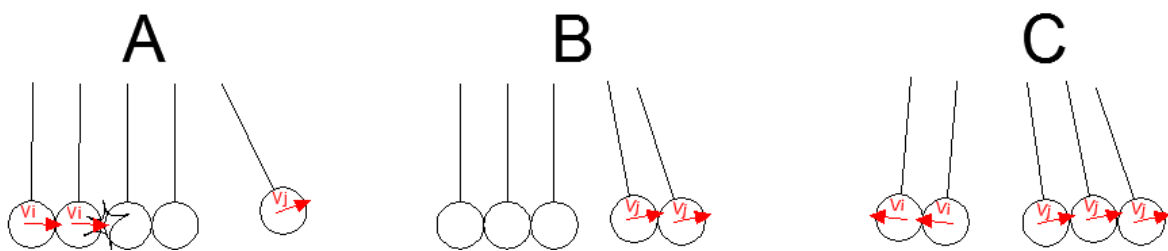


Figura 63- Opciones de absorber el impacto que "tiene" el péndulo cuando las 2 bolas izquierdas colisionan con el resto

Si el análisis se realiza únicamente pensando en la mínima cantidad de movimiento ($C. M_{min}$), la opción que debería ocurrir es la A, ya que si se observa la gráfica de la Figura 60, la menor cantidad de movimiento de los tres casos posibles se produce para $M_e/M_p \leq 0.5$. Pero en la realidad, la opción que sucede es la B. La explicación es simple. Si observamos la gráfica de la Figura 60, puede observarse que para la relación de $M_e/M_p=0.5$ la velocidad de M_p es positiva y entorno al 30% de la velocidad relativa inicial. Es decir, M_p tras el impacto continúa avanzando



porque al ser M_e más pequeña, no “ha podido” detenerla. Como M_p sigue avanzando también continúa chocando, ahora con las dos bolas que están en reposo y las moviliza. Es decir, la opción A no se puede dar porque el impacto continuaría. Por tanto, se puede concluir que se producirá la opción B de las mostradas en la Figura 63, ya que es aquella opción de las que permiten detener a M_p que presenta menos cantidad de movimiento. Del análisis de este caso, se puede concluir que, en el péndulo, el número de bolas que haga las veces de M_e siempre ha de ser igual o mayor a la que impacta M_p , para poder detener a esta.

3.3.4 Análisis de impacto de tres bolas

Para el caso de tres bolas que impactan contra dos en reposo ($M_p=3M$ y $M_e=2M$) como se muestra en la Figura 64, está la particularidad de que en reposo hay menos masa de la que llega en movimiento. Por lo que en principio podría pensarse que como $M_p > M_e$, la masa M_p no van a ser detenidas según lo explicado en el último párrafo del apartado anterior.

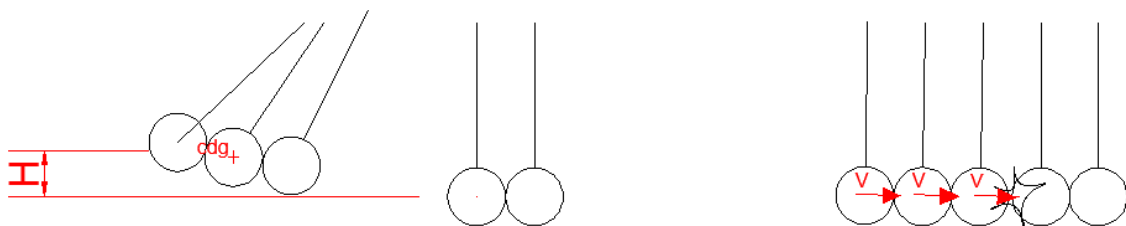


Figura 64- Esquema de impacto de tres bolas en el péndulo de Newton.

La cantidad de movimiento, a diferencia de la energía, es independiente del sistema de referencia. En la ecuación (256) se puede observar cómo el término que aparece para calcular la cantidad de movimiento es la velocidad relativa. Es decir, no importa a qué velocidad vayan las masas, la fuerza que se produce y, por tanto, la cantidad de movimiento, es proporcional a la diferencia entre ambas, a su velocidad relativa. Por ejemplo, la cantidad de movimiento producida es idéntica si dos masas van a 100 y 101 m/s en la misma dirección respectivamente, o si una está en reposo y la otra impacta con 1 m/s.

En el caso estudiado en el apartado anterior, en el cual se analizaba la colisión de 2 bolas contra otras 3 que se encontraban en reposo, el observador o sistema de referencia utilizado está también en reposo (véase Figura 65). La palabra reposo significa, en realidad, que el sistema de referencia (S.R.) tiene la misma velocidad que las 3 bolas. El sistema de referencia se puede



representar, a modo de esquema, con un pequeño observador. Para el caso estudiado en el apartado anterior, y que se muestra en la Figura 65, este observador colocado sobre las tres bolas “en reposo” ve como se le aproximan dos bolas (M_p) que producen el impacto.

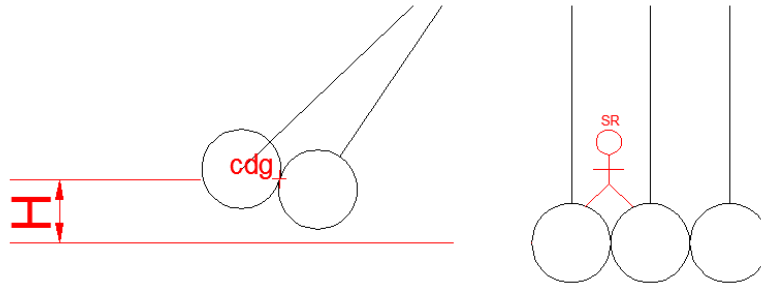


Figura 65-Posicionamiento del observador en el conjunto de 3 bolas en el impacto de dos bolas.

Pero, siguiendo con el mismo caso del apartado anterior, como el impacto es independiente del S.R. ya que solo importa la velocidad relativa, el impacto deberá ser igual si el observador se encuentra en el grupo de las dos bolas que ocasionan el impacto (M_p) como muestra la Figura 66.

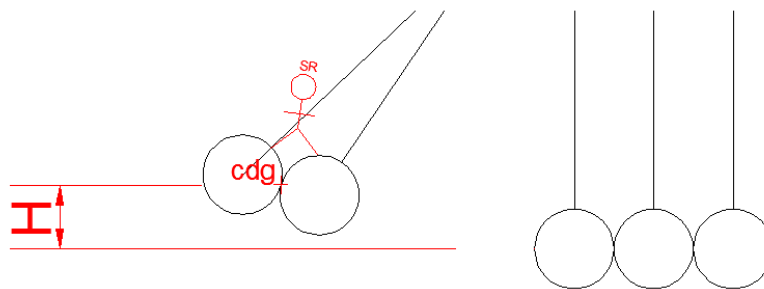


Figura 66- Posicionamiento del observador en el conjunto de 2 bolas en el impacto de dos bolas.

En este caso, si el observador se encuentra en el grupo de las dos bolas lo que observa es que, desde su posición de reposo relativo, se le aproximan tres bolas para impactar. Como el impacto es el mismo independientemente del observador, se puede concluir que el impacto de dos bolas contra tres, es exactamente el mismo que el de tres bolas contra dos, solo que ha cambiado sistema de referencia. Es por ello que la justificación de respuesta estructural es la misma en ambos casos.

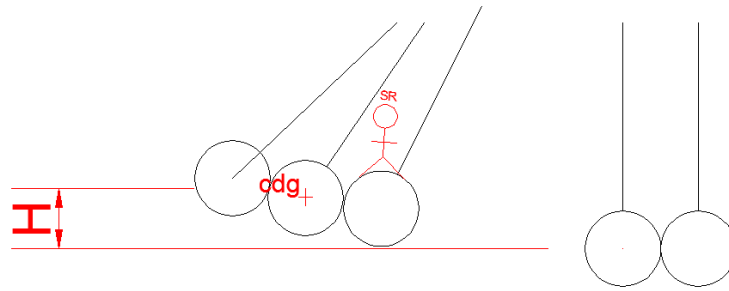


Figura 67- Posicionamiento del observador en el conjunto de 3 bolas en el impacto de tres bolas.

En la realidad, y volviendo al caso del presente apartado como muestra la Figura 67, lo que ocurre cuando impactan tres bolas contra dos, es que de las tres bolas dos se detienen completamente y la otra, junto con las dos que estaban en reposo, se mueven como ilustra la Figura 68.

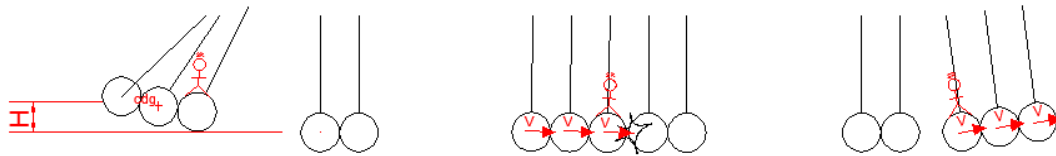


Figura 68-Secuencia de impacto de tres bolas.

Para explicar este comportamiento, se analiza el impacto desde el punto de vista del observador situado en el grupo de tres bolas y que se puede observar en la Figura 68. Bajo esa perspectiva, el impacto de tres bolas contra dos se convierte en un impacto de dos bolas contra tres, dado que al observador se le acercan dos bolas. Estas chocarán y, como sucedía en el caso del apartado anterior, se quedarán en “reposo”, es decir, con la misma velocidad que el sistema de referencia. Desde el punto de vista del S.R., las dos bolas del extremo izquierdo que estaban en “reposo” en la situación previa al impacto, saldrán despedidas con una cierta velocidad. De esta forma, el péndulo cumple la ley de parar el proyectil con la menor cantidad de movimiento posible. Es decir, el observador tal y como está situado en la Figura 68 no ve el caso de tres bolas impactando contra dos del presente apartado, si no el caso expuesto en el apartado anterior de dos bolas chocando contra tres.

Por tanto, queda justificado que, a todos los efectos el impacto de las tres bolas contra dos es el mismo que el de las dos bolas contra tres.



3.3.5 Análisis de impacto de cuatro bolas

De manera análoga a lo expuesto para el impacto de las tres bolas, el impacto de las cuatro bolas se puede explicar de manera más sencilla cambiando el sistema de referencia. Si situamos al observador en el grupo de cuatro bolas como muestra la Figura 69, lo que el observador ve es que le llega una bola y tras el impacto se le aleja otra. Es decir, el impacto de 4 bolas contra 1, es el mismo que el impacto de una bola expuesto en el apartado 3.3.2.

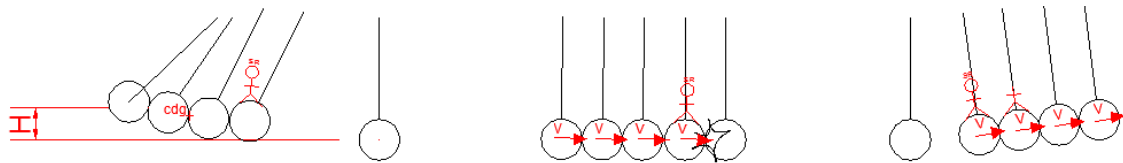


Figura 69- Secuencia de impacto de cuatro bolas

Desde “nuestro” punto de vista, lo que se observa es que llegan cuatro bolas estando una en reposo y, tras el impacto, se alejan cuatro bolas dejando otra en reposo, pero no desde el punto de vista del observador. Por tanto, todo lo explicado para el caso de una bola que impacta contra cuatro es válido para este caso.

3.3.6 Conclusiones

A raíz del análisis realizado anteriormente sobre los impactos en el péndulo de Newton, se pueden extraer las siguientes conclusiones a nivel cualitativo:

-La fuerza producida en un impacto, la cantidad de movimiento y el mecanismo resistente utilizado por el péndulo, es independiente del sistema de referencia.

-El péndulo, de las masas que tiene disponible en reposo, ha de elegir para para para al proyectil una masa tal que sea igual o mayor que la que impacta, para así poder detenerla.

-De las opciones disponibles que cumplan el punto anterior, el péndulo “elige” aquella que tiene menor cantidad de movimiento porque el impacto es más suave (menor $F t$).

Estas tres conclusiones se pueden condensar en una sola, la cual es la base de la resolución de los impactos en las estructuras que se expone en los apartados siguientes:

CONCLUSIÓN: “EN LOS IMPACTOS TIENDEN A CHOCAR MASAS IGUALES”



4 DESARROLLO DE TEORÍA Y FORMULACIÓN PARA EL CÁLCULO DE IMPACTOS EN ESTRUCTURAS

La investigación que en este apartado se va a desarrollar nació, entre otros motivos, de la necesidad de poder comprobar los resultados numéricos de un análisis de un impacto sobre una estructura, en un caso real para una empresa. Dicha necesidad puso de manifiesto que, más allá de la obtención de resultados, no se tenía ningún control sobre los mismos, ningún número “gordo” suficientemente fiable, tan utilizado por el ingeniero estructural. Derivado de esta afirmación se deduce una teoría insuficiente en el campo de los impactos, así como la ausencia de una **simplificación rigurosa** de la misma que permitiera, por ejemplo, obtener criterios de diseño de estructuras frente a impactos. Del encuentro con dicha empresa y su requerimiento de “entender” el comportamiento estructural frente a impacto de la estructura en cuestión, se concluyó la necesidad de desarrollar esta investigación.

Tras lo expuesto anteriormente, los objetivos naturales a satisfacer en la investigación se pueden resumir en los siguientes puntos:

- Avanzar en el conocimiento del comportamiento de una estructura sometida a impacto, es decir, entender qué, por qué y cómo se produce la respuesta estructural frente a un impacto.
- Desarrollar un método simplificado, en base a parámetros estructurales fundamentales, y aplicable a cualquier estructura, que permita comprobar los resultados numéricos ofrecidos por los softwares comerciales.
- Obtener criterios para el diseño de estructuras sometidas a impacto, así como criterios para el refuerzo de estructuras ya construidas.

Si bien la presente tesis se centra de manera más directa en el segundo objetivo de los arriba expuestos por su carácter más cuantitativo, del propio desarrollo de este objetivo y de las conclusiones que de él se deducen se consideran que los tres objetivos han sido abordados con el estudio realizado.

La investigación se ha realizado en dos grandes fases:

- En el apartado 4.1 se desarrolla una metodología para transformar cualquier estructura en un sistema de muelles de una determinada rigidez y de una masa asociada, explicando y calculando estos dos parámetros. El objetivo de reducir la estructura a una



rigidez y a una masa asociada, es obtener dos parámetros fundamentales que tienen la capacidad de condensar tanto las fuerzas elásticas como las fuerzas de inercia. Dicho de otra forma, la rigidez y la masa nos cuantifican las fuerzas elásticas y de inercia, respectivamente, cuando se produce la vibración de una estructura. Para obtener estos parámetros, los cuales están asociados a un punto de la estructura, se presentan dos formas de hacerlo: La primera forma es general y siempre es de aplicación, aunque más tediosa. La segunda, la cual es una simplificación, es mucho más sencilla, pero solo será de aplicación cuando la deformada del modo de vibración en cuestión y la deformada estructural considerada sean sensiblemente similares. En un primer paso, se aplicará el método simplificado únicamente considerando el modo fundamental de vibración. Posteriormente, se generaliza la metodología para considerar todos los modos de vibración. En ambas situaciones, se comparan los resultados del modelo con los ofrecidos por el software de elementos finitos **Midas Civil 2016 V2.2** para distintas cargas dinámicas.

- En el apartado 4.2 para un sistema de muelles y masas dado, que tras lo expuesto en 4.1 puede representar a cualquier estructura, **se analiza de manera teórica un impacto**.
 - En primer término, en los apartados 4.2.1 al apartado 4.2.4, el análisis se realiza para **proyectiles de gran masa**, respecto de la estructura, y considerando únicamente el modo fundamental de vibración de la estructura. En estos apartados no se tiene en cuenta el efecto de peso propio del proyectil en el impacto. Bajo estas premisas, se obtiene la solución al problema del impacto en una estructura cualquiera.
 - En los apartados 4.2.5 y 4.2.6, el análisis teórico del impacto se amplía con la **consideración del peso propio del proyectil** obteniendo una nueva solución, también considerando únicamente el modo fundamental.
 - Una vez resuelto el impacto para el modo fundamental con y sin peso propio del proyectil, en los apartados 4.2.7 y 4.2.8 se **generaliza la solución** teniendo en cuenta el **resto de modos de vibración** en la respuesta estructural.
 - En los apartados 4.2.9 al 4.2.14 **se comprueban** las soluciones obtenidas para distintas estructuras, vigas continuas, ménsulas, placas etc.

Los resultados de la formulación se comparan con los resultados ofrecidos por el programa de elementos finitos **Midas NFX 2017 v1.1**. Por simplicidad, todos los casos estudiados han sido de impactos centrales, excepto los impactos excéntricos del apartado 4.2.14 que ha sido incluidos para demostrar la generalidad de la formulación.



4.1 IDEALIZACIÓN DE LA ESTRUCTURA COMO SISTEMA DE MUELLES Y MASAS

La solución al problema del impacto, como se ha explicado en el apartado 2 de este documento, está ligada un complejo análisis matemático. Esa matemática compleja que da la solución, obliga a una integración numérica iterativa de incrementos temporales muy pequeños. Como se explicó en el apartado 2.4.5, no está definido *a priori* cuanto de pequeño ha de ser ese incremento para no influir en la solución final. Este procedimiento, en la práctica, imposibilita una comprensión sencilla del fenómeno físico estudiado. De esta manera, el tiempo de cálculo, incluso para las potentes computadoras actuales, requiere en ocasiones de horas. Este hecho, limita el número de alternativas que se pueden estudiar para un caso concreto. Por este motivo, entre otros, se ha considerado parte fundamental de la investigación simplificar las estructuras para que los cálculos que se derivan de ellas sean igualmente simples. Con este objetivo se ha desarrollado el **apartado 4.1 de esta investigación, en el que se muestra como reproducir el comportamiento modal de una estructura a partir de sistemas de masa y muelle de un grado de libertad.**

A continuación, se explica el método para simplificar una estructura a un sistema de muelles (rigidez) y masas, así como se compara el comportamiento de dicho sistema con los resultados ofrecidos por el programa comercial de elementos finitos Midas Civil.

Para ilustrar los resultados se proponen ejemplos sencillos, generalmente vigas, ménsulas y placas, pero los métodos expuestos en el presente apartado para calcular la masa y la rigidez de una estructura **son extrapolables a todo tipo de estructuras** siempre que estas se consideren en rango elástico. Se pueden extrapolar los métodos para cálculos plásticos, pero el cálculo plástico no es objeto de la presente tesis.

La respuesta estructural ante una sollicitación dinámica, se obtiene como suma de las respuestas estructurales de sus modos de vibración, analizados independientemente. Este análisis independiente se fundamenta en que cada modo de vibración es una coordenada linealmente independiente de la respuesta estructural. Todos los modos vibración de cualquier estructura, incluido el modo fundamental, pueden ser simplificados según el método que se expone a continuación y, por tanto, la respuesta estructural se puede obtener como suma casos simplificados.



4.1.1 Rigidez de un punto

La rigidez en un punto de una estructura se puede definir como la fuerza necesaria para que, aplicada en dicho punto, se obtenga un desplazamiento unitario. Es decir, la rigidez se entiende de forma cualitativa como la resistencia al movimiento de un punto cuando se le aplica una determinada fuerza. Esa resistencia al movimiento es la consecuencia de la inercia de la sección, el tipo de material, de las condiciones de contorno de la estructura, etc. pero todas ellas se engloban dentro del concepto rigidez. Matemáticamente, por tanto, la rigidez se expresa como el cociente entre la fuerza aplicada en un punto y el movimiento registrado en él. La fuerza puede estar directamente aplicada en el punto, o puede estarlo en otro u otros puntos de la estructura en el caso de conjunto de fuerzas. En este último caso, aparece el concepto de fuerza equivalente o fuerza condensada. La fuerza equivalente o fuerza condensada es aquella fuerza que aplicada sobre el punto del que se desea conocer la rigidez, provoca el mismo movimiento en dicho punto que el conjunto de fuerzas que actúa en la estructura.

Para una estructura que trabaja a flexión dentro del rango elástico, y conocida la deformada de una estructura, se puede conocer de manera exacta el campo de fuerzas exteriores que actúa sobre la estructura según la expresión diferencial conocida:

$$q(x, t) = EIw(x, t)^{IV} \quad (257)$$

Donde q es la fuerza exterior por metro aplicada en el elemento diferencial, E es el módulo de elasticidad e I la inercia de la sección, y w el valor del desplazamiento del punto de coordenada x en el tiempo t .

Para ilustrar mejor el método se aplica a una viga biapoyada (Figura 70) de canto constante y material homogéneo, elástico e isótropo. La ecuación (257) indica que las fuerzas exteriores representadas a la izquierda de la igualdad están en equilibrio con las fuerzas elásticas que provoca la viga al deformarse, representadas a la derecha de la igualdad.

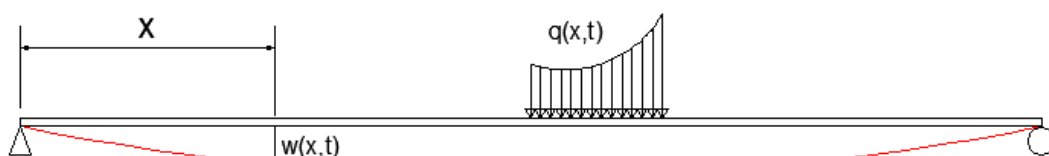


Figura 70-Representación de la ecuación que relaciona fuerza y deformada.



Calcular las fuerzas exteriores a partir de la deformada es tan preciso, hasta ser exacto, como lo sea la definición de la deformada. Con el objeto de simplificar los cálculos se usará una deformada de la estructura que proporcione una precisión suficiente. De la aplicación de la ecuación (257) se deriva un método general para calcular la rigidez de un punto en una estructura, el cual será expuesto a continuación. Por otra parte, también se calculará la rigidez de la viga con un método simplificado y se compararan los resultados.

4.1.1.1 Rigidez de viga en el punto central.

El ejemplo concreto de estudio, por su sencillez, es el caso de una fuerza estática aplicada en el centro de una viga simplemente apoyada, donde se quiere conocer la rigidez del punto central. La longitud de la viga es de 10 m, de sección cuadrada 0.1 m x 0.1 m. La viga es de acero con un módulo de elasticidad de $2.1 \cdot 10^8$ KN/ m². Se aplica una fuerza P de 10 KN en el centro de vano ($x=L/2$), como se puede apreciar en la Figura 71.

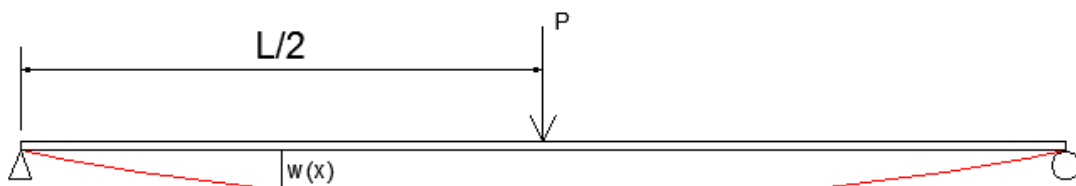


Figura 71- Caso de estudio: Cálculo de rigidez en el centro de la viga para una fuerza estática aplicada en dicho punto. Esta fuerza produce una deformación en la viga representada en rojo y cuyo valor en cada punto viene dado por $w(x)$.

A continuación, se explica cómo calcular la rigidez de un punto según un método general, de aplicación en los casos más complejos, y según un método simplificado, de aplicación a los casos más sencillos.

Método general de cálculo de rigidez:

En primer lugar, se expone el llamado método general para el cálculo de la rigidez de un punto. Como se ha comentado, este método sería exacto sí, y sólo sí, la deformada de la estructura utilizada para los cálculos fuera exacta también. Para la explicación del método, y general para



los cálculos, es suficiente se considerar una deformada aproximada que cumpla con las condiciones de contorno del problema. Para el ejemplo concreto, se expone como obtener la rigidez para una estructura que trabaja a flexión.

La deformada de la viga bajo la carga descrita en la Figura 71, se puede aproximar por la deformada de una función senoidal, ya que presenta una forma parecida y cumple con las condiciones de contorno del problema:

$$w(x) = f \operatorname{sen}\left(\frac{x}{L}\Pi\right) \quad (258)$$

Donde f es la flecha en centro de vano ($f = w\left(\frac{L}{2}\right)$). En realidad, dado que el estudio se enmarca dentro del cálculo lineal, la rigidez es independiente de la amplitud f y, por tanto, se puede tomar como f cualquier valor. Por comodidad, se considera un valor de f igual a la flecha exacta en $L/2$ para ilustrar la diferencia entre la deformada utilizada y la exacta. Se acepta como deformada exacta de la viga la proporcionada por el programa de elementos finitos Midas Civil, cuya deformada se muestra en la Figura 72.

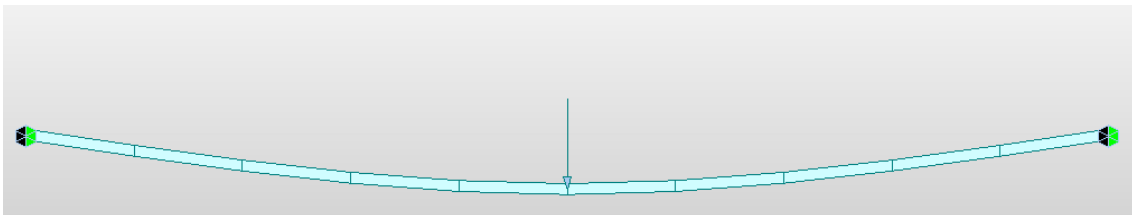


Figura 72:-Deformada obtenida por el programa de cálculo Midas Civil 2016.

La comparación de resultados entre la deformada proporcionada por Midas Civil, que es la deformada de la teoría elástica de vigas, y la deformada aproximación realizada según la ecuación (258), se muestran de manera gráfica en la Figura 73 y de manera numérica en la Figura 74.

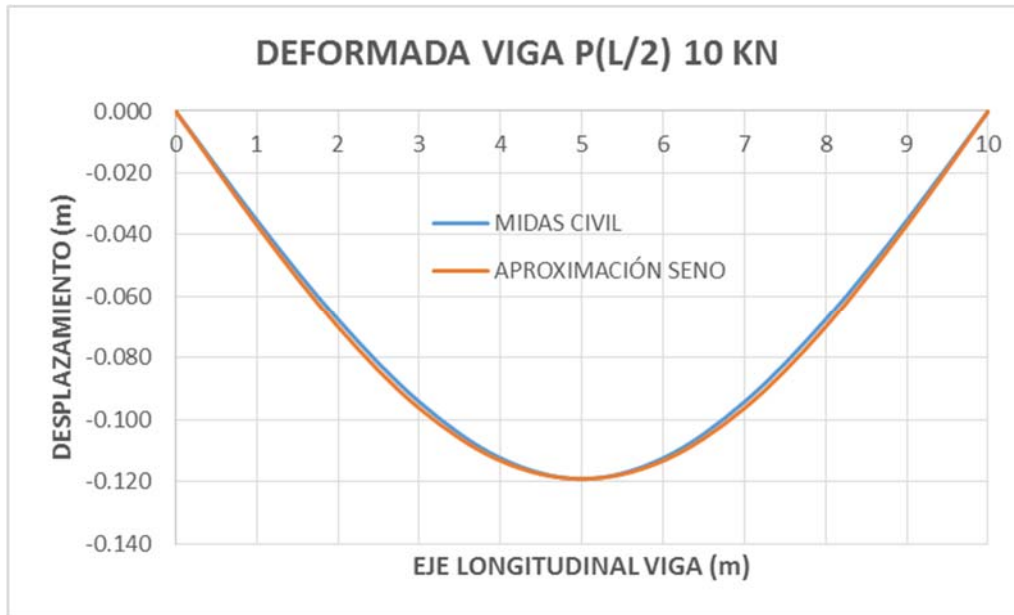


Figura 73-Comparativa gráfica entre los resultados de deformada exacta y aproximación.

COORDENADA X (m)	MIDAS CIVIL CARGA PUNTUAL (m)	DEFORMADA APROXIMACIÓN SENO (m)	ERROR RELATIVO (%) (m)
0	0.000	0.000	0.0%
1	-0.035	-0.037	4.2%
2	-0.068	-0.070	3.4%
3	-0.094	-0.096	2.1%
4	-0.112	-0.113	0.7%
5	-0.119	-0.119	0.0%
6	-0.112	-0.113	0.7%
7	-0.094	-0.096	2.1%
8	-0.068	-0.070	3.4%
9	-0.035	-0.037	4.2%
10	0.000	0.000	0.0%

Figura 74- Comparativa numérica entre los resultados de deformada exacta y aproximación.

Como se puede apreciar en la Figura 73, los resultados son muy aproximados. Se concluye, por tanto, que aproximar la deformada por una función senoidal como la indicada en la ecuación (258), es una buena aproximación con la que realizar la estimación de la rigidez.

El primer paso para el cálculo de la rigidez es determinar la fuerza equivalente que se ejerce sobre el punto del que se quiere conocer la rigidez, en este caso $L/2$. Para ello, se calculan las fuerzas elásticas de reacción que actúan sobre la viga a partir de la ecuación (257). Dado que se ha asumido la deformada según la ecuación (258) su derivada cuarta resulta:



$$w^{IV} = A\left(\frac{\pi}{L}\right)^4 \operatorname{sen}\left(\frac{x}{L}\pi\right) \quad (259)$$

Por otro lado, según los datos utilizados para el caso concreto de estudio, el módulo de elasticidad y la inercia de la sección resultan:

$$E = 2.1 \cdot 10^8 \frac{\text{KN}}{\text{m}^2}$$
$$I = \frac{1}{12} 0.1^4 = 8.33 \cdot 10^{-4} \text{m}^4 \quad (260)$$

El valor de f seleccionado se obtiene de la Figura 74 para $x=5$ m, es decir $f = -0,119$ m. A partir de los valores de las ecuaciones (259) y (260), y en aplicación de la ecuación (257), los resultados de las fuerzas q que realiza la viga al deformarse se pueden ver en la Figura 76 de forma gráfica y en la tabla de la Figura 76 de forma numérica (se discretiza cada metro):

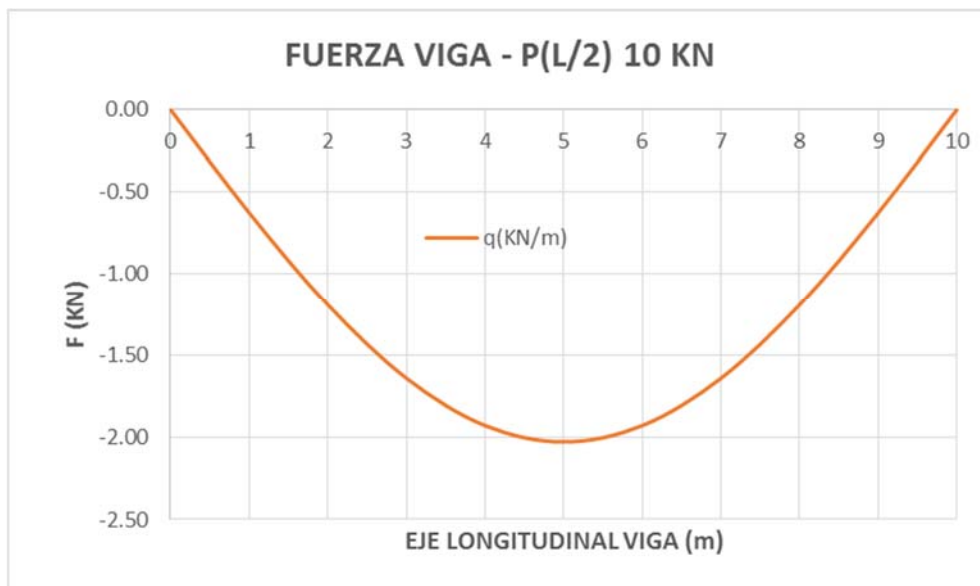


Figura 75- Representación gráfica de las fuerzas elásticas de la viga al deformarse



COORDENADA X (m)	FUERZA EN PUNTO q(KN/m)
0	0.00
1	-0.63
2	-1.19
3	-1.64
4	-1.93
5	-2.03
6	-1.93
7	-1.64
8	-1.19
9	-0.63
10	0.00

Figura 76-Fuerzas por unidad de longitud que realiza la viga al deformarse.

Una vez calculadas las fuerzas elásticas por unidad de longitud que ejerce la viga al deformarse, se ha de obtener la fuerza equivalente que actúa sobre el punto de estudio $L/2$. Estas fuerzas no se pueden sumar directamente, es necesario condensarlas (o ponderarlas según su posición) sobre el punto de estudio. Es decir, no sería cierto considerar que todas las fuerzas distribuidas sobre la viga gravitan sobre el centro de vano. Como es lógico, las fuerzas que están sobre el punto de estudio, en este caso $L/2$, computan en porcentajes próximos al 100%, mientras que las fuerzas próximas a los apoyos computan con porcentajes prácticamente nulos.

Para clarificar el concepto de condensación de fuerzas expuesto anteriormente, se describe, a modo de ejemplo, el siguiente caso. Se carga una viga biapoyada de 10 m de longitud con una ley de cargas exteriores uniforme de 10 KN/ m según la imagen mostrada en la Figura 77. Se pretende condensar dichas fuerzas exteriores en el centro de luz de la viga, es decir, indicar cuál es la fuerza real que gravita sobre el centro de luz.

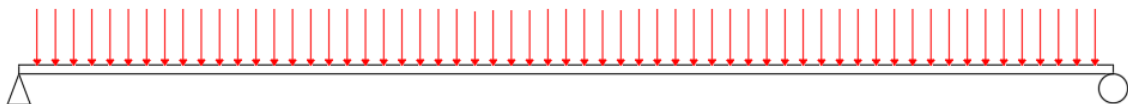


Figura 77-Viga de 10 m bajo carga uniformemente repartida

La resultante R de las fuerzas exteriores será la suma de todas ellas:

$$R = F_{max}L = 10 \times 10 = 100 \text{ KN}$$

La reacción en cada apoyo será, por tanto, $R/2$.



Sobre el punto central, es evidente que no gravitan el 100% de la resultante, es decir, los 100 KN. Para saber qué porcentaje de esos 100 KN gravitan sobre el punto central, se hace la siguiente construcción ficticia aproximada. Se dispone un apoyo imaginario en el centro de la viga como muestra la Figura 78.

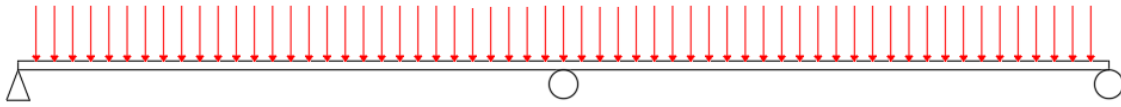


Figura 78-Apoyo ficticio central para calcular la condensación de fuerzas.

La reacción en el apoyo central imaginario será la cantidad de la fuerza exterior que gravite sobre el punto central. Para calcular dicha reacción, se utiliza la línea de influencia de la reacción del apoyo, según el teorema de reciprocidad de *Maxwell*. La línea de influencia de la reacción central ($LdI(x)$) se consigue dando un desplazamiento unitario al apoyo central, como muestra la Figura 79.

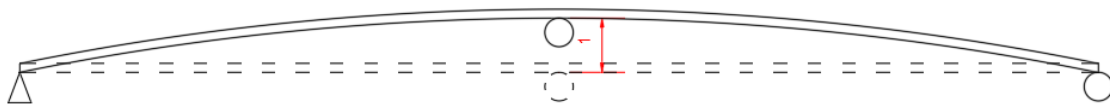


Figura 79-Línea de influencia del apoyo central.

Con el objeto de no tener que calcular la deformada de la línea de influencia exacta, se puede aproximar ésta por una función seno, ya que cumple las condiciones de contorno y la deformada es similar. La línea de influencia del apoyo central se obtiene, por tanto, según la ecuación (258) para un valor de $f=1$ m. Esta línea de influencia se muestra en la Figura 80.

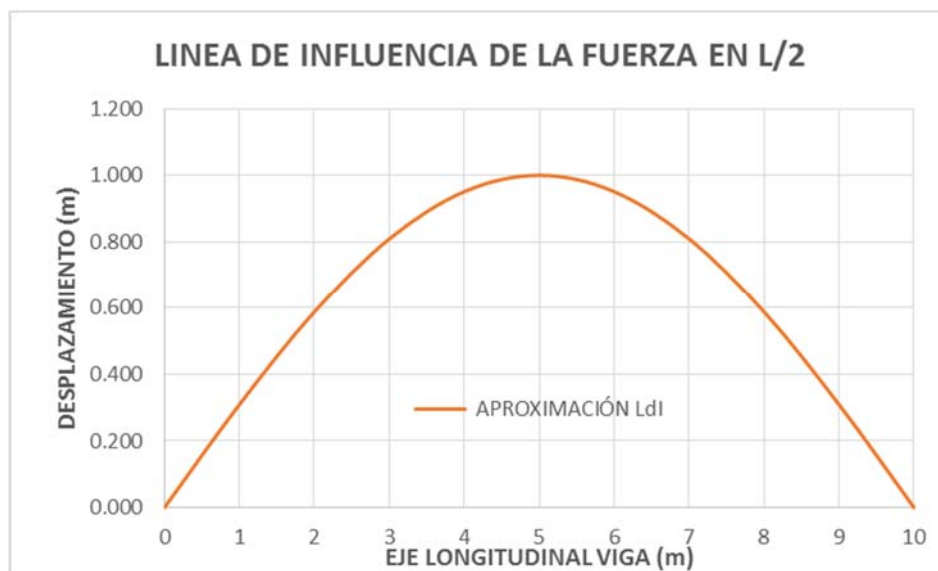


Figura 80-Línea de influencia de la fuerza en el centro de luz de la viga.



Obtenida línea de influencia, se calcula de forma aproximada la reacción del apoyo central ficticio $R_{L/2}$:

$$R_{L/2} = \int_0^L q(x) LdI(x) dx = 10 \int_0^L LdI(x) dx \approx 10 \times \frac{2}{3} \times L \times f \approx 10 \times \frac{2}{3} \times 10 \times 1 \approx 66.7 \text{ KN}$$

Es decir, el 66.7% del total de la carga exterior qL gravita sobre el central de luz como carga puntual (la reacción exacta calculada con Midas Civil resulta de 62.8 KN). Para verificar si la aproximación es buena, se calcula la flecha que tendría la viga bajo esta carga puntual equivalente.

$$w\left(\frac{L}{2}\right) = \frac{PL^3}{48EI} = \frac{R_{L/2}L^3}{48EI} = \frac{qL \cdot 0.667 L^3}{48EI} = \frac{qL^4}{72EI}$$

La flecha exacta bajo una carga repartida resulta:

$$w\left(\frac{L}{2}\right) = \frac{5qL^4}{384EI} = \frac{qL^4}{76.8EI}$$

Se comprueba, por tanto, que la aproximación es suficientemente buena. Nótese que si en vez de los 66.7 % obtenido en por la aproximación de la línea de influencia, se hubiera utilizado el 62.8% calculado de manera exacta, el resultado obtenido para la flecha $w\left(\frac{L}{2}\right)$ sería el exacto.

Explicado el concepto de condensación de fuerzas, se repite el proceso de condensación para las cargas q de la Figura 76. Para ello, se multiplica la fuerza por unidad de longitud q por el valor de la longitud de discretización ΔL (en este caso 1 metro) para obtener fuerzas puntuales en cada punto. Posteriormente, cada una de esas fuerzas puntuales se multiplica por el valor de la línea de influencia en ese punto ($LdI(x)$) para obtener la fuerza condensada o fuerza equivalente sobre el punto de estudio.

$$q_{eq} = q \Delta L LdI(x)$$

Los resultados de las fuerzas q y de las fuerzas equivalentes q_{eq} se exponen gráficamente en la Figura 81 y numéricamente en la Figura 82.

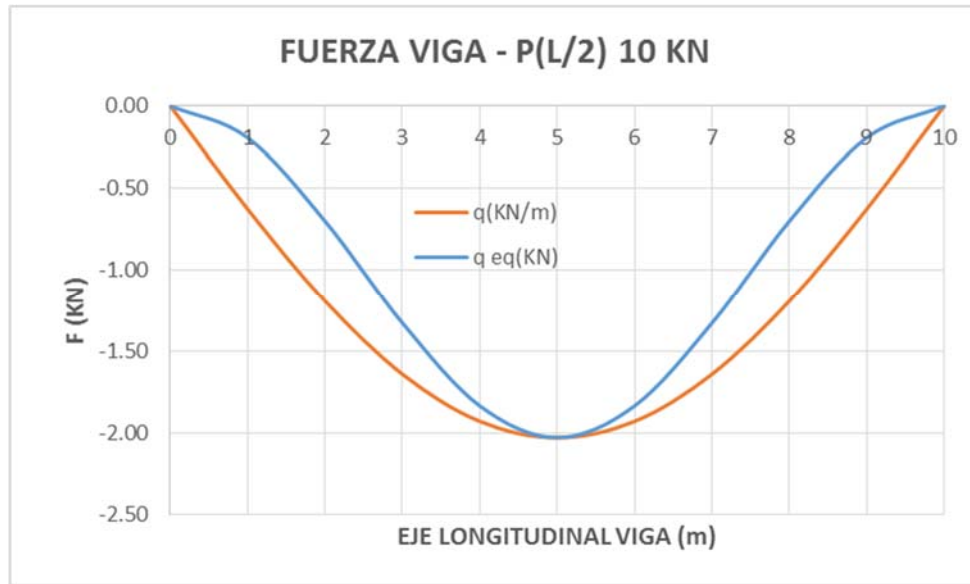


Figura 81-Fuerza elástica por unidad de longitud y fuerza condensada en el centro del vano.

En la Figura 81 se puede ver en color naranja las fuerzas en cada punto a lo largo de la viga, y en color azul el valor de la fuerza en cada punto ya multiplicada por el valor de la línea de influencia, es decir, ya condensada. Se aprecia como en el centro de la viga, las líneas están próximas porque computan al 100%, y medida que se aleja del centro las curvas azul y naranja se alejan dado que la fuerza cada vez computa a un porcentaje menor. La integral de la curva azul, es decir, la suma de todas las fuerzas condensadas proporciona el valor de la fuerza equivalente.

COORDENADA X (m)	APROXIMACIÓN Ldi (m)	FUERZA EN PUNTO q(KN/m)	FUERZA EN PUNTO CONDENSADA q eq(KN)
0	0.000	0.00	0.00
1	0.309	-0.63	-0.19
2	0.588	-1.19	-0.70
3	0.809	-1.64	-1.33
4	0.951	-1.93	-1.84
5	1.000	-2.03	-2.03
6	0.951	-1.93	-1.84
7	0.809	-1.64	-1.33
8	0.588	-1.19	-0.70
9	0.309	-0.63	-0.19
10	0.000	0.00	0.00
		TOTAL F eq(KN)	-10.15

Figura 82-Resultados numéricos de línea de influencia, fuerzas elásticas por unidad de longitud y condensadas y valor de rigidez resultante.

A partir de los datos de la Figura 82, una vez que se tienen las n fuerzas condensadas en el punto de estudio, en este caso $L/2$, se pueden sumar directamente para obtener la fuerza total equivalente (F_{eq}) que actúa sobre dicho punto.



$$F_{eq} = \sum_0^n q_{eq}$$

Al sumarlas, se obtiene la condensación de las fuerzas elásticas que ejerce la viga al deformarse resultado un valor de:

$$F_{eq} = 10.15 \text{ KN}$$

Para que el punto de estudio esté en equilibrio, las fuerzas elásticas condensadas F_{eq} deben ser igual a las fuerzas exteriores. El valor de 10.15 KN es muy próximo al valor exacto correspondiente a las fuerzas exteriores (10 KN). Esta pequeña diferencia es debida a las aproximaciones realizadas en las deformadas utilizadas para los cálculos.

Finalmente, para obtener la rigidez del centro de vano se realiza el cociente entre la fuerza equivalente y el desplazamiento de este punto. Dado que la flecha obtenida en ese punto es el valor de $f=0.119 \text{ m}$, la rigidez (K) resultante es:

$$K = \frac{10.15}{0.119} = 85.23 \frac{\text{KN}}{\text{m}} \quad (261)$$

Método simplificado de cálculo de rigidez:

El método simplificado trata de facilitar la obtención de la rigidez. Este método obtiene, en general, rigideces con cierto error, pudiendo llegar a no ser de aplicación si este es excesivo para el objeto de estudio concreto.

El método simplificado consiste en aplicar una fuerza en el punto de estudio, y obtener la rigidez como el cociente entre dicha fuerza y el desplazamiento. La precisión de este método depende de la similitud entre la deformada de la estructura sobre la cual se quiere conocer la rigidez y la deformada que se derive de la aplicación de la fuerza puntual en el punto de estudio. Para el caso específico que se está analizando, dado que es justamente el análisis de la rigidez para una carga puntual, el resultado que se obtiene por el método simplificado es el exacto. Sin embargo, en general, cuando se utilice este método, por ejemplo, para calcular la rigidez de los modos de vibración no será exacto. Su precisión para ese caso dependerá, como se ha comentado, de lo parecidas que sean las deformadas del modo de vibración y del caso de la fuerza puntual del método simplificado.

El valor de la rigidez en el método simplificado se puede calcular, además de como el cociente entre fuerza y desplazamiento, a partir de una fórmula analítica si se dispone de ella como es el



caso. Para una carga puntual en el centro del vano en una viga, la relación entre fuerza P y desplazamiento del centro del vano f es conocida en aplicación de la teoría elástica de vigas. Disponiendo esta expresión como la ecuación de un muelle ($P = K \Delta$), se puede deducir la rigidez por analogía:

$$f = \frac{PL^3}{48EI}$$
$$P = \frac{48EI}{L^3} f \quad (P = K \Delta) \quad (262)$$
$$K = \frac{48EI}{L^3} = 84.0 \frac{KN}{m}$$

Si se calcula la rigidez a partir del valor que ofrece el Midas Civil, es decir, como el cociente entre la carga aplicada y la flecha obtenida resulta:

$$K = \frac{P}{f} = \frac{10 \text{ KN}}{0.119 \text{ m}} = 83.97 \frac{KN}{m} \quad (263)$$

La rigidez que se obtiene del Midas Civil es muy próxima a la rigidez exacta. Una discretización de la viga en más de 10 elementos afinaría aún más el resultado. No obstante, como se puede ver en la Figura 83 todos los casos proporcionan valores muy cercanos al exacto (ERROR RELATIVO <1.5%).

MÉTODO	VALOR	ERROR
RIGIDEZ APROXIMADA(KN/m)	85.23	1.47%
RIGIDEZ MIDAS CIVIL (KN/m)	83.97	0.03%
RIGIDEZ EXACTA(KN/m)	84.00	0.00%

Figura 83-Comparativa de valores de rigidez según el método.



4.1.1.2 Rigidez del modo fundamental de vibración para viga en el punto central.

Para este segundo caso se quiere calcular la rigidez en el centro de vano para el modo fundamental o modo 1 de vibración de una viga. Las características de la viga son las mismas que las expuestas en el caso anterior. La viga biapoyada se esquematiza en la Figura 84.



Figura 84-Viga biapoyada sobre la que se calcula la rigidez del punto central para el modo fundamental.

Para el cálculo de la rigidez, se pretende utilizar el método simplificado explicado en el punto anterior. Este método, como se ha indicado, se puede usar siempre y cuando las deformadas del modo, en este caso, y del caso de carga puntual, sean similares. Para evaluar la diferencia entre ambas, se compara la deformada del modo de vibración fundamental y del caso de la carga puntual en el centro del vano correspondiente al método aproximado. Los resultados del caso de carga puntual, se han obtenido en el apartado anterior (4.1.1.1).

Con el objeto de obtener la deformada del modo 1, se realiza un análisis modal de la viga con el programa Midas Civil. La deformada que calcula dicho programa se puede observar en la Figura 85.

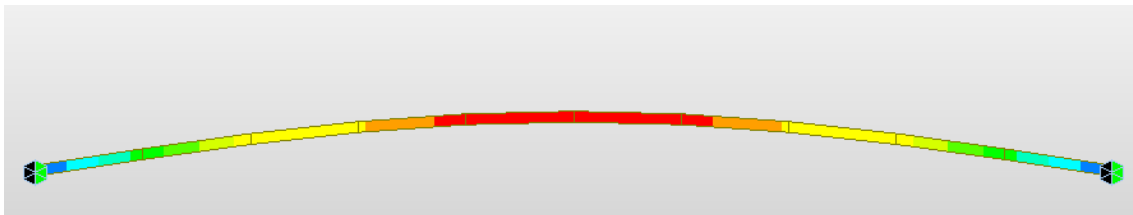


Figura 85-Deformada del modo fundamental de la viga.

La amplitud del modo de vibración, por definición, puede ser cualquier valor. Para poder comparar con el caso de la carga puntual, se le asigna al modo la misma amplitud que el caso de la carga puntual en el centro de vano. En la Figura 87 se exponen los valores de la deformada cada metro, para el modo 1, para el caso de la carga puntual calculado con Midas Civil y para la aproximación de la deformada según la ecuación (258). En la Figura 86 se representan gráficamente estos valores.



Figura 86-Comparativa gráfica de las deformadas de carga puntual calculada con Midas Civil y con el método aproximado y la deformada del primer modo de vibración calculada con Midas Civil.

COORDENADA X (m)	MIDAS CIVIL - MODO FUNDAMENTAL (1) (m)	MIDAS CIVIL CARGA PUNTUAL (2) (m)	ERROR RELATIVO (1)-(2) (%)	DEFORMADA APROXIMACIÓN SENO (m)	ERROR RELATIVO (1)-(3) (%)
0	0.000	0.000	0.0%	0.000	0.0%
1	-0.037	-0.035	4.4%	-0.037	0.0%
2	-0.070	-0.068	3.5%	-0.070	0.0%
3	-0.096	-0.094	2.2%	-0.096	0.0%
4	-0.113	-0.112	0.8%	-0.113	0.0%
5	-0.119	-0.119	0.0%	-0.119	0.0%
6	-0.113	-0.112	0.8%	-0.113	0.0%
7	-0.096	-0.094	2.2%	-0.096	0.0%
8	-0.070	-0.068	3.5%	-0.070	0.0%
9	-0.037	-0.035	4.4%	-0.037	0.0%
10	0.000	0.000	0.0%	0.000	0.0%

Figura 87-Comparativa de valores de las deformadas de carga puntual calculada con Midas Civil y con el método aproximado y la deformada del primer modo de vibración calculada con Midas Civil.

En la representación gráfica se puede observar que las deformadas de los tres casos son muy parecidas, prácticamente coincidentes, por lo que se puede aplicar el método simplificado. Es decir, la rigidez en el centro de vano para el modo fundamental se puede aproximar por el valor de la rigidez obtenida para el caso de la carga puntual. Los cálculos sobre la rigidez según el método simplificado han sido obtenidos en el apartado anterior, el 4.1.1.1, resultado un valor de rigidez de $K_e = 84 \text{ KN /m}$.

Según lo expuesto, y a partir del método general basado en la ecuación (257), **la rigidez de un punto para una estructura dada depende exclusivamente de la deformada**. Por tanto, se puede concluir que la rigidez en el centro de vano del primer modo de vibración es aproximadamente la misma que la correspondiente a una carga puntual centrada. Posteriormente se analizará la diferencia entre utilizar el valor exacto y el aproximado.



4.1.1.3 Rigidez del modo fundamental de vibración para viga continua de dos vanos en punto medio de vano.

Para el siguiente caso se va a estudiar una viga metálica continua de dos vanos de 0.1 m x 0.1 m de sección, y 10 m de longitud cada vano. Es decir, una viga de dos vanos continuos, siendo cada uno de los vanos como el descrito en el apartado anterior (4.1.1.2) como muestra el esquema de la Figura 88 .

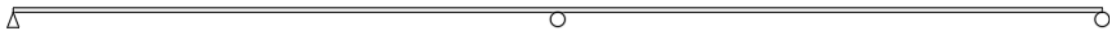


Figura 88- Viga continua de dos vanos sobre la que se calcula la rigidez del punto central de un vano para el modo fundamental.

Nuevamente, se pretende calcular la rigidez en el centro de uno de los vanos (los dos centros de luz tendrán la misma rigidez) para el modo fundamental o modo 1 de dicha viga.

Para aplicar el método simplificado es necesario definir el caso de carga puntual. Dado que el modo presenta una deformada antimétrica, el cálculo de la rigidez bajo carga puntual se plantea en los mismos términos. Es decir, se aplica en cada uno de los centros de vano, con su sentido correspondiente, una carga puntual. Cada carga aplicada para este ejemplo es, en valor absoluto, de 10 KN como se ilustra en la Figura 89.

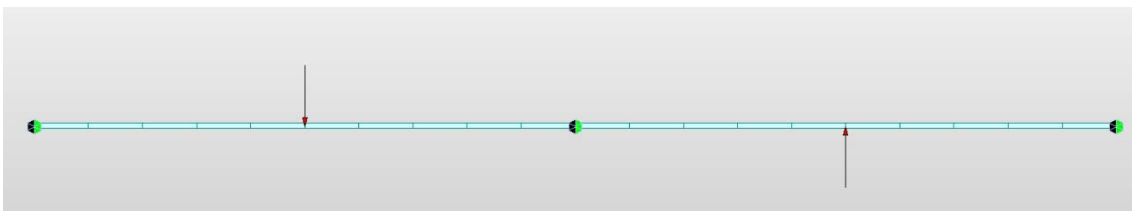


Figura 89-Cargas puntuales aplicadas de 10 KN con sentidos contrarios en el centro de cada vano de 10 m. Caso 2 vanos.

Para obtener la deformada de la viga para el modo 1 de vibración se realiza un análisis modal mediante el programa Midas Civil. De la misma manera en el caso anterior, la amplitud en el centro del vano del modo, el cual se muestra en la Figura 90, se hace coincidir en valor con la amplitud del caso de las cargas puntuales, para proceder a su comparación.

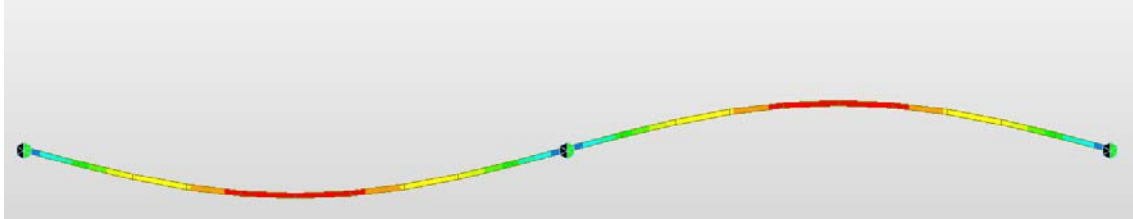


Figura 90-Deformada del modo 1 o fundamental de la viga continua de dos vanos.

Los resultados obtenidos mediante el programa Midas Civil para el análisis modal de la viga y para el caso de la carga puntual, se comparan gráficamente en la Figura 91 y numéricamente en la Figura 92.



Figura 91- Comparativa gráfica de las deformadas de carga puntual calculada con Midas Civil y la deformada del primer modo de vibración calculada con Midas Civil para el caso de la viga de dos vanos.



COORDENADA X	MIDAS CIVIL CARGA PUNTUAL	MIDAS CIVIL - MODO FUNDAMENTAL	ERROR RELATIVO
(m)	(m)	(m)	(%)
0	0.000	0.000	0.0%
1	-0.035	-0.037	4.2%
2	-0.068	-0.070	3.4%
3	-0.094	-0.096	2.1%
4	-0.112	-0.113	0.7%
5	-0.119	-0.119	0.0%
6	-0.112	-0.113	0.7%
7	-0.094	-0.096	2.1%
8	-0.068	-0.070	3.4%
9	-0.035	-0.037	4.2%
10	0.000	0.000	0.0%
11	0.035	0.037	4.2%
12	0.068	0.070	3.4%
13	0.094	0.096	2.1%
14	0.112	0.113	0.7%
15	0.119	0.119	0.0%
16	0.112	0.113	0.7%
17	0.094	0.096	2.1%
18	0.068	0.070	3.4%
19	0.035	0.037	4.2%
20	0.000	0.000	0.0%

Figura 92-Tabla de valores de las deformadas para el caso de las cargas puntuales y del modo 1 de vibración. Caso 2 vanos.

Como se puede apreciar en la gráfica anterior, las deformadas bajo sendas cargas puntuales y el modo 1 son prácticamente idénticas, por lo que el método simplificado es de aplicación.

Dado que tanto la fuerza puntual, 10 KN, como el desplazamiento del centro del vano, 0.119 m, son los mismos que en los casos expuestos en los apartados 4.1.1.1 y 4.1.1.2, se obtiene el mismo valor de la rigidez que en dichos casos ($K_e=84.00$ KN /m).

Por tanto, la rigidez en el centro de cada vano para el modo fundamental de la viga continua de dos vanos es la misma que para el centro de luz del modo fundamental de la viga de un vano. El motivo por el cual esto sucede reside en que el modo fundamental de la viga continua de dos vanos se comporta como dos vigas biapoyadas independientes, aunque desfasadas medio periodo de vibración en sus movimientos. Es decir, el modo fundamental de la viga se continua **se comporta como si hubiera una rótula en el apoyo central**, debido a la simetría antimétrica.



4.1.1.4 Rigidez del modo fundamental de vibración para viga continua de tres vanos en punto medio de vano.

Para comprobar que el modo fundamental de una viga continua se comporta como vigas independientes biapoyadas, como se ha expuesto en el último párrafo del apartado anterior, se plantea otro caso de viga continua pero en esta ocasión de tres vanos, como muestra la Figura 93.



Figura 93- Viga continua de tres vanos sobre la que se calcula la rigidez del punto central del vano central para el modo fundamental.

En concreto, se va a estudiar una viga continua metálica de tres vanos de 0.1 m x 0.1 m de sección, y 10 m de luz en cada vano. Es decir, tres vanos continuos como los descritos en los casos expuestos en los apartados 4.1.1.1 y 4.1.1.2.

Se pretende calcular la rigidez en el centro de cada vano (los tres centros de luz tendrán la misma) para el modo fundamental o modo 1 de dicha viga.

De forma análoga a lo realizado en el ejemplo anterior, y dado que este nuevo caso presenta una geometría de deformada simétrica respecto del centro de la estructura, el método aproximado se plantea en los mismos términos. En concreto, se aplica un a fuerza de 10 kN en cada vano, con sentidos contrarios como se aprecia en la Figura 94.

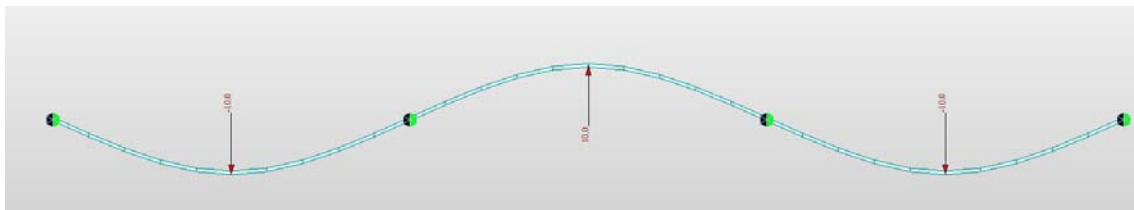


Figura 94- Cargas puntuales aplicadas de 10 kN con sentidos contrarios en el centro de cada vano de 10 m. Caso 3 vanos.

Para obtener la deformada de la viga para el modo 1 de vibración se realiza un análisis modal mediante el programa Midas Civil. Análogamente a lo expuesto en apartados anteriores, la amplitud en el centro del vano del modo, el cual se muestra en la Figura 95, se hace coincidir en valor con la amplitud del caso de las cargas puntuales para proceder a su comparación.



Figura 95- Deformada del modo 1 o fundamental de la viga continua de tres vanos.

Los resultados obtenidos mediante el programa Midas Civil para el análisis modal, y para el caso de cargas puntuales realizado se comparan gráficamente en la Figura 96 y numéricamente en la Figura 97.

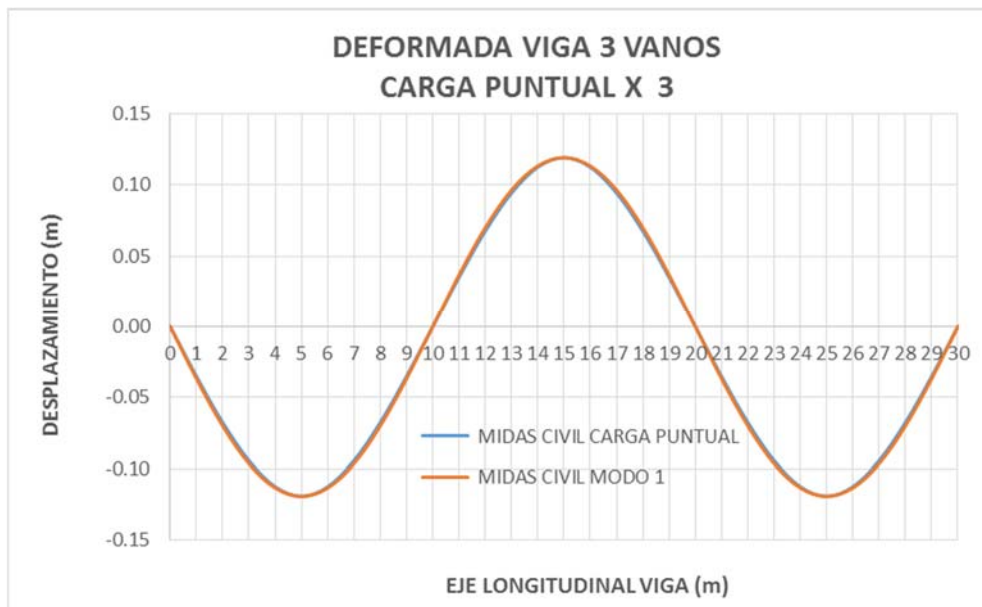


Figura 96-Comparativa gráfica de las deformadas de carga puntual calculada con Midas Civil y la deformada del primer modo de vibración calculada con Midas Civil para el caso de la viga de tres vanos.



COORDENADA X	MIDAS CIVIL CARGA PUNTUAL	MIDAS CIVIL - MODO FUNDAMENTAL	ERROR RELATIVO
(m)	(m)	(m)	(%)
0	0.000	0.000	0.0%
1	-0.035	-0.037	4.2%
2	-0.068	-0.070	3.4%
3	-0.094	-0.096	2.1%
4	-0.112	-0.113	0.7%
5	-0.119	-0.119	0.0%
6	-0.112	-0.113	0.7%
7	-0.094	-0.096	2.1%
8	-0.068	-0.070	3.4%
9	-0.035	-0.037	4.2%
10	0.000	0.000	0.0%
11	0.035	0.037	4.2%
12	0.068	0.070	3.4%
13	0.094	0.096	2.1%
14	0.112	0.113	0.7%
15	0.119	0.119	0.0%
16	0.112	0.113	0.7%
17	0.094	0.096	2.1%
18	0.068	0.070	3.4%
19	0.035	0.037	4.2%
20	0.000	0.000	0.0%
21	-0.035	-0.037	4.2%
22	-0.068	-0.070	3.4%
23	-0.094	-0.096	2.1%
24	-0.112	-0.113	0.7%
25	-0.119	-0.119	0.0%
26	-0.112	-0.113	0.7%
27	-0.094	-0.096	2.1%
28	-0.068	-0.070	3.4%
29	-0.035	-0.037	4.2%
30	0.000	0.000	0.0%

Figura 97-Tabla de valores de las deformadas para el caso de las cargas puntuales y del modo 1 de vibración. Caso 3 vanos.

De la misma forma que sucede en los casos anteriormente analizados las deformadas entre el caso de las cargas puntuales y el primer modo de vibración son coincidentes, por lo que el método simplificado es de aplicación.

Ha de recordarse que la rigidez de cada centro de vano se calcula como el cociente entre la carga y la deformación producida. Dado que tanto la fuerza puntual aplicada como el desplazamiento del centro del vano obtenido, son los mismos que en los 3 casos anteriores (4.1.1.1, 4.1.1.2 y 4.1.1.3) el valor de la rigidez resulta idéntico a dichos casos ($K_e=84.00$ KN /m). La deformada de



cada vano en la viga continua para el modo 1 es aproximadamente la misma que la deformada de la carga puntual de una viga biapoyada, pero modulada por 1 o por -1 según el vano, como se puede observar en la Figura 96.

A partir de lo expuesto, se comprueba que, si se añaden vanos idénticos en una viga continua, el modo de vibración fundamental de dicha viga se comporta como **un conjunto de vigas biapoyadas independientes**, pero desfasadas medio periodo en su movimiento relativo con el vano adyacente. Es decir, igual que sucede en la viga de dos vanos estudiada en el apartado anterior, la viga se comporta como si tuviera **rótulas en los apoyos**. Por tanto, la rigidez de cada vano en su centro para el modo de vibración es la misma que si el vano no fuera continuo y fuese simplemente apoyado.

4.1.1.5 Rigidez del modo fundamental de vibración para placa en punto central.

Tanto el método general como el método simplificado pueden calcular, independientemente de la estructura, la rigidez de un punto de la misma. Por completar la casuística con una estructura bidimensional, se procede a calcular la rigidez en el centro de una placa para el modo 1 de vibración. Las características geométricas de la estructura son las siguientes: placa cuadrada de 10 m de lado, con 0.1 m de espesor constante y apoyada en las cuatro esquinas, como muestra la Figura 98.

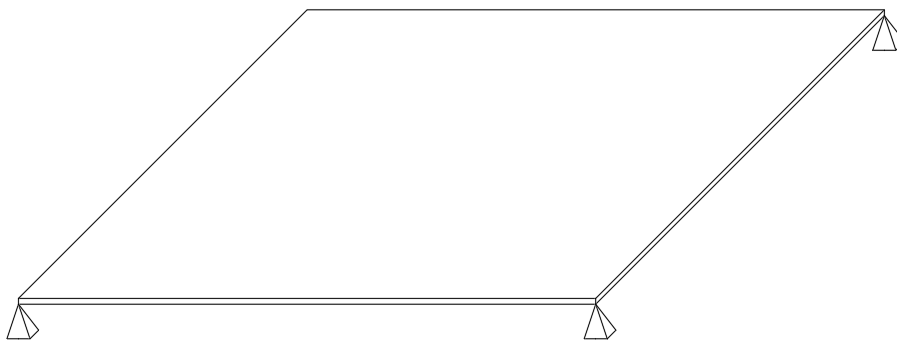


Figura 98- Placa sobre la que se calcula la rigidez del punto central para el modo fundamental.

El material es el correspondiente a un hormigón HA-30 (considerado elástico lineal) con un módulo de elasticidad calculado según el EUROCIPO 2 de valor $3.284 \cdot 10^7 \text{ KN/m}^2$.



Como sucede en los casos anteriores, si las deformadas para un caso de carga centrada puntual y del modo 1 de vibración son razonablemente similares, se calculará la rigidez del centro de la placa para el modo 1 según el método simplificado. Es decir, se calculará como la relación entre la carga aplicada y la flecha obtenida en el caso de carga puntual.

En aplicación del método simplificado, se dispone la carga, para el ejemplo de 100 KN, en el centro de la placa dado que es en ese punto donde se desea conocer la rigidez. Se calcula este caso con Midas Civil como se muestra en la Figura 99. En dicha figura se detalla la posición de los puntos, según un corte diagonal, sobre los cuales se compararán las deformadas en ambas situaciones.

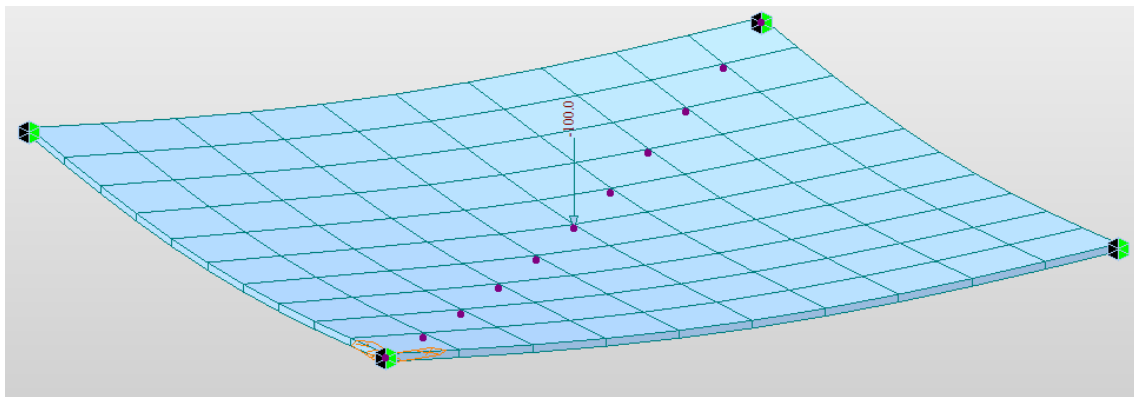


Figura 99-Caso de carga puntual centrada calculada con el Midas Civil para el caso de placa cuadrada.

También se realiza el análisis modal con Midas Civil para obtener los modos de vibración. El modo de vibración 1 o fundamental resultante se puede apreciar en la Figura 100. Como se ha explicado anteriormente, la amplitud en el centro del vano del modo de vibración se hace coincidir en valor con la amplitud del caso de la carga puntual para la comparación de las deformadas.

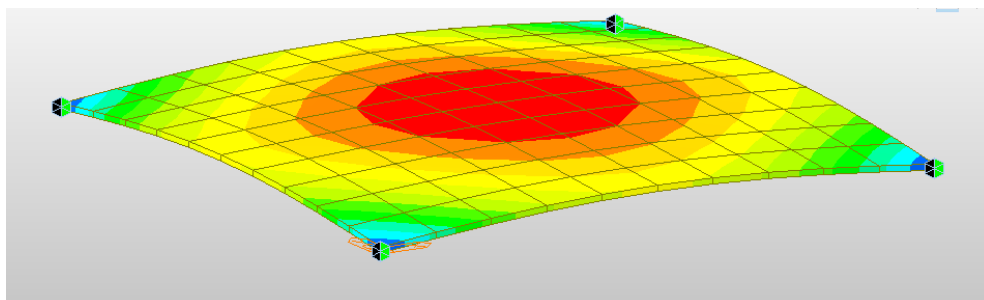


Figura 100-Deformada de placa del modo 1 de vibración. Análisis modal realizado con Midas Civil.



Por otra parte, se aproxima la deformada de los puntos marcados en la Figura 99 a partir de la ecuación (258). Es decir, se aproxima la deformada de la diagonal de la placa por una función seno de amplitud f tal que la flecha en el centro de la placa sea la misma que en el caso de la carga puntual, para poder comparar deformadas.

Los resultados de las deformadas obtenidas para el caso del modo 1 de vibración, de la carga puntual centrada y de la aproximación del seno, se comparan gráficamente en la Figura 101 y numéricamente en la Figura 102 para los puntos de la diagonal indicados. Dada la simetría del problema, si se diera un corte perpendicular al realizado que pasara por el centro de la placa, los resultados serían idénticos a los obtenidos con el corte mostrado.

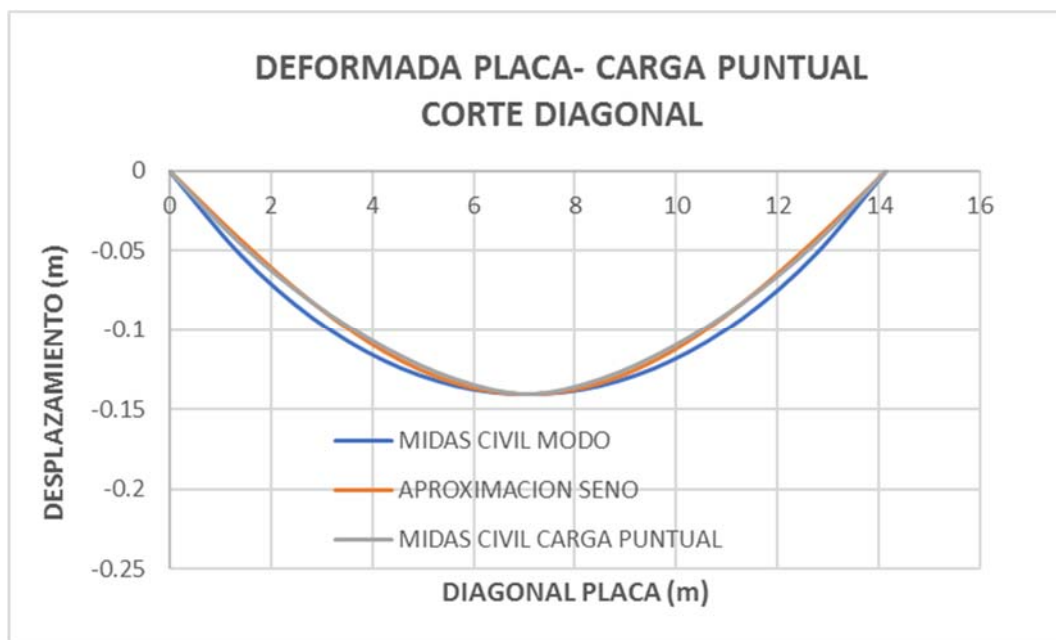


Figura 101- Comparativa gráfica de deformadas en placa para el caso de carga puntual, para la aproximación senoidal y para el modo 1 de vibración.



DISTANCIA DIAGONAL (m)	MIDAS CIVIL -MODO FUNDAMENTAL (1) (m)	MIDAS CIVIL -CARGA PUNTUAL (2) (m)	ERROR RELATIVO (%) (1-2)	APROXIMACIÓN SENO(3) (m)	ERROR RELATIVO (%) (1-3)
0.00	0.000	0.000	0.0	0.000	0
1.41	-0.053	-0.046	13.2	-0.044	18.0
2.83	-0.093	-0.083	10.5	-0.083	10.6
4.24	-0.120	-0.111	7.1	-0.114	4.9
5.66	-0.136	-0.132	3.0	-0.134	1.3
7.07	-0.141	-0.141	0.0	-0.141	0.0
8.49	-0.136	-0.132	3.0	-0.134	1.3
9.90	-0.120	-0.111	7.1	-0.114	4.9
11.31	-0.093	-0.083	10.5	-0.083	10.6
12.73	-0.053	-0.046	13.2	-0.044	18.0
14.14	0.000	0.000	0.0	0.000	0.0

Figura 102-Comparativa numérica de deformadas en placa para el caso de carga punta, para la aproximación senoidal y para el modo 1 de vibración.

Como se puede comprobar en la gráfica de la Figura 101, las deformadas del modo de vibración con respecto a la deformada de la carga puntual y de la aproximación del seno, difieren ligeramente más que en los casos anteriores de las vigas. No obstante, para el cálculo de la rigidez se aplica el método simplificado asumiendo ese pequeño error derivado de la aproximación entre deformadas. En los apartados siguientes se valorará la afección que tiene en los resultados esta aproximación. La rigidez de la placa para el modo 1 de vibración es, por tanto:

$$K_e \approx \frac{P}{f} = \frac{100}{0.141} = 709.89 \frac{KN}{m} \quad (264)$$

Se utiliza el Midas Civil para calcular la rigidez por comodidad, pero se puede calcular también de manera aproximada de forma manual. La placa, para las condiciones de apoyo del problema, se puede sustituir por dos vigas diagonales, dispuestas sobre los apoyos de la placa. Las dimensiones de las vigas equivalentes se pueden suponer de 14.m ($L\sqrt{2}$) de largo y de 7.5 m ($\frac{3}{4}L$) de ancho, una de color rojo y otra de color azul, como muestra la Figura 103.

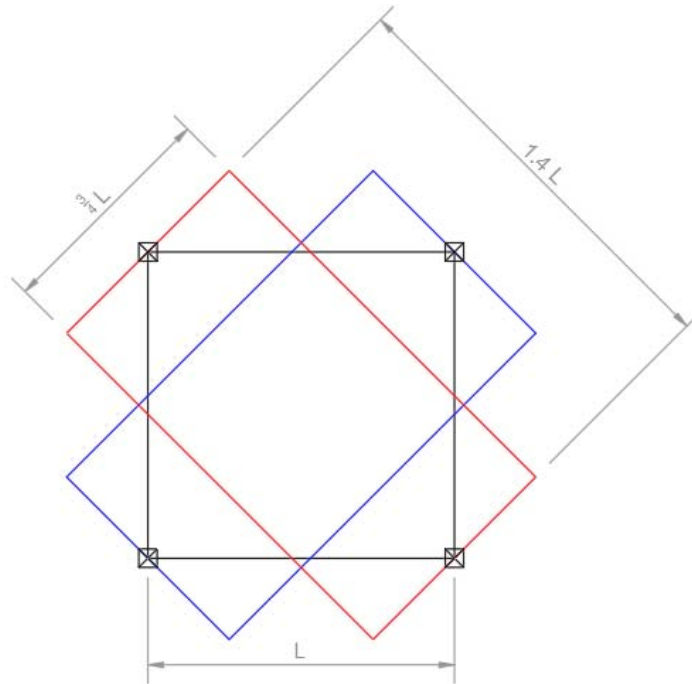


Figura 103-Vigas diagonales equivalentes a la placa

De la Figura 101 se deduce que la deformada de las diagonales del caso de carga puntual realizado con Midas Civil, y la deformada de la aproximación del seno son muy similares. Es decir, las deformadas de las vigas equivalentes se aproximan a la función seno. En el análisis realizado para vigas en apartados anteriores, ha quedado demostrado que la rigidez en el punto central de una viga que se deforma según una función seno es igual, aproximadamente, a $K = \frac{48EI}{L^3}$. Como en este caso la placa está compuesta por dos vigas equivalentes, la rigidez de la placa será:

$$K_e = 2 \frac{48EI}{L^3} = 2 \times \frac{48 \times 3.28 \times 10^7 \times \frac{1}{12} \times 7.5 \times 0.1^3}{14.14^3} = 702.05 \text{ KN/m}$$

Este valor de rigidez calculado de manera manual es muy próximo al valor de 709.89 KN/m obtenido mediante Midas Civil.



4.1.1.6 Rigidez de modo de vibración axial para ménsula en el extremo libre.

En todos los casos anteriores, se ha obtenido la rigidez en un punto para un modo de vibración de flexión. Para comprobar la generalidad del método, se analiza en este apartado la rigidez en el extremo libre de un modo axial en una ménsula.

El método simplificado puede ser aplicado a cualquier modo ya sea de flexión, axial o de torsión, siempre que las deformadas sean sensiblemente similares. La razón de esa aplicabilidad total es debida a que todos los mecanismos resistentes enumerados anteriormente generan fuerzas elásticas que compensan las fuerzas exteriores. El método simplificado condensa esas fuerzas elásticas, independientemente del mecanismo resistente que las generó.

Las características geométricas de la ménsula metálica objeto de estudio que se muestra la Figura 104, son las siguientes: longitud 5 y sección 0.01 m x 0.01 m.



Figura 104- Ménsula sobre la que se calcula la rigidez del punto del extremo libre para el modo fundamental axial.

El módulo de elasticidad del acero utilizado para la ménsula es $2.1 \cdot 10^8 \frac{KN}{m^2}$ y la densidad $7850 \text{ Kg}/m^3$.

Se calculan las deformadas del modo axial de vibración y del caso de carga puntual para el método simplificado. Si las deformadas son razonablemente similares, se calculará la rigidez del extremo de la ménsula según el método simplificado. También, para su comparación, se aproxima la deformada del modo 1 axial según la ecuación (258), con la amplitud f que haga coincidir la amplitud en el extremo libre con el caso de la carga puntual. Para ello, se multiplica por el factor dos la longitud de ménsula en el denominador, haciendo coincidir así el máximo desplazamiento para la longitud L . Es decir:

$$w(x) = f \operatorname{sen}\left(\frac{\pi x}{2L}\right) = -0.002381 \operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{10} x\right)$$



Para el método simplificado, se dispone una carga puntual de compresión de valor 10 KN, en el extremo libre de la ménsula dado que es el punto donde se desea conocer la rigidez. Se calcula este caso con Midas Civil a partir del modelo mostrado en la Figura 105.

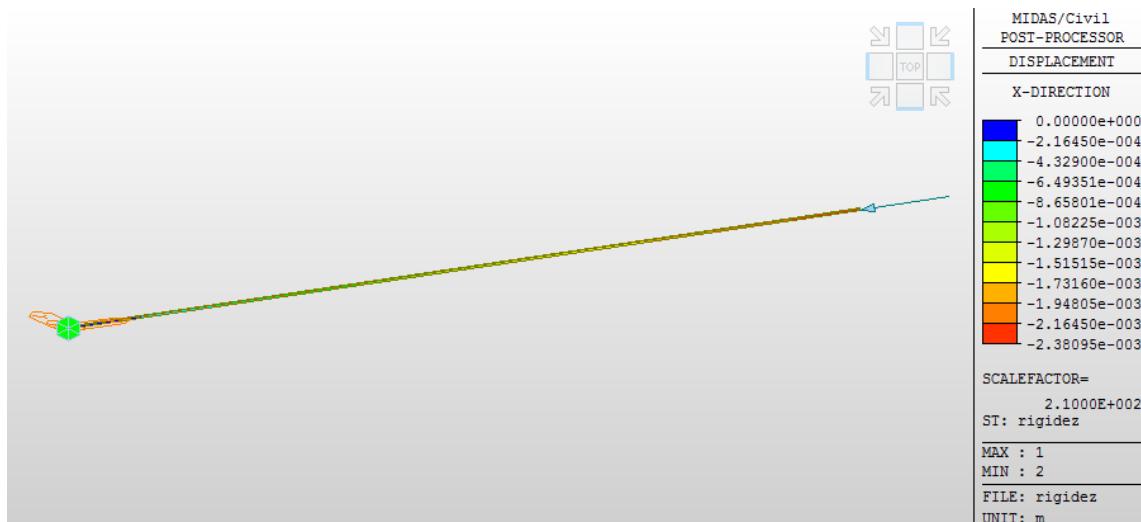


Figura 105-Modelo de ménsula bajo carga puntual.

Se realiza también el análisis modal con Midas Civil para obtener los modos de vibración. El modo de vibración 1 axial resultante se muestra en la Figura 106. Como en todos los casos anteriores, la amplitud del modo en el punto donde se estudia la rigidez, el extremo de la ménsula en este caso, se hace coincidir con el valor en el caso de la carga puntual para la comparación de las deformadas.

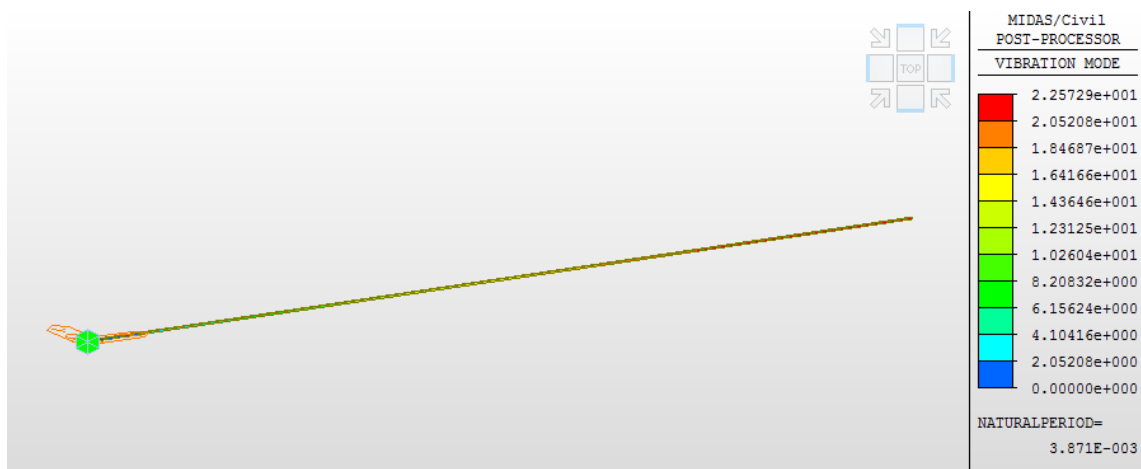


Figura 106- Deformada axial de la ménsula debida al modo 1 de vibración longitudinal.



Los resultados procedentes del Midas Civil para el caso de carga puntual, para la aproximación senoidal y para el modo de vibración axial, se comparan de manera gráfica en la Figura 107 y de manera numérica en la Figura 108.

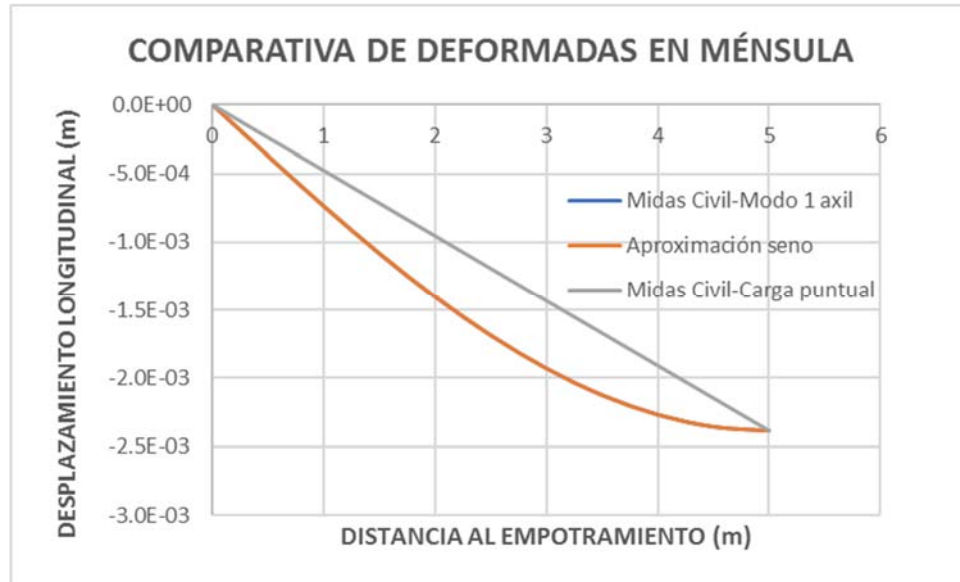


Figura 107-Comparativa entre deformadas debidas a carga puntual y al modo de vibración axial.

Distancia al empotramiento (m)	Midas Civil -Modo1 Axil (m) (1)	Aproximación seno (m) (2)	Error relativo (%) (1-2)	Midas Civil -Carga puntual (m) (3)	Error relativo (%) (1-3)
0	0.000E+00	0.000E+00	0.0%	0.000E+00	0.0%
0.5	-3.725E-04	-3.725E-04	0.8%	-2.380E-04	36.1%
1	-7.358E-04	-7.358E-04	0.4%	-4.760E-04	35.3%
1.5	-1.081E-03	-1.081E-03	0.4%	-7.140E-04	34.0%
2	-1.400E-03	-1.400E-03	3.5%	-9.520E-04	32.0%
2.5	-1.684E-03	-1.684E-03	2.2%	-1.190E-03	29.3%
3	-1.926E-03	-1.926E-03	-1.4%	-1.429E-03	25.8%
3.5	-2.121E-03	-2.121E-03	-2.3%	-1.667E-03	21.4%
4	-2.264E-03	-2.264E-03	-2.1%	-1.905E-03	15.9%
4.5	-2.352E-03	-2.352E-03	1.3%	-2.143E-03	8.9%
5	-2.381E-03	-2.381E-03	0.0%	-2.381E-03	0.0%

Figura 108- Comparativa numérica de deformadas en la ménsula para el caso de carga puntual y para el modo 1 de vibración axial.

En la Figura 107 puede apreciar que las curvas debidas al modo axial de vibración calculado con Midas Civil (curva azul) y a la aproximación senoidal mediante la ecuación (258) (curva naranja), son prácticamente coincidentes, se superponen. Por otra parte, las curvas del modo axial (curva azul) y de la carga puntual (curva gris), si bien tienen cierta similitud, presentan diferencias apreciables.

Se calcula la rigidez mediante los procedimientos simplificado y el general, expuestos en el apartado 4.1.1.1., para evaluar el error que introducen las distintas deformadas.



Método simplificado de cálculo de rigidez:

El cálculo de la rigidez en el extremo libre se obtiene a partir del análisis realizado en Midas Civil para el caso de carga puntual como la relación entra la carga aplicada y el desplazamiento del punto bajo la carga.

$$K_e = \frac{P}{f} = \frac{10}{2.381 \times 10^{-3}} = 4199.9 \frac{KN}{m} \quad (265)$$

Para este caso de la carga puntual, se dispone de la formula analítica derivada de la teoría elástica de barras. Por tanto, se calcula también la rigidez de forma teórica para su validación:

$$K_e = \frac{EA}{L} = \frac{2.1 \times 10^8 \times 0.01 \times 0.01}{5} = 4200.0 \frac{KN}{m} \quad (266)$$

Como se puede apreciar, ambos valores son muy similares. El método simplificado obtiene la rigidez del caso de carga puntual, siendo ésta de valor 4200 KN/m.

Método general de cálculo de rigidez:

Aunque el desarrollo conceptual aplicado para el método general en el presente apartado es exactamente el mismo que el aplicado en el apartado 4.1.1.1, existen dos ligeras diferencias entre ambas exposiciones. Por un lado, en este caso se aplica a una estructura que trabaja a axil en vez de a flexión. Por otro lado, en el apartado 4.1.1.1 se explicaba el método a partir de discretizar la estructura en “trozos” relativamente pequeños para ganar claridad sobre las operaciones a realizar. Para el caso de axil, sin embargo, se realizará a partir de expresiones teóricas obtenidas a base de integraciones o derivaciones. La idea que se persigue es, una vez se entendió lo que hace el método a partir de las expresiones discretas, obtener expresiones más generales en el presente apartado.

Para aplicar el método general a una estructura que trabaja a axil, primero es necesario obtener la ecuación que relaciona las fuerzas exteriores con las fuerzas elásticas. Es decir, es necesario obtener la ecuación para axil equivalente a la ecuación (257). Para obtenerla, se parte de una rebanada diferencial dx de la barra con una variación de tensiones σ , y un axil exterior $n(x)$ aplicado por unidad de longitud diferencial, como muestra la Figura 109.

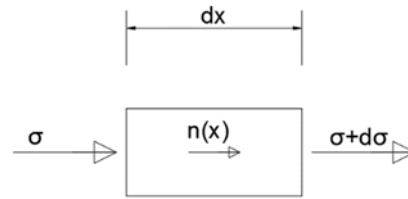


Figura 109-Rebanada diferencial de la estructura trabajando a axil.

El axil exterior $n(x)$, que actúa en la rebanada diferencial de una barra de área A y modulo de elasticidad E , se calcula por equilibrio de fuerzas:

$$A\sigma + A(\sigma + d\sigma) + n(x) = 0$$

$$\sigma = Ad\sigma = AEd\varepsilon$$

$$n(x) = -Ad\sigma = -AEd\varepsilon$$

La deformación ε de la barra se obtiene a partir de la ley de desplazamientos longitudinales $w(x)$ según la expresión:

$$\varepsilon = \frac{d(w(x))}{dx}$$

Finalmente, se obtiene la ecuación axil equivalente a la ecuación (257):

$$n(x) = -AE \frac{d^2(w(x))}{dx^2}$$

La ley de desplazamientos de la ménsula se puede aproximar de manera muy precisa, como se ha demostrado anteriormente, por la función $w(x) = f \operatorname{sen}\left(\frac{\pi x}{2L}\right)$, siendo f el desplazamiento en el extremo de la ménsula. Por tanto, la ley de axiles exteriores por unidad de longitud a partir de dicha aproximación resulta:

$$n(x) = -AE \frac{d^2\left(f \operatorname{sen}\left(\frac{\pi x}{2L}\right)\right)}{dx^2}$$

$$n(x) = AE \left(\frac{\pi}{2L}\right)^2 f \operatorname{sen}\left(\frac{\pi x}{2L}\right)$$

El axil en cada punto concreto $dn(x)$ se obtiene de multiplicar el axil por unidad de longitud por la longitud en cada punto, es decir, una longitud diferencial:

$$dn(x) = n(x)dx = AE \left(\frac{\pi}{2L}\right)^2 f \operatorname{sen}\left(\frac{\pi x}{2L}\right) dx$$

Obtenido el valor del axil en cada punto, es necesario condesar cada valor de axil en el punto del extremo libre la ménsula, punto donde se quiere conocer la rigidez, mediante el producto



del axil por el valor correspondiente de la línea de influencia. La línea de influencia $LdI(x)$ se aproxima por la propia deformación del modo. Por comodidad, se asigna el valor unidad en el extremo libre de la ménsula. La línea de influencia, por tanto, presenta la siguiente expresión:

$$LdI(x) = \text{sen}\left(\frac{\pi x}{2L}\right)$$

El axil aplicado en cada de cada punto condensado en el extremo de libre de la ménsula $dn_{eq}(x)$ resulta:

$$dn_{eq}(x) = n(x)dx LdI(x)$$

$$dn_{eq}(x) = AE \left(\frac{\pi}{2L}\right)^2 f \text{sen}^2\left(\frac{\pi x}{2L}\right) dx$$

La suma de todos los axiles condensados proporciona el valor del axil equivalente condesado en el extremo de libre de la ménsula $N_{eq}(x)$. Por tanto:

$$N_{eq}(x) = \int_0^L n(x) LdI(x) dx = \int_0^L AE \left(\frac{\pi}{2L}\right)^2 f \cos\left(\frac{\pi x}{2L}\right) \text{sen}\left(\frac{\pi x}{2L}\right) dx$$

$$N_{eq}(x) = AE \left(\frac{\pi}{2L}\right)^2 f \int_0^L \left(\text{sen}\left(\frac{\pi x}{2L}\right)\right)^2 dx$$

$$N_{eq}(x) = AE \left(\frac{\pi}{2L}\right)^2 f \left[\frac{x}{2} - \frac{L}{2\pi} \text{sen}(\pi x/L) \right]_0^L$$

$$N_{eq}(x) = AE \left(\frac{\pi}{2L}\right)^2 f \frac{L}{2} = \frac{AE\pi^2}{8L} f$$

Como la rigidez es la relación entre la fuerza equivalente aplicada en el extremo libre y el desplazamiento producido en dicho punto, la expresión de la rigidez para el modo de axil resulta:

$$K = \frac{N_{eq}(x)}{f} = \frac{\frac{AE\pi^2}{8L} f}{f}$$

$$K = \frac{AE\pi^2}{8L}$$

Nótese que, como se ha comentado anteriormente, la rigidez no depende de la amplitud del movimiento f .

Sustituyendo los valores concretos en la expresión anterior, se obtiene el valor de rigidez del modo axil en el extremo libre de la ménsula objeto de estudio:



$$K = \frac{0.01^2 \times 2.1 \times 10^8 \pi^2}{8 \times 5} = 5185.5 \left(\frac{KN}{m} \right)$$

Este valor de rigidez, calculado con el método general, es un 25% mayor que el valor obtenido a partir del método simplificado de cálculo de rigidez. Esta diferencia se explica por la diferencia de deformadas mostradas en la Figura 107.

Resumiendo lo expuesto en este apartado, se ha calculado el valor de la rigidez en el extremo libre de una ménsula para el modo fundamental, mediante el método simplificado (deformada de carga puntual) obteniendo un valor de 4200 KN/m, y mediante el método general (deformada del modo de vibración “exacta”) obteniendo un valor de 5185 KN/m.

4.1.2 Masa equivalente de un punto

La masa equivalente en un punto de una estructura se puede definir como la fuerza necesaria para que, aplicada en dicho punto, se obtenga una aceleración unitaria. Es decir, la masa equivalente se entiende de forma cualitativa como la **resistencia a la aceleración** de un punto cuando se le aplica una determinada fuerza. Esa resistencia a la aceleración es la consecuencia de la densidad del material, cantidad de material y de las condiciones de contorno de la estructura. Matemáticamente, por tanto, la aceleración se expresa como el cociente entre la fuerza aplicada en un punto y la aceleración registrada en él. Como se puede apreciar, el concepto de masa equivalente es análogo al de rigidez equivalente, salvo que la masa equivalente es el coeficiente que mide la resistencia a la aceleración en un punto, y la rigidez equivalente mide la resistencia al desplazamiento en un punto. De igual forma que en la rigidez, la masa equivalente, además de ir asociada a un punto, va asociada a una forma estructural determinada, a una deformada asociada. **La diferencia fundamental entre ambos conceptos, es que uno trabaja con fuerzas elásticas y otro con fuerzas de inercia.** Según el principio de *D'Alembert*, las fuerzas de inercia pueden ser tratadas como fuerzas elásticas, por lo que el proceso de cálculo es similar al expuesto en el caso de la rigidez equivalente. De la misma forma que en el caso de la rigidez, la fuerza que actúa sobre el punto de estudio ha de entenderse como una fuerza equivalente, ya que la fuerza real, en este caso las de inercia, están aplicadas a lo largo de la estructura y han de condensarse en el punto de estudio.

A continuación, se calcula la masa equivalente para los modos fundamentales en las mismas estructuras y para los mismos puntos de estudio en los que se calculó la rigidez equivalente.



4.1.2.1 Masa del modo fundamental para viga en el punto central.

El ejemplo de viga biapoyada es el mismo que el expuesto en los apartados 4.1.1.1 y 4.1.1.2 para el cálculo de la rigidez equivalente. Es decir, se calcula la masa equivalente para una viga metálica de 10 m de longitud y sección cuadrada de 0.1 m x 0.1 m, en el punto central de la misma.

La deformada que proporciona el modo de vibración está asociada a desplazamientos, no a aceleraciones.

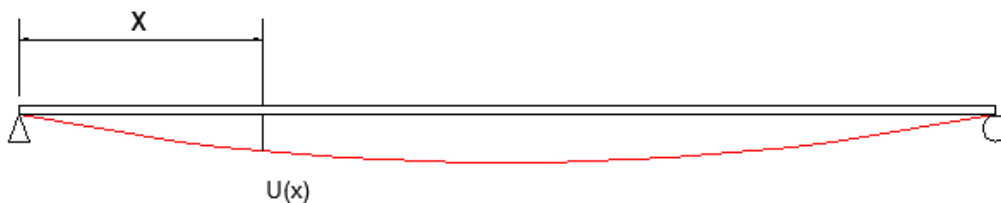


Figura 110-Campo de desplazamientos (y de aceleraciones) del modo 1 de vibración de la viga.

El campo temporal de desplazamientos ($w(x,t)$) se puede calcular siguiendo el método de separación de variables. Así, se puede expresar como una función dependiente del espacio ($U(x)$), como se muestra en la Figura 110, y otra función dependiente del tiempo ($Z(t)$). Dicho de otra manera, la deformada ($U(x)$) es modulada en amplitud respecto del tiempo por una función ($Z(t)$).

$$w(x, t) = U(x)Z(t) \quad (267)$$

A partir de la ecuación (267) se puede calcular el campo de aceleraciones (\ddot{w}) sin más que derivar dos veces con respecto al tiempo.

$$\ddot{w}(x, t) = U(x)\ddot{Z}(t) \quad (268)$$

Las ecuaciones (267) y (268) determinan que las formas del campo de aceleraciones y el campo de desplazamientos con respecto al espacio son la misma.

Método general para el cálculo de la masa equivalente

A continuación, se calcula la masa equivalente según el método general, expuesto en el apartado 4.1.1.1, salvo que en este caso con fuerzas de inercia en vez de fuerzas elásticas.



Dado que del estudio de la rigidez quedó demostrado que el campo de desplazamientos del modo 1 se puede aproximar de manera suficiente por una función seno, y éste tiene la misma forma que el campo de aceleraciones, se utiliza la misma ecuación (258) para definir el campo de aceleraciones $U(x)$. Igual que con el campo de desplazamientos para el cálculo de la rigidez, el campo de aceleraciones del modo de vibración, por unidad de longitud, puede tener amplitud cualquiera ya que no variaría el resultado final de la masa equivalente. Por comodidad, se utiliza como parámetro f de la ecuación (258) el valor $f=0.119$ m. Los valores resultantes gráfica y numéricamente del campo de aceleraciones se muestran en la Figura 111 y en la Figura 112 respectivamente:

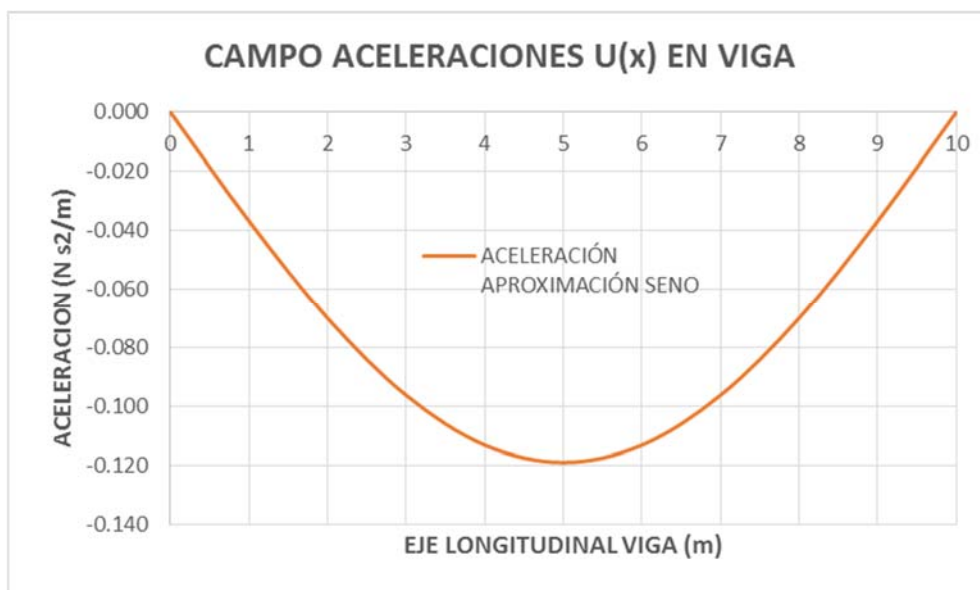


Figura 111-Representación gráfica de la función $U(x)$ campo de aceleraciones por ud. de longitud de la viga.

COORDENADA X (m)	ACELERACIÓN APROXIMACIÓN SENO (N s ² /m)
0	0.000
1	-0.037
2	-0.070
3	-0.096
4	-0.113
5	-0.119
6	-0.113
7	-0.096
8	-0.070
9	-0.037
10	0.000

Figura 112-Valores del campo de aceleraciones por unidad de longitud para el modo 1 de la viga biapoyada,



A partir de este campo de aceleraciones, si se tiene en cada punto la aceleración y la masa asociada a ese punto se puede calcular el campo de fuerzas de inercia. De la misma manera que en el caso de la rigidez equivalente, esas fuerzas han de condensarse en el punto de estudio (centro de vano) para calcular la fuerza de inercia equivalente. Análogamente a dicho caso, la condensación de las fuerzas se realiza a partir del concepto de **línea de influencia**. Para este caso en concreto, esta función se consigue con un desplazamiento unidad en el centro de luz. Esta línea de influencia se aproxima por una función seno como tal como se hizo en el caso de la rigidez. La línea de influencia resultante se muestra en la Figura 113.

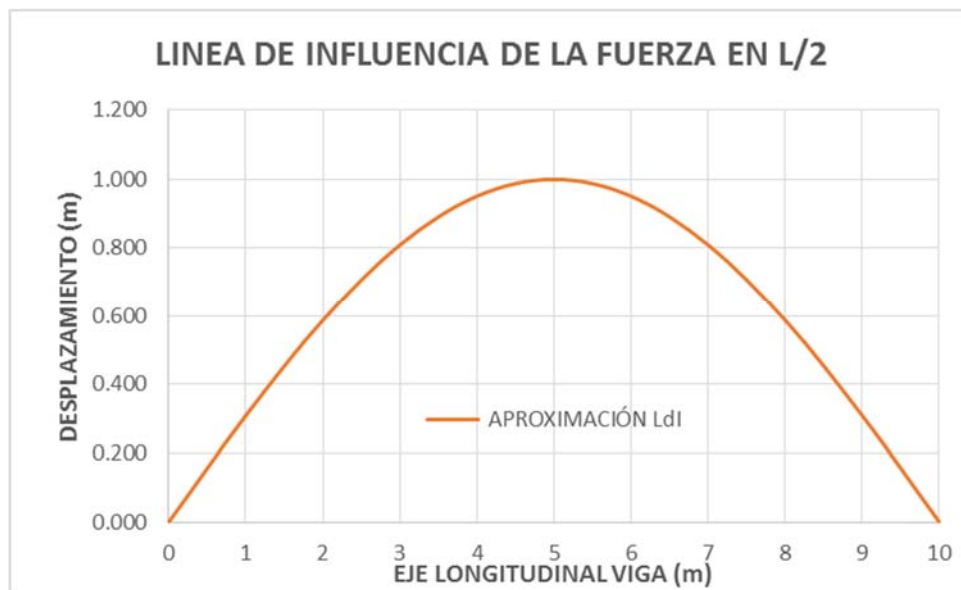


Figura 113-Aproximación de la línea de influencia por una función seno.

A partir de la aceleración en cada punto $U(x)$ y la masa de la viga en cada punto $m(x)$, se obtiene la fuerza de inercia en cada punto. Si los valores de estas fuerzas concretas se multiplican por el valor de la línea de influencia se obtiene las fuerzas condensadas o **fuerza de inercia equivalente** en el punto de estudio, es decir, el centro de vano. Para un valor de densidad de material ρ , estos parámetros se pueden obtener con las siguientes expresiones:

$$m(x) = \rho \Delta L$$

$$F. Inercia = \rho \Delta L U(x)$$

$$F. Inercia_{eq} = \rho \Delta L U(x) LdI(x)$$

En la gráfica de la Figura 114 y en la tabla de la Figura 115 se detallan los resultados de las fuerzas de inercia y las fuerzas de inercia condensadas en el punto central de la viga.

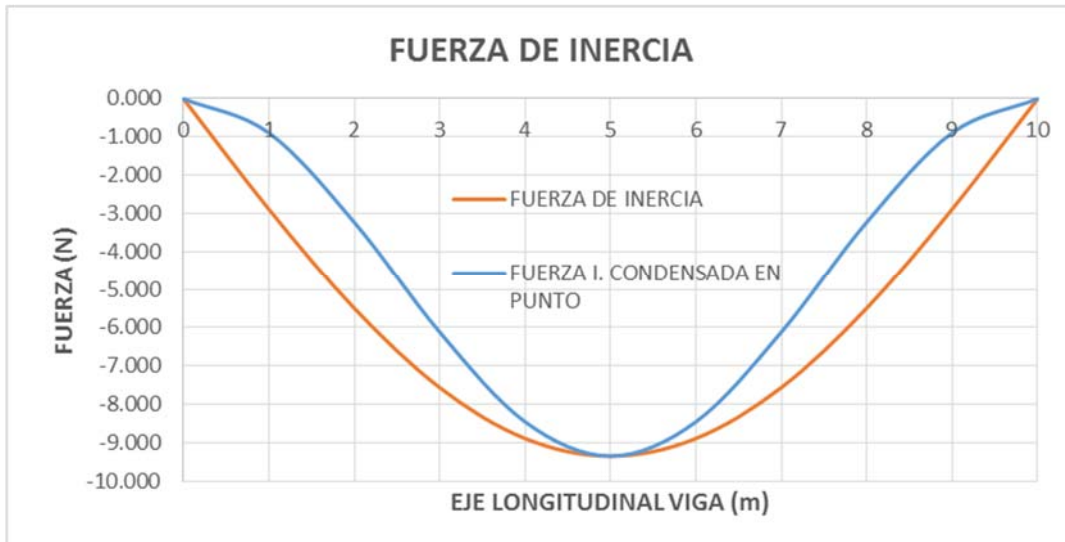


Figura 114-Comparativa de fuerza de inercia en cada punto de la viga y fuerza de inercia de cada punto condensada en el punto central.

COORDENADA X (m)	ACELERACIÓN APROXIMACIÓN SENO (N s ² /m)	MASA VIGA POR METRO (Kg/m)	FUERZA DE INERCIA (N/m)	APROXIMACIÓN LdI (m)	FUERZA I. CONDENSADA EN PUNTO (N)
0	0.000	78.5	0.000	0.000	0.00
1	-0.037	78.5	-2.889	0.309	-0.89
2	-0.070	78.5	-5.495	0.588	-3.23
3	-0.096	78.5	-7.563	0.809	-6.12
4	-0.113	78.5	-8.891	0.951	-8.46
5	-0.119	78.5	-9.348	1.000	-9.35
6	-0.113	78.5	-8.891	0.951	-8.46
7	-0.096	78.5	-7.563	0.809	-6.12
8	-0.070	78.5	-5.495	0.588	-3.23
9	-0.037	78.5	-2.889	0.309	-0.89
10	0.000	78.5	0.000	0.000	0.00

Figura 115-Cálculo de fuerzas de inercia y condensación en punto central a partir de la línea de influencia.

Una vez se tienen las fuerzas condensadas en el punto central, sumando todas ellas se obtiene la fuerza de inercia equivalente resultante. El cociente entre esta fuerza y la aceleración en el punto proporciona el valor de la masa equivalente para ese punto y ese modo de vibración. Los valores correspondientes a estas operaciones se muestran en tabla de la Figura 116.

TOTAL Fuerza de Inercia equivalente(N)	-46.74
Aceleración de L/2 (N s ² /m)	-0.119
MASA EQUIVALENTE(Kg)	392.5
MASA TOTAL VIGA (Kg)	785.0
MASA EQUIVALENTE /MASA TOTAL (KN/m)	0.50

Figura 116-Cálculo de fuerza equivalente y masas equivalente de la viga biapoyada para el modo 1.

La masa equivalente resultante para el modo fundamental de flexión de la viga en el punto central es de 392.5 kg, que es la mitad del peso total de la viga de acero. Es importante destacar el hecho que sea la mitad del peso total de la viga, dado que para cualquier viga biapoyada de sección constante la masa equivalente será la mitad del peso total.



Se tiene por tanto la masa equivalente de la viga para el punto central (392.5 Kg) y la rigidez equivalente para ese mismo punto (84.00 KN/m calculado en 4.1.1.2) del modo 1. Para comprobar si se ha cometido un error grande o pequeño se calcula el periodo de vibración de la viga como si fuera **un sistema de un grado de libertad**, pues la condensación de fuerzas (elásticas y de inercia) en un punto (el centro del vano) permite tratar la estructura precisamente como un sistema de un grado de libertad. Para ello, se comparan los periodos de vibración resultantes del sistema de un grado de libertad mediante la ecuación (269) y del análisis modal de la viga realizado con Midas Civil.

$$T(s) = 2 \pi \sqrt{\frac{M_e}{K}} = 2 \pi \sqrt{\frac{392.5}{84000}} = 0.429 \text{ s.} \quad (269)$$

El resultado del análisis modal del Midas Civil es de 0.426 segundos como se muestran en la Figura 117, por lo que queda acreditado que aproximando suficientemente la deformada, se puede calcular la masa y la rigidez equivalente en un punto para un modo determinado.

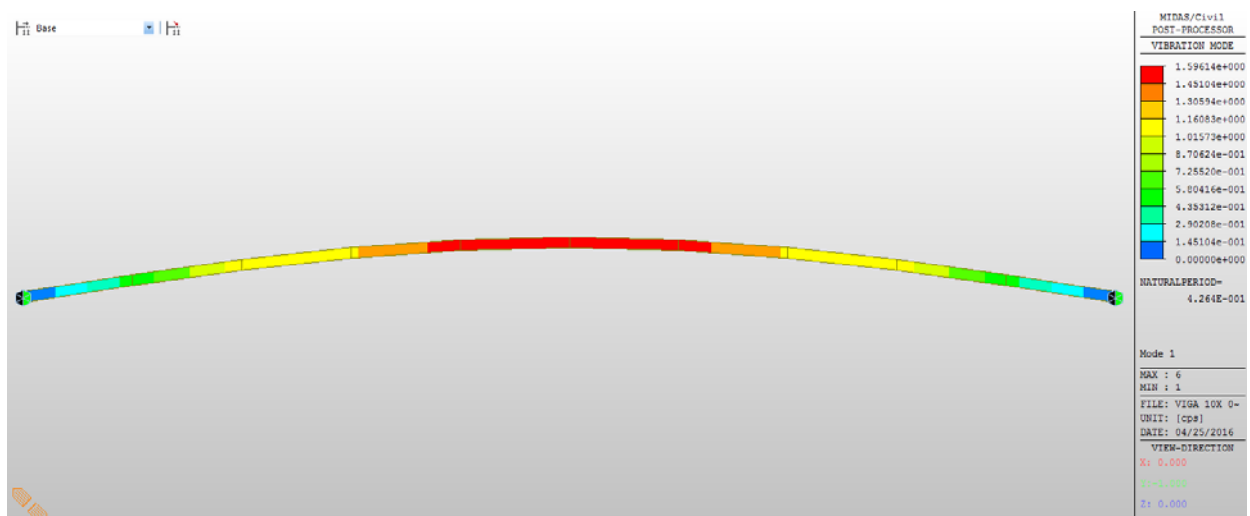


Figura 117-Modo 1 de viga de acero biapoyada de 10 m de longitud y 0.1 x 0.1 de sección. T=0.426 segundos.

Método simplificado para el cálculo de la masa equivalente

Como ha quedado demostrado con la aplicación del método general, es sencillo obtener de forma manual la masa equivalente en un punto de la estructura para un modo de vibración dado. No obstante, por rapidez de exposición y cálculo en la presente tesis, se utilizará el análisis modal que proporciona los programas de elementos finitos para obtener el valor de la masa



equivalente. Como se ha expuesto en la ecuación (269), rigidez, masa equivalente y periodo de vibración, son tres parámetros de los cuales solo dos de ellos son independientes. Por tanto, por comodidad, se utilizará el siguiente método para la obtención de la masa equivalente: conocida la rigidez equivalente en un punto K_e , se realizará un análisis modal de la estructura mediante software de elementos finitos para obtener el periodo de vibración T y, con estos dos valores, se obtendrá la masa equivalente según la expresión (270), obtenida a partir de la ecuación (269):

$$M_e(kg) = K_e \left(\frac{T}{2\pi} \right)^2 \quad (270)$$

4.1.2.2 Masa del modo fundamental de la vibración de una viga continua de dos vanos en punto medio de vano.

Se muestra en el presente apartado el cálculo de la masa equivalente en el centro de vano de la viga continua de dos vanos expuesta en el apartado 4.1.1.3. Para este caso, y dado que la masa equivalente depende de la deformada del modo, la masa equivalente en el centro vano es la misma que en el caso de la viga de un solo vano. La razón, como en el caso de la rigidez, es que los vanos se comportan como vanos independientes, es decir, como si existieran rotulas en los tres apoyos. Por lo tanto, la masa equivalente en el centro de cada vano ha de ser la misma que la obtenida en el apartado 4.1.2.1 y de valor 392.5 Kg (50% de la masa de cada vano).

No obstante, se aplicará el método simplificado para el cálculo de la masa equivalente descrito en el apartado anterior para comprobarlo. Conocida la rigidez en el centro del vano (84.00KN/m) según lo expuesto en el apartado 4.1.1.3, se calculará la masa a partir del periodo de vibración resultante del análisis modal del Midas Civil ($T=0.426$ s) del modo 1 de la viga. Este modo, y su periodo de vibración se muestran en la Figura 118.

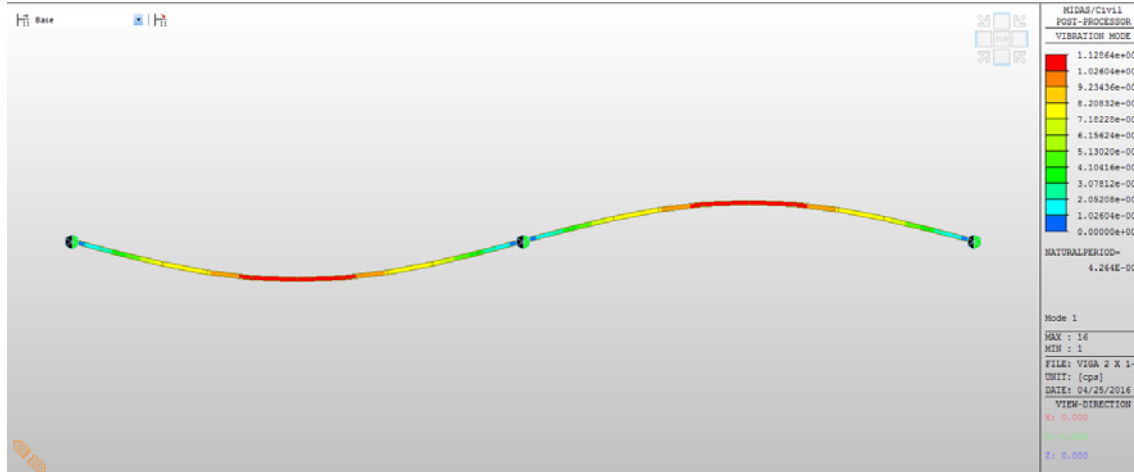


Figura 118- Modo 1 de viga de acero biapoyada de 10 m de longitud por vano de dos vanos y 0.1 x 0.1 de sección.
 $T=0.426$ segundos.

Es decir, la viga continua de dos vanos presenta el mismo valor de rigidez para el centro del vano K_e y periodo de vibración T , que la viga de un único vano. Por lo tanto, en aplicación de la ecuación (270), necesariamente la masa equivalente en el centro de vano para la viga de dos vanos ha de ser la misma que en el caso de la viga de un vano:

$$M_e(kg) = K_e \left(\frac{T}{2\pi} \right)^2 \approx 392.5 Kg \quad (271)$$

Como se ha comentado previamente, esta similitud en los valores es debida a que la deformada del modo de la viga continua de dos vanos es la suma de las deformadas de dos vigas biapoyadas independientes, la masa equivalente es la misma que en el caso de esa viga biapoyada.

4.1.2.3 Masa del modo fundamental de vibración de una viga continua de tres vanos en el punto central de vano

Se muestra en el presente apartado el cálculo de la masa equivalente en el centro de vano central de la viga continua de tres vanos expuesta en el apartado 4.1.1.4

Por los mismos motivos expuestos en el apartado anterior, se puede deducir que la masa equivalente en el centro de los vanos de la viga continua de tres vanos para el modo 1 será la misma que en los casos 4.1.2.1 y 4.1.2.2. La deformada de cada vano de la viga continua de tres vanos no ha variado respecto a dichos casos, por lo que la masa equivalente tampoco variará.



Para la aplicación del método simplificado, se calcula el modo de vibración de la viga continua de tres vanos mediante un análisis modal realizado con Midas Civil. El resultado se muestra en la Fig. Figura 119.

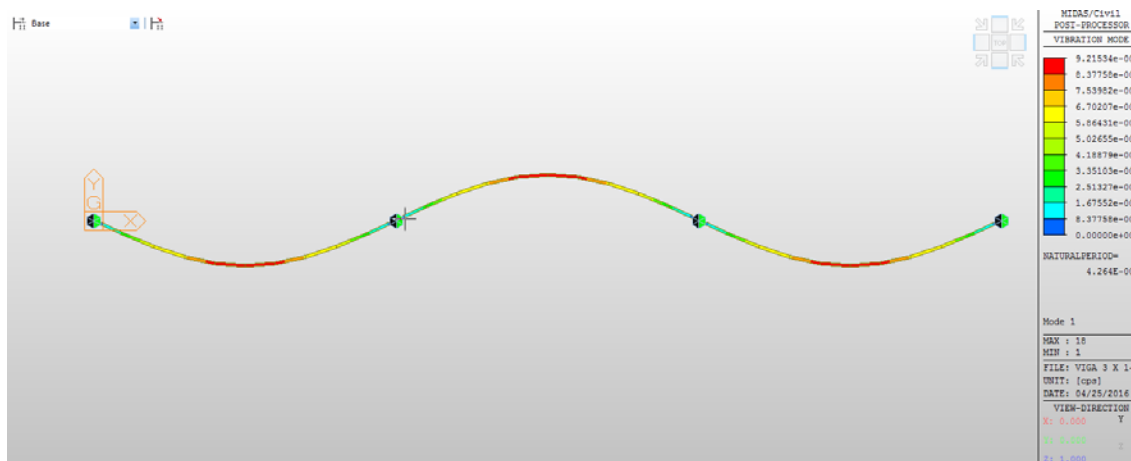


Figura 119- Modo 1 de viga de acero biapoyada de 10 m de longitud por vano de tres vanos y 0.1 x 0.1 de sección.

$$T=0.426 \text{ segundos}$$

Como se puede comprobar en la Figura 119, el modo de vibración fundamental tiene el mismo valor ($T=0.426 \text{ s}$) que en el caso de la viga de dos vanos expuesto en el apartado 4.1.2.2 y que en el caso de la viga de un vano expuesto en el caso 4.1.2.1. Además, según el apartado 4.1.1.4, la rigidez del vano central de la viga de tres vanos en el centro de luz ($K_e = 84\,000 \text{ N/m}$), también es la misma que en el caso de las vigas de uno y dos vanos, por lo que la masa equivalente en el centro de vano de los tres casos, en aplicación de la ecuación (270), ha de ser la misma:

$$M_e = K_e \left(\frac{T}{2\pi} \right)^2 \approx 392.5 \text{ kg} \quad (272)$$



4.1.2.4 Masa del modo fundamental de vibración de una placa en el punto central.

Se repite el procedimiento simplificado para calcular la masa equivalente en el centro de la placa definida en el apartado 4.1.1.5. Para dicha placa cuadrada de hormigón (densidad 2500 kg/m³) de 10 m de lado y 0.1 m de espesor apoyada en las 4 esquinas, el valor del periodo que proporciona el análisis modal del Midas Civil es de 0.8337 segundos, como muestra la Figura 120.

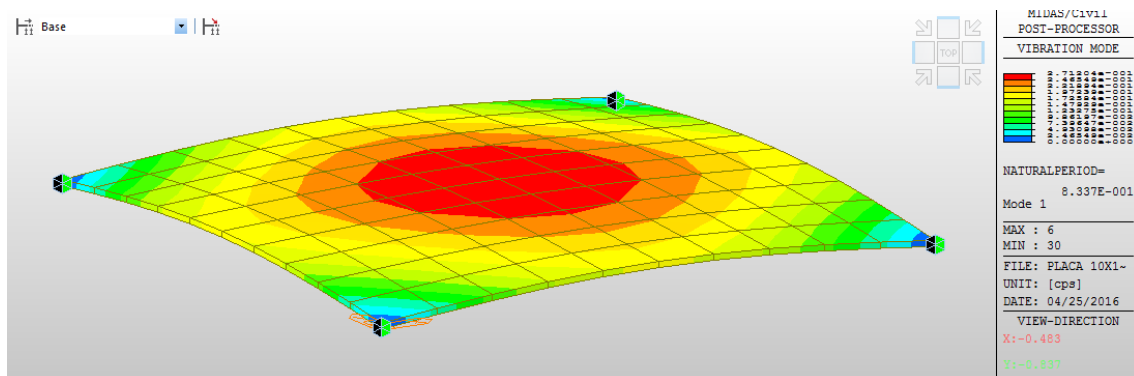


Figura 120-Modo de vibración 1 de la placa de hormigón de 10 m x 10 m x 0.1 m. T=0.834 segundos

Conocido el periodo de vibración y la rigidez del modo en el centro de la placa según lo expuesto en 4.1.1.5, se aplica la ecuación (270) para la obtención de la masa equivalente en el centro de la placa:

$$T=0.8337 \text{ s}$$

$$K_e = 7.099 \times 10^5 \text{ N/m}$$

$$M_{TOTAL} = 10 \times 10 \times 0.1 \times 2500 = 25 \text{ 000 kg}$$

$$M_e = K_e \left(\frac{T}{2\pi} \right)^2 = 709 \text{ 900} \cdot \left(\frac{0.8337}{2\pi} \right)^2 = 12498 \text{ kg (50\% } M_{TOTAL}) \quad (273)$$

La masa equivalente en la placa resulta de 12 498 kg, es decir un 50% de la masa total de la placa. En el apartado 4.1.1.5 se demostró que el comportamiento estructural de la placa objeto de estudio, se asemejaba a dos vigas cruzadas apoyada en los mismos soportes que la placa. Como se ha expuesto en el apartado 4.1.2.1, la masa equivalente de una viga en el centro de luz es el 50 % la masa total, por lo que, si la placa se comporta como dos vigas, es lógico pensar que la masa equivalente de la placa en el punto central es el 50% de la masa total de la placa.



4.1.2.5 Masa del modo de vibración axial para ménsula en el extremo libre.

Por último en lo referente a la masa equivalente, en este apartado se procede a calcular dicha masa para el extremo libre para el caso de la ménsula estudiada en el punto 4.1.1.6 en el modo de vibración axial. Las dimensiones de la estructura son 10 m de longitud y 0.01 m x 0.01 m de sección. La ménsula es de acero con un $E=2.1 \times 10^8 \text{ KN/ m}^2$ y una densidad de 7850 Kg/ m^3 .

Se realiza un análisis modal mediante midas Civil para determinar el periodo de vibración del modo axial cuyo resultado es 0.003871 segundos. El modo 1 de vibración axial de la ménsula y su periodo de vibración se muestran en la Figura 121.

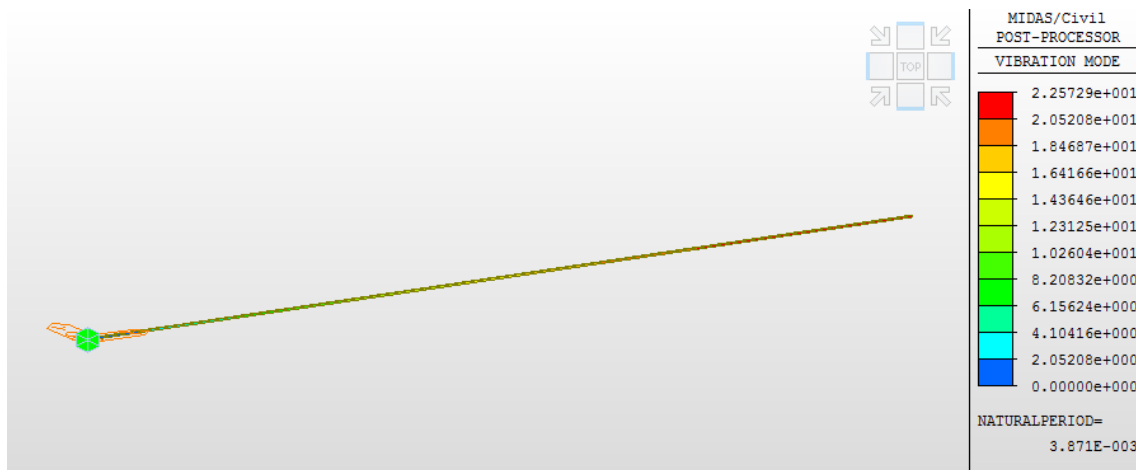


Figura 121-Periodo natural de vibración del modo axial de la ménsula. $T=0.00387$ segundos

La masa total de la estructura resulta;

$$M_{TOTAL} = 5 \times 0.01 \times 0.01 \times 7850 = 3.925 \text{ kg}$$

Para el cálculo de la masa equivalente de la estructura se utiliza el método simplificado basado en el periodo de vibración según la ecuación 270.

Si se utiliza para los cálculos el valor de la rigidez calculada en el punto 4.1.1.6 según el método general $K_e = 5185.5 \text{ KN/m}$, el valor de la masa equivalente resulta:

$$M_e = K_e \left(\frac{T}{2\pi} \right)^2 = 5185.500 \left(\frac{0.003871}{2\pi} \right)^2 = 1.968 \text{ kg} \quad (50\%M_{TOTAL}) \quad (274)$$

La masa equivalente del extremo libre para el modo de vibración axial de la ménsula resulta de 1.968 Kg, es decir, aproximadamente un 50% de la total. Es decir, dado que las deformaciones de los modos fundamentales de vigas de distintos vanos, placa y ménsula se aproximan a una



función senoidal, y es precisamente la deformada la que define la masa equivalente, todos los casos presentan una masa equivalente del 50%.

Si se utiliza para los cálculos el valor de la rigidez calculada en el punto 4.1.1.6 según el método simplificado $K_e = 4200 \text{ KN/m}$, el valor de la masa equivalente resulta:

$$M_e = K_e \left(\frac{T}{2\pi} \right)^2 = 4\,200\,000 \left(\frac{0.003871}{2\pi} \right)^2 = 1.594 \text{ kg} \quad (40\% M_{TOTAL})$$

Es decir, si se toma la deformada exacta del modo, la masa equivalente resulta el 50% de la masa total de la estructura, mientras que, si se toma la aproximación por la deformada de la carga puntual, la masa equivalente resulta un 40% de la masa total.



- Desarrollo de teoría sobre impactos -
- Método simplificado de cálculo de impactos en estructuras -





4.1.3 Aplicación al modo fundamental de vibración

En los apartados 4.1.1 y 4.1.2 se han calculado, respectivamente, la rigidez y la masa equivalente de puntos concretos para los modos fundamentales en distintas estructuras.

Para comprobar que estos parámetros reproducen el comportamiento dinámico de manera rigurosa en cada estructura analizada anteriormente, éstas se someten a cargas dinámicas no impulsivas, es decir, cargas dinámicas distintas de impactos.

Se entenderá en los apartados sucesivos como método simplificado cuando en las formulaciones clásicas (ecuaciones (275) y (276)) para un sistema de muelle y masa de un grado de libertad, se utilicen los parámetros obtenidos según lo expuesto en los apartados 4.1.1 y 4.1.2. El resultado de los desplazamientos de las estructuras bajo las cargas aplicadas obtenidas según este método, será comparado con los resultados del análisis dinámico realizado con Midas Civil.

A modo de recordatorio, se indican a continuación las soluciones clásicas para obtener el desplazamiento estructural ($d_e(t)$) en sistemas de un grado de libertad. Se utilizarán las soluciones en dos casos distintos de cargas dinámicas, carga constante y carga cíclica.

Carga constante en el tiempo "P":

$$d_e(t) = \frac{P}{K} (1 - \cos(w_e t)) \quad (275)$$

Carga cíclica "F sen (Ωt)":

$$d_e(t) = \frac{F}{M_e} \left(\frac{\text{sen}(\Omega t)}{(w_e)^2 - (\Omega)^2} - \frac{\Omega}{w_e} \frac{\text{sen}(w_e t)}{(w_e)^2 - (\Omega)^2} \right) \quad (276)$$

4.1.3.1 Vibración del modo fundamental de viga sometida a carga centrada constante.

Con el objeto de poder comparar de manera más rigurosa los resultados entre el sistema de un grado de libertad aplicando el método simplificado y el Midas Civil, se emplea en dicho programa un único modo de vibración, el fundamental, en el análisis modal. La carga aplicada es de 10 KN en el centro de vano y no se considera amortiguamiento. La carga se aplica durante 1 segundo. El intervalo de integración utilizado es de 0.001 segundos. En la Figura 122 se muestra una imagen del modelo de Midas Civil.

Las características de la viga son las descritas en el apartado 4.1.1.2. del presente documento.

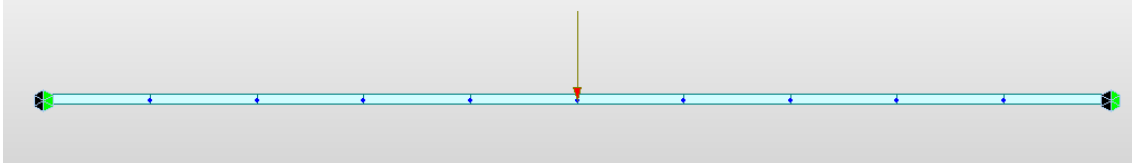


Figura 122-Caso de fuerza constante centrada sobre viga calculada con Midas Civil con un único modo de vibración.

Los valores rigidez y frecuencia necesarios para la aplicación de la ecuación (275) se obtienen de los calculados previamente según el método simplificado en los apartados 4.1.1.2 y 4.1.2.1 respectivamente, resultando:

$$P=10 \text{ KN}$$

$$K_e=84.40 \text{ KN/m}$$

$$w_e=2\pi/T= 2\pi/0.429= 14.65 \text{ (rad/seg)}$$

Los resultados del desplazamiento del punto central de la viga ($d_e(t)$) durante el primer segundo de aplicación de la carga, tanto para el sistema de un grado de libertad como para el programa Midas Civil, se muestran en la Figura 123:



Figura 123-Desplazamiento del centro de luz para carga contante de 10 KN aplicada en centro de luz, mediante Midas Civil y mediante método simplificado.

Como se puede apreciar en la Figura 123, los resultados son prácticamente coincidentes. En este caso, se puede comprobar en los apartados correspondientes, la deformada utilizada para la obtención de los parámetros según el método simplificado son muy próximas a las exactas. Esta es la razón por la cual los resultados entre ambos cálculos son tan próximos.



4.1.3.2 Vibración del modo fundamental de viga sometida a carga centrada cíclica.

Los parámetros del método simplificado se han obtenido para una carga puntual estática y centrada. El caso anterior era, en realidad, el mismo caso, pero en situación dinámica. **Para verificar el carácter general del método simplificado, se estudia adicionalmente los resultados ofrecidos por dicho método ante una carga cíclica de frecuencia de 10 Hz en la misma viga del apartado anterior (4.1.3.1).**

Con objeto de comparar de manera más rigurosa los resultados entre el sistema de un grado de libertad y el Midas Civil, se emplea en dicho programa un único modo de vibración, el fundamental, en el análisis modal.

El punto de estudio de la viga es el centro de luz. La carga se aplica durante 1 segundo. El intervalo de integración utilizado es de 0.001 segundos. El amortiguamiento de la estructura es nulo. En la Figura 124 se muestra una imagen del modelo de Midas Civil.

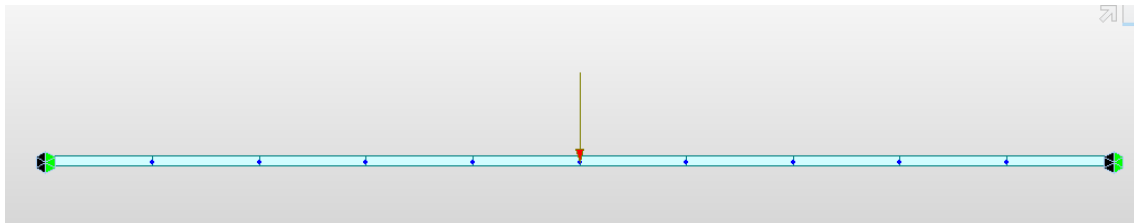


Figura 124-Caso de fuerza cíclica de 10 Hz y 10 kN centrada sobre viga calculada con Midas Civil con un único modo de vibración.

Los valores rigidez, masa y frecuencia necesarios para la aplicación de la ecuación (276) se han obtenido en los apartados anteriores según el método simplificado, resultando:

$$P=10 \text{ KN}$$

$$\Omega=10 \cdot 2\pi=62.832 \text{ (rad/s)}$$

$$K_e=84.00 \text{ KN/m}$$

$$M_e=0.3925 \text{ Ton.}$$

$$w_e=2\pi/T=2\pi/0.429=14.65 \text{ (rad/seg)}$$

Los resultados del desplazamiento del punto central de la viga ($d_e(t)$), en ambos casos, durante el primer segundo de aplicación de la carga se muestran en la Figura 125:



Figura 125- Desplazamiento del centro de luz para carga cíclica de 10 kN y de 10 Hz aplicada en centro de luz, mediante Midas Civil y mediante método simplificado

Como se puede apreciar en la Figura 125, los resultados también en este caso muy próximos, prácticamente coincidentes. A la vista de los resultados en los casos de carga constante y carga cíclica, se puede concluir que, independientemente del tipo o magnitud de la carga, si los parámetros de rigidez y masa equivalente son determinados **a partir de una deformada exacta, los resultados son exactos**. En caso de utilizar una función de aproximación para describir la deformada, los resultados serán tan aproximados como lo haya sido la deformada utilizada.

4.1.3.3 Vibración del modo fundamental de viga continua de dos vanos sometida a carga centrada constante.

Se comprueba a continuación si el sistema de un grado de libertad, con los parámetros obtenidos según el método simplificado, modela adecuadamente la respuesta dinámica de la viga continua de dos vanos. La viga de dos vanos es la descrita en el punto 4.1.1.3.

Como en todos los casos que con el método simplificado se analice un único modo de vibración, para poder comparar de manera más rigurosa los resultados entre el sistema de un grado de



libertad y el Midas Civil, se emplea en dicho programa un único modo de vibración en el análisis modal. Los puntos de estudio de la viga para la comparación con el método simplificado son los centros de luz. La carga se aplica durante 1 segundo. El amortiguamiento de la estructura es nulo. El intervalo de integración utilizado es de 0.001 segundos. En la Figura 126 se muestra una imagen del modelo de Midas Civil.

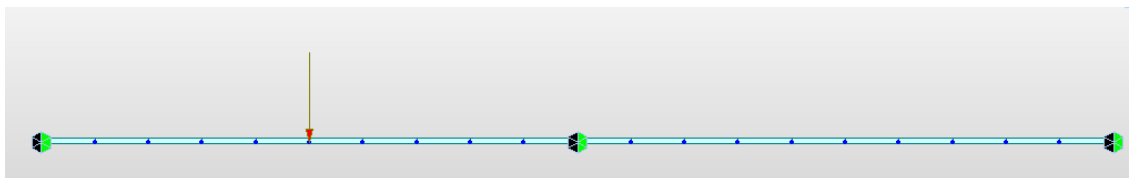


Figura 126-Caso de fuerza constante de 10 KN centrada en el vano izquierdo sobre viga continua de 2 vanos calculada con Midas Civil con un único modo de vibración.

El método simplificado, en este caso, no se puede aplicar directamente. En los casos anteriores la fuerza exterior estaba aplicada en el punto de estudio y por lo tanto no hacía falta condensarla, pero no es así en este caso. Como se ha explicado, el modo de vibración fundamental para una viga de dos vanos se comporta como si cada vano fuera independiente del otro. Para que esto suceda, **cada vano tiene que tener su fuerza exterior aplicada**. La rigidez del centro de luz de cada vano fue calculada en el apartado 4.1.1.3 a partir de dos fuerzas iguales y contrarias en los centros de cada vano, como muestra la Figura 127.

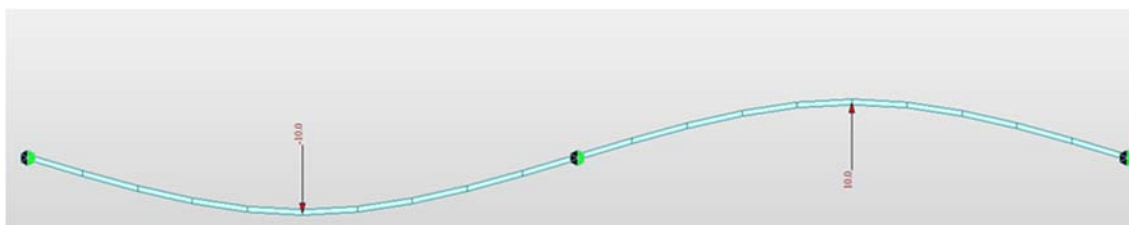


Figura 127-Modelo para el cálculo de la rigidez equivalente en viga de dos vanos.

En el caso que se analiza en este apartado, la fuerza exterior solo está aplicada en el centro del vano izquierdo y no está aplicada en uno de los puntos de estudio, el centro del vano derecho. Por este motivo, **esta fuerza exterior ha de condensarse en dicho punto**. Explicado de manera cualitativa, parte de la fuerza que se aplica en el vano izquierdo encargada de excitar el modo de vibración, se “gasta” en levantar el vano derecho. Condensar fuerzas, ya sean exteriores, elásticas o inerciales como lo realizado en apartado anteriores, se puede hacer mediante el concepto de línea de influencia. La línea de influencia, en este caso, para la fuerza en el centro del vano izquierdo, es un desplazamiento unitario de la deformada del modo en el centro de luz del vano izquierdo. La línea de influencia resultante se muestra gráficamente en la Figura 128.

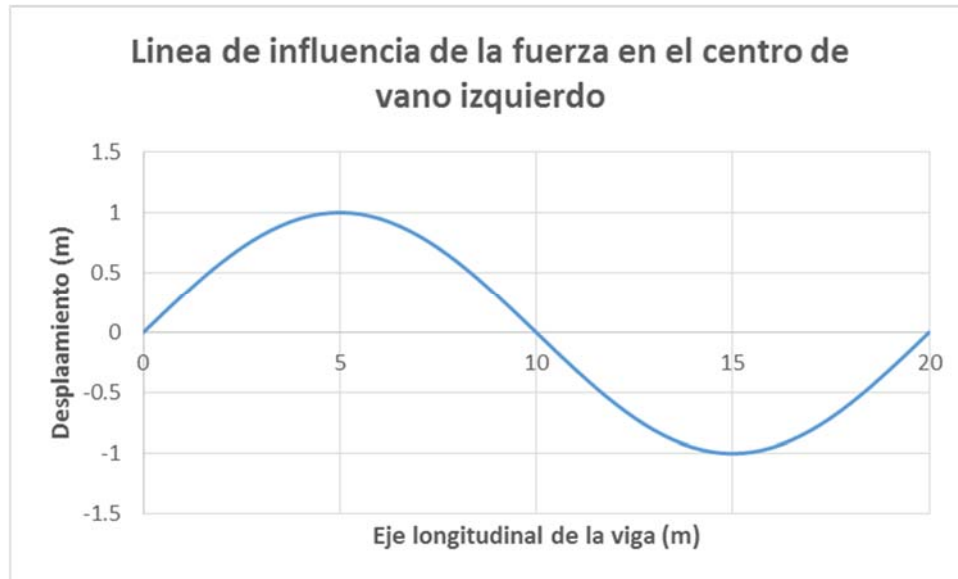


Figura 128-Línea de influencia de la fuerza en el centro del vano izquierdo para viga de dos vanos.

La línea de influencia para la fuerza en el centro de luz del vano derecho es la misma que la mostrada en la Figura 128 pero multiplicada por (-1). El hecho de que los dos centros de vano obtengan el valor de 1, con su signo correspondiente, en la línea de influencia, define que la fuerza dispuesta en el centro del vano izquierdo computa al -100% en el centro del vano derecho y al 100% en el centro del vano izquierdo. Como la fuerza exterior no puede duplicarse, esta se puede considerar como dividida en dos mitades dispuestas a la vez en el centro del vano izquierdo. Se puede suponer que una de las mitades computa al 100% sobre el vano izquierdo y la otra mitad computa al -100% sobre el vano derecho como se muestra la Figura 129. Ambos sistemas son equivalentes.

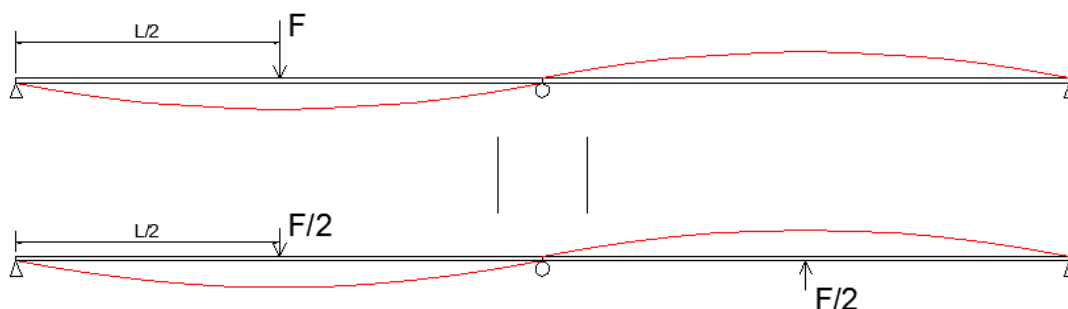


Figura 129-Condensación de fuerza exterior a partir de la línea de influencia en viga de dos vanos.

La forma de calcular numéricamente la condensación de la fuerza se muestra a continuación. Si se denomina F_{eq} a la fuerza que actúa en el centro de cada vano, y F_{TOTAL} a la fuerza exterior realmente aplicada, resulta:



$$F_{TOTAL} = F_{eq} \times 1 + (-F_{eq}) \times (-1) \quad (277)$$

$$F_{TOTAL} = 2F_{eq} \quad (278)$$

$$F_{eq} = F_{TOTAL}/2 \quad (279)$$

Dicho de otra manera, **cuando aplico una fuerza en el centro del vano izquierdo de la viga continua de dos vanos, la mitad de la fuerza se “gasta” en bajar el vano izquierdo y la otra mitad se “gasta” en levantar el vano derecho.** De esta forma sencilla se puede calcular la fuerza equivalente en cada centro de vano que, como se había indicado, es la mitad de la fuerza exterior.

A partir de esta consideración, para la utilización del sistema de un grado de libertad en vigas de varios vanos es necesario la aplicación de un nuevo coeficiente que tenga en cuenta la condensación de la fuerza exterior. Por este motivo, la ecuación (275), se completa con un coeficiente que se ha llamado $C_k(P)$ (coeficiente de rigidez en función de la fuerza exterior P).

$$d_e(t) = \frac{P}{K C_k(P)} (1 - \cos(w_e t)) \quad (280)$$

No se ha llamado coeficiente de fuerza, si no de rigidez, porque decir que la fuerza efectiva es la mitad, es equivalente a decir que la rigidez del punto donde esta aplicada la fuerza es el doble ($F_{eq} = F_{TOTAL}/2 \rightarrow C_k(P) = 2$). De esta forma, se puede hablar de una rigidez equivalente, como describe la ecuación (281). La rigidez equivalente es el producto de la rigidez del punto por el coeficiente $C_k(P)$.

$$K_{eq} = C_k(P) K \quad (281)$$

Sustituyendo la ecuación (281) en la ecuación (280), la ecuación (275) se transforma finalmente:

$$d_e(t) = \frac{P}{K_{eq}} (1 - \cos(w_e t)) \quad (282)$$

Se aplica la ecuación con (282) con los parámetros de rigidez y frecuencia obtenidos según el método simplificado en los apartados 4.1.1.3 y 4.1.2.2, y con el coeficiente $C_k(P)$ calculado en este apartado.

$$P=10 \text{ KN}$$

$$K_e=84.000 \text{ KN/m}$$

$$C_k(P)=2$$



$$K_{eq} = 2 \times 84.00 = 168.0 \text{ KN/m}$$

$$w_e = 2\pi/T = 2\pi/0.429 = 14.65 \text{ (rad/seg)}$$

Los resultados del desplazamiento del punto central de la viga $d_e(t)$ en el centro de luz del vano izquierdo para el sistema de un grado de libertad y el Midas Civil, durante el primer segundo de aplicación de la carga, se muestran en la Figura 130:



Figura 130-Registro desplazamiento del centro de luz del vano izquierdo-tiempo para un modo de vibración calculado con Midas Civil y con el método simplificado.

Como se puede apreciar Figura 130, los resultados para la viga de dos vanos calculados con la ecuación (282) y con el Midas Civil son prácticamente coincidentes.

4.1.3.4 Vibración del modo fundamental de viga continua de tres vanos sometida a carga centrada constante.

Se comprueba a continuación si el sistema de un grado de libertad, con los parámetros obtenidos según el método simplificado, modela adecuadamente la respuesta dinámica de la viga de tres vanos para completar la casuística de las vigas analizadas. La viga de tres vanos presenta las mismas características que la descrita en el punto 4.1.1.4.



Como en todos los casos que con el método simplificado se analice un único modo de vibración, para poder comparar de manera más rigurosa los resultados entre el sistema de un grado de libertad y el Midas Civil, se emplea en dicho programa un único modo de vibración en el análisis modal.

El punto de estudio de la viga es el centro de luz del vano central para la comparación con el método simplificado. La carga se aplica durante 1 segundo. El intervalo de integración utilizado es de 0.001 segundos. El amortiguamiento de la estructura es nulo. En la Figura 131 se muestra una imagen del modelo de Midas Civil.

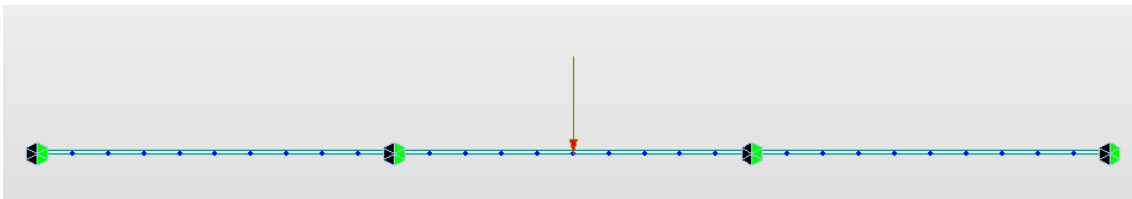


Figura 131- Caso de fuerza constante de 10 KN centrada en el vano central sobre viga continua de 3 vanos calculada con Midas Civil con un único modo de vibración.

Análogamente a lo expuesto en el caso de viga continua de dos vanos del apartado anterior, para la aplicación de la fórmula (282) es necesario calcular el coeficiente de rigidez dependiente de la carga $C_k(P)$. Como en dicho caso, es necesario usar el concepto de línea de influencia de la fuerza en el punto central del vano central para condensar la fuerza exterior. La razón es que ésta sólo está aplicada en el centro del vano central, siendo nula en los centros de los vanos extremos. En la Figura 132 se puede observar dicha línea de influencia.

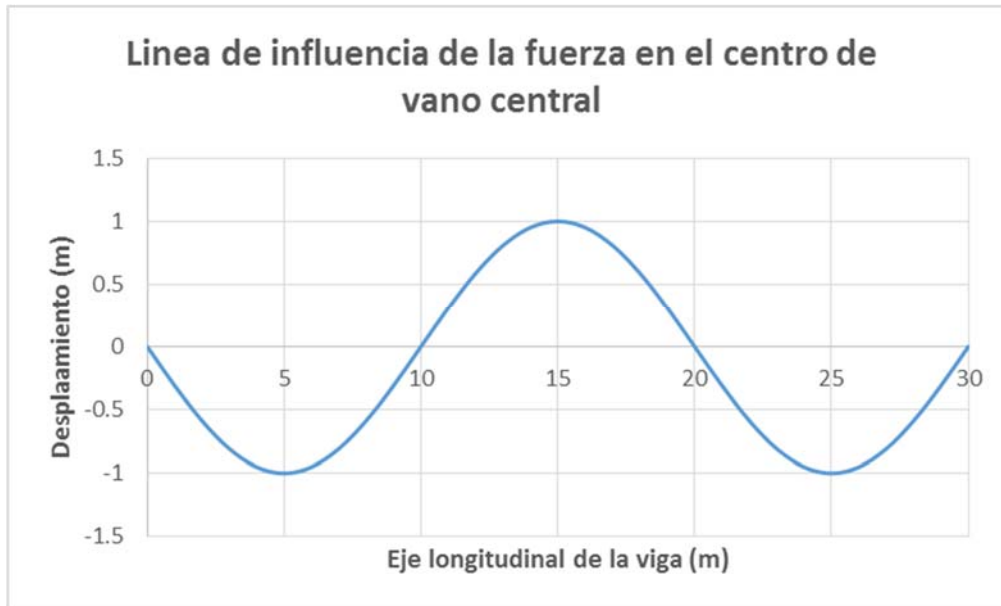


Figura 132- Condensación de fuerza exterior a partir de la línea de influencia en viga de tres vanos.

De manera semejante a lo expuesto en el apartado anterior, se necesita poner la misma “cantidad” de fuerza en cada vano para obtener un sistema de fuerza equivalente como se ilustra en la Figura 133.

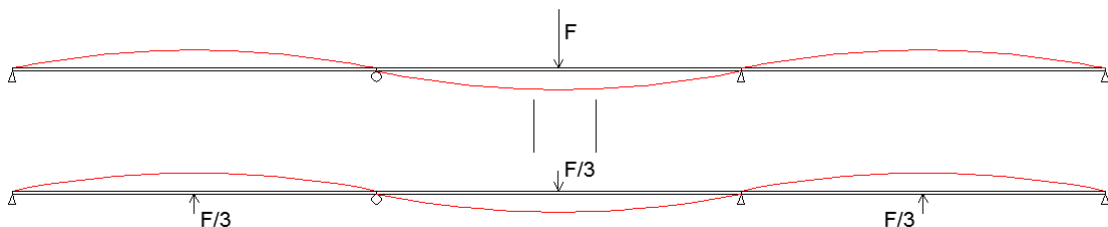


Figura 133- Sistemas equivalentes de distribución de fuerzas para el caso de tres vanos.

A partir de este esquema, se calcula el coeficiente de rigidez $C_k (P)$ para este caso:

$$F_{TOTAL} = (-F_{eq})x(-1) + F_{eq} x 1 + (-F_{eq}) x(-1) \quad (283)$$

$$F_{TOTAL} = 3F_{eq} \quad (284)$$

$$F_{eq} = \frac{F_{TOTAL}}{3} \rightarrow C_k (P) = 3 \quad (285)$$

De nuevo, la explicación cualitativa es que la fuerza central “gasta” **2/3 de su valor en levantar cada vano adyacente.**



Los parámetros de rigidez y frecuencia calculados en los apartados 4.1.1.4 y 4.1.2.3, y el coeficiente de rigidez calculado en este apartado para la aplicación del método simplificado mediante la ecuación (282), son:

$$P=10 \text{ KN}$$

$$K_e=84.00 \text{ KN/m}$$

$$C_k (P)=3$$

$$K_{eq}= 3 \times 85.23 = 255.69 \text{ KN/m}$$

$$w_e=2\pi/T= 2\pi/0.429= 14.65 \text{ (rad/seg)}$$

Los resultados de desplazamiento del punto central del vano central en la viga $d_e(t)$ para el sistema de un grado de libertad y el Midas Civil durante el primer segundo de aplicación de la carga, se muestran en la Figura 134:

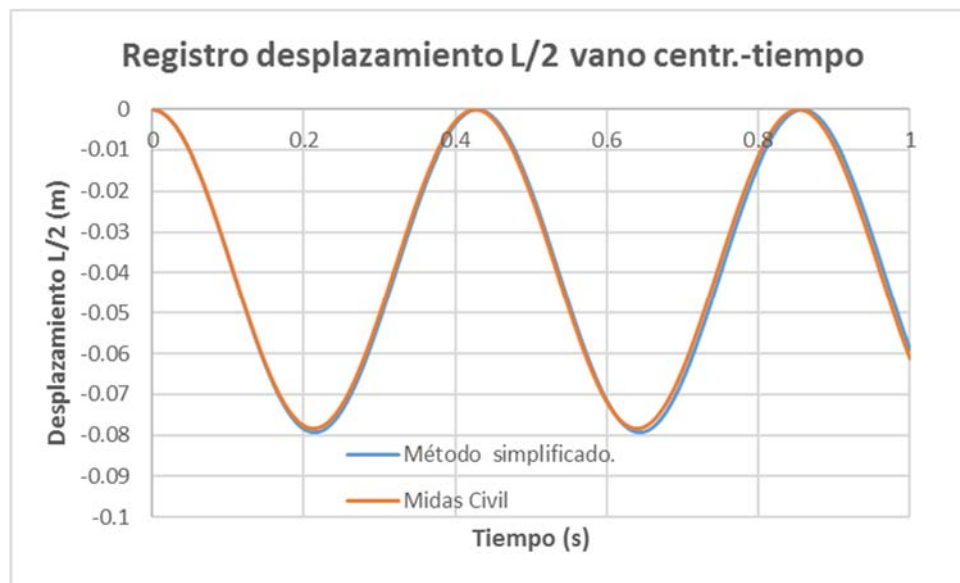


Figura 134- Registro desplazamiento del centro de luz del vano central-tiempo para un modo de vibración calculado con Midas Civil y con el método simplificado.

De nuevo, los resultados entre Midas Civil y el método simplificado son muy próximos, consecuencia de que las deformadas exacta y aproximada eran muy similares. Tras los casos analizados de vigas continua de 2 vanos y viga continua de 3 vanos, se concluye que el cálculo del parámetro $C_k (P)$ es realmente sencillo a partir del concepto de línea de influencia para este tipo de estructuras. En el caso de la viga de un solo vano, toda la fuerza se “gasta” en ese vano y por eso se puede decir que $C_k (P)$ toma el valor de 1. Para sección constante y vanos de igual



longitud, $C_k (P)$ toma el valor del número de vanos de la viga. Este coeficiente será utilizado en la formulación desarrollada para impactos.

4.1.3.5 Vibración del modo fundamental de placa sometida a carga centrada constante.

Se comprueba en este apartado si el sistema de un grado de libertad, con los parámetros obtenidos según el método simplificado, modela adecuadamente la respuesta dinámica de la placa de hormigón cuyas características han sido descritas en el apartado 4.1.1.5.

También en este caso referido al modo fundamental de la placa, para poder comparar de manera más rigurosa los resultados entre el sistema de un grado de libertad y el Midas Civil, se emplea en dicho programa un único modo de vibración en el análisis modal.

El punto de estudio de la placa es el centro de la misma para comparación con el sistema de un grado de libertad. La carga dinámica de 100KN se aplica durante 1 segundo. El intervalo de integración utilizado es de 0.001 segundos. El amortiguamiento de la estructura es nulo. En la Figura 135 se muestra una imagen del modelo de Midas Civil.

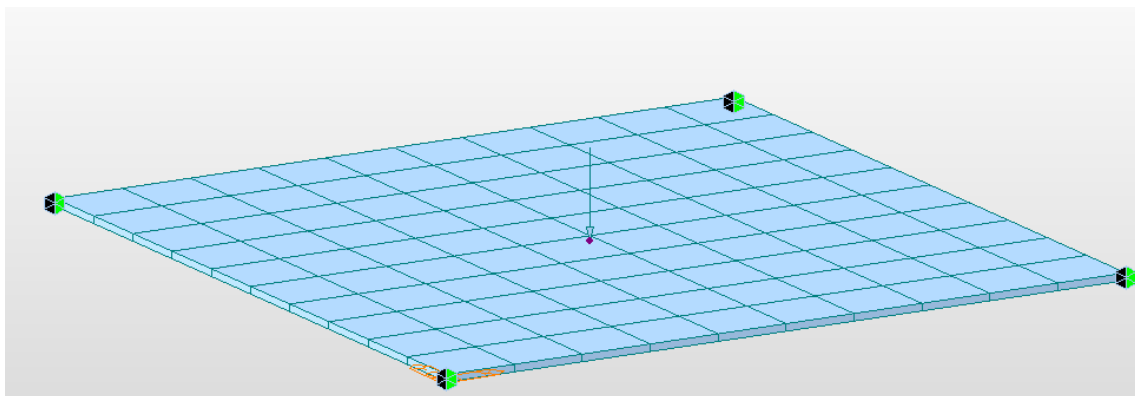


Figura 135- Caso de fuerza constante de 100 KN centrada sobre placa de 10 x 10 x 0.1 en hormigón calculada con Midas Civil con un único modo de vibración.

Los parámetros de rigidez y frecuencia calculados en los apartados 4.1.1.5 y 4.1.2.4 para la aplicación del método simplificado de mediante la ecuación (282) son:

$$P=100 \text{ KN}$$

$$K_e=709.89\text{KN/m}$$



$C_k (P)=1$ (Si solo hay un vano que deformar el 100% de la fuerza se gasta en él)

$$K_{eq} = 1 \times 709.89 = 709.89 \text{ KN m}$$

$$w_e = 2\pi/T = 2\pi/0.8337 = 7.5365 \text{ (rad/seg)}$$

Los resultados de desplazamiento del punto central de la placa $d_e(t)$ para el sistema de un grado de libertad calculado con el método simplificado y el Midas Civil durante el primer segundo de aplicación de la carga, se muestran en la Figura 136:

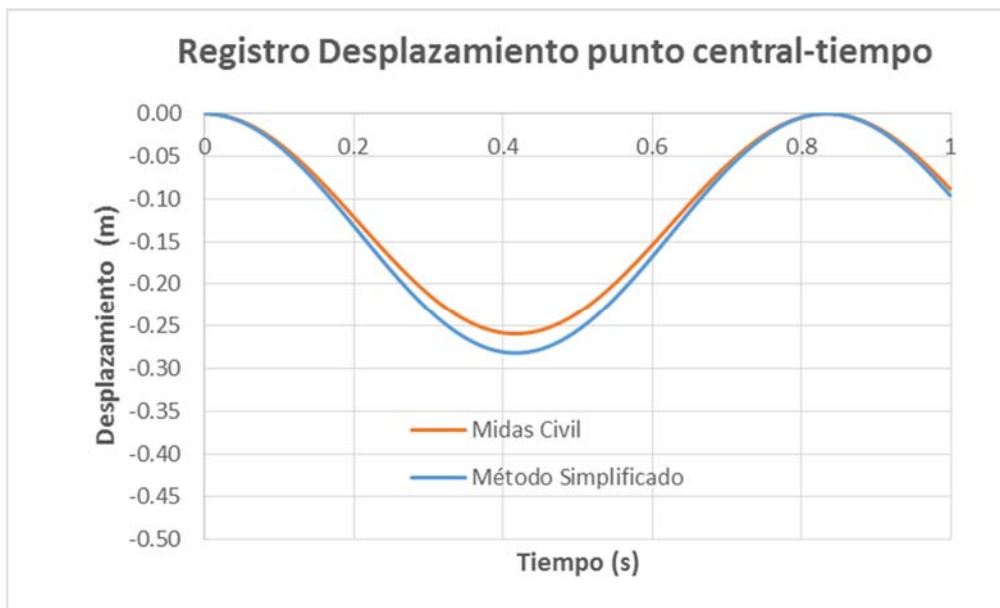


Figura 136- Registro desplazamiento del centro de la placa -tiempo para un modo de vibración calculado con Midas Civil y con el método simplificado.

Como era de esperar, el hecho de que las deformadas de partida utilizadas para calcular la rigidez (4.1.1.5) y la masa equivalente (4.1.2.4) tuvieran ligeras diferencias con la deformada del modo de vibración, provoca un ligero error entre las curvas de la Figura 136. La máxima diferencia en desplazamientos entre el sistema de un grado de libertad calculado con el método simplificado y los resultados de Midas Civil está en el 8% aproximadamente. Se podría afinar el cálculo sin más que mejorar la aproximación en las deformadas de origen, pero dado el carácter simplificador del estudio se asume este error como dentro lo admisible. Los parámetros de rigidez y masa equivalente obtenidos para esta placa serán utilizados para el cálculo de impactos posteriormente. En los casos analizados con impacto, el error del 8% se reduce considerablemente, dado que la deformada de la placa se modifica ligeramente durante el impacto aproximándose al caso de la carga puntual, como se demostrará posteriormente.



4.1.3.6 Vibración del modo fundamental axial de la ménsula sometida a carga constante.

Se comprueba en este apartado si el sistema de un grado de libertad, con los parámetros obtenidos según el método simplificado, modela adecuadamente la respuesta dinámica de la ménsula cuyas características han sido descritas en el apartado 4.1.1.6.

Para comprobar, una última vez, el método simplificado, se estudia la vibración axial de una ménsula. A dicha ménsula se le aplica una fuerza dinámica compresora de 10 KN de manera constante en el extremo libre en sentido axial.

Para verificar el resultado del sistema de un grado de libertad calculado según el método aproximado, se comparan los resultados con los ofrecidos por el Midas Civil. En dicho programa, se realiza el análisis con 21 modos de vibración, siendo los primeros 20 de flexión, por tanto, inactivos para esta carga exterior. Es decir, en la práctica solo se ha realizado el análisis modal con un modo de vibración.

Se realiza el análisis dinámico durante 0.02 segundos con un intervalo de integración de 5×10^{-5} segundos. Se considera amortiguamiento nulo en el sistema. El modelo de la ménsula utilizado en el Midas Civil para el cálculo del desplazamiento bajo la carga dinámica se muestra en la Figura 137.

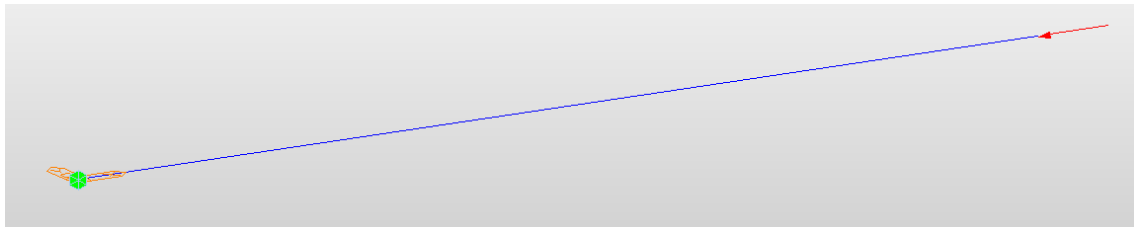


Figura 137- Caso de fuerza constante de 10 KN en el extremo de ménsula de $10 \times 0.01 \times 0.01$ en acero calculada con Midas Civil con un único modo de vibración.

Los parámetros de rigidez y frecuencia calculados en los apartados 4.1.1.6 y 4.1.2.5 para la aplicación del método simplificado mediante la ecuación (282) son:

$$P=10 \text{ K}$$

$$K_e=5185.5 \text{ K/m}$$

$$C_k (P)=1$$

$$K_{eq} = 1 \times 5185.5 = 5185.5 \text{ KN/m}$$



$$M_{eq} = 1.968 \text{ Kg}$$

$$w_e = \sqrt{K_{eq}/M_{eq}} = \sqrt{\frac{5185.5}{1.968 \times 10^{-3}}} = 1623.2 \text{ rad/s}$$

Los resultados de desplazamiento del extremo libre de la ménsula ($d_e(t)$) para el sistema de un grado de libertad calculado con el método simplificado y el Midas Civil durante el primer segundo de aplicación de la carga, se muestran en la Figura 138:

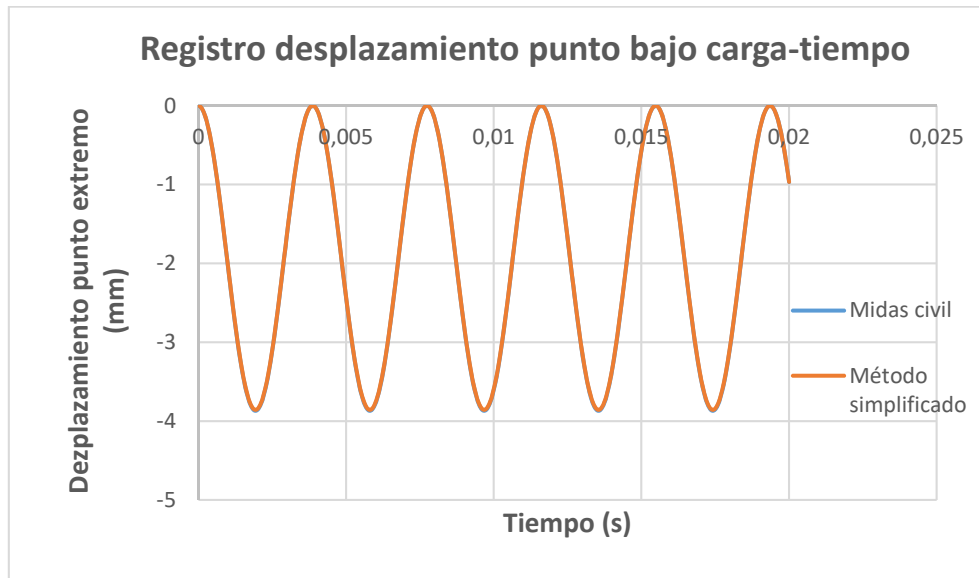


Figura 138-Registro desplazamiento del extremo de la ménsula un modo de vibración calculado con Midas Civil y con el método simplificado.

Como se puede apreciar en la Figura 138, la diferencia entre el método simplificado y el Midas Civil es insignificante, apareciendo ambas curvas como prácticamente coincidentes. Haciendo un repaso de todos los casos estudiados, se puede comprobar que cuando las deformadas utilizadas en el método de aproximado son menos exactas, como en el caso de la placa, los resultados en los estudios de vibración se van separando de los ofrecidos por Midas Civil.

La forma de calcular los parámetros de rigidez y masa equivalente obtenidos según el método simplificado para esta ménsula, serán utilizados para el cálculo de impactos en ménsulas posteriormente. Al igual que sucede con el resto de casos, en los impactos sobre ménsulas, la deformada de la estructura se modifica ligeramente por la masa del proyectil, aproximándose al caso de la carga puntual. Cuando esto suceda, los parámetros de masa y rigidez utilizados para el cálculo de impactos serán los obtenidos para el caso de carga puntual.



- Desarrollo de teoría sobre impactos -
- Método simplificado de cálculo de impactos en estructuras -





4.1.4 Aplicación considerando todos los modos de vibración

Hasta ahora el método simplificado se ha utilizado para calcular la respuesta estructural dinámica ante una fuerza teniendo en cuenta únicamente el modo fundamental de vibración. Todas las estructuras tienen infinitos modos de vibración y, en muchas ocasiones, el estudio de otros modos de vibración distintos al fundamental es importante para la respuesta estructural global. En el presente apartado, se generaliza el método simplificado para tener en cuenta todos los modos de vibración. Se analizará cada modo de manera independiente, de la misma forma que los modos analizados hasta ahora, obteniendo la respuesta global de la estructura por **superposición de la respuesta de cada modo**. Se ilustra para un caso concreto, pero sería análogo en otras estructuras.

El caso elegido para mostrar la generalización a todos los modos de vibración es el de una viga biapoyada de las mismas características del apartado 4.1.1.1, dada la facilidad que tienen las vigas para calcular su masa y su rigidez equivalente. Es decir, una viga de acero biapoyada de 10 m de luz y 0.1 m x 0.1 m de sección.

4.1.4.1 Vibración de viga sometida a carga constante.

Se analiza un primer caso de carga dinámica constante, idéntico al descrito en el apartado 4.1.3.1, pero en este caso se considerarán, tanto en el método simplificado como en el Midas Civil, los tres primeros modos de vibración de la estructura.

El punto de estudio de la viga, como en los casos anteriores, es el centro de luz. La carga aplicada es de 10 KN constante en el tiempo y no se considera amortiguamiento. La carga se aplica durante 1 segundo. El intervalo de integración utilizado es de 0.001 segundos. El modelo de Midas Civil utilizado se muestra en la Figura 139.

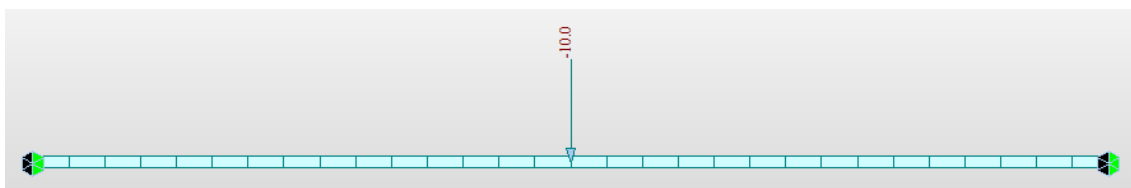


Figura 139-Carga aplicada en el centro de la viga. Cálculo modal realizado con Midas Civil para 3 modos de vibración.



Como se ha comentado, se estudian los tres primeros modos de vibración de flexión, cuyas deformadas y periodos de vibración, obtenidos del análisis modal de Midas Civil, se presentan en las Figura 140, Figura 141 y Figura 142 para los modos 1, 2 y 3, respectivamente.



Figura 140-Modo 1 de Flexión. $T=0.4264$ s. Análisis multimodal.

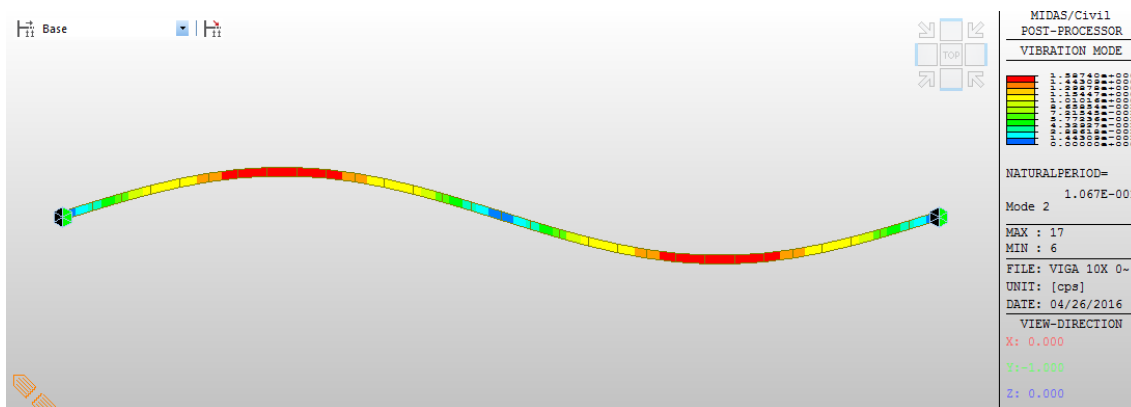


Figura 141-Modo 2 de Flexión. $T=0.1067$ s. Análisis multimodal.

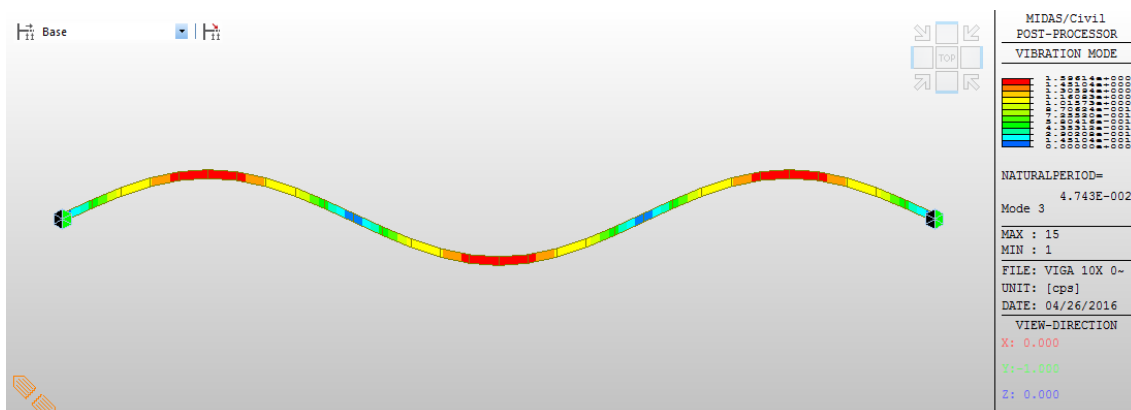


Figura 142-Modo 3 de Flexión. $T=0.04743$ s. Análisis multimodal.



De los cálculos realizados anteriormente, ya se dispone de la rigidez y la masa equivalente del modo 1 de vibración. Usando este modo como referencia, se calcularán las rigideces y masas equivalentes en el mismo punto para los otros dos modos restantes.

Modo 1:

En el apartado 4.1.1.2 se calcula el valor de la rigidez del centro de vano de la viga biapoyada objeto de estudio. Esta rigidez se calcula según un método general ($K = 85.23 \frac{KN}{m}$) y un método simplificado ($K = \frac{48EI}{L^3} = 84 \frac{KN}{m}$). Ambos valores resultaban muy próximos.

$$K_1 = 85.23 \frac{KN}{m} \approx \frac{48EI}{L^3} = 84 \frac{KN}{m}$$

Para el análisis que se realiza a continuación, se usará la fórmula del método simplificado por tener carácter paramétrico.

La masa equivalente del centro de vano, según lo expuesto en 4.1.2.1, resultó el 50% del total:

$$M_{e,1} = 392.5 \text{ kg (50\% } M_{TOTAL})$$

Es decir, expresado de forma paramétrica:

$$M_{e,1} = A \times L \times \rho \times 0.5$$

Siendo ρ la densidad, L la longitud de la viga y A el área de la sección transversa. Las expresiones para calcular la rigidez (K_1) y la masa equivalente ($M_{e,1}$) del modo 1, utilizan como parámetro de cálculo la longitud de la viga L . Para extrapolar estas expresiones a otros modos de vibración se define el parámetro longitud eficaz de viga para el n modo de vibración ($L_{ef,n}$), el cual se definirá a continuación. Por tanto, las expresiones para rigidez y masa equivalente en función del modo n resultan:

$$K_{e,n} = \frac{48EI}{L_{ef,n}^3}$$

$$M_{e,n} = A \times L_{ef,n} \times \rho \times 0.5$$

Para el $n=1$, es decir, para el modo 1: $L_{ef,1} = L$

Como se ha demostrado en los apartados 4.1.3.1, 4.1.3.3 y 4.1.3.4, en las vigas continuas de sección constante y de vanos iguales, los vanos se comportan como vigas biapoyadas independientes. Si se analizan la deformada de los modos de vibración de la viga (Figura



140, Figura 141 y Figura 142), se puede concluir que los nodos, o puntos de movimiento nulo del modo, se comportan en la práctica como apoyos de la viga. Es decir, por ejemplo, en la Figura 141 no se puede distinguir si esta deformada del modo corresponde al modo 2 de una viga de 10 m (cómo realmente es) o es el modo 1 de una viga continua de dos vanos de longitud 5 m cada uno. Ambos modos son el mismo. **Si se interpreta el modo como este segundo caso**, y partir de la conclusión de las conclusiones obtenidas en los apartados 4.1.3.3 y 4.1.3.4 sobre la independencia entre vanos, se puede calcular la rigidez y la masa equivalente para el modo 2 de la viga de 10 m como la rigidez y la masa equivalente para el modo fundamental de una viga biapoyada de longitud 5 m. Es decir, para el modo 2 $\rightarrow L_{ef,2} = L/2$.

Análogamente a lo expuesto para el modo 2, se puede concluir que, a partir de la Figura 142, para el modo 3, la longitud eficaz es $L/3$ ($L_{ef,3} = L/3$), y con carácter general para vigas de sección constante, para el modo $n \rightarrow L_{ef,n} = L/n$.

La frecuencia de vibración del modo 1 de la viga se calcula mediante la siguiente expresión:

$$w_{e,1} = \sqrt{\frac{K_1}{M_{e,1}}} = \sqrt{\frac{84}{0.3925}} = 14.63 \text{ rad/s}$$

La carga exterior está aplicada en el punto donde se han calculado la rigidez y la masa equivalente, por lo que la dicha fuerza no necesita de ser condensada. O lo que es lo mismo:

$$C_{k,1}(P) = 1$$

El desplazamiento del punto de estudio que aporta el modo 1 se obtiene a partir de la ecuación (282):

$$d_{e,1}(t) = \frac{10}{84} (1 - \cos(14.63t))$$

Modo 2:

A partir de las consideraciones realizadas para el modo 1, se calcula la rigidez, la masa equivalente y el coeficiente de rigidez $C_{k,2}(P)$ del modo 2.

$$K_2 = \frac{48EI}{(L_{ef,n})^3} = \frac{48EI}{(L/2)^3} = \frac{48 \cdot 2.1 \times 10^8 \cdot \frac{1}{12} \cdot 0.1^4}{(10/2)^3} = 672 \text{ KN/m}$$

$$M_{e,2} = A \times L_{ef,2} \times \rho \times 0.5 = 0.1 \times 0.1 \times 10/2 \times 7850 \times 0.5 = 196.25 \text{ Kg}$$

La frecuencia de vibración natural del modo 2 se obtiene a partir de la expresión:



$$w_{e,2} = \sqrt{\frac{K_2}{M_{e,2}}} = \sqrt{\frac{672}{0.19625}} = 58.5 \text{ rad/s}$$

Por otro lado, para el modo 2, la carga exterior en el caso que nos ocupa no está aplicada en el centro de vano de las vigas independientes. Dicha fuerza, de hecho, esta aplicada en el nodo, que en la práctica es como un apoyo, entre las 2 vigas “independientes” que componen el modo 2. Se podría hacer el análisis correspondiente con la línea de influencia para condensar la fuerza exterior, pero es evidente que cuando una fuerza esta aplicada en un apoyo, significa que computa al 0%. Dicho de otra forma, **ejerciendo la fuerza sobre un apoyo no se puede proporcionar movimiento a la estructura**, por lo que la fuerza condensada sobre el apoyo resultará nula. Esta consideración es equivalente a decir que la rigidez es infinita, por este motivo:

$$C_{k,2} (P) = \infty$$

El desplazamiento del punto de estudio que aporta el modo 2 se obtiene a partir de la ecuación (282):

$$d_{e,2}(t) = \frac{10}{\infty} (1 - \cos(58.5 t))$$

Modo 3:

A continuación, se calcula la rigidez y la masa equivalente y el coeficiente de rigidez $C_k (P)$ para el modo 3.

La rigidez resulta:

$$K_3 = \frac{48EI}{(L_{ef})^3} = \frac{48EI}{(L/3)^3} = \frac{48 \times 2.1 \times 10^8 \times \frac{1}{12} \times 0.1^4}{(10/3)^3} = 2268 \frac{KN}{m}$$

Como se demostró en el apartado 4.1.3.4, para el modo 3 de vibración el valor de $C_k (P)$ coincide con el número de vanos del modo. Es decir, $C_{k,3} (P)=3$.

$$K_{eq,3} = C_{k,3}(P) \times K_3 = 3 \times 2268 = 6804 \text{ KN/m}$$

La masa equivalente del modo 3 resulta:

$$M_{e,3} = A \times L_{ef} \times \rho \times 0.5 = 0.1 \times 0.1 \times 10/3 \times 7850 \times 0.5 = 130.833 \text{ Kg}$$

La frecuencia de vibración natural del modo 3 se obtiene a partir de la expresión:



$$w_3 = \sqrt{\frac{K_3}{M_{e,3}}} = \sqrt{\frac{2268}{0.130833}} = 131.7 \text{ rad/s}$$

El desplazamiento del punto de estudio que aporta el modo 3 se obtiene a partir de la ecuación (282):

$$d_{e,3}(t) = \frac{10}{2268} (1 - \cos(131.7 t))$$

Método simplificado para todos los modos de vibración:

La respuesta global estructural a la carga aplicada, se obtiene por superposición de todos los modos analizados. Es decir, el desplazamiento del punto central de la viga, considerando todos los modos ($d_{e,Total}(t)$), se obtiene sumando el desplazamiento correspondiente de cada modo ($d_{e,n}(t)$). La ecuación (282) modificada para n modos resulta:

$$d_{e,Total}(t) = \sum_1^n d_{e,n}(t) = \sum_1^n \frac{P}{K_{eq,n}} (1 - \cos(w_{e,n} t)) \quad (286)$$

Para el ejemplo concreto de la viga con tres modos de vibración, la ecuación (286) resulta:

$$d_{e,Total}(t) = \frac{10}{84} (1 - \cos(14.73 t)) + \frac{10}{\infty} (1 - \cos(58.5 t)) + \frac{10}{2268} (1 - \cos(131.7 t)) \quad (287)$$

Nótese que el segundo sumando, correspondiente al segundo modo de vibración, resulta nulo.

Para entender físicamente lo que la ecuación (287) realiza, se muestra la Figura 143. En ella se observa como el caso de la carga puntual centrada de 10 KN sobre una viga considerando los tres modos de vibración (viga a)) se puede descomponer como suma de tres vigas simplemente apoyadas. La viga que corresponde al modo 1 (viga b)) tiene la misma geometría y la misma carga que la viga original, la viga correspondiente al modo 2 tiene la longitud mitad y una carga dispuesta en el apoyo por lo que no da contribución al movimiento, y la viga correspondiente al modo 3 tiene una longitud y una carga 1/3 con respecto al viga original.

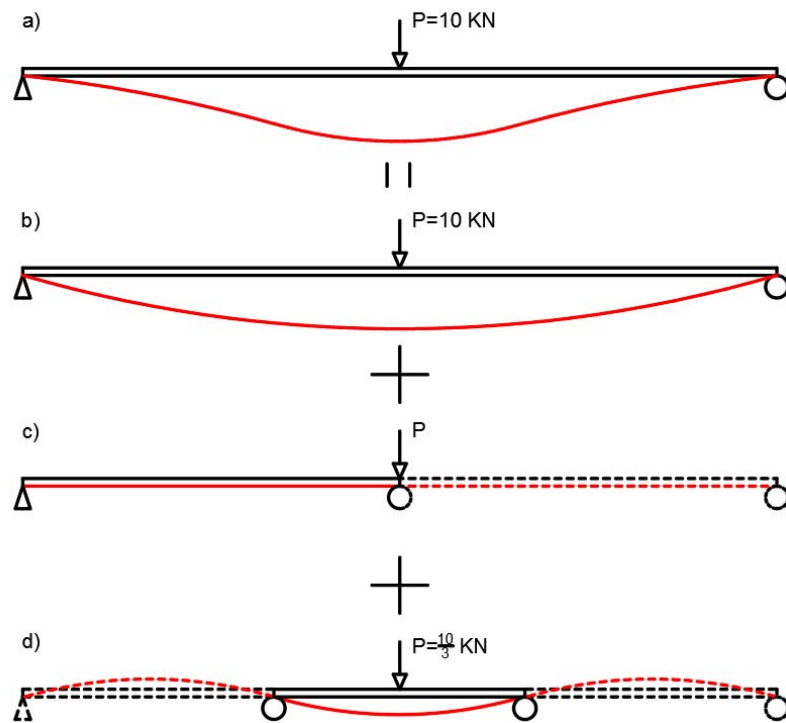


Figura 143-Descomposición modal que realiza el método simplificado en la ecuación (287)

En la Figura 144 se muestra la comparación entre los resultados de la ecuación (287) con los resultados ofrecidos por el Midas Civil para el punto central de la viga considerando tres modos de vibración.

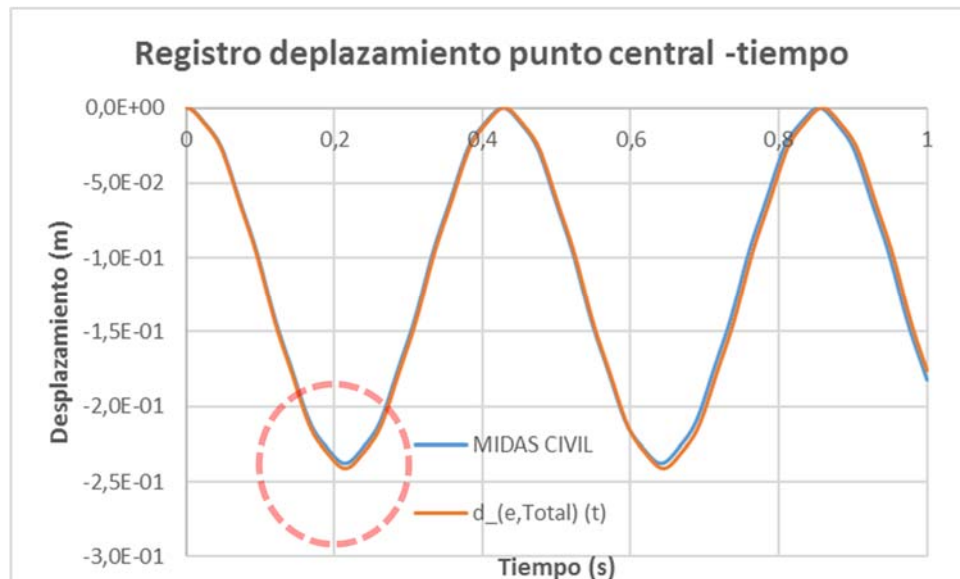


Figura 144-Comparativa de carga centrada constante calculado con 3 tres modos de vibración, mediante Midas Civil y calculado mediante método simplificado.



Como se puede apreciar en la Figura 144 los resultados son muy aproximados entre ambas curvas.

El tercer modo de vibración, para una carga constante, tiene poca influencia en lo que a desplazamiento se refiere. Las ondulaciones del tercer modo son difíciles de apreciar incluso en la cresta de la onda. Aun así, si se comparan resultados con el análisis hecho en el apartado 4.1.3.1, se puede apreciar las diferencias entre la Figura 144 (analizada con 3 modos) y la Figura 123 (analizada con 1 único modo de vibración). A la vista de estas figuras, se puede comprobar como la aplicación del método simplificado a varios modos de vibración se ha realizado con resultado satisfactorio. No obstante, para apreciar con más nitidez que la generalización del método simplificado modela adecuadamente la contribución de cada modo, se plantea a continuación un caso en el que el tercer modo presenta mayor influencia.

4.1.4.2 Vibración de viga sometida a carga cíclica.

Se dispone el mismo caso de la carga cíclica del apartado 4.1.3.2. En esta ocasión, se analizan tres modos de vibración en vez de uno.

El análisis modal en Midas Civil, por tanto, se realiza teniendo en cuenta los tres primeros modos de flexión, para poder comparar con los resultados ofrecidos por el método simplificado. La carga aplicada es de 10 KN con una frecuencia de 20 Hz. Se escoge esta frecuencia, la cual es cercana a la del tercer modo, para amplificar la importancia del tercer modo en lo que a desplazamiento se refiere. No se considera amortiguamiento. La carga se aplica, como el resto de casos del apartado 4.1.4, durante 1 segundo que es un tiempo mucho mayor que el periodo de vibración para que no sea carga impulsiva (impacto). El intervalo de integración utilizado es de 0.001 segundos. El modelo de elementos finitos se muestra en la Figura 145.

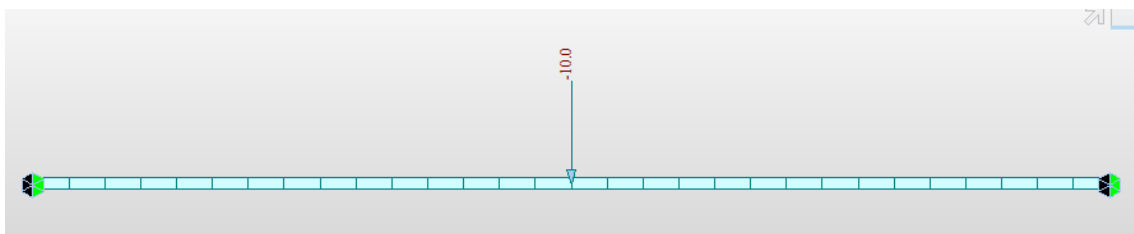


Figura 145-Carga cíclica aplicada en el centro de la viga. Cálculo modal realizado con Midas Civil para 3 modos de vibración.



Para la utilización del método simplificado, se emplea la ecuación (276) modificada. En primer lugar, se incluye por el coeficiente $C_k (P)$ para condensar la fuerza exterior en el punto de estudio. En segundo lugar, se superpone la contribución de cada modo de manera análoga a lo expuesto en el apartado 4.1.4.1. Con estas modificaciones, la ecuación (276) para el cálculo del desplazamiento del punto central $d_{e,Total}(t)$ en aplicación del método simplificado resulta:

$$d_{e,Total}(t) = \sum_1^n d_{e,n}(t)$$
$$d_{e,Total}(t) = \sum_1^n \frac{P}{M_{e,n} C_{k,n} (P)} \left(\frac{\text{sen}(\Omega t)}{(w_{e,n})^2 - (\Omega)^2} - \frac{\Omega}{w_{e,n}} \frac{\text{sen}(w_{e,n} t)}{(w_{e,n})^2 - (\Omega)^2} \right) \quad (288)$$

Los valores de los parámetros necesarios para la aplicación de la ecuación (288) de cada modo son los calculados para el caso anterior (apartado 4.1.4.1.). Únicamente el parámetro correspondiente a la frecuencia de excitación exterior es novedoso.

$$\Omega = 2 \times \pi \times 20 = 125 \text{ rad/s}$$

En la Figura 146 se muestra la contribución al movimiento de los modos 1 y 3 según la ecuación (288). El modo 2, igual que en el caso anterior, no se excita. Como cabía esperar, al aplicar una carga cíclica con frecuencia cercana a la del tercer modo, la contribución de este es la principal por efecto resonante.

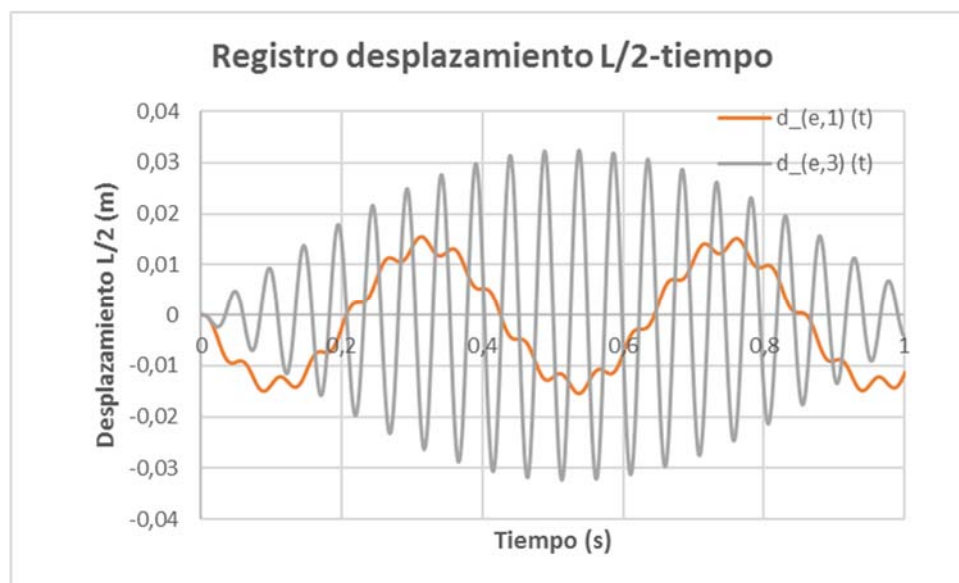


Figura 146-Contribución al desplazamiento del punto central de la viga de cada modo según el método simplificado.



Si se suman ambos términos, se obtiene la respuesta total de la estructura para 3 modos de vibración en el caso de la carga cíclica centrada. En la Figura 147, se comparan los resultados para la respuesta total obtenidos mediante Midas Civil y mediante el método simplificado en aplicación de la ecuación (288).

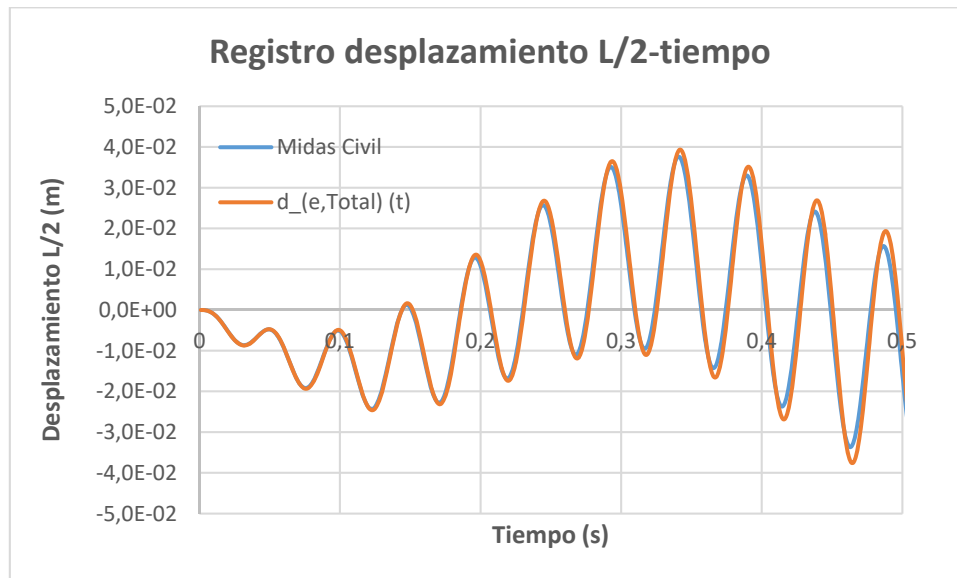


Figura 147- Comparativa con carga cíclica de 20 Hz calculado con 3 tres modos de vibración, mediante Midas Civil y mediante método simplificado.

Como se puede apreciar en Figura 147, los resultados son muy aproximados y en este caso, a diferencia del caso anterior, la contribución del modo 3 al desplazamiento es mayoritaria.

Por esta razón, se concluye que el método simplificado aplicado para varios modos de vibración, representa adecuadamente la respuesta estructural global.



4.2 DESARROLLO TEÓRICO Y APLICACIÓN DE LA FORMULACIÓN OBTENIDA

En el punto 4.1 se ha demostrado que cualquier modo de vibración de cualquier estructura se puede simplificar a un sistema de un muelle elástico de una determinada rigidez y una masa equivalente. Estos dos parámetros son el resultado de condensar las fuerzas elásticas y de inercia en un punto concreto para una deformada estructural. En dicho apartado, la rigidez y la masa se ha calculado a partir de las deformadas aproximadas, con precisión suficiente, para poder simplificar los cálculos. Ambos parámetros han sido obtenidos para algunos ejemplos prácticos sencillos. En los siguientes apartados, para el estudio de impactos, no se considerará el impacto sobre una estructura como tal, sino sobre un sistema de muelles elásticos y masas que representan, en un punto genérico, los diferentes modos de vibración de una estructura cualquiera.

Los modelos que a continuación se detallan para comenzar el estudio, constarán de una masa del proyectil M_p , o elemento con velocidad inicial previa al instante del impacto $V_{p,0}$, que impacta contra una masa estructural M_e , la cual representa la masa equivalente del modo fundamental de vibración en el punto de estudio de la estructura. Esa masa estructural está unida a un muelle elástico que representa la rigidez estructural K_e de dicho modo fundamental de vibración. Se considera, por simplicidad, que M_e se encuentra inicialmente en reposo. En el caso de que M_e no se encontrará en reposo, al análisis que se muestra a continuación sería igualmente válido sin más que considerar a $V_{p,0}$ como la **velocidad relativa existente entre proyectil y estructura**. En la Figura 148, se puede ver el sistema genérico de muelle y masa que representa al punto de impacto en el modo fundamental correspondiente a la estructura genérica objeto de estudio.

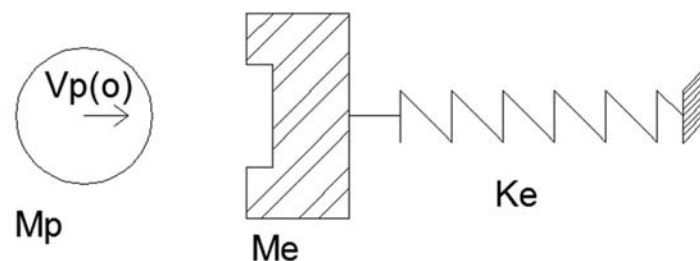


Figura 148-Esquema de cálculo que representa la estructura y el proyectil tipo.

A partir de la formulación que se obtendrá del desarrollo teórico en los siguientes apartados, se plantearán distintos impactos sobre, entre otras, las estructuras estudiadas en el apartado 4.1.



Todos los resultados de los casos planteados se compararán con los resultados ofrecidos por un análisis no lineal geométrico tipo explícito realizado con el programa de elementos finitos Midas NFX.

4.2.1 Hipótesis de partida

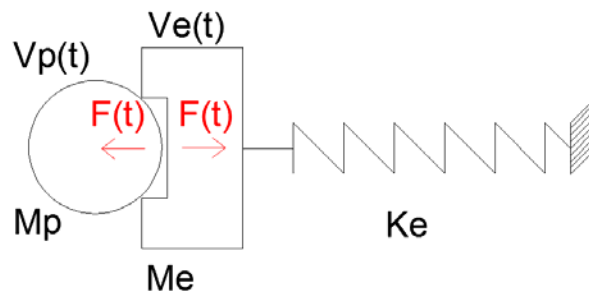
Como punto de partida de la investigación, se enumeran a continuación las hipótesis iniciales sobre las que se basa el presente estudio referido a los impactos en estructuras:

- Los materiales que conforman la estructura se mantienen en rango elástico lineal. Es decir, el muelle de constante de rigidez K_e tiene un comportamiento elástico lineal.
- No se consideran pérdidas de energía por calor o ruido durante el impacto.
- No se producen plastificaciones locales ni en estructura ni en proyectil durante el impacto.
- El proyectil está formado por un material infinitamente rígido.
- Se considera que el contacto entre proyectil y estructura se mantiene hasta que finaliza el impacto.
- Todas las estructuras estudiadas se considerarán apoyadas sobre elementos infinitamente rígidos.
- La estructura inicialmente está en reposo.
- La velocidad inicial del proyectil es perpendicular a la estructura.
- No se considera un deslizamiento relativo entre estructura y proyectil en la dirección transversal a la velocidad inicial del proyectil durante el impacto.
- La masa del proyectil M_p y de la estructura M_e , se consideran puntuales, es decir, no tienen dimensiones.
- El impacto comienza en el instante ($t_o=0$) cuando se produce el contacto entre masas y termina en el instante en el cual el proyectil se detiene (t_f).



4.2.2 Planteamiento inicial del impacto.

A partir de las consideraciones expuestas en el aparatado anterior, se realiza el planteamiento inicial del impacto. Para ello, se supone el impacto entre un proyectil y un muelle elástico con una masa según se detalla en la Figura 149. El muelle y la masa representa el punto de contacto en el modo fundamental de una estructura cualquiera. La Figura 149 representa un instante t genérico durante dicho impacto ($0 < t < t_f$).



$V_p(t)$	Velocidad de proyectil	$V_e(t)$	Velocidad de estructura
M_p	Masa proyectil	M_e	Masa equivalente estructura
$d_p(t)$	Desplazamiento proyectil	$d_e(t)$	Desplazamiento estructura
$F(t)$	Fuerza de contacto	K_e	Rigidez estructura

Figura 149-Detalle genérico "t" durante el impacto.

Para ese instante t , la estructura solicitada por la fuerza de contacto $F(t)$ existente entre las superficies de ambos cuerpos, habrá sufrido un desplazamiento estructural $d_e(t)$ respecto de su posición inicial $d_e(0)$, y una velocidad asociada a dicho desplazamiento $V_e(t)$.

Por otro lado, también se habrá producido un desplazamiento del proyectil $d_p(t)$ respecto de la posición que tenía en el instante en el que comenzó el impacto $d_p(0)$. El proyectil, por la acción de la fuerza $F(t)$, habrá perdido velocidad, siendo esta $V_p(t)$ para el instante genérico analizado.

El desplazamiento de estructura y proyectil se analiza a partir del primer contacto entre las masas, por lo que los desplazamientos iniciales se consideran nulos ($d_p(0)=d_e(0)=0$).

A partir de la hipótesis de partida de contacto permanente entre ambas masas puntuales, se puede establecer la condición de compatibilidad siguiente: para el instante genérico t **los desplazamientos de estructura y proyectil han de ser iguales** $d_p(t)=d_e(t)$.



El desplazamiento del proyectil $d_p(t)$, se plantea como suma de dos términos. Por un lado, el espacio recorrido como si ninguna fuerza actúa sobre él. Es decir, la velocidad en el instante inicial del impacto $V_{p,o}$ multiplicado por el tiempo de impacto t . Por otro lado, el espacio que deja de recorrer debido a la deceleración que provoca la fuerza de contacto $F(t)$.

$$d_p(t) = V_{p,o} t - \iint_0^t \frac{F(t)}{M_p} dt$$

En el desplazamiento de la estructura $d_e(t)$, dado que esta parte de reposo, sólo se considera el término del desplazamiento correspondiente a la aceleración sufrida por las fuerzas que actúan sobre ella. Dos son las fuerzas que actúan sobre la estructura. Por un lado, la fuerza de contacto $F(t)$ y por otro, la fuerza elástica $F(K_e)$ que ejerce el muelle. Esta fuerza elástica, es el resultado de multiplicar la rigidez del muelle por el desplazamiento del mismo. Por tanto, el desplazamiento del muelle resulta:

$$d_e(t) = \iint_0^t \left(\frac{F(t) - F(K_e)}{M_e} \right) dt = \iint_0^t \left(\frac{F(t) - K_e d_e(t)}{M_e} \right) dt$$

Como se ha comentado antes en la condición de compatibilidad, dado que el desplazamiento de la estructura es el mismo que el desplazamiento del proyectil $d_e(t) = d_p(t)$ y este último está definido, la expresión final del desplazamiento de la estructura resulta:

$$d_e(t) = \iint_0^t \left(\frac{F(t) - K_e \left(V_{p,o} t - \iint_0^t \frac{F(t)}{M_p} \right)}{M_e} \right) dt$$

4.2.2.1 Definición de la ecuación diferencial

En el apartado anterior se han definidos tanto el desplazamiento del proyectil como el desplazamiento de la estructura para un tiempo genérico t . Definidos ambos, la ecuación diferencial a resolver se plantea sin más que igualar sendas expresiones para compatibilizar desplazamientos:

$$d_p(t) = d_e(t)$$

$$V_{p,o} t - \iint_0^t \frac{F(t)}{M_p} dt = \iint_0^t \left(\frac{F(t) - K_e \left(V_{p,o} t - \iint_0^t \frac{F(t)}{M_p} \right)}{M_e} \right) dt \quad (289)$$



La ecuación diferencial (289) de grado 4, se puede expresar por componentes:

$$V_{p,o} t - \iint_0^t \frac{F(t)}{M_p} dt = \iint_0^t \frac{F(t)}{M_e} dt + \frac{K_e V_{p,o}}{M_e} \iint_0^t t dt + \iint_0^t \iint_0^t \frac{F(t)K_e}{M_e M_p} dt \quad (290)$$

Para rebajar el grado de la ecuación diferencial de grado 4 a grado 2, se define el siguiente cambio de variable:

$$\iint \iint F(t) = y \quad (291)$$

$$\iint F(t) = \ddot{y} \quad (292)$$

Este cambio de variable redefine la fuerza $F(t)$ según la expresión:

$$\frac{d^4 y}{dt^4} = F(t) \quad (293)$$

Si se integra el termino $\frac{K_e V_{p,o}}{M_e} \iint_0^t t dt$, y las ecuaciones (291) y (292) son sustituidas en la ecuación (290), se consigue la nueva expresión de la ecuación diferencial en grado 2:

$$V_{p,o} t - \frac{\ddot{y}}{M_p} = \frac{\ddot{y}}{M_e} - \frac{K_e V_{p,o}}{6} t^3 + \frac{K_e}{M_p M_e} y \quad (294)$$

$$\frac{K_e V_{p,o}}{6 M_e} t^3 + V_{p,o} t = \ddot{y} \left(\frac{1}{M_e} + \frac{1}{M_p} \right) + \frac{K_e}{M_e M_p} y \quad (295)$$

$$\left[\frac{K_e V_{p,o}}{6 M_e} t^3 + V_{p,o} t \right] \frac{M_e M_p}{M_e + M_p} = \ddot{y} + \frac{K_e}{M_e + M_p} y \quad (296)$$

En la ecuación (296), a la raíz del término que multiplica la variable y se le denomina frecuencia conjunta estructura-proyectil durante el impacto w_{ep} . La definición de este parámetro es, por tanto:

$$w_{ep}^2 = \frac{K_e}{M_e + M_p} \quad (297)$$

Nótese que la frecuencia de vibración del sistema w_{ep} es, según la ecuación (297), la resultante de sumar la masa del proyectil al sistema de masa y rigidez de la estructura. Es decir, la masa del proyectil modifica la frecuencia de vibración de la estructura durante el impacto como si la masa del proyectil formara parte de ella.

Sustituyendo la ecuación (297) en la ecuación (296) se obtiene la siguiente expresión:

$$\ddot{y} + w_{ep}^2 y = \frac{M_e M_p}{M_e + M_p} \frac{K_e V_{p,o}}{6 M_e} t^3 + \frac{M_e M_p}{M_e + M_p} V_{p,o} t \quad (298)$$



4.2.2.2 Resolución de la ecuación diferencial

La ecuación (298) representa, matemáticamente, el problema del impacto a resolver para el sistema de muelle y masa. La solución general a esta ecuación diferencial se descompone en una solución homogénea más una solución particular.

$$y = y_{hom} + y_p \quad (299)$$

La solución homogénea es del tipo:

$$y_{hom} = A \cos(w_{ep} t) + B \sin(w_{ep} t) \quad (300)$$

Con A y B constantes a determinar por las condiciones de contorno.

La solución particular de la solución se busca en la solución tipo:

$$y_p = C_1 t^3 + C_2 t^2 + C_3 t + C_4 \quad (301)$$

Donde C_1 , C_2 , C_3 y C_4 son constantes a determinar. Se determinan a partir de la sustitución de la solución particular en la ecuación general.

Para sustituir la solución particular en la ecuación (298) es necesario obtener sus derivadas primera y segunda:

$$\dot{y}_p = 3C_1 t^2 + 2C_2 t + C_3 \quad (302)$$

$$\ddot{y}_p = 6C_1 t + 2C_2 \quad (303)$$

Sustituyendo las ecuaciones (301) y (303) en la ecuación (298) se obtiene:

$$\begin{aligned} 6C_1 t + 2C_2 + w_{ep}^2 (C_1 t^3 + C_2 t^2 + C_3 t + C_4) \\ = \frac{M_e M_p}{M_e + M_p} \frac{K_e V_{p,o}}{6M_e} t^3 + \frac{M_e M_p}{M_e + M_p} V_{p,o} t \end{aligned} \quad (304)$$

Si se igualan término a término los elementos de la ecuación (304) se puede determinar los valores de las constantes. Estos resultan:

$$\begin{aligned} C_1 &= \frac{M_p V_{p,o}}{6} \\ C_2 &= 0 \\ C_3 &= -\frac{M_p^2 V_{p,o}}{K_e} \\ C_4 &= 0 \end{aligned} \quad (305)$$



A partir de estos valores para las constantes, se puede obtener la solución particular y_p sustituyendo dichas constantes de la ecuación (305) en la ecuación (301):

$$y_p = \frac{M_p V_{p,o}}{6} t^3 - \frac{M_p^2 V_{p,o}}{K_e} t \quad (306)$$

Con la obtención de la solución particular, la solución general se expresa de la siguiente forma sustituyendo las ecuaciones (300) y (306) en la ecuación (299):

$$y = A \cos(w_{ep} t) + B \operatorname{sen}(w_{ep} t) + \frac{M_p V_{p,o}}{6} t^3 - \frac{M_p^2 V_{p,o}}{K_e} t \quad (307)$$

La ecuación (307) es, a falta de determinar las constantes A y B de las condiciones de contorno, la solución definitiva a la ecuación diferencial general.

Dado que en los puntos sucesivos van a ser necesarias, se obtienen a continuación las derivadas de la ecuación (307).

$$\dot{y} = -A w_{ep} \operatorname{sen}(w_{ep} t) + B w_{ep} \cos(w_{ep} t) + \frac{M_p V_{p,o}}{2} t^2 - \frac{M_p^2 V_{p,o}}{K_e} \quad (308)$$

$$\ddot{y} = -A w_{ep}^2 \cos(w_{ep} t) - B w_{ep}^2 \operatorname{sen}(w_{ep} t) + M_p V_{p,o} t \quad (309)$$

Si se deshace el cambio de la variable expuesto según las ecuaciones (291) y (292), se puede calcular la función de la fuerza de contacto $F(t)$:

$$\ddot{y} = A w_{ep}^3 \operatorname{sen}(w_{ep} t) - B w_{ep}^3 \cos(w_{ep} t) + M_p V_{p,o} \quad (310)$$

$$\frac{d^4 y}{dt^4} = F(t) = A w_{ep}^4 \cos(w_{ep} t) + B w_{ep}^4 \operatorname{sen}(w_{ep} t) \quad (311)$$

Nótese que, en la ecuación (311) el término de velocidad inicial del proyectil $V_{p,o}$ no aparece.



4.2.2.3 Condiciones de contorno.

Para obtener la solución completa al caso concreto de estudio, es necesario que las constantes de la ecuación (307) sean tales que satisfagan las condiciones de contorno del problema. Como condiciones de contorno se imponen las 2 restricciones siguientes:

1ª Condición -La fuerza en el instante inicial ha de ser nula.

$$F(t)_{t=0} = 0 \quad (312)$$

Si se aplica $t=0$ en la ecuación (311), dicha ecuación resulta:

$$F(t) = A = 0 \quad (313)$$

Se ha determinado el valor de la primera constante, siendo igual a cero.

2ª Condición -La velocidad inicial del proyectil en el instante posterior al contacto entre masas, ha de ser la velocidad inicial V_I . Esta velocidad, por el momento, es una velocidad cualquiera a determinar. V_I , en principio, es distinta de la velocidad inicial del proyectil en el instante previo al impacto $V_{p,o}$.

$$V_p(t)_{t=0} = V_I \quad (314)$$

Para poder aplicar la 2ª condición de contorno, es necesario obtener la expresión de velocidad del proyectil. La velocidad $V_p(t)$ se obtiene derivando respecto del tiempo la ecuación del desplazamiento del proyectil $d_p(t)$.

$$V_p(t) = \frac{d(d_p(t))}{dt} = \frac{d}{dt} \left(V_{p,o} t - \frac{\ddot{y}}{M_p} \right) = V_{p,o} - \frac{\ddot{y}}{M_p} \quad (315)$$

$$V_p(t) = V_{p,o} - \frac{1}{M_p} (A w_{ep}^3 \text{sen}(w_{ep} t) - B w_{ep}^3 \text{cos}(w_{ep} t) + M_p V_{p,o}) \quad (316)$$

Como $A=0$ según la ecuación (313), la ecuación (316) resulta;

$$V_p(t) = V_{p,o} - \frac{1}{M_p} (-B w_{ep}^3 \text{cos}(w_{ep} t) + M_p V_{p,o}) \quad (317)$$

$$V_p(t) = \frac{B w_{ep}^3 \text{cos}(w_{ep} t)}{M_p} \quad (318)$$

Nótese que en la velocidad posterior al impacto $V_p(t)$, no aparece el término de la velocidad del proyectil previa al impacto $V_{p,o}$.



Si se aplica a la ecuación (318) a la condición de contorno 2, (ecuación (314) se obtiene:

$$V_p(t = 0) = \frac{B w_{ep}^3}{M_p} = V_I \quad (319)$$

De la expresión anterior, se puede obtener el valor de la constante B :

$$B = \frac{V_I M_p}{w_{ep}^3} \quad (320)$$

La solución general, sustituida las contantes A y B en la ecuación (307) resulta:

$$y = \frac{V_I M_p}{w_{ep}^3} \text{sen}(w_{ep} t) + \frac{M_p V_p(0)}{6} t^3 - \frac{M_p^2 V_{p,0}}{K_e} t \quad (321)$$

Si se sustituye la ecuación (321) en las expresiones iniciales del desplazamiento en el proyectil $d_p(t)$ o en la estructura $d_e(t)$ se obtiene las expresiones completas para ambos desplazamientos, siendo ambos iguales. Por sencillez de operación se sustituye en la ecuación correspondiente al desplazamiento del proyectil:

$$d_p(t) = d_e(t) = V_{p,0} t - \frac{-\frac{V_I M_p}{w_{ep}^3} w_{ep}^2 \text{sen}(w_{ep} t) + M_p V_{p,0} t}{M_p} \quad (322)$$

Resultando:

$$d_p(t) = d_e(t) = \frac{V_I \text{sen}(w_{ep} t)}{w_{ep}} \quad (323)$$

Nótese que en la ecuación para el desplazamiento del proyectil tras el instante del impacto $d_p(t)$, y de la estructura $d_e(t)$, no aparece el termino de la velocidad del proyectil previa al impacto $V_{p,0}$. En cambio, sí aparece la velocidad V_I aun por determinar.

4.2.3 Condición adicional: Masa del proyectil > Masa estructural

Lo más destacable de la aplicación de las condiciones de contorno a la solución general realizada en el aparatado anterior, es que la velocidad del proyectil tras el impacto $V_p(t)$ **no depende, a la vista de las ecuaciones (318) y (320), de la velocidad inicial del proyectil en el instante previo al impacto $V_{p,0}$** . Del mismo modo, los desplazamientos de proyectil y estructura mostrados en la ecuación (323) tampoco dependen de ella. Según estas ecuaciones, tanto la velocidad como desplazamiento tras el impacto, dependen del parámetro V_I , que es la velocidad del proyectil



en el instante inmediatamente posterior al primer contacto entre las masas. Esta velocidad, en principio cualquiera, provoca que la solución esté aun indeterminada.

Por este motivo hace falta añadir una condición adicional que proporcione valor al parámetro V_I . Es evidente que esta velocidad del proyectil posterior al instante del impacto debe de estar relacionada con la velocidad del proyectil en el instante previo al impacto $V_{p,o}$. **Por lo que la condición adicional ha de proporcionar una relación entre ambas.**

La segunda condición de contorno aplicada en el apartado anterior, ha sido impuesta en la velocidad del proyectil $V_p(t)$ por facilidad de cálculo. Es decir, **como el desplazamiento del proyectil $d_p(t)$ es el mismo que el desplazamiento de la estructura $d_e(t)$** debido a la ecuación de compatibilidad, sus derivadas y, por tanto, sus velocidades, también son iguales:

$$d_p(t) = d_e(t) \rightarrow V_p(t) = V_e(t) \quad (324)$$

Dicha igualdad de velocidades es para cualquier tiempo t posterior al impacto, incluido el instante inicial del impacto. Sin embargo, en ese instante inicial la estructura está en reposo y el proyectil tiene una cierta velocidad $V_{p,o}$. Se concluye, por tanto, que el modelo expuesto en el apartado anterior no representa los instantes iniciales del impacto, existiendo una fase previa aún por determinar.

Para analizar los primeros instantes del impacto se completa el modelo inicial con un muelle de constante elástica indeterminada K tal como ilustra la Figura 150.

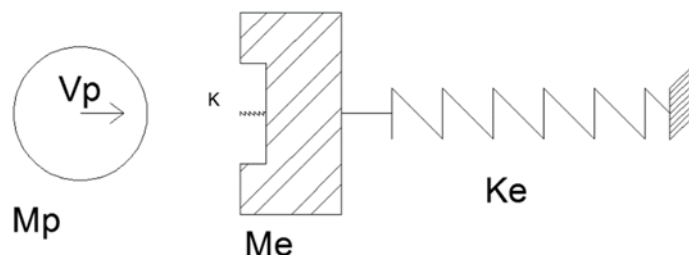


Figura 150-Se añade al modelo un muelle "K" que representa la deformabilidad en la zona de contacto debido a otros modos vibración distinto al fundamental.

Este muelle representa la deformabilidad Δ en la zona local de impacto, y se muestra a modo de ejemplo en una viga en la Figura 151.

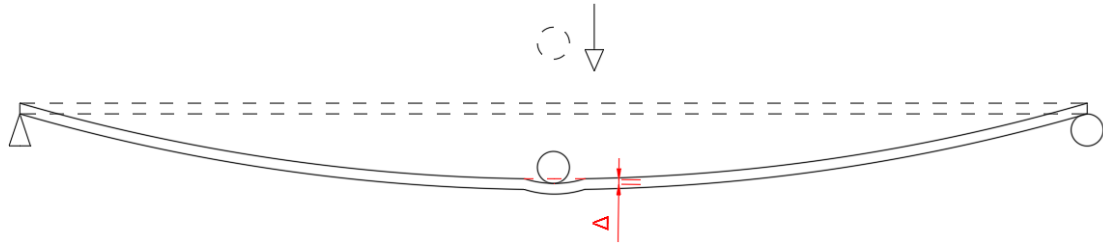


Figura 151-Deformación Δ de la estructura adicional al modo de vibración fundamental.

La deformabilidad Δ es adicional a la que proporciona el modo fundamental y, por tanto, ha de ser necesariamente desarrollada por otros modos de vibración distintos al modo 1. Este efecto, como se ha expuesto anteriormente, se incluye en el modelo a partir de la rigidez genérica K . La constante de rigidez K , siendo desconocido su valor, será mucho mayor que la rigidez del modo fundamental ($K \gg K_e$) por tratarse de modos superiores.

Una vez se ha completado el modelo de cálculo con la deformabilidad local que introducen otros modos de vibración distintos al fundamental, se está en condiciones de establecer la hipótesis añadida que proporcione la relación entre la velocidad del proyectil previa al impacto $V_{p,o}$ y la velocidad del proyectil inmediatamente posterior V_f . La condición adicional que se considera para completar el desarrollo del impacto, por los motivos que se expondrán en los apartados sucesivos, es la siguiente: **La masa del proyectil (M_p) es mayor que la masa equivalente de la estructura (M_e).**

A continuación, se desarrolla la mecánica del impacto con el nuevo modelo bajo esta condición para obtener la relación buscada entre velocidades. En la descripción de esta mecánica del impacto, se realizan una serie de hipótesis en lo referente a la secuencia de sucesos producidos durante la colisión. Estas hipótesis, se comprobarán en los impactos analizados posteriormente.

La primera consideración realizada es dividir el impacto estructural, al igual que sucede en el impacto de masas libres, en dos fases diferenciadas. Estas son la fase de aproximación o compresión y la fase de restitución.

4.2.3.1 Fase aproximación o fase de compresión.

El tiempo de duración de un impacto entre dos masas libres dadas, como se demostró en el apartado 3.2, depende de la rigidez en la zona de contacto. Como consecuencia de este hecho, en los primeros instantes del impacto estructural que se está analizando, este se producirá en los siguientes términos: el muelle local de rigidez K , a través de la fuerza que genera su propia



compresión, **frena la masa del proyectil (M_p) mientras proporciona aceleración a la masa estructural (M_e)**. Debido a que el muelle del modo fundamental (K_e) es más flexible, tiene un tiempo de reacción mucho más largo. Es decir, mientras el muelle K se ha comprimido, al muelle K_e no le habrá dado tiempo a moverse. Por tanto, se puede suponer para esta fase inicial de aproximación que, a efectos prácticos, no existe el muelle K_e como ilustra la Figura 152.

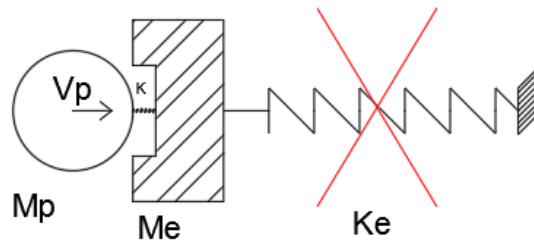


Figura 152-Fase compresión: el muelle que representa el modo fundamental, a efectos prácticos, no trabaja.

Si no se tiene en cuenta el muelle K_e , el impacto de la fase de compresión se producirá como un choque de masas libres entre la masa M_p y la masa M_e como ilustra la Figura 153.

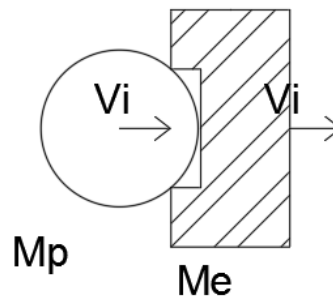


Figura 153-En instante de tiempo las masas igualan sus velocidades como si el impacto fuese de dos masas libres.

La fase de aproximación es la encargada de frenar la masa M_p mientras se acelera la masa M_e . Como se demostró en el desarrollo expuesto en el apartado 3.2, esta fase finaliza cuando las velocidades de las masas que colisionan se igualan. Esta situación ocurre para un tiempo definido como t_{fi} que, para dos masas dadas, depende de la rigidez de la zona de contacto, como se indica en la ecuación (249). En este caso, y dado que $K \gg K_e$ se considerará este tiempo despreciable ($t_{fi} \approx 0$).

Una vez las velocidades de ambas masas se han igualado, el muelle local K comienza a expandirse, dando comienzo a la fase de restitución.



4.2.3.2 Fase restitución

La fase de restitución comienza para $t=t_{fi}$ con las velocidades de ambas masas igualadas, como se indica en la Figura 154. La principal diferencia con la fase anterior, es que en la fase de restitución el muelle elástico K_e si se tiene en cuenta.

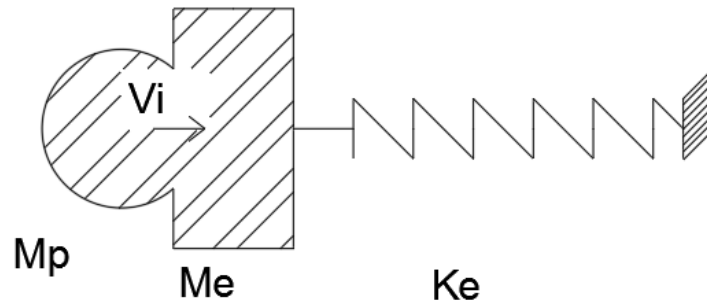


Figura 154-Una vez que las velocidades son iguales la masa del proyectil pasa a formar parte de la estructura. El modo 1 aumenta su masa.

La condición de que $M_p > M_e$ implica, como se señaló también en el apartado 3.2, que, en un impacto de masas libres, el movimiento de ambas masas en la fase de restitución se produce en la misma dirección que tenía M_p previa al impacto. Es decir, en este caso las dos masas se moverán en la fase de restitución hacia la dirección donde se encuentra K_e .

Para el caso de $M_p > M_e$, si las masas fueran totalmente libres y según las leyes expuestas en el apartado 3.2.1 que gobiernan un impacto elástico perfecto, para $t > t_{fi}$ la masa M_e continuaría acelerándose hasta coger una velocidad mayor que la de M_p . Es decir, M_e aumentaría su velocidad hasta separarse de M_p , estando ambas moviéndose en la misma dirección. En cambio, para la situación de impacto estructural objeto de este estudio, cuando la masa M_e intenta separarse de M_p el muelle K_e frena a la masa estructural. Como ambas masas tienen la misma velocidad y mantienen el contacto, el muelle K_e al desacelerar la masa estructural, desacelera también la masa del proyectil. Esto significa que, a efectos prácticos, **las dos masas se comportan como una sola**. Esta desaceleración ocurre hasta que el muelle K_e consigue frenar a ambas masas. La secuencia descrita de masas acopladas desacelerándose, se ilustra en la Figura 155.

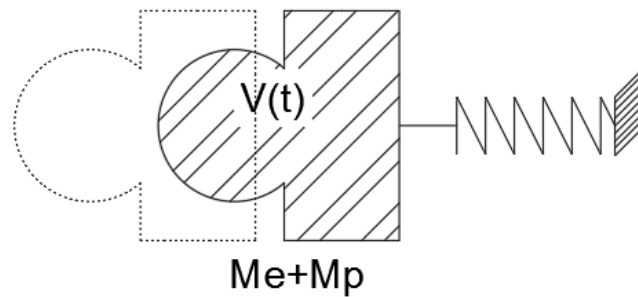


Figura 155-Ya como una única masa, proyectil y estructura son frenados por el muelle de modo 1.

Cuando las dos masas se comportan como una sola, se dice que **la masa del proyectil se ha integrado en la estructura.**

Por tanto:

- En la fase de restitución, $t > t_{fi}$ ($t_{fi} \approx 0$), las velocidades de las dos masas son iguales.
- En la fase de restitución, la masa del proyectil está integrada en la estructura.

Respecto al planteamiento inicial del impacto expuesto en el apartado 4.2.2, estas consideraciones son coherentes con las ecuaciones (323) y (297), respectivamente. Por este motivo, el modelo expuesto en el apartado 4.2.2 representa adecuadamente la fase de restitución. Mientras que la fase de aproximación, por las razones ya indicadas, se puede considerar, a efectos prácticos, como una fase instantánea de equiparación de velocidades entre masas libres.

La velocidad inicial de ambas masas en la fase de restitución (V_I), se puede calcular a partir de la ecuación (251) de masas libres. Dado que la estructura está inicialmente en reposo, dicha ecuación resulta:

$$V_{ef}^* = V_{p,o} \frac{M_p}{M_p + M_e} = V_I \quad (325)$$

Es decir:

$$V_I = V_{p,o} C_m \quad (326)$$

Siendo el coeficiente de masas C_m :

$$C_m = \frac{M_p}{M_p + M_e} \quad (327)$$



4.2.3.3 Formulación desarrollada para cálculo de impactos.

Como se ha indicado en el apartado anterior, la masa del proyectil durante el impacto se integra en la estructura modificando la frecuencia de vibración como reflejaba la ecuación (297). Si la masa del proyectil se integra realmente en la estructura, no sólo modificará la frecuencia de vibración, sino también el propio modo de vibración. El modelo de muelle y masa con el que se obtiene la ecuación (297), por la sencillez que atesora, no puede reflejar este cambio en el modo de vibración. Dado que, si cambia el modo cambia la deformada con la que vibra, se puede asegurar que la rigidez y la masa equivalente del modo se verá modificada según lo expuesto en el apartado 4.1.1. Por este motivo, **la rigidez y la masa equivalente en un impacto deben calcularse a partir de la deformada del modo de vibración fundamental, pero con la masa de proyectil integrada en la masa estructural.**

En cuanto a la formulación definitiva resultante, en el apartado anterior se ha obtenido el valor de V_I a partir de la ecuación (326). Si se sustituye esta expresión en la ecuación (323), se obtiene la solución definitiva al desplazamiento de estructura y proyectil en un impacto para un tiempo t , menor al necesario para detener finalmente el proyectil t_f :

$$d_p(t) = d_e(t) = \frac{V_{p,o} C_m \operatorname{sen}(w_{ep} t)}{w_{ep}} \quad t \leq t_f \quad (328)$$

Siendo

$$w_{ep} = \sqrt{\frac{K_e C_k (M_p)}{M_e + M_{p,eq}}} \quad (329)$$

$$M_{p,eq} = X(P)M_p$$

La expresión de la frecuencia de vibración durante el impacto w_{ep} , descrita en la ecuación (329), es una versión más general de la expuesta en la ecuación (297). Respecto de esta ecuación, se han incluido dos parámetros para darle generalidad, los cuales se explican a continuación.

En estructuras continuas, como por ejemplo en vigas de varios vanos, cuando se produce un impacto en un vano, parte de energía de ese impacto se “gasta” en movilizar el resto de vanos. Esta consideración es análoga a la descrita para calcular el coeficiente de rigidez en función de la fuerza exterior $C_k(P)$ expuesto en el apartado 4.1.3.3. Es decir, de igual manera que en dicho caso se modifica la rigidez equivalente de un vano si se aplica una fuerza en un único vano de



los que presenta la estructura, es necesario considerar cómo se ve afectada la rigidez equivalente en un impacto si, de igual forma, sólo colisiona M_p en uno de los vanos. Para poder reflejar cómo afecta esta variación de la rigidez en la frecuencia de vibración durante el impacto en el modelo del muelle, se añade el parámetro llamado coeficiente de rigidez función de la masa del proyectil $C_k(M_p)$ en la ecuación (329). En los casos de impactos estudiados en los apartados sucesivos, se detalla la forma de calcular $C_k(M_p)$ de manera similar a lo realizado para $C_k(P)$.

De igual manera, por la propia limitación del modelo del muelle, en la ecuación (297) la masa del proyectil M_p se suma al cien por cien a la masa de equivalente de la estructura M_e para calcular la frecuencia de vibración durante un impacto. En una estructura real, más compleja, dependiendo del punto de impacto, **el porcentaje de masa del proyectil que ha de sumarse a la masa de la estructura cambiará**. Como se indicó en el apartado 4.1.2.1, en función de la línea de influencia la fuerza de inercia que produce la masa del proyectil habrá de condensarse con una determinada proporción. Para tener en cuenta este efecto en el modelo simplificado del muelle, se ha incluido el factor en función del punto de impacto de la masa $X(P)$. En la mayoría de los casos de impactos estudiados en la presente tesis, al ser impactos centrales, el factor $X(P)$ toma el valor unidad, por lo que la masa equivalente del proyectil que aparece en la ecuación (329) es igual a la masa del proyectil ($M_{p,eq} = M_p$). Solo en el caso de impactos excéntricos $X(P)$ toma un valor distinto de 1, como se ejemplifica en el apartado 4.2.14 del presente documento.

La solución obtenida en la ecuación (328) limita la validez de la solución al tiempo final en que se tarda en detener el proyectil t_f . Para los instantes posteriores a este, la solución no tiene por qué ser validada dado que el proyectil puede caer, rebotar, deslizarse, mantenerse en la posición, etc. Las razones para no considerar un tiempo de análisis mayor a t_f , son dos principalmente:

- En primer lugar, ampliar el tiempo de validez para recoger una mayor casuística no interesa para este estudio porque la fuerza máxima de contacto y el desplazamiento máximo estructural, se van a producir para un tiempo menor o igual t_f .
- En segundo lugar, las condiciones con las que se obtiene la solución al impacto deberían modificarse para considerar si la masa del proyectil desliza, desaparece etc. El modelo obtenido, a partir de las condiciones iniciales establecidas, no puede reflejar otras situaciones distintas.



A continuación, se calcula el tiempo en el que se detiene el proyectil (t_f). Si se deriva la ecuación (323) se obtiene la expresión (330), la cual determina la velocidad del proyectil para un tiempo genérico $t < t_f$.

$$V_p(t) = V_I \cos(w_{ep} t) \quad (330)$$

El primer valor de tiempo que haga detener al proyectil $V_p(t_f) = 0$, será el valor de parada del proyectil. Este hecho ocurre cuando:

$$w_{ep} t_f = \frac{\Pi}{2} \rightarrow t_f = \frac{\Pi}{2w_{ep}} = \frac{T_{ep}}{4} \quad (331)$$

De la ecuación anterior se deduce que **el proyectil se detiene en el punto de máximo desplazamiento estructural**, el cual se produce en un cuarto del periodo, siendo T_{ep} el periodo asociado a la frecuencia conjunta de estructura y proyectil w_{ep} .

A partir de un tiempo $t > t_f$, los valores del desplazamiento de la estructura en la situación analizada y en la formulación desarrollada solo deberían **coincidir si las condiciones iniciales del impacto se mantienen**. Es decir, el proyectil se mantiene inmóvil y posado sobre la estructura.

Por último, sustituyendo el valor de las constantes de las ecuaciones (313) y (320) en la ecuación (311) se obtiene el valor de la fuerza de contacto durante el impacto:

$$F(t) = M_p w_{ep} V_I \text{sen}(w_{ep} t) \quad t < t_f \quad (332)$$

Los valores de la fuerza de contacto expresado en la ecuación (332) y de desplazamiento expresado en la ecuación (328), tienen en cuenta la fuerza y el desplazamiento producido en el impacto durante la fase de restitución, pero no los producidos en la fase de aproximación, considerada despreciable. Si la masa del proyectil es mucho mayor que la masa de la estructura, como se demostrará más adelante, despreciar los efectos de la fase de aproximación es correcto. **A medida que ambas masas se van igualando, sobre todo en el caso de la fuerza de contacto, el error cometido va aumentando**. Para, entre otras cosas, evitar este error, en el apartado 4.2.5 se explica cómo generalizar la solución expuesta en este apartado para cualquier valor de masa de proyectil.



4.2.4 Aplicación a vigas sometidas a impactos de masas grandes.

En este apartado se realizan algunos ejemplos de aplicación de las expresiones obtenidas en la formulación desarrollada en el apartado 4.2.3.3 para el desplazamiento estructural en un impacto. La aplicación de estas fórmulas se realizará sobre impactos producidos en la viga de un vano simplemente apoyada descrita en el apartado 4.1.1.2

La condición adicional considerada en el apartado 4.2.3 para la resolución del impacto consiste en $M_p > M_e$. Para verificar la relación entre ambas masas, se define el parámetro α como la relación de masas entre la masa del proyectil y la masa equivalente de la estructura del modo fundamental:

$$\alpha = \frac{M_p}{M_e} \quad (333)$$

Como se verá en puntos sucesivos, el parámetro α es un parámetro muy importante en el comportamiento estructural en un impacto y, por tanto, en la aplicación del modelo desarrollado. Todos los casos analizados en el apartado 4.2.4 presentan un coeficiente $\alpha \geq 1$.

Antes de comenzar a resolver casos, se analiza genéricamente la representación gráfica de resultados del desplazamiento estructural (ecuación (328)). En la Figura 156 se muestra la forma de presentar los resultados, y la leyenda de cada curva. Las principales características del gráfico son las siguientes:

- En el eje de abscisas se representa la escala temporal.
- En el eje de ordenadas se representa el desplazamiento de la estructura en el punto de estudio.
- En trazo continuo rojo, con forma de senoide, se representará la deformación de la estructura en el punto de estudio mediante la curva $d_e(w_{ep}, t)$, obtenida mediante la aplicación de la ecuación (328).
- En trazo continuo azul se presentará los resultados ofrecidos por el Midas NFX para el desplazamiento estructural en el punto de estudio mediante la curva $d_e(w_{ep}, t)M.NFX$. Se hacen coincidir los instantes iniciales de contacto entre estructura y proyectil en ambas curvas, $d_e(w_{ep}, t)$ y $d_e(w_{ep}, t)M.NFX$, para poder realizar la comparación.
- Para poder evaluar la veracidad de la hipótesis de velocidad inicial V_I en la fase de restitución expresada mediante la ecuación (325), se presentan en color negro la



velocidad previa al impacto del proyectil $V_{p,o}$ (línea negra de puntos) y la velocidad inicial V_I (línea de negra continua). Dado que son velocidades iniciales en un gráfico de desplazamientos, ambas curvas se exponen como tangentes en el instante inicial.

- De igual manera, se añade la curva roja de trazo discontinuo ($d_e(w_e,t)$) para comprobar la hipótesis al respecto de que la masa del proyectil se integra con la masa de la estructura para modificar la frecuencia de vibración durante el impacto. Esta curva se obtiene por aplicación de la ecuación (328), pero utilizando la frecuencia de vibración natural de la estructura w_e , en vez de la frecuencia de vibración durante el impacto w_{ep} . Para obtener la frecuencia de vibración natural de la estructura se puede utilizar la ecuación (329) si más que sustituir $M_p=0$ y $C_k(M_p)=1$. De esta forma, la curva $d_e(w_e,t)$ describe el movimiento estructural suponiendo que la masa del proyectil no está integrada en la estructura.
- Por último, en las gráficas se señala el periodo de estudio donde las ecuaciones desarrolladas tienen validez. Es decir, con una línea temporal azul se representa el periodo comprendido entre $0 < t < t_f$. No obstante, se representan los resultados de la formulación para un $t > t_f$ debido a que, normalmente, las condiciones de impactos se mantienen y los resultados son razonablemente buenos para tiempos más grandes.

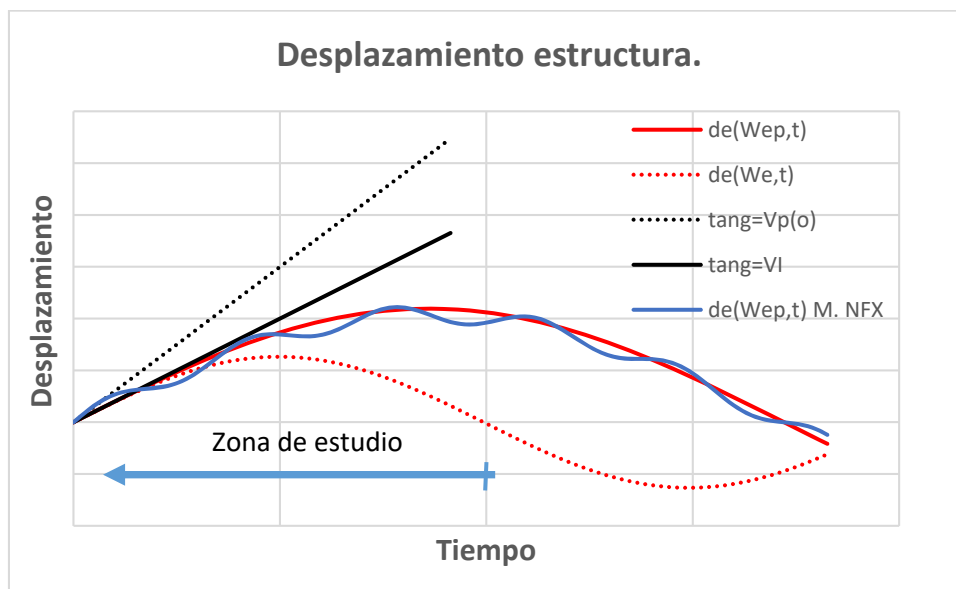


Figura 156-Presentación de los resultados. Identificación de curvas.

Durante el apartado 4.2.4 se va a analizar impactos sobre el punto central de una viga de un vano simplemente apoyada. La viga objeto de estudio es la viga descrita en el apartado 4.1.1.2. Es decir, viga metálica de 10 m de longitud y sección de 0.1m x 0.1 m.



En concreto, en el apartado 4.2.4 se estudia el impacto en el centro de luz de una viga biapoyada de una masa (M_p) con velocidad previa al impacto de 2 m/s como muestra la Figura 157. Se analizarán 5 casos para distintos valores de M_p , los cuales proporcionan 5 valores de α diferentes ($\alpha=10$, $\alpha=5$, $\alpha=3$, $\alpha=2$ y $\alpha=1$).

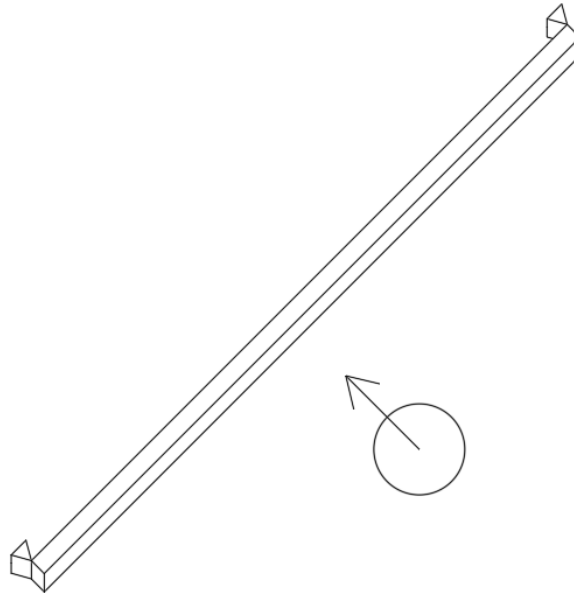


Figura 157-Impacto en centro luz en viga metálica biapoyada. Velocidad de impacto 25 m/s. $M_p > M_e$ ($\alpha > 1$)

Como se ha indicado, los resultados de la ecuación (328) para el cálculo de desplazamiento estructural en un impacto se comparan con los obtenidos por el programa de elementos finitos Midas NFX. A la hora de modelar el impacto en este software, se han de considerar las hipótesis de partida expuestas en 4.2.1. Es decir, la masa M_p ha de ser “puntual” e “indeformable”. Para aproximarse a esta situación, se modela M_p mediante un prisma de reducidas dimensiones (0.1 m x 0.2m x 0.1 m) y se le asigna un material de módulo de elasticidad 1000 veces el del acero (2.1×10^{14} N/m²). La densidad del material que se otorga a esta masa es variable en función del caso analizado, y será, en cada caso, la densidad que proporcione el coeficiente α buscado. La velocidad inicial del proyectil se le asigna en modulo y dirección directamente mediante las posibilidades que ofrece el programa.

En la Figura 158 se muestra el modelo desarrollado de viga y proyectil “puntual”. El modelo será el mismo en cada caso, únicamente modificado por la densidad de la masa proyectil.

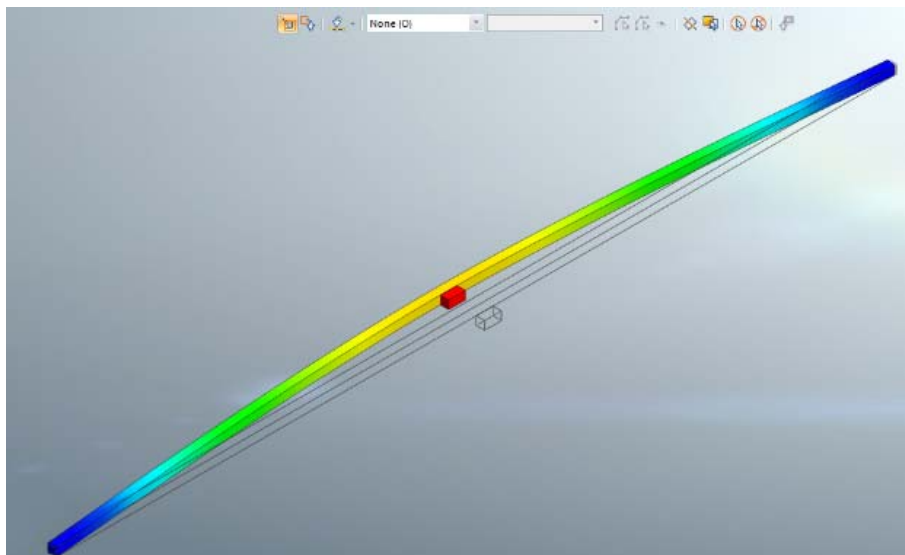
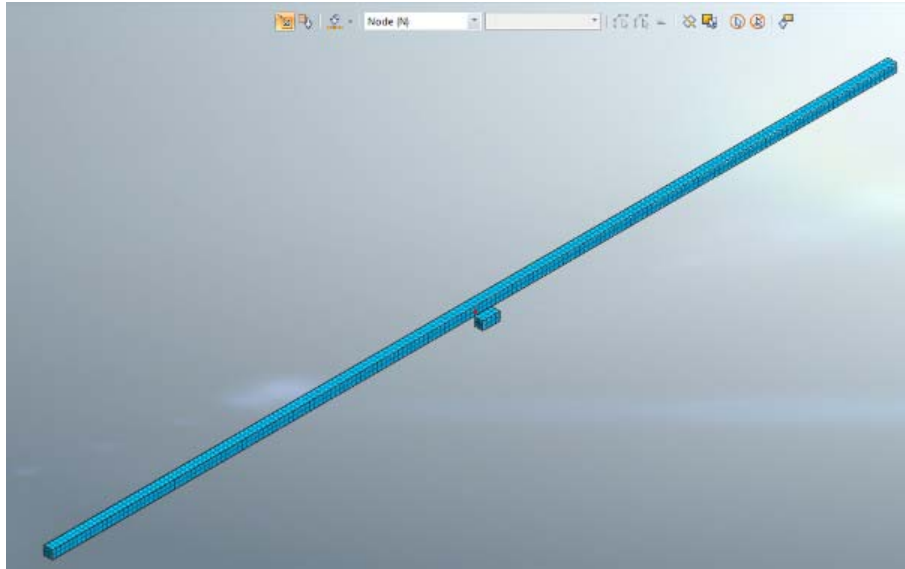


Figura 158-Cálculo de impactos con Midas NFX con análisis no lineal para diferentes valores de M_p .

El tipo de análisis que se realiza en el Midas NFX es un análisis no lineal (tipo explícito) de 0.7 segundos de duración y un incremento de tiempo para la integración de 0.0005 segundos. Se ha utilizado elementos sólidos tanto para la viga como para el proyectil.



4.2.4.1 Caso masa del proyectil 10 veces la masa equivalente de la estructura ($\alpha=10$) y velocidad del proyectil previa al impacto ($V_{p,0}$) de 2 m/s.

El impacto analizado en este apartado consta de una masa proyectil de masa diez veces mayor que la masa equivalente del modo fundamental de la estructura ($\alpha=10$) y con una velocidad de dicha masa previa al impacto de 2 m/s. El impacto se produce en el punto central de una viga cuyas características son idénticas a la expuestas en el apartado 4.1.1.2.

Lo primero que hay que calcular para resolver el impacto mediante la formulación desarrollada son los parámetros de rigidez y masa equivalente de la estructura, como se ha expuesto en los apartados 4.1.1 y 4.1.2, respectivamente. Para el caso concreto de esta viga, estos parámetros ya fueron calculados en los apartados 4.1.1.2 y 4.1.2.1. Los valores obtenidos por el método simplificado resultaron:

$$K_e = 84.0 \text{ KN/m}$$

$$M_e = 392.5 \text{ kg}$$

Este valor de masa equivalente, junto con el parámetro α referido a este caso, definen el valor de la masa del proyectil según la ecuación (333):

$$M_p \text{ (kg)} = M_e \alpha = 392.5 \times 10$$

$$M_p = 3925 \text{ Kg}$$

La hipótesis expuesta en el apartado 4.2.1.2 indica que la masa del proyectil se integra en la estructura durante el impacto. De la consideración de esta hipótesis, se deriva que los valores indicados previamente sobre los parámetros de rigidez y masas equivalente, son sólo de aplicación en una situación de impacto si la masa de proyectil no modifica sustancialmente la deformada del modo de vibración con el cual se obtuvieron. Por este motivo, se procede a calcular la deformada del modo de vibración fundamental, o modo 1 de la viga, incluyendo la masa del proyectil en centro de la viga como masa estructural. Esta deformada, se compara con la deformada de una carga puntual en el centro de luz para comprobar que el método simplificado utilizado para la obtención de los parámetros de masa y rigidez, es de aplicación.

El modo de vibración 1, incluyendo la masa que aporta el proyectil, se calcula mediante el programa de elementos finitos Midas Civil. El modelo utilizado y el resultado obtenido se muestran en la Figura 159.

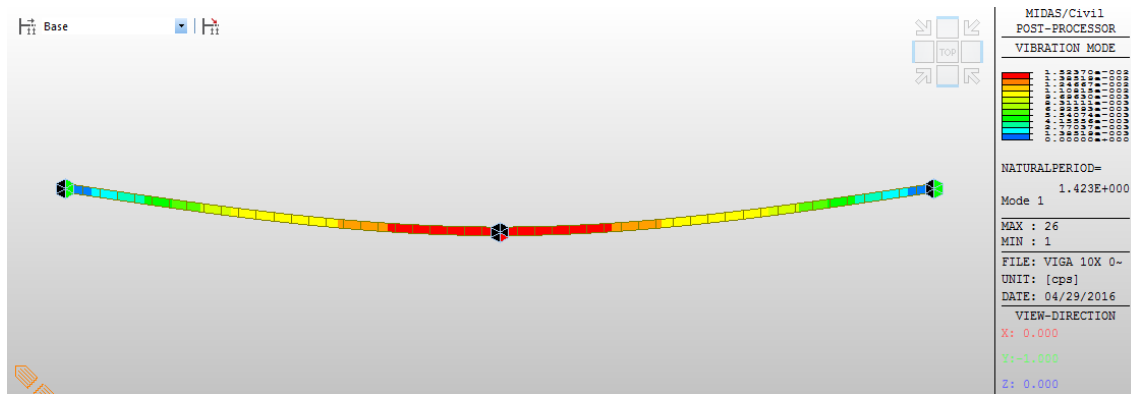


Figura 159-Deformada del modo de vibración con la masa del proyectil añadida en el punto de impacto.

Los resultados de la deformada del modo mostrado en la Figura 159, con la amplitud máxima adecuada para poder realizar la comparación, se muestran junto con la deformada producida por una carga puntual en el centro de luz en la Figura 160.

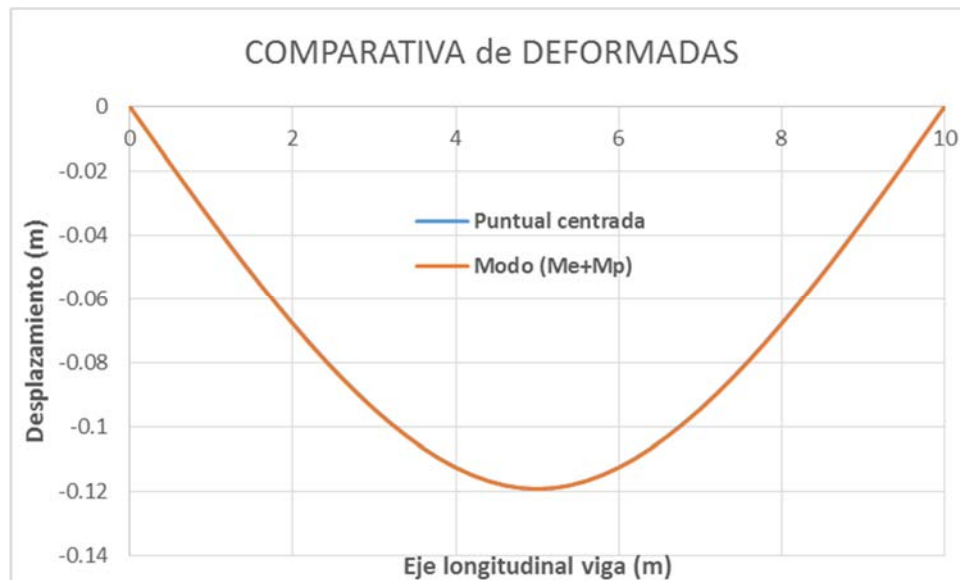


Figura 160-Comparación de deformadas del primer modo de vibración incluyendo la masa del proyectil para el caso de $\alpha=10$ y la deformada bajo carga puntual centrada.

Como se puede apreciar en la Figura 160, las deformadas de ambas curvas son prácticamente coincidentes. Se puede indicar incluso que, al añadir la masa puntual en el centro de la viga, **ambas curvas son más próximas de lo que lo fueron en el mismo caso, pero sin añadir la masa del proyectil**. La comparación de las curvas sin añadir la masa del proyectil al modo de vibración de la viga se mostró en la Figura 86.

A la vista de estos resultados, se puede concluir que el método simplificado sigue siendo de aplicación y, por tanto, la rigidez y la masa equivalente del punto central de la viga calculados previamente son válidos.



A continuación, se detallan los cálculos para la aplicación de la formulación de impactos desarrollada.

La frecuencia de vibración natural de la estructura para el modo 1 resulta:

$$K_e = 84000 \text{ N/m}$$

$$M_e = 392.5 \text{ kg}$$

$$w_e = \sqrt{\frac{K_e}{M_e}} = \sqrt{\frac{84000}{392.5}} = 14.63 \text{ rad/s}$$

Dado que el impacto es central, el factor $X(P)$ toma el valor unidad y la masa equivalente del proyectil resulta:

$$M_{p,eq} = M_p X(p) = 3925 \times 1 = 3925 \text{ kg}$$

En la estructura analizada sólo existe un vano, por tanto, toda la fuerza se gasta en mover ese vano. Por este motivo el parámetro $C_k (M_p)$ resulta:

$$C_k (M_p) = 1$$

La frecuencia de vibración durante el impacto, en aplicación de la ecuación (329) resulta:

$$w_{ep} = \sqrt{\frac{K_e \times C_k (M_p)}{M_e + M_{p,eq}}} = \sqrt{\frac{84000 \times 1}{392.5 + 3925}} = 4.41 \text{ rad/s}$$

La velocidad inicial en la fase de restitución, calculada según las expresiones (326) y (327), obtiene un valor de:

$$C_m = \frac{M_p}{M_p + M_e} = \frac{3925}{3925 + 392.5} = 0.91$$

$$V_l = V_{p,o} C_m = 2 \times 0.91 = 1.82 \text{ m/s}$$

A partir de estos valores, se puede calcular el desplazamiento estructural $d_e(t)$ durante el impacto en aplicación de la ecuación (328):

$$d_e(t) = \frac{1.82 \text{ sen}(4.41 t)}{4.41}$$

En la Figura 161 se comparan los resultados del desplazamiento estructural $d_e(t)$ obtenido mediante la expresión anterior con los ofrecidos por el modelo desarrollado en Midas NFX.

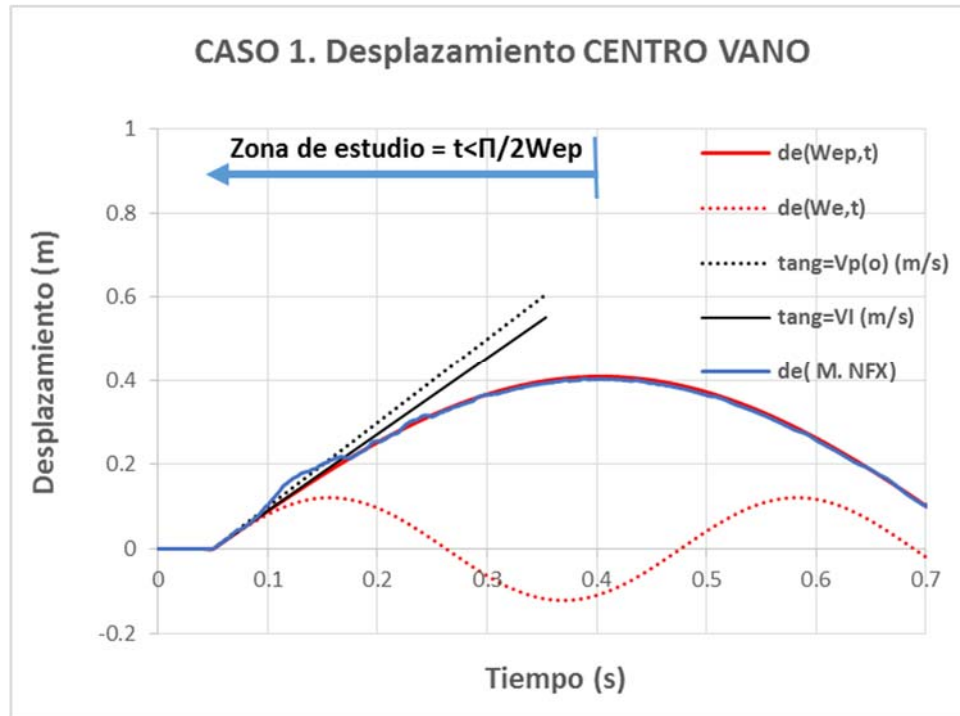


Figura 161-Comparación de deformaciones del punto central de la viga para Midas NFX (azul trazo continuo) y para la formulación desarrollada (rojo trazo continuo) para el caso de $\alpha=10$.

En la imagen superior se puede apreciar que la similitud entre los resultados de la formulación desarrollada (trazo rojo continuo) y los resultados ofrecidos por el Midas NFX (trazo azul continuo) es muy grande, incluso fuera de la zona de estudio ($t > \Pi/2 w_{ep}$). Esto es debido a que el proyectil se mantiene sobre la estructura.

Para la comprobación de la hipótesis de la tangente inicial (V_I), este caso de estudio no es el ideal. La gran diferencia de masas entre proyectil y estructura hace que la velocidad previa al impacto del proyectil $V_{p,o}$ (trazo negro de puntos) sea muy parecida a la velocidad inicial del impacto V_I (trazo negro continuo). No obstante, si la velocidad inicial fuera la correspondiente al valor $V_{p,o}$ en vez de V_I el desplazamiento, que lógicamente se ve afectado por la tangente inicial, sería un 10% mayor y se alejaría de los valores ofrecidos por el Midas NFX.

Por el contrario, este caso sí es adecuado para comprobar la otra gran hipótesis formulada. En trazo rojo discontinuo se presenta la formulación desarrollada, pero con la frecuencia natural de la estructura (sin añadir la del proyectil) frente a la línea de trazo rojo continuo que sí tiene en cuenta la aportación de la masa que impacta. Tanto la amplitud de las ondas, como las frecuencias de vibración de ambas senoides difieren en gran medida, ajustándose mucho mejor la onda que tiene en cuenta dicha aportación. Es decir, **la hipótesis de que la masa del proyectil se integra en la estructura se verifica claramente.**



4.2.4.2 Caso masa del proyectil 5 veces la masa equivalente de la estructura ($\alpha=5$) y velocidad del proyectil previa al impacto ($V_{p,0}$) de 2 m/s.

El impacto analizado en este apartado consta de una masa proyectil 5 veces la masa equivalente del modo fundamental de la estructura ($\alpha=5$) y una velocidad previa al impacto de 2 m/s. El impacto se producirá en el punto central de una viga cuyas características, al igual que en el apartado anterior, son idénticas a la expuestas en el apartado 4.1.1.2.

En este caso, no hace falta comprobar si la deformada de la estructura en el modo de vibración 1 se ve modificada cuando se le añade la masa del proyectil como masa estructural. Lógicamente, si para el caso de masa de proyectil añadida de $\alpha=10$ el modo no se ha modificado respecto de la situación sin masa añadida, para el caso de $\alpha=5$ tampoco sucederá. Por este motivo, los parámetros de rigidez y masa equivalente siguen siendo de aplicación.

La frecuencia de vibración natural de la estructura para el modo 1:

$$K_e = 84000 \text{ N/m}$$

$$M_e = 392.5 \text{ kg}$$

$$w_e = \sqrt{\frac{K_e}{M_e}} = \sqrt{\frac{84000}{392.5}} = 14.63 \text{ rad/s.}$$

El valor $\alpha=5$ significa que la masa del proyectil, la cual se aproxima a la de la estructura respecto al caso anterior, vale:

$$M_p = M_e \alpha = 392.5 \times 5 = 1962.5 \text{ kg}$$

Como es impacto central y la estructura consta de solo un vano:

$$X(p) = 1$$

$$C_k(M_p) = 1$$

La frecuencia de vibración durante el impacto, en aplicación de la ecuación (329) resulta:

$$w_{ep} = \sqrt{\frac{K_e \times C_k(M_p)}{M_e + M_{p,eq}}} = \sqrt{\frac{84000 \times 1}{392.5 + 1962.5}} = 5.97 \text{ rad/s}$$

La velocidad inicial en la fase de restitución, calculada según las expresiones (326) y (327), obtiene un valor de:



$$C_m = \frac{M_p}{M_p + M_e} = \frac{1962.5}{1962.5 + 392.5} = 0.83$$

$$V_I = V_{p,o} C_m = 2 \times 0.83 = 1.67 \text{ m/s}$$

A partir de estos valores, se puede calcular el desplazamiento estructural $d_e(t)$ durante el impacto en aplicación de la ecuación (328):

$$d_e(t) = \frac{1.67 \text{ sen}(5.97 t)}{5.97}$$

En la Figura 162 se comparan los resultados del desplazamiento estructural $d_e(t)$ obtenido mediante la expresión anterior con los ofrecidos por el modelo desarrollado en Midas NFX.

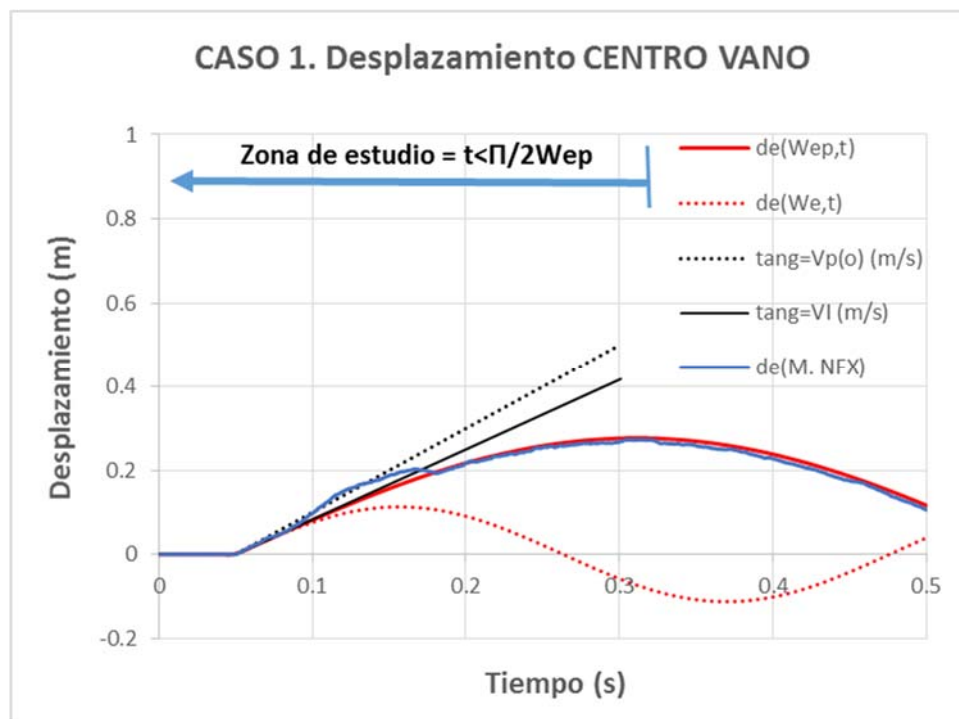


Figura 162- Comparación de deformaciones del punto central de la viga para Midas NFX (azul trazo continuo) y para la formulación desarrollada (rojo trazo continuo) para el caso de $\alpha=5$

En la Figura 162 se puede apreciar que la similitud entre los resultados de la formulación desarrollada (trazo rojo continuo) y los resultados ofrecidos por el Midas NFX (trazo azul continuo) es muy grande. Incluso fuera de la zona de estudio ($t > \pi/2w_{ep}$), debido a que el proyectil se mantiene sobre la estructura, también los resultados coinciden.

Los comentarios hechos en el caso anterior para las hipótesis de tangente inicial y la frecuencia de vibración durante el impacto, son igualmente válidos para este caso.



4.2.4.3 Caso masa del proyectil 3 veces la masa equivalente de la estructura ($\alpha=3$) y velocidad del proyectil previa al impacto ($V_{p,o}$) de 2 m/s.

El impacto analizado en este apartado consta de una masa proyectil 3 veces la masa equivalente del modo fundamental de la estructura ($\alpha=3$) y velocidad previa al impacto de 2 m/s. El impacto se producirá en el punto central de una viga cuyas características, al igual que en el apartado anterior, son idénticas a la expuestas en el apartado 4.1.1.2.

De igual manera, y por las razones expuestas en el apartado anterior, no es necesario recalculer los parámetros de rigidez y masa equivalente por una posible modificación de la deformada del modo 1 al introducir la masa del proyectil como masa estructural.

La frecuencia de vibración natural de la estructura para el modo 1:

$$K_e = 84000 \text{ N/m}$$

$$M_e = 392.5 \text{ kg}$$

$$w_e = \sqrt{\frac{K_e}{M_e}} = \sqrt{\frac{84000}{392.5}} = 14.63 \text{ rad/s}$$

El valor $\alpha=3$ significa que la masa del proyectil, la cual se aproxima a la de la estructura respecto al caso anterior, vale:

$$M_p = M_e \alpha = 392.5 \times 3 = 1177.5 \text{ kg}$$

Como es impacto central y la estructura consta de solo un vano:

$$X(p) = 1$$

$$C_k(M_p) = 1$$

La frecuencia de vibración durante el impacto, en aplicación de la ecuación (329) resulta:

$$w_{ep} = \sqrt{\frac{K_e \times C_k(M_p)}{M_e + M_{p,eq}}} = \sqrt{\frac{84000 \times 1}{392.5 + 1177.5}} = 7.31 \text{ rad/s}$$

La velocidad inicial en la fase de restitución, calculada según las expresiones (326) y (327), obtiene un valor de:

$$C_m = \frac{M_p}{M_p + M_e} = \frac{1177.5}{1177.5 + 392.5} = 0.75$$



$$V_I = V_{p,o} C_m = 2 \times 0.75 = 1.50 \text{ m/s}$$

A partir de estos valores, se puede calcular el desplazamiento estructural $d_e(t)$ durante el impacto en aplicación de la ecuación (328):

$$d_e(t) = \frac{1.50 \text{ sen}(7.31 t)}{7.31}$$

En la gráfica Figura 163 se comparan los resultados del desplazamiento estructural $d_e(t)$ obtenido mediante la expresión anterior con los ofrecidos por el modelo desarrollado en Midas NFX.

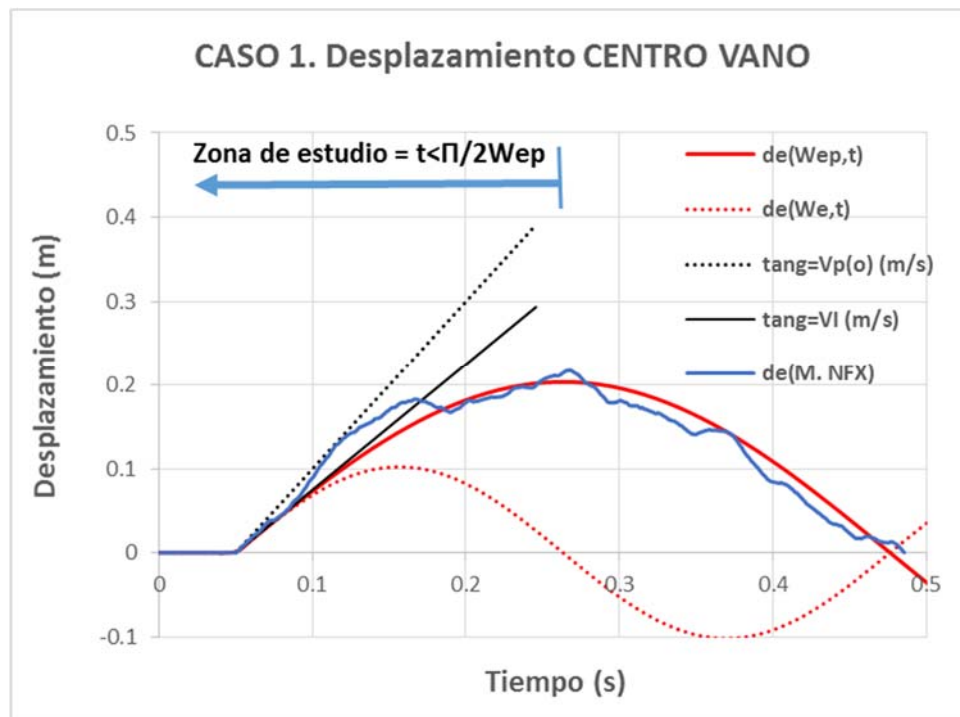


Figura 163-Comparación de deformaciones del punto central de la viga para Midas NFX (azul trazo continuo) y para la formulación desarrollada (rojo trazo continuo) para el caso de $\alpha=3$

En la imagen superior se puede apreciar la similitud existente, aunque ligeramente menor que los casos anteriores, entre los resultados de la formulación desarrollada (trazo rojo continuo) y los resultados ofrecidos por el Midas NFX (trazo azul continuo). Incluso fuera de la zona de estudio ($t > \Pi/2w_{ep}$), debido a que el proyectil se mantiene sobre la estructura, también los resultados coinciden razonablemente.

Al reducir el parámetro α respecto de los casos anteriores, la hipótesis de $M_p > M_e$ va perdiendo solidez. Si el valor α se reduce, como se demostrará más adelante, se produce una mayor



activación del resto de modos de vibración distintos al fundamental. Esta situación repercute en que el contacto entre el proyectil y estructura no se produce de manera constante, como expresa la hipótesis de partida enunciada para la solución de formulación desarrollada. El modelo de muelle y masa obtenido, por tanto, no puede reproducir los múltiples contactos. No obstante, la formulación desarrollada está pensada para predecir un comportamiento medio y desde ese punto de vista la curva descrita por la formulación si se adapta bien a los resultados del Midas NFX.

Debido a que las masas de proyectil y estructura se van aproximando al reducir el parámetro α , la velocidad del proyectil previa al impacto $V_{p,o}$ (la tangente negra discontinua) y la velocidad inicial del impacto V_I (la tangente negra continua) se van diferenciando. En la Figura 163, se puede apreciar claramente que la hipótesis de que la velocidad inicial de la fase de restitución es V_I se adapta razonablemente al comportamiento real, a pesar de las oscilaciones que el resto de modos presentan sobre la onda principal en los resultados ofrecidos por Midas NFX.

4.2.4.4 Caso masa del proyectil 2 veces la masa equivalente de la estructura ($\alpha=2$) y velocidad del proyectil previa al impacto ($V_{p,o}$) de 2 m/s.

El impacto analizado en este apartado consta de una masa proyectil 2 veces la masa equivalente del modo fundamental de la estructura ($\alpha=2$) y velocidad previa al impacto de 2 m/s. El impacto se producirá en el punto central de una viga cuyas características, al igual que en el apartado anterior, son idénticas a la expuestas en el apartado 4.1.1.2.

De igual manera, y por las razones expuestas en el apartado 4.2.2.2, no es necesario recalcular los parámetros de rigidez y masa equivalente por una posible modificación de la deformada del modo 1 al introducir la masa del proyectil como masa estructural.

Dichos parámetros y la frecuencia de vibración natural de la estructura para el modo 1 resultan:

$$K_e = 84000 \text{ N/m}$$

$$M_e = 392.5 \text{ kg}$$

$$w_e = \sqrt{\frac{K_e}{M_e}} = \sqrt{\frac{84000}{392.5}} = 14.63 \text{ rad/s.}$$



El valor $\alpha=2$ significa que la masa del proyectil, la cual se aproxima a la de la estructura respecto al caso anterior, vale:

$$M_p = M_e \alpha = 392.5 \times 2 = 785 \text{ kg}$$

Como es impacto central y la estructura consta de solo un vano:

$$X(p) = 1$$

$$C_k (M_p) = 1$$

La frecuencia de vibración durante el impacto, en aplicación de la ecuación (329), resulta:

$$w_{ep} = \sqrt{\frac{K_e \times C_k (M_p)}{M_e + M_{p,eq}}} = \sqrt{\frac{84000 \times 1}{392.5 + 785}} = 8.45$$

La velocidad inicial en la fase de restitución, calculada según las expresiones (326) y (327), obtiene un valor de:

$$C_m = \frac{M_p}{M_p + M_e} = \frac{785}{785 + 392.5} = 0.67$$

$$V_I = V_{p,o} C_m = 2 \times 0.67 = 1.33 \text{ m/s}$$

A partir de estos valores, se puede calcular el desplazamiento estructural $d_e(t)$ durante el impacto en aplicación de la ecuación (328):

$$d_e(t) = \frac{1.33 \text{ sen}(8.45 t)}{8.45}$$

En la Figura 164, se comparan los resultados del desplazamiento estructural $d_e(t)$ obtenido mediante la expresión anterior con los ofrecidos por el modelo desarrollado en Midas NFX.

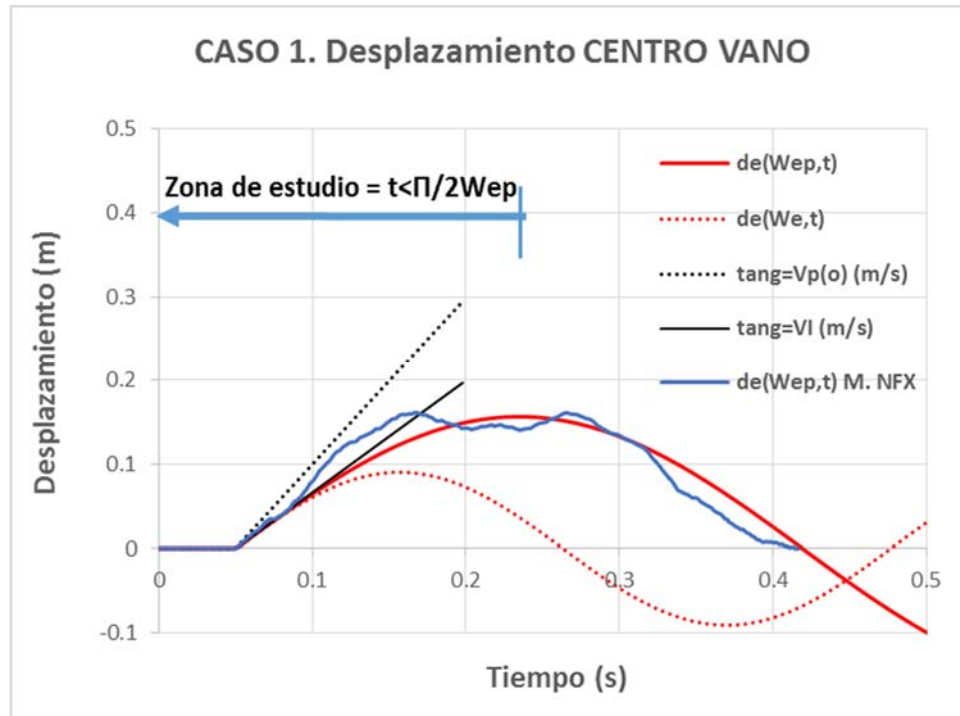


Figura 164- Comparación de deformaciones del punto central de la viga para Midas NFX (azul trazo continuo) y para la formulación desarrollada (rojo trazo continuo) para el caso de $\alpha=2$

En la imagen superior se puede apreciar que la similitud entre los resultados de la formulación desarrollada (trazo rojo continuo) y los resultados ofrecidos por el Midas NFX (trazo azul continuo) sigue siendo muy buena. Incluso fuera de la zona de estudio ($t > \Pi/2w_{ep}$), debido a que el proyectil se mantiene parte del tiempo sobre la estructura, también los resultados se aproximan.

La tendencia de aumentar las vibraciones respecto a la onda fundamental cuanto más pequeño es el parámetro α en los resultados ofrecidos por el Midas NFX, se mantiene. Las razones expuestas en el caso anterior para explicar las diferencias entre los resultados de Midas NFX y de la formulación desarrollada siguen siendo vigentes para este caso.



4.2.4.5 Caso masa del proyectil igual a la masa equivalente de la estructura ($\alpha=1$) y velocidad del proyectil previa al impacto ($V_{p,0}$) de 2 m/s.

Por último en este primer análisis de impactos, el impacto analizado en este apartado consta de una masa proyectil igual a la masa equivalente del modo fundamental de la estructura ($\alpha=1$) y velocidad previa al impacto de 2 m/s. El impacto se producirá en el punto central de una viga cuyas características, al igual que en los apartados anteriores, son idénticas a la expuestas en el apartado 4.1.1.2.

El valor del parámetro $\alpha=1$ hace que estemos en el límite del cumplir con la condición de $M_p > M_e$, y, por tanto, en el límite de la validez de la formulación desarrollada.

Por las razones expuestas en el apartado 4.2.2.2, no es necesario recalcular los parámetros de rigidez y masa equivalente por una posible modificación de la deformada del modo 1 al introducir la masa del proyectil como masa estructural.

Dichos parámetros y la frecuencia de vibración natural de la estructura para el modo 1 resultan:

$$K_e = 84000 \text{ N/m}$$

$$M_e = 392.5 \text{ kg}$$

$$w_e = \sqrt{\frac{K_e}{M_e}} = \sqrt{\frac{84000}{392.5}} = 14.63 \text{ rad/s.}$$

El valor $\alpha=1$, significa que la masa del proyectil es idéntica a la masa estructural equivalente, la cual resulta:

$$M_p = M_e \alpha = 392.5 \times 1 = 392.5 \text{ kg}$$

Como es impacto central y la estructura consta de solo un vano:

$$X(p) = 1$$

$$C_k(M_p) = 1$$

La frecuencia de vibración durante el impacto, en aplicación de la ecuación (329) resulta

$$w_{ep} = \sqrt{\frac{K_e \times C_k(M_p)}{M_e + M_{p,eq}}} = \sqrt{\frac{84000 \times 1}{392.5 + 392.5}} = 10.34 \text{ rad/s}$$



La velocidad inicial en la fase de restitución, calculada según las expresiones (326) y (327), obtiene un valor de:

$$C_m = \frac{M_p}{M_p + M_e} = \frac{392.5}{392.5 + 392.5} = 0.50$$

$$V_I = V_{p,o} C_m = 2 \times 0.5 = 1.00 \text{ m/s}$$

A partir de estos valores, se puede calcular el desplazamiento estructural $d_e(t)$ durante el impacto en aplicación de la ecuación (328):

$$d_e(t) = \frac{1.00 \text{ sen}(10.34 t)}{10.34}$$

En la Figura 165, se comparan los resultados del desplazamiento estructural $d_e(t)$ obtenido mediante la expresión anterior con los ofrecidos por el modelo desarrollado en Midas NFX.

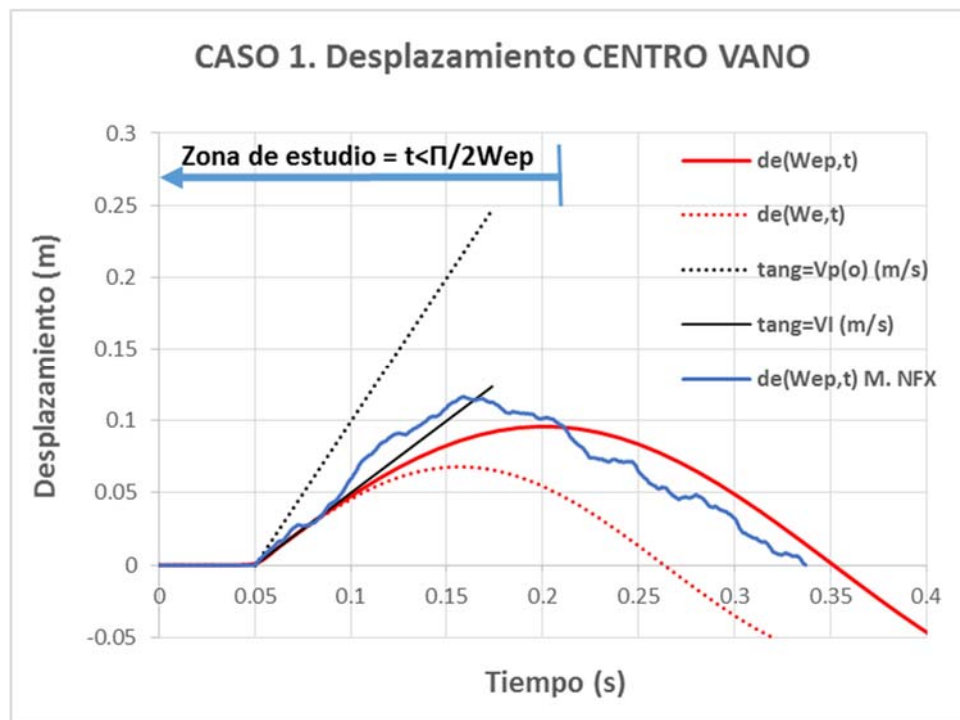


Figura 165- Comparación de deformaciones del punto central de la viga para Midas NFX (azul trazo continuo) y para la formulación desarrollada (rojo trazo continuo) para el caso de $\alpha=1$

En la imagen superior se puede apreciar que la similitud entre los resultados de la formulación desarrollada (trazo rojo continuo) y los resultados ofrecidos por el Midas NFX (trazo azul continuo), es ligeramente menos preciso que en otros casos. No obstante, la formulación desarrollada recoge el aire de la deformación, con una amplitud máxima de la onda y una



frecuencia de vibración relativamente semejante. Fuera de la zona de estudio ($t > \pi/2w_{ep}$), debido a que el proyectil se mantiene poco tiempo sobre la estructura, los resultados difieren más que en las situaciones previas.

En este caso, donde la masa del proyectil va perdiendo importancia, se observa cómo la frecuencia de vibración durante el impacto se parece bastante a la vibración natural sin tener en cuenta la masa del proyectil.

Pese a que estamos en el límite de la validez de la formulación, y la vibración de otros modos distintos al fundamental es importante, es el caso donde mejor se aprecia que la tangente inicial del movimiento tiene el valor de V_I (línea negra continua). Para este caso concreto, esta velocidad es la mitad del valor de la velocidad del proyectil previa al impacto $V_{p,o}$ (línea negra de puntos).

4.2.4.6 *Análisis conjunto.*

Para poder concluir si la formulación desarrollada proporciona resultados aceptables en función del parámetro α , es importante poder visualizar **todos los casos de manera conjunta**. Por este motivo, en la Figura 166 se presentan los cinco casos anteriores que permite tener una visión global de escalas y precisión en los resultados, en función del parámetro α .

En la Figura 166, a diferencia de los análisis individuales, únicamente se representa los resultados del desplazamiento del centro de la viga para la formulación desarrollada mediante la curva roja $d_e(w_{ep}, t)$ y de los resultados ofrecidos por Midas Civil, mediante la curva azul $d_e(w_{ep}, t)_{Midas NFX}$. En el recuadro próximo a ambas curvas, se define el parámetro α de cada caso.

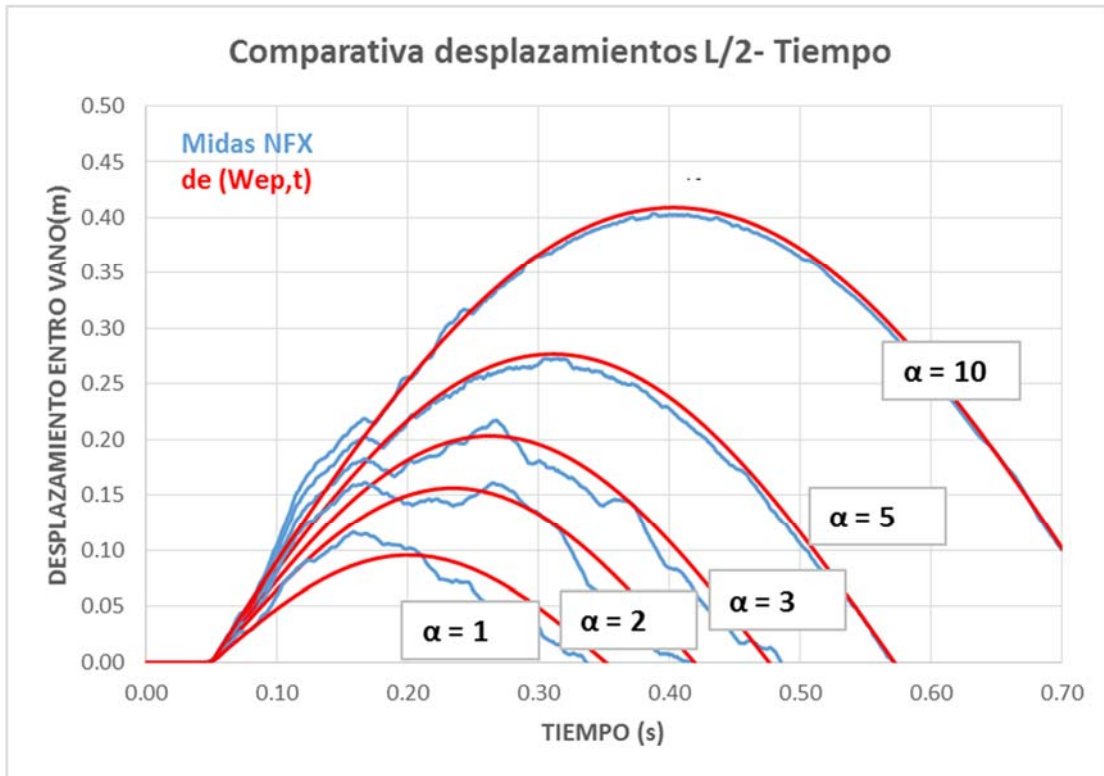


Figura 166-Casuística de desplazamientos producidos en el centro de la viga tras el impacto en dicho punto de un proyectil de masa α veces M_e .

En la vista conjunta de los resultados, se puede apreciar cómo tanto la amplitud del desplazamiento, como la distribución temporal del mismo, es razonablemente bien recogido por la formulación desarrollada.



4.2.5 Análisis del peso propio en los impactos

En la investigación desarrollada en los apartados anteriores a éste, se ha analizado los impactos teniendo en cuenta la masa del proyectil, pero sin tener en cuenta la influencia del peso del proyectil. No considerar el peso, implica que el impacto se produce en la dirección horizontal (perpendicular a la dirección de la gravedad) o que el impacto se produce en la dirección vertical (paralela a la dirección de la gravedad) pero se desprecian sus efectos.

Intuitivamente, parece evidente que en un impacto vertical ocasionado por una masa pequeña que se mueve con una velocidad muy elevada, el peso propio de dicha masa no tiene excesiva importancia dada la cantidad de energía cinética que se transmite en la colisión. Es decir, cuando se dispara una bala, sus efectos sobre el objeto que la recibe no experimenta diferencias si la bala lo penetra en dirección vertical o en dirección horizontal.

Por otra parte, es igualmente intuitivo pensar que en un impacto vertical de una gran masa que se mueve con una velocidad muy pequeña, el peso de dicha masa tendrá un papel principal en los efectos derivados del impacto. Por ejemplo, si una masa de 10 toneladas se deja caer libremente en la vertical de una viga desde 1 mm de altura, en el momento del impacto la masa tendrá una velocidad 0.14m/s. Lógicamente, para este valor de velocidad de colisión, es mucho más brusco si el impacto se produce en sentido vertical, dado el elevado peso del proyectil, que si la misma masa impacta a 0.14 m/s contra la viga en sentido horizontal.

El caso extremo de la influencia del peso del proyectil en un impacto sucedería si una masa se colocase junto a la viga con velocidad nula. Bajo esta condición, en el caso de que el impacto ocurriera en la dirección horizontal, este, lógicamente, no llegaría a producirse. Sin embargo, en el caso de impacto en la dirección vertical, la masa se posaría sobre la viga de manera repentina, con los correspondientes efectos sobre la viga derivados de la aplicación del peso propio como carga dinámica. En este caso de velocidad inicial nula, las consecuencias del “impacto” serían completamente debidas al peso propio del proyectil.

A partir de lo expuesto en los párrafos anteriores, se pone de manifiesto que el peso propio tiene, en general, efectos en un impacto y que, además, estos van siendo menos importantes según aumenta la energía cinética involucrada en la colisión. Esta reflexión, que desde el punto de vista cualitativo es irrefutable, **no se ha concretado hasta ahora por ninguna teoría** previa desde el punto cuantitativo. Es decir, por ejemplo, si se deja caer libremente una masa determinada sobre una estructura desde una altura cualquiera:



- ¿A partir de que valores de altura de caída es importante considerar el peso propio?
¿Esa altura es independiente de la estructura que recibe el impacto?
- Y en el caso contrario, si se fija la altura de caída de la masa ¿a partir de que valores de masa es importante considerar el peso propio del proyectil en el impacto?

Sobre estas cuestiones emerge una pregunta fundamental, que no ha sido resuelta todavía, y que las engloba a todas **¿Cómo se considera el peso propio del proyectil en un impacto?** En el presente apartado se explica cómo hacerlo, y en los apartados sucesivos se muestran ejemplos de aplicación.

Para la consideración del peso propio del proyectil en un impacto, se procederá a realizar un análisis del impacto de manera análoga a lo realizado en el apartado 4.2.3.3 para el estudio del impacto sin influencia del peso propio. De la investigación realizada, además de una nueva formulación, se obtendrá un coeficiente que, previo a los cálculos pertinentes, permita conocer si el peso propio va a tener una influencia relevante en el impacto objeto de estudio.

A continuación, se expone el desarrollo para obtener una formulación que considere la influencia de la gravedad en un impacto.

4.2.5.1 Definición de la ecuación diferencial

Las hipótesis de partida para el análisis del peso propio son las mismas a las expuestas en el apartado 4.2.1 del presente documento.

En el planteamiento inicial del problema, se supone el impacto entre una masa proyectil y un muelle elástico vertical con una masa, según se detalla en la Figura 167. El muelle y la masa unidos que se muestran en dicha figura, representan el punto de contacto del modo fundamental de una estructura cualquiera con el proyectil. En la Figura 167 se representa un instante t genérico durante dicho impacto ($0 < t < t_f$).

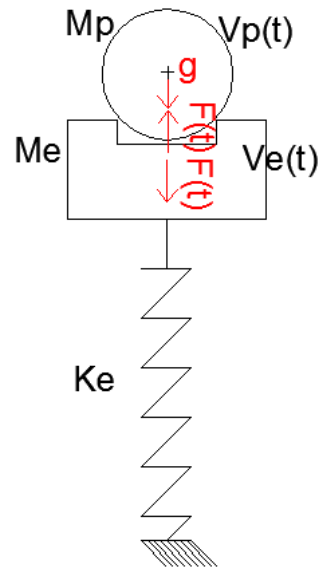


Figura 167-Instante genérico "t" para un impacto vertical considerando peso propio.

Para ese instante t , la estructura solicitada por la fuerza de contacto $F(t)$ existente entre las superficies de ambos cuerpos, habrá sufrido un desplazamiento estructural $d_e(t)$ respecto de su posición inicial $d_e(o)$, y una velocidad asociada a dicho desplazamiento $V_e(t)$.

Por otro lado, para ese instante t también se habrá producido un desplazamiento del proyectil $d_p(t)$ respecto de la posición que tenía en el instante en el que comenzó el impacto $d_p(o)$. El proyectil, por la acción de la fuerza $F(t)$ y por la acción de la gravedad g , habrá modificado su velocidad, siendo esta $V_p(t)$ para el instante genérico t analizado.

El desplazamiento de estructura y proyectil se analiza a partir del primer contacto entre las masas, por lo que los desplazamientos iniciales se consideran nulos ($d_p(o) = d_e(o) = 0$).

De igual manera que en el caso sin considerar la acción de la gravedad, a partir de la hipótesis previa de contacto permanente entre ambas masas puntuales, se puede establecer la condición de compatibilidad siguiente: para el instante genérico t los desplazamientos de estructura y proyectil han de ser iguales $d_p(t) = d_e(t)$.

El desplazamiento del proyectil $d_p(t)$, se plantea como suma de tres términos. Por un lado, el espacio recorrido como si ninguna fuerza actúa sobre él. Es decir, la velocidad en el instante inicial del impacto $V_{p,o}$ multiplicado por el tiempo de impacto t . Por otro lado, el espacio que deja de recorrer debido a la deceleración que provoca la fuerza de contacto $F(t)$. Por último, el término adicional de la acción de la gravedad, que acelerará el proyectil. Este término



representa el espacio recorrido por la masa del proyectil debido exclusivamente a la acción gravitatoria en el tiempo t . Por tanto:

$$d_p(t) = V_{p,o} t - \iint_0^t \frac{F(t)}{M_p} dt + \iint_0^t g dt = V_{p,o} t - \iint_0^t \frac{F(t)}{M_p} dt + \frac{1}{2} g t^2$$

La definición del desplazamiento de la estructura $d_e(t)$ en el instante t , no sufre modificación alguna respecto del análisis sin peso propio del proyectil. Es decir, dado que la estructura parte de una situación de reposo y en equilibrio, únicamente se considera el término del desplazamiento correspondiente a la aceleración sufrida por las fuerzas que actúan sobre la masa estructural. Dos son las fuerzas que actúan sobre ella, por un lado, la fuerza de contacto $F(t)$ y por otro, la fuerza elástica que ejerce el muelle $F(K_e)$ al comprimirse. Esta fuerza elástica, es el resultado de multiplicar la rigidez del muelle por el desplazamiento del mismo. Por tanto:

$$d_e(t) = \iint_0^t \left(\frac{F(t) - F(K_e)}{M_e} \right) dt = \iint_0^t \left(\frac{F(t) - K_e d_e(t)}{M_e} \right) dt$$

Como se ha comentado previamente, dado que el desplazamiento de la estructura es el mismo que el desplazamiento del proyectil ($d_e(t) = d_p(t)$), y este último está definido, la expresión final del desplazamiento de la estructura resulta:

$$d_e(t) = \iint_0^t \left(\frac{F(t) - K_e \left(V_{p,o} t - \iint_0^t \frac{F(t)}{M_p} dt + \frac{1}{2} g t^2 \right)}{M_e} dt \right)$$

Definidos ambos desplazamientos, la ecuación diferencial se plantea sin más que igualar sendas expresiones para compatibilizar desplazamientos:

$$\begin{aligned} & V_{p,o} t - \iint_0^t \frac{F(t)}{M_p} dt + \frac{1}{2} g t^2 \\ &= \iint_0^t \left(\frac{F(t) - K_e \left(V_{p,o} t - \iint_0^t \frac{F(t)}{M_p} dt + \frac{1}{2} g t^2 \right)}{M_e} dt \right) \end{aligned} \quad (334)$$



La ecuación diferencial (334), que resulta de grado 4, se puede expresar de la siguiente manera por componentes:

$$\begin{aligned}
 V_{p,o} t + \frac{1}{2} g t^2 - \iint_0^t \frac{F(t)}{M_p} dt \\
 &= \iint_0^t \frac{F(t)}{M_e} dt \\
 &+ \frac{K_e V_{p,o}}{M_e} \iint_0^t t dt - \frac{1}{2} \frac{g K_e}{M_e} \iint_0^t t^2 dt + \iint_0^t \iint_0^t \frac{F(t) K_e}{M_e M_p} dt
 \end{aligned} \quad (335)$$

Para rebajar el grado de la ecuación diferencial de grado 4 a grado 2, se define el mismo cambio de variable expuesto en las ecuaciones (291) (292) y (293). Si además se integra el término

$\frac{K_e V_{p,o}}{M_e} \iint_0^t t dt$ y el término $\frac{1}{2} \frac{g K_e}{M_e} \iint_0^t t^2 dt$, la ecuación anterior resulta:

$$V_{p,o} t + \frac{1}{2} g t^2 - \frac{\ddot{y}}{M_p} = \frac{\ddot{y}}{M_e} - \frac{K_e V_{p,o}}{6} t^3 - \frac{g t^4 K_e}{24 M_e} + \frac{K_e}{M_p M_e} y \quad (336)$$

Reordenando los términos, se obtiene:

$$\frac{K_e V_{p,o}}{6 M_e} t^3 + \frac{g t^4 K_e}{24 M_e} + V_{p,o} t + \frac{1}{2} g t^2 = \ddot{y} \left(\frac{1}{M_e} + \frac{1}{M_p} \right) + \frac{K_e}{M_e M_p} y \quad (337)$$

$$\left[\frac{K_e V_{p,o}}{6 M_e} t^3 + \frac{g t^4 K_e}{24 M_e} + V_{p,o} t + \frac{1}{2} g t^2 \right] \frac{M_e M_p}{M_e + M_p} = \ddot{y} + \frac{K_e}{M_e + M_p} y \quad (338)$$

En la ecuación (338), igual que se indicó en el análisis sin peso propio, la raíz del término que multiplica la variable y , se le denomina frecuencia conjunta estructura-proyectil durante el impacto w_{ep} . La definición de este parámetro fue expuesta en la ecuación (297). Si se sustituye la ecuación (297) en la ecuación (338), se obtiene la ecuación diferencial del impacto considerando el peso propio:

$$\begin{aligned}
 \ddot{y} + w_{ep}^2 y &= \frac{M_e M_p}{M_e + M_p} \frac{K_e V_{p,o}}{6 M_e} t^3 + \frac{M_e M_p}{M_e + M_p} V_{p,o} t + \frac{g t^4 K_e}{24 M_e} \frac{M_e M_p}{M_e + M_p} \\
 &+ \frac{1}{2} g t^2 \frac{M_e M_p}{M_e + M_p}
 \end{aligned} \quad (339)$$



4.2.5.2 Resolución de la ecuación diferencial

La ecuación (339), obtenida para la resolución del impacto considerando el peso propio del proyectil, es similar a la expresión (298) salvo los dos últimos términos que hacen referencia al valor de aceleración de la gravedad g .

La solución a dicha ecuación diferencial, se expresa en términos de la suma de una solución general más una solución particular según la ecuación (299).

Las componentes de la ecuación (339) que representan la acción gravitatoria, forman parte de la solución particular de la ecuación diferencial. De esta consideración se deduce que la solución general es la misma que en el caso sin peso propio expresada en la ecuación (300), por lo que ha de buscarse únicamente la solución nueva solución particular.

La solución particular se busca en la solución tipo:

$$y_p = C_1 t^4 + C_2 t^3 + C_3 t^2 + C_4 t + C_5 \quad (340)$$

Donde C_1, C_2, C_3, C_4 y C_5 son constantes a determinar. Se determinan a partir de la sustitución de la solución particular en la ecuación general.

Para sustituir la solución particular en la ecuación (339) es necesario obtener sus derivadas primera y segunda:

$$\dot{y}_p = 4C_1 t^3 + 3C_2 t^2 + 2C_3 t + C_4 \quad (341)$$

$$\ddot{y}_p = 12C_1 t^2 + 6C_2 t + 2C_3 \quad (342)$$

Sustituyendo las ecuaciones (340) y (342) en la ecuación (339) se obtiene:

$$\begin{aligned} & 12C_1 t^2 + 6C_2 t + 2C_3 + w_{ep}^2 (C_1 t^4 + C_2 t^3 + C_3 t^2 + C_4 t + C_5) \\ &= \frac{M_e M_p}{M_e + M_p} \frac{K_e V_{p,o}}{6M_e} t^3 + \frac{M_e M_p}{M_e + M_p} V_{p,o} t \\ &+ \frac{g t^4 K_e}{24M_e} \frac{M_e M_p}{M_e + M_p} + \frac{1}{2} g t^2 \frac{M_e M_p}{M_e + M_p} \end{aligned} \quad (343)$$

Si se igualan término a término los elementos de la ecuación (343) se puede determinar los valores de las constantes:

$$\begin{aligned} C_1 &= \frac{g M_p}{24} \\ C_2 &= \frac{M_p V_{p,o}}{6} \end{aligned} \quad (344)$$



$$C_3 = -\frac{gM_p^2}{2K_e}$$

$$C_4 = -\frac{M_p^2 V_{p,o}}{K_e}$$

$$C_5 = \frac{gM_p^2}{K_e w_{ep}^2}$$

A partir de estos valores para las constantes, se puede obtener la solución particular sustituyendo dichas constantes de la ecuación (344) en la ecuación (340), resultado:

$$y_p = \frac{gM_p}{24} t^4 + \frac{M_p V_{p,o}}{6} t^3 - \frac{gM_p^2}{2K_e} t^2 - \frac{M_p^2 V_{p,o}}{K_e} t + \frac{gM_p^2}{K_e w_{ep}^2} \quad (345)$$

Una vez obtenida la solución particular, la solución general se expresa sustituyendo la ecuación (345) y la ecuación (300) en la ecuación (299):

$$y = A \cos(w_{ep} t) + B \operatorname{sen}(w_{ep} t) + \frac{gM_p}{24} t^4 + \frac{M_p V_{p,o}}{6} t^3 - \frac{gM_p^2}{2K_e} t^2 - \frac{M_p^2 V_{p,o}}{K_e} t + \frac{gM_p^2}{K_e w_{ep}^2} \quad (346)$$

La ecuación (346) es, a falta de determinar las constantes A y B mediante la aplicación de las condiciones de contorno, la solución definitiva a la ecuación diferencial general considerando el peso propio. Dado que en los puntos sucesivos van a ser necesarias, se obtienen a continuación las derivadas de la ecuación (346):

$$\dot{y} = -A w_{ep} \operatorname{sen}(w_{ep} t) + B w_{ep} \cos(w_{ep} t) + \frac{gM_p}{6} t^3 + \frac{M_p V_{p,o}}{2} t^2 - \frac{gM_p^2}{K_e} t - \frac{M_p^2 V_{p,o}}{K_e} \quad (347)$$

$$\ddot{y} = -A w_{ep}^2 \cos(w_{ep} t) - B w_{ep}^2 \operatorname{sen}(w_{ep} t) + \frac{gM_p}{2} t^2 + M_p V_{p,o} t - \frac{gM_p^2}{K_e} \quad (348)$$

Si se deshace el cambio de la variable expuesto según las ecuaciones (291) y (292), se puede calcular la función que determina la fuerza de contacto $F(t)$:

$$\ddot{y} = A w_{ep}^3 \operatorname{sen}(w_{ep} t) - B w_{ep}^3 \cos(w_{ep} t) + gM_p t + M_p V_{p,o} \quad (349)$$

$$\frac{d^4 y}{dt^4} = F(t) = A w_{ep}^4 \cos(w_{ep} t) + B w_{ep}^4 \operatorname{sen}(w_{ep} t) + g M_p \quad (350)$$



4.2.5.3 Condiciones de contorno

Para obtener la solución completa al caso concreto de estudio es necesario que la ecuación (346) satisfaga las condiciones de contorno del problema. Como condiciones de contorno, se aplican las 2 restricciones siguientes:

1ª Condición –Desplazamiento nulo para $t=0$ en estructura y en proyectil. Por comodidad de cálculo se aplica en el desplazamiento del proyectil. Es decir:

$$d_p(t = 0) = 0 \quad (351)$$

El desplazamiento del proyectil se ha definido:

$$d_p(t) = V_{p,o} t + \frac{1}{2} g t^2 - \iint_0^t \frac{F(t)}{M_p} = V_{p,o} t + \frac{1}{2} g t^2 - \frac{\dot{y}}{M_p} = de(t) \quad (352)$$

A partir de sustituir la ecuación (348) en la ecuación (352) se obtiene:

$$d_p(t) = V_{p,o} t + \frac{1}{2} g t^2 - \frac{1}{M_p} (-A w_{ep}^2 \cos(w_{ep} t) - B w_{ep}^2 \text{sen}(w_{ep} t) + \frac{g M_p}{2} t^2 + M_p V_{p,o} t - \frac{g M_p^2}{K_e}) \quad (353)$$

Si se aplica la condición de contorno expresada mediante la ecuación (351) en la ecuación (353), se obtiene el valor de la constante A:

$$A = -\frac{g M_p^2}{K_e} \quad (354)$$

2ª Condición - La velocidad inicial del proyectil en el instante posterior al contacto entre masas, ha de ser la velocidad inicial V_I . Esta velocidad, por las mismas razones de las expuestas en el estudio sin considerar el peso propio expuesto en el apartado 4.2.3, se obtiene a partir de la expresión (325). Por tanto:

$$V_p(t = 0) = V_I \quad (355)$$

La velocidad del proyectil para un tiempo t cualquiera se obtiene derivando la ecuación (353). Si se sustituye en dicha derivada el valor de la constante obtenida en la ecuación (354), resulta:



$$V_p(t) = V_{p,o} + gt - \frac{1}{M_p} \left(\left(-\frac{gM_p^2}{K_e} \right) w_{ep}^3 \operatorname{sen}(w_{ep} t) - B w_{ep}^3 \operatorname{cos}(w_{ep} t) \right) \quad (356)$$

$$+ gM_p t + M_p V_{p,o}$$

Si se aplica la condición de contorno (355) en la ecuación (356) se obtiene el valor de la constante B :

$$B = \frac{V_I M_p}{w_{ep}^3} \quad (357)$$

La solución general a la ecuación diferencial, se obtiene sustituyendo las constantes A y B obtenidas en las ecuaciones (354) y (357), respectivamente, en la ecuación (346). La solución completa a la ecuación diferencial del impacto considerando la influencia del peso propio del proyectil resulta finalmente:

$$y = -\frac{gM_p^2}{K_e} \operatorname{cos}(w_{ep} t) + \frac{V_I M_p}{w_{ep}^3} \operatorname{sen}(w_{ep} t) + \frac{gM_p}{24} t^4 + \frac{M_p V_{p,o}}{6} t^3$$

$$- \frac{gM_p^2}{2K_e} t^2 - \frac{M_p^2 V_{p,o}}{K_e} t + \frac{gM_p^2}{K_e w_{ep}^2} \quad (358)$$

4.2.5.4 Formulación desarrollada para impactos considerando la influencia del peso propio del proyectil.

El desarrollo realizado en el apartado anterior para el estudio de impactos teniendo en cuenta la influencia del peso propio, se basa, en la condición adicional expuesta en el apartado 4.2.3 para impactos sin peso propio, y en las hipótesis sobre la secuencia del impacto que en él se describen.

La formulación definitiva para la deformación estructural en el caso de impactos considerando el peso propio se obtiene sustituyendo en la ecuación (352) la ecuación (348). Sobre la ecuación resultante, se sustituye el valor obtenido de las constantes en las expresiones (354) y (357). La ecuación resultante es la siguiente:

$$d_e(t) = \frac{V_I \operatorname{sen}(w_{ep} t)}{w_{ep}} + \frac{gM_p}{K_e} (1 - \operatorname{cos}(w_{ep} t)) \quad (359)$$

La ecuación (359) describe el desplazamiento estructural en un impacto como la suma de dos términos. El primero de ellos es idéntico al obtenido en el análisis de impactos sin peso propio



en la ecuación (328). Debido a que este término depende de la velocidad inicial del proyectil se le denomina **termino cinético** $d_{e,vp}(t)$:

$$d_{e,vp}(t) = \frac{V_I \operatorname{sen}(w_{ep} t)}{w_{ep}} \quad (360)$$

El otro término presente en la ecuación (359), es el término adicional al caso de impacto sin considerar el peso propio del proyectil. Este término depende de la acción de la gravedad, por lo que le denomina **termino gravitatorio** o de peso propio $d_{e,pp}(t)$.

$$d_{e,pp}(t) = \frac{gM_p}{K_e} (1 - \cos(w_{ep} t)) \quad (361)$$

Ambos términos, cinético y de peso propio, son independientes entre sí, y, en función del caso concreto, tendrán una importancia distinta en el desplazamiento estructural total.

Una manera sencilla y rápida de evaluar si el peso propio es relevante en el impacto o no, es, a partir de las ecuaciones (360) y (361), obtener una razón de proporcionalidad entre el término cinético y el termino gravitatorio. Para ello se comparan los desplazamientos que ambos términos pueden desarrollar para el instante donde el término cinético alcanza su máxima amplitud, es decir, para $t = \frac{T_{ep}}{4}$. Del cociente de ambos valores, se obtiene la definición del coeficiente de peso propio C_{pp} :

$$C_{pp} = \frac{gM_p/K_e}{V_I/w_{ep}} = \frac{g}{V_{p,o} w_{ep}} \quad (362)$$

Si $C_{pp} \gg 2$ el término cinético es depreciable, mientras que si $C_{pp} \approx 0$ lo es el término del peso propio. Como regla de buena práctica se propone que cuando $C_{pp} > 0.1$ es aconsejable considerar la influencia del peso propio. Esta regla equivale aproximadamente a decir que si $C_{pp} = 0.1$, la contribución del peso propio al desplazamiento estructural total es menor al 10% respecto del total. De la ecuación (362) se deduce que las estructuras más rígidas, para las mismas condiciones de impacto, se ven menos influenciadas por el efecto derivado del peso propio del proyectil.

Para obtener la fuerza de contacto en un impacto considerando la influencia del peso propio, se ha de sustituir las ecuaciones (354) y (357) en la ecuación (350), resultando:

$$F(t) = M_p w_{ep} V_I \operatorname{sen}(w_{ep} t) + g M_p \left(1 - \frac{M_p}{M_e + M_p} \cos(w_{ep} t)\right) \quad (363)$$

Análogamente a lo que se sucede en el desplazamiento, la consideración de la influencia de la gravedad en el impacto añade un término en la solución a la fuerza de contacto respecto de la



solución sin dicha consideración, expuesta en la ecuación (332). Es decir, se puede considerar que la fuerza de contacto también se descompone en el término de fuerza cinético $F_{Vp}(t)$ y en el término de fuerza gravitatorio o de peso propio $F_{pp}(t)$.

$$F(t) = F_{Vp}(t) + F_{pp}(t)$$

$$F_{Vp}(t) = M_p w_{ep} V_I \text{sen}(w_{ep} t)$$

$$F_{pp}(t) = g M_p \left(1 - \frac{M_p}{M_e + M_p} \cos(w_{ep} t)\right)$$

La expresión (363) indica que para $t=0$, la fuerza es distinta de cero y menor al peso propio del proyectil. Este hecho es debido a que existe previamente la fase inicial de aproximación, definida en el apartado 4.2.3.1, y eso produce que la masa del proyectil ya gravite parcialmente sobre la estructura en la fase de restitución.

A partir de la ecuación (363), se plantea, a modo de ejemplo, el siguiente caso de impacto: se posa de manera repentina y sin velocidad la masa de un proyectil sobre una estructura de masa despreciable. Es decir, la velocidad del proyectil previa al impacto es nula y, por tanto, no existe término cinético. Además, la masa de la estructura es nula, por lo que no hay términos inerciales derivados del movimiento de la estructura. Bajo estas condiciones, la ecuación (363) se simplifica a la expresión:

$$F(t) = g M_p (1 - \cos(w_{ep} t))$$

Donde la fuerza máxima que se produce resulta:

$$F_{max} = 2gM_p = 2F_{estatica}$$

Es decir, la fuerza máxima de contacto obtenida según la formulación converge con la situación dinámica clásica donde el axil máximo producido sobre un muelle elástico sin masa, bajo la aplicación de una fuerza de manera repentina, es dos veces la fuerza estática.



- Desarrollo de teoría sobre impactos -
- Método simplificado de cálculo de impactos en estructuras -





4.2.6 Aplicación a vigas sometidas a impactos de masas grandes incluyendo el efecto del peso propio

Durante el apartado 4.2.6 se va a analizar impactos sobre el punto central de una viga de un vano simplemente apoyada, como muestra la Figura 168. La viga objeto de estudio, es la viga descrita en el apartado 4.1.1.2. Es decir, viga metálica de 10 m de longitud y sección de 0.1m x 0.1 m.

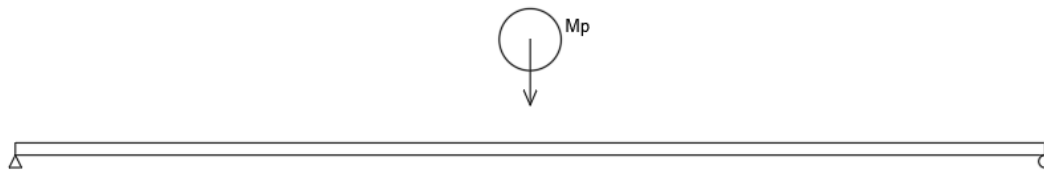


Figura 168-Impacto en centro de luz de viga metálica con consideración de peso propio. Impacto vertical.

Del mismo modo que se ha procedido con la formulación que no tiene en cuenta el efecto del peso propio, para comprobar la nueva formulación que sí tiene en cuenta la influencia del peso propio del proyectil, los resultados de la ecuación (359) se comparan con los obtenidos por el programa de elementos finitos Midas NFX. A la hora de modelar el impacto en este software, se han de considerar las hipótesis de partida expuestas en 4.2.1. Es decir, la masa M_p ha de ser “puntual” e “indeformable”. Para aproximarse a esta situación, se modela M_p mediante un prisma de reducidas dimensiones (0.1 m x 0.2m x 0.1 m) y se le asigna un material de módulo de elasticidad 1000 veces el del acero ($2.1 \times 10^{14} \text{ N/m}^2$). La densidad del material que se otorga a la masa del proyectil es variable en función del caso analizado, y será, en cada caso, la densidad que proporcione la relación entre la masa del proyectil y la masa equivalente de la estructura (parámetro $\alpha=M_p/M_e$) buscada. Para la asignación de la velocidad al proyectil, se posiciona a una determinada altura sobre la viga con velocidad inicial nula y bajo la acción de una aceleración mantenida hacia la viga de valor 9.806 m/s.

En la Figura 169 se muestra el modelo desarrollado de viga y proyectil “puntual” en el software Midas NFX. El modelo será el mismo en cada caso analizado, únicamente modificado por la densidad de la masa proyectil.

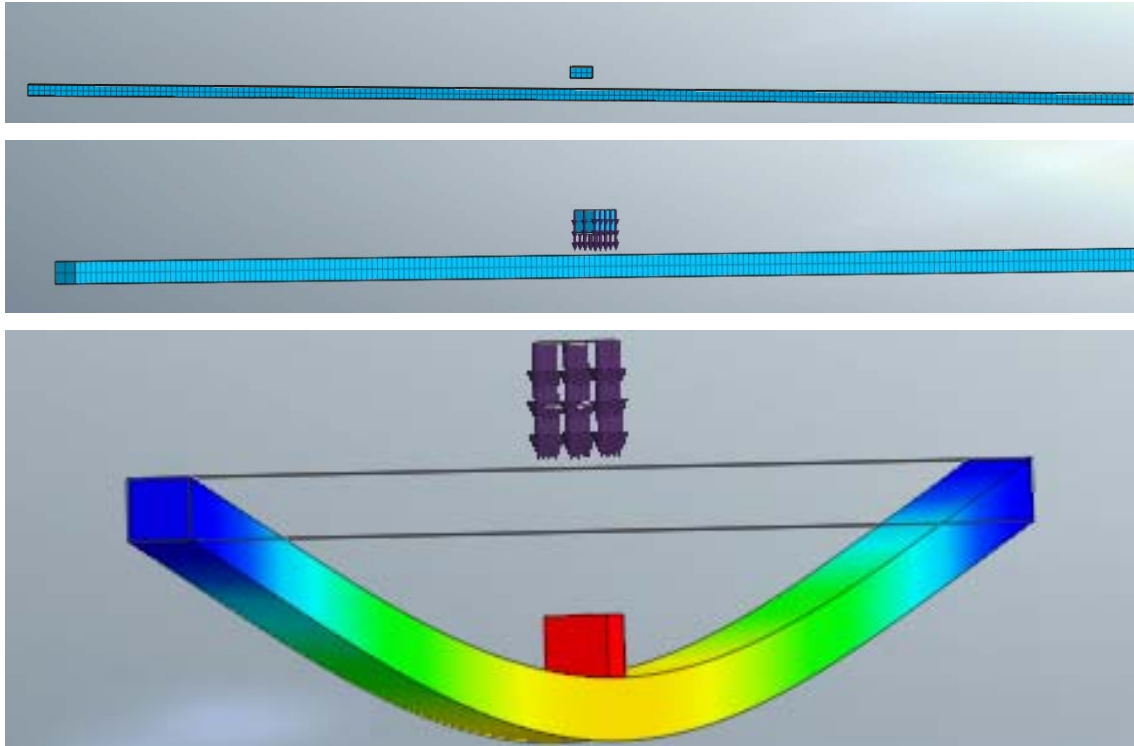


Figura 169-Modelo de elementos finitos en Midas NFX para el estudio de impactos considerando el peso propio.

El tipo de análisis que se realiza en el Midas NFX es un análisis no lineal tipo explícito (explicado en el apartado 2.4.5) de 0.7 segundos de duración y un incremento de tiempo para la integración de 0.0005 segundos. Se ha utilizado elementos sólidos tanto para la viga como para el proyectil.

Los casos analizados en total para la verificación de la nueva formulación son cinco.

- En primer lugar, y dado que los impactos con un coeficiente α grande son más precisos desde el punto de vista de la formulación desarrollada, se analiza un único impacto con una masa de proyectil de $\alpha=5$. Se posiciona el proyectil a una altura sobre la viga tal que en el momento del impacto éste se produzca con una velocidad de 1.4 m/s. Este impacto tiene las características adecuadas para que el término gravitatorio presente una importancia superior al término cinético, presentando un $C_{pp}=1.17$. El parámetro C_{pp} evalúa la importancia del efecto del peso propio del proyectil con respecto al término cinético del impacto y se ha deducido su expresión (362) en el apartado 4.2.5.4.
- En segundo lugar, y para una relación de masas entre proyectil y estructura menor (α menor), se analizan cuatro casos de impactos con distintos valores de coeficientes de peso propio C_{pp} . Es decir, con distintos grados de la influencia del peso propio en el impacto. En concreto, se estudia el impacto de una masa M_p , de coeficiente $\alpha=3$, con una velocidad previa al impacto variable. Se analizarán los 4 casos con los siguientes valores de velocidades previa al contacto: 0.4m/s, 1.4m/s, 5m/s y 10 m/s que



proporcionan, respectivamente, los siguientes coeficientes de peso propio $C_{pp}=9.5$, $C_{pp}=0.95$, $C_{pp}=0.27$ y $C_{pp}=0.13$. Es decir, una casuística de casos que varía desde un impacto donde el término gravitatorio es prácticamente el único existente, a un impacto que, a pesar de considerar el peso propio, su influencia es prácticamente despreciable.

4.2.6.1 Caso masa del proyectil cinco veces la masa equivalente de la estructura ($\alpha=5$) y velocidad del proyectil previa al impacto ($V_{p,0}$) de 1.4 m/s. Alta influencia del peso propio del proyectil en el impacto ($C_{pp} = 1.17$).

El impacto analizado en este apartado consta de una masa de proyectil con un valor de $\alpha=5$ y una altura de caída que proporciona una velocidad inicial de 1.4 m/s. El impacto se produce en el punto central de una viga cuyas características son idénticas a la expuestas en el apartado 4.1.1.2. Las características de este impacto suponen un coeficiente C_{pp} de valor 1.17, que predice un desplazamiento estructural donde ambos términos, cinético y gravitatorio, están presentes, aunque con mayor importancia del gravitatorio.

Los valores de rigidez y masa equivalente han sido calculados en los apartados 4.1.1.2 y 4.1.2.1 respectivamente. Estos valores, por las razones expuestas en los apartados 4.2.4.1 y 4.2.4.2, no es necesario recalcularlos debido a una posible modificación de la deformada del modo 1 al introducir la masa del proyectil como masa estructural. Ambos parámetros, y la frecuencia de vibración natural del modo 1 derivados de ellos, tienen los siguientes valores:

$$K_e = 84000 \text{ N/m}$$

$$M_e = 392.5 \text{ kg}$$

$$w_e = \sqrt{\frac{K_e}{M_e}} = \sqrt{\frac{84000}{392.5}} = 14.63 \text{ rad/s}$$

Como $\alpha=5$, significa que la masa del proyectil resulta:

$$M_p = M_e \alpha = 392.5 \times 5 = 1962.5 \text{ kg}$$

Como es impacto central y la estructura consta de sólo un vano:

$$X(p) = 1$$



$$C_k(M_p) = 1$$

La frecuencia de vibración durante el impacto, en aplicación de la ecuación (329), resulta:

$$w_{ep} = \sqrt{\frac{K_e \times C_k(M_p)}{M_e + M_{p,eq}}} = \sqrt{\frac{84000 \times 1}{392.5 + 1962.5}} = 5.97 \text{ rad/s}$$

La velocidad inicial en la fase de restitución, calculada según las expresiones (326) y (327), obtiene un valor de:

$$C_m = \frac{M_p}{M_p + M_e} = \frac{1962.5}{1962.5 + 392.5} = 0.83$$

$$V_I = V_{p,o} \times C_m = 1.4 \times 0.83 = 1.17 \text{ m/s}$$

Si se sustituyen estos parámetros en la ecuación (360), el desplazamiento de la estructura en función del tiempo resulta para el término cinético:

$$d_{e,vp}(t) = \frac{1.17 \text{ sen}(5.97 t)}{5.97}$$

El cálculo del valor del coeficiente del peso propio obtenido en la ecuación (362) es el siguiente:

$$C_{pp} = \frac{g}{V_{p,o} w_{ep}} = \frac{9.806}{1.4 \times 5.97} 1.17 \gg 0.1$$

Este valor de C_{pp} indica que el efecto del peso propio ha de ser tenido en cuenta al ser $1.17 \gg 0.1$. Este hecho, como se ha comentado anteriormente, quiere decir que efecto de peso propio tendrá una influencia mayor que el término cinético en el valor de la deformada máxima. El término de peso propio, se obtiene a partir de la expresión (361):

$$d_{e,pp}(t) = \frac{gM_p}{K_e} (1 - \cos(w_{ep}t))$$

$$d_{e,pp}(t) = \frac{9.806 \times 1962.5}{84000} (1 - \cos(5.97t))$$

Sumando los términos cinético y gravitatorio según la ecuación (359), se obtiene la deformada estructural $d_e(t)$.

$$d_e(t) = \frac{1.17 \text{ sen}(5.97 t)}{5.97} + \frac{9.806 \times 1962.5}{84000} (1 - \cos(5.97t))$$

En la Figura 170 se comparan los resultados del desplazamiento estructural $d_e(t)$ obtenido mediante la expresión anterior con los ofrecidos por el modelo desarrollado en Midas NFX.

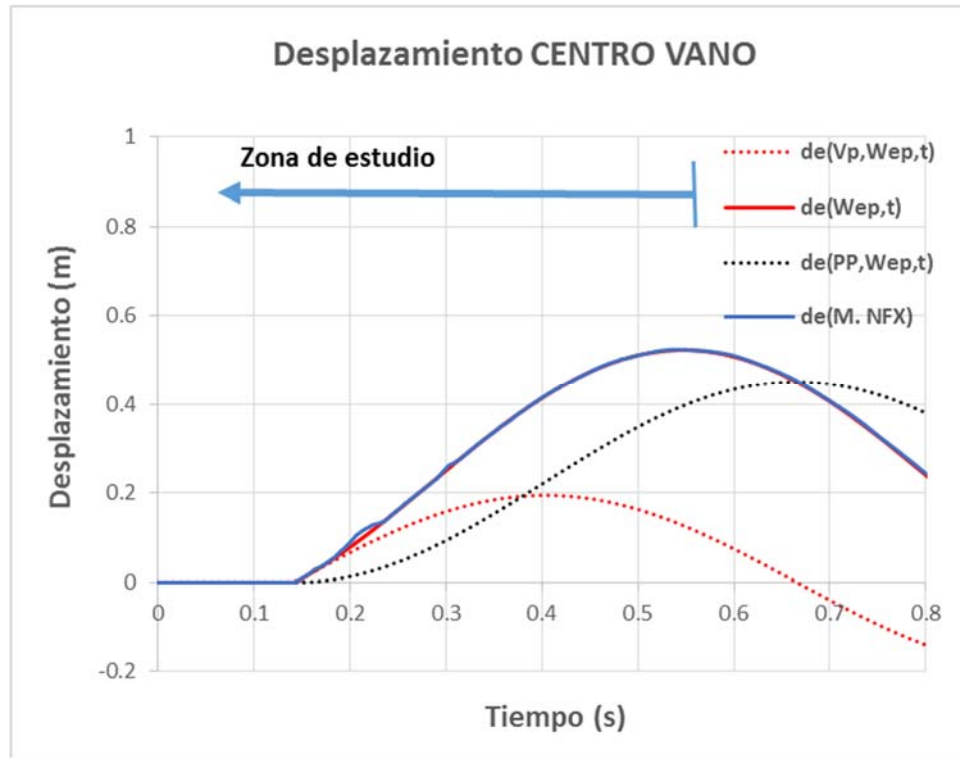


Figura 170-Comparativa de deformadas entre Midas NFX y la formulación desarrollada para $\alpha=5$ y $V_p(o)=1.4$ m/s considerando el efecto del peso propio.

En la gráfica superior, con línea discontinua roja ($de(V_p, Wep, t)$) se puede ver los resultados del término cinético de manera aislada. De igual forma, en línea discontinua negra ($de(PP, Wep, t)$) se muestra el término de peso propio de manera aislada. Se puede apreciar que la amplitud del término de peso propio es del orden del doble de la amplitud del término cinético.

La suma de ambos términos, en línea continua roja ($de(Wep, t)$), prácticamente **se superpone** con los resultados ofrecidos por el Midas NFX ($de(M. NFX)$) mostrados en la línea azul. Como se puede observar, los resultados entre ambas curvas son muy próximos, prácticamente coincidentes.

Los resultados entre Midas NFX y la formulación desarrollada son coincidentes para un $\alpha=5$. En el resto de casos analizados en el apartado 4.2.6, se reduce la masa M_p para analizar los resultados con el parámetro $\alpha=3$. No obstante, para que los coeficientes C_{pp} varíen y observar la influencia del peso propio en diferentes situaciones, se analizan impactos con distintas velocidades iniciales.



4.2.6.2 Caso masa del proyectil tres veces la masa equivalente de la estructura ($\alpha=3$) y velocidad del proyectil previa al impacto ($V_{p,0}$) de 0.4 m/s. Total influencia del peso propio del proyectil en el impacto ($C_{pp} = 9.6$).

El impacto analizado en este apartado consta de una masa proyectil que proporciona un valor de $\alpha=3$ y una altura de caída que proporciona una velocidad inicial de 0.4 m/s. El impacto se produce en el punto central de una viga cuyas características son idénticas a la expuestas en el apartado 4.1.1.2. Las características de este impacto suponen un coeficiente C_{pp} de valor 9.6, que predice un desplazamiento estructural donde el término gravitatorio es, en la práctica, el único presente.

Los valores de rigidez y masa equivalente han sido calculados en los apartados 4.1.1.2 y 4.1.2.1 respectivamente. Estos valores, por las razones expuestas en los apartados 4.2.4.1 y 4.2.4.2, no es necesario recalcularlos debido a una posible modificación de la deformada del modo 1 al introducir la masa del proyectil como masa estructural. La frecuencia de vibración natural del modo 1 derivada de ambos parámetros resulta:

$$K_e = 84000 \text{ N/m}$$

$$M_e = 392.5 \text{ kg}$$

$$w_e = \sqrt{\frac{K_e}{M_e}} = \sqrt{\frac{84000}{392.5}} = 14.63 \text{ rad/s}$$

Como $\alpha=3$, significa que la masa del proyectil resulta:

$$M_p = M_e \alpha = 392.5 \times 3 = 1177.5 \text{ kg}$$

Como es impacto central y la estructura consta de solo un vano:

$$X(p) = 1$$

$$C_k(M_p) = 1$$

La frecuencia de vibración durante el impacto, en aplicación de la ecuación (329), resulta:

$$w_{ep} = \sqrt{\frac{K_e \times C_k(M_p)}{M_e + M_{p,eq}}} = \sqrt{\frac{84000 \times 1}{392.5 + 1177.5}} = 7.31 \text{ rad/s}$$



La velocidad inicial en la fase de restitución, calculada según las expresiones (326) y (327), obtiene un valor de:

$$C_m = \frac{M_p}{M_p + M_e} = \frac{1177.5}{1177.5 + 392.5} = 0.75$$

$$V_I = V_{p,o} \times C_m = 0.14 \times 0.75 = 0.11 \text{ m/s}$$

Si se sustituyen estos parámetros en la ecuación (360), el desplazamiento de la estructura en función del tiempo resulta para el término cinético:

$$d_{e,vp}(t) = \frac{0.11 \operatorname{sen}(7.31 t)}{7.31}$$

El cálculo del valor del coeficiente del peso propio es el siguiente:

$$C_{pp} = \frac{g}{V_{p,o} w_{ep}} = \frac{9.806}{0.14 \times 7.31} = 9.6 \gg 0.1$$

Este valor de C_{pp} indica que el efecto del peso propio ha de ser tenido en cuenta pues al ser $9.6 \gg 0.1$, es un valor muy elevado que significa que prácticamente la totalidad del desplazamiento estructural es debido por el término gravitatorio. Dicho término se calcula a partir de la expresión (361):

$$d_{e,pp}(t) = \frac{gM_p}{K_e} (1 - \cos(w_{ep}t))$$

$$d_{e,pp}(t) = \frac{9.806 \times 1175.5}{84000} (1 - \cos(7.31t))$$

Sumando ambos términos, según la ecuación (359), se obtiene la deformada estructural.

$$d_e(t) = \frac{0.11 \operatorname{sen}(7.31 t)}{7.31} + \frac{9.806 \times 1175.5}{84000} (1 - \cos(7.31t))$$

En la Figura 171 se comparan los resultados del desplazamiento estructural $d_e(t)$ obtenido mediante la expresión anterior con los ofrecidos por el modelo desarrollado en Midas NFX.

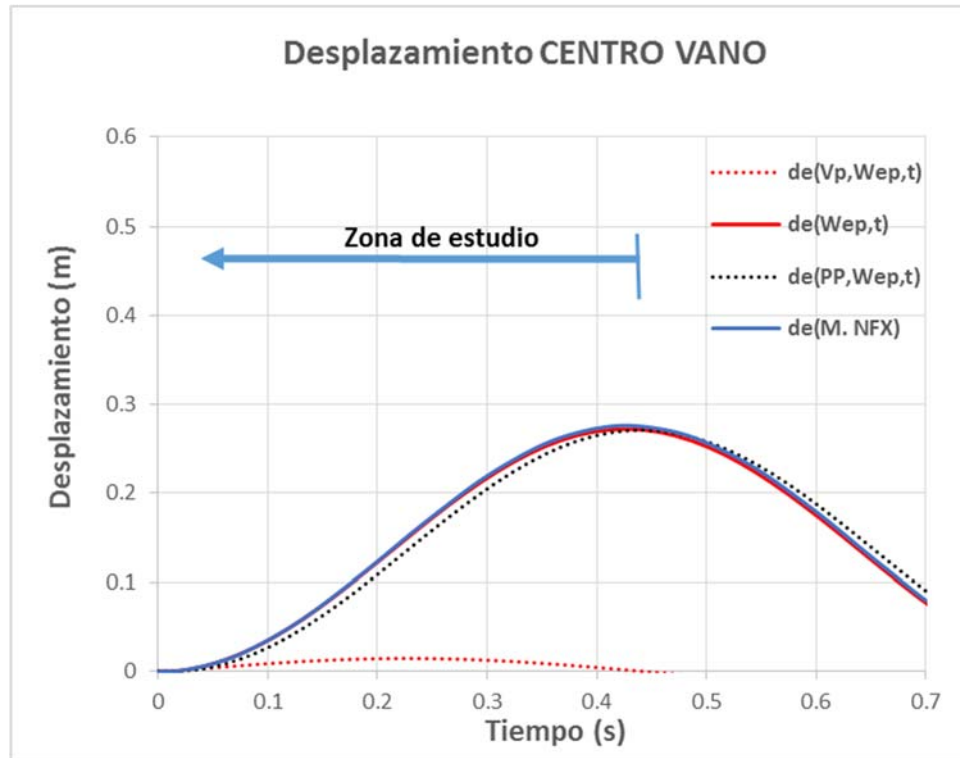


Figura 171- Comparativa de deformadas entre Midas NFX y la formulación desarrollada para $\alpha=3$ y $Vp(o)=0.14$ m/s considerando el efecto del peso propio

En la gráfica superior, con línea roja discontinua ($de(Vp,Wep,t)$) se puede ver los resultados del término cinético de manera aislada. De igual forma, en línea discontinua negra ($de(PP,Wep,t)$) se muestra el término de peso propio de manera aislada. Se puede apreciar claramente que la amplitud del término cinético es prácticamente despreciable.

La suma de ambos términos, en línea continua roja ($de(Wep,t)$), prácticamente **se superpone** con los resultados ofrecidos por el Midas NFX ($de(M.NFX)$). Como se puede observar, los resultados entre ambas curvas son muy próximos, prácticamente coincidentes.



4.2.6.3 Caso masa del proyectil tres veces la masa equivalente de la estructura ($\alpha=3$) y velocidad del proyectil previa al impacto ($V_{p,0}$) de 1.4 m/s. Alta influencia del peso propio del proyectil en el impacto ($C_{pp} = 0.96$).

El impacto analizado en este apartado consta de una masa proyectil que proporciona un valor de $\alpha=3$ y una altura de caída que proporciona una velocidad inicial de 1.4 m/s. El impacto se produce en el punto central de una viga cuyas características son idénticas a la expuestas en el apartado 4.1.1.2. Las características de este impacto suponen un coeficiente C_{pp} de valor 0.96 que predice un desplazamiento estructural donde el término gravitatorio es sensiblemente mayor al cinético, aunque éste no es despreciable.

Los valores de rigidez y masa equivalente han sido calculados en los apartados 4.1.1.2 y 4.1.2.1 respectivamente. Estos valores, por las razones expuestas en los apartados 4.2.4.1 y 4.2.4.2, no es necesario recalcularlos debido a una posible modificación de la deformada del modo 1 al introducir la masa del proyectil como masa estructural. La frecuencia de vibración natural del modo 1 derivada de ambos parámetros resulta:

$$K_e = 84000 \text{ N/m}$$

$$M_e = 392.5 \text{ kg}$$

$$w_e = \sqrt{\frac{K_e}{M_e}} = \sqrt{\frac{84000}{392.5}} = 14.63 \text{ rad/s}$$

Como $\alpha=3$, significa que la masa del proyectil resulta:

$$M_p = M_e \alpha = 392.5 \times 3 = 1177.5 \text{ kg}$$

Como es impacto central y la estructura consta de solo un vano:

$$X(p) = 1$$

$$C_k(M_p) = 1$$

La frecuencia de vibración durante el impacto, en aplicación de la ecuación (329), resulta:

$$w_{ep} = \sqrt{\frac{K_e \times C_k(M_p)}{M_e + M_{p,eq}}} = \sqrt{\frac{84000 \times 1}{392.5 + 1177.5}} = 7.31 \text{ rad/s}$$



La velocidad inicial en la fase de restitución, calculada según la expresión (326) y (327), obtiene un valor de:

$$C_m = \frac{M_p}{M_p + M_e} = \frac{1177.5}{1177.5 + 392.5} = 0.75$$

$$V_I = V_{p,o} \times C_m = 1.4 \times 0.75 = 1.05 \text{ m/s}$$

Si se sustituyen estos parámetros en la ecuación (360), el desplazamiento de la estructura en función del tiempo resulta para el término cinético:

$$d_{e,vp}(t) = \frac{1.05 \operatorname{seno}(7.31 t)}{7.31}$$

El cálculo del valor del coeficiente del peso propio es el siguiente:

$$C_{pp} = \frac{g}{V_{p,o} w_{ep}} = \frac{9.806}{1.40 \times 7.31} = 0.96 \gg 0.1$$

Este valor de C_{pp} indica que el efecto del peso propio ha de ser tenido en cuenta pues $0.96 > 0.1$. Este hecho, como se ha comentado anteriormente, quiere decir que el efecto de peso propio del proyectil tendrá una influencia mayor al término cinético en el valor de la deformada máxima. El término de peso propio, se obtiene a partir de la expresión (361):

$$d_{e,pp}(t) = \frac{gM_p}{K_e} (1 - \cos(w_{ep}t))$$

$$d_{e,pp}(t) = \frac{9.806 \times 1175.5}{84.00} (1 - \cos(7.31t))$$

Sumando ambos términos, se obtiene la deformada total.

$$d_e(t) = \frac{1.05 \operatorname{seno}(7.37 t)}{7.31} + \frac{9.806 \times 1175.5}{84.00} (1 - \cos(7.31t))$$

En la Figura 172 se comparan los resultados del desplazamiento estructural $d_e(t)$ obtenido mediante la expresión anterior con los ofrecidos por el modelo desarrollado en Midas NFX.

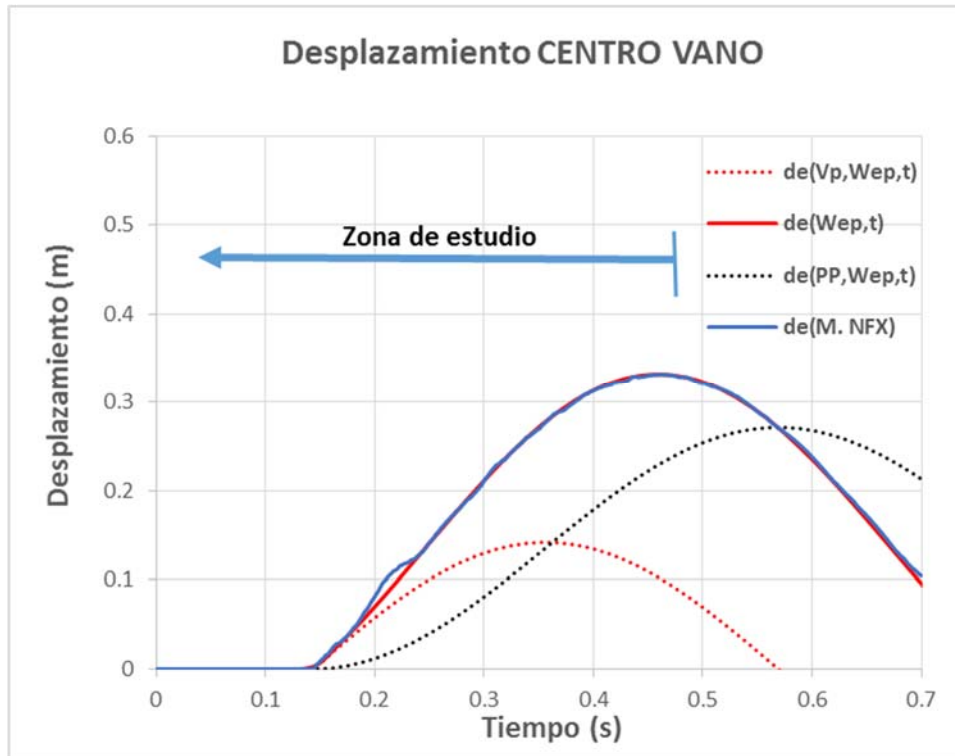


Figura 172- Comparativa de deformadas entre Midas NFX y la formulación desarrollada para $\alpha=3$ y $Vp(o)=1.4$ m/s considerando el efecto del peso propio.

En la gráfica anterior, con línea roja discontinua ($de(Vp,Wep,t)$) se puede ver los resultados del término cinético de manera aislada. De igual forma, en línea discontinua negra ($de(PP,Wep,t)$) se muestra el término de peso propio de manera aislada. Se puede apreciar que la amplitud del término de peso propio es del orden del doble de la amplitud del término cinético.

La suma de ambos términos, en línea continua roja ($de(Wep,t)$), prácticamente **se superpone** con los resultados ofrecidos por el Midas NFX ($de(M.NFX)$). Como se puede observar, los resultados entre ambas curvas son muy próximos, prácticamente coincidentes.



4.2.6.4 Caso masa del proyectil tres veces la masa equivalente de la estructura ($\alpha=3$) y velocidad del proyectil previa al impacto ($V_{p,o}$) de 5.0 m/s. Baja influencia del peso propio del proyectil en el impacto ($C_{pp} = 0.27$).

El impacto analizado en este apartado consta de una masa de proyectil que proporciona un valor de $\alpha=3$ y una altura de caída que proporciona una velocidad inicial de 5 m/s. El impacto se produce en el punto central de una viga cuyas características son idénticas a las expuestas en el apartado 4.1.1.2. Las características de este impacto suponen un coeficiente C_{pp} de valor 0.27, que precide un desplazamiento estructural donde ambos términos, cinético y gravitatorio, están presentes, aunque con mayor importancia del cinético.

Los valores de rigidez y masa equivalente han sido calculados en los apartados 4.1.1.2 y 4.1.2.1 respectivamente. Estos valores, por las razones expuestas en los apartados 4.2.4.1 y 4.2.4.2, no es necesario recalcularlos debido a una posible modificación de la deformada del modo 1 al introducir la masa del proyectil como masa estructural. Estos parámetros, y la frecuencia de vibración natural del modo 1 derivados de ellos resultan:

$$K_e = 84000 \text{ N/m}$$

$$M_e = 392.5 \text{ kg}$$

$$w_e = \sqrt{\frac{K_e}{M_e}} = \sqrt{\frac{84000}{392.5}} = 14.63 \text{ rad/s}$$

Como $\alpha=3$, significa que la masa del proyectil resulta:

$$M_p = M_e \alpha = 392.5 \times 3 = 1177.5 \text{ kg}$$

Como es impacto central y la estructura consta de solo un vano:

$$X(p) = 1$$

$$C_k(M_p) = 1$$

La frecuencia de vibración durante el impacto, en aplicación de la ecuación (329), resulta:

$$w_{ep} = \sqrt{\frac{K_e \times C_k(M_p)}{M_e + M_{p,eq}}} = \sqrt{\frac{84000 \times 1}{392.5 + 1177.5}} = 7.31 \text{ rad/s}$$



La velocidad inicial en la fase de restitución, calculada según las expresiones (326) y (327), obtiene un valor de:

$$C_m = \frac{M_p}{M_p + M_e} = \frac{1177.5}{1177.5 + 392.5} = 0.75$$

$$V_I = V_{p,o} \times C_m = 5 \times 0.75 = 3.75 \text{ m/s}$$

Si se sustituyen estos parámetros en la ecuación (360), el desplazamiento de la estructura en función del tiempo resulta para el término cinético:

$$d_{e,vp}(t) = \frac{3.75 \operatorname{sen}(7.31 t)}{7.31}$$

El cálculo del valor del coeficiente del peso propio es el siguiente:

$$C_{pp} = \frac{g}{V_{p,o} w_{ep}} = \frac{9.806}{3.75 \times 7.31} = 0.27 > 0.1$$

Este valor de C_{pp} indica que el efecto del peso propio ha de ser tenido en cuenta pues $0.27 > 0.1$. Este hecho quiere decir que el efecto de peso propio tendrá una influencia pequeña, pues presentará una importancia menor al término cinético en el valor de la deformada máxima. Siempre que $C_{pp} < 0.5$, la importancia del término cinético será mayor. El término de peso propio, se obtiene a partir de la expresión (361):

$$d_{e,pp}(t) = \frac{gM_p}{K_e} (1 - \cos(w_{ep}t))$$

$$d_{e,pp}(t) = \frac{9.806 \times 1175.5}{84000} (1 - \cos(7.31t))$$

Sumando los términos cinético y gravitatorio según la ecuación (359), se obtiene la deformada estructural $d_e(t)$.

$$d_e(t) = \frac{1.05 \operatorname{sen}(7.31 t)}{7.31} + \frac{9.806 \times 1175.5}{84000} (1 - \cos(7.31t))$$

En la Figura 173 se comparan los resultados del desplazamiento estructural $d_e(t)$ obtenido mediante la expresión anterior con los ofrecidos por el modelo desarrollado en Midas NFX.

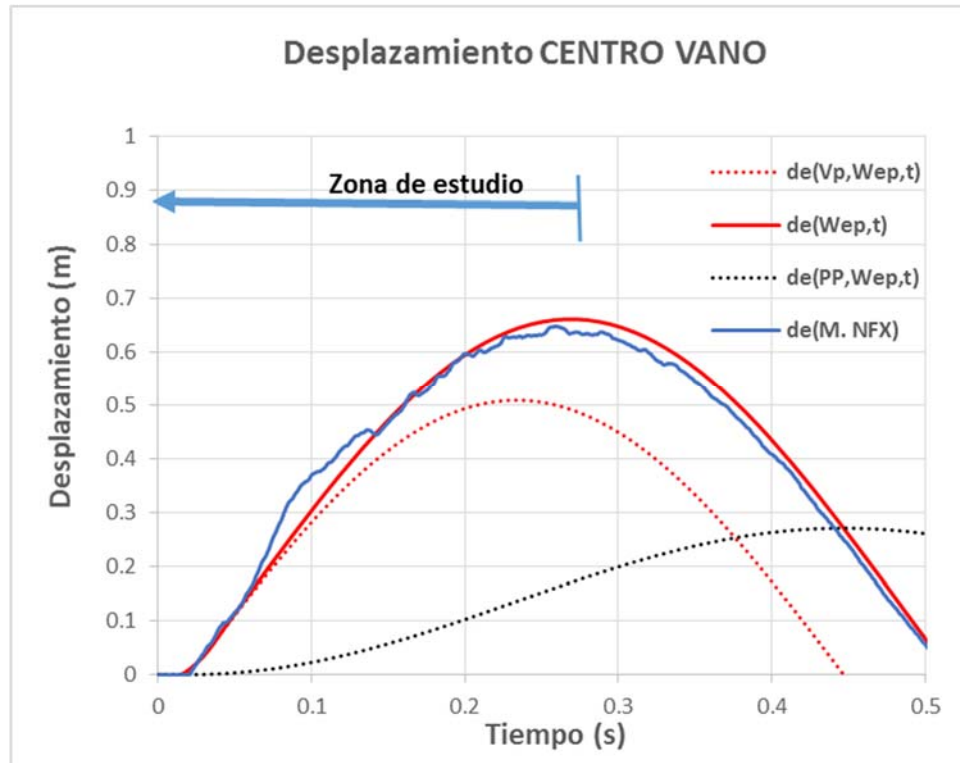


Figura 173- Comparativa de deformadas entre Midas NFX y la formulación desarrollada para $\alpha=3$ y $Vp(o)=5m/s$ considerando el efecto del peso propio.

En la Figura 173, con línea roja discontinua ($de(Vp,Wep,t)$) se puede ver los resultados del término cinético de manera aislada. De igual forma, en línea discontinua negra ($de(PP,Wep,t)$) se muestra el término de peso propio de manera aislada. Se puede apreciar claramente que la amplitud del término de cinético es del orden del doble de la amplitud del término gravitatorio.

La suma de ambos términos, en línea continua roja ($de(Wep,t)$), prácticamente **se superpone** con los resultados ofrecidos por el Midas NFX ($de(M.NFX)$). Como se puede observar, los resultados entre ambas curvas son muy próximos.



4.2.6.5 Caso masa del proyectil tres veces la masa equivalente de la estructura ($\alpha=3$) y velocidad del proyectil previa al impacto ($V_{p,o}$) de 10.0 m/s. Nula influencia del peso propio del proyectil en el impacto ($C_{pp} = 0.13$).

El impacto analizado en este apartado consta de una masa de proyectil que proporciona un valor de $\alpha=3$ y una altura de caída que proporciona una velocidad inicial de 10 m/s. El impacto se produce en el punto central de una viga cuyas características son idénticas a la expuestas en el apartado 4.1.1.2. Las características de este impacto suponen un coeficiente C_{pp} de valor 0.13, que predice un desplazamiento estructural donde el término gravitatorio es prácticamente despreciable.

Los valores de rigidez y masa equivalente han sido calculados en los apartados 4.1.1.2 y 4.1.2.1 respectivamente. Estos valores, por las razones expuestas en los apartados 4.2.4.1 y 4.2.4.2, no es necesario recalcularlos debido a una posible modificación de la deformada del modo 1 al introducir la masa del proyectil como masa estructural. Estos parámetros, y la frecuencia de vibración natural del modo 1 derivados de ellos, resultan:

$$K_e = 84000 \text{ N/m}$$

$$M_e = 392.5 \text{ kg}$$

$$w_e = \sqrt{\frac{K_e}{M_e}} = \sqrt{\frac{84000}{392.5}} = 14.63 \text{ rad/s}$$

Como $\alpha=3$, significa que la masa del proyectil resulta:

$$M_p = M_e \alpha = 392.5 \times 3 = 1177.5 \text{ kg}$$

Como es impacto central y la estructura consta de solo un vano:

$$X(p) = 1$$

$$C_k(M_p) = 1$$

La frecuencia de vibración durante el impacto, en aplicación de la ecuación (329), resulta:

$$w_{ep} = \sqrt{\frac{K_e \times C_k(M_p)}{M_e + M_{p,eq}}} = \sqrt{\frac{84000 \times 1}{392.5 + 1177.5}} = 7.31 \text{ rad/s}$$



La velocidad inicial en la fase de restitución, calculada según las expresiones (326) y (327), obtiene un valor de:

$$C_m = \frac{M_p}{M_p + M_e} = \frac{1177.5}{1177.5 + 392.5} = 0.75$$

$$V_I = V_{p,o} \times C_m = 10 \times 0.75 = 7.43 \text{ m/s}$$

Si se sustituyen estos parámetros en la ecuación (360), el desplazamiento de la estructura en función del tiempo resulta para el término cinético:

$$d_{e,vp}(t) = \frac{7.43 \operatorname{sen}(7.31 t)}{7.31}$$

El cálculo del valor del coeficiente del peso propio es el siguiente:

$$C_{pp} = \frac{g}{V_{p,o} w_{ep}} = \frac{9.806}{10 \times 7.31} = 0.13 \approx 0.1$$

Este valor de C_{pp} indica que el efecto del peso propio puede ser despreciado dado que $0.13 \approx 0.1$. Este hecho, como se ha comentado anteriormente, quiere decir que el efecto de peso propio tendrá una influencia mínima en deformada máxima. El término de peso propio, se obtiene a partir de la expresión (361):

$$d_{e,pp}(t) = \frac{gM_p}{K_e} (1 - \cos(w_{ep}t))$$

$$d_{e,pp}(t) = \frac{9.806 \times 1175.5}{84000} (1 - \cos(7.31t))$$

Sumando los términos cinético y gravitatorio según la ecuación (359), se obtiene la deformada estructural $d_e(t)$.

$$d_e(t) = \frac{7.43 \operatorname{sen}(7.31 t)}{7.31} + \frac{9.806 \times 1175.5}{84000} (1 - \cos(7.31t))$$

En la Figura 174 se comparan los resultados del desplazamiento estructural $d_e(t)$ obtenido mediante la expresión anterior con los ofrecidos por el modelo desarrollado en Midas NFX.

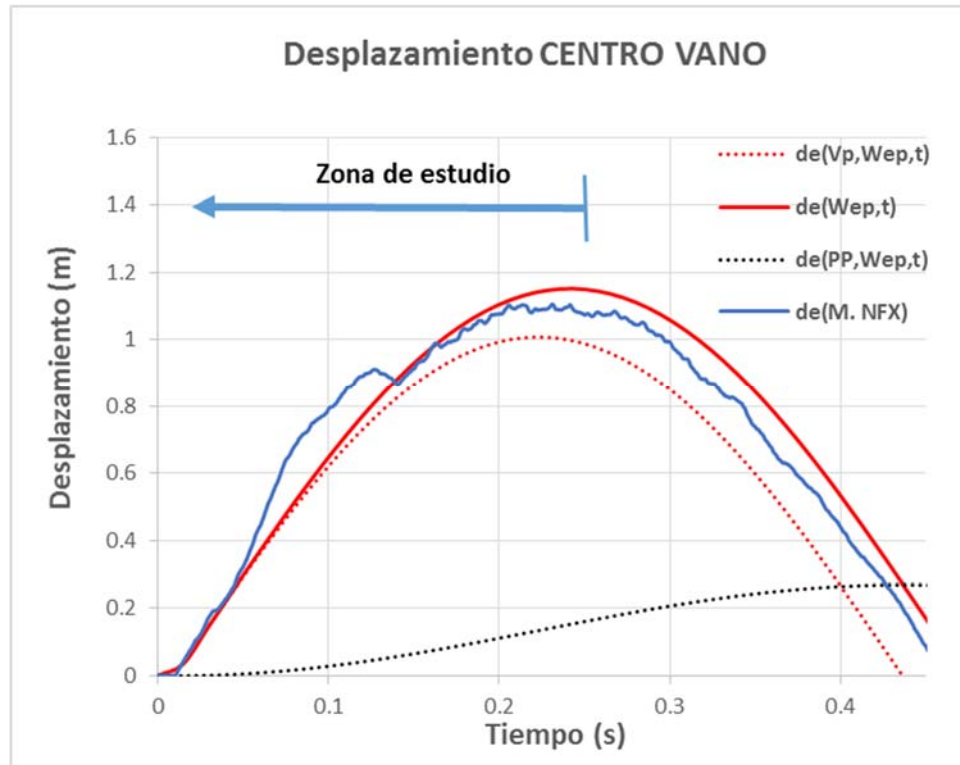


Figura 174- Comparativa de deformadas entre Midas NFX y la formulación desarrollada para $\alpha=3$ y $Vp(o)=5m/s$ considerando el efecto del peso propio.

En la Figura 174, con línea roja discontinua ($de(Vp,Wep,t)$) se puede ver los resultados del término cinético de manera aislada. De igual forma, en línea discontinua negra ($de(PP,Wep,t)$) se muestra el término de peso propio de manera aislada. Se puede apreciar que la influencia del término de peso propio es muy limitada

La suma de ambos términos, en línea continua roja ($de(Wep,t)$), prácticamente **se superpone** con los resultados ofrecidos por el Midas NFX ($de(M.NFX)$). Como se puede observar, los resultados entre ambas curvas son muy próximos, existiendo más error fuera de la zona de estudio debido a que el proyectil pierde contacto de manera continua con la estructura tras detenerse.



4.2.6.6 Análisis conjunto.

Para poder concluir si la formulación desarrollada proporciona resultados aceptables en función del parámetro de peso propio C_{pp} , es importante poder visualizar todos casos de manera conjunta, de manera global. Por este motivo, en la Figura 175 se presentan los cuatro casos anteriores donde la relación de masas proporciona un valor de $\alpha=3$.

En la Figura 175, a diferencia de los análisis individuales anteriores, únicamente se representa los resultados del desplazamiento del centro de la viga para la formulación desarrollada mediante la curva roja $de(Wep,t)$ y de los resultados ofrecidos por Midas Civil, mediante la curva azul. En el recuadro próximo a ambas curvas, se define el parámetro C_{pp} de cada caso.

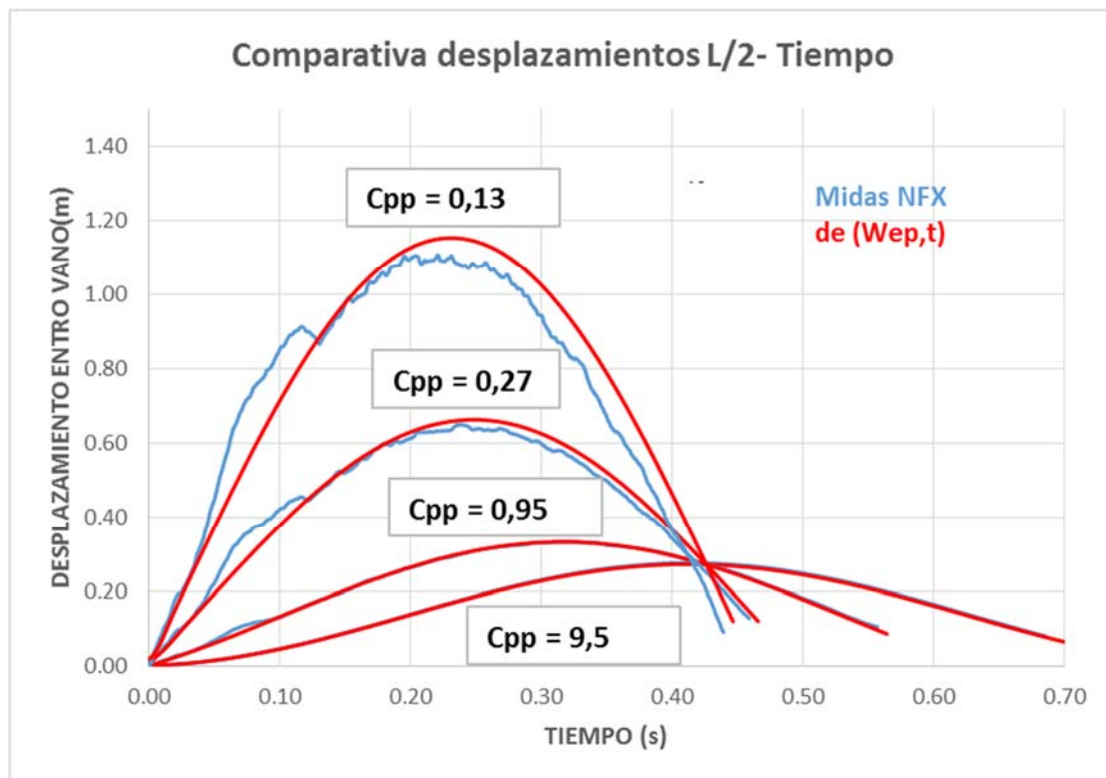


Figura 175- Comparativa de deformadas entre Midas NFX y la formulación desarrollada para $\alpha=3$ y en función del coeficiente de peso propio C_{pp} .

Si se analizan los resultados de manera global, puede verse las diferentes deformadas en función del parámetro C_{pp} :

- Cuando el valor de C_{pp} es bajo (< 0.5), el término cinético domina, y, por tanto, la deformada presenta forma tipo seno, con una tangente inicial distinta de cero debido a



la importancia del término cinético. Para estos valores de coeficiente, la máxima deformación tiende a producirse para un tiempo t igual a $\frac{T_{ep}}{4}$.

- Para valores de C_{pp} altos (>1.5) ocurre lo contrario, el término gravitatorio domina y, por tanto, la deformada presenta forma tipo coseno, con tangente inicial prácticamente nula. Para estos valores de coeficiente, la máxima deformación se produce para un tiempo igual a $\frac{T_{ep}}{2}$.
- En los casos de C_{pp} próximos a 1, las dos curvas comparten importancia y la deformada es claramente una suma de ambas.

En todos los casos analizados, la proximidad de resultados entre Midas NFX y la formulación desarrollada es muy elevada.



- Desarrollo de teoría sobre impactos -
- Método simplificado de cálculo de impactos en estructuras -





4.2.7 Generalización del modelo para masa cualquiera

Hasta este apartado, la formulación propuesta sólo se puede aplicar para casos de masas grandes, es decir, para masas de proyectiles más grandes que la masa equivalente del modo fundamental de la estructura ($\alpha > 1$).

Para la generalización a cualquier masa de la formulación desarrollada que se va a realizar en este apartado, **no se consideran los efectos del peso propio del proyectil**. Si se generaliza el método para masas pequeñas, éstas, por definición, tendrán escasa influencia en lo que al término gravitatorio se refiere. Por este motivo, en la generalización del modelo para masa cualquiera, sólo se considerará en los cálculos el término cinético.

En los apartados siguientes, se exponen las consideraciones necesarias, y las consecuencias derivadas de las mismas, que permiten el desarrollo del modelo completo para calcular de forma simplificada un impacto para cualquier masa.

4.2.7.1 Análisis energético del modo fundamental

Con objeto de estudiar más en detalle las limitaciones de utilizar para el cálculo de impactos únicamente el modo fundamental, se realiza un análisis energético del impacto a partir de las expresiones (328) y (332) obtenidas con la formulación desarrollada.

Previo a la exposición del análisis energético, se recuerda que la fase de aproximación o compresión en un impacto es la fase donde la velocidad relativa entre las masas que impactan decrece, y la fase de restitución es la fase en que ambas se comportan como una sola. En los apartados 4.2.3.1 y 4.2.3.2 se expuso en detalle ambas fases.

El planteamiento del análisis energético es el siguiente. El proyectil, previo al impacto, tiene una energía cinética E_o como resultado de su masa M_p y su velocidad inicial $V_{p,o}$. Tras sufrir el impacto con la masa estructural M_e , justo en el instante en el que el proyectil se detiene y bajo la hipótesis de elemento infinitamente rígido, el proyectil necesariamente ha cedido toda la energía inicial a la estructura. Según se la expresión (331), el tiempo en el que se detiene el proyectil es $t_f = T_{ep}/4$.

La ecuación (328) representa el desplazamiento estructural que realiza el modo fundamental de vibración, y de ella se deduce que para el instante $T_{ep}/4$ la estructura ha alcanzado la máxima



deformación durante el impacto. Además, según la expresión (324) las velocidades de estructura y proyectil son iguales, por lo que para $T_{ep}/4$ tanto el proyectil como la estructura tienen velocidad nula. Por lo tanto, se puede concluir que toda la energía que ha absorbido la estructura con el modo 1, está en forma de energía de deformación. La energía de deformación absorbida por el modo fundamental de vibración se calcula según la expresión (364).

$$E_1 = \frac{1}{2} K_e (d_e(t)_{t=\frac{T_{ep}}{4}})^2 \quad (364)$$

Si se sustituye en la ecuación (364), el valor de deformación de la estructura en la expresión (328) para $t = T_{ep}/4$, se obtiene:

$$E_1 = \frac{1}{2} K_e \left(\frac{V_I}{w_{ep}}\right)^2 \quad (365)$$

Sustituyendo las expresiones (297) (326) y (327) en la ecuación (365), se obtiene:

$$E_1 = \frac{1}{2} (M_e + M_p) \left(V_{p,o} \frac{M_p}{M_e + M_p}\right)^2 \quad (366)$$

Si se reordenan los términos de la ecuación anterior, resulta:

$$E_1 = \frac{1}{2} M_p V_{p,o}^2 \frac{M_p}{M_e + M_p} = \frac{1}{2} M_p V_{p,o}^2 C_m \quad (367)$$

Es decir, la máxima energía que absorbe la estructura en el impacto a través del modo fundamental es:

$$E_1 = E_o C_m = E_o \frac{M_p}{M_e + M_p} \quad (368)$$

Como se puede ver, según la ecuación (368), el porcentaje de la energía total del impacto que absorbe el primer modo de vibración sólo depende de la relación entre la masa del proyectil y la masa del propio modo. Es decir, la energía absorbida por el primer modo es función del coeficiente de masas C_m . Este parámetro, definido en la ecuación (327), es función únicamente de la masa del proyectil y la masa equivalente de la estructura, y toma valores entre 0 y 1.

Por otra parte, si, como se ha deducido previamente, el proyectil ha cedido toda la energía al detenerse en el instante $t = T_{ep}/4$, el resto de energía cinética inicial del proyectil ha sido necesariamente absorbida en la fase de aproximación. La influencia de esta fase se había despreciado para la hipótesis de $M_p > M_e$. Como puede apreciarse en la ecuación (327) cuando $M_p \gg M_e$ el parámetro C_m tiende a 1 y, por tanto, la energía absorbida por el modo 1 según la ecuación (368) es próxima a la energía inicial (si $M_p \gg M_e \rightarrow C_m \approx 1 \rightarrow E_1 \approx E_o$).



La fase de aproximación, tal y como se ha definido en el apartado 4.2.3.1, representa al resto de modos de vibración distintos al fundamental. Por este motivo, el resto de modos de vibración son los encargados de absorber la energía cedida por el proyectil que no ha sido absorbida por el modo 1.

Si se tienen en cuenta las expresiones (327) y (333), se puede obtener a partir de ellas la siguiente relación entre el parámetro C_m y el parámetro α .

$$C_m = \frac{1}{1 + \alpha} \quad (369)$$

A partir de la ecuación (368) se puede analizar, en términos relativos, tanto la energía que ha sido absorbida por el resto de modos distintos al modo fundamental ($\frac{E_o - E_1}{E_o}(\%)$), como la energía absorbida por el propio modo fundamental ($\frac{E_1}{E_o}(\%)$). Este análisis se realiza en los impactos estudiados en los apartados del 4.2.4.1 al 4.2.4.5. Los resultados de dicho análisis energético se muestran en la tabla expuesta en la Figura 176.

Caso	α	C_m	$\frac{E_1}{E_o}(\%)$	$\frac{E_o - E_1}{E_o}(\%)$
4.2.2.1	10	0.909	90.9	9.1
4.2.2.2	5	0.833	83.3	16.7
4.2.2.3	3	0.750	75.0	25
4.2.2.4	2	0.667	66.7	33.3
4.2.2.5	1	0.5	50	50

Figura 176-Análisis energético realizado para los casos de impactos estudiados.

Se puede apreciar que para valores de α mayores de 1, la energía absorbida por el primer modo de vibración o modo fundamental es mayor del 50%. Es decir, para $\alpha > 1$ este modo absorbe la mayor parte de la energía.

Para valores de α más pequeños de la unidad, no sería recomendable hacer uso de las formulaciones descritas en el apartado 4.2.3.3, pues se estaría despreciando en los cálculos la mayor parte de la energía del problema.

Se analizan a continuación los mecanismos de absorción de energía del modo 1, independientemente del porcentaje que represente. Este porcentaje de la energía que absorbe el modo fundamental de la estructura, lo adquiere, según lo descrito en el apartado 4.2.3.3, por dos vías. Por una parte, adquiere de manera “instantánea” una energía cinética ($E_{c,1}$) en forma de velocidad inicial V_I derivada de la fase de aproximación. Por otro lado, la fuerza de contacto



$F(t)$ durante la fase de restitución transmite la energía desde el proyectil hasta la estructura por deformación de ésta ($E_{F,1}$). A continuación, se analiza, en términos relativos, cada una de ellas:

Energía cinética adquirida en fase de aproximación:

La energía cinética adquirida en la fase de aproximación, dado que en esta fase la estructura alcanza la velocidad V_I , se expresa mediante la siguiente ecuación:

$$E_{c,1} = \frac{1}{2} M_e V_I^2$$

Si se sustituye la ecuación (325) en la ecuación anterior, resulta:

$$\begin{aligned} E_{c,1} &= \frac{1}{2} M_e \left(V_{p,0} \frac{M_p}{M_p + M_e} \right)^2 = \frac{1}{2} M_p V_{p,0}^2 (M_p M_e) \left(\frac{1}{M_p + M_e} \right)^2 \\ &= E_o \frac{M_p}{M_p + M_e} \frac{M_e}{M_p + M_e} \end{aligned} \quad (370)$$

Finalmente, si se sustituye la ecuación (368) en la ecuación (370) la energía cinética adquirida en la fase de aproximación resulta:

$$E_{c,1} = E_1 \frac{M_e}{M_p + M_e} = E_1 (1 - C_m) \quad (371)$$

Es decir, que el porcentaje de energía absorbida por el modo 1 que se absorbe en forma de energía cinética inicial, es también función de la relación entre la masa del proyectil y la masa equivalente de la estructura.

Nótese que en la ecuación (371) cuando la masa del proyectil tiende a infinito ($M_p \rightarrow \infty$) la energía absorbida por la estructura en forma de energía cinética tiende a cero ($E_{c,1} \rightarrow 0$), mientras que, si la masa del proyectil tiende a cero ($M_p \rightarrow 0$), toda la energía cinética del primer modo es absorbida en forma de energía cinética "instantánea" ($E_{c,1} \rightarrow E_1$).

La ecuación (371) se puede resumir de la siguiente forma: cuando la masa del proyectil es grande, respecto de la masa del modo, el modo 1 absorbe la energía del impacto de manera suave por energía de deformación, mientras que, si es pequeña, lo absorbe bruscamente mediante energía cinética inicial.



Energía transmitida por la fuerza de contacto en la fase de restitución:

La máxima energía transmitida por la fuerza de contacto a la estructura para el primer modo de vibración ($E_{F,1}$), se puede deducir a partir de la expresión (371). Es decir, esta energía será la energía total absorbida por el modo 1, menos la energía absorbida por el modo 1 en la fase de aproximación.

$$E_{F,1} = E_1 - E_{c,1} = E_1 - E_1(1 - C_m) \quad (372)$$

$$E_{F,1} = E_1 C_m = E_1 \frac{M_p}{M_p + M_e} \quad (373)$$

Nótese en la ecuación (373) que cuando la masa del proyectil tiene a infinito ($M_p \rightarrow \infty$) toda la energía absorbida por el modo 1 se absorbe debida a la acción de la fuerza de contacto ($E_{F,1} \rightarrow E_1$), mientras que, si tiende a cero ($M_p \rightarrow 0$), la fuerza de contacto no transmite energía ($E_{F,1} \rightarrow 0$).

Dado que la ecuación (373) y la ecuación (371) son complementarias respecto de la energía total que absorbe el modo 1 como muestra la ecuación (372), el resumen que se puede hacer de la ecuación (373) es el mismo que el realizado para la expresión (371): cuando la masa del proyectil es grande, respecto de la masa del modo, el modo 1 absorbe la energía del impacto de manera suave por energía de deformación, mientras que, si es pequeña, lo absorbe bruscamente mediante energía cinética inicial.

4.2.7.2 Hipótesis de generalización de masas

Del análisis energético realizado en el apartado anterior se deducen las siguientes conclusiones:

- Dado que el proyectil es incompresible y se detiene, el proyectil siempre transmite toda la energía inicial del impacto a la estructura.
- Cuando la masa del proyectil es mayor que la masa equivalente del modo 1, este modo siempre absorbe la mayor parte de energía del impacto.
- El porcentaje de energía que el modo 1 absorbe respecto al resto de modos, está definido por la relación de masas entre el proyectil y la masa equivalente del modo 1.



- El modo de vibración 1 presenta dos mecanismos de absorción de energía distintos, uno para cada fase del impacto.
 - Fase de aproximación: mecanismo de absorción de energía cinética “instantánea”.
 - Fase de restitución: mecanismo de absorción de energía de deformación mediante la acción de la fuerza de contacto.
- Independientemente del porcentaje de energía que se lleve el modo 1, la distribución de ese porcentaje entre los dos mecanismos de absorción de energía que tiene el modo 1, viene impuesto por la relación de masas entre el proyectil y la masa equivalente del modo 1.

Las conclusiones anteriores del análisis energético determinan la relación de masas como única variable que regula tanto el reparto energético entre el modo 1 y el resto de modos, como el reparto energético que el propio modo 1 realiza entre sus dos fases durante el impacto.

Para la generalización de la formulación a cualquier masa se realiza la siguiente hipótesis: **el reparto energético entre los modos de vibración es función de la relación de masas entre el proyectil y el modo correspondiente.** Es decir, esta hipótesis considera que las conclusiones obtenidas para el modo 1 a partir del estudio del balance energético, son extrapolables al resto de modos.

La mecánica de la aplicación de esta hipótesis, de forma cualitativa, se expone a continuación. El punto de partida es el siguiente: el modo 1, considerando ambas fases, ha absorbido un porcentaje de la energía total del impacto. La secuencia de impacto a partir de este punto es la siguiente:

- La energía que no absorbe el modo 1, o energía disponible para el modo 2, se ha absorbido en la fase de aproximación del modo 1 por el resto de modos.
- La fase de aproximación del modo 1, hasta ahora considerada instantánea, se divide en la fase de aproximación del modo 2 y la fase de restitución del modo 2.
- De la energía que no ha absorbido el modo 1, el modo 2 absorbe la energía que su relación de masas equivalente con la masa del proyectil le permite, de forma análoga a lo que sucedió para el modo 1.
- El modo 2 se repartirá entre sus fases de aproximación y restitución la energía que ha absorbido a partir de la relación de su masa con la del proyectil, de manera análoga a como hizo el reparto el modo 1 entre sus fases.



- La energía que no haya sido absorbida por el modo 2 ni por el modo 1, es la energía disponible para el modo 3.
- La fase de aproximación del modo 2 se divide en la fase de aproximación del modo 3 y la fase de restitución del modo 3.
- Los cálculos de energía absorbida para el modo 3 y la energía disponible para el modo 4, se realiza de manera similar a lo explicado para el modo 2. Este proceso se repite para todos los modos que se consideren en el análisis.
- El número de modos a analizar en un impacto será tal que la energía absorbida por todos los modos sea representativa respecto de la energía de impacto inicial.

A partir de esta idea, la cual asigna a cada modo un porcentaje de energía respecto del total, permite tratar a **cada modo de forma independiente**. La solución global se obtendrá como suma de todos los modos.

La secuencia expuesta anteriormente, no pretende reproducir el complejo comportamiento estructural que se producen en el impacto de masa pequeña. El objetivo pretendido es obtener un comportamiento promedio que permita validar los resultados de un software numérico cuando la importancia de modos distintos del fundamental es elevada, así como una obtener una comprensión general del impacto.

Los resultados de la formulación desarrollada se comparan con los resultados obtenidos del análisis del Midas NFX. No obstante, como se comprobará en el apartado 5, los resultados entre Midas NFX y los ensayos reales son próximos, pero no exactamente iguales. Adicionalmente, los propios ensayos tienen cierta incertidumbre en los resultados obtenidos debido a la precisión en los sensores de medida. **En este contexto, en el que no es fácil establecer la solución exacta, el comportamiento promedio que aporta la formulación toma todo su sentido.**

4.2.7.3 Distribución energética modal.

A partir de la idea desarrollada en el apartado anterior, en el presente apartado se concreta de forma cuantitativa cómo distribuir la energía inicial del impacto entre los distintos modos.

La masa del proyectil es un parámetro constante, por lo que el porcentaje de energía cinética que absorbe cada modo, ha de hacerse modificando la velocidad del proyectil. De esta forma se define la velocidad del proyectil previa al impacto del modo n ($V_{p,n}$). El cálculo de dicha



velocidad se hace a partir de la energía cinética disponible para cada modo de vibración ($E_{D,n}$), la cual se muestra en la ecuación (374):

$$E_{D,n} = \frac{1}{2} M_p V_{p,n}^2 \quad (374)$$

De la expresión (374) se puede deducir el valor de la velocidad del proyectil que le llega al modo n previa al impacto:

$$V_{p,n} = \sqrt{\frac{2 E_{D,n}}{M_p}} \quad (375)$$

La energía disponible para cada modo, se puede obtener a partir de la energía cinética inicial menos la energía absorbida por todos los modos anteriores al modo n considerado.

$$E_{D,n} = E_o - \sum_1^{n-1} E_n \quad (376)$$

La energía absorbida por cada modo, de manera análoga a lo descrito para el modo 1 según la ecuación (368), se puede obtener a partir de la energía disponible y el coeficiente de masas correspondiente al modo n :

$$E_n = E_{D,n} C_{m,n} \quad (377)$$

La energía absorbida por cada modo, expresada en términos relativos respecto de la energía cinética inicial del proyectil, resulta:

$$E_n(\%) = 100 \frac{E_{D,n} C_{m,n}}{E_o} \quad (378)$$

El coeficiente de masas de cada modo, de forma análoga a la expresión (327), se obtiene a partir de la masa equivalente correspondiente al modo n :

$$C_{m,n} = \frac{M_p}{M_p + M_{e,n}} \quad (379)$$

A partir del coeficiente de masas del modo n y de la velocidad inicial del proyectil para el modo n , se puede obtener la velocidad inicial en la fase de restitución del modo n de forma análoga a la expresión (325).

$$V_{I,n} = V_{p,n} C_{m,n} \quad (380)$$

De manera similar, el parámetro α también se generaliza para el modo n considerado.

$$\alpha_n = \frac{M_p}{M_{e,n}} \quad (381)$$



Para establecer cuántos modos de vibración es necesario analizar en un impacto, se identifican 2 parámetros de control. El primero de ellos es la energía total analizada $E_{A,n}$ hasta el modo n , o energía total que se ha tenido en cuenta tras analizar n modos. Esta energía $E_{A,n}$ será la suma de la energía absorbida desde el modo 1 hasta el modo n :

$$E_{A,n} = \sum_1^n E_n \quad (382)$$

Normalmente es más útil tener el parámetro de la energía analizada en términos relativos, para saber respecto del total, si la energía analizada es relevante:

$$E_{A,n} (\%) = 100 \frac{\sum_1^n E_n}{E_o} \quad (383)$$

El segundo parámetro de control es la energía disponible para cada modo, ya definida en la ecuación (376). Como parámetro de control es más útil su expresión en términos relativos $E_{D,n}(\%)$.

$$E_{D,n}(\%) = 100 \left(1 - \sum_1^{n-1} E_n/E_o \right) \quad (384)$$

4.2.7.4 Formulación de impactos generalizada

Para obtener la formulación generalizada para impactos de cualquier masa, sólo es necesario realizar una consideración adicional.

El modo fundamental o modo 1 presenta una peculiaridad con respecto a todos los demás. Es el único modo que tiene los nodos, o puntos de movimiento nulo, fijos. No ocurre así para el resto de modos, que tienen nodos en puntos que no son apoyos reales de la estructura, susceptibles, por tanto, de ser modificados si se integra en ellos la masa del proyectil. En la práctica, esto produce que, de manera aproximada, se puede considerar que la masa del proyectil solo se integra en el modo 1. El resto de modos, al tener posibilidad de modificar los nodos, solo absorberán la masa del proyectil si esta es pequeña. Por tanto, en los casos de masa grande relativa, los modos distintos al fundamental no pueden integrar la masa del proyectil por ser excesivamente grande. Si, por el contrario, la masa del proyectil es, en términos relativos, pequeña, su integración no tendrá grandes efectos en la frecuencia de vibración durante el impacto. En definitiva, y de manera simplificada, se considerará que solo el modo 1 presenta la



frecuencia de vibración durante el impacto con la masa del proyectil integrada, el resto de modos vibrarán con una su frecuencia natural.

Para ilustrar el comentario anterior, se comparan los modos de vibración 1 y 3, de una viga simplemente apoyada sin considerar y considerando la masa de un proyectil integrada en el centro de la viga, como muestra la Figura 177 superior e inferior, respectivamente.

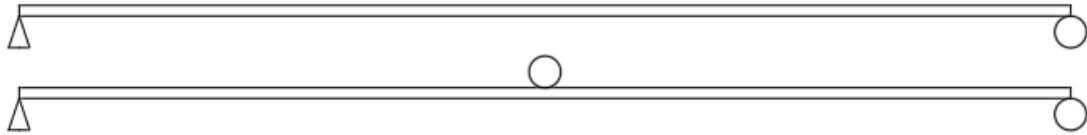


Figura 177-Esquema de viga biapoyada para comparar modos sin y con masa del proyectil en el centro de luz.

La masa del proyectil es, para el ejemplo, 10 veces la masa equivalente del modo 1 ($\alpha=10$). En la Figura 178 se compara los modos 1 de la viga sin la masa del proyectil (imagen superior) y con la masa del proyectil (imagen inferior) en el centro de la viga, sobre el esquema de la posición de equilibrio de la viga. Como se puede apreciar, la forma del modo 1 no ha cambiado sustancialmente en ambos casos, más allá de que la frecuencia de vibración sí lo haya hecho.

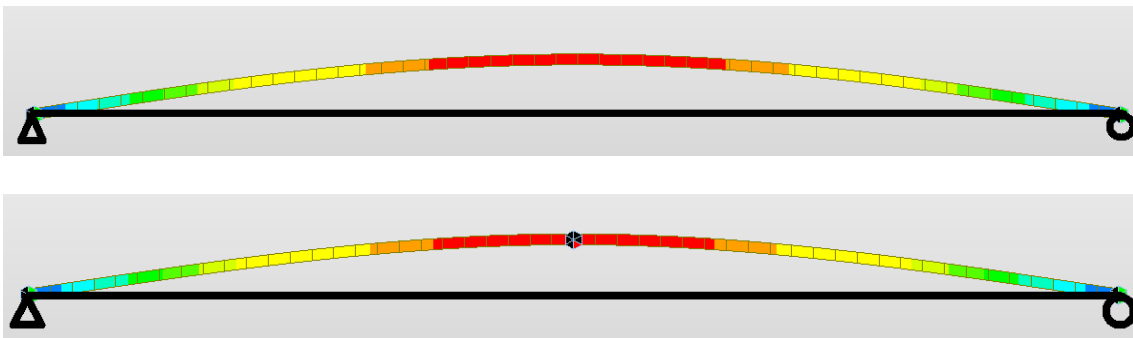


Figura 178-Modo 1 de viga simplemente apoyada sin considerar (imagen superior) y considerando (imagen inferior) la masa del proyectil con $\alpha=10$ en el centro de la viga.

Por el contrario, en la Figura 179 se puede ver el tercer modo de la misma viga sin considerar la masa del proyectil (imagen superior) y con la masa del proyectil (imagen inferior) en el centro de la viga. En esta imagen se puede ver cómo el modo 3 si ha cambiado sustancialmente la forma. De hecho, el punto donde se ha integrado el proyectil se ha convertido en un nodo, es decir, en un punto de movimiento nulo.

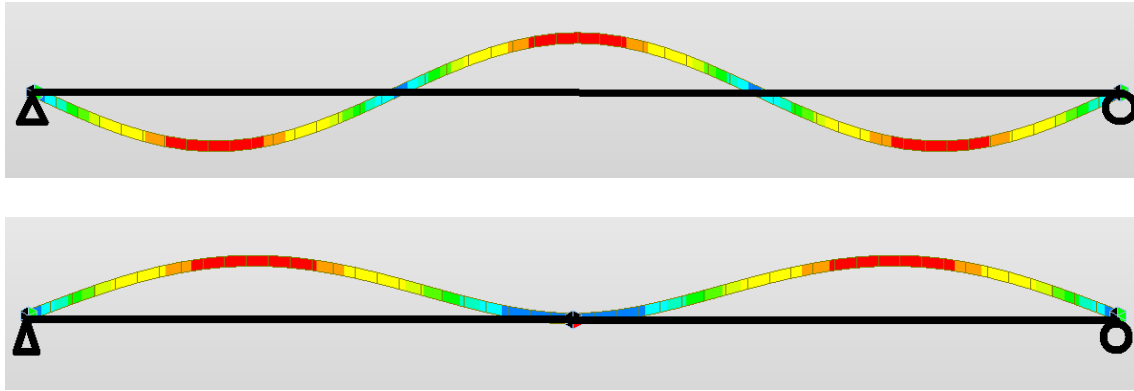


Figura 179- Modo 3 de viga simplemente apoyada sin considerar (imagen superior) y considerando (imagen inferior) la masa del proyectil con $\alpha=10$ en el centro de la viga.

Si el punto de contacto para el modo 3 se convierte en un nodo, implicaría que el modo 3 no se activaría, como se demostrará en el apartado 4.2.8.1. En el caso de no activarse, no podría integrar la masa del proyectil en su propia masa y, por tanto, el modo volvería a comportarse como el modo mostrado en la imagen superior de la Figura 179.

Si la masa del proyectil fuera distinta, con un α pequeño, el punto de contacto no se convertiría en un nodo, pero entonces el comportamiento del modo 3 considerando la masa del proyectil sería también parecido como el modo mostrado en la imagen superior de la Figura 179.

Es por este motivo que, por simplificar como se ha explicado anteriormente, sólo se considera en la expresión (385) la masa del proyectil integrada en el modo 1 respecto de la frecuencia de vibración ($\text{sen}(w_{ep,1} t)$), a diferencia del resto de los modos $\text{sen}(w_{e,n} t)$ durante el impacto.

Por otra parte, dado que los nodos para todos los modos de vibración distintos del modo 1 no se pueden considerar fijos, se considerará para éstos modos un valor de $C_K(M)$ igual a la unidad.

A partir del reparto energético expuesto en el apartado 4.2.7.3, se ha independizado la energía que recibe cada modo. Independizar las energías que absorbe cada modo permite, a su vez, obtener la formulación generalizada a partir de las ecuaciones (328) y (332) como suma de la contribución de cada modo. Con todo lo expuesto anteriormente, la deformación estructural teniendo en cuenta todos los modos resulta:

$$d_{e,Total}(t) = \frac{V_{I,1} C_{m,1} \text{sen}(w_{ep,1} t)}{w_{ep,1}} + \sum_2^n \frac{V_{I,n} C_{m,n} \text{sen}(w_{e,n} t)}{w_{ep,n}} \quad (385)$$

Análogamente, la expresión para la fuerza de contacto resulta:

$$F(t) = M_p V_{I,1} w_{ep,1} \text{sen}(w_{ep,1} t) + \sum_2^n M_p V_{I,n} w_{ep,n} \text{sen}(w_{e,n} t) \quad (386)$$



En la generalización del método simplificado para masa cualquiera, al independizar energías para cada modo, no está tan claro, *a priori*, cuál es el instante en el que proyectil se detiene. El proyectil se detendrá cuando haya cedido a la estructura toda la energía y, por tanto, toda la cantidad de movimiento. En ese mismo instante, la fuerza de contacto se hará nula, dado que desaparecerá el contacto entre proyectil y estructura. Por tanto, el tiempo t_f en el que el proyectil se detiene y se hace nula la fuerza de contacto, se puede calcular a partir de la expresión (387):

$$\int_{t=t_0}^{t_f} F(t) dt = M_p V_{p,0} \quad \text{con} \quad F(t) > 0 \quad (387)$$

Es decir, el primer instante de tiempo t_f que haga que se haya cedido toda la cantidad de movimiento del proyectil a la estructura, será el instante t_f en que el proyectil se detiene.



4.2.8 Aplicación a vigas sometidas a impactos de masa cualquiera.

La aplicación de la formulación generalizada para masa cualquiera, se ejemplifica a continuación para la viga metálica de 10 m de acero y 0.1 m x 0.1 m descrita en el apartado 4.1.1.1 del presente documento. El esquema del impacto se muestra en la Figura 180.

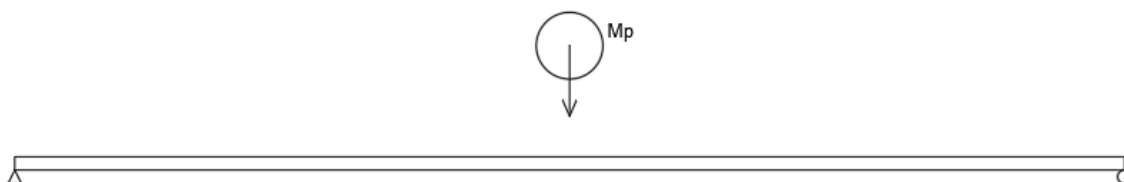


Figura 180-Impacto en centro de luz de viga metálica para valores de M_p cualquiera.

Se aplicará el método para distintas relaciones del parámetro α , con una velocidad inicial del proyectil previa al impacto de 2m/s en todos los casos.

Aunque para cada modo de vibración se calcule su correspondiente parámetro α_n , cuando un impacto se defina de forma genérica por el parámetro α , este valor siempre hace referencia al modo fundamental.

En los impactos siguientes no se considera el efecto del peso propio del proyectil. El impacto se produce en todos los casos en el centro de la viga.

En el análisis siguiente se pretende obtener el desplazamiento de la viga en el punto central considerando los 5 primeros modos de vibración de flexión.



4.2.8.1 Caso masa del proyectil cinco veces la masa equivalente del modo 1 de la estructura ($\alpha=5$) y velocidad del proyectil previa al impacto ($V_{p,0}$) de 2.0 m/s. No consideración del peso propio del proyectil en el impacto.

Se aplica primero el método generalizado a un caso de proyectil con masa relativamente grande, $\alpha=5$. Los datos de partida del impacto para el caso analizado se muestran en la Tabla 2:

Tabla 2-Impacto central en viga biapoyada. Caso $\alpha=5$ para formulación generalizada. Datos de partida.

Datos viga		Datos proyectil	
L (m)	10,00	Mp(kg)	1962,5
b (m)	0,1	Vpo (m/s)	2,00
h (m)	0,1	Eo (N m)	3925,0
A (m ²)	1,00E-02	C.M. (N s)	3925,0
I (m ⁴)	8,33333E-06	K _{PROYECTIL}	∞
E (KN / m)	2,10E+08	g(m/s ²)	0
ρ (kg / m ³)	7,85E+03	α	5,00
Punto de impacto "p" (m)	5,00	C _{pp}	0,00

Modo 1

La contribución al desplazamiento de la estructura del primer modo en el punto central, y el resto de parámetros correspondientes al modo 1, ya han sido calculados en el punto 4.2.4.2, obteniendo el siguiente resultado.

$$d_{e,1}(t)(m) = \frac{1.67 \text{ sen } (5.97 t)}{5.97}$$

$$C_{m,1} = 0.833$$

$$V_{I,n} = 1.67 \text{ m/s}$$

$$w_{ep,1} = 5.97 \text{ rad/s}$$

No obstante, para sistematizar el método general, se calcula la energía disponible para el modo 1 ($n=1$) se obtiene a partir de la ecuación (376).

$$E_{D,1} = E_o - \sum_1^{n-1} E_n = E_o - \sum_1^{1-1} E_n = E_o = \frac{1}{2} \times 1962.5 \times 2^2 = 3925.0 \text{ Nm}$$

La energía que absorbe el modo 1 viene dada por la expresión (377):

$$E_1 = E_{D,n} C_{m,1} = 3925 \times 0.833 = 3270.8 \text{ Nm}$$



La energía que absorbe el modo 1, por tanto, en términos relativos, se obtiene a partir de la expresión (378) resulta:

$$E_1(\%) = \frac{3270.8}{3925} \times 100 = 83\%$$

En este caso, la energía total que se ha tenido en cuenta coincide con la energía absorbida por el modo 1, dado que es el único analizado. La energía tomada en cuenta considerando 1 modo de vibración se obtiene de la ecuación (382):

$$E_{A,1} = \sum_1^n E_n = \sum_1^1 E_n = 3270.8 \text{ Nm}$$

Lógicamente, la energía relativa total tomada en cuenta hasta el modo 1, la cual se calcula con la expresión (383), coincide con la energía relativa absorbida por el modo 1:

$$E_{A,1}(\%) = \frac{\sum_1^n E_n}{E_o} 100 = \frac{3270.8}{3925} \times 100 = 83\%$$

A partir de la ecuación (376) se obtiene la energía disponible para el modo 2.

$$E_{D,2} = E_o - \sum_1^1 E_n = 3925 - 3270.8 = 654.2 \text{ Nm}$$

A partir de la expresión (384) se calcula la energía disponible para el modo 2 en términos relativos:

$$E_{D,2}(\%) = 100 \left(1 - \sum_1^1 \frac{E_n}{E_o} \right) = \left(1 - \frac{3270.8}{3925} \right) \times 100 = 17\%$$

Es decir, hay un 17% de la energía que ha sido transmitida por el proyectil a otros modos de vibración distinto al modo 1 en la fase de aproximación del modo 1.

Modo 2

Dado que la masa del proyectil es constante, la pérdida de energía del proyectil se produce por la reducción de la velocidad del proyectil.

La velocidad inicial del proyectil para el modo 2, a partir de la energía disponible para el modo 2 calculada anteriormente, se obtiene mediante de la aplicación de la ecuación (375):



$$V_{p,2} = \sqrt{\frac{2 E_{D,2}}{M_p}} = \sqrt{\frac{2 \times 654.2}{1962.5}} = 0.82 \text{ m/s}$$

A partir de este dato, el cálculo en el modo 2 es totalmente independiente de lo calculado en el modo 1.

Para aplicar la formulación desarrollada generalizada, al igual que se hizo anteriormente con el modo 1, es necesario obtener la rigidez y la masa equivalente del modo 2, en este caso. Para calcular la rigidez y la masa equivalente en el punto central del modo 2, se obtiene la deformada del modo 2 de flexión mediante el análisis modal de Midas Civil. El modo 2 obtenido se muestra en la Figura 181.

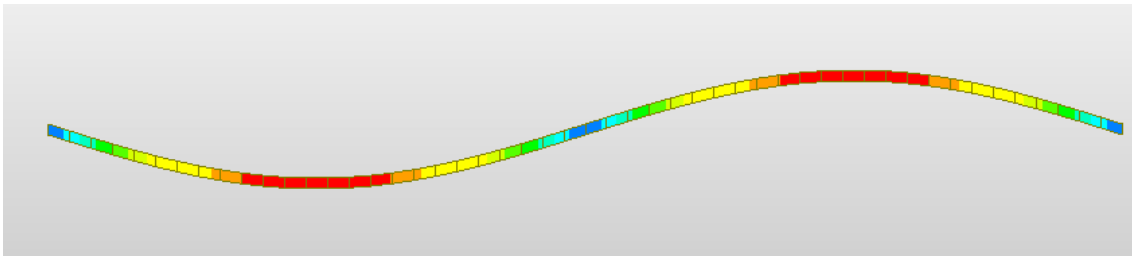


Figura 181-Modo de vibración 2 de la viga biapoyada.

Sin necesidad de realizar ninguno de los cálculos explicados en el apartado 4.1.2 del presente documento, se puede calcular la masa equivalente del modo 2 en el centro de la viga a partir de la Figura 181. La masa equivalente es la relación entre la fuerza de inercia condensada en el punto de impacto y la aceleración de ese mismo punto. Dado que el punto central de la viga, considerando exclusivamente al modo 2, no se mueve porque este punto es un nodo del modo 2, la aceleración de este punto es nula. Por tanto, la masa equivalente del nodo en el punto central de la viga, independientemente del valor de la fuerza de inercia condensada, es infinita:

$$M_{e,2} = \frac{\text{Fuerza inercia condensada}}{\text{aceleracion del punto}} = \frac{\text{Fuerza inercia condensada}}{0} = \infty$$

A partir de este valor de masa equivalente, se puede obtener el coeficiente de masas del modo 2 mediante la aplicación de la expresión (379):

$$C_{m,2} = \frac{M_p}{M_p + M_{e,2}} = \frac{M_p}{M_p + \infty} = 0 \quad (388)$$

En aplicación de la ecuación (377), se puede calcular la energía absorbida por el modo 2.



$$E_2 = E_{D,2} C_{m,2} = 654.2 \times 0 = 0 \quad (389)$$

De la expresión anterior se deduce que el modo 2 no se activará durante el impacto, dado que no absorbe energía. De manera general, se puede concluir a partir de lo explicado que, si el punto de impacto es simétrico, los modos antimétricos no se activarán porque romperían la respuesta simétrica.

Modo 3

Se calcula a continuación la contribución al desplazamiento del modo 3 de vibración.

La energía disponible para el modo 3 se calcula con a partir de la ecuación (376):

$$E_{D,3} = E_o - \sum_1^{n-1} E_n = E_o - \sum_1^2 E_n = 3925 - (3270 + 0) = 654.2 \text{ Nm}$$

Lógicamente, como el modo 2 no se ha activado, la energía disponible para el modo 3 es la misma que existía disponible para el modo 2. A partir de este valor de energía, se calcula la velocidad inicial del proyectil correspondiente al modo 3 mediante la ecuación (375).

$$V_{p,3} = \sqrt{\frac{2 E_{D,3}}{M_p}} = \sqrt{\frac{2 \times 654.2}{1962.5}} = 0.82 \text{ m/s}$$

Para aplicar la formulación generalizada, al igual que se hizo anteriormente con el modo 1 y 2, es necesario obtener la rigidez y la masa equivalente del modo 3, en este caso. La deformada del modo 3, calculada mediante análisis modal en el programa Midas Civil, es la mostrada en la Figura 182.

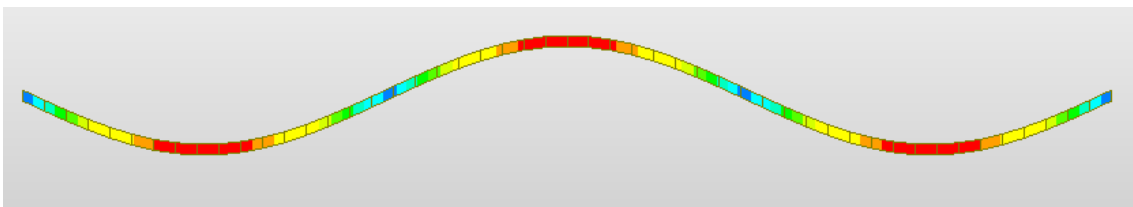


Figura 182-Modo de vibración 3 de la viga.

Los parámetros de rigidez y masa equivalente del modo 3 de vibración de la viga han sido calculados en el apartado 4.1.4.1 con los siguientes resultados:



$$K_3 = \frac{48EI}{(L/3)^3} = 2268 \frac{KN}{m}$$

$$M_{e,3} = A \times L/3 \times \rho \times 0.5 = 130.8 \text{ Kg}$$

Los parámetros de masa y rigidez se han obtenido, tal y como se explicó en el apartado indicado, como si fuera una viga simplemente apoyada de longitud L/3, por lo que, a todos los efectos, la estructura consta de un único vano de dicha longitud. Como además es un impacto central, y según lo expuesto en el apartado 4.2.7.4 para todos los modos distintos del modo 1, los parámetros correctos para este impacto resultan:

$$X_3(p) = 1$$

$$C_{k,3}(M_p) = 1$$

La frecuencia natural de vibración para el modo 3 obtenida es la siguiente:

$$w_{e,3} = \sqrt{K_3/M_{e,3}} = \sqrt{2268 \times 1000/130.83} = 131.66 \text{ rad/s}$$

La frecuencia de vibración durante el impacto, en aplicación de la ecuación (329) para el modo 3 resulta:

$$w_{ep,3} = \sqrt{\frac{K_{e,3} \times C_{k,3}(M_p)}{M_{e,3} + X_3(p)M_p}} = \sqrt{\frac{2268 \times 1000}{130.83 + 1962.5}} = 32.92 \text{ rad/s}$$

La velocidad inicial en la fase de restitución del modo 3, calculada según las expresiones (379) y (380), obtiene:

$$C_{m,3} = \frac{M_p}{M_p + M_{e,3}} = \frac{1962.5}{1962.5 + 130.83} = 0.94$$

$$V_{I,3} = V_{p,3} \times C_{m,3} = 0.82 \times 0.94 = 0.77$$

La energía absorbida por el modo 3 se obtiene a partir de la ecuación (377):

$$E_3 = E_{D,3} C_{m,3} = 654.2 \times 0.94 = 613.3 \text{ (N m)}$$

El porcentaje que representa esta energía respecto del total se obtiene en aplicación de la ecuación (378):

$$\frac{E_3}{E_o} = \frac{613.3}{3925} \times 100 = 15.6\%$$

Analizado hasta el modo 3, la energía total que se ha tenido en cuenta se obtiene a partir de la expresión (382):



$$E_{A,3} = \sum_1^3 E_n = 3270.8 + 0 + 613.3 = 3884.1 \text{ Nm}$$

Es decir, que la energía que se ha tenido en consideración hasta ahora, en términos relativos, es, según la ecuación (383):

$$E_{A,3} (\%) = 100 \frac{\sum_1^3 E_n}{E_o} = \frac{3883.3}{3925} \times 100 = 99\%$$

El modo 4, el cual se puede apreciar en la Figura 183 a partir del análisis modal realizado con Mida Civil, no se va a activar debido que es un modo antimétrico y la masa impacta de forma simétrica (el centro de la viga).

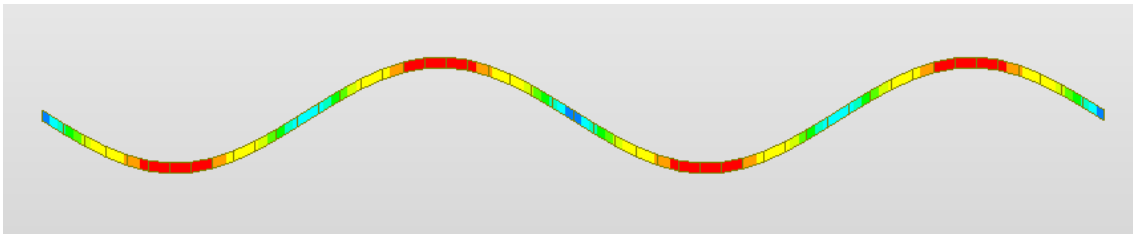


Figura 183-Modo de vibración 4 de flexión de la viga.

La energía disponible, por tanto, para el modo 5 se puede calcular en aplicación de la ecuación (376):

$$E_{D,5} = E_o - \sum_1^4 E_n = 3925 - (3270 + 0 + 613.3 + 0) = 40.9 \text{ Nm}$$

La energía disponible para el modo 5, en términos relativos, se obtiene de la expresión (384):

$$E_{D,5} (\%) = 100 \left(1 - \sum_1^4 \frac{E_n}{E_o} \right) = 100 \left(1 - \frac{3883.3}{3925} \right) = 1\%$$

Dado que el 99% de la energía cinética inicial se ha tenido en cuenta en el análisis al analizar los tres primeros modos de vibración, quedando por considerar únicamente el 1% restante, no se cree necesario tener en cuenta más modos de vibración.

Los resultados obtenidos durante este apartado se muestran resumidos en la Tabla 3. No se recogen los datos de los modos de vibración 2 y 4 por no ser nula su aportación en este caso.



Tabla 3-Resultados por modo sobre impacto central de $\alpha=5$ $V_p=2m/s$ en viga biapoyada de 10 m.

Unidades	Modo	1	Modo	3
-	$L/L_{ef,1}$	1	$L/L_{ef,3}$	3
m/s	$V_{p,1}$	2.00	$V_{p,3}$	0.82
Kg	$M_{e,1}$	392.50	$M_{e,3}$	130.83
-	α_1	5.00	α_3	15.00
-	$C_{m,1}$	0.83	$C_{m,3}$	0.94
m/s	$V_{l,1}$	1.67	$V_{l,3}$	0.77
kN/m	K_1	84.0	K_3	2268.0
-	$C_{K,1}(M_p)$	1.00	$C_{K,3}(M_p)$	1.00
kN/m	$K_{eq,1}$	84.0	$K_{eq,3}$	2268.0
rad/s	$W_{e,1}$	14.63	$W_{e,3}$	131.66
-	$X(p)_1$	1.00	$X(p)_3$	1.00
Kg	$M_{p,eq1}$	1962.50	$M_{p,eq3}$	1962.50
rad/s	$W_{ep,1}$	5.97	$W_{ep,3}$	32.92
Nm	E_1	3270.8	E_3	613.3
%	E_1 (%)	83.3%	E_3 (%)	15.6%
Nm	$E_{A,1}$	3270.8	$E_{A,3}$	3884.1
%	$E_{A,1}$ (%)	83%	$E_{A,3}$ (%)	99%
Nm	$E_{D,3}$	654.2	$E_{D,5}$	40.9
%	$E_{D,3}$ (%)	17%	$E_{D,5}$ (%)	1%

A partir de los datos de la Tabla 3 se aplica la fórmula del desplazamiento estructural generalizado para masa cualquiera según la ecuación (385) para los modos 1 y 3, resultando:

$$d_{e,Total}(t) = \frac{1.67 \times \text{sen}(5.97 t)}{5.97} + \frac{0.82 \times 0.94 \times \text{sen}(131.7 t)}{32.92}$$

En Figura 184 se comparan los resultados del desplazamiento estructural considerando únicamente el modo 1 $d_{e,1}(t)$ y considerando los tres primeros modos $d_{e,Total}(t)$ obtenido mediante la expresión anterior, con los ofrecidos por el modelo desarrollado en Midas NFX.

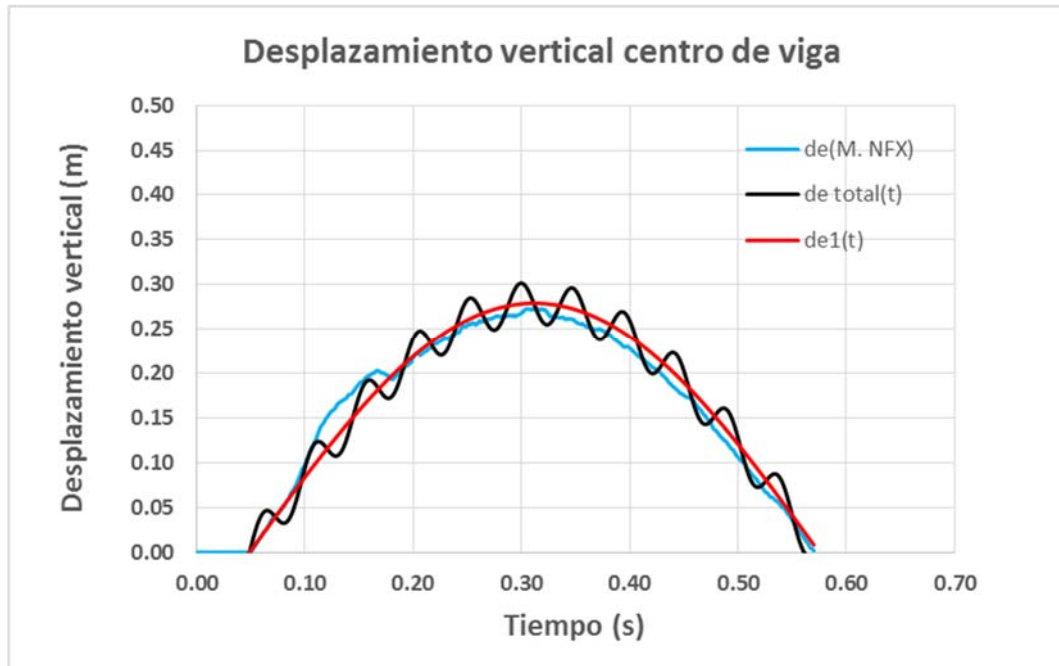


Figura 184-Comparativa de desplazamientos del centro de la viga entre Midas NFX, y formulación teniendo en cuenta el modo 1, y teniendo en cuenta la suma de modos 1,2 y 3. ($\alpha=5$)

En la Figura 184 se puede comprobar que la contribución del modo 3 resultante respecto al desplazamiento del punto central es relativamente pequeña. Además, se comprueba que la proximidad de las curvas de obtenidas mediante el NFX y la formulación es muy elevada.

A la vista de los resultados, y a pesar de la proximidad entre las curvas, parece que la formulación desarrollada predice una contribución del tercer modo ligeramente mayor que el Midas NFX. Como se comprobará en el análisis experimental mostrado en el capítulo 5 de la presente tesis, el comportamiento real de la estructura parece estar más próximo a la predicción de la formulación desarrollada. No obstante, y a pesar de las ligeras diferencias como se mostrará en dicho capítulo, Midas NFX, formulación y ensayo real presentan resultados realmente próximos.



4.2.8.2 Caso masa del proyectil igual a la masa equivalente del modo 1 de la estructura ($\alpha=1$) y velocidad del proyectil previa al impacto ($V_{p,0}$) de 2.0 m/s. No consideración del peso propio del proyectil en el impacto.

Se analiza a continuación el mismo caso que en el apartado anterior, pero en este caso con una masa de proyectil de valor igual a la del modo fundamental, es decir, 392.5 Kg ($\alpha=1$).

Los datos de partida del impacto son los mostrados en la Tabla 4:

Tabla 4- Impacto central en viga biapoyada. Caso $\alpha=1$ para formulación generalizada. Datos de partida.

Datos viga		Datos proyectil	
L (m)	10,00	Mp(kg)	392,5
b (m)	0,1	Vpo (m/s)	2,00
h (m)	0,1	Eo (N m)	785,0
A (m ²)	1,00E-02	C.M. (N s)	785,0
I (m ⁴)	8,33333E-06	K _{PROYECTIL}	∞
E (KN / m)	2,10E+08	g(m/s ²)	0
ρ (kg /m ³)	7,85E+03	α	1,00
Punto de impacto "p" (m)	5,00	C _{pp}	0,00

Al reducir la masa del proyectil es necesario estudiar un modo más de los 3 modos estudiados en el caso anterior para que el porcentaje de energía que se tiene en cuenta en la formulación sea suficiente.

Es decir, dado que modo 4, al igual que el modo 2, no se activa, es necesario tener en cuenta en los cálculos el modo 5 de vibración además de los modos 1 y 3.

La deformada obtenida para el modo 5 mediante el análisis modal realizado con Midas Civil, se muestran en la Figura 185.

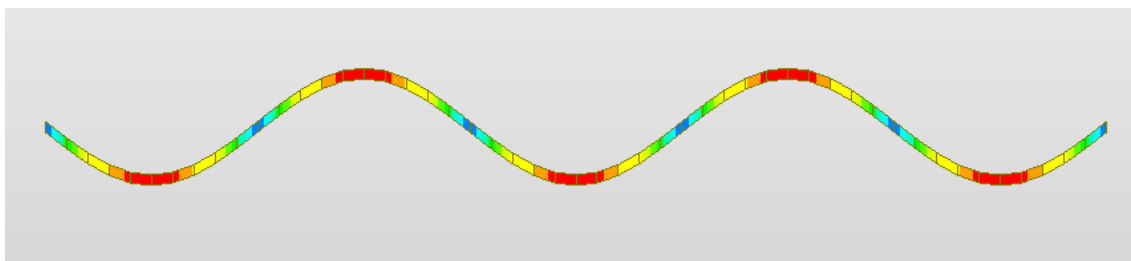


Figura 185- Modo de vibración 5 de flexión de la viga.

Para el cálculo de la rigidez y la masa equivalente de los modos, incluido el modo 5, se utilizarán en los cálculos correspondientes las siguientes expresiones, obtenidas en el apartado 4.1.4.1 del presente documento.



$$K_{e,n} = \frac{48EI}{L_{ef,n}^3}$$

$$M_{e,n} = A \times L_{ef,n} \times \rho \times 0.5$$

Siendo $L_{ef,n}$ para el modo 5, como se puede comprobar en la Figura 185, $L_{ef,5} = \frac{10}{5} = 2 \text{ m}$.

A continuación, se calculan los valores de parámetros necesarios para la aplicación de la formulación de los modos 1, 3 y 5.

Modo 1.

La velocidad inicial del proyectil para el modo 1, es la velocidad inicial del proyectil previa al impacto:

$$V_{p,1} = V_{p,0} = 2 \text{ m/s}$$

La masa equivalente se calcula a partir de la expresión anterior, concretando el valor de $L_{ef,n}$ para el modo 1:

$$M_{e,1} = A \times L_{ef,n} \times \rho \times 0.5 = 0.1 \times 0.1 \times \frac{10}{1} \times 7850 \times 0.5 = 392.5$$

La rigidez equivalente, para el modo 1 en este caso, se obtiene aplicando la siguiente expresión:

$$K_{e,1} = \frac{48EI}{L_{ef,n}^3} = \frac{48 \times 2.10 \times 10^4 \times \frac{1}{12} \times 0.1^4}{\left(\frac{10}{1}\right)^3} = 84.0 \text{ KN/m}$$

Con estos parámetros se puede aproximar la frecuencia fundamental de vibración del primer modo:

$$w_{e,1} = \sqrt{\frac{K_{e,1}}{M_{e,1}}} = \sqrt{84 \times 1000 / (392.5)} = 14.6 \text{ rad/s}$$

Los parámetros de masa y rigidez se han obtenido como una viga simplemente apoyada de longitud 10 m, por lo que, a todos los efectos, la estructura consta de un único vano. Como además es impacto central, los parámetros correctos para este impacto resultan:

$$X_1(p) = 1$$

$$C_{k,1}(M_p) = 1$$

La frecuencia de vibración durante el impacto, en aplicación de la ecuación (329) resulta:



$$w_{ep,1} = \sqrt{\frac{K_{e,1} \times C_{k,1} (M_p)}{M_{e,1} + X_1(p)M_p}} = \sqrt{84 \times 1000 / (392.5 + 392.5)} = 10.3 \text{ rad/s}$$

La velocidad inicial en la fase de restitución, calculada según las expresiones (379) y (380), obtiene:

$$C_{m,1} = \frac{M_p}{M_p + M_{e,1}} = \frac{392.5}{392.5 + 392.5} = 0.50$$

$$V_{I,1} = V_{p,1} \times C_{m,1} = 2 \times 0.5 = 1 \text{ m/s.}$$

La energía absorbida por el modo 1 se obtiene a partir de la ecuación (377):

$$E_1 = E_{D,1} C_{m,1} = E_o C_{m,1} = 0.5 \times 392.5 \times 2^2 \times 0.5 = 392.5 \text{ (Nm)}$$

La energía que absorbe el modo 1, por tanto, en términos relativos, se obtiene a partir de la expresión (378) resulta:

$$E_1(\%) = \frac{E_1}{E_o} 100 = 50.0\%$$

Para el modo 1, la energía total que se ha tenido en cuenta hasta este momento coincide con la energía absorbida por el modo 1, dado que es el único analizado. La energía tenida en cuenta considerando 1 modo de vibración se obtiene de la ecuación (382):

$$E_{A,1} = \sum_1^n E_n = \sum_1^1 E_n = 392.5 \text{ Nm}$$

Lógicamente la energía relativa total tenida en cuenta, la cual se calcula con la expresión (383), también coincide con la energía relativa absorbida por el modo 1:

$$E_{A,1}(\%) = \frac{\sum_1^n E_n}{E_o} 100 = \frac{E_1}{E_o} 100 = \frac{392.5}{785} \times 100 = 50.0\%$$

A partir de la ecuación (376) se obtiene la energía disponible para el siguiente modo, el modo 3:

$$E_{D,3} = E_o - \sum_1^2 E_n = 785 - (392.5 - 0) = 392.5 \text{ Nm}$$

Mediante la expresión (384) se calcula la energía disponible para el modo 3 en términos relativos:

$$E_{D,3}(\%) = \frac{392.5}{785} \times 100 = 50.0\%$$



Modo 3:

A partir del valor de la energía disponible para el modo 3, se calcula la velocidad inicial del proyectil correspondiente al modo 3 mediante la ecuación (375).

$$V_{p,3} = \sqrt{\frac{2 E_{D,3}}{M_p}} = \sqrt{\frac{2 \times 392.5}{392.5}} = 1.41 \text{ m/s}$$

Los parámetros de rigidez y masa equivalente del modo 3 de vibración de la viga se calculan con las expresiones obtenidas en el apartado 4.1.4.1, análogamente a lo realizado para el modo 1. Para el caso concreto del modo 3, el valor del parámetro $L_{ef,n}$ resulta $L_{ef,n} = \frac{10}{3} \text{ m}$.

A partir de este valor se obtienen los siguientes resultados:

$$K_{e,3} = \frac{48EI}{L_{ef,n}^3} = 2268 \frac{KN}{m}$$

$$M_{e,3} = A \times L_{ef,n} \times \rho \times 0.5 = 130.8 \text{ Kg}$$

Los parámetros de masa y rigidez se han obtenido como si fuera una viga simplemente apoyada de longitud $10/3 \text{ m}$, por lo que, a todos los efectos, la estructura consta de un único vano, es decir, $C_{k,3}(M_p) = 1$ según lo expuesto en el apartado 4.2.7.4. Como además es impacto central, los parámetros correctos para este impacto resultan:

$$X_3(p) = 1$$

$$C_{k,3}(M_p) = 1$$

La frecuencia natural de vibración para el modo 3 obtenida es la siguiente:

$$w_{e,3} = \sqrt{K_3/M_{e,3}} = \sqrt{2268 \times 1000/130.83} = 131.66 \text{ rad/s}$$

La frecuencia de vibración durante el impacto, en aplicación de la ecuación (329) resulta:

$$w_{ep,3} = \sqrt{\frac{K_{e,3} \times C_{k,3}(M_p)}{M_{e,3} + X_3(p)M_p}} = \sqrt{2268 \times 1000/(130.8 + 392.5)} = 65.8 \text{ rad/s}$$

La velocidad inicial en la fase de restitución, calculada según las expresiones (379) y (380), obtiene:

$$C_{m,3} = \frac{M_p}{M_p + M_{e,3}} = \frac{392.5}{392.5 + 130.83} = 0.75$$

$$V_{I,3} = V_{p,3} \times C_{m,3} = 0.82 \times 0.75 = 1.06 \text{ m/s}$$



La energía absorbida por el modo 3 se obtiene a partir de la ecuación (377):

$$E_3 = E_{D,3} C_{m,3} = 392.5 \times 0.75 = 294.4 \text{ N m}$$

El porcentaje que representa esta energía respecto del total se obtiene en aplicación de la ecuación (378):

$$E_3(\%) = \frac{E_3}{E_o} 100 = \frac{294.4}{785} \times 100 = 37.5\%$$

Analizado hasta el modo 3, la energía que se ha tenido en cuenta se obtiene a partir de la expresión (382):

$$E_{A,3} = \sum_1^3 E_n = E_1 + E_3 = 392.5 + 294.4 = 686.9 \text{ Nm}$$

Es decir, que la energía que se ha tenido en consideración hasta ahora, en términos relativos, es, según la ecuación (383):

$$E_{A,3}(\%) = 100 \frac{\sum_1^3 E_n}{E_o} = \frac{E_{A,3}}{E_o} 100 = \frac{686.9}{785} = 88\%$$

La energía disponible para el modo 5, resulta:

$$E_{D,5} = E_o - \sum_1^4 E_n = 785 - 686.9 = 98.1 \text{ Nm}$$

La energía disponible para el modo 5, en términos relativos, se obtiene de la expresión (384):

$$E_{D,5}(\%) = 100 \left(1 - \sum_1^4 \frac{E_n}{E_o} \right) = 100 \times \left(\frac{98.1}{785} \right) = 13\%$$

Modo 5.

A partir del valor de la energía disponible para el modo 5, se calcula la velocidad inicial del proyectil correspondiente al modo 5 mediante la ecuación (375).

$$V_{p,3} = \sqrt{\frac{2 E_{D,5}}{M_p}} = \sqrt{\frac{2 \times 98.1}{392.5}} = 0.71$$

Los parámetros de rigidez y masa equivalente del modo 5 de vibración de la viga calculados con las expresiones obtenidas en el apartado 4.1.4.1. Para el modo 5, como se indicó anteriormente, el parámetro $L_{ef,n}$ toma el valor de $L_{ef,n} = \frac{10}{5} = 2 \text{ m}$, obteniéndose los siguientes resultados:



$$K_{e,5} = \frac{48EI}{L_{ef,n}^3} = 10500 \frac{KN}{m}$$

$$M_{e,3} = A \times L_{ef,n} \times \rho \times 0.5 = 78.5 \text{ Kg}$$

Los parámetros de masa y rigidez se han obtenido como si fuera una viga simplemente apoyada de longitud 10/5 m, por lo que, a todos los efectos, la estructura consta de un único vano, es decir, $C_{k,5} (M_p) = 1$ según lo expuesto en el apartado 4.2.7. 4.. Como además es impacto central, los parámetros correctos para este impacto resultan:

$$X_5 (p) = 1$$

$$C_{k,5} (M_p) = 1$$

La frecuencia natural de vibración para el modo 5 obtenida es la siguiente:

$$w_{e,5} = \sqrt{K_{e,5} / M_{e,5}} = \sqrt{10500 \times 1000 / 78.5} = 365.7 \text{ rad/s}$$

La frecuencia de vibración durante el impacto, en aplicación de la ecuación (329) resulta:

$$w_{ep,5} = \sqrt{\frac{K_{e,5} \times C_{k5} (M_p)}{M_{e,5} + X_5 (p) M_p}} = \sqrt{10500 \times \frac{1000}{78.5 + 392.5}} = 149.3 \text{ rad/s}$$

$$C_{m,5} = \frac{M_p}{M_p + M_{eq3}} = \frac{392.5}{392.5 + 78.5} = 0.83$$

La velocidad inicial en la fase de restitución, calculada según las expresiones (379) y (380):

$$C_{m,5} = \frac{M_p}{M_p + M_{e,5}} = \frac{392.5}{392.5 + 78.5} = 0.83$$

$$V_{I5} = V_{p,5} \times C_{m,5} = 0.71 \times 0.83 = 0.59 \text{ m/s}$$

La energía absorbida por el modo 5 se obtiene a partir de la ecuación (377):

$$E_5 = E_{D,5} C_{m,5} = 98.1 \times 0.83 = 81.8 \text{ Nm}$$

El porcentaje que representa esta energía respecto del total se obtiene en aplicación de la ecuación (378):

$$E_5 (\%) = \frac{E_5}{E_o} 100 = \frac{81.8}{785} \times 100 = 10.4\%$$

Analizado hasta el modo 5, la energía que se ha tenido en cuenta se obtiene a partir de la expresión (382):



$$E_{A,5} = \sum_1^5 E_n = 392.5 + 0294.4 + 0 + 81.8 = 768.6 \text{ Nm}$$

Es decir, que la energía que se ha tenido en consideración hasta ahora, en términos relativos, es, según la ecuación (383):

$$E_{A,5} (\%) = 100 \frac{\sum_1^5 E_n}{E_o} = \frac{E_{A,5}}{E_o} 100 = \frac{768.6}{785} 100 = 98\%$$

El modo 6, al ser simétrico, no se activará al igual que el modo 2 y 4. Por lo que la energía disponible para el modo 7, resulta:

$$E_{D,7} = E_o - \sum_1^7 E_n = 785 - 768.6 = 16.4 \text{ Nm}$$

La energía disponible para el modo 7, en términos relativos, se obtiene de la expresión (384):

$$E_{D,7}(\%) = 100 \left(1 - \sum_1^7 \frac{E_n}{E_o} \right) = \frac{16.4}{785} \times 100 = 2\%$$

Los resultados anteriormente calculados para cada modo, se exponen a modo de resumen en la Tabla 5.

Tabla 5- Resultados por modos sobre impacto central de $\alpha=1$ $V_p=2\text{m/s}$ en viga biapoyada de 10 m.

Unidades	Modo	1	Modo	3	Modo	5
-	$L/L_{ef,1}$	1	$L/L_{ef,3}$	3	$L/L_{ef,5}$	5
m/s	$V_{p,1}$	2.00	$V_{p,3}$	1.41	$V_{p,5}$	0.71
Kg	$M_{e,1}$	392.50	$M_{e,3}$	130.83	$M_{e,5}$	78.50
-	α_1	1.00	α_3	3.00	α_5	5.00
-	$C_{m,1}$	0.50	$C_{m,3}$	0.75	$C_{m,5}$	0.83
m/s	$V_{i,1}$	1.00	$V_{i,3}$	1.06	$V_{i,5}$	0.59
kN/m	K_1	84.0	K_3	2268.0	K_5	10500.0
-	$C_{K,1}(M_p)$	1.00	$C_{K,3}(M_p)$	1.00	$C_{K,5}(M_p)$	1.00
kN/m	$K_{eq,1}$	84.0	$K_{eq,3}$	2268.0	$K_{eq,5}$	10500.0
rad/s	$W_{e,1}$	14.63	$W_{e,3}$	131.66	$W_{e,5}$	365.73
-	$X(p)_1$	1.00	$X(p)_3$	1.00	$X(p)_5$	1.00
Kg	$M_{p,eq1}$	392.50	$M_{p,eq3}$	392.50	$M_{p,eq5}$	392.50
rad/s	$W_{ep,1}$	10.34	$W_{ep,3}$	65.83	$W_{ep,5}$	149.31
Nm	E_1	392.5	E_3	294.4	E_5	81.8
%	$E_1 (\%)$	50.0%	$E_3 (\%)$	37.5%	$E_5 (\%)$	10.4%
Nm	$E_{A,1}$	392.5	$E_{A,3}$	686.9	$E_{A,5}$	768.6
%	$E_{A,1} (\%)$	50%	$E_{A,3} (\%)$	88%	$E_{A,5} (\%)$	98%
Nm	$E_{D,3}$	392.5	$E_{D,5}$	98.1	$E_{D,7}$	16.4
%	$E_{D,3} (\%)$	50%	$E_{D,5} (\%)$	13%	$E_{D,7} (\%)$	2%



A partir de los datos anteriores, se aplica la formulación general de desplazamiento (385):

$$d_{e,Total}(t) = d_{e,1} + d_{e,3} + d_{e,5}$$

$$d_{e,Total}(t) = \frac{2 \times 0.5 \times \text{sen}(10.3 t)}{10.3} + \frac{1.41 \times 0.75 \times \text{sen}(131.7 t)}{65.8} + \frac{0.71 \times 0.83 \times \text{sen}(365.7 t)}{149.3}$$

En la Figura 186 se comparan los resultados del desplazamiento estructural considerando únicamente el modo 1 $d_{e,1}(t)$ y considerando los tres primeros modos activos $d_{e,Total}(t)$ obtenido mediante la expresión anterior, con los ofrecidos por el modelo desarrollado en Midas NFX.

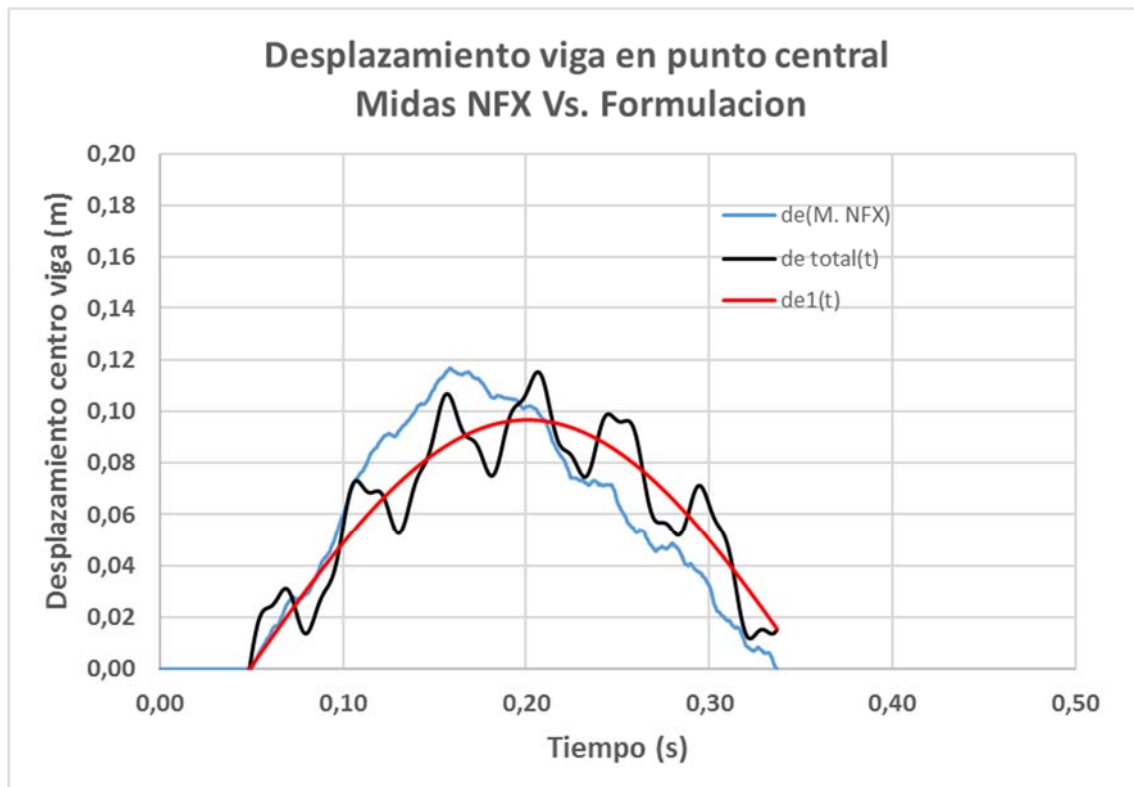


Figura 186- Comparativa de desplazamientos del centro de la viga entre Midas NFX, y formulación teniendo en cuenta el modo 1, y teniendo en cuenta la suma de modos del 1 al 5. ($\alpha=1$)

En la gráfica superior se puede apreciar que la contribución de los modos 3, sobre todo, y 5, es relativamente importante en lo que al desplazamiento se refiere. De contar sólo con el primer modo (línea continua roja) el desplazamiento máximo estaría por debajo de 0.1 m, mientras que con la contribución de los otros modos prácticamente llega a 0.12 m. Esto supone aproximadamente un incremento del 20% respecto del desplazamiento máximo. Este valor es **es prácticamente coincidente** con el ofrecido por Midas NFX (curva azul).



4.2.8.3 Caso masa del proyectil la mitad de la masa equivalente del modo 1 de la estructura ($\alpha=0.5$) y velocidad del proyectil previa al impacto ($V_{p,o}$) de 2.0 m/s. No consideración del peso propio del proyectil en el impacto.

Se analiza a continuación el mismo caso que en el apartado anterior, pero con una masa de proyectil igual a la mitad de la masa del modo 1, es decir, 196.25 Kg ($\alpha=0.5$).

Los datos de partida del impacto son los mostrados en la Tabla 6:

Tabla 6- Impacto central en viga biapoyada. Caso $\alpha=0.5$ para formulación generalizada. Datos de partida.

Datos viga		Datos proyectil	
L (m)	10,00	Mp(kg)	196,25
b (m)	0,1	Vpo (m/s)	2,00
h (m)	0,1	Eo (N m)	392,5
A (m ²)	1,00E-02	C.M. (N s)	392,5
I (m ⁴)	8,33333E-06	K _{PROYECTIL}	∞
E (KN / m)	2,10E+08	g(m/s ²)	0
ρ (kg /m ³)	7,85E+03	α	0,50
Punto de impacto "p" (m)	5,00	C _{pp}	0,00

De manera análoga a lo realizado en los apartados 4.2.8.1 y 4.2.8.2 se obtienen los parámetros para los modos impares 1, 3 y 5 para la aplicación de la ecuación (385). Los valores de dichos parámetros se muestran en la Tabla 7.

Tabla 7-Resultados por modos sobre impacto central de $\alpha=0.5$ $V_p=2m/s$ en viga biapoyada de 10 m

Unidades	Modo	1	Modo	3	Modo	5
-	L/L _{ef,1}	1	L/L _{ef,3}	3	L/L _{ef,5}	5
m/s	V _{p,1}	2.00	V _{p,3}	1.63	V _{p,5}	1.03
Kg	M _{e,1}	392.50	M _{e,3}	130.83	M _{e,5}	78.50
-	α_1	0.50	α_3	1.50	α_5	2.50
-	C _{m,1}	0.33	C _{m,3}	0.60	C _{m,5}	0.71
m/s	V _{i,1}	0.67	V _{i,3}	0.98	V _{i,5}	0.74
kN/m	K ₁	84.0	K ₃	2268.0	K ₅	10500.0
-	C _{K,1} (M _p)	1.00	C _{K,3} (M _p)	1.00	C _{K,5} (M _p)	1.00
kN/m	K _{eq,1}	84.0	K _{eq,3}	2268.0	K _{eq,5}	10500.0
rad/s	W _{e,1}	14.63	W _{e,3}	131.66	W _{e,5}	365.73
-	X(p) ₁	1.00	X(p) ₃	1.00	X(p) ₅	1.00
Kg	M _{p,eq1}	196.25	M _{p,eq3}	196.25	M _{p,eq5}	196.25
rad/s	W _{ep,1}	11.94	W _{ep,3}	83.27	W _{ep,5}	195.49
Nm	E ₁	130.8	E ₃	157.0	E ₅	74.8
%	E ₁ (%)	33.3%	E ₃ (%)	40.0%	E ₅ (%)	19.0%
Nm	E _{A,1}	130.8	E _{A,3}	287.8	E _{A,5}	362.6
%	E _{A,1} (%)	33%	E _{A,3} (%)	73%	E _{A,5} (%)	92%
Nm	E _{D,3}	261.7	E _{D,5}	104.7	E _{D,7}	29.9
%	E _{D,3} (%)	67%	E _{D,5} (%)	27%	E _{D,7} (%)	8%



Como se puede comprobar en la Tabla 7), la energía analizada considerando los 5 primeros modos de vibración resulta el 92%, quedando un 8% de energía sin considerar.

A partir de los datos anteriores, se aplica la formulación general de desplazamiento (385):

$$d_{e,Total}(t) = d_{e,1} + d_{e,3} + d_{e,5}$$
$$d_{e,Total}(t) = \frac{2 \times 0.33 \times \text{sen}(11.9 t)}{11.9} + \frac{1.63 \times 0.60 \times \text{sen}(131.7 t)}{83.3} + \frac{1.03 \times 0.71 \times \text{sen}(365.7 t)}{195.5}$$

En la Figura 187 se comparan los resultados del desplazamiento estructural únicamente el modo 1 $d_{e,1}(t)$ y considerando los tres primeros modos $d_{e,Total}(t)$ obtenido mediante la expresión anterior, con los ofrecidos por el modelo desarrollado en Midas NFX.

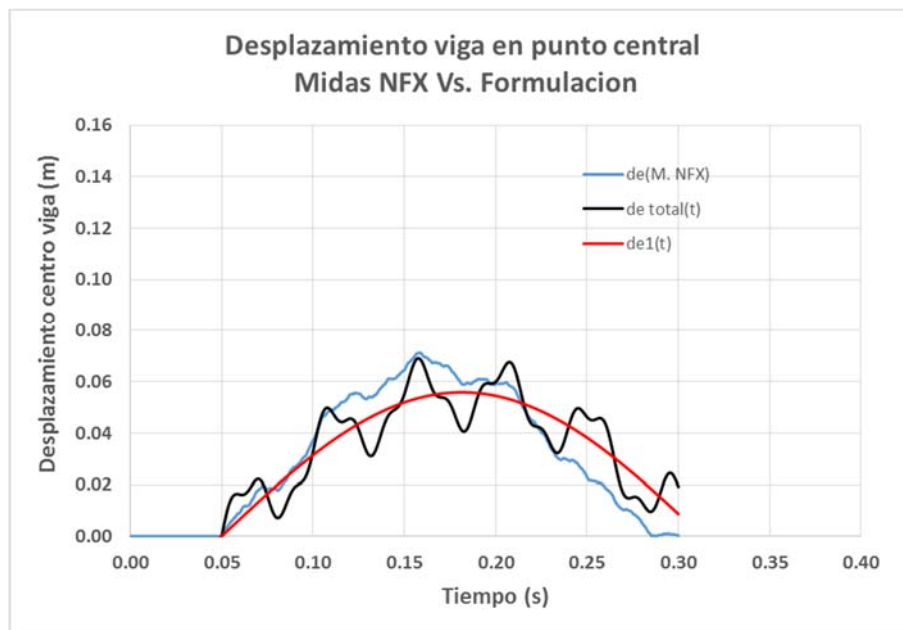


Figura 187- Comparativa de desplazamientos del centro de la viga entre Midas NFX, y formulación teniendo en cuenta el modo 1, y teniendo en cuenta la suma de modos del 1 al 5. ($\alpha=0.5$)

En la figura anterior se puede apreciar que el valor de la máxima deformación, y el instante en el que se produce, se muestran de manera **coincidente** tanto en la curva $d_{e,Total}(t)$, derivada de la formulación desarrollada, como en la curva $d_e(M.NFX)$ que refleja los resultados del software de elementos finitos.



4.2.8.4 Caso masa del proyectil un cuarto la masa equivalente del modo 1 de la estructura ($\alpha=0.25$) y velocidad del proyectil previa al impacto ($V_{p,0}$) de 2.0 m/s. No consideración del peso propio del proyectil en el impacto.

Se analiza a continuación el mismo caso que en el apartado anterior, pero en este caso con una masa de proyectil igual a un cuarto de la masa del modo 1, es decir, 98.125 Kg ($\alpha=0.25$).

Los datos de partida del impacto son los mostrados en la Tabla 8:

Tabla 8- Impacto central en viga biapoyada. Caso $\alpha=0.25$ para la formulación generalizada. Datos de partida.

Datos viga		Datos proyectil	
L (m)	10,00	Mp(kg)	98,125
b (m)	0,1	Vpo (m/s)	2,00
h (m)	0,1	Eo (N m)	196,3
A (m ²)	1,00E-02	C.M. (N s)	196,3
I (m ⁴)	8,33333E-06	K _{PROYECTIL}	∞
E (KN / m)	2,10E+08	g(m/s ²)	0
ρ (kg / m ³)	7,85E+03	α	0,25
Punto de impacto "p" (m)	5,00	C _{pp}	0,00

De manera análoga a lo realizado en los apartados 4.2.8.1 y 4.2.8.2 se obtienen los parámetros para los modos impares 1, 3 y 5 para la aplicación de la ecuación (385). Los valores de dichos parámetros se muestran en la Tabla 9.

Tabla 9- Resultados por modos sobre impacto central de $\alpha=0.25$ $V_p=2$ m/s en viga biapoyada de 10 m

Unidades	Modo	1	Modo	3	Modo	5
-	L/L _{ef,1}	1	L/L _{ef,3}	3	L/L _{ef,5}	5
m/s	V _{p,1}	2.00	V _{p,3}	1.79	V _{p,5}	1.35
Kg	M _{e,1}	392.50	M _{e,3}	130.83	M _{e,5}	78.50
-	α_1	0.25	α_3	0.75	α_5	1.25
-	C _{m,1}	0.20	C _{m,3}	0.43	C _{m,5}	0.56
m/s	V _{i,1}	0.40	V _{i,3}	0.77	V _{i,5}	0.75
kN/m	K ₁	84.0	K ₃	2268.0	K ₅	10500.0
-	C _{K,1} (M _p)	1.00	C _{K,3} (M _p)	1.00	C _{K,5} (M _p)	1.00
kN/m	K _{eq,1}	84.0	K _{eq,3}	2268.0	K _{eq,5}	10500.0
rad/s	W _{e,1}	14.63	W _{e,3}	131.66	W _{e,5}	365.73
-	X(p) ₁	1.00	X(p) ₃	1.00	X(p) ₅	1.00
Kg	M _{p,eq1}	98.13	M _{p,eq3}	98.13	M _{p,eq5}	98.13
rad/s	W _{ep,1}	13.08	W _{ep,3}	99.53	W _{ep,5}	243.82
Nm	E ₁	39.3	E ₃	67.3	E ₅	49.8
%	E ₁ (%)	20.0%	E ₃ (%)	34.3%	E ₅ (%)	25.4%
Nm	E _{A,1}	39.3	E _{A,3}	106.5	E _{A,5}	156.4
%	E _{A,1} (%)	20%	E _{A,3} (%)	54%	E _{A,5} (%)	80%
Nm	E _{D,3}	157.0	E _{D,5}	89.7	E _{D,7}	39.9
%	E _{D,3} (%)	80%	E _{D,5} (%)	46%	E _{D,7} (%)	20%



Como se puede comprobar en la Tabla 9, la energía analizada considerando los 5 primeros modos de vibración resulta el 80%, quedando un 20% de energía sin considerar.

A partir de los datos anteriores, se aplica la formulación general de desplazamiento (385):

$$d_{e,Total}(t) = d_{e,1} + d_{e,3} + d_{e,5}$$
$$d_{e,Total}(t) = \frac{2 \times 0.20 \times \text{sen}(13.1 t)}{13.1} + \frac{1.79 \times 0.43 \times \text{sen}(131.7 t)}{99.5} + \frac{1.35 \times 0.56 \times \text{sen}(365.7 t)}{243.82}$$

En la Figura 188 se comparan los resultados del desplazamiento estructural únicamente el modo 1 $d_{e,1}(t)$ y considerando los tres primeros modos $d_{e,Total}(t)$ obtenido mediante la expresión anterior, con los ofrecidos por el modelo desarrollado en Midas NFX.

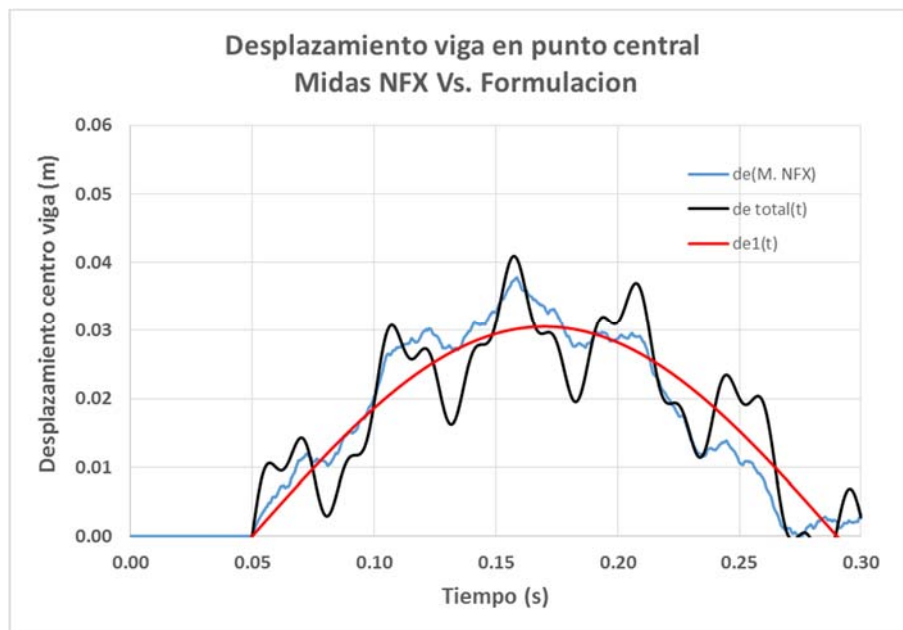


Figura 188- Comparativa de desplazamientos del centro de la viga entre Midas NFX, y formulación teniendo en cuenta el modo 1, y teniendo en cuenta la suma de modos del 1 al 5. ($\alpha=0.25$)

En la figura anterior se puede apreciar que el valor de la máxima deformación, y el instante en el que se produce, se muestran de manera **coincidente** tanto en la curva $d_{e,Total}(t)$ (curva negra), derivada de la formulación desarrollada, como en la curva $d_e(M. NFX)$ (curva azul) que refleja los resultados del software de elementos finitos.



En la Figura 188 también se puede apreciar el valor de la máxima deformación es, aproximadamente, 0.04 m al considerar los 5 modos de vibración, mientras que el valor de la máxima deformación considerando únicamente el modo 1 (línea roja continua) es aproximadamente 0.03 m. Esto supone que el resto de modos distintos al primero aportan un 33% a la máxima deformación.

El modo 1, por tanto, aporta el 66% de la máxima deformación absorbiendo únicamente el 20 % de la energía inicial como se indica en la Tabla 9. Por el contrario, el resto de modos aportan el 33% a la máxima deformación absorbiendo el 60 % de la energía inicial. Estos datos concluyen que, en el desplazamiento de una estructura en un impacto, prácticamente de manera independiente del valor de la masa del proyectil, **el modo fundamental es el principal responsable del desplazamiento** de la misma.

4.2.8.5 Caso masa del proyectil un décimo la masa equivalente del modo 1 de la estructura ($\alpha=0.1$) y velocidad del proyectil previa al impacto ($V_{p,o}$) de 2.0 m/s. No consideración del peso propio del proyectil en el impacto.

Se analiza a continuación el mismo caso que en el apartado anterior, pero en este caso con una masa de proyectil igual a un décimo de la masa del modo 1, es decir, 39.25 Kg ($\alpha=0.10$).

Los datos de partida del impacto son los mostrados en la Tabla 10:

Tabla 10- Impacto central en viga biapoyada. Caso $\alpha=0.1$ para la formulación generalizada. Datos de partida.

Datos viga		Datos proyectil	
L (m)	10,00	Mp(kg)	39,25
b (m)	0,1	Vpo (m/s)	2,00
h (m)	0,1	Eo (N m)	78,5
A (m ²)	1,00E-02	C.M. (N s)	78,5
I (m ⁴)	8,33333E-06	K _{PROYECTIL}	∞
E (KN / m)	2,10E+08	g(m/s ²)	0
ρ (kg /m ³)	7,85E+03	α	0,10
Punto de impacto "p" (m)	5,00	C _{pp}	0,00

De manera análoga a lo realizado en los apartados 4.2.8.1 y 4.2.8.2 se obtienen los parámetros para los modos impares 1, 3 y 5 para la aplicación de la ecuación (385). Los valores de dichos parámetros se muestran en la Tabla 11.



Tabla 11- Resultados por modos sobre impacto central de $\alpha=0.1$ $V_p=2m/s$ en viga biapoyada de 10 m

Unidades	Modo	1	Modo	3	Modo	5
-	$L/L_{ef,1}$	1	$L/L_{ef,3}$	3	$L/L_{ef,5}$	5
m/s	$V_{p,1}$	2.00	$V_{p,3}$	1.91	$V_{p,5}$	1.67
Kg	$M_{e,1}$	392.50	$M_{e,3}$	130.83	$M_{e,5}$	78.50
-	α_1	0.10	α_3	0.30	α_5	0.50
-	$C_{m,1}$	0.09	$C_{m,3}$	0.23	$C_{m,5}$	0.33
m/s	$V_{i,1}$	0.18	$V_{i,3}$	0.44	$V_{i,5}$	0.56
kN/m	K_1	84.0	K_3	2268.0	K_5	10500.0
-	$C_{K,1}(M_p)$	1.00	$C_{K,3}(M_p)$	1.00	$C_{K,5}(M_p)$	1.00
kN/m	$K_{eq,1}$	84.0	$K_{eq,3}$	2268.0	$K_{eq,5}$	10500.0
rad/s	$W_{e,1}$	14.63	$W_{e,3}$	131.66	$W_{e,5}$	365.73
-	$X(p)_1$	1.00	$X(p)_3$	1.00	$X(p)_5$	1.00
Kg	$M_{p,eq1}$	39.25	$M_{p,eq3}$	39.25	$M_{p,eq5}$	39.25
rad/s	$W_{ep,1}$	13.95	$W_{ep,3}$	115.48	$W_{ep,5}$	298.62
Nm	E_1	7.1	E_3	16.5	E_5	18.3
%	E_1 (%)	9.1%	E_3 (%)	21.0%	E_5 (%)	23.3%
Nm	$E_{A,1}$	7.1	$E_{A,3}$	23.6	$E_{A,5}$	41.9
%	$E_{A,1}$ (%)	9%	$E_{A,3}$ (%)	30%	$E_{A,5}$ (%)	53%
Nm	$E_{D,3}$	71.4	$E_{D,5}$	54.9	$E_{D,7}$	36.6
%	$E_{D,3}$ (%)	91%	$E_{D,5}$ (%)	70%	$E_{D,7}$ (%)	47%

Como se puede comprobar en la Tabla 11, la energía analizada considerando los 5 primeros modos de vibración resulta el 53%, quedando un 47% de energía sin considerar.

A partir de los datos anteriores, se aplica la formulación general de desplazamiento (385):

$$d_{e,Total}(t) = d_{e,1} + d_{e,3} + d_{e,5}$$

$$d_{e,Total}(t) = \frac{2 \times 0.09 \times \text{sen}(13.95 t)}{13.95} + \frac{1.91 \times 0.23 \times \text{sen}(131.7 t)}{115.48} + \frac{1.67 \times 0.33 \times \text{sen}(365.7 t)}{298.62}$$

En la Figura 189 se comparan los resultados del desplazamiento estructural únicamente el modo 1 $d_{e,1}(t)$ y considerando los tres primeros modos $d_{e,Total}(t)$ obtenido mediante la expresión anterior, con los ofrecidos por el modelo desarrollado en Midas NFX.

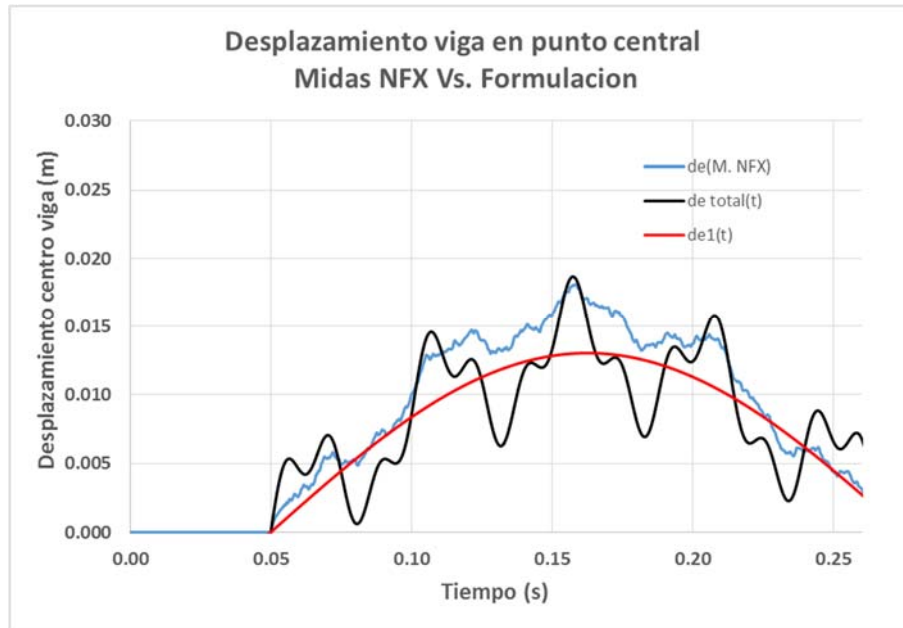


Figura 189- Comparativa de desplazamientos del centro de la viga entre Midas NFX, y formulación teniendo en cuenta el modo 1, y teniendo en cuenta la suma de modos del 1 al 5. ($\alpha=0.1$)

A pesar de que en este caso solo se ha tenido en cuenta el 53% de la energía inicial en los cálculos como muestra la Tabla 11, el desplazamiento máximo del punto central de la viga que predice la formulación y el que indica el Midas NFX son prácticamente coincidentes. Esto es debido a que los altos modos de vibración, como se comentó en apartado anterior, aunque absorban la mayor parte de la energía, tienen una escasa contribución en el desplazamiento.



4.2.8.6 Análisis conjunto

Para ver los casos expuestos en su conjunto y evaluar más fácilmente la precisión de los resultados, se muestran en la Figura 190 los 5 casos analizados en el apartado 4.2.8 en función del parámetro α , es decir, en función de la relación de la masa del proyectil con el valor de la masa equivalente del modo fundamental.

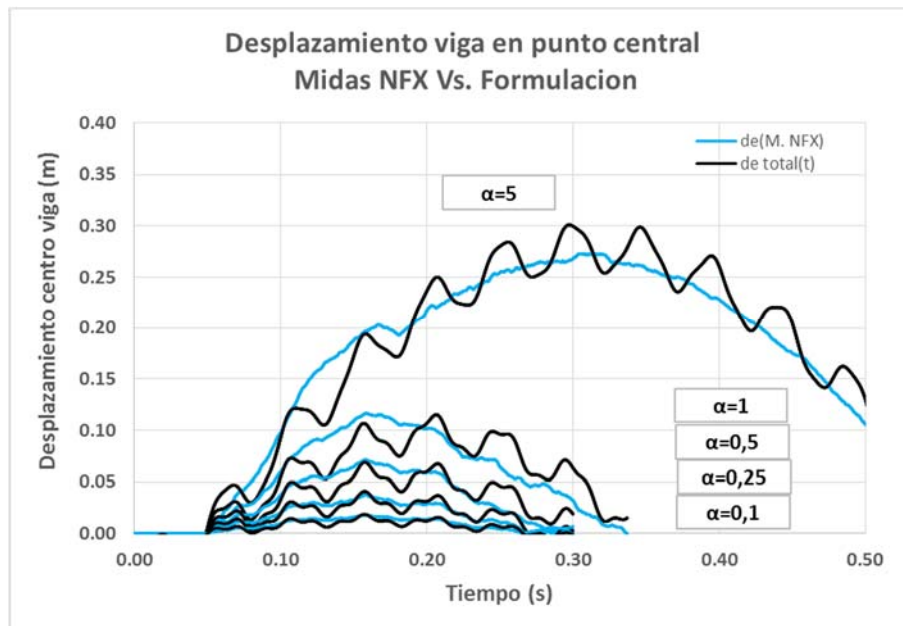


Figura 190-Resultados la formulación generalizada en función del parámetro α .

Para los 5 casos representados en la Figura 190, se va a analizar a continuación el balance energético de los 3 modos (modo 1, modo 3 y modo 5) en cada situación de impacto estudiada. Para este análisis, se va a enfrentar el porcentaje de energía que se lleva cada modo con el parámetro α_n , es decir, se estudiará la relación entre el porcentaje de energía absorbido por cada modo y la relación de la masa del proyectil con la masa equivalente de cada modo.

$$\alpha_n = \frac{M_p}{M_{e,n}}$$

Los resultados, para todos los 5 casos, se muestran numéricamente en la Tabla 12 y gráficamente en la Figura 191:



Tabla 12-Resultados energéticos de los casos de impactos analizados en el apartado 4.2.6.

Caso $\alpha=5$				
Modo 1	α_1	5	E_1 (%)	83,3
Modo 2	α_2	15	E_2 (%)	15,6
Modo 3	α_3	25	E_3 (%)	1,0
Caso $\alpha=1$				
Modo 1	α_1	1	E_1 (%)	50,0
Modo 2	α_2	3	E_2 (%)	37,5
Modo 3	α_3	5	E_3 (%)	10,4
Caso $\alpha=0,5$				
Modo 1	α_1	0,5	E_1 (%)	33,3
Modo 2	α_2	1,5	E_2 (%)	40,0
Modo 3	α_3	2,5	E_3 (%)	19,0
Caso $\alpha=0,25$				
Modo 1	α_1	0,25	E_1 (%)	39,3
Modo 2	α_2	0,75	E_2 (%)	67,3
Modo 3	α_3	1,25	E_3 (%)	49,8
Caso $\alpha=0,10$				
Modo 1	α_1	0,1	E_1 (%)	9,1
Modo 2	α_2	0,3	E_2 (%)	21,0
Modo 3	α_3	0,5	E_3 (%)	23,3

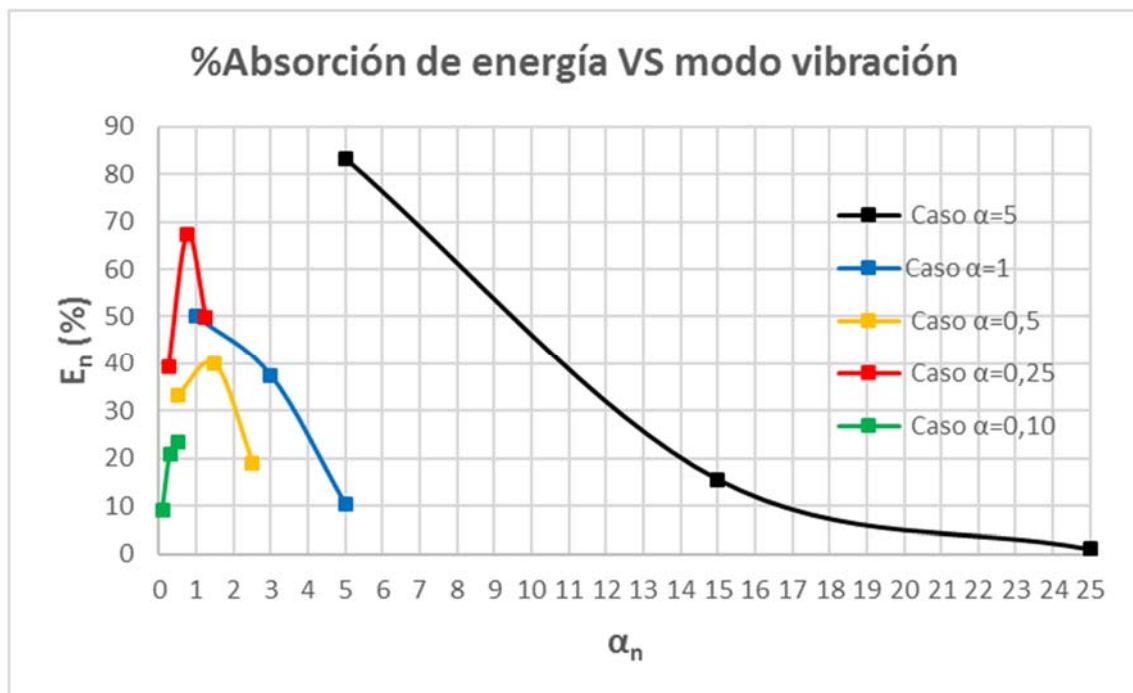


Figura 191-Representación gráfica de los resultados energéticos de los casos de impactos analizados en el apartado 4.2.6.

En la Figura 191 se presenta cada caso estudiado en el apartado 4.2.8 con una curva, cada una de ellas con un color identificativo distinto. Para cada uno de los casos, se indica en el eje de



ordenadas el porcentaje de energía absorbida por el modo correspondiente y en el eje de abscisas la relación de masas del modo con el proyectil, identificado con el parámetro α_n .

Se puede apreciar de manera clara cómo en todos los casos describen curvas donde el máximo de energía absorbida tiene la tendencia a presentarse en la vertical donde el parámetro α_n presenta valores entorno a 1.

La curva $\alpha=5$, si bien no se llega a cerrar el máximo entorno a $\alpha_n=1$, presenta también esta tendencia. La curva de $\alpha=5$ no puede presentar el máximo de energía absorbida entorno a $\alpha=1$ porque ya el primer modo analizado presenta un $\alpha=5$ y por tanto el resto de modos tienen un α mayor. Ocurre en este caso, como en el resto, **que el modo con el parámetro α más próximo a la unidad, es el que tiende a absorber un porcentaje de energía mayor.**

A partir de la Figura 191 se aprecia, por tanto, que los modos que más energía absorben presentan los valores de α_n más próximos a la unidad que la estructura puede desarrollar. **Dicho de otra manera, en un caso de impacto, los modos que más se excitan son aquellos que tienen la masa equivalente más próxima a la masa del proyectil.** Esta conclusión converge con la idea que dio lugar a esta tesis y fue expuesta en el apartado 3.3.6 cuando surgió, tras analizar el péndulo de Newton, que en un impacto tienden a chocar masas iguales.

Los modos que, en el punto de contacto, tienen una masa equivalente mucho mayor a la masa del proyectil, son demasiado lentos para activarse en el impacto, absorbiendo un porcentaje muy pequeño de energía de forma brusca en forma de energía cinética.

Por el contrario, los modos que en el punto de impacto poseen masa equivalente mucho menor, son rápidos, pero no poseen masa suficiente para detener al proyectil, y por tanto sólo son capaces de absorber muy poca energía.

Por tanto, son los modos que en el punto de contacto tienen masa sensiblemente similar al proyectil, los únicos que, siendo suficientemente rápidos para activarse en un impacto, tienen la masa necesaria para parar al proyectil y por eso absorben la mayor cantidad de energía.

Como los modos de vibración presentan masas equivalentes más pequeñas cuando más alto es el modo, **para una misma energía de impacto, cuanto más pequeña sea la masa del proyectil** en un impacto, más alto será el modo que más energía absorba del proyectil. Dado que, además, cuanto más alto es el modo, más rígido es, se puede concluir que **a menor masa del proyectil más brusco será el impacto.**



- Desarrollo de teoría sobre impactos -
- Método simplificado de cálculo de impactos en estructuras -





4.2.9 Aplicación a vigas continuas de dos vanos

Hasta ahora, el cálculo de impactos se ha restringido a vigas de acero de un único vano y con mecanismo de absorción de energía por flexión.

Para demostrar que el modelo reproduce el comportamiento en impactos sea cual sea la estructura que se analice, en los siguientes apartados se analizan otras tipologías estructurales, otros materiales, otros mecanismos de absorción de energía etc.

Dado que de aquí en adelante se trata de demostrar la generalidad al método en cuanto a ampliar la casuística, se estudiarán, por simplicidad, casos de impactos de masas grandes y sin influencia de peso propio. Por tanto, sólo el modo fundamental de cada estructura será analizado en los siguientes casos.

La estructura analizada en todos los casos del apartado 4.2.9, es una viga metálica continua de 2 m de longitud total, dividida en dos vanos idénticos de 1 m, como es esquematiza en la Figura 192.



Figura 192-Esquema de impacto en el punto central del vano izquierdo en viga continua de dos vanos.

Los apoyos de cada vano ejercen únicamente coacción vertical. La sección de la viga es de 0.04 m de ancho y 0.02 m de canto. El modelo de elementos finitos realizado mediante Midas NFX para el análisis de los impactos de esta estructura se muestra en la Figura 193.



Figura 193-Modelo de elementos finitos de Midas NFX para el análisis de impactos en viga de dos vanos.

La masa del proyectil es de 15.7 Kg, supuesta infinitamente rígida, e impacta en el centro del vano izquierdo o vano 1. La velocidad inicial del proyectil será, en los distintos casos analizados, de 3 m/s, 6 m/s y 1 m/s. Se considera el impacto en dirección perpendicular a la gravedad, por lo que no se considera el efecto del peso propio.

Los resultados de la ecuación (328) para el cálculo de desplazamiento estructural en un impacto se compararán con los obtenidos por el programa de elementos finitos Midas NFX en cada caso.



A la hora de modelar el impacto en este software, se han de considerar las hipótesis de partida expuestas en 4.2.1. Es decir, la masa M_p ha de ser “puntual” e “indeformable”. Para aproximarse a esta situación, se modela M_p mediante un prisma de reducidas dimensiones (0.04 m x 0.02m x 0.02 m) y se le asigna un material de módulo de elasticidad 1000 veces el del acero (2.1×10^{14} N/m²). La densidad del material que se le asigna al proyectil es 981 250 Kg/m³. La velocidad inicial del proyectil se le asigna directamente, en modulo y dirección, mediante las posibilidades que ofrece el programa para cada caso analizado.

El tipo de análisis que se realiza en el Midas NFX es un análisis no lineal (tipo explícito) de 0.03 segundos de duración y un incremento de tiempo para la integración de 0.00005 segundos. Se ha utilizado elementos solidos tanto para la viga como para el proyectil.

4.2.9.1 Caso masa del proyectil cinco veces la masa equivalente del modo 1 de la estructura ($\alpha=5$) y velocidad del proyectil previa al impacto ($V_{p,o}$) de 3.0 m/s. No consideración del peso propio del proyectil en el impacto.

Los datos de partida del primer impacto considerado son los mostrados en la Tabla 13:

Tabla 13- Impacto en viga de dos vanos. Caso $\alpha=5$ $V_p=3$ m/s. Datos de partida

Datos viga		Datos proyectil	
L_{vano} (m)	1,00	M_p (kg)	15,7
Nº de vanos	2	V_{p0} (m/s)	3,00
L_{TOTAL} (m)	2,00	E_0 (N m)	70,7
b (m)	0,04	C.M. (N s)	47,1
h (m)	0,02	$K_{\text{PROYECTIL}}$	∞
A (m ²)	8,00E-04	g (m/s ²)	0
I (m ⁴)	2,66667E-08	α	5,00
E (KN / m)	2,10E+08	C_{pp}	0,00
ρ (kg /m ³)	7,85E+03		
Punto de impacto "p" (m)	0,50		

El análisis de la viga de dos vanos de 2 m de longitud total, se puede realizar como si fuera una viga de un solo vano, en este caso, de 1 m longitud. El motivo que justifica este proceder, es, como ha quedado demostrado a lo largo del documento, que en este tipo de vigas cada vano se comporta de manera independiente en lo que respecta al modo fundamental.



El único parámetro que es diferente los casos de impacto analizados anteriormente, es, por tratarse de una viga de dos vanos, el parámetro $C_k(M_p)$. Este parámetro interviene en la ecuación (329), y por tratarse de novedad, será mostrado cómo calcularlo en detalle. Para el resto de parámetros, no se abundará de nuevo en cómo calcularlos, pues se procederá de acuerdo con lo mostrado en los apartados 4.2.8.1 y 4.2.8.2. Los valores de todos los parámetros serán mostrados a modo de resumen en una tabla.

El coeficiente $C_k(M_p)$ es el encargado, como se expuso en el apartado 4.1.3.3, de cuantificar cuanta de la energía del impacto “se gasta” en movilizar otros vanos distintos del vano impactado. En el apartado 4.1.3.3 se explica que, para una viga de dos vanos, el valor del parámetro $C_k(P) = 2$. Como se explicó en dicho apartado, la razón estriba en que la mitad de la fuerza se “gasta” en el movimiento del vano no solicitado por la fuerza P .

Cuando el movimiento del modo fundamental es debido a un impacto (M_p) en vez de a la aplicación de una fuerza (P), el valor del parámetro $C_k(M_p)$ no coincide exactamente con el valor de $C_k(P)$. Esto se debe a que el parámetro $C_k(P)$ se obtiene a partir de la deformada del modo en situación normal, pero según la conclusión obtenida en el apartado 4.2.3.2, la masa del proyectil se integra en la estructura durante el impacto, por lo que la deformada del modo de vibración se ve modificada. Es decir, el parámetro $C_k(M_p)$ ha de calcularse de manera análoga a como se calculo el parámetro $C_k(P)$ pero a partir de la deformación del modo con la masa del proyectil incluida como masa estructural en el punto de impacto.

Las deformadas del modo fundamental de la viga objeto de estudio, calculadas mediante un análisis modal realizado con Midas Civil, con y sin masa del proyectil añadida, se muestran en las Figura 194 y la Figura 195 respectivamente.

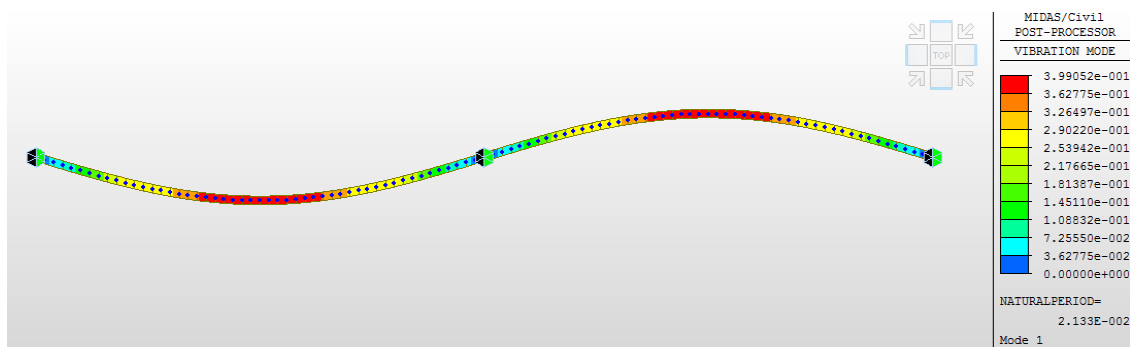


Figura 194-Modo de vibración fundamental de la viga de dos vanos. $T=0.0213$ seg.

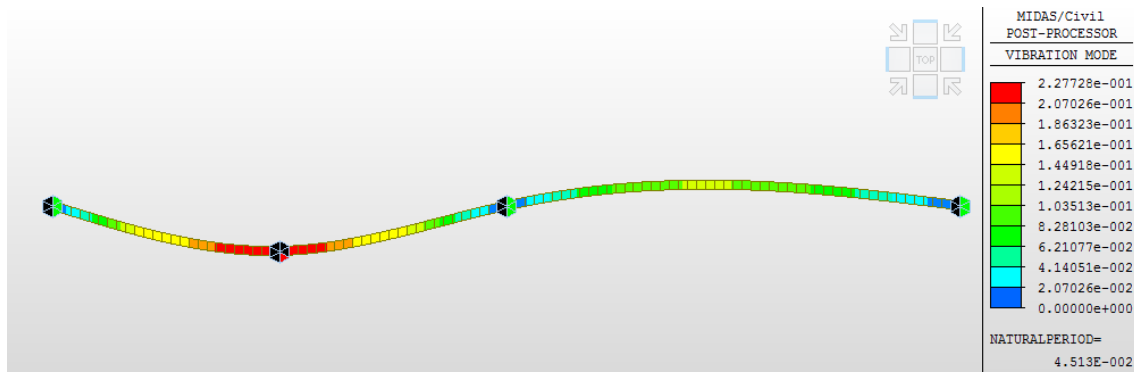


Figura 195-Modo de vibración fundamental de la viga de dos vanos con la masa del proyectil añadida en el punto de contacto. $T=0.0451$ seg.

De la deformada expuesta en la Figura 195 se puede concluir, a nivel cualitativo, que el proyectil no “gasta” la mitad de la energía en levantar el otro vano, dado que baja más el vano que recibe el impacto de lo que sube el vano que no lo recibe. A partir de esta consideración, se puede acotar los valores que puede tomar el parámetro $C_k(M_p)$.

Si la masa del proyectil fuera muy pequeña, el modo modificado por la masa del proyectil sería muy parecido al modo original, y por tanto el valor de $C_k(M_p)$ coincidiría con el valor del valor de $C_k(P)$ que, para el caso de viga de dos vanos, como se ha indicado previamente, es 2.

Por el contrario, si la masa del proyectil fuera muy grande, la amplitud del movimiento que el modo modificado produciría en el vano que recibe el impacto, sería mucho mayor que la amplitud del movimiento en el vano no impactado. Es decir, prácticamente toda la energía del impacto se “gastaría” en movilizar el vano impactado, comportándose en ese caso como si la viga fuera de un único vano. En esta situación, el valor que tomaría el parámetro $C_k(M_p)$ tendería al valor de 1, ya que es el correspondiente a la situación de un único vano.

Para calcular el valor exacto para el caso de M_p que nos ocupa, se utiliza los valores de la deformada del modo modificado por la masa del proyectil. Esta deformada se utiliza para el cálculo del parámetro de manera análoga a lo expuesto en 4.1.3.3. Los valores del desplazamiento $d(x)$ obtenidos del análisis modal realizado con Midas Civil y mostrados en la Figura 195, para los centros de vano en la deformada del modo que incluye la masa del proyectil, son los siguientes:

$$d(x=0.5 \text{ m}) = 0.227 \text{ m}$$

$$d(x=1.5 \text{ m}) = -0.105 \text{ m}$$



El desplazamiento en sentido descendente en el punto de impacto es 0.227 m, y en centro del vano contrario 0.105 m, pero en sentido ascendente. En realidad, los valores absolutos no son relevantes, dado que el modo no tiene realmente un desplazamiento fijo. Es la proporción entre ambos lo que define el grado modificación que M_p ha generado en el modo. A partir de los valores indicados, se realiza el cálculo de $C_k(M_p)$ según lo expuesto en el apartado 4.1.3.3

$$F_1 = F_{eq} \times 0.227$$

$$F_2 = -F_{eq} \times (-0.105)$$

$$F_{TOTAL} = F_1 + F_2 = F_{eq} \times 0.227 + (-F_{eq}) \times (-0.105) = 0.332F_{eq}$$

$$\frac{F_1}{F_{TOTAL}} = \frac{0.227}{0.332} = 0.684$$

$$C_k(M_p) = \frac{F_{TOTAL}}{F_1} = 1.462$$

Para poder evaluar nítidamente la influencia del parámetro $C_k(M_p)$, se calculan tres situaciones posibles en función del parámetro $C_k(M_p)$. Es decir, se calcula el desplazamiento del punto central del vano que sufre el impacto según la ecuación (328) y (329) con el valor de $C_k(M_p)$ resultante del cálculo, con el valor de $C_k(M_p) = 1$ y con el valor de $C_k(M_p) = 2$. **Estos dos últimos valores se incluyen en los cálculos, como se ha comentado anteriormente, por ser los valores extremos.**

En la Tabla 14 se muestra los resultados obtenidos en los tres casos.



Tabla 14-Parámetros resultantes para viga de dos vanos para los valores $C_k(M_p) = 1$; $C_k(M_p) = 1.462$; $C_k(M_p) = 2$. Caso $\alpha=5$ $V_p=3m/s$.

Unidades	Modo 1 con $C_{K,1}(M_p)=1$		Modo 1 con $C_{K,1}(M_p)=1,462$		Modo 1 con $C_{K,1}(M_p)=2$	
-	$L/L_{ef,1}$	1	$L/L_{ef,1}$	1	$L/L_{ef,1}$	1
m/s	$V_{p,1}$	3,00	$V_{p,1}$	3,00	$V_{p,1}$	3,00
Kg	$M_{e,1}$	3,14	$M_{e,1}$	3,14	$M_{e,1}$	3,14
-	α_1	5,00	α_1	5,00	α_1	5,00
-	$C_{m,1}$	0,83	$C_{m,1}$	0,83	$C_{m,1}$	0,83
m/s	$V_{l,1}$	2,50	$V_{l,1}$	2,5	$V_{l,1}$	2,5
kN/m	K_1	268,8	K_1	268,8	K_1	268,8
-	$C_{K,1}(M_p)$	1,00	$C_{K,1}(M_p)$	1,46	$C_{K,1}(M_p)$	2,00
kN/m	$K_{eq,1}$	268,8	$K_{eq,1}$	393,0	$K_{eq,1}$	537,6
rad/s	$W_{e,1}$	292,58	$W_{e,1}$	292,58	$W_{e,1}$	292,58
-	$X(p)_1$	1,00	$X(p)_1$	1,0	$X(p)_1$	1,000
Kg	$M_{p,eq1}$	15,70	$M_{p,eq1}$	15,70	$M_{p,eq1}$	15,70
rad/s	$W_{ep,1}$	119,45	$W_{ep,1}$	144,43	$W_{ep,1}$	168,92
Nm	E_1	58,9	E_1	58,9	E_1	58,9
%	$E_1(\%)$	83,3%	$E_1(\%)$	83,3%	$E_1(\%)$	83,3%
Nm	$E_{A,1}$	58,9	$E_{A,1}$	58,9	$E_{A,1}$	58,9
%	$E_{A,1}(\%)$	83%	$E_{A,1}(\%)$	83%	$E_{A,1}(\%)$	83%
Nm	$E_{D,3}$	11,8	$E_{D,3}$	11,8	$E_{D,3}$	11,8
%	$E_{D,3}(\%)$	17%	$E_{D,3}(\%)$	17%	$E_{D,3}(\%)$	17%

Como se puede comprobar en la Tabla 14, la energía analizada considerando 1 modo de vibración resulta el 83%, quedando un 17% de energía sin considerar.

A partir de los datos anteriores, para cada caso, se aplica la formulación general de desplazamiento (328):

Caso $C_k(M_p) = 1$

$$d_{e,1}(t) = \frac{3 \times 0.83 \times \text{sen}(119.45 t)}{119.45}$$

Caso $C_k(M_p) = 1.462$

$$d_{e,1}(t) = \frac{3 \times 0.83 \times \text{sen}(144.43 t)}{144.43}$$

Caso $C_k(M_p) = 2$

$$d_{e,1}(t) = \frac{3 \times 0.83 \times \text{sen}(168.92 t)}{168.92}$$



En la Figura 196 se comparan los resultados del desplazamiento estructural en el punto central del vano izquierdo o vano 1, considerando un único modo de vibración $d_{e,1}(t)$ para los tres casos de $C_k(M_p)$, con los ofrecidos por el modelo desarrollado en Midas NFX.

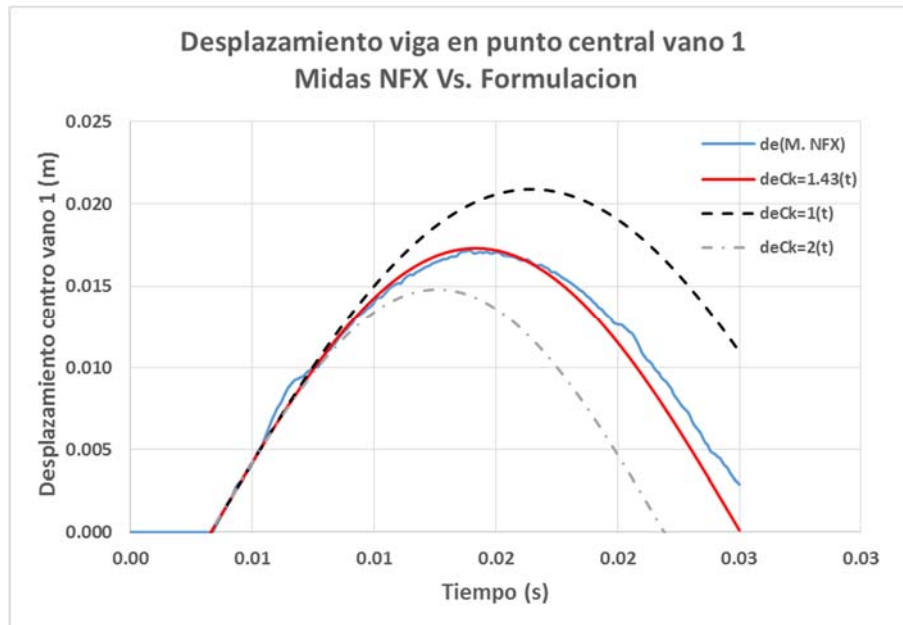


Figura 196-Comparativa de desplazamientos en centro de vano en viga de dos vanos entre Midas NFX y la formulación de desarrollada en función de $C_k(M_p)$. Caso $\alpha=5$ $V_p=3m/s$

Como se puede apreciar en la gráfica anterior, los resultados por Midas NFX (línea azul) y la formulación para el parámetro $C_k(M_p) = 1.426$ (línea roja) **coinciden**. Además, las líneas que la formulación proporciona para valores de $C_k(M_p) = 1$ (línea negra discontinua) y $C_k(M_p) = 2$ (línea gris discontinua) muestran la elevada influencia este parámetro, tanto en amplitud de movimiento como en frecuencia del mismo, en el resultado final.



4.2.9.2 Caso masa del proyectil cinco veces la masa equivalente del modo 1 de la estructura ($\alpha=5$) y velocidad del proyectil previa al impacto ($V_{p,o}$) de 6.0 m/s. No consideración del peso propio del proyectil en el impacto.

Se repite el ejercicio anterior, pero variando la velocidad de impacto a una velocidad superior ($V_{p,o}=6$ m/s). Los datos de partida, por tanto, son los mostrados en la Tabla 15:

Tabla 15- Impacto en viga de dos vanos. Caso $\alpha=5$ $V_p=6$ m/s. Datos de partida

Datos viga		Datos proyectil	
L_{vano} (m)	1,00	M_p (kg)	15,7
Nº de vanos	2	V_{po} (m/s)	6,00
L_{TOTAL} (m)	2,00	E_o (N m)	282,6
b (m)	0,04	C.M. (N s)	94,2
h (m)	0,02	$K_{\text{PROYECTIL}}$	∞
A (m ²)	8,00E-04	g (m/s ²)	0
I (m ⁴)	2,66667E-08	α	5,00
E (KN / m)	2,10E+08	C_{pp}	0,00
ρ (kg /m ³)	7,85E+03		
Punto de impacto "p" (m)	0,50		

Dado que la masa del proyectil se mantiene respecto del caso anterior, el valor de $C_k (M_p)$ se mantiene en 1.462 . Por las mismas razones expuestas en el caso anterior, se calculan también los resultados para valores de $C_k (M_p) = 1$ y $C_k (M_p) = 2$.

En la Tabla 16 se muestra los resultados obtenidos en los tres casos.



Tabla 16- Parámetros resultantes para viga de dos vanos para los valores $C_k(M_p) = 1$; $C_k(M_p) = 1.462$; $C_k(M_p) = 2$. Caso $\alpha=5$ $V_p=6$ m/s.

Unidades	Modo 1 con $C_{k,1}(M_p)$		Modo 1 con $C_{k,1}(M_p)=1,462$		Modo 1 con $C_{k,1}(M_p)=2$	
-	$L/L_{ef,1}$	1	$L/L_{ef,1}$	1	$L/L_{ef,1}$	1
m/s	$V_{p,1}$	6,00	$V_{p,1}$	6,00	$V_{p,1}$	6,00
Kg	$M_{e,1}$	3,14	$M_{e,1}$	3,14	$M_{e,1}$	3,14
-	α_1	5,00	α_1	5,00	α_1	5,00
-	$C_{m,1}$	0,83	$C_{m,1}$	0,83	$C_{m,1}$	0,83
m/s	$V_{i,1}$	5,00	$V_{i,1}$	5	$V_{i,1}$	5
kN/m	K_1	268,8	K_1	268,8	K_1	268,8
-	$C_{K,1}(M_p)$	1,00	$C_{K,1}(M_p)$	1,46	$C_{K,1}(M_p)$	2,00
kN/m	$K_{eq,1}$	268,8	$K_{eq,1}$	393,0	$K_{eq,1}$	537,6
rad/s	$W_{e,1}$	292,58	$W_{e,1}$	292,58	$W_{e,1}$	292,58
-	$X(p)_1$	1,00	$X(p)_1$	1,0	$X(p)_1$	1,000
Kg	$M_{p,eq1}$	15,70	$M_{p,eq1}$	15,70	$M_{p,eq1}$	15,70
rad/s	$W_{ep,1}$	119,45	$W_{ep,1}$	144,43	$W_{ep,1}$	168,92
Nm	E_1	235,5	E_1	235,5	E_1	235,5
%	E_1 (%)	83,3%	E_1 (%)	83,3%	E_1 (%)	83,3%
Nm	$E_{A,1}$	235,5	$E_{A,1}$	235,5	$E_{A,1}$	235,5
%	$E_{A,1}$ (%)	83%	$E_{A,1}$ (%)	83%	$E_{A,1}$ (%)	83%
Nm	$E_{D,3}$	47,1	$E_{D,3}$	47,1	$E_{D,3}$	47,1
%	$E_{D,3}$ (%)	17%	$E_{D,3}$ (%)	17%	$E_{D,3}$ (%)	17%

Como se puede comprobar en la Tabla 16, la energía analizada considerando 1 modo de vibración resulta el 83%, quedando un 17% de energía sin considerar.

A partir de los datos anteriores, para cada caso, se aplica la formulación general de desplazamiento (328):

Caso $C_k(M_p) = 1$

$$d_{e,1}(t) = \frac{6 \times 0.83 \times \text{sen}(119.45 t)}{119.45}$$

Caso $C_k(M_p) = 1.462$

$$d_{e,1}(t) = \frac{6 \times 0.83 \times \text{sen}(144.43 t)}{144.43}$$

Caso $C_k(M_p) = 2$

$$d_{e,1}(t) = \frac{6 \times 0.83 \times \text{sen}(168.92 t)}{168.92}$$

En la Figura 197 se comparan los resultados del desplazamiento estructural en el punto central del vano izquierdo o vano 1, considerando un único modo de vibración $d_{e,1}(t)$, para los tres casos de $C_k(M_p)$ con los ofrecidos por el modelo desarrollado en Midas NFX.

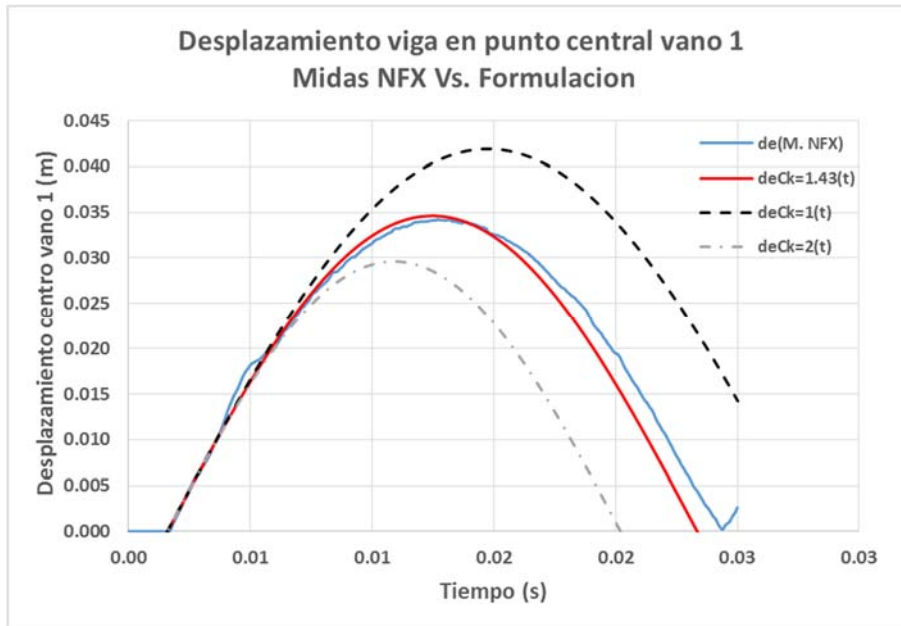


Figura 197- Comparativa de desplazamientos en centro de vano en viga de dos vanos entre Midas NFX y la formulación de desarrollada en función de $C_k(M_p)$. Caso $\alpha=5$ $V_p=6m/s$.

Como se puede apreciar en la gráfica anterior, los resultados por Midas NFX (línea azul) y la formulación para el parámetro $C_k(M_p) = 1.426$ (línea roja) coinciden claramente. Además, las líneas que la formulación proporciona para valores de $C_k(M_p) = 1$ (línea negra discontinua) y $C_k(M_p) = 2$ (línea gris discontinua) muestran la elevada influencia este parámetro, tanto en amplitud de movimiento como en frecuencia del mismo, en el resultado final.



4.2.9.3 Caso masa del proyectil cinco veces la masa equivalente del modo 1 de la estructura ($\alpha=5$) y velocidad del proyectil previa al impacto ($V_{p,o}$) de 1.0 m/s. No consideración del peso propio del proyectil en el impacto.

Por último, se repite el ejercicio anterior, pero variando la velocidad de impacto a una velocidad superior ($V_{p,o}=1$ m/s). Los datos de partida, por tanto, son los mostrados en la Tabla 17.

Tabla 17- Impacto en viga de dos vanos. Caso $\alpha=5$ $V_p=1$ m/s. Datos de partida

Datos viga		Datos proyectil	
L_{vano} (m)	1,00	M_p (kg)	15,7
Nº de vanos	2	V_{p0} (m/s)	1,00
L_{TOTAL} (m)	2,00	E_0 (N m)	7,9
b (m)	0,04	C.M. (N s)	15,7
h (m)	0,02	$K_{\text{PROYECTIL}}$	∞
A (m ²)	8,00E-04	g (m/s ²)	0
I (m ⁴)	2,66667E-08	α	5,00
E (KN / m)	2,10E+08	C_{pp}	0,00
ρ (kg /m ³)	7,85E+03		
Punto de impacto "p" (m)	0,50		

Dado que la masa del proyectil se mantiene respecto del caso anterior, el valor de $C_k (M_p)$ se mantiene en 1.462 . Por las mismas razones expuestas en el caso anterior, se calculan también los resultados para valores de $C_k (M_p) = 1$ y $C_k (M_p) = 2$.

En la Tabla 18 se muestra los resultados obtenidos en los tres casos.



Tabla 18- Parámetros resultantes para viga de dos vanos para los valores $C_k(M_p) = 1$; $C_k(M_p) = 1.462$; $C_k(M_p) = 2$. Caso $\alpha=5$ $V_p=1m/s$.

Unidades	Modo 1 con CK,1(Mp)		Modo 1 con CK,1(Mp)=1,462		Modo 1 con CK,1(Mp)=2	
-	L/L _{ef,1}	1	L/L _{ef,1}	1	L/L _{ef,1}	1
m/s	V _{p,1}	1,00	V _{p,1}	1,00	V _{p,1}	1,00
Kg	M _{e,1}	3,14	M _{e,1}	3,14	M _{e,1}	3,14
-	α_1	5,00	α_1	5,00	α_1	5,00
-	C _{m,1}	0,83	C _{m,1}	0,83	C _{m,1}	0,83
m/s	V _{i,1}	0,83	V _{i,1}	0,833333333	V _{i,1}	0,833333333
kN/m	K ₁	268,8	K ₁	268,8	K ₁	268,8
-	C _{K,1} (M _p)	1,00	C _{K,1} (M _p)	1,46	C _{K,1} (M _p)	2,00
kN/m	K _{eq,1}	268,8	K _{eq,1}	393,0	K _{eq,1}	537,6
rad/s	W _{e,1}	292,58	W _{e,1}	292,58	W _{e,1}	292,58
-	X(p) ₁	1,00	X(p) ₁	1,0	X(p) ₁	1,000
Kg	M _{p,eq1}	15,70	M _{p,eq1}	15,70	M _{p,eq1}	15,70
rad/s	W _{ep,1}	119,45	W _{ep,1}	144,43	W _{ep,1}	168,92
Nm	E ₁	6,5	E ₁	6,5	E ₁	6,5
%	E ₁ (%)	83,3%	E ₁ (%)	83,3%	E ₁ (%)	83,3%
Nm	E _{A,1}	6,5	E _{A,1}	6,5	E _{A,1}	6,5
%	E _{A,1} (%)	83%	E _{A,1} (%)	83%	E _{A,1} (%)	83%
Nm	E _{D,3}	1,3	E _{D,3}	1,3	E _{D,3}	1,3
%	E _{D,3} (%)	17%	E _{D,3} (%)	17%	E _{D,3} (%)	17%

Como se puede comprobar en la Tabla 18, la energía analizada considerando 1 modo de vibración resulta el 83%, quedando un 17% de energía sin considerar.

A partir de los datos anteriores, para cada caso, se aplica la formulación general de desplazamiento (328):

Caso $C_k(M_p) = 1$

$$d_{e,1}(t) = \frac{1 \times 0.83 \times \text{sen}(119.45 t)}{119.45}$$

Caso $C_k(M_p) = 1.462$

$$d_{e,1}(t) = \frac{1 \times 0.83 \times \text{sen}(144.43 t)}{144.43}$$

Caso $C_k(M_p) = 2$

$$d_{e,1}(t) = \frac{1 \times 0.83 \times \text{sen}(168.92 t)}{168.92}$$



En la Figura 198 se comparan los resultados del desplazamiento estructural en el punto central del vano izquierdo o vano 1, considerando un único modo de vibración $d_{e,1}(t)$, para los tres casos de $C_k(M_p)$ con los ofrecidos por el modelo desarrollado en Midas NFX.

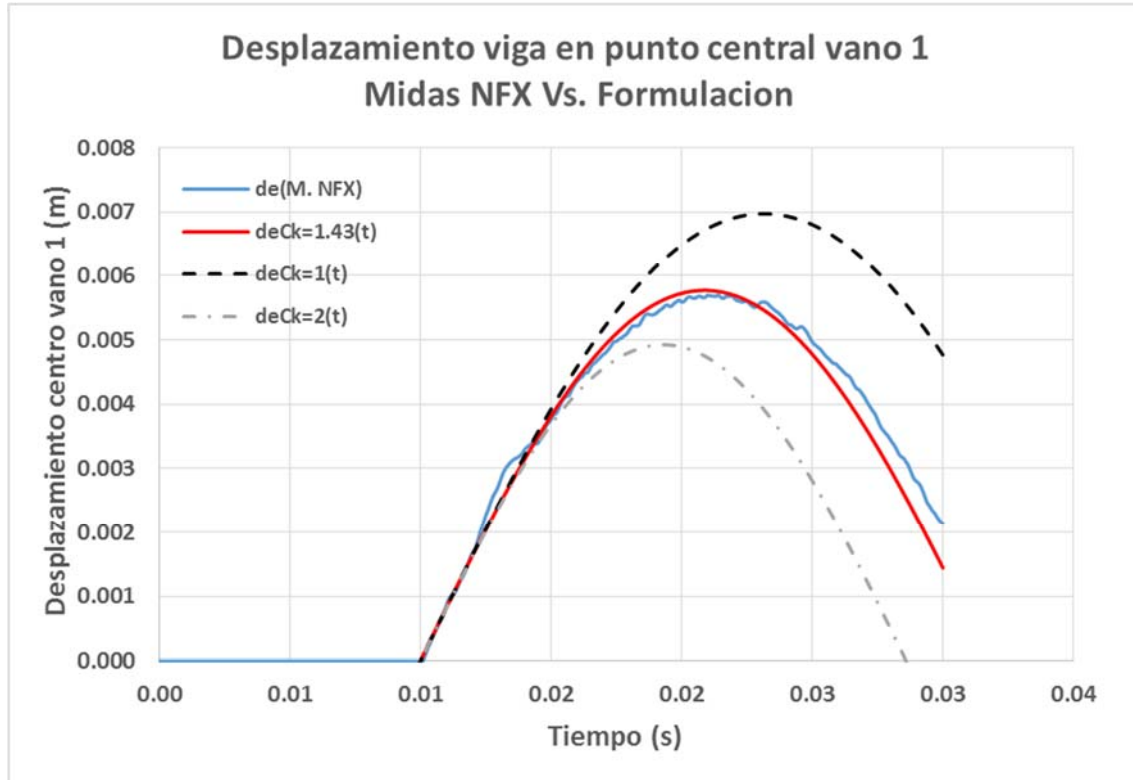


Figura 198- Comparativa de desplazamientos en centro de vano en viga de dos vanos entre Midas NFX y la formulación de desarrollada en función de $C_k(M_p)$. Caso $\alpha=5$ $V_p=1$ m/s.

A la vista de los resultados mostrados en la Figura 198, se puede indicar que también en este caso de velocidad menor los resultados entre Midas NFX y la formulación desarrollada **son coincidentes**.



4.2.9.4 Análisis conjunto

Para ver los casos expuestos en su conjunto, y evaluar más fácilmente la precisión de los resultados se muestran en la Figura 199 los 3 casos analizados en el apartado 4.2.9 en función de la velocidad inicial del proyectil. En este caso, la gráfica solo muestra resultados del Midas NFX con los ofrecidos por la formulación para el valor $C_k(M_p) = 1.462$.

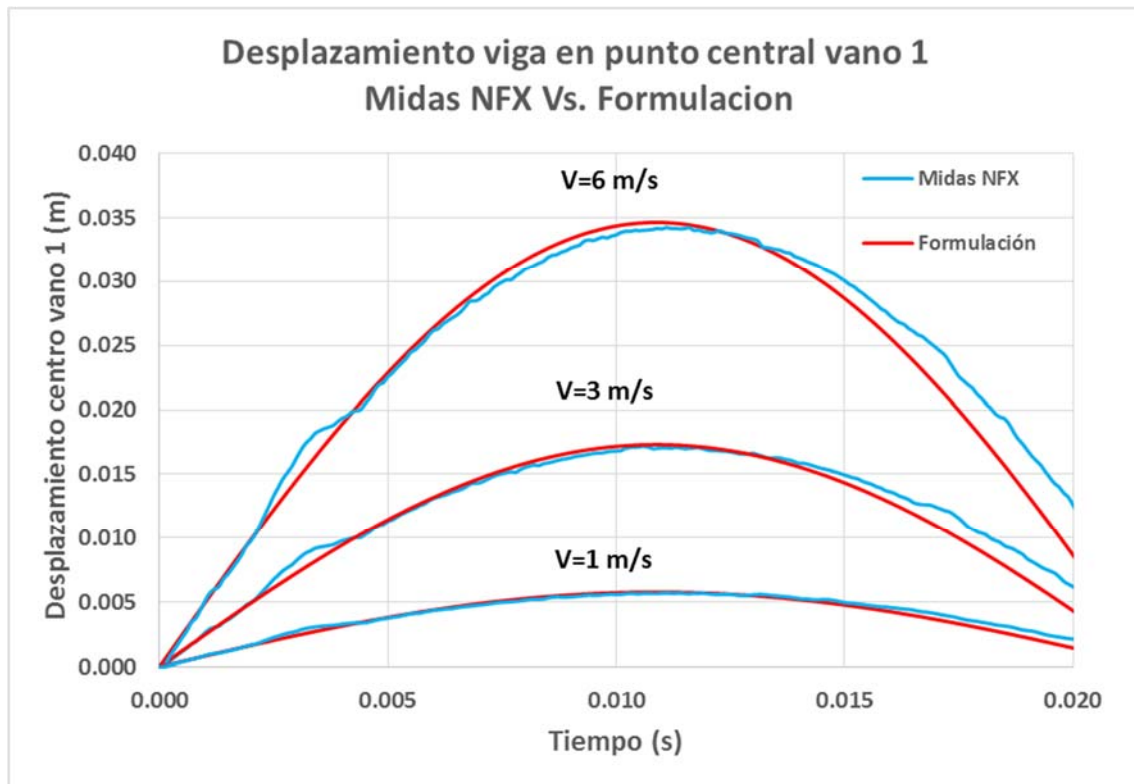


Figura 199- Comparativa de desplazamientos en centro de vano en viga de dos vanos entre Midas NFX y la formulación de desarrollada en función de $C_k(M_p)$. Caso $\alpha=5$ $V_p=1\text{m/s}$, $V_p=3\text{m/s}$ y $V_p=6\text{m/s}$.

Como se puede apreciar Figura 199, se puede concluir que los resultados mostrados por Midas NFX y la formulación desarrollada **coinciden** para la viga continua de dos vanos, y que el parámetro $C_k(M_p)$ refleja adecuadamente la energía que gasta el impacto en movilizar el otro vano no impactado.



4.2.10 Aplicación a vigas continuas de tres vanos.

La estructura analizada en todos los casos del apartado 4.2.10, es una viga metálica continua de 3 m de longitud total, dividida en tres vanos idénticos de 1 m. Los apoyos de cada vano ejercen únicamente coacción vertical. La sección de la viga es de 0.03 m de ancho y 0.003 m de canto, como muestra el croquis de la Figura 200.



Figura 200- Esquema de impacto en el punto central del central en viga continua de tres vanos.

La masa del proyectil es variable según el caso analizado, produciendo impactos de $\alpha=1$, $\alpha=3$ y $\alpha=6$. El proyectil se considera infinitamente rígido, e impacta en el centro del vano central. La velocidad inicial del proyectil será en todos los casos de 0.5 m/s. Se considera el impacto en dirección perpendicular a la gravedad, por lo que no se considera el efecto del peso propio.

Los resultados de la ecuación (328) para el cálculo de desplazamiento estructural en un impacto se comparan con los obtenidos por el programa de elementos finitos Midas NFX en cada caso. A la hora de modelar el impacto en este software, se han de considerar las hipótesis de partida expuestas en 4.2.1. Es decir, la masa M_p ha de ser “puntual” e “indeformable”. Para aproximarse a esta situación, se modela M_p mediante un prisma de reducidas dimensiones (0.03 m x 0.01 m x 0.01 m) y se le asigna un material de densidad variable en función del caso y de módulo de elasticidad 1000 veces el del acero (2.1×10^{14} N/m²). La velocidad inicial del proyectil se asigna directamente, en modulo y dirección, mediante las posibilidades que ofrece el programa para cada caso analizado.

El modelo de elementos finitos realizado mediante Midas NFX para el análisis de los impactos se muestra en la Figura 201.

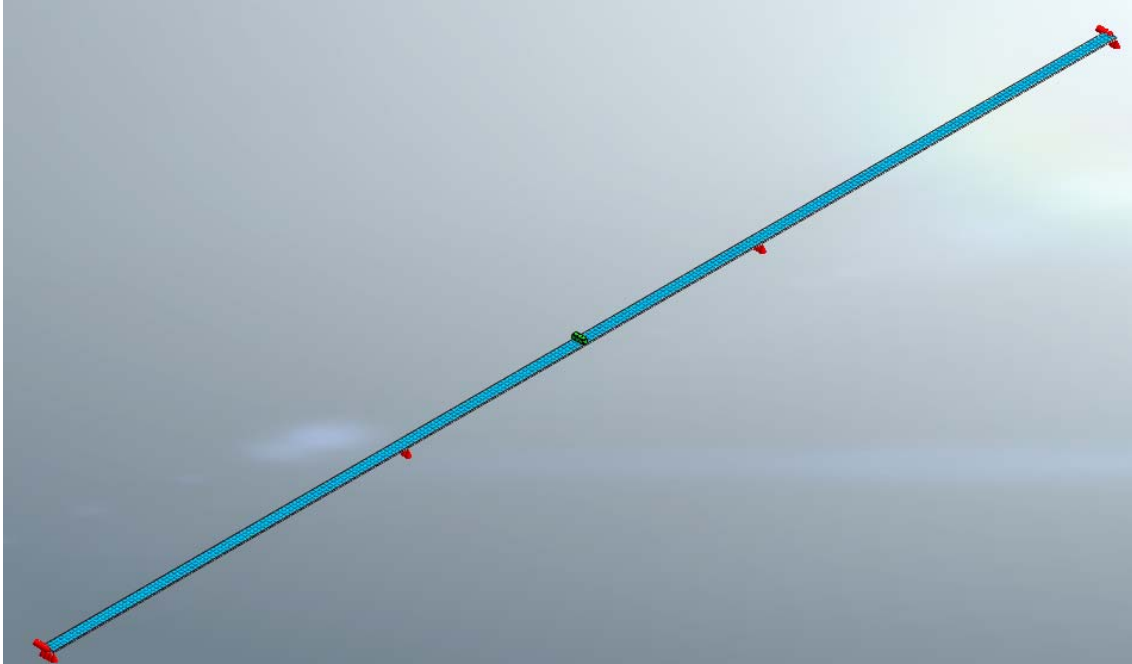


Figura 201- Modelo de elementos finitos de Midas NFX para el análisis de impactos en viga de tres vanos.

El tipo de análisis que se realiza en el Midas NFX es un análisis no lineal (tipo explícito) de 0.012 segundos de duración y un incremento de tiempo para la integración de 0.00001 segundos. Se ha utilizado elementos sólidos tanto para la viga como para el proyectil.

4.2.10.1 Caso masa del proyectil tres veces la masa equivalente del modo 1 de la estructura ($\alpha=3$) y velocidad del proyectil previa al impacto ($V_{p,0}$) de 0.50 m/s. No consideración del peso propio del proyectil en el impacto.

Como se ha comentado anteriormente, en este apartado se analiza el impacto en una viga de tres vanos. La longitud total de la viga de acero es de 3 m, con 3 vanos idénticos de 1 m cada uno. El proyectil impacta en el centro del vano central con una velocidad de 0.5m/s. Los datos de partida del primer impacto considerado son los mostrados en la Tabla 19:

Tabla 19- Impacto en viga de tres vanos. Caso $\alpha=3$ $V_p=0.5$ m/s. Datos de partida



Datos viga		Datos proyectil	
$L_{\text{vano}} \text{ (m)}$	1,00	$M_p \text{ (kg)}$	1,06
Nº de vanos	3	$V_{po} \text{ (m/s)}$	0,50
$L_{\text{TOTAL}} \text{ (m)}$	3,00	$E_o \text{ (N m)}$	0,1
$b \text{ (m)}$	0,03	C.M. (N s)	0,5
$h \text{ (m)}$	0,003	$K_{\text{PROYECTIL}}$	∞
$A \text{ (m}^2\text{)}$	9,00E-05	$g \text{ (m/s}^2\text{)}$	0
$I \text{ (m}^4\text{)}$	6,75E-11	α	3,00
$E \text{ (KN / m)}$	2,10E+08	C_{pp}	0,00
$\rho \text{ (kg / m}^3\text{)}$	7,85E+03		
Punto de impacto "p" (m)	1,50		

El análisis de la viga de tres vanos de 3 m de longitud total, se puede realizar como si fuera una viga de un solo vano, en este caso, de 1 m longitud. El motivo que justifica este proceder, es, como ha quedado demostrado a lo largo del documento, que en este tipo de vigas cada vano se comporta de manera independiente en lo que respecta al modo fundamental.

Al igual que realizó en el apartado 4.2.9, únicamente se mostrará en este apartado el detalle del cálculo del parámetro $C_k(M_p)$ que interviene en la ecuación (329). El resto de parámetros se calcularán de manera similar a lo mostrado en los apartados 4.2.8.1 y 4.2.8.2, recopilado el valor de todos ellos en tablas resumen.

El parámetro $C_k(M_p)$ es el encargado, como se expuso en el apartado 4.1.3.3 y en el apartado 4.2.9., de cuantificar cuanta energía del impacto “se gasta” en movilizar otros vanos distintos del vano impactado. Por el mismo razonamiento del apartado 4.2.9, el parámetro $C_k(M_p)$ tendrá un valor comprendido entre los valores extremos $C_k(M_p) = 1$ y $C_k(M_p) = 3$.

Según lo expuesto a lo largo del documento, el modo fundamental de una viga continua de tres vanos de un metro de longitud cada uno, es idéntico al modo 3 de flexión de una viga de un único vano de tres metros de longitud si el resto de características son idénticas. Sin embargo, para el modo 3 de la viga de un vano, y según lo expuesto en el apartado 4.2.7.4, el parámetro $C_k(M_p)$ tomaría el valor unidad, y no valores entre 1 y 3 como en el caso de la viga de tres vanos. La razón a esta diferencia es que los apoyos para la viga de tres vanos son fijos, mientras que el modo 3 de la viga de un vano tiene capacidad de modificar los “apoyos centrales” cuando absorbe la masa del proyectil en un impacto. Por este motivo, para la viga de tres vanos es necesario calcular el valor $C_k(M_p)$, porque ésta al tener los apoyos fijos tiene capacidad de desarrollar valores de $C_k(M_p)$ distintos de la unidad.



Para calcular el valor exacto de $C_k (M_p)$ se realiza un análisis modal mediante Midas Civil para obtener la deformada del modo fundamental de vibración de la viga de tres vanos. Esta deformada se muestra en la Figura 202.

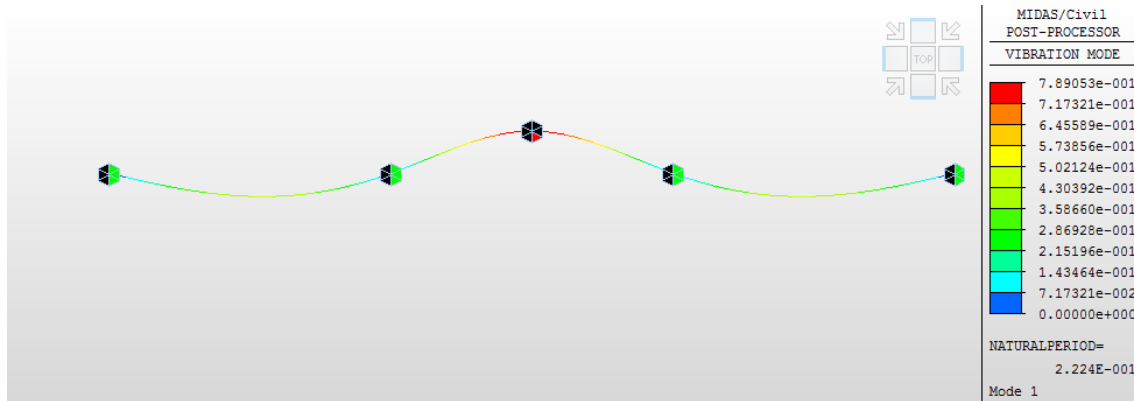


Figura 202- Modo de vibración fundamental de la viga de tres vanos con la masa del proyectil añadida en el punto de contacto. $T=0.222$ seg.

Los valores del desplazamiento $d(x)$ obtenidos del análisis modal para los centros de vano en la deformada del modo que incluye la masa del proyectil, como se pueden apreciar en la Figura 202, son los siguientes:

$$d(x=0.5 \text{ m}) = -0.434 \text{ m}$$

$$d(x=1.5 \text{ m}) = 0.789 \text{ m}$$

$$d(x=2.5 \text{ m}) = -0.434 \text{ m}$$

El desplazamiento en el punto de impacto es ascendente de 0.789 m, y en el centro de los vanos adyacentes 0.434 m, de sentido contrario. En realidad, los valores absolutos no son relevantes, dado que el modo no tiene realmente un desplazamiento fijo. Es la proporción entre ambos lo que define el grado modificación que M_p ha generado en el modo. A partir de los valores indicados, se realiza el cálculo de $C_k (M_p)$ según lo expuesto en el apartado 4.1.3.3

$$F_1 = -F_{eq} \times (-0.434)$$

$$F_2 = F_{eq} \times (0.789)$$

$$F_3 = -F_{eq} \times (-0.434)$$

$$F_{TOTAL} = F_1 + F_2 + F_3 = F_{eq} \times 0.789 + 2 \times (-F_{eq}) \times (-0.434) = 1.657 F_{eq}$$

$$\frac{F_2}{F_{TOTAL}} = \frac{0.789}{1.657} = 0.476$$



$$C_k(M_p) = \frac{F_{TOTAL}}{F_2} = 2.10$$

Para poder evaluar la influencia del parámetro $C_k(M_p)$, se calculan tres situaciones posibles en función del parámetro $C_k(M_p)$. Es decir, se calcula el desplazamiento del punto central del vano que sufre el impacto según la ecuación (328) y (329) con el valor de $C_k(M_p)$ resultante del cálculo, con el valor de $C_k(M_p) = 1$ y con el valor de $C_k(M_p) = 3$. Estos dos últimos valores se incluyen en los cálculos, como se ha comentado anteriormente, por ser los valores extremos.

En la Tabla 20 se muestra los resultados obtenidos en los tres casos.

Tabla 20- Parámetros resultantes para viga de tres vanos para los valores $C_k(M_p) = 1$; $C_k(M_p) = 2.1$; $C_k(M_p) = 3$. Caso $\alpha=3$ $V_p=0.5$ m/s.

Unidades	Modo 1 con CK,1(Mp)		Modo 1 con CK,1(Mp)=2,1		Modo 1 con CK,1(Mp)=3	
-	L/L _{ef,1}	1	L/L _{ef,1}	1	L/L _{ef,1}	1
m/s	V _{p,1}	0,50	V _{p,1}	0,50	V _{p,1}	0,50
Kg	M _{e,1}	0,35	M _{e,1}	0,35	M _{e,1}	0,35
-	α_1	3,00	α_1	3,00	α_1	3,00
-	C _{m,1}	0,75	C _{m,1}	0,75	C _{m,1}	0,75
m/s	V _{i,1}	0,38	V _{i,1}	0,38	V _{i,1}	0,38
kN/m	K ₁	0,7	K ₁	0,7	K ₁	0,7
-	C _{K,1} (M _p)	1,00	C _{K,1} (M _p)	2,10	C _{K,1} (M _p)	3,00
kN/m	K _{eq,1}	0,68	K _{eq,1}	1,43	K _{eq,1}	2,04
rad/s	W _{e,1}	43,89	W _{e,1}	43,89	W _{e,1}	43,89
-	X(p) ₁	1,00	X(p) ₁	1,0	X(p) ₁	1,000
Kg	M _{p,eq1}	1,06	M _{p,eq1}	1,06	M _{p,eq1}	1,06
rad/s	W _{ep,1}	21,94	W _{ep,1}	31,80	W _{ep,1}	38,00
Nm	E ₁	0,1	E ₁	0,1	E ₁	0,1
%	E ₁ (%)	75,0%	E ₁ (%)	75,0%	E ₁ (%)	75,0%
Nm	E _{A,1}	0,1	E _{A,1}	0,1	E _{A,1}	0,1
%	E _{A,1} (%)	75%	E _{A,1} (%)	75%	E _{A,1} (%)	75%
Nm	E _{D,3}	0,0	E _{D,3}	0,0	E _{D,3}	0,0
%	E _{D,3} (%)	25%	E _{D,3} (%)	25%	E _{D,3} (%)	25%

Como se puede comprobar en la Tabla 20, la energía analizada considerando 1 modo de vibración resulta el 75%, quedando un 25% de energía sin considerar.

A partir de los datos anteriores, para cada caso, se aplica la formulación para el desplazamiento (328):

Caso $C_k(M_p) = 1$

$$d_{e,1}(t) = \frac{0.5 \times 0.75 \times \text{sen}(21.94 t)}{21.94}$$



Caso $C_k(M_p) = 2.1$

$$d_{e,1}(t) = \frac{0.5 \times 0.75 \times \text{sen}(31.80 t)}{31.80}$$

Caso $C_k(M_p) = 3$

$$d_{e,1}(t) = \frac{0.5 \times 0.75 \times \text{sen}(38.00 t)}{38.00}$$

En la Figura 203 se comparan los resultados del desplazamiento estructural en el punto central del vano central, considerando un único modo de vibración $d_{e,1}(t)$, para los tres casos de $C_k(M_p)$, con los ofrecidos por el modelo desarrollado en Midas NFX.

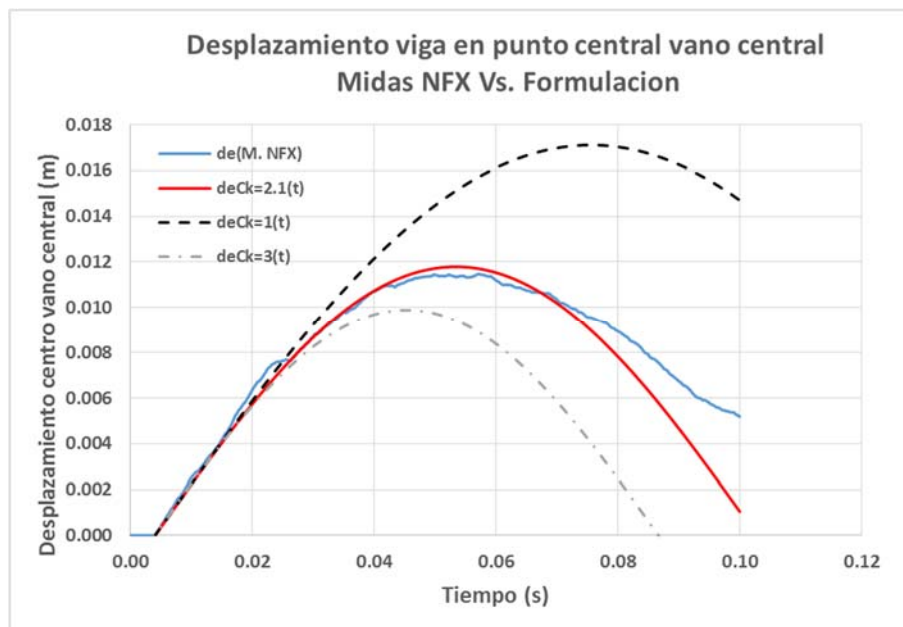


Figura 203- Comparativa de desplazamientos en centro de vano en viga de tres vanos entre Midas NFX y la formulación desarrollada en función de $C_k(M_p)$. Caso $\alpha=3$ $Vp=0.5$ m/s

Como se puede apreciar en la gráfica anterior, los resultados por Midas NFX (línea azul) y la formulación para el parámetro $C_k(M_p) = 2.1$ (línea roja) **coinciden**. Además, las líneas que la formulación proporciona para valores de $C_k(M_p) = 1$ (línea negra discontinua) y $C_k(M_p) = 3$ (línea gris discontinua) muestran la relevancia de este parámetro, tanto en amplitud de movimiento como en frecuencia del mismo, en el resultado final.



4.2.10.2 Caso masa del proyectil seis veces la masa equivalente del modo 1 de la estructura ($\alpha=6$) y velocidad del proyectil previa al impacto ($V_{p,0}$) de 0.5 m/s. No consideración del peso propio del proyectil en el impacto.

En este apartado se analiza el mismo impacto analizado en el apartado anterior, pero con una masa de proyectil mayor. El proyectil presenta un $\alpha=6$ y también impacta en el centro del vano central con una velocidad de 0.5m/s. Los datos de partida son los mostrados en la Tabla 21:

Tabla 21- Impacto en viga de tres vanos. Caso $\alpha=6$ $V_p=0.5$ m/s. Datos de partida

Datos viga		Datos proyectil	
L_{vano} (m)	1,00	M_p (kg)	2,12
Nº de vanos	3	V_{p0} (m/s)	0,50
L_{TOTAL} (m)	3,00	E_0 (N m)	0,3
b (m)	0,03	C.M. (N s)	1,1
h (m)	0,003	$K_{\text{PROYECTIL}}$	∞
A (m ²)	9,00E-05	g (m/s ²)	0
I (m ⁴)	6,75E-11	α	6,00
E (KN / m)	2,10E+08	C_{pp}	0,00
ρ (kg / m ³)	7,85E+03		
Punto de impacto "p" (m)	1,50		

Al modificarse la masa del proyectil con respecto al caso anterior, el parámetro $C_k (M_p)$ para este caso será diferente. Por el mismo razonamiento del apartado 4.2.10.1 el parámetro $C_k (M_p)$ tiene como valores extremos $C_k (M_p) = 1$ y $C_k (M_p) = 3$ en este caso.

Para calcular el valor exacto del parámetro $C_k (M_p)$ para las condiciones del actual caso, se calcula la deformada del modo de vibración fundamental de la viga de tres vanos, incluyendo la masa del proyectil en el punto de impacto, mediante un análisis modal con Midas Civil. Esta deformada se muestra en la Figura 204.

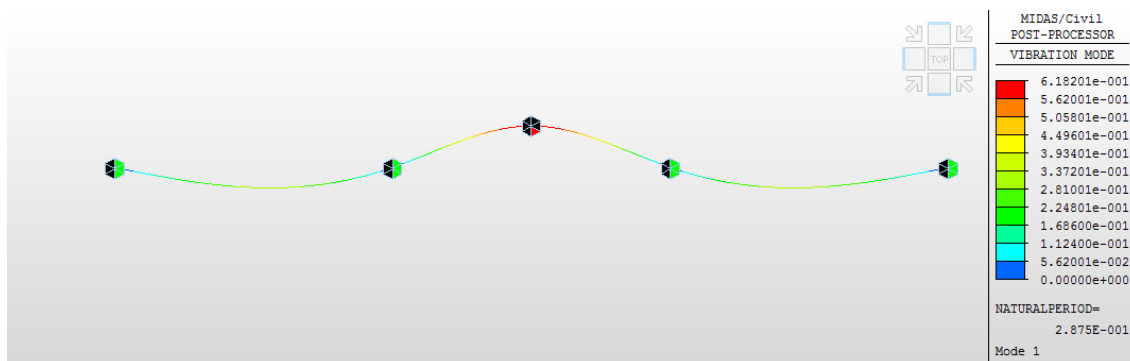


Figura 204- Modo de vibración fundamental de la viga de tres vanos con la masa del proyectil añadida en el punto de contacto. $T=0.287$ seg.



Los valores del desplazamiento $d(x)$ obtenidos del análisis modal para los centros de vano, como se pueden apreciar en la Figura 199, son los siguientes:

$$d(x=0.5 \text{ m}) = -0.302 \text{ m}$$

$$d(x=1.5 \text{ m}) = 0.618 \text{ m}$$

$$d(x=2.5 \text{ m}) = -0.302 \text{ m}$$

El desplazamiento en el punto de impacto es 0.302 m, y en centro de los vanos adyacentes 0.302 m. A partir de los valores indicados, se realiza el cálculo de $C_k(M_p)$ según lo expuesto en el apartado 4.1.3.3:

$$F_1 = -F_{eq} \times (-0.302)$$

$$F_2 = F_{eq} \times (0.618)$$

$$F_3 = -F_{eq} \times (-0.302)$$

$$F_{TOTAL} = F_1 + F_2 + F_3 = F_{eq} \times 0.618 + 2 \times (-F_{eq}) \times (-0.302) = 1.222F_{eq}$$

$$\frac{F_2}{F_{TOTAL}} = \frac{0.618}{1.222} = 0.506$$

$$C_k(M_p) = \frac{F_{TOTAL}}{F_2} = 1.98$$

Igual que en el caso anterior, se calculan los resultados según la formulación para los valores de $C_k(M_p) = 1$, $C_k(M_p) = 1.98$ y $C_k(M_p) = 3$. Los parámetros obtenidos para la aplicación de la formulación en los tres casos se muestran en la Tabla 22:



Tabla 22- Parámetros resultantes para viga de tres vanos para los valores $C_k(M_p) = 1$; $C_k(M_p) = 1.98$; $C_k(M_p) = 3$. Caso $\alpha=6$ $V_p=0.5m/s$.

Unidades	Modo 1 con $C_{k,1}(M_p)$		Modo 1 con $C_{k,1}(M_p)=1,98$		Modo 1 con $C_{k,1}(M_p)=3$	
-	$L/L_{ef,1}$	1	$L/L_{ef,1}$	1	$L/L_{ef,1}$	1
m/s	$V_{p,1}$	0,50	$V_{p,1}$	0,50	$V_{p,1}$	0,50
Kg	$M_{e,1}$	0,35	$M_{e,1}$	0,35	$M_{e,1}$	0,35
-	α_1	6,00	α_1	6,00	α_1	6,00
-	$C_{m,1}$	0,86	$C_{m,1}$	0,86	$C_{m,1}$	0,86
m/s	$V_{i,1}$	0,43	$V_{i,1}$	0,43	$V_{i,1}$	0,43
kN/m	K_1	0,7	K_1	0,7	K_1	0,7
-	$C_{k,1}(M_p)$	1,00	$C_{k,1}(M_p)$	1,98	$C_{k,1}(M_p)$	3,00
kN/m	$K_{eq,1}$	0,68	$K_{eq,1}$	1,35	$K_{eq,1}$	2,04
rad/s	$W_{e,1}$	43,89	$W_{e,1}$	43,89	$W_{e,1}$	43,89
-	$X(p)_1$	1,00	$X(p)_1$	1,0	$X(p)_1$	1,000
Kg	$M_{p,eq1}$	2,12	$M_{p,eq1}$	2,12	$M_{p,eq1}$	2,12
rad/s	$W_{ep,1}$	16,59	$W_{ep,1}$	23,34	$W_{ep,1}$	28,73
Nm	E_1	0,2	E_1	0,2	E_1	0,2
%	E_1 (%)	85,7%	E_1 (%)	85,7%	E_1 (%)	85,7%
Nm	$E_{A,1}$	0,2	$E_{A,1}$	0,2	$E_{A,1}$	0,2
%	$E_{A,1}$ (%)	86%	$E_{A,1}$ (%)	86%	$E_{A,1}$ (%)	86%
Nm	$E_{D,3}$	0,0	$E_{D,3}$	0,0	$E_{D,3}$	0,0
%	$E_{D,3}$ (%)	14%	$E_{D,3}$ (%)	14%	$E_{D,3}$ (%)	14%

Como se puede comprobar en la Tabla 22, la energía analizada considerando 1 modo de vibración resulta el 85.7%, quedando un 14.3% de energía sin considerar.

A partir de los datos anteriores, para cada caso, se aplica la formulación general de desplazamiento (328):

Caso $C_k(M_p) = 1$

$$d_{e,1}(t) = \frac{0.5 \times 0.86 \times \text{sen}(16.59 t)}{16.59}$$

Caso $C_k(M_p) = 1.98$

$$d_{e,1}(t) = \frac{0.5 \times 0.86 \times \text{sen}(23.34 t)}{23.34}$$

Caso $C_k(M_p) = 3$

$$d_{e,1}(t) = \frac{0.5 \times 0.86 \times \text{sen}(28.73 t)}{28.73}$$

En la Figura 205 se comparan los resultados del desplazamiento estructural en el punto central del vano central, considerando un único modo de vibración $d_{e,1}(t)$, para los tres casos de $C_k(M_p)$ con los ofrecidos por el modelo desarrollado en Midas NFX.

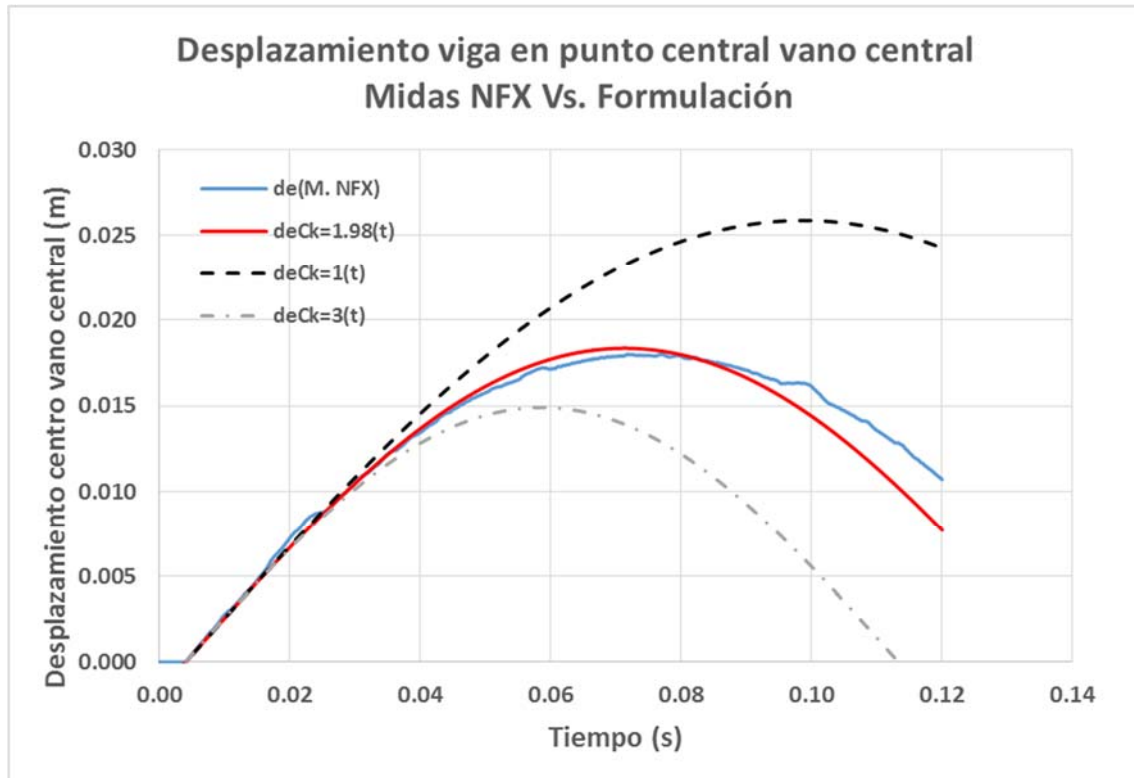


Figura 205- Comparativa de desplazamientos en centro de vano en viga de tres vanos entre Midas NFX y la formulación desarrollada en función de $C_k(M_p)$. Caso $\alpha=3$ $V_p=0.5$ m/s

Como se puede apreciar en la gráfica anterior, los resultados por Midas NFX (línea azul) y la formulación para el parámetro $C_k(M_p) = 1.98$ (línea roja) **coinciden**. Además, las líneas que la formulación proporciona para valores de $C_k(M_p) = 1$ (línea negra discontinua) y $C_k(M_p) = 3$ (línea gris discontinua) muestran la relevancia de este parámetro, tanto en amplitud de movimiento como en frecuencia del mismo, en el resultado final.



4.2.10.3 Caso masa del proyectil igual a la masa equivalente del modo 1 de la estructura ($\alpha=1$) y velocidad del proyectil previa al impacto ($V_{p,0}$) de 0.5 m/s. No consideración del peso propio del proyectil en el impacto.

En este apartado se analiza el mismo impacto analizado en el apartado anterior, pero con una masa de proyectil menor. El proyectil presenta un $\alpha=1$ e impacta en el centro del vano central con una velocidad de 0.5m/s. Los datos de partida son los mostrados en la Tabla 23.

Tabla 23- Impacto en viga de tres vanos. Caso $\alpha=1$ $V_p=0.5$ m/s. Datos de partida

Datos viga		Datos proyectil	
L_{vano} (m)	1,00	M_p (kg)	0,35
Nº de vanos	3	V_{p0} (m/s)	0,50
L_{TOTAL} (m)	3,00	E_0 (N m)	0,0
b (m)	0,03	C.M. (N s)	0,2
h (m)	0,003	$K_{\text{PROYECTIL}}$	∞
A (m ²)	9,00E-05	g (m/s ²)	0
I (m ⁴)	6,75E-11	α	1,00
E (KN / m)	2,10E+08	C_{pp}	0,00
ρ (kg /m ³)	7,85E+03		

Al modificarse la masa del proyectil con respecto al caso anterior, el parámetro $C_k (M_p)$ para este caso será diferente. Por el mismo razonamiento del apartado 4.2.10.1 el parámetro $C_k (M_p)$ tiene como valores extremos $C_k (M_p) = 1$ y $C_k (M_p) = 3$.

Para calcular el valor exacto del parámetro $C_k (M_p)$ para las condiciones del actual caso, se obtiene la deformada del modo de vibración fundamental de la viga de tres vanos, incluyendo la masa del proyectil, en el punto de impacto mediante un análisis modal con Midas Civil. Esta deformada se muestra en la Figura 206.

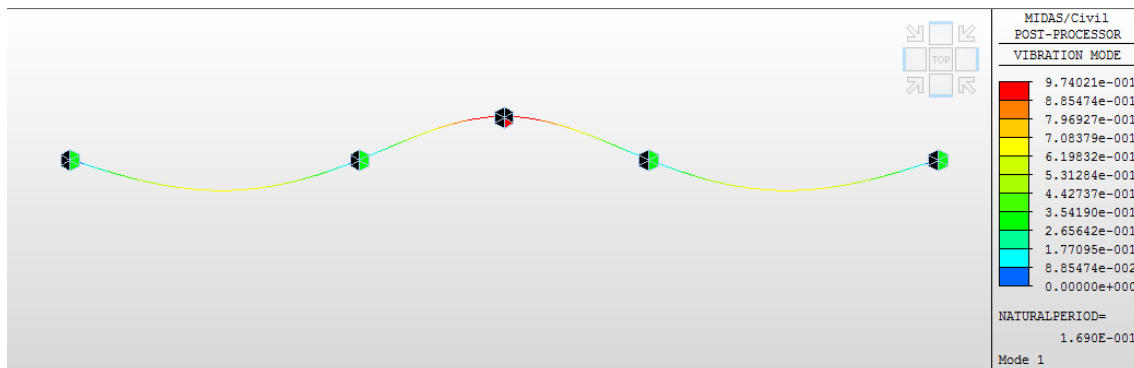


Figura 206- Modo de vibración fundamental de la viga de tres vanos con la masa del proyectil añadida en el punto de contacto. $T=0.169$ seg.



Los valores del desplazamiento $d(x)$ obtenidos del análisis modal para los centros de vano en la deformada del modo que incluye la masa del proyectil, como se pueden apreciar en la Figura 206, son los siguientes:

$$d(x=0.5 \text{ m}) = -0.692 \text{ m}$$

$$d(x=1.5 \text{ m}) = 0.974 \text{ m}$$

$$d(x=2.5 \text{ m}) = -0.692 \text{ m}$$

El desplazamiento en el punto de impacto es 0.974 m, y en centro de los vanos adyacentes 0.692 m. A partir de los valores indicados, se realiza el cálculo de $C_k(M_p)$ según lo expuesto en el apartado 4.1.3.3

$$F_1 = -F_{eq} \times (-0.692)$$

$$F_2 = F_{eq} \times (0.974)$$

$$F_3 = -F_{eq} \times (-0.692)$$

$$F_{TOTAL} = F_1 + F_2 + F_3 = F_{eq} \times 0.974 + 2 \times (-F_{eq}) \times (-0.692) = 2.358F_{eq}$$

$$\frac{F_2}{F_{TOTAL}} = \frac{0.974}{2.358} = 0.413$$

$$C_k(M_p) = \frac{F_{TOTAL}}{F_2} = 2.42$$

Igual que en el caso anterior, se calculan los resultados según la formulación para los valores de $C_k(M_p) = 1$, $C_k(M_p) = 2.42$ y $C_k(M_p) = 3$. Los parámetros obtenidos para la aplicación de la formulación en los tres casos se muestran en la Tabla 24:



Tabla 24- Parámetros resultantes para viga de tres vanos para los valores $C_k(M_p) = 1$; $C_k(M_p) = 2.42$; $C_k(M_p) = 3$. Caso $\alpha=1$ $V_p=0.5m/s$.

Unidades	Modo 1 con $C_{k,1}(M_p)$		Modo 1 con $C_{k,1}(M_p)=2,42$		Modo 1 con $C_{k,1}(M_p)=3$	
-	$L/L_{ef,1}$	1	$L/L_{ef,1}$	1	$L/L_{ef,1}$	1
m/s	$V_{p,1}$	0,50	$V_{p,1}$	0,50	$V_{p,1}$	0,50
Kg	$M_{e,1}$	0,35	$M_{e,1}$	0,35	$M_{e,1}$	0,35
-	α_1	1,00	α_1	1,00	α_1	1,00
-	$C_{m,1}$	0,50	$C_{m,1}$	0,50	$C_{m,1}$	0,50
m/s	$V_{i,1}$	0,25	$V_{i,1}$	0,25	$V_{i,1}$	0,25
kN/m	K_1	0,7	K_1	0,7	K_1	0,7
-	$C_{k,1}(M_p)$	1,00	$C_{k,1}(M_p)$	2,42	$C_{k,1}(M_p)$	3,00
kN/m	$K_{eq,1}$	0,68	$K_{eq,1}$	1,65	$K_{eq,1}$	2,04
rad/s	$W_{e,1}$	43,89	$W_{e,1}$	43,89	$W_{e,1}$	43,89
-	$X(p)_1$	1,00	$X(p)_1$	1,0	$X(p)_1$	1,000
Kg	$M_{p,eq1}$	0,35	$M_{p,eq1}$	0,35	$M_{p,eq1}$	0,35
rad/s	$W_{ep,1}$	31,03	$W_{ep,1}$	48,28	$W_{ep,1}$	53,75
Nm	E_1	0,0	E_1	0,0	E_1	0,0
%	E_1 (%)	50,0%	E_1 (%)	50,0%	E_1 (%)	50,0%
Nm	$E_{A,1}$	0,0	$E_{A,1}$	0,0	$E_{A,1}$	0,0
%	$E_{A,1}$ (%)	50%	$E_{A,1}$ (%)	50%	$E_{A,1}$ (%)	50%
Nm	$E_{D,3}$	0,0	$E_{D,3}$	0,0	$E_{D,3}$	0,0
%	$E_{D,3}$ (%)	50%	$E_{D,3}$ (%)	50%	$E_{D,3}$ (%)	50%

Como se puede comprobar en la Tabla 24, la energía analizada considerando 1 modo de vibración resulta del 50%, quedando otro 50% de energía sin considerar.

A partir de los datos anteriores, para cada caso, se aplica la formulación general de desplazamiento (328):

Caso $C_k(M_p) = 1$

$$d_{e,1}(t) = \frac{0.5 \times 0.5 \times \text{sen}(31.03 t)}{31.03}$$

Caso $C_k(M_p) = 2.42$

$$d_{e,1}(t) = \frac{0.5 \times 0.5 \times \text{sen}(48.28 t)}{48.28}$$

Caso $C_k(M_p) = 3$

$$d_{e,1}(t) = \frac{0.5 \times 0.50 \times \text{sen}(53.75 t)}{53.75}$$

En la Figura 207 se comparan los resultados del desplazamiento estructural en el punto central del vano central, considerando un único modo de vibración $d_{e,1}(t)$, para los tres casos de $C_k(M_p)$ con los ofrecidos por el modelo desarrollado en Midas NFX.

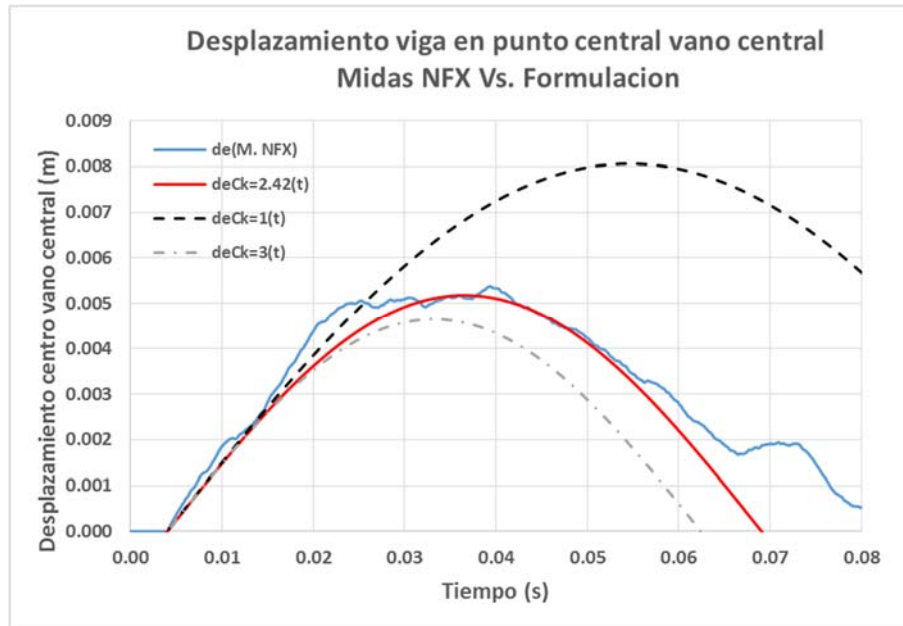


Figura 207- Comparativa de desplazamientos en centro de vano en viga de tres vanos entre Midas NFX y la formulación desarrollada en función de $C_k(M_p)$. Caso $\alpha=1$ $V_p=0.5$ m/s.

Como se puede apreciar en la gráfica anterior, los resultados por Midas NFX (línea azul) y la formulación para el parámetro $C_k(M_p) = 2.1$ (línea roja) son muy próximos, aunque ligeramente menos que en los dos casos anteriores. Al tratarse de un caso de $\alpha=1$ y utilizar un único modo de vibración para calcular la deformada se comete mayor error. No obstante, los resultados siguen siendo prácticamente coincidentes a los ofrecidos por Midas NFX.

Además, las líneas que la formulación proporciona para valores de $C_k(M_p) = 1$ (línea negra discontinua) y $C_k(M_p) = 3$ (línea gris discontinua) muestran la relevancia de este parámetro, tanto en amplitud de movimiento como en frecuencia del mismo, en el resultado final. En este caso el valor de cálculo del parámetro $C_k(M_p)$ era 2.42, próximo a 3, como queda reflejado en la Figura 207.



4.2.10.4 Análisis conjunto

Para ver los casos expuestos en su conjunto, y evaluar más fácilmente la precisión de los resultados, se muestran en la Figura 208 los 3 casos analizados en el apartado 4.2.10 en función de la masa del proyectil y su correspondiente valor del parámetro α .

En la Figura 208 se pueden ver los valores proporcionados por el Midas NFX (línea azul) para los tres casos, y los obtenidos por la formulación desarrollada (línea roja) en función de parámetro α de cada caso y su correspondiente valor de $C_k(M_p)$.

Como el valor de $C_k(M_p)$ es distinto en cada caso analizado, se muestran los resultados de la formulación con el valor del parámetro $C_k(M_p) = 3$ (línea gris discontinua) a modo de referencia para cada situación.

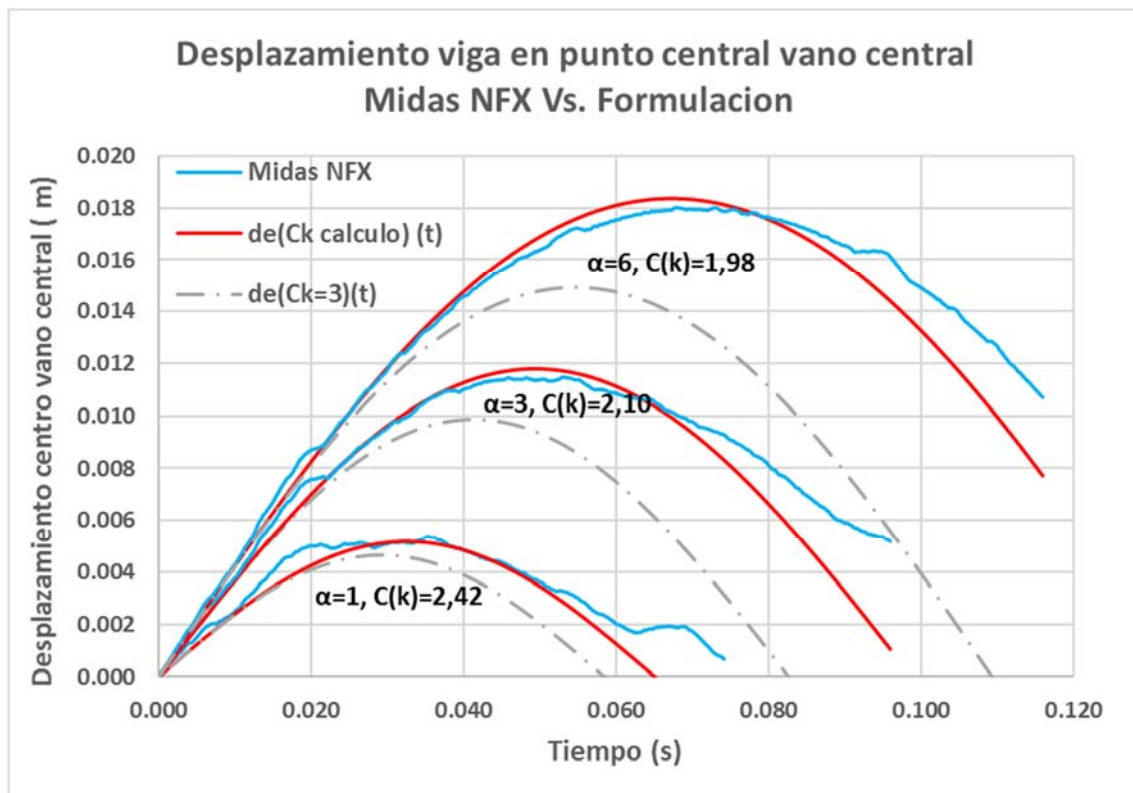


Figura 208- Comparativa de desplazamientos en centro de vano central en viga de tres vanos entre Midas NFX y la formulación de desarrollada en función de $C_k(M_p)$. Casos $\alpha=1$ $\alpha=3$ y $\alpha=6$ s con $V_p=0.5m/s$.

Como se puede apreciar en la gráfica anterior, los resultados por Midas NFX (línea azul) y la formulación para el parámetro $C_k(M_p)$ de cálculo en cada caso (línea roja) son prácticamente coincidentes. En la gráfica de la Figura 208 también se puede apreciar claramente que, cuando



la masa del proyectil es pequeña como en el caso con $\alpha=1$, la curva de la formulación con el $C_k(M_p)$ de cálculo se aproxima mucho a la curva de $C_k(M_p) = 3$. A medida que aumenta el coeficiente α , el coeficiente $C_k(M_p)$ se aleja del valor de 3 y tiende hacia el valor de 1 y, por tanto, las curvas roja y gris se van separando.



4.2.11 Aplicación a placas.

Con objeto de seguir demostrando la aplicabilidad de la formulación desarrollada para impactos a todo tipo de estructuras, en este apartado se analiza el impacto sobre una placa de hormigón, como muestra la Figura 209, supuesto comportamiento elástico lineal del mismo.

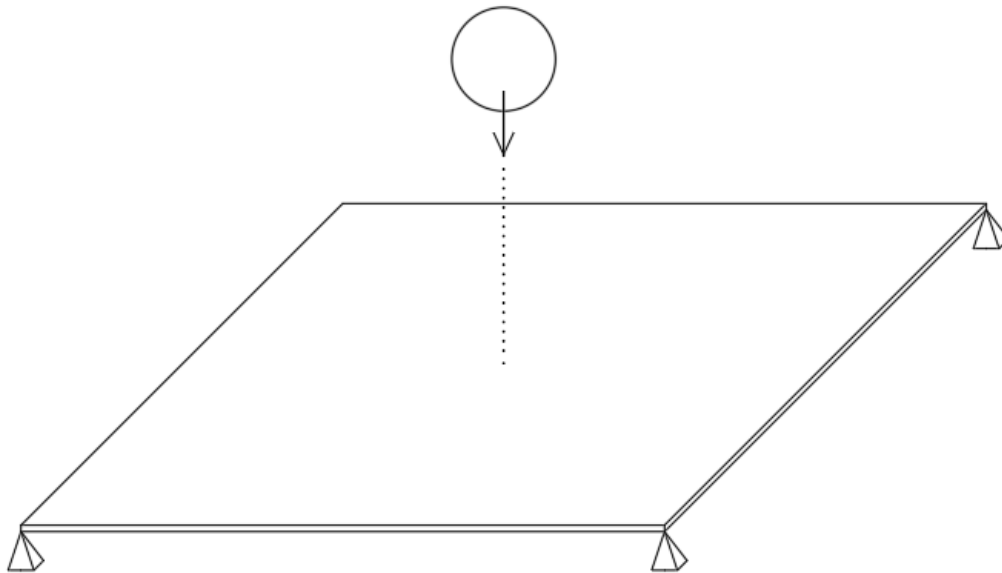


Figura 209-Caso de impacto central en placa de hormigón apoyada en las 4 esquinas.

Las dimensiones de la placa son 10 m x 10 m x 0.1 m, estando apoyada de manera puntual y vertical en las 4 esquinas. El material de la placa, supuesto elástico perfecto, es el hormigón definido como C30/37 por el Eurocódigo 2. Es decir, le corresponde un módulo de elasticidad de 3.2×10^{10} N/m² y una densidad de 2 549 Kg/m³. El modelo desarrollado en Midas Civil para la placa se muestra en la Figura 207Figura 210.

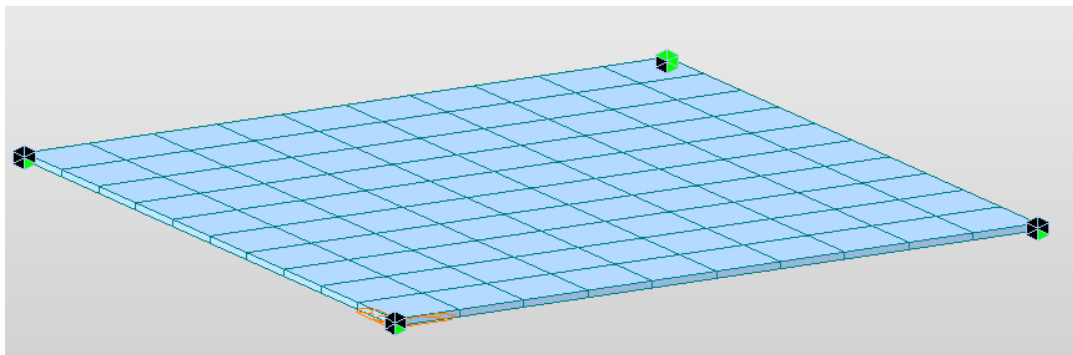


Figura 210-Modelo de elementos finitos en Midas Civil para el análisis modal de la placa.



Los valores de rigidez y masa equivalente para una placa idéntica a la estudiada en este apartado fueron obtenidos en el apartado 4.1.1.5. en la expresión (264) y 4.1.2.4 en la expresión (273), respectivamente. Estos valores resultaron:

$$K_e = 709.89 \text{ KN/m}$$

$$M_e = 12 \text{ 498 kg}$$

El cálculo de los valores de rigidez y masa equivalente anteriores fueron obtenidos a partir de la deformada del natural del modo, es decir, sin tener en cuenta ninguna masa de proyectil integrada en la estructura. Para comprobar que estos valores siguen siendo válidos en los casos de impactos que a continuación se van a estudiar, es necesario comparar las deformadas del modo de vibración fundamental de la placa, incluyendo la masa del proyectil, con la deformada resultante del método simplificado. El método simplificado consiste en aplicar una carga puntual en el centro de la placa, y obtener la rigidez como cociente entre la carga y la deformada en el punto.

Se realiza un análisis modal mediante Midas Civil sobre la placa, incluyendo la masa del proyectil más grande de los casos que se van a estudiar en el centro de la placa. El valor concreto de la masa del proyectil utilizado para el análisis modal es 74 988 kg. El resultado de dicho análisis modal se muestra en la Figura 211.

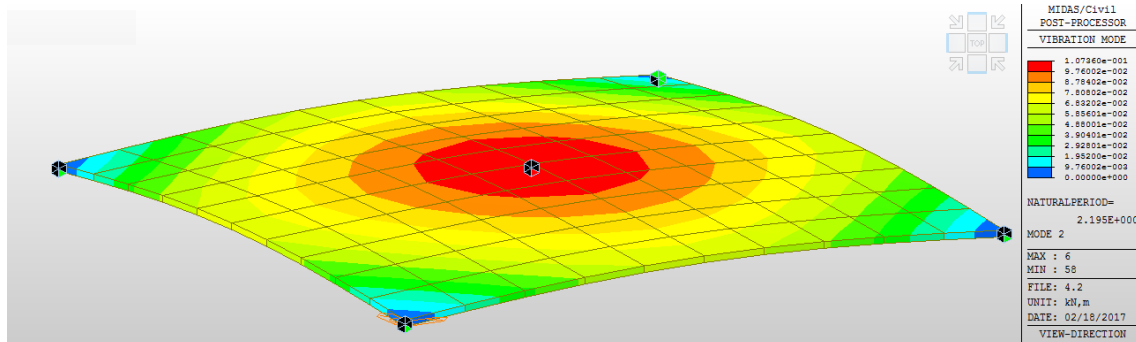


Figura 211-Modo de vibración fundamental de la placa incluyendo la masa del proyectil en el punto central de la placa de valor 74988 Kg. $T=2.195$ seg.

La deformada resultante del análisis modal de la placa sin incluir la masa del proyectil en el centro de la placa, fue mostrado en la gráfica de la Figura 100. La deformacion obtenida en las diagonales de la placa para el modo 1 en la Figura 100, en la figura Figura 211 y para el método simplificado, se comparan en la Figura 212.

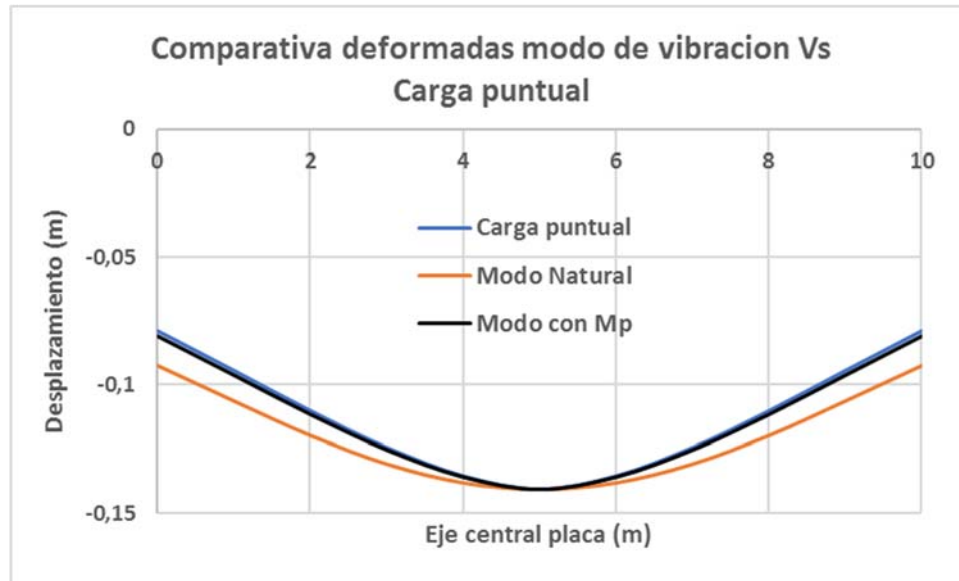


Figura 212-Comparativa de deformadas de carga puntual, modo 1 sin incluir masa del proyectil (natural) y modo 1 incluyendo la masa del proyectil.

Como se puede apreciar en la gráfica de la Figura 212, al incluir la masa en el punto central de la placa (curva negra), la deformada del modo fundamental se aproxima mucho más a la deformada del caso de carga puntual (curva azul) que al caso del modo sin incluir la masa del proyectil (curva naranja). Por este motivo el ligero error en los valores de rigidez y masa equivalente mostrado en los resultados del apartado 4.1.3.5 no existirán, o serán menores, en el análisis de impactos que en los estudios realizados en dicho apartado. Los valores de rigidez y masa equivalente calculados en el apartado 4.1.1.5 y 4.1.2.4 respectivamente son, por tanto, válidos.

Para el caso de la placa, dado que sólo hay un “vano” el parámetro $C_k(M_p)$ tomo el valor 1. No se considera la influencia del peso propio en el análisis.

Para contrastar los resultados de la formulación se realiza un modelo en Midas NFX. A la hora de modelar el impacto en este software, se han de considerar las hipótesis de partida expuestas en 4.2.1. Es decir, la masa M_p ha de ser “puntual” e “indeformable”. Para aproximarse a esta situación, se modela M_p mediante un prisma de dimensiones (1 m x 1 m x 0.1 m) y se le asigna un material de densidad variable en función del caso y de módulo de elasticidad 1000 veces el módulo del acero (2.1×10^{14} N/m²). La velocidad inicial del proyectil se le asigna directamente, en módulo y dirección, mediante las posibilidades que ofrece el programa para cada caso analizado.

El tipo de análisis que se realiza en el Midas NFX es un análisis no lineal (tipo explícito) de 1.2 segundos de duración y un incremento de tiempo para la integración de 0.0001 segundos. Se ha



utilizado elementos solidos tanto para la viga como para el proyectil. El modelo realizado en Midas NFX se muestra en la Figura 213.

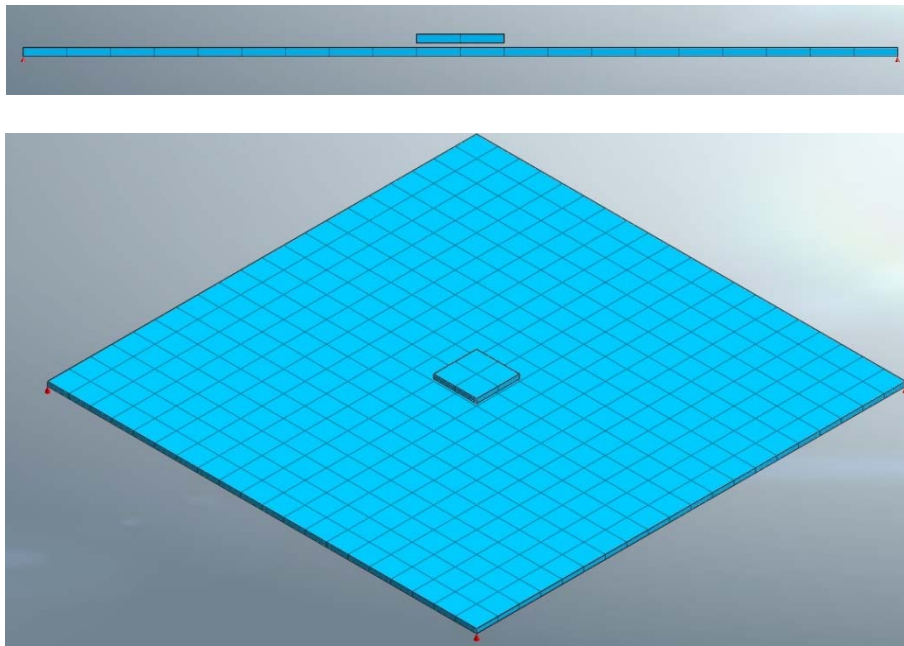


Figura 213-Vista frontal (arriba) y perspectiva (abajo) del modelo de placa realizado en MIDAS NFX.

A continuación, se estudiarán 3 casos de impactos en el punto central de la placa con las siguientes condiciones:

- Masa de proyectil 6 veces mayor que la masa equivalente de la estructura ($\alpha=6$) y velocidad de la masa previa al impacto: $V_{p,0}=0.5$ m/s
- Masa de proyectil 4 veces mayor que la masa equivalente de la estructura ($\alpha=4$) y velocidad de la masa previa al impacto: $V_{p,0}=0.5$ m/s
- Masa de proyectil 2 veces mayor que la masa equivalente de la estructura ($\alpha=2$) y velocidad de la masa previa al impacto $V_{p,0}=0.5$ m/s

La Figura 214 es una captura del primer caso analizado de impactos central en placa mediante Midas NFX.

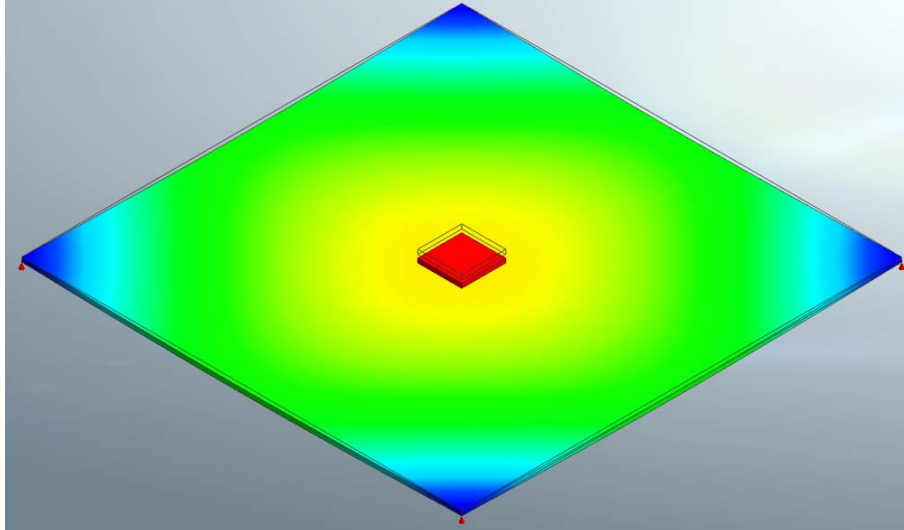


Figura 214-Análisis de impacto central en placa mediante Midas NFX.

4.2.11.1 Caso masa del proyectil seis veces la masa equivalente del modo 1 de la estructura ($\alpha=6$) y velocidad del proyectil previa al impacto ($V_{p,0}$) de 0.5 m/s. No consideración del peso propio del proyectil en el impacto.

En el primer caso de estudio, se aplica un proyectil de masa relativa elevada que proporciona un $\alpha=6$. Los datos de partida para el estudio del impacto se muestran en la Tabla 25.

Tabla 25- Impacto central en placa. Caso $\alpha=6$ $V_p=0.5$ m/s. Datos de partida.

Datos placa		Datos proyectil	
Espesor PLACA (m)	0,10	Mp(kg)	74988,00
L _{longitudinal} PLACA (m)	10	V _{po} (m/s)	0,50
L _{transversal} PLACA (m)	10,00	E _o (N m)	9373,5
A (m ²)	1,00E+02	C.M. (N s)	37494,0
E (KN / m)	3,20E+07	K _{PROYECTIL}	∞
ρ (kg / m ³)	2,50E+03	g(m/s ²)	0
Punto de impacto "p" (m,m)	(5,5)	α	6,00
		C _{pp}	0,00

A partir de los datos de partida, se calculan los parámetros necesarios para la aplicación de la formulación según lo expuesto en los apartados 4.2.3.3 y 4.2.7.4 para la resolución del impacto. Los valores de los parámetros resultantes se resumen en la Tabla 26.



Tabla 26- Parámetros resultantes para placa Caso $\alpha=6$ $V_p=0.5$ m/s.

Unidades	Modo 1	
-	$L/L_{ef,1}$	1
m/s	$V_{p,1}$	0,50
Kg	$M_{e,1}$	12498
-	α_1	6,00
-	$C_{m,1}$	0,86
m/s	$V_{l,1}$	0,43
kN/m	K_1	709,9
-	$C_{K,1}(M_p)$	1,00
kN/m	$K_{eq,1}$	709,89
rad/s	$W_{e,1}$	7,54
-	$X(p)_1$	1,00
Kg	$M_{p,eq1}$	74988,00
rad/s	$W_{ep,1}$	2,85
Nm	E_1	8034,5
%	E_1 (%)	85,7%
Nm	$E_{A,1}$	8034,5
%	$E_{A,1}$ (%)	86%
Nm	$E_{D,3}$	1339,0
%	$E_{D,3}$ (%)	14%

Como se puede comprobar en la Tabla 26, la energía analizada considerando un modo de vibración resulta el 86%, quedando un 14% de energía sin considerar.

A partir de los datos anteriores, para cada caso, se aplica la formulación general de desplazamiento (328):

$$d_{e,1}(t) = \frac{0.5 \times 0.86 \times \text{sen}(2.85 t)}{2.85}$$

En la Figura 213 se comparan los resultados del desplazamiento estructural en el punto central de la placa, considerando un único modo de vibración $d_{e,1}(t)$, con los ofrecidos por el modelo desarrollado en Midas NFX.

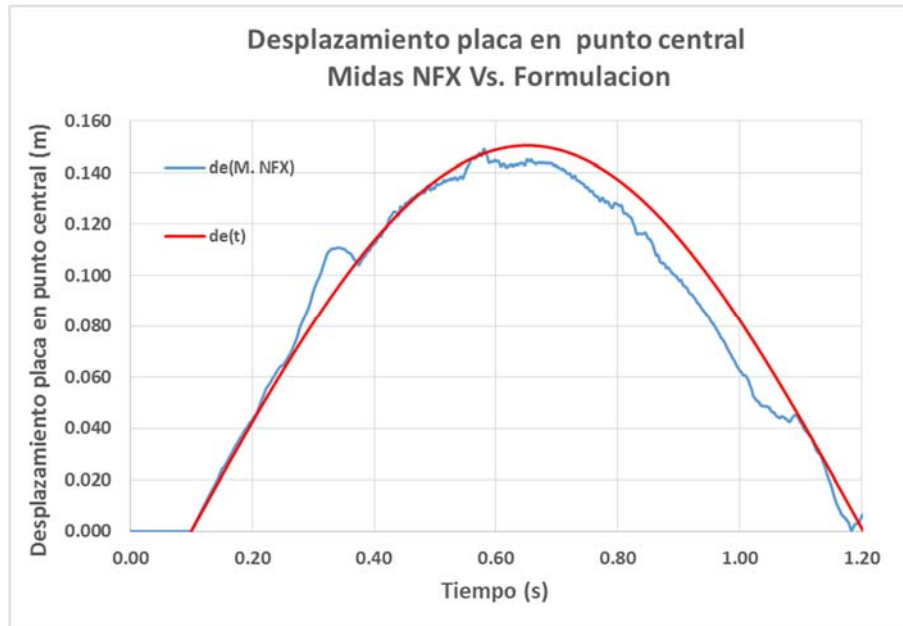


Figura 215- Comparativa de desplazamientos en centro de la placa entre Midas NFX y la formulación desarrollada.
Caso $\alpha=6$ $V_p=0.5$ m/s.

En la gráfica de la Figura 215 se observa el gran nivel de coincidencia entre las curvas. Sobre la gráfica del NFX aparecen pequeñas fluctuaciones debidas a la aportación de otros modos de vibración distintos al modo fundamental, que únicamente con el primer modo la formulación no puede recoger. No obstante, tanto el valor máximo de deformación como el instante en que se produce, son muy próximos.



4.2.11.2 Caso masa del proyectil cuatro veces la masa equivalente del modo 1 de la estructura ($\alpha=4$) y velocidad del proyectil previa al impacto ($V_{p,o}$) de 0.5 m/s. No consideración del peso propio del proyectil en el impacto.

En el segundo caso de estudio se aplica un proyectil de masa relativa elevada, pero inferior al caso anterior ($\alpha=4.15$). Los datos para el estudio del impacto se muestran en la Tabla 27.

Tabla 27- Impacto central en placa. Caso $\alpha=4$ $V_p=0.5$ m/s. Datos de partida.

Datos placa		Datos proyectil	
Espesor PLACA (m)	0,10	Mp(kg)	51827,50
L _{longitudinal} PLACA (m)	10	V _{po} (m/s)	0,50
L _{transversal} PLACA (m)	10,00	E _o (N m)	6478,4
A (m ²)	1,00E+02	C.M. (N s)	25913,8
E (KN / m)	3,20E+07	K _{PROYECTIL}	∞
ρ (kg /m ³)	2,50E+03	g(m/s ²)	0
Punto de impacto "p" (m,m)	(5,5)	α	4,15
		C _{pp}	0,00

A partir de los datos de partida se calculan los parámetros necesarios para la aplicación de la formulación según lo expuesto en los apartados 4.2.3.3 y 4.2.7.4 para la resolución del impacto. Los valores de los parámetros resultantes se resumen en la Tabla 28.

Tabla 28- Parámetros resultantes para placa Caso $\alpha=4$ $V_p=0.5$ m/s.

Unidades	Modo 1	
-	L/L _{ef,1}	1
m/s	V _{p,1}	0,50
Kg	M _{e,1}	12498
-	α_1	4,15
-	C _{m,1}	0,81
m/s	V _{i,1}	0,40
kN/m	K ₁	709,9
-	C _{K,1} (M _p)	1,00
kN/m	K _{eq,1}	709,89
rad/s	W _{e,1}	7,54
-	X(p) ₁	1,00
Kg	M _{p,eq1}	51827,50
rad/s	W _{ep,1}	3,32
Nm	E ₁	5219,8
%	E ₁ (%)	80,6%
Nm	E _{A,1}	5219,8
%	E _{A,1} (%)	81%
Nm	E _{D,3}	1258,7
%	E _{D,3} (%)	19%



Como se puede comprobar en la Tabla 28, la energía analizada considerando un modo de vibración resulta el 81%, quedando un 19% de energía sin considerar.

A partir de los datos anteriores, para cada caso, se aplica la formulación general de desplazamiento (328):

$$d_{e,1}(t) = \frac{0.5 \times 0.81 \times \text{sen}(3.32 t)}{3.32}$$

En la Figura 216 se comparan los resultados del desplazamiento estructural en el punto central de la placa, considerando un único modo de vibración $d_{e,1}(t)$, con los ofrecidos por el modelo desarrollado en Midas NFX.

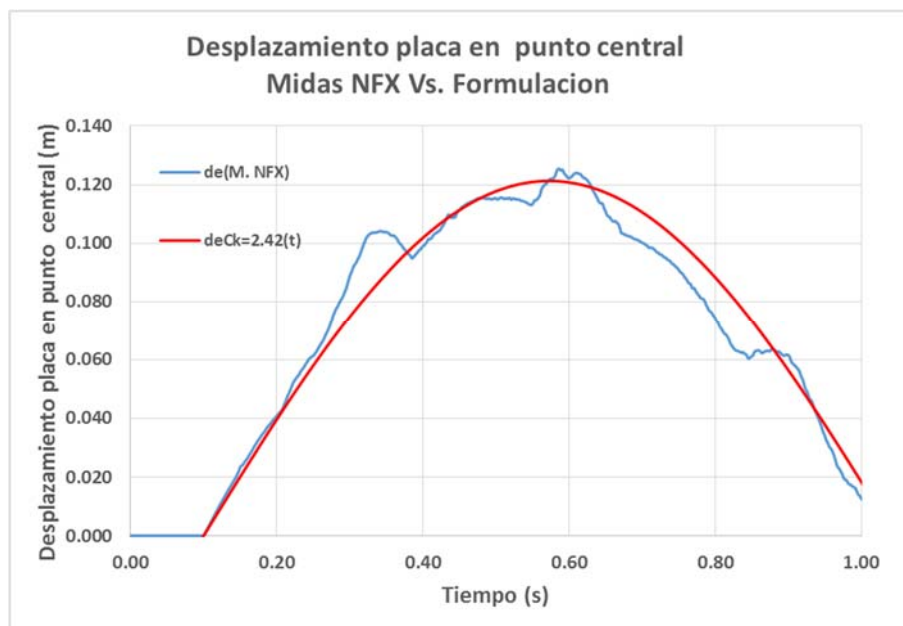


Figura 216- Comparativa de desplazamientos en centro de la placa entre Midas NFX y la formulación desarrollada. Caso $\alpha=4$ $V_p=0.5$ m/s.

En la gráfica de la Figura 216 se observa la gran coincidencia entre las curvas. Sobre la gráfica del NFX, al igual que en el caso anterior, aparecen pequeñas fluctuaciones debidas a otros modos de vibración distintos al modo fundamental, que únicamente con el primer modo la formulación no puede recoger. Estas fluctuaciones, debidas a que el porcentaje de energía analizado es menor en este caso, son mayores que en caso anterior. No obstante, tanto el valor máximo de deformación como el instante en que se produce son muy próximos, prácticamente coincidentes.



4.2.11.3 Caso masa del proyectil doble de la masa equivalente del modo 1 de la estructura ($\alpha=2$) y velocidad del proyectil previa al impacto ($V_{p,0}$) de 0.5 m/s. No consideración del peso propio del proyectil en el impacto.

En el tercer caso de estudio se aplica un proyectil de masa relativa elevada, pero inferior al caso anterior ($\alpha=2.07$). Los datos para el estudio del impacto se muestran en la Tabla 29.

Tabla 29- Impacto central en placa. Caso $\alpha=4$ $V_p=0.5$ m/s. Datos de partida

Datos placa		Datos proyectil	
Espesor PLACA (m)	0,10	Mp(kg)	25913,7
L _{longitudinal} PLACA (m)	10	V _{po} (m/s)	0,50
L _{transversal} PLACA (m)	10,00	Eo (N m)	3239,2
A (m ²)	1,00E+02	C.M. (N s)	12956,9
E (KN / m)	3,20E+07	K _{PROYECTIL}	∞
ρ (kg /m ³)	2,50E+03	g(m/s ²)	0
Punto de impacto "p" (m,m)	(5,5)	α	2,07
		C _{pp}	0,00

A partir de los datos de partida se calculan los parámetros necesarios para la aplicación de la formulación según lo expuesto en los apartados 4.2.3.3 y 4.2.7.4 para la resolución del impacto. Los valores de los parámetros resultantes se resumen en la Tabla 30.

Tabla 30- Parámetros resultantes para placa Caso $\alpha=2$ $V_p=0.5$ m/s.

Unidades	Modo 1	
-	L/L _{ef,1}	1
m/s	V _{p,1}	0,50
Kg	M _{e,1}	12498
-	α_1	2,07
-	C _{m,1}	0,67
m/s	V _{i,1}	0,34
kN/m	K ₁	709,9
-	C _{K,1} (M _p)	1,00
kN/m	K _{eq,1}	709,89
rad/s	W _{e,1}	7,54
-	X(p) ₁	1,00
Kg	M _{p,eq1}	25913,70
rad/s	W _{ep,1}	4,30
Nm	E ₁	2185,3
%	E ₁ (%)	67,5%
Nm	E _{A,1}	2185,3
%	E _{A,1} (%)	67%
Nm	E _{D,3}	1053,9
%	E _{D,3} (%)	33%



Como se puede comprobar en la Tabla 30, la energía analizada considerando un modo de vibración resulta el 67%, quedando un 33% de energía sin considerar.

A partir de los datos anteriores, para cada caso, se aplica la formulación general de desplazamiento (328):

$$d_{e,1}(t) = \frac{0.5 \times 0.67 \times \text{sen}(4.30 t)}{4.30}$$

En la Figura 217 se comparan los resultados del desplazamiento estructural en el punto central de la placa, considerando un único modo de vibración $d_{e,1}(t)$, con los ofrecidos por el modelo desarrollado en Midas NFX.

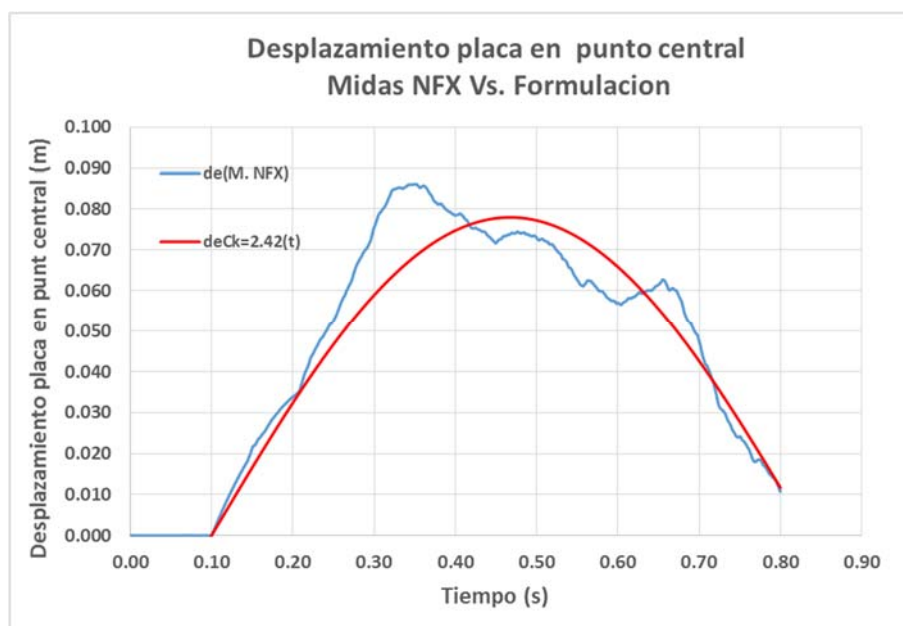


Figura 217- Comparativa de desplazamientos en centro de la placa entre Midas NFX y la formulación desarrollada. Caso $\alpha=2$ $V_p=0.5$ m/s.

En la gráfica de la Figura 217 se observa que existe una coincidencia muy alta entre ambas curvas. Sobre la gráfica del NFX, al igual que en el caso anterior, aparecen fluctuaciones debidas a otros modos de vibración distintos al modo fundamental, que únicamente con el primer modo la formulación no puede recoger. Estas fluctuaciones, debidas a que el porcentaje de energía analizado es menor en este caso que en ninguno, son ligeramente mayores que en los dos casos anteriores. Según los cálculos expuestos en la Tabla 30, las fluctuaciones debidas a otros modos de vibración distintos del modo fundamental ya representan un 33% de la energía inicial para este caso.



4.2.11.4 Análisis conjunto

Para ver los casos expuestos en su conjunto, y evaluar más fácilmente la precisión de los resultados, se muestran en la Figura 218 los 3 casos analizados en el apartado 4.2.11 en función de la masa del proyectil y su correspondiente valor del parámetro α .

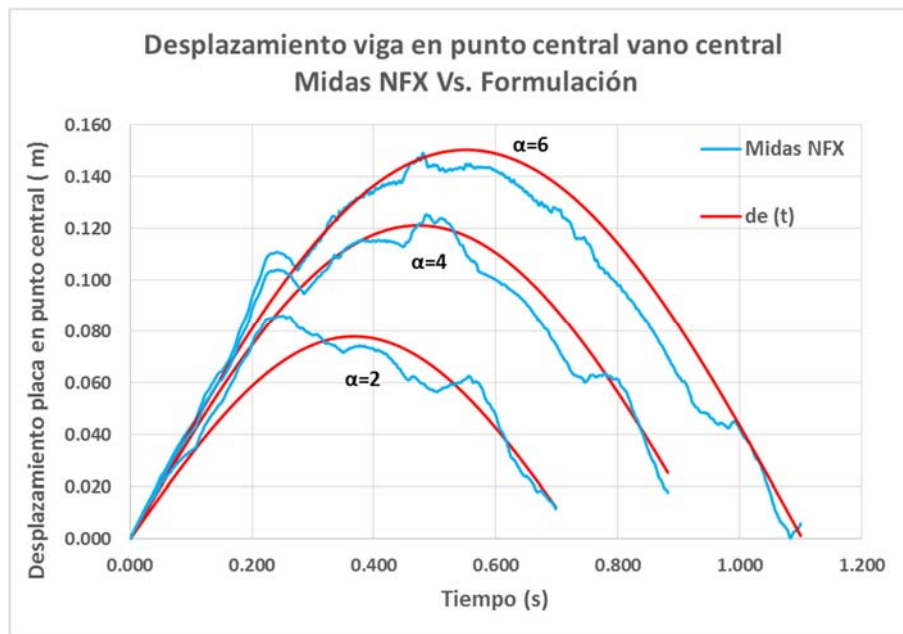


Figura 218- Comparativa de desplazamientos en centro de la placa entre Midas NFX y la formulación desarrollada. Casos $\alpha=2$ $\alpha=4$ y $\alpha=6$ s con $V_p=0.5m/s$.

Como se puede apreciar en la Figura 218, los resultados por Midas NFX (línea azul) y la formulación desarrollada (línea roja) **son muy próximos**.

A medida que disminuye el coeficiente α las fluctuaciones de otros modos de vibración, y, por tanto, la necesidad de aplicar la formulación con más modos de vibración va aumentando. No obstante, con la simple consideración de un modo de vibración en la formulación desarrollada se han obtenido muy buenos resultados.

A la vista de los resultados, y teniendo en cuenta la complejidad del cálculo manual de placas para todo tipo de cálculos, incluido el estático, se puede concluir que **la formulación desarrollada se adapta perfectamente al cálculo de impactos en placas**.



4.2.12 Aplicación a impactos longitudinales

Con objeto de seguir demostrando la aplicabilidad de la formulación desarrollada a todo tipo de estructuras, en este apartado se analiza el impacto en dos estructuras tipo **ménsula**. El impacto sobre las ménsulas metálicas objeto de estudio se produce en la dirección longitudinal de la misma como muestra la Figura 219, por lo que el mecanismo de absorción de energía en el impacto, a diferencia de todos los casos analizados previamente, **es absorción de energía por axil**.



Figura 219- Caso de impacto axial en ménsula metálica.

Para llevar a cabo este análisis, y dado que es el único apartado del documento que se aplica la formulación a impactos axiales, se estudian una serie de impactos en dos ménsulas distintas, la ménsula “A” y la ménsula “B”. La ménsula “A”, dada sus características geométricas, es más flexible que la ménsula “B”.

- La ménsula “A”, que es la ménsula descrita en el apartado 4.1.1.6, es sometida a un único impacto con los siguientes valores de masa relativa y velocidad inicial: $\alpha=10$ y $V_{p,o} = 3 \text{ m/s}$.
- La ménsula “B” presenta las siguientes características: ménsula metálica de 5 m de longitud y sección cuadrada 0.1 m x 0.1. Es decir, es una ménsula con todos los parámetros idénticos a la ménsula “A” pero con un área en la sección transversal 100 veces mayor. A la ménsula “B” se la somete a 4 impactos con masa del proyectil variable ($\alpha=10$, $\alpha=2$, $\alpha=1$ y $\alpha=0.5$), todos ellos con una velocidad inicial de valor $V_{p,o} = 5 \text{ m/s}$.

En todos los casos analizados en ambas ménsulas, el punto de impacto se produce en el extremo libre de la ménsula, con la masa del proyectil comprimiendo la estructura en la dirección axial. Se considera el impacto en la dirección perpendicular a la gravedad, por lo que no se considera el efecto del peso propio.

Para la aplicación de la formulación desarrollada sólo se tiene en consideración el modo fundamental de vibración.



Para comprobar los resultados de la formulación desarrollada se realizan dos modelos en Midas NFX que reproduzcan los casos de impacto descritos, uno para la ménsula “A” y otro para la ménsula “B”.

El modelo de elementos finitos desarrollado para la ménsula “A” modela la masa del proyectil M_p mediante un cubo de dimensiones (0.01 m x 0.01 m x 0.01 m), al cual se le asigna un material de densidad que proporcione la masa M_p buscada en cada caso. El módulo de elasticidad es 1000 veces mayor que el módulo del acero (2.1×10^{14} N/m²). La velocidad inicial del proyectil se le asigna directamente, en módulo y dirección, mediante las posibilidades que ofrece el programa para el caso analizado.

El tipo de análisis que se realiza en el Midas NFX para la ménsula “A”, es un análisis no lineal (tipo explícito) de 0.01 segundos de duración y un incremento de tiempo para la integración de 0.000005 segundos. Se ha utilizado elementos sólidos tanto para la ménsula como para el proyectil. El modelo realizado en Midas NFX para la ménsula “A” se muestra en la Figura 220.

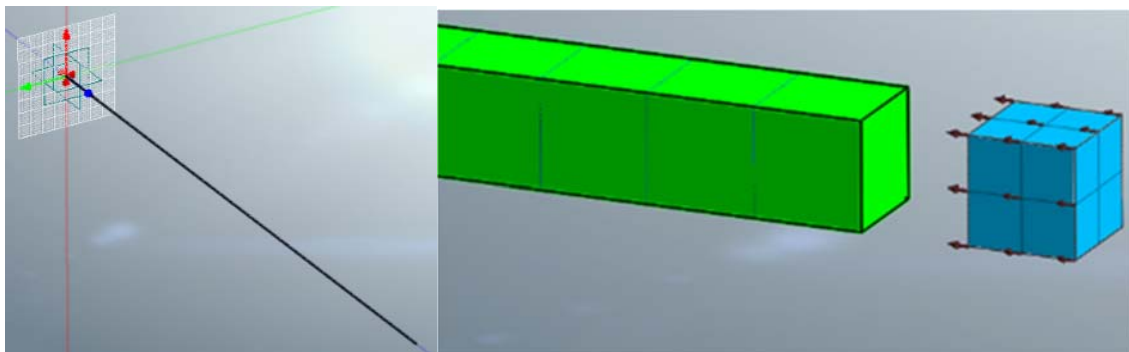


Figura 220-Modelo en Midas NFX para el estudio de impacto en la ménsula “A”.

El modelo de elementos finitos desarrollado para la ménsula “B” modela la masa del proyectil M_p mediante un cubo de dimensiones (0.1 m x 0.1 m x 0.1 m) y se le asigna un material de densidad que proporcione la masa M_p buscada en cada caso. El módulo de elasticidad es 1000 veces mayor que el módulo del acero (2.1×10^{14} N/m²). La velocidad inicial del proyectil, al igual que en el modelo de la ménsula “A” se le asigna directamente, en módulo y dirección, mediante las posibilidades que ofrece el programa para cada caso analizado.

El tipo de análisis que se realiza en el Midas NFX para la ménsula “B”, es un análisis no lineal (tipo explícito) de 0.006 segundos de duración y un incremento de tiempo para la integración de 0.00001 segundos. Se ha utilizado elementos sólidos tanto para la viga como para el proyectil. El modelo realizado en Midas NFX para la ménsula “B” se muestra en la Figura 221.

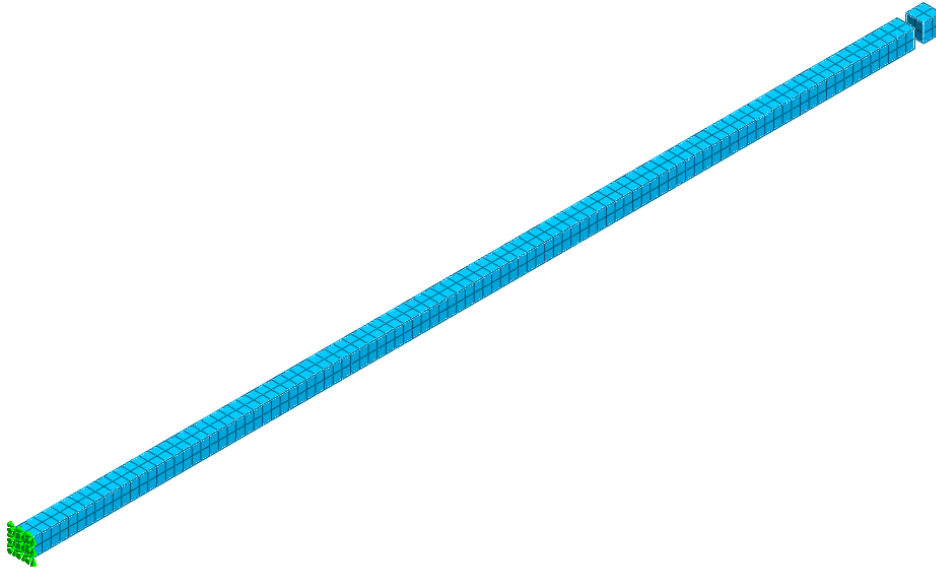


Figura 221- Modelo en Midas NFX para el estudio de impacto en la ménsula "B".

4.2.12.1 Ménsula "A": masa del proyectil diez veces la masa equivalente del modo 1 de la estructura ($\alpha=10$) y velocidad del proyectil previa al impacto ($V_{p,0}$) de 3.0 m/s. No consideración del peso propio del proyectil en el impacto.

Los datos de partida para el estudio del impacto en la ménsula "A" se muestran en la Tabla 31:

Tabla 31- Impacto en extremo de ménsula A. Caso $\alpha=10$ y $V_p=3$ m/s. Datos de partida.

Datos menula		Datos proyectil	
Longitud MENSULA(m)	5,00	Mp(kg)	15,9
b (m)	0,01	Vpo (m/s)	3,00
h (m)	0,01	Eo (N m)	71,7
A (m ²)	1,00E-04	C.M. (N s)	47,8
E (KN / m)	2,10E+08	KPROYECTIL	∞
ρ (kg /m ³)	7,85E+03	g(m/s ²)	0
Punto de impacto "p" (m,m)	5	α	10,00
		C _{pp}	0,00

Lo primero de todo, para el análisis del impacto, es obtener los parámetros de rigidez y masa equivalente.

Se utiliza para los cálculos de impactos los valores rigidez y masa obtenidos en el apartado 4.1.1.6 y 4.1.2.5, respectivamente, según el método simplificado, y no los obtenidos según el



método general, por las razones que se expondrán a continuación. Los valores para los cálculos, por tanto, son los siguientes:

$$K_1 = \frac{EA}{L_{ef,1}} = 4200 \text{ KN/m}$$

$$M_e = 0.405 \times \rho \times L_{ef,1} \times A = 1.594 \text{ Kg}$$

El cálculo de estos valores de rigidez y masa equivalente fueron obtenidos en los apartados 4.1.1.6 y 4.1.2.5, respectivamente, para la aproximación de la deformada bajo carga puntual (método simplificado). En dichos apartados, también se obtuvieron la rigidez y la masa equivalente para la deformada exacta del modo según el método general. En ambos casos, sin tener en cuenta ninguna masa de proyectil integrada en la estructura.

Para comprobar cuál de estos valores son válidos para el cálculo de impactos, es necesario comparar las deformadas del modo de vibración fundamental axial de la ménsula, incluyendo la masa del proyectil, con las deformadas resultantes del método simplificado y del método general.

Se realiza un análisis modal mediante Midas Civil sobre la ménsula, incluyendo la masa del proyectil en el extremo libre de la ménsula. El valor concreto de la masa del proyectil utilizado para el análisis modal es 15.9 kg, dado que es la masa del caso estudiado, y se ubica en el extremo libre de la ménsula por ser el punto de contacto.

El resultado del análisis modal (curva negra) y su comparación con las deformadas utilizadas para el método puntual (curva azul) y para el método general (curva naranja), se muestra en la Figura 222.

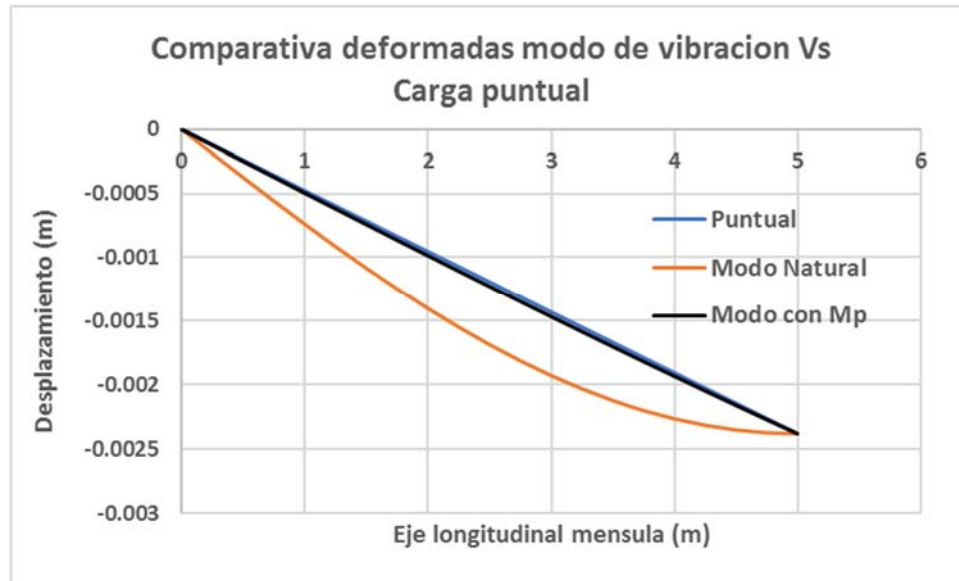


Figura 222- Comparativa de deformadas de carga puntual, modo 1 sin masa del proyectil (natural) y modo 1 incluyendo la masa del proyectil.

Como se puede apreciar en la gráfica de la Figura 222, al incluir la masa del proyectil en el extremo libre de la ménsula la deformada del modo fundamental (curva negra), se aproxima a la deformada del caso de carga puntual (curva azul) mucho más que al caso del modo de vibración sin incluir la masa del proyectil (curva naranja). Es decir, el modo de vibración axial fundamental, al absorber la masa del proyectil en el extremo de la ménsula, transforma su deformada a la deformada del caso de carga puntual. Por este motivo, los valores de rigidez y masa equivalente utilizados en el análisis de impactos del presente apartado son los correspondientes al método simplificado, es decir, según el caso de carga puntual.

Para el caso de la ménsula, dado que solo hay un “vano” el parámetro $C_k (M_p)$ tomo el valor 1. Como se ha indicado previamente, no se considera la influencia del peso propio del proyectil en el análisis.

A partir de los datos de partida expuestos en la Tabla 31, se calculan los parámetros necesarios para la aplicación de la formulación según lo expuesto en los apartados 4.2.3.3 y 4.2.7.4 de resolución del impacto. Los valores de los parámetros resultantes se resumen en la Tabla 32.



Tabla 32- Parámetros resultantes para ménsula A Caso $\alpha=10$ $V_p=3$ m/s.

Unidades	Modo 1	
-	$L/L_{ef,1}$	1
m/s	$V_{p,1}$	3.00
Kg	$M_{e,1}$	1.59
-	α_1	10.00
-	$C_{m,1}$	0.91
m/s	$V_{i,1}$	2.73
kN/m	K_1	4200.0
-	$C_{K,1}(M_p)$	1.00
kN/m	$K_{eq,1}$	4200.00
rad/s	$W_{e,1}$	1623.46
-	$X(p)_1$	1.00
Kg	$M_{p,eq1}$	15.94
rad/s	$W_{ep,1}$	489.43
Nm	E_1	65.2
%	E_1 (%)	90.9%
Nm	$E_{A,1}$	65.2
%	$E_{A,1}$ (%)	91%
Nm	$E_{D,3}$	6.5
%	$E_{D,3}$ (%)	9%

Como se puede comprobar en la Tabla 32, la energía analizada considerando un modo de vibración resulta el 91%, quedando un 9% de energía sin considerar.

A partir de los datos anteriores, se aplica la formulación general de desplazamiento (328):

$$d_{e,1}(t) = \frac{3 \times 0.91 \times \text{sen}(489.43 t)}{489.43}$$

En la Figura 223 se comparan los resultados del desplazamiento estructural en extremo libre la ménsula, considerando un único modo de vibración $d_{e,1}(t)$, con los ofrecidos por el modelo desarrollado en Midas NFX.

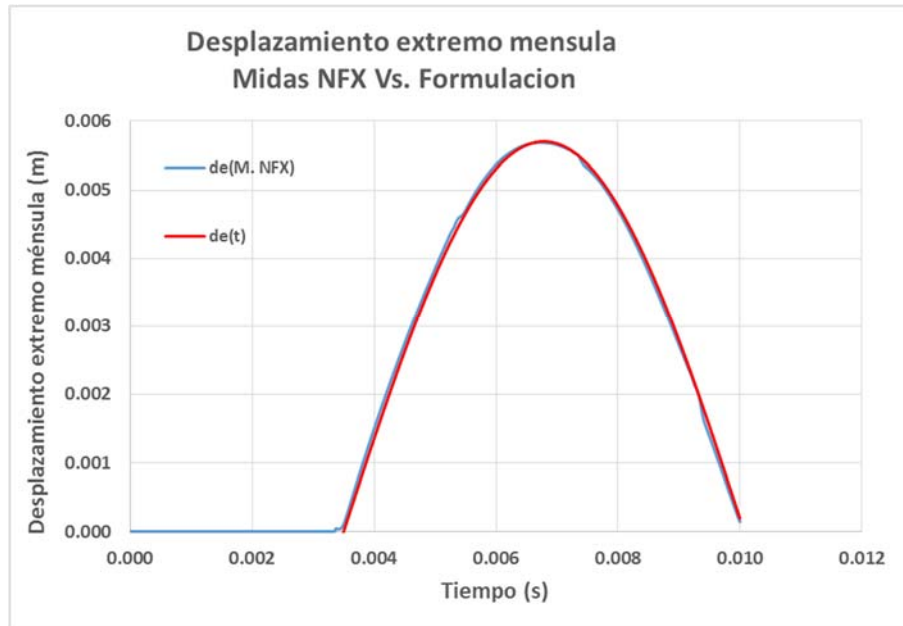


Figura 223- Comparativa de desplazamientos en el extremo de la ménsula entre Midas NFX y la formulación desarrollada. Caso $\alpha=10$ $V_p=3$ m/s.

En la gráfica de la Figura 223 se observa que las curvas **son prácticamente coincidentes**. Sobre la gráfica del NFX aparecen ligerísimas fluctuaciones debidas a otros modos de vibración distintos al modo fundamental. No obstante, tanto el valor máximo de deformación como el instante en que se produce son muy próximos.



- Desarrollo de teoría sobre impactos -
- Método simplificado de cálculo de impactos en estructuras -





4.2.12.2 Ménsula “B”: masa del proyectil diez veces la masa equivalente del modo 1 de la estructura ($\alpha=10$) y velocidad del proyectil previa al impacto ($V_{p,o}$) de 5.0 m/s. No consideración del peso propio del proyectil en el impacto.

Los datos de partida para el estudio del impacto en la ménsula “B” en este apartado se muestran en la Tabla 33:

Tabla 33- Impacto en extremo de ménsula B. Caso $\alpha=10$ y $V_p=5$ m/s. Datos de partida.

Datos menula		Datos proyectil	
Longitud MENSULA(m)	5.00	Mp(kg)	1590.0
b (m)	0.10	Vpo (m/s)	5.00
h (m)	0.10	Eo (N m)	19875.0
A (m ²)	1.00E-02	C.M. (N s)	7950.0
E (KN / m)	2.10E+08	KPROYECTIL	∞
ρ (kg /m ³)	7.85E+03	g(m/s ²)	0
Punto de impacto "p" (m,m)	5	α	10.0
		Cpp	0.00

Lo primero de todo, para el análisis del impacto, es obtener los parámetros de rigidez y masa equivalente. Estos parámetros se obtienen, como en el caso del apartado anterior, mediante las siguientes expresiones aplicadas a la geometría de la ménsula “B”:

$$K_1 = \frac{EA}{L_{ef,1}} = 420\,000 \text{ KN/m}$$

$$M_e = 0.405 \times \rho \times L_{ef,1} \times A = 159.4 \text{ Kg}$$

A partir de los datos de partida expuestos en la Tabla 33, se calculan los parámetros necesarios para la aplicación de la formulación según lo expuesto en los apartados 4.2.3.3 y 4.2.7.4 de resolución del impacto. Los valores de los parámetros resultantes se resumen en la Tabla 34.



Tabla 34- Parámetros resultantes para ménsula B Caso $\alpha=10$ $V_p=5$ m/s.

Unidades	Modo 1	
-	$L/L_{ef,1}$	1
m/s	$V_{p,1}$	5.00
Kg	$M_{e,1}$	159.36
-	α_1	9.98
-	$C_{m,1}$	0.91
m/s	$V_{i,1}$	4.54
kN/m	K_1	420000.0
-	$C_{K,1}(M_p)$	1.00
kN/m	$K_{eq,1}$	420000.00
rad/s	$W_{e,1}$	1623.46
-	$X(p)_1$	1.00
Kg	$M_{p,eq1}$	1590.00
rad/s	$W_{ep,1}$	489.99
Nm	E_1	18064.5
%	E_1 (%)	90.9%
Nm	$E_{A,1}$	18064.5
%	$E_{A,1}$ (%)	91%
Nm	$E_{D,3}$	1810.5
%	$E_{D,3}$ (%)	9%

Como se puede comprobar en la Tabla 34, la energía analizada considerando un modo de vibración resulta el 91%, quedando un 9% de energía sin considerar.

A partir de los datos anteriores, se aplica la formulación general de desplazamiento (328):

$$d_{e,1}(t) = \frac{5 \times 0.91 \times \text{sen}(489.99 t)}{489.999}$$

En la Figura 224 se comparan los resultados del desplazamiento estructural en extremo libre la ménsula, considerando un único modo de vibración $d_{e,1}(t)$, con los ofrecidos por el modelo desarrollado en Midas NFX.

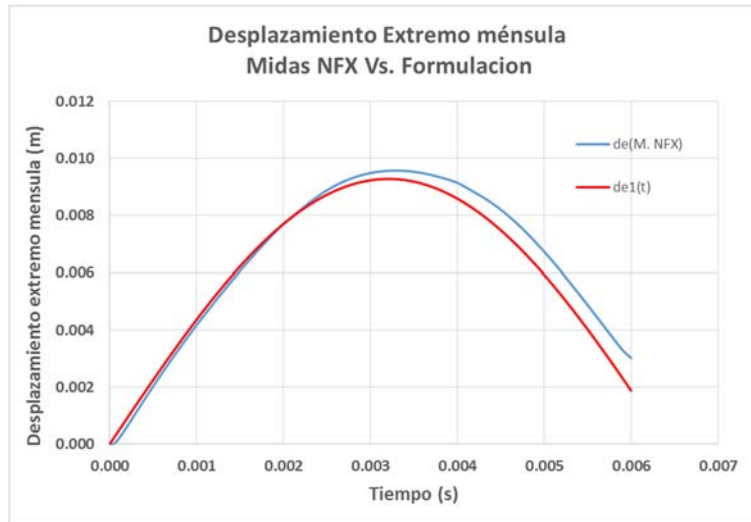


Figura 224- Comparativa de desplazamientos en el extremo de la ménsula entre Midas NFX y la formulación desarrollada. Caso $\alpha=10$ $V_p=5$ m/s.

En la gráfica de la Figura 224 se observa que existe **una coincidencia muy alta** entre las curvas. Tanto en el máximo desplazamiento como en el instante en que se produce.

4.2.12.3 Ménsula "B": masa del proyectil doble de la masa equivalente del modo 1 de la estructura ($\alpha=2$) y velocidad del proyectil previa al impacto ($V_{p,o}$) de 5.0 m/s. No consideración del peso propio del proyectil en el impacto.

Para este caso de impacto, se mantienen los datos del impacto del caso anterior, pero se reduce la masa del proyectil para conseguir el valor de $\alpha=2$. Los datos de partida para el estudio del impacto en la ménsula "B" en este caso se muestran en la Tabla 35:

Tabla 35- Impacto en extremo de ménsula B. Caso $\alpha=2$ y $V_p=5$ m/s. Datos de partida.

Datos menula		Datos proyectil	
Longitud MENSULA (m)	5.00	Mp(kg)	318.7
b (m)	0.10	Vpo (m/s)	5.00
h (m)	0.10	Eo (N m)	3983.9
A (m ²)	1.00E-02	C.M. (N s)	1593.6
E (KN / m)	2.10E+08	KPROYECTIL	∞
ρ (kg /m ³)	7.85E+03	g(m/s ²)	0
Punto de impacto "p" (m,m)	5	α	2.0
		C _{pp}	0.00



A partir de los datos de partida expuestos en la Tabla 35, se calculan los parámetros necesarios para la aplicación de la formulación según lo expuesto en los apartados 4.2.3.3 y 4.2.7.4 de resolución del impacto. Los valores de los parámetros resultantes se resumen en la Tabla 36.

Tabla 36- Parámetros resultantes para ménsula B Caso $\alpha=2$ y $V_p=5$ m/s.

Unidades	Modo 1	
	-	$L/L_{ef,1}$
m/s	$V_{p,1}$	5.00
Kg	$M_{e,1}$	159.36
-	α_1	2.00
-	$C_{m,1}$	0.67
m/s	$V_{i,1}$	3.33
kN/m	K_1	420000.0
-	$C_{k,1}(M_p)$	1.00
kN/m	$K_{eq,1}$	420000.00
rad/s	$W_{e,1}$	1623.46
-	$X(p)_1$	1.00
Kg	$M_{p,eq1}$	318.71
rad/s	$W_{ep,1}$	937.31
Nm	E_1	2655.9
%	E_1 (%)	66.7%
Nm	$E_{A,1}$	2655.9
%	$E_{A,1}$ (%)	67%
Nm	$E_{D,3}$	1328.0
%	$E_{D,3}$ (%)	33%

Como se puede comprobar en la Tabla 36, la energía analizada considerando un modo de vibración resulta el 67%, quedando un 33% de energía sin considerar.

A partir de los datos anteriores, se aplica la formulación general de desplazamiento (328):

$$d_{e,1}(t) = \frac{5 \times 0.67 \times \text{sen}(937.3 t)}{937.3}$$

En la Figura 225 se comparan los resultados del desplazamiento estructural en extremo libre la ménsula, considerando un único modo de vibración $d_{e,1}(t)$, con los ofrecidos por el modelo desarrollado en Midas NFX.

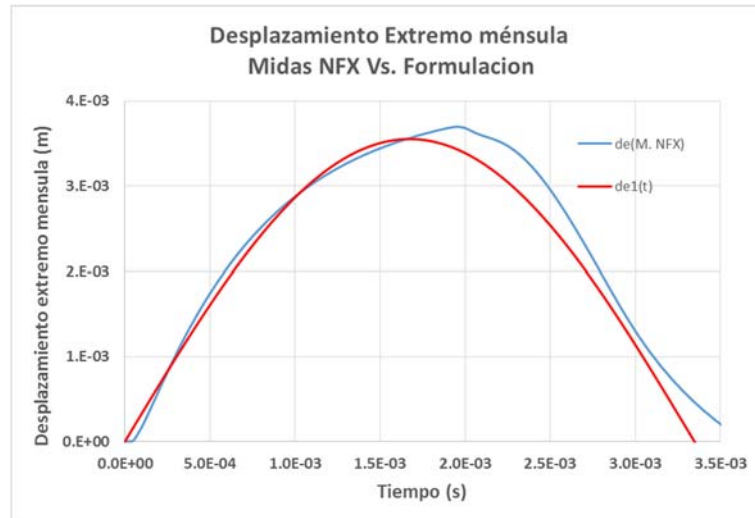


Figura 225- Comparativa de desplazamientos en el extremo de la ménsula entre Midas NFX y la formulación desarrollada. Caso $\alpha=2$ $V_p=5$ m/s.

En la gráfica de la Figura 225 se observa que existe **una coincidencia muy alta** entre las curvas.

Al tratarse de un caso de $\alpha=2$, dado que la energía que absorbe el modo 1 es más pequeña que en el caso anterior, las diferencias entre el Midas NFX y la formulación desarrollada han aumentado ligeramente, pero siguen siendo una muy buena aproximación.

4.2.12.4 Ménsula "B": masa del proyectil igual a la masa equivalente del modo 1 de la estructura ($\alpha=1$) y velocidad del proyectil previa al impacto ($V_{p,o}$) de 5.0 m/s. No consideración del peso propio del proyectil en el impacto.

Los datos de partida para el estudio del impacto en la ménsula "B" en este caso se muestran en la Tabla 37:

Tabla 37- Impacto en extremo de ménsula B. Caso $\alpha=1$ y $V_p=5$ m/s. Datos de partida.

Datos menula		Datos proyectil	
Longitud MENSULA (m)	5.00	Mp(kg)	159.4
b (m)	0.10	Vpo (m/s)	5.00
h (m)	0.10	Eo (N m)	1991.9
A (m ²)	1.00E-02	C.M. (N s)	796.8
E (KN / m)	2.10E+08	K _{PROYECTIL}	∞
ρ (kg /m ³)	7.85E+03	g(m/s ²)	0
Punto de impacto "p" (m)	5	α	1.0
		C _{pp}	0.00



A partir de los datos de partida expuestos en la Tabla 37, se calculan los parámetros necesarios para la aplicación de la formulación según lo expuesto en los apartados 4.2.3.3 y 4.2.7.4 de resolución del impacto. Los valores de los parámetros resultantes se resumen en la Tabla 38.

Tabla 38- Parámetros resultantes para ménsula B Caso $\alpha=1$ y $V_p=5$ m/s.

Unidades	Modo 1	
	-	$L/L_{ef,1}$
m/s	$V_{p,1}$	5.00
Kg	$M_{e,1}$	159.36
-	α_1	1.00
-	$C_{m,1}$	0.50
m/s	$V_{i,1}$	2.50
kN/m	K_1	420000.0
-	$C_{K,1}(M_p)$	1.00
kN/m	$K_{eq,1}$	420000.00
rad/s	$W_{e,1}$	1623.46
-	$X(p)_1$	1.00
Kg	$M_{p,eq1}$	159.36
rad/s	$W_{ep,1}$	1147.96
Nm	E_1	996.0
%	E_1 (%)	50.0%
Nm	$E_{A,1}$	996.0
%	$E_{A,1}$ (%)	50%
Nm	$E_{D,3}$	996.0
%	$E_{D,3}$ (%)	50%

Como se puede comprobar en la Tabla 38, la energía analizada considerando un modo de vibración resulta el 50%, quedando otro 50% de energía sin considerar.

A partir de los datos anteriores, se aplica la formulación general de desplazamiento (328):

$$d_{e,1}(t) = \frac{5 \times 0.50 \times \text{sen}(1148 t)}{1148}$$

En la Figura 226 se comparan los resultados del desplazamiento estructural en extremo libre la ménsula, considerando un único modo de vibración $d_{e,1}(t)$, con los ofrecidos por el modelo desarrollado en Midas NFX.

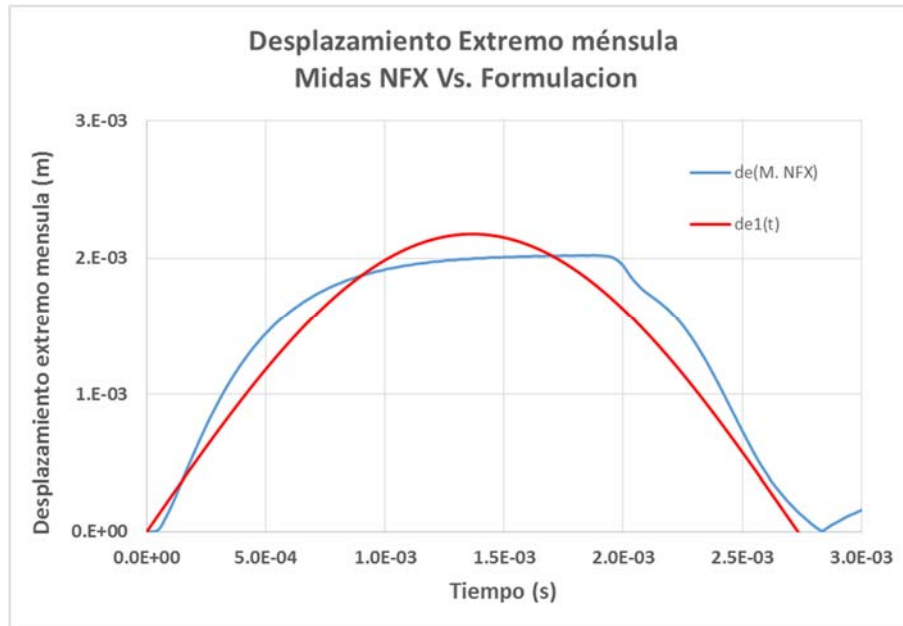


Figura 226- Comparativa de desplazamientos en el extremo de la ménsula entre Midas NFX y la formulación desarrollada. Caso $\alpha=1$ $V_p=5$ m/s.

En la gráfica de la Figura 226 se observa que existe una coincidencia muy buena entre las curvas. Al tratarse de un caso de $\alpha=1$, dado que la energía que absorbe el modo 1 es únicamente el 50%, las diferencias entre el Midas NFX y la formulación desarrollada han aumentado ligeramente respecto de casos anteriores.

4.2.12.5 Ménsula "B": masa del proyectil mitad de la masa equivalente del modo 1 de la estructura ($\alpha=0.5$) y velocidad del proyectil previa al impacto ($V_{p,o}$) de 5.0 m/s. No consideración del peso propio del proyectil en el impacto.

En este último caso de la ménsula B, se analiza un impacto de masa relativamente pequeña, concretamente es la mitad de la masa equivalente de la ménsula. Los datos de partida para el estudio del impacto en la ménsula en este caso concreto se muestran en la Tabla 39:

Tabla 39- Impacto en extremo de ménsula B. Caso $\alpha=0.5$ y $V_p=5$ m/s. Datos de partida.



Datos menula		Datos proyectil	
Longitud MENSULA (m)	5.00	Mp(kg)	79.7
b (m)	0.10	Vpo (m/s)	5.00
h (m)	0.10	Eo (N m)	996.0
A (m ²)	1.00E-02	C.M. (N s)	398.4
E (KN / m)	2.10E+08	KPROYECTIL	∞
ρ (kg /m ³)	7.85E+03	g(m/s ²)	0
Punto de impacto "p" (m)	5	α	0.5
		C _{pp}	0.00

A partir de los datos de partida expuestos en la Tabla 39, se calculan los parámetros necesarios para la aplicación de la formulación según lo expuesto en los apartados 4.2.3.3 y 4.2.7.4 de resolución del impacto. Los valores de los parámetros resultantes se resumen en la Tabla 40.

Tabla 40- Parámetros resultantes para ménsula B Caso α=0.5 y Vp=5 m/s.

Unidades	Modo 1	
-	L/L _{ef,1}	1
m/s	V _{p,1}	5.00
Kg	M _{e,1}	159.36
-	α ₁	0.50
-	C _{m,1}	0.33
m/s	V _{i,1}	1.67
kN/m	K ₁	420000.0
-	C _{K,1} (M _p)	1.00
kN/m	K _{eq,1}	420000.00
rad/s	W _{e,1}	1623.46
-	X(p) ₁	1.00
Kg	M _{p,eq1}	79.68
rad/s	W _{ep,1}	1325.55
Nm	E ₁	332.0
%	E ₁ (%)	33.3%
Nm	E _{A,1}	332.0
%	E _{A,1} (%)	33%
Nm	E _{D,3}	664.0
%	E _{D,3} (%)	67%

Como se puede comprobar en la Tabla 40, la energía analizada considerando un modo de vibración resulta el 33%, quedando un 67% de energía sin considerar.

A partir de los datos anteriores, se aplica la formulación general de desplazamiento (328):

$$d_{e,1}(t) = \frac{5 \times 0.33 \times \text{sen}(1325 t)}{1325}$$

En la Figura 227 se comparan los resultados del desplazamiento estructural en extremo libre la ménsula, considerando un único modo de vibración $d_{e,1}(t)$, con los ofrecidos por el modelo desarrollado en Midas NFX.

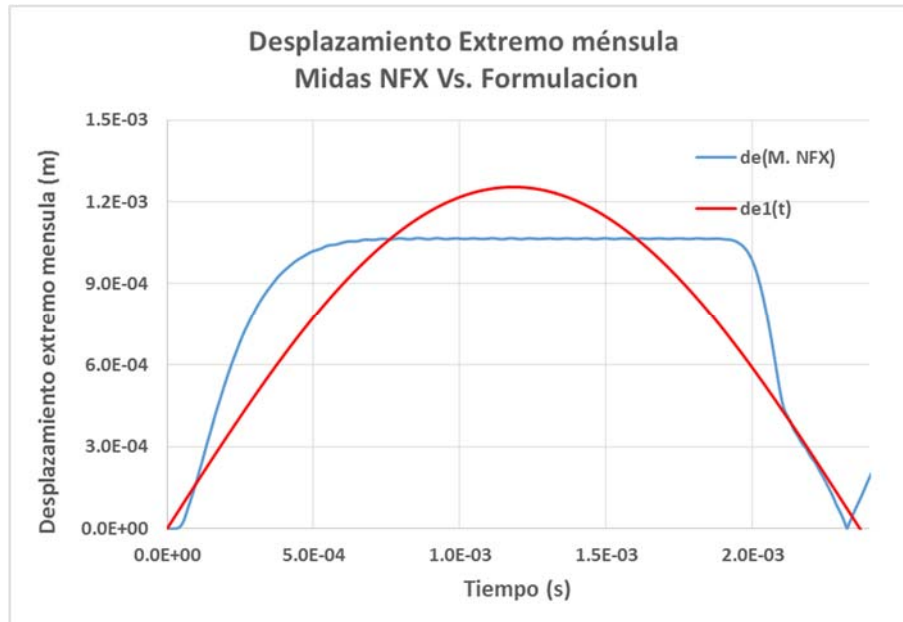


Figura 227- Comparativa de desplazamientos en el extremo de la ménsula entre Midas NFX y la formulación desarrollada. Caso $\alpha=0.5$ $V_p=5$ m/s.

En la gráfica de la Figura 227 se observa que existe una coincidencia relativamente buena entre las curvas. Al tratarse de un caso de $\alpha=0.5$, dado que la energía que absorbe el modo 1 es únicamente el 33%, las diferencias entre el Midas NFX y la formulación desarrollada han continuado aumentando de respecto de casos anteriores, pero mantiene una buena aproximación.

Los resultados procedentes del Midas NFX mostrados en la Figura 227, presentan una deformación de la ménsula un tanto extraña, con una especie de forma de meseta. Esta forma, es el resultado de la teoría seleccionada para implementar en la indentación local del programa de elementos finitos, pudiendo no corresponderse con la realidad.

4.2.12.6 Ménsula "B": Análisis conjunto

Para ver los casos expuestos en su conjunto, y evaluar más fácilmente la precisión de los resultados, se muestran en la Figura 228 los 4 casos analizados en el apartado 4.2.12 para la ménsula "B" en función de la masa del proyectil y su correspondiente valor del parámetro α .

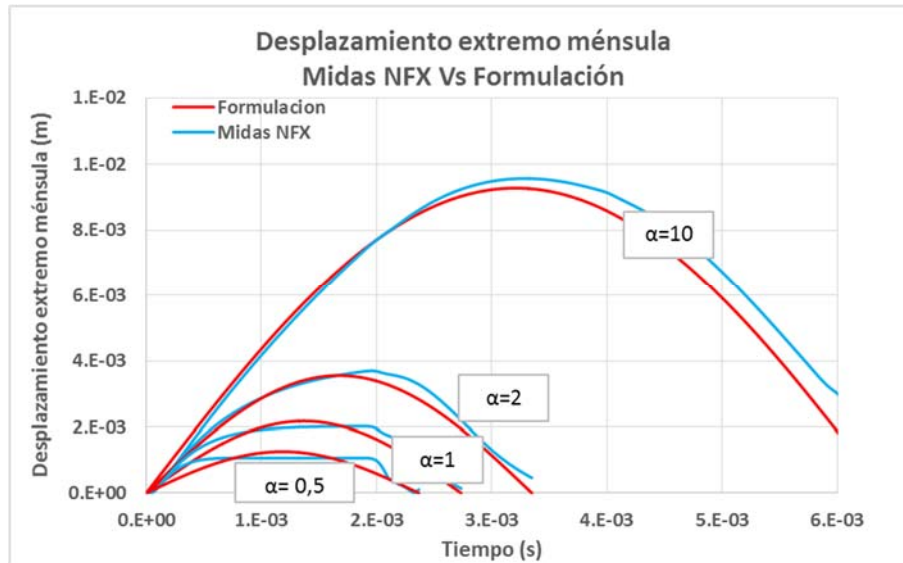


Figura 228- Comparativa de desplazamientos en el extremo de la ménsula entre Midas NFX y la formulación desarrollada. Casos $\alpha=0.5$ $\alpha=1$ $\alpha=2$ y $\alpha=10$ con $V_p=5m/s$.

Como se puede apreciar en la Figura 228, los resultados obtenidos por Midas NFX (línea azul) y la formulación desarrollada (línea roja) **son realmente muy próximos**.

A medida que disminuye el coeficiente α las fluctuaciones de otros modos de vibración, y por tanto la diferencia entre curvas, van ganando ligera importancia.

No obstante, y a pesar de analizar considerando únicamente el modo de vibración fundamental un caso de $\alpha=0.5$ donde la mayor parte de la energía no ha sido tomada en cuenta en los cálculos, los resultados ofrecidos por la formulación desarrollada son muy buenos.

Este hecho, supone la confirmación de que, **para analizar el desplazamiento en un impacto, considerar únicamente el primer modo de vibración de la estructura en cuestión es una buena aproximación**. A pesar de que se pueda tratar de un caso en el cual el primer modo de vibración absorba un porcentaje de energía pequeño, la contribución al desplazamiento del primer modo será siempre la principal.

Como se verá en el siguiente apartado, **este hecho no se repite en el estudio de la fuerza de contacto**, donde analizar un número tal de modos de vibración que la energía analizada sea representativa del impacto, es una condición fundamental.

A la vista de los resultados de absorción de energía por axil en un impacto mostrados a lo largo del apartado 4.2.12, y teniendo en cuenta todo lo analizado previamente, se puede concluir que **la formulación desarrollada se adapta perfectamente al cálculo de impactos independientemente si el mecanismo de energía es axil o flexión**.



4.2.13 Aplicación para el cálculo de la fuerza de contacto

Hasta este apartado, se ha validado la formulación desarrollada comparando sus resultados respecto del desplazamiento del punto de impacto en los distintos casos, con los resultados ofrecidos por el programa de elementos finitos Midas NFX.

Sin embargo, el desarrollo teórico desarrollado a lo largo del presente documento también predice la fuerza de contacto que se produce en un impacto. Esta es la variable que se pretende estudiar en este apartado y, en los sucesivos subapartados, se procederá a la comparación de los valores obtenidos para la fuerza de contacto entre la formulación desarrollada y el Midas NFX.

Se ha de tener en cuenta que predecir la fuerza de contacto en un impacto es un desafío que requiere de más precisión que el cálculo de desplazamientos. Como se ha demostrado, por ejemplo, en el apartado 4.2.12.5, cuando impacta una masa pequeña en una estructura, aun analizando un número de modos tal que no se tenga en cuenta la mayor parte de la energía del impacto, los resultados en desplazamiento son relativamente buenos. Este hecho es debido a que la componente del desplazamiento que proporciona el primer modo de vibración es siempre mayoritaria, aunque este modo absorba un porcentaje de energía pequeño respecto del total. Esta situación no se reproduce en lo que a la fuerza de contacto en un impacto se refiere. Para la obtención de la fuerza de contacto, como se demostrará posteriormente, es necesario contar con un número de modos que tenga en cuenta la mayor parte de la energía de impacto. En caso contrario, no se obtendrá un valor representativo del valor de la fuerza de contacto.

Como se muestra en la resolución teórica del apartado 4.2.2, obtener la fuerza de contacto supone validar la derivada cuarta del problema. Es decir, la precisión en la solución encontrada ha de ser muy alta para que la derivada cuarta se ajuste también a los resultados reales.

Por todo lo expuesto, se puede considerar la obtención de la fuerza de contacto como una comprobación mucho más compleja y, por tanto, precisa de la validez del desarrollo teórico expuesto en la presente tesis.

El primer problema a la hora de intentar comparar el valor de la fuerza de contacto entre la formulación y el programa Midas NFX, es cómo medirla dicha fuerza en el programa ya que ni siquiera el programa de elementos finitos tiene esta opción implementada. Este problema se debe a que, al ser una fuerza exterior a la estructura y al proyectil, no puede ser medida



directamente. Lo que se medirá, por tanto, será las consecuencias de su aplicación, es decir, las tensiones producidas.

Para explicar cómo medir la fuerza de contacto, se vuelve a analizar el muelle expuesto en el apartado 4.2.2 y mostrado en la Figura 229.

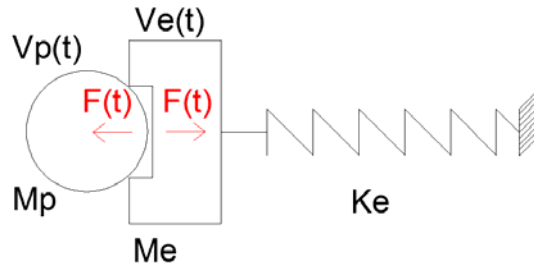


Figura 229-Análisis de fuerza de contacto en modelo de muelle y masa.

Según la ecuación (332), la expresión de la fuerza de contacto producida en el impacto sin considerar el peso propio es:

$$F(t) = M_p w_{ep} V_I \text{sen}(w_{ep} t)$$

$F(t)$, como se ha comentado, no es posible medirla directamente, pero lo que sí se puede obtener de forma directa es el axil de compresión $N(t)$ producido en el muelle derivado de la acción de $F(t)$. Dicho axil, será el producto de la rigidez por el desplazamiento del muelle:

$$N(t) = K_e d_e(t) \tag{390}$$

El valor del desplazamiento $d_e(t)$ se obtiene de la ecuación (328). La relación entre la fuerza de contacto y el axil de compresión resulta, por tanto:

$$\frac{F(t)}{N(t)} = \frac{M_p w_{ep} V_I \text{sen}(w_{ep} t)}{K_e \frac{V_I}{w_{ep}} \text{sen}(w_{ep} t)} = \frac{M_p}{K_e} w_{ep}^2 = \frac{M_p}{K_e} \frac{K_e}{M_p + M_e} \tag{391}$$

Finalmente:

$$\frac{F(t)}{N(t)} = \frac{M_p}{M_p + M_e} = C_m \tag{392}$$

A partir de la ecuación (392) se deduce que en el caso de $M_p \gg M_e$, si se obtiene el valor de axil de compresión del muelle, este deberá coincidir sensiblemente con la fuerza de contacto establecida por la formulación. Pero, ¿y en caso de una masa de proyectil pequeña? El análisis expuesto en las ecuaciones (391) y (392) se puede hacer sea cual sea el modo de vibración



considerado. Por tanto, a la hora de realizar un análisis sobre la fuerza de contacto en un impacto, se ha de tener en cuenta que el número de modos de vibración analizado sea tal, que en los modos más altos se obtenga un valor de $C_{m,n}$ próximo a 1.

Para el estudio de la fuerza de contacto se analizan los distintos casos de impactos sobre la ménsula "B" descrita en el apartado 4.2.12. En concreto, se estudia la fuerza de contacto en el extremo libre de la ménsula para los distintos impactos de masas sufridos, como muestra la Figura 230.

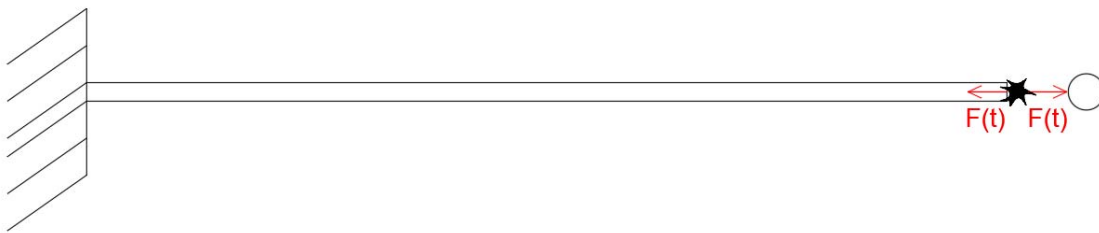


Figura 230-Estudio de fuerza de contacto en extremo libre de la ménsula.

Para calcular el axil de compresión $N(t)$ sobre la ménsula con el programa de elementos finitos Midas NFX, se analiza las tensiones normales en la zona de contacto (color verde) entre la estructura y el proyectil como muestra la Figura 231.

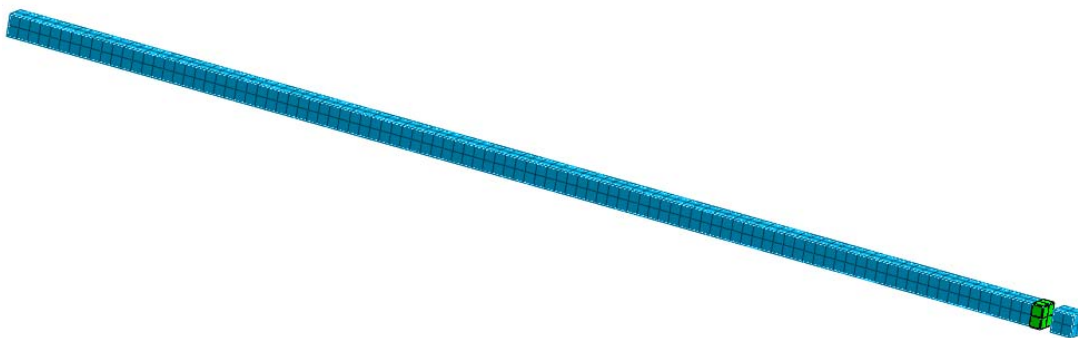


Figura 231-Zona de análisis de las tensiones normales para la obtención de la fuerza de contacto.

Se obtendrá el axil $N(t)$ de compresión multiplicando las tensiones normales en la zona de contacto por el área del elemento correspondiente. Este valor de $N(t)$ será el que se compare con la fuerza de contacto $F(t)$ que predice la formulación desarrollada, calculada esta por las razones ya expuestas, por un número elevado de modos de vibración.

En los apartados del 4.2.13.1 al 4.2.13.4 se comprobará el término cinético de la fuerza de contacto expuesto por la formulación desarrollada. Posteriormente, en el apartado 4.2.13.5, al considerar un caso de impacto con efecto gravitatorio, se comprobará el término de peso propio de la fuerza de contacto expuesto por la formulación desarrollada.



Para la obtención de la rigidez y la masa equivalente del modo n de la ménsula objeto de estudio, se utilizará la expresión obtenida en los apartados 4.1.1.6 y 4.1.2.5 respectivamente, generalizada para aproximar el modo de vibración n según la longitud efectiva para cada modo $L_{ef,n}$. Estas expresiones son las siguientes:

$$K_n = \frac{EA}{L_{ef,n}}$$

$$M_{e,n} = 0.405 \times \rho \times L_{ef,n} \times A$$

Siendo:

$$L_{ef,n} = \frac{L_{mensula}}{n} \quad \text{con } n = 1,2,3 \dots$$

4.2.13.1 Caso masa del proyectil diez veces la masa equivalente del modo 1 de la estructura ($\alpha=10$) y velocidad del proyectil previa al impacto ($V_{p,0}$) de 5.0 m/s. No consideración del peso propio del proyectil en el impacto.

Los datos de partida para el impacto de este apartado son los mismos que los datos de partida expuestos en el apartado 4.2.12.2 y se muestran en la Tabla 41:

Tabla 41- Estudio de Fuerza de contacto. Caso $\alpha=10$ y $V_p=5$ m/s. Datos de partida.

Datos menula		Datos proyectil	
Longitud MENSULA (m)	5.00	Mp(kg)	1590.0
b (m)	0.10	Vpo (m/s)	5.00
h (m)	0.10	Eo (N m)	19875.0
A (m ²)	1.00E-02	C.M. (N s)	7950.0
E (KN / m)	2.10E+08	KPROYECTIL	∞
ρ (kg /m ³)	7.85E+03	g(m/s ²)	0
Punto de impacto "p" (m,m)	5	α	10.0
		Cpp	0.00

Como se puede apreciar en la Tabla 41, no se considera el efecto del peso propio en los cálculos.

Se analizará el presente caso de impacto en tres fases para resaltar la importancia de cada modo. Es decir, primero se analizará el caso teniendo en cuenta únicamente la contribución del modo 1, en la segunda fase se consideran dos modos de vibración en los cálculos y, por último, se considerarán tres modos de vibración.



A partir de los datos de partida expuestos en la Tabla 41, se calculan los parámetros necesarios para la aplicación de la formulación según lo expuesto en los apartados 4.2.3.3 y 4.2.7.4 de resolución del impacto. Los valores de los parámetros resultantes se resumen en la Tabla 42.

Tabla 42- Estudio de Fuerza de contacto. Caso $\alpha=10$ y $V_p=5$ m/s. Parámetros resultantes.

Unidades	Modo	1	Modo	2	Modo	3
-	$L/L_{ef,1}$	1	$L/L_{ef,2}$	2	$L/L_{ef,3}$	3
m/s	$V_{p,1}$	5.00	$V_{p,2}$	1.51	$V_{p,3}$	0.33
Kg	$M_{e,1}$	159.36	$M_{e,2}$	79.68	$M_{e,3}$	53.12
-	α_1	10.0	α_2	20.0	α_3	29.9
-	$C_{m,1}$	0.91	$C_{m,2}$	0.95	$C_{m,3}$	0.97
m/s	$V_{i,1}$	4.54	$V_{i,2}$	1.44	$V_{i,3}$	0.32
kN/m	K_1	420000.0	K_2	840000.0	K_3	1260000.0
-	$C_{K,1}(M_p)$	1.00	$C_{K,2}(M_p)$	1.00	$C_{K,3}(M_p)$	1.00
kN/m	$K_{eq,1}$	420000.00	$K_{eq,2}$	840000.00	$K_{eq,3}$	1260000.00
rad/s	$W_{e,1}$	1623.46	$W_{e,2}$	3246.92	$W_{e,3}$	4870.38
-	$X(p)_1$	1.00	$X(p)_2$	1.0	$X(p)_3$	1.000
Kg	$M_{p,eq1}$	1590.00	$M_{p,eq2}$	1590.00	$M_{p,eq3}$	1590.00
rad/s	$W_{ep,1}$	489.99	$W_{ep,2}$	709.29	$W_{ep,3}$	875.69
Nm	E_1	18064.5	E_2	1724.1	E_3	83.6
%	E_1 (%)	90.9%	E_2 (%)	8.7%	E_3 (%)	0.4%
Nm	$E_{A,1}$	18064.5	$E_{A,2}$	19788.6	$E_{A,3}$	19872.2
%	$E_{A,1}$ (%)	91%	$E_{A,2}$ (%)	100%	$E_{A,3}$ (%)	100%
Nm	$E_{D,2}$	1810.5	$E_{D,3}$	86.4	$E_{D,4}$	2.8
%	$E_{D,2}$ (%)	9%	$E_{D,3}$ (%)	0%	$E_{D,4}$ (%)	0%

Se puede observar en la Tabla 42 que el primer modo representa el 91% de la energía inicial del impacto, el segundo modo el 8,7% y el tercer modo apenas el 0,4%.

A continuación, se calcula la fuerza de contacto según la formulación desarrollada considerando 1 modo de vibración, considerando los dos primeros modos de vibración y considerando 3 modos de vibración.

Análisis de la fuerza de contacto considerando el modo 1 de vibración:

A partir de los datos expuestos en la Tabla 42, se aplica la formulación para la fuerza de contacto expresada en la ecuación (386), considerando un único modo de vibración:

$$F(t)(KN) = 5 \times 0.91 \times 1590 \times 490 \text{ sen}(490 t) \times 0.001$$

En la Figura 232 se comparan los resultados de la fuerza de contacto $F(t)$ en el extremo libre de la ménsula, con los ofrecidos por el modelo desarrollado en Midas NFX.

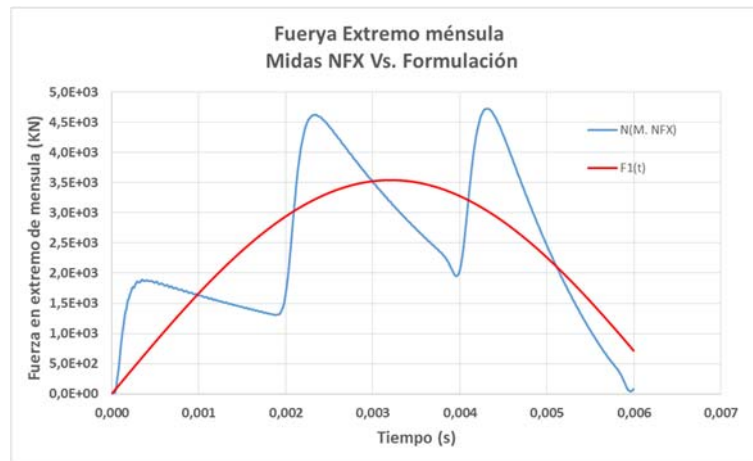


Figura 232- Comparativa de fuerzas de contacto en el extremo de la ménsula entre Midas NFX y la formulación desarrollada considerando un modo. Caso $\alpha=10$ $Vp=5$ m/s.

En la gráfica de la Figura 232 se presenta el axil de compresión calculado por Midas NFX (línea azul), a partir de las tensiones normales de la ménsula en el extremo, y la fuerza de contacto considerada por la formulación (línea roja).

El valor de la fuerza máxima según Midas NFX resulta 4500 KN aproximadamente mientras que la formulación obtiene 3500 KN aproximadamente. El resultado es razonablemente bueno dado que el error es menor del 30% en lo que al valor máximo se refiere y la distribución temporal es similar. No obstante, la fuerza de contacto según Midas NFX es consecuencia de más de una onda, por lo que **considerando un único modo de vibración este comportamiento no se puede reproducir.**

Análisis de la fuerza de contacto considerando los modos 1 y 2 de vibración:

Se analiza ahora la fuerza incluyendo el segundo modo de vibración, es decir, incorporando ese 8.7% de energía que absorbe el segundo modo.

A partir de los datos expuestos en la Tabla 42, se aplica la formulación para la fuerza de contacto expresada en la ecuación (386), considerando dos modos de vibración:

$$F(t)(KN) = (5 \times 0.91 \times 1590 \times 490 \text{ sen}(490 t) + 1.51 \times 0.95 \times 1590 \times 709.3 \text{ sen}(3247 t)) \times 0.001$$

En la Figura 233 se comparan los resultados de la fuerza de contacto $F(t)$ en el extremo libre de la ménsula, considerando dos modos de vibración, con los ofrecidos por el modelo desarrollado en Midas NFX.

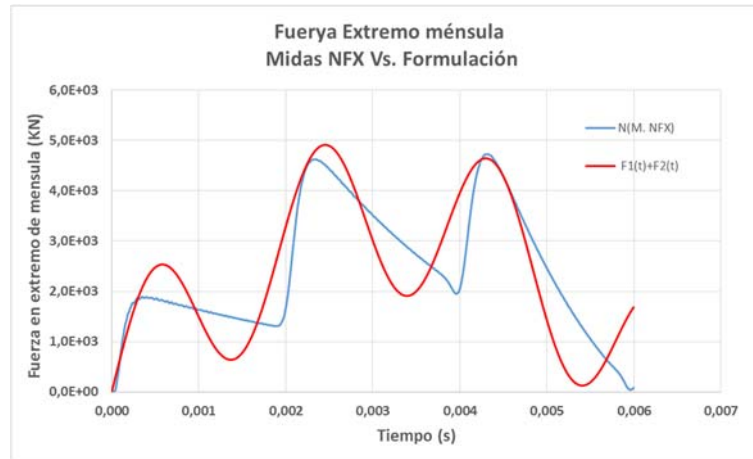


Figura 233- Comparativa de fuerzas de contacto en el extremo de la ménsula entre Midas NFX y la formulación desarrollada considerando dos modos. Caso $\alpha=10$ $V_p=5$ m/s.

Como se observa en la Figura 233, la incorporación del segundo modo de vibración reproduce los picos de fuerza calculados por el Midas NFX **de manera mucho más aproximada**. En ambos casos el valor de la fuerza máxima esta entre 4500 KN y 5000 KN con un comportamiento temporal muy similar.

Análisis de la fuerza de contacto considerando 3 modos de vibración:

Se analiza ahora la fuerza incluyendo el tercer modo de vibración, es decir, incorporando ese 0.4% de energía que absorbe el tercer modo.

A partir de los datos expuestos en la Tabla 42, se aplica la formulación para la fuerza de contacto expresada en la ecuación (386), considerando tres modos de vibración:

$$F(t)(KN) = (5 \times 0.91 \times 1590 \times 490 \text{ sen}(490 t) + 1.51 \times 0.95 \times 1590 \times 709.3 \text{ sen}(3247 t) + 0.33 \times 0.97 \times 1590 \times 876 \text{ sen}(4870 t)) \times 0.001$$

En la Figura 234 se comparan los resultados de la fuerza de contacto $F(t)$ en el extremo libre de la ménsula, considerando tres modos de vibración, con los ofrecidos por el modelo desarrollado en Midas NFX.

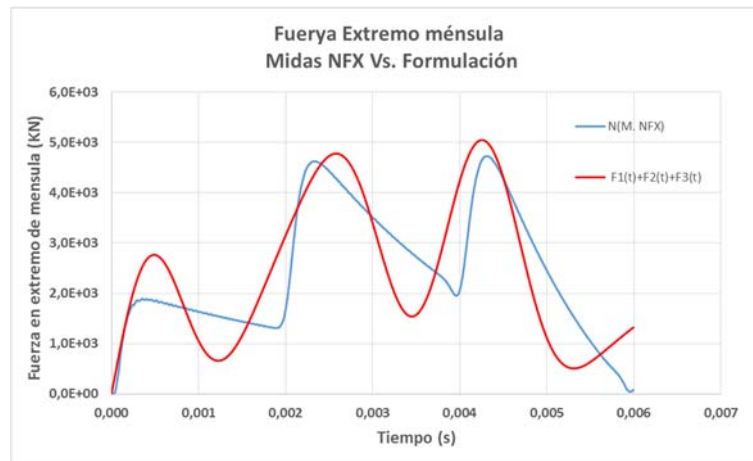


Figura 234- Comparativa de fuerzas de contacto en el extremo de la ménsula entre Midas NFX y la formulación desarrollada considerando 3 modos. Caso $\alpha=10$ $V_p=5$ m/s.

Como se puede apreciar comparado las Figura 233 y en la Figura 234, el 0.4% de energía que representa el tercer modo **no supone una gran modificación respecto al caso de sólo considerar el primer y el segundo modo.**

4.2.13.2 Caso masa del proyectil doble de la masa equivalente del modo 1 de la estructura ($\alpha=2$) y velocidad del proyectil previa al impacto ($V_{p,0}$) de 5.0 m/s. No consideración del peso propio del proyectil en el impacto.

Se analiza ahora el mismo caso del apartado anterior reduciendo la masa del proyectil hasta un $\alpha=2$ y mantiene el resto de los parámetros iguales. Los datos de partida para el impacto de este apartado son los mismos que los datos de partida expuestos en el apartado 4.2.10.3 y se muestran en la Tabla 43:



Tabla 43- Estudio de Fuerza de contacto. Caso $\alpha=2$ y $V_p=5$ m/s. Datos de partida.

Datos menula		Datos proyectil	
Longitud MENSULA(m)	5.00	Mp(kg)	318.7
b (m)	0.10	Vpo (m/s)	5.00
h (m)	0.10	Eo (N m)	3983.9
A (m ²)	1.00E-02	C.M. (N s)	1593.6
E (KN / m)	2.10E+08	KPROYECTIL	∞
ρ (kg /m ³)	7.85E+03	g(m/s ²)	0
Punto de impacto "p" (m,m)	5	α	2.0
		C _{pp}	0.00

A partir de los datos de partida expuestos en la Tabla 43, se calculan los parámetros necesarios para la aplicación de la formulación según lo expuesto en los apartados 4.2.3.3 y 4.2.7.4 de resolución del impacto. Los valores de los parámetros resultantes se resumen en la tabla 42.

Tabla 44- Estudio de Fuerza de contacto. Caso $\alpha=2$ y $V_p=5$ m/s. Parámetros resultantes.

Unidades	Modo	1	Modo	2	Modo	3
-	L/L _{ef,1}	1	L/L _{ef,2}	2	L/L _{ef,3}	3
m/s	V _{p,1}	5.00	V _{p,2}	2.89	V _{p,3}	1.29
Kg	M _{e,1}	159.36	M _{e,2}	79.68	M _{e,3}	53.12
-	α_1	2.0	α_2	4.0	α_3	6.0
-	C _{m,1}	0.67	C _{m,2}	0.80	C _{m,3}	0.86
m/s	V _{i,1}	3.33	V _{i,2}	2.31	V _{i,3}	1.11
kN/m	K ₁	420000.0	K ₂	840000.0	K ₃	1260000.0
-	C _{K,1} (M _p)	1.00	C _{K,2} (M _p)	1.00	C _{K,3} (M _p)	1.00
kN/m	K _{eq,1}	420000.00	K _{eq,2}	840000.00	K _{eq,3}	1260000.00
rad/s	W _{e,1}	1623.46	W _{e,2}	3246.92	W _{e,3}	4870.38
-	X(p) ₁	1.00	X(p) ₂	1.0	X(p) ₃	1.000
Kg	M _{p,eq1}	318.71	M _{p,eq2}	318.71	M _{p,eq3}	318.71
rad/s	W _{ep,1}	937.31	W _{ep,2}	1452.07	W _{ep,3}	1840.83
Nm	E ₁	2655.9	E ₂	1062.4	E ₃	227.7
%	E ₁ (%)	66.7%	E ₂ (%)	26.7%	E ₃ (%)	5.7%
Nm	E _{A,1}	2655.9	E _{A,2}	3718.3	E _{A,3}	3945.9
%	E _{A,1} (%)	67%	E _{A,2} (%)	93%	E _{A,3} (%)	99%
Nm	E _{D,2}	1328.0	E _{D,3}	265.6	E _{D,4}	37.9
%	E _{D,2} (%)	33%	E _{D,3} (%)	7%	E _{D,4} (%)	1%

Se puede observar en la Tabla 42 que el primer modo, en este caso, representa el 67% de la energía inicial del impacto, el segundo modo el 27% y el tercer modo apenas el 6 %.

A continuación, y de manera análoga a lo expuesto en el apartado anterior, se calcula la fuerza de contacto según la formulación desarrollada considerando un modo de vibración, considerando los dos primeros modos de vibración y considerando tres modos de vibración.

Análisis de la fuerza de contacto considerando el modo 1 de vibración:



A partir de los datos expuestos en la Tabla 44, se aplica la formulación para la fuerza de contacto expresada en la ecuación (386), considerando un único modo de vibración:

$$F(t)(KN) = 5 \times 0.67 \times 318.7 \times 937 \text{ sen}(937 t) \times 0.001$$

En la Figura 235 se comparan los resultados de la fuerza de contacto $F(t)$ en el extremo libre de la mensula, considerando un único modo de vibración, con los ofrecidos por el modelo desarrollado en Midas NFX.

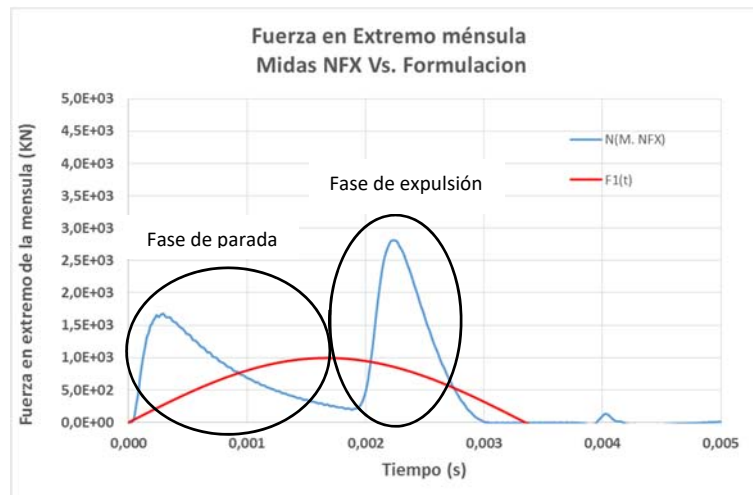


Figura 235- Comparativa de fuerzas de contacto en el extremo de la mensula entre Midas NFX y la formulación desarrollada considerando un modo. Caso $\alpha=2$ $V_p=5$ m/s.

En la gráfica de la Figura 235 se presenta el axil de compresión calculado por Midas NFX (línea azul) a partir de las tensiones normales de la mensula en el extremo y la fuerza de contacto considerada por la formulación (línea roja).

Antes de analizar los resultados entre ambas curvas, se ha de hacer una aclaración previa. Cuando la masa del proyectil es grande, como ocurría en el apartado anterior, el modo 1 es el encargado, en su mayor parte, de regular el impacto. Este hecho conlleva que, aproximadamente, durante la fase del movimiento en que el modo 1 incrementa su deformación, el proyectil se va deteniendo y, posteriormente, cuando el modo 1 se mueve en dirección contraria recuperando la posición inicial, el proyectil es repelido de la estructura. Cuando esto sucede, la fase de parada del proyectil y la fase de expulsión del proyectil se producen, respectivamente, al tiempo que se producen ambos movimientos del modo 1. **Cuando la masa del proyectil se hace más pequeña, como es el presente caso, aparecen las fases de parada y repulsión del proyectil separadas en fases distintas** como se puede apreciar en los resultados ofrecidos por Midas NFX en la Figura 235. A la vista de las curvas expuestas en



dicha gráfica, la fase de parada y la fase de expulsión del proyectil ya no se corresponden con las fases de incremento de desplazamiento y de recuperación de posición del modo 1.

No es objeto de la presente investigación la fase de repulsión del proyectil, por lo que, aunque se mostrara en los resultados, sólo la fase de parada del proyectil será útil desde el punto de vista de validar la formulación. No obstante, como se mostrará en los siguientes casos, no existe excesiva diferencia entre ambas fases. La fase de parada del proyectil supone una modificación de la energía interna de la estructura mayor que la fase de explosión del proyectil, como se deduce de que el proyectil siempre es repelido con una velocidad menor de la que llega. No obstante, la fase explosión resulta, a la vista de los resultados, más brusca. Esto es debido a que, en la fase de expulsión del proyectil, a diferencia de la fase de parada, las velocidades iniciales de proyectil y estructura son iguales, haciendo innecesaria el reparto de energías por varios modos hasta igualar velocidades. **Toda la energía de expulsión, aunque sea menor que la energía inicial, es liberada mayoritariamente por un solo modo haciendo más grande el pico de fuerza, aunque este distribuida en un tiempo menor.**

En cuando a la comparación de los resultados ofrecidos en Midas NFX y la formulación para la fase de parada del proyectil en la Figura 235, el valor de la fuerza máxima según Midas NFX resulta de 1700 KN aproximadamente mientras que la formulación, considerando un modo de vibración, obtiene un máximo 1000 KN aproximadamente. El error cometido en el valor máximo de la fuerza es, por tanto, un 70%. Además, como se puede ver en la Figura 235 la distribución temporal es muy diferente.

Análisis de la fuerza de contacto considerando los modos 1 y 2 de vibración:

Se analiza ahora la fuerza incluyendo el segundo modo de vibración, es decir, incorporando ese 27% de energía que absorbe el segundo modo.

A partir de los datos expuestos en la Tabla 44, se aplica la formulación para la fuerza de contacto expresada en la ecuación (386) y cumpliendo con la condición expuesta (387), considerando dos modos de vibración:

$$F(t)(KN) = (5 \times 0.67 \times 318.7 \times 937 \text{ sen}(937 t) + 2.89 \times 0.80 \times 318.7 \times 1452.1 \text{ sen}(3247 t)) \times 0.001$$



En la Figura 236 se comparan los resultados de la fuerza de contacto $F(t)$ en el extremo libre de la ménsula, considerando dos modos de vibración, con los ofrecidos por el modelo desarrollado en Midas NFX.

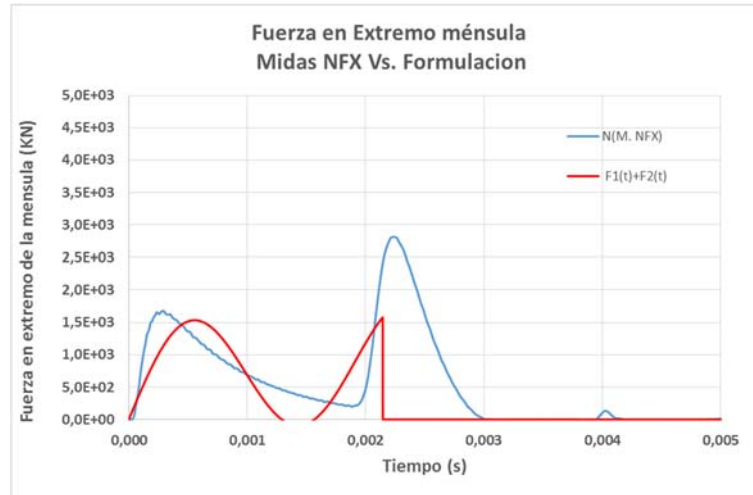


Figura 236- Comparativa de fuerzas de contacto en el extremo de la ménsula entre Midas NFX y la formulación desarrollada considerando dos modos. Caso $\alpha=2$ $V_p=5$ m/s.

En la Figura 236 se puede ver la comparación de las curvas según la formulación desarrollada y según Midas NFX. La formulación desarrollada (línea roja) presenta una caída de la fuerza de contacto brusca pasados los 2 milisegundos. Este instante representa cuando, según la formulación, se detiene el proyectil en aplicación de la ecuación (387). Comparando con los resultados de Midas NFX, el proyectil no se puede parar después de los 2 milisegundos, dado que la fase de expulsión del proyectil ya se está produciendo.

El valor de la fuerza máxima de contacto en la fase de parada del proyectil para el Midas NFX es del orden de 1700 KN y según la formulación 1500KN aproximadamente, **por lo que los resultados al incorporar el segundo modo de vibración han mejorado considerablemente, también en la distribución temporal.**

No obstante, se completa el análisis considerando el tercer modo de vibración que en este caso representa el 6% de la energía de impacto, para tener en cuenta el 99% de la energía inicial del impacto.



Análisis de la fuerza de contacto considerando 3 modos de vibración:

A partir de los datos expuestos en la Tabla 44, se aplica la formulación para la fuerza de contacto expresada en la ecuación (386) y cumpliendo con la condición expuesta (387), considerando tres modos de vibración:

$$F(t)(KN) = (5 \times 0.67 \times 318.7 \times 937 \sin(937 t) + 2.89 \times 0.80 \times 318.7 \times 1452 \sin(3247 t) + 1.29 \times 0.86 \times 318.7 \times 1841 \sin(4870 t)) \times 0.001$$

En la Figura 237 se comparan los resultados de la fuerza de contacto $F(t)$ en el extremo libre de la ménsula, considerando tres modos de vibración, con los ofrecidos por el modelo desarrollado en Midas NFX.

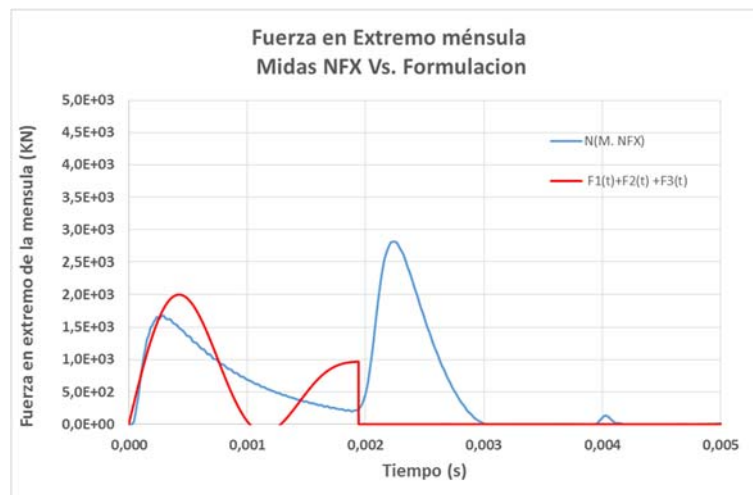


Figura 237- Comparativa de fuerzas de contacto en el extremo de la ménsula entre Midas NFX y la formulación desarrollada considerando tres modos. Caso $\alpha=2$ $V_p=5$ m/s.

A la vista de los resultados mostrados en la Figura 237, los picos de fuerza máxima coinciden aproximadamente en el tiempo y los valores son 1700 KN según Midas NFX y 2000 KN según la formulación, aproximadamente. Se ha de tener en cuenta que la formulación considera el proyectil infinitamente rígido, lo que supone una situación más desfavorable y puede explicar en parte esta diferencia.

En cuanto al instante de velocidad nula del proyectil, al considerar 3 modos de vibración sí produce antes de los 2 milisegundos, es decir, se produce antes de la fase de repulsión del proyectil que predice Midas NFX.

En conclusión, el pico máximo de fuerza está razonablemente bien ajustado en términos de máximo valor y distribución temporal, y el instante de parada del proyectil también.



4.2.13.3 Caso masa del proyectil igual a la masa equivalente del modo 1 de la estructura ($\alpha=1$) y velocidad del proyectil previa al impacto ($V_{p,0}$) de 5.0 m/s. No consideración del peso propio del proyectil en el impacto.

Se analiza ahora el mismo caso que los dos anteriores, pero reduciendo la masa del proyectil hasta un $\alpha=1$. Los datos de partida para el impacto de este apartado son los mismos que los datos de partida expuestos en el apartado 4.2.12.4 y se muestran en la Tabla 45:

Tabla 45- Estudio de Fuerza de contacto. Caso $\alpha=1$ y $V_p=5$ m/s. Datos de partida.

Datos menula		Datos proyectil	
Longitud MENSULA (m)	5.00	Mp(kg)	159.4
b (m)	0.10	Vpo (m/s)	5.00
h (m)	0.10	Eo (N m)	1991.9
A (m ²)	1.00E-02	C.M. (N s)	796.8
E (KN / m)	2.10E+08	KPROYECTIL	∞
ρ (kg /m ³)	7.85E+03	g(m/s ²)	0
Punto de impacto "p" (m,m)	5	α	1.0
		Cpp	0.00

A partir de los datos de partida expuestos en la Tabla 45, se calculan los parámetros necesarios para la aplicación de la formulación según lo expuesto en los apartados 4.2.3.3 y 4.2.7.4 de resolución del impacto. Los valores de los parámetros resultantes se resumen en la Tabla 46.

Tabla 46- Estudio de Fuerza de contacto. Caso $\alpha=2$ y $V_p=5$ m/s. Parámetros resultantes.

Unidades	Modo	1	Modo	2	Modo	3
-	L/L _{ef,1}	1	L/L _{ef,2}	2	L/L _{ef,3}	3
m/s	V _{p,1}	5.00	V _{p,2}	3.54	V _{p,3}	2.04
Kg	M _{e,1}	159.36	M _{e,2}	79.68	M _{e,3}	53.12
-	α_1	1.0	α_2	2.0	α_3	3.0
-	C _{m,1}	0.50	C _{m,2}	0.67	C _{m,3}	0.75
m/s	V _{i,1}	2.50	V _{i,2}	2.36	V _{i,3}	1.53
kN/m	K ₁	420000.0	K ₂	840000.0	K ₃	1260000.0
-	C _{K,1} (M _p)	1.00	C _{K,2} (M _p)	1.00	C _{K,3} (M _p)	1.00
kN/m	K _{eq,1}	420000.00	K _{eq,2}	840000.00	K _{eq,3}	1260000.00
rad/s	W _{e,1}	1623.46	W _{e,2}	3246.92	W _{e,3}	4870.38
-	X(p) ₁	1.00	X(p) ₂	1.0	X(p) ₃	1.000
Kg	M _{p,eq1}	159.36	M _{p,eq2}	159.36	M _{p,eq3}	159.36
rad/s	W _{ep,1}	1147.96	W _{ep,2}	1874.61	W _{ep,3}	2435.19
Nm	E ₁	996.0	E ₂	664.0	E ₃	249.0
%	E ₁ (%)	50.0%	E ₂ (%)	33.3%	E ₃ (%)	12.5%
Nm	E _{A,1}	996.0	E _{A,2}	1659.9	E _{A,3}	1908.9
%	E _{A,1} (%)	50%	E _{A,2} (%)	83%	E _{A,3} (%)	96%
Nm	E _{D,2}	996.0	E _{D,3}	332.0	E _{D,4}	83.0
%	E _{D,2} (%)	50%	E _{D,3} (%)	17%	E _{D,4} (%)	4%



Se puede observar en la Tabla 46 que el primer modo en este caso representa el 50% de la energía inicial del impacto, el segundo modo el 33% y el tercer modo el 13 %. Es decir, la energía analizada respecto de la inicial es el 96%.

A continuación, y de manera análoga a lo expuesto en el apartado anterior, se calcula la fuerza de contacto según la formulación desarrollada considerando un modo de vibración, y considerando tres modos de vibración.

Análisis de la fuerza de contacto considerando el modo 1 de vibración:

A partir de los datos expuestos en la Tabla 46, se aplica la formulación para la fuerza de contacto expresada en la ecuación (386), considerando un único modo de vibración:

$$F(t)(KN) = 5 \times 0.5 \times 159 \times 1148 \sin(1148 t) \times 0.001$$

En la Figura 238 se comparan los resultados de la fuerza de contacto $F(t)$ en el extremo libre de la ménsula, considerando un único modo de vibración, con los ofrecidos por el modelo desarrollado en Midas NFX.

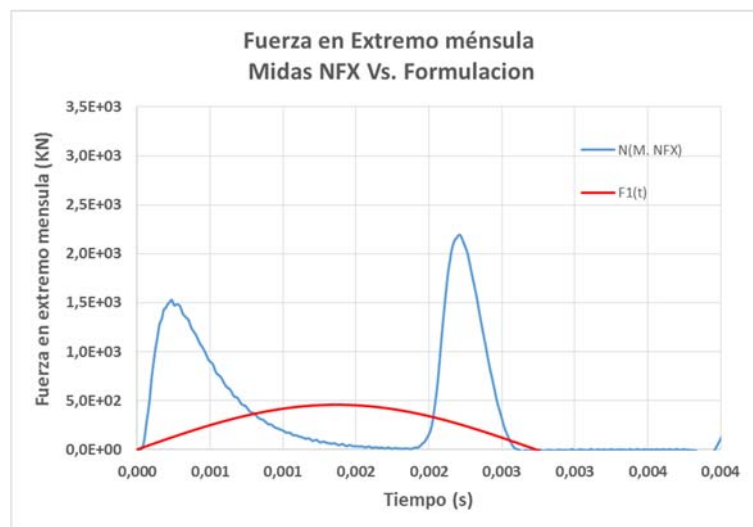


Figura 238- Comparativa de fuerzas de contacto en el extremo de la ménsula entre Midas NFX y la formulación desarrollada considerando 1 modo. Caso $\alpha=1$ $V_p=5$ m/s.

A la vista de los resultados de la Figura 238, la fuerza máxima producida en la fase de parada del proyectil según Midas NFX es de 1500 KN mientras que según la formulación es aproximadamente 500 KN. Esta diferencia supone un 300% de error, además, la distribución temporal de la fuerza es muy diferente entre ambos casos. **Como se puede observar a lo largo**



de los casos estudiados, cuanto más se reduce la masa del proyectil respecto de la masa equivalente del primer modo, menor es la contribución de este modo a la fuerza del impacto.

En concreto para el caso estudiado en el apartado 4.2.13.1 de $\alpha=10$, el error cometido al considerar únicamente el primer modo fue menor del 30%, mientras que para el caso que nos ocupa de $\alpha=1$, el error cometido es 10 veces mayor (300%).

Análisis de la fuerza de contacto considerando tres modos de vibración:

A partir de los datos expuestos en la Tabla 46, se aplica la formulación para la fuerza de contacto expresada en la ecuación (386) y cumpliendo con la condición expuesta (387), considerando tres modos de vibración:

$$F(t)(KN) = (5 \times 0.5 \times 159 \times 1148 \sin(1148 t) + 3.54 \times 0.67 \times 159 \times 1875 \sin(3247 t) + 2.04 \times 0.75 \times 159 \times 2435 \sin(4870 t)) \times 0.001$$

En la Figura 239 se comparan los resultados de la fuerza de contacto $F(t)$ en el extremo libre de la ménsula, considerando tres modos de vibración, con los ofrecidos por el modelo desarrollado en Midas NFX.

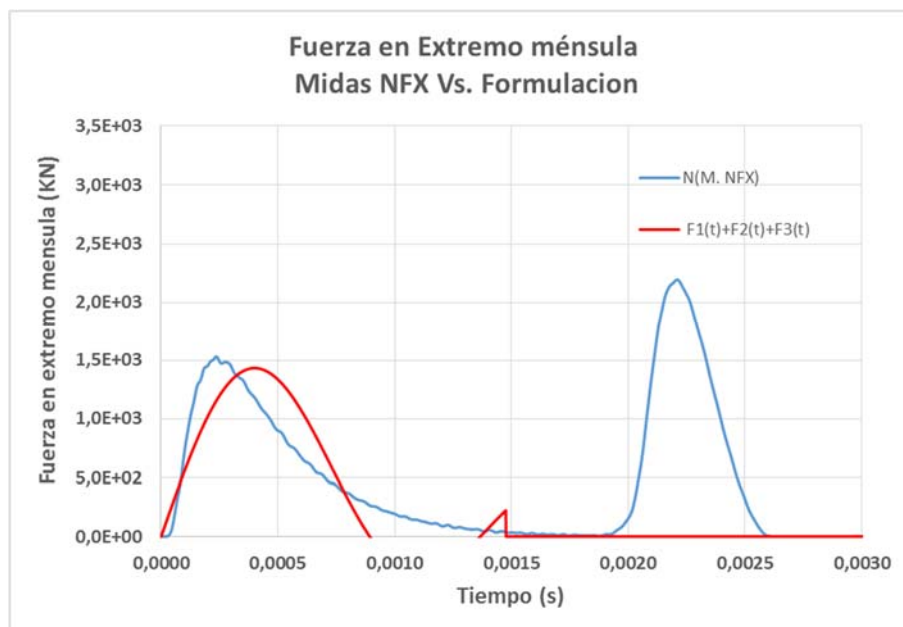


Figura 239- Comparativa de fuerzas de contacto en el extremo de la ménsula entre Midas NFX y la formulación desarrollada considerando tres modos. Caso $\alpha=1$ $V_p=5$ m/s.

Analizando las curvas mostradas en la Figura 239, se observa que el valor de la fuerza máxima obtenido por la formulación utilizando tres modos de vibración es ligeramente inferior al calculado mediante Midas NFX. Esta diferencia se explica debido a que, en este caso, tres modos



de vibración consideran el 96% de la energía inicial y ese 4% restante que absorben el resto de modos, como se ha comprobado ya en el análisis de la fuerza, amplifica ligeramente la curva mostrada en la Figura 237 . No obstante, la coincidencia entre los resultados es relativamente buena. En los siguientes apartados se analizarán más de tres modos de vibración.

Según la formulación desarrollada, la parada del proyectil se produce para 1.5 milisegundos.

4.2.13.4 Caso masa del proyectil mitad la masa equivalente del modo 1 de la estructura ($\alpha=0.5$) y velocidad del proyectil previa al impacto ($V_{p,0}$) de 5.0 m/s. No consideración del peso propio del proyectil en el impacto.

Por último de esta serie, se analiza ahora el mismo caso que en los tres casos anteriores, pero reduciendo la masa del proyectil hasta un $\alpha=0.5$, manteniendo el resto de los parámetros iguales. Los datos de partida para el impacto de este apartado son los mismos que los datos de partida expuestos en el apartado 4.2.12.5 y se muestran en la Tabla 47:

Tabla 47- Estudio de Fuerza de contacto. Caso $\alpha=0.5$ y $V_p=5$ m/s. Datos de partida.

Datos menula		Datos proyectil	
Longitud MENSULA(m)	5.00	Mp(kg)	79.7
b (m)	0.10	Vpo (m/s)	5.00
h (m)	0.10	Eo (N m)	996.0
A (m ²)	1.00E-02	C.M. (N s)	398.4
E (KN / m)	2.10E+08	K _{PROYECTIL}	∞
ρ (kg /m ³)	7.85E+03	g(m/s ²)	0
Punto de impacto "p" (m,m)	5	α	0.5
		C _{pp}	0.00

A partir de los datos de partida expuestos en la Tabla 47, se calculan los parámetros necesarios para la aplicación de la formulación según lo expuesto en los apartados 4.2.3.3 y 4.2.7.4 de resolución del impacto. Los valores de los parámetros resultantes se resumen en la Tabla 48.



Tabla 48- Estudio de Fuerza de contacto. Caso $\alpha=0.5$ y $V_p=5$ m/s. Parámetros resultantes.

Unidades	Modo	1	Modo	2	Modo	3
-	$L/L_{ef,1}$	1	$L/L_{ef,2}$	2	$L/L_{ef,3}$	3
m/s	$V_{p,1}$	5.00	$V_{p,2}$	4.08	$V_{p,3}$	2.89
Kg	$M_{e,1}$	159.36	$M_{e,2}$	79.68	$M_{e,3}$	53.12
-	α_1	0.5	α_2	1.0	α_3	1.5
-	$C_{m,1}$	0.33	$C_{m,2}$	0.50	$C_{m,3}$	0.60
m/s	$V_{l,1}$	1.67	$V_{l,2}$	2.04	$V_{l,3}$	1.73
kN/m	K_1	420000.0	K_2	840000.0	K_3	1260000.0
-	$C_{K,1}(M_p)$	1.00	$C_{K,2}(M_p)$	1.00	$C_{K,3}(M_p)$	1.00
kN/m	$K_{eq,1}$	420000.00	$K_{eq,2}$	840000.00	$K_{eq,3}$	1260000.00
rad/s	$W_{e,1}$	1623.46	$W_{e,2}$	3246.92	$W_{e,3}$	4870.38
-	$X(p)_1$	1.00	$X(p)_2$	1.0	$X(p)_3$	1.000
Kg	$M_{p,eq1}$	79.68	$M_{p,eq2}$	79.68	$M_{p,eq3}$	79.68
rad/s	$W_{ep,1}$	1325.55	$W_{ep,2}$	2295.92	$W_{ep,3}$	3080.30
Nm	E_1	332.0	E_2	332.0	E_3	199.2
%	E_1 (%)	33.3%	E_2 (%)	33.3%	E_3 (%)	20.0%
Nm	$E_{A,1}$	332.0	$E_{A,2}$	664.0	$E_{A,3}$	863.2
%	$E_{A,1}$ (%)	33%	$E_{A,2}$ (%)	67%	$E_{A,3}$ (%)	87%
Nm	$E_{D,2}$	664.0	$E_{D,3}$	332.0	$E_{D,4}$	132.8
%	$E_{D,2}$ (%)	67%	$E_{D,3}$ (%)	33%	$E_{D,4}$ (%)	13%

Se puede observar en la Tabla 48 que el primer modo en este caso representa el 33% de la energía inicial del impacto, el segundo modo el 33% y el tercer modo el 20%. Es decir, la energía analizada respecto de la inicial es el 87%.

A continuación, y de manera análoga a lo expuesto en el apartado anterior, se calcula la fuerza de contacto según la formulación desarrollada considerando 1 modo de vibración, y considerando 3 modos de vibración.

Análisis de la fuerza de contacto considerando el modo 1 de vibración:

A partir de los datos expuestos en la Tabla 48, se aplica la formulación para la fuerza de contacto expresada en la ecuación (386), considerando un único modo de vibración:

$$F(t)(KN) = 5 \times 0.33 \times 80 \times 1326 \text{ sen}(1326 t) \times 0.001$$

En la Figura 240 se comparan los resultados de la fuerza de contacto $F(t)$ en el extremo libre de la ménsula, considerando un único modo de vibración, con los ofrecidos por el modelo desarrollado en Midas NFX.

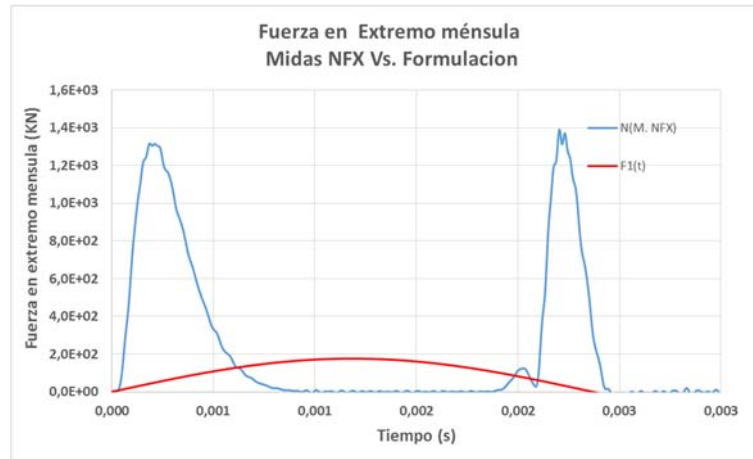


Figura 240- Comparativa de fuerzas de contacto en el extremo de la ménsula entre Midas NFX y la formulación desarrollada considerando un modo. Caso $\alpha=0.5$ $V_p=5$ m/s.

En la Figura 240 se observan los dos picos de fuerza obtenidos de los resultados con Midas NFX que representan el pico de fuerza de la fase de parada de proyectil y el pico de fuerza de la fase de expulsión del proyectil, claramente separados y de similares características.

La fuerza que se obtiene de los resultados de la formulación considerando un único modo de vibración están muy lejos de los obtenidos por Midas NFX. El valor de fuerza máxima por la formulación es aproximadamente de 200 KN mientras que según midas NFX está entorno a 1300 KN.

Análisis de la fuerza de contacto considerando tres modos de vibración:

A partir de los datos expuestos en la tabla 48, se aplica la formulación para la fuerza de contacto expresada en la ecuación (386) y cumpliendo con la condición expuesta (387), considerando tres modos de vibración:

$$F(t)(KN) = (5 \times 0.33 \times 80 \times 1326 \text{ sen}(1326 t) + 4.08 \times 0.5 \times 80 \times 2296 \text{ sen}(3247 t) + 2.89 \times 0.6 \times 80 \times 3080 \text{ sen}(4870 t)) \times 0.001$$

En la Figura 241 se comparan los resultados de la fuerza de contacto $F(t)$ en el extremo libre de la ménsula, considerando tres modos de vibración, con los ofrecidos por el modelo desarrollado en Midas NFX.

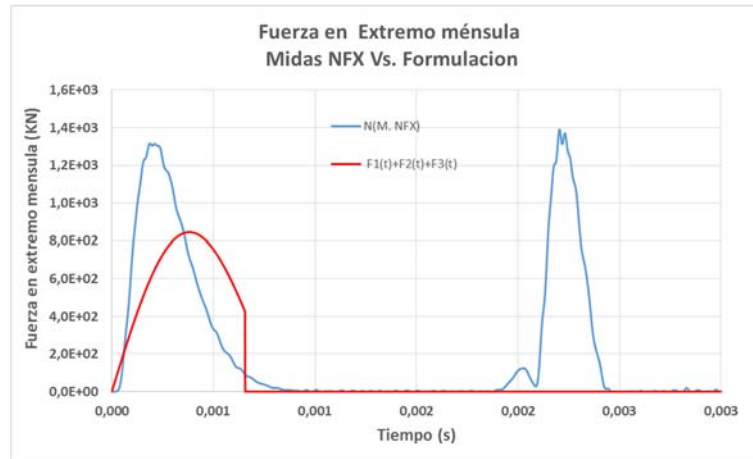


Figura 241- Comparativa de fuerzas de contacto en el extremo de la ménsula entre Midas NFX y la formulación desarrollada considerando tres modos. Caso $\alpha=0.5$ $V_p=5$ m/s.

A la vista de los resultados de la Figura 240 y de la Figura 241, la fuerza de contacto según la formulación ha aumentado de los 200 kN al considerar un modo de vibración hasta los 800 kN al considerar 3 modos de vibración. Es decir, al pasar de analizar el 33% de la energía inicial, a pasar a analizar el 87% de la energía inicial, la fuerza de contacto se ha multiplicado por 4. Aun así, el valor de la fuerza de contacto está lejos de los 1300 kN que ofrecen los resultados de Midas NFX. Esta diferencia es debida a que la energía analizada con tres modos de vibración está lejos del 100%, Por este motivo, se analizan los tres modos de vibración siguientes para considerar un total de 6 modos y llegar así a analizar el 99% de la energía inicial.

A partir de los datos de partida expuestos en la Tabla 47 se calculan los parámetros de los siguientes tres modos para la aplicación de la formulación según lo expuesto en los apartados 4.2.3.3 y 4.2.7.4 de resolución del impacto. Los valores de los parámetros resultantes para estos modos se resumen en la Tabla 49.



Tabla 49- Estudio de Fuerza de contacto. Caso $\alpha=0.5$ y $V_p=5$ m/s. Parámetros resultantes modos 4-6.

Unidades	Modo	4	Modo	5	Modo	6
-	$L/L_{ef,4}$	4	$L/L_{ef,5}$	5	$L/L_{ef,6}$	6
m/s	$V_{p,4}$	1.83	$V_{p,5}$	1.05	$V_{p,6}$	0.56
Kg	$M_{e,4}$	39.84	$M_{e,5}$	31.87	$M_{e,6}$	26.56
-	α_4	2.0	α_5	2.5	α_6	3.0
-	$C_{m,4}$	0.67	$C_{m,5}$	0.71	$C_{m,6}$	0.75
m/s	$V_{i,4}$	1.22	$V_{i,5}$	0.75	$V_{i,6}$	0.42
kN/m	K_4	1680000.0	K_5	2100000.0	K_6	2520000.0
-	$C_{K,4}(M_p)$	1.00	$C_{K,5}(M_p)$	1.00	$C_{K,6}(M_p)$	1.00
kN/m	$K_{eq,4}$	1680000.00	$K_{eq,5}$	2100000.00	$K_{eq,6}$	2520000.00
rad/s	$W_{e,4}$	6493.84	$W_{e,5}$	8117.30	$W_{e,6}$	9740.76
-	$X(p)_4$	1.000	$X(p)_5$	1.000	$X(p)_6$	1.000
Kg	$M_{p,eq,4}$	79.68	$M_{p,eq,5}$	79.68	$M_{p,eq,6}$	79.68
rad/s	$W_{ep,4}$	3749.22	$W_{ep,5}$	4338.88	$W_{ep,6}$	4870.38
Nm	E_4	88.5	E_5	31.6	E_6	9.5
%	$E_4(\%)$	8.9%	$E_5(\%)$	3.2%	$E_6(\%)$	1.0%
Nm	$E_{A,4}$	951.7	$E_{A,5}$	983.3	$E_{A,6}$	992.8
%	$E_{A,4}(\%)$	96%	$E_{A,5}(\%)$	99%	$E_{A,6}(\%)$	100%
Nm	$E_{D,5}$	44.3	$E_{D,6}$	12.6	$E_{D,6}$	3.2
%	$E_{D,5}(\%)$	4%	$E_{D,6}(\%)$	1.3%	$E_{D,6}(\%)$	0.32%

Se puede observar a partir de los resultados de la Tabla 49 que el cuarto modo, en este caso, representa el 9% de la energía inicial del impacto, el quinto modo el 3.2% y el sexto modo el 1%. Es decir, la energía analizada considerando 6 modos de vibración respecto de la inicial es mayor del 99%.

Análisis de la fuerza de contacto considerando 6 modos de vibración:

A partir de los datos expuestos en la Tabla 49, se aplica la formulación para la fuerza de contacto expresada en la ecuación (386) y cumpliendo con la condición expuesta (387), considerando 6 modos de vibración:

$$\begin{aligned}
 F(t)(KN) = & (5 \times 0.33 \times 80 \times 1326 \text{ sen}(1326 t) + 4.08 \times 0.5 \times 80 \times 2296 \text{ sen}(3247 t) \\
 & + 2.89 \times 0.6 \times 80 \times 3080 \text{ sen}(4870 t) \\
 & + 1.83 \times 0.67 \times 80 \times 3749 \text{ sen}(6494 t) \\
 & + 1.05 \times 0.71 \times 80 \times 4339 \text{ sen}(8117 t) \\
 & + 0.56 \times 0.75 \times 80 \times 4870 \text{ sen}(9741 t)) \times 0.001
 \end{aligned}$$

En la Figura 242 se comparan los resultados de la fuerza de contacto $F(t)$ en el extremo libre de la ménsula, considerando tres modos de vibración, con los ofrecidos por el modelo desarrollado en Midas NFX.

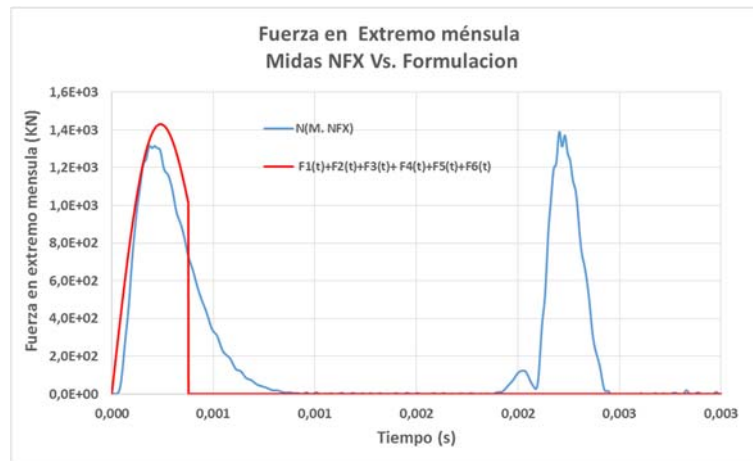


Figura 242- Comparativa de fuerzas de contacto en el extremo de la ménsula entre Midas NFX y la formulación desarrollada considerando 3 modos. Caso $\alpha=0.5$ $V_p=5$ m/s.

Como se puede observar en la Figura 242, la fuerza de impacto calculada con la formulación considerando 6 modos de vibración alcanza 1400kN de fuerza y una distribución temporal **muy ajustada** a los resultados del Midas NFX.

A partir de todos los casos analizados, se concluye que el **término cinético de la fuerza de contacto se puede calcular de manera muy precisa a partir de la expresión de la fuerza de contacto de la formulación desarrollada.**

A la vista de los resultados de todos los casos anteriores, se puede concluir que si se analiza toda la energía del problema, la formulación predice una fuerza de contacto ligeramente mayor que el Midas NFX. Este hecho se puede explicar por la consideración que realiza la formulación de proyectil infinitamente rígido, que supone la pésima situación posible desde el punto de vista de la fuerza de contacto.

En el siguiente apartado se evalúa el término gravitatorio de la fuerza de contacto en un impacto derivado de la influencia de peso propio.



4.2.13.5 Caso masa del proyectil diez veces la masa equivalente del modo 1 de la estructura ($\alpha=10$) y velocidad del proyectil previa al impacto ($V_{p,0}$) de 0.31 m/s. Alta influencia del peso propio del proyectil en el impacto ($C_{pp} = 2.0$).

Como se ha desarrollado en el apartado 4.2.5.4, la fuerza producida en un impacto puede estar influenciada por el efecto del peso propio de la masa del proyectil. En los casos estudiados anteriormente, se ha analizado únicamente el término de la fuerza de impacto cinético, por eso en este apartado se verificará que el término de peso propio obtenido en la expresión (363) se adapta también a los valores ofrecidos por el Midas NFX.

Para evaluar previamente a ningún cálculo **si el peso propio tiene influencia** en los resultados finales, se desarrolló mediante la expresión (362) el llamado coeficiente de peso propio C_{pp} . Como se demostró en el apartado 4.2.6. un $C_{pp} < 0,1$ indica que la influencia del peso propio es despreciable.

El caso de mayor masa estudiado durante el apartado 4.2.13, que es el caso 4.2.13.1 con un $\alpha=10$, de haberse producido el impacto en la dirección paralela a la gravedad, hubiera presentado un coeficiente de influencia de peso propio $C_{pp} = 0.004$. La razón de un coeficiente tan bajo, es porque la ménsula es muy rígida en la dirección axial. Por esto motivo, para este apartado se modifica la ménsula inicial, dotándola de un material ideal con módulo de elasticidad 1000 veces más flexible que el acero, aunque manteniendo la misma densidad que el propio acero. Además, se reduce la velocidad inicial de impacto del proyectil para que el término gravitatorio tenga más importancia. Con estas modificaciones sobre el caso 4.2.13.1 se consigue analizar en el presente apartado un impacto con un $C_{pp} = 2$, **donde el término de peso propio va a tener una importancia principal en el impacto.**

Los datos que definen el impacto analizado en el presente apartado son los mostrados en la Tabla 50:



Tabla 50- Estudio de Fuerza de contacto. Caso $\alpha=10$ y $V_p=0.31$ m/s. Datos de partida

Datos mensula		Datos proyectil	
Longitud MENSULA(m)	5.00	Mp(kg)	1590.0
b (m)	0.10	Vpo (m/s)	0.31
h (m)	0.10	Eo (N m)	76.4
A (m ²)	1.00E-02	C.M. (N s)	492.9
E (KN / m)	2.10E+05	KPROYECTIL	∞
ρ (kg /m ³)	7.85E+03	g(m/s ²)	9.806
Punto de impacto "p" (m,m)	5	α	10.0
		C _{pp}	2.0

En los casos previamente estudiados se puede concluir que para un valor de $\alpha=10$, como es el caso, el desplazamiento estructural se puede calcular con la formulación desarrollada teniendo en cuenta un único modo de vibración y que, para la fuerza de contacto producida en el impacto, considerar dos modos es suficiente.

A partir de los datos de partida expuestos en la Tabla 50, se calculan los parámetros necesarios para la aplicación de la formulación según lo expuesto en los apartados 4.2.5.4 y 4.2.7.4 de resolución del impacto. Los valores de los parámetros resultantes se resumen en la Tabla 51.

Tabla 51- Estudio de Fuerza de contacto. Caso $\alpha=10$ y $V_p=31$ m/s. Parámetros resultantes.

Unidades	Modo	1	Modo	2
-	L/L _{ef,1}	1	L/L _{ef,2}	2
m/s	V _{p,1}	0.31	V _{p,2}	0.09
Kg	M _{e,1}	159.36	M _{e,2}	79.68
-	α_1	10.0	α_2	20.0
-	C _{m,1}	0.91	C _{m,2}	0.95
m/s	V _{i,1}	0.28	V _{i,2}	0.09
kN/m	K ₁	420.0	K ₂	840.0
-	C _{K,1} (M _p)	1.00	C _{K,2} (M _p)	1.00
kN/m	K _{eq,1}	420.00	K _{eq,2}	840.00
rad/s	W _{e,1}	51.34	W _{e,2}	102.68
-	X(p) ₁	1.00	X(p) ₂	1.0
Kg	M _{p,eq1}	1590.00	M _{p,eq2}	1590.00
rad/s	W _{ep,1}	15.49	W _{ep,2}	22.43
Nm	E ₁	69.4	E ₂	6.6
%	E ₁ (%)	90.9%	E ₂ (%)	8.7%
Nm	E _{A,1}	69.4	E _{A,2}	76.1
%	E _{A,1} (%)	91%	E _{A,2} (%)	100%
Nm	E _{D,2}	7.0	E _{D,3}	0.3
%	E _{D,2} (%)	9%	E _{D,3} (%)	0%



Se puede observar a partir de los datos de la Tabla 51, que el primer modo, en este caso, representa el 91% de la energía inicial del impacto, y el segundo modo el 9%. Es decir, la energía analizada respecto de la inicial es prácticamente el 100%.

Para los datos de la Tabla 51, se calcula el coeficiente de peso propio según la ecuación (362):

$$C_{pp} = \frac{g}{w_{ep,1} V_{p,1}} = \frac{9,806}{15,5 \times 0,31} = 2.0$$

De este valor de C_{pp} se deduce que tanto el desplazamiento del extremo de la ménsula, como la fuerza producida en el impacto, deberían ser calculadas con la formulación que incluye el efecto del peso propio para ser comparable con la calculada mediante Midas NFX.

Análisis del desplazamiento de la ménsula considerando un modo de vibración:

A partir de los datos expuestos en la Tabla 51, se aplica la formulación para el cálculo del desplazamiento considerando el efecto del peso propio mediante la aplicación de la ecuación (359). El primer término es referido al termino cinético y el segundo al efecto del peso propio.:

$$d_{e,1}(t) = \frac{0.31 \times 0.91 \times \text{sen}(15.15 t)}{15.15} + \frac{9.806 \times 1590}{420000} (1 - \text{cos}(15.15 t))$$

En la Figura 243 se comparan los resultados del desplazamiento estructural en extremo libre la ménsula, considerando un único modo de vibración $d_e(t)$, con los ofrecidos por el modelo desarrollado en Midas NFX.

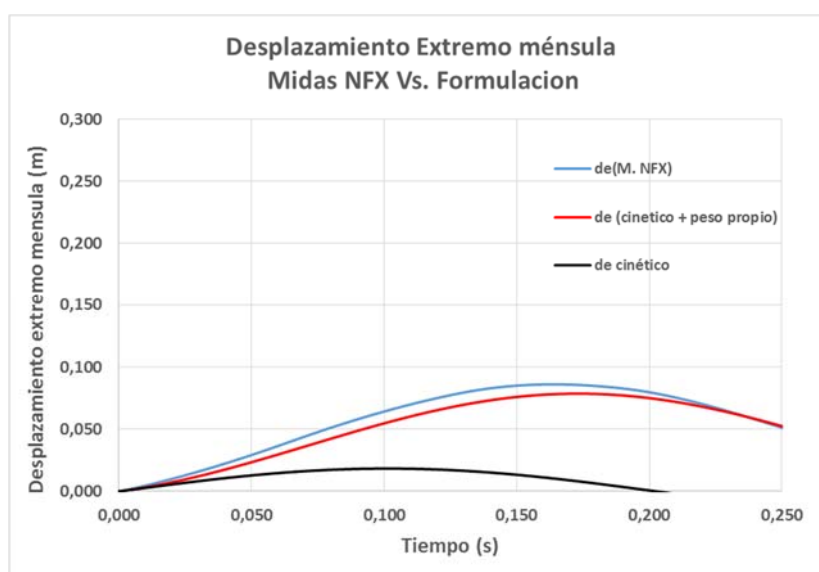


Figura 243- Comparativa de desplazamientos en el extremo de la ménsula entre Midas NFX y la formulación desarrollada. Caso $\alpha=10$ $V_p=0.31$ m/s.



En la Figura 243 se puede apreciar cómo la componente cinética (curva negra) al desplazamiento es muy minoritaria y los resultados entre la formulación desarrollada (curva roja), considerando término cinético y término de peso propio, y los resultados de Mida NFX (curva azul), son muy próximos.

Análisis de la fuerza de contacto considerando los modos 1 y 2 de vibración:

Se analiza ahora la fuerza de contacto incluyendo el segundo modo de vibración, es decir, incorporando ese 8.7% de energía que absorbe el segundo modo.

A partir de los datos expuestos en la Tabla 51, se aplica la formulación para la fuerza de contacto del modo 1 expresada en la ecuación (363) y para el modo 2 expresada en la ecuación (386). A partir de ambas expresiones se obtiene la fuerza de contacto debida al término cinético $F_{Vp}(t)$ y la fuerza de contacto debida al término de peso propio $F_{pp}(t)$:

$$F_{Vp}(t)(KN) = (0.31 \times 0.91 \times 1590 \times 15.5 \text{ sen}(15.5 t) \\ + 0.094 \times 0.95 \times 1590 \times 22.43 \text{ sen}(103 t)) \times 0.001$$

$$F_{pp}(t)(KN) = 9.806 \times 1590 \left(1 - \frac{1590}{159 + 1590} \cos(15.5 t)\right)$$

En la Figura 244 se comparan los resultados de la fuerza de contacto $F(t)$, suma de los términos cinético y de peso propio de la fuerza, en el extremo libre de la ménsula. Para ello se consideran dos modos de vibración y la acción del peso propio del modo 1, con los ofrecidos por el modelo desarrollado en Midas NFX.

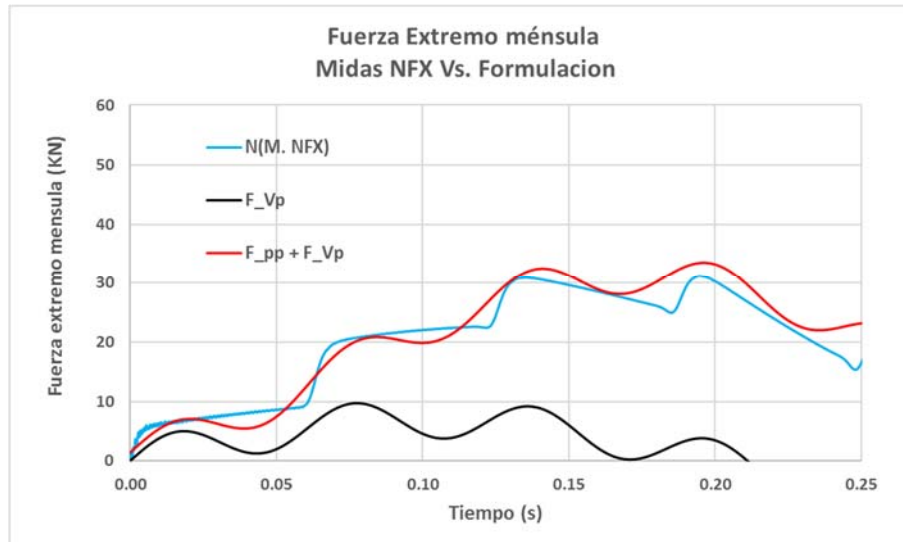


Figura 244- Comparativa de fuerzas de contacto en el extremo de la ménsula entre Midas NFX y la formulación desarrollada considerando tres modos. Caso $\alpha=10$ $V_p=0.31$ m/s.

Como se puede apreciar en la Figura 244 los resultados entre Midas NFX y la formulación desarrollada, considerando los términos cinéticos y de peso propio (curva roja), son muy próximos. La componente cinética (curva negra) representa un porcentaje de la fuerza pequeño, por lo que la componente de peso propio es fundamental para que las curvas de Midas NFX y la formulación se aproximen.

A la vista de los resultados, se puede concluir que la **formulación que predice la fuerza de contacto, incluyendo el termino de peso propio, se ajusta muy bien** a los valores ofrecidos por Midas NFX.



- Desarrollo de teoría sobre impactos -
- Método simplificado de cálculo de impactos en estructuras -





4.2.14 Aplicación a impacto excéntrico: Cálculo de desplazamientos.

Todos los casos analizados previamente a lo largo del apartado 4.2, se han correspondido con impactos centrales. Es decir, el centro de gravedad del proyectil, el punto de contacto entre estructura y proyectil, y el centro del gravedad de la estructura, siempre han estado alineados. Para demostrar que la formulación obtenida a lo largo de la presente tesis, también es válida para impactos excéntricos, se analiza a continuación **el desplazamiento estructural en dos casos de impacto excéntrico.**

En concreto, el impacto se plantea sobre una viga de acero de longitud 10 m y sección 0,1 m x 0,1 m, idéntica a la descrita en el apartado 4.1.1.2. El punto de contacto entre proyectil y estructura, para este caso, se produce a $L/6$, es decir, a 1.67 m del apoyo como muestra la Figura 245.

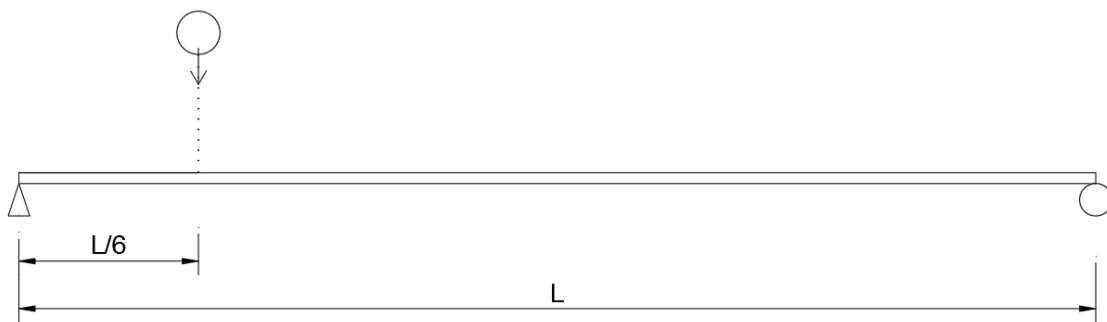


Figura 245- Caso de impacto excéntrico en viga metálica biapoyada.

Los impactos excéntricos tienen más fuentes de error para la aplicación del modelo debido a varios factores:

- En primer lugar, al no existir simetría en el impacto, **se activan los modos impares produciendo desplazamientos laterales** en la masa del proyectil durante el impacto. Estos desplazamientos laterales modifican las condiciones iniciales asumidas para el desarrollo produciendo imprecisiones
- Por otra parte, la integración de la masa del proyectil en la estructura durante el impacto produce **modificaciones mayores debido a que masa rompe las simetrías en los modos de vibración**, hecho que no se produce que en el caso de impactos centrales. Reflejar estas modificaciones de manera simplificada es más complejo y, en general, aumenta la imprecisión con respecto a un impacto central.



No obstante, uno de los objetivos de la formulación desarrollada, es comprobar los resultados de un software de elementos finitos, no sustituirlo, por lo que se admite un cierto error en los resultados dentro de unas tolerancias. **El principal objetivo de la formulación está enfocado al diseño estructural, que es precisamente donde el software no llega**, y donde los decimales en los resultados no tienen ninguna relevancia.

Para poder aplicar la formulación desarrollada, el primer paso es obtener la rigidez y la masa equivalente de cada modo en el punto de impacto. Al tratarse de un impacto excéntrico, estos parámetros se calcularán mediante el método general expuesto en el apartado 4.1.1.1 y 4.1.2.1. Una vez se obtiene los parámetros de cada modo, se analizarán dos casos de impacto, uno para una masa de proyectil grande ($\alpha=10$) y otro para una masa de proyectil pequeña ($\alpha=0,31$). En ambos impactos la velocidad inicial del proyectil es 0.5 m/s y no se considera el efecto del peso propio.

Para el análisis de impacto excéntrico se van a considerar en los cálculos los tres primeros modos de vibración.

El modelo de elementos finitos desarrollado modela la masa del proyectil M_p mediante un cubo de dimensiones (0.01 m x 0.01 m x 0.01 m) al cual se le asigna un material de densidad que proporcione la masa M_p buscada en cada caso. El módulo de elasticidad es 1000 veces el módulo del acero (2.1×10^{14} N/m²). La velocidad inicial del proyectil se le asigna directamente, en módulo y dirección, mediante las posibilidades que ofrece el programa. El tipo de análisis que se realiza en el Midas NFX es un análisis no lineal (tipo explícito) de 0.6 segundos de duración. El incremento de tiempo para la integración es de 0.00005 segundos. Se ha utilizado elementos solidos tanto para la viga como para el proyectil. El modelo de elementos finitos desarrollado con Midas NFX para el impacto descrito se muestra en la Figura 246y en la Figura 247.



Figura 246- Modelo de elementos finitos con Midas NFX para el estudio de impacto excéntrico. Alzado.

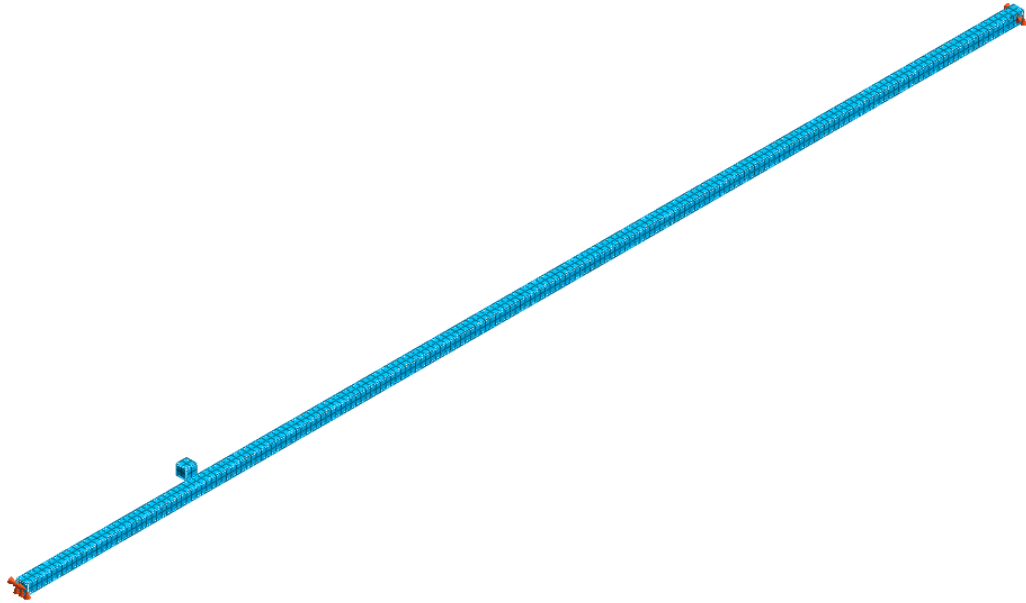


Figura 247- Modelo de elementos finitos con Midas NFX para el estudio de impacto excéntrico. Perspectiva.

4.2.14.1 Masas equivalentes de los modos de vibración en el punto de impacto

Para la obtención de la masa equivalente se aplica el método general explicado en el apartado 4.1.2.1. A continuación se calculan las masas equivalentes para los modos de vibración 1, 2 y 3 de la viga objeto de estudio en el punto de impacto.

En el cálculo de la masa equivalente se precisan las líneas de influencia en el punto de contacto. La línea de influencia, por simplicidad, se aproximará mediante dos funciones tipo *seno* cuya amplitud máxima se encuentra en $L/6$, análogamente a lo expuesto en el apartado anteriormente indicado.

Modo 1

Los resultados del cálculo y condensación de las fuerzas de inercia para el modo 1 de vibración se exponen en la Tabla 52:



Tabla 52-Valores de línea de influencia y fuerzas de inercia condensadas para el modo de vibración 1.

Coord. x (m)	Aceleración $N s^2/m$	FUERZA INERCIA (KN/m)	Aproximación L. de Influen. (m)	FUERZA INERCIA CONDENSADA (KN/m)	FUERZA INERCIA CONDENSADA (KN)
0	0.000	0	0.000	0	0
0.5	0.156	0.01228	0.454	0.00558	0.00279
1	0.309	0.02426	0.809	0.01962	0.00981
1.5	0.454	0.03564	0.988	0.03520	0.01760
2	0.588	0.04614	0.998	0.04605	0.02303
2.5	0.707	0.05551	0.988	0.05482	0.02741
3	0.809	0.06351	0.969	0.06151	0.03076
3.5	0.891	0.06994	0.941	0.06581	0.03290
4	0.951	0.07466	0.905	0.06755	0.03378
4.5	0.988	0.07753	0.861	0.06674	0.03337
5	1.000	0.07850	0.809	0.06351	0.03175
5.5	0.988	0.07753	0.750	0.05816	0.02908
6	0.951	0.07466	0.685	0.05111	0.02555
6.5	0.891	0.06994	0.613	0.04287	0.02143
7	0.809	0.06351	0.536	0.03403	0.01701
7.5	0.707	0.05551	0.454	0.02520	0.01260
8	0.588	0.04614	0.368	0.01699	0.00849
8.5	0.454	0.03564	0.279	0.00994	0.00497
9	0.309	0.02426	0.187	0.00455	0.00227
9.5	0.156	0.01228	0.094	0.00116	0.00058
10	0.000	0.00000	0.000	0.00000	0.00000

Se representan gráficamente los resultados de la Tabla 52 para la línea de influencia aproximada y el campo de aceleraciones correspondiente al modo 1 en la Figura 248.

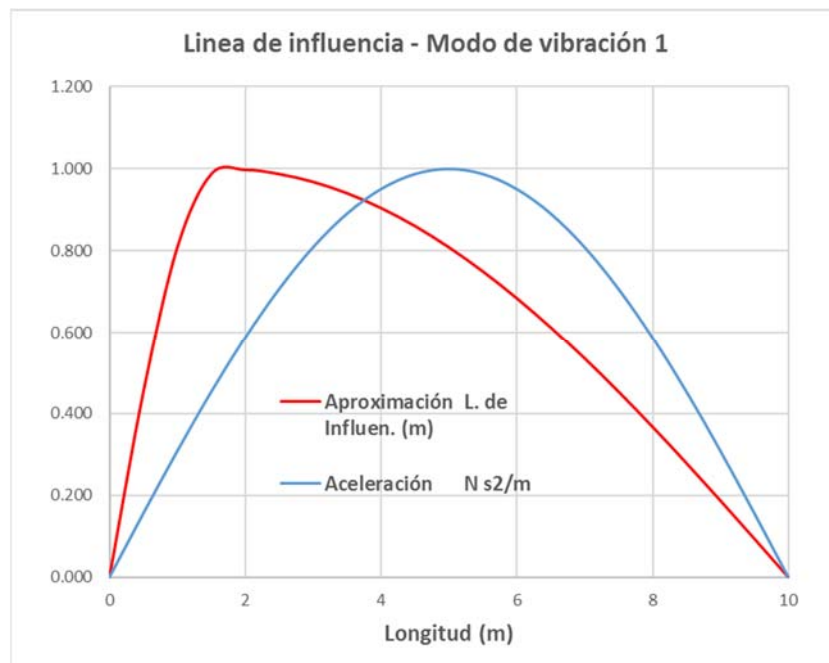


Figura 248-Representación gráfica de la línea de influencia y el campo de aceleraciones para el modo 1.



A partir de los datos de la Tabla 52, se suman las fuerzas de inercia condensadas. Dicha suma se divide por la aceleración del modo en el punto de contacto y se obtiene la masa equivalente del modo 1 en el punto de contacto. El resultado se muestra en la Tabla 53.

Tabla 53-Masa equivalente del modo 1 en el punto de contacto.

$\Sigma F_{INERCIA}$ (KN)	0.365
Aceleración (x=1.67m) (N s ² /m)	0.500
$M_{e,1}$ (Ton)	0.730

Modo 2

Para calcular la masa equivalente del modo 2 se realiza el mismo proceso que se ha realizado para el modo 1.

Los resultados del cálculo y condensación de las fuerzas de inercia para el modo 2 de vibración se exponen en la Tabla 54. Sólo se muestran los resultados de la mitad del vano ya que la otra mitad se puede suponer independiente a efectos de masa equivalente.

Tabla 54- Valores de línea de influencia y fuerzas de inercia condensadas para el modo de vibración 2.

Coord. x (m)	Aceleración N s ² /m	FUERZA INERCIA (KN/m)	Aproximación L. de Influen. (m)	FUERZA INERCIA CONDENSADA (KN/m)	FUERZA INERCIA CONDENSADA (KN)
0	0.000	0	0.000	0	0
0.25	0.156	0.01228	0.233	0.00287	0.00072
0.5	0.309	0.02426	0.454	0.01101	0.00275
0.75	0.454	0.03564	0.649	0.02315	0.00579
1	0.588	0.04614	0.809	0.03733	0.00933
1.25	0.707	0.05551	0.924	0.05128	0.01282
1.5	0.809	0.06351	0.988	0.06273	0.01568
1.75	0.891	0.06994	0.999	0.06989	0.01747
2	0.951	0.07466	0.988	0.07374	0.01843
2.25	0.988	0.07753	0.962	0.07462	0.01866
2.5	1.000	0.07850	0.924	0.07252	0.01813
2.75	0.988	0.07753	0.872	0.06765	0.01691
3	0.951	0.07466	0.809	0.06040	0.01510
3.25	0.891	0.06994	0.734	0.05136	0.01284
3.5	0.809	0.06351	0.649	0.04125	0.01031
3.75	0.707	0.05551	0.556	0.03084	0.00771
4	0.588	0.04614	0.454	0.02095	0.00524
4.25	0.454	0.03564	0.346	0.01234	0.00308
4.5	0.309	0.02426	0.233	0.00566	0.00142
4.75	0.156	0.01228	0.118	0.00144	0.00036
5	0.000	0.00000	0.000	0.00000	0.00000

Se representan gráficamente los resultados de la Tabla 54 para la línea de influencia aproximada y el campo de aceleraciones correspondiente al modo 2 en la Figura 249.

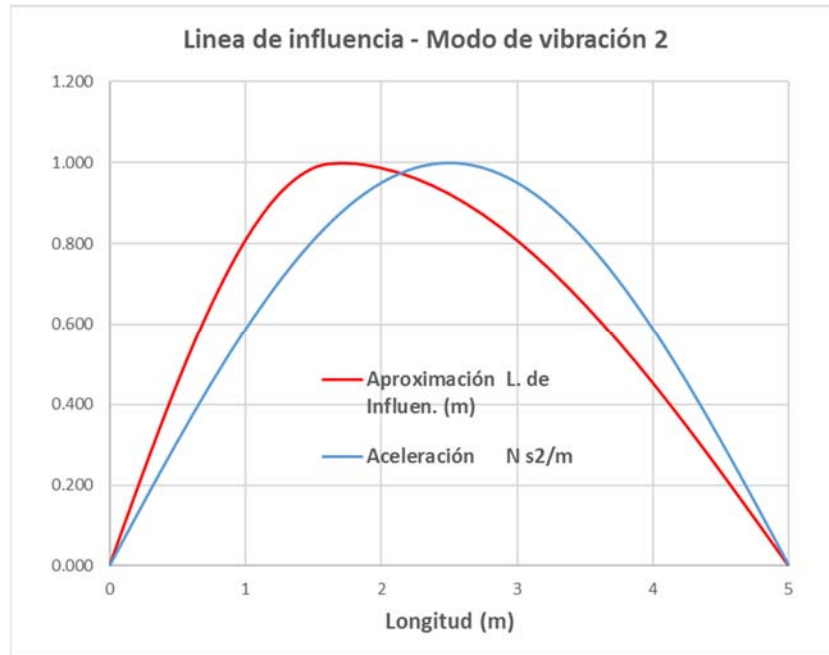


Figura 249- Representación gráfica de la línea de influencia y el campo de aceleraciones para el modo 2.

A partir de los datos de la Tabla 54, se suman las fuerzas de inercia condensadas. Dicha suma se divide por la aceleración del modo en el punto de contacto y se obtiene la masa equivalente del modo 2 en el punto de contacto. El resultado se muestra en la Tabla 55.

Tabla 55- Masa equivalente del modo 2 en el punto de contacto.

$\sum F_{INERCIA} (KN)$	0.193
Aceleración (x=1.67m) (N s ² /m)	0.866
$M_{e,2}(Ton)$	0.223

Modo 3

Para calcular la masa equivalente del modo 3 se realiza el mismo proceso que se ha realizado para el modo 1 y el modo 2.

Los resultados del cálculo y condensación de las fuerzas de inercia para el modo 3 de vibración se exponen en la Tabla 56. Solo se muestran los resultados de un tercio de modo ya que los otros 2/3 se puede suponer independientes a efectos de masa equivalente.



Tabla 56- Valores de línea de influencia y fuerzas de inercia condensadas para el modo de vibración 3.

Coord. x (m)	Aceleración $N s^2/m$	FUERZA INERCIA (KN/m)	Aproximación L. de Influen. (m)	FUERZA INERCIA CONDENSADA (KN/m)	FUERZA INERCIA CONDENSADA (KN)
0	0.000	0	0.000	0	0
0.17	0.156	0.01228	0.156	0.00192	0.00032
0.33	0.309	0.02426	0.309	0.00750	0.00125
0.50	0.454	0.03564	0.454	0.01618	0.00270
0.67	0.588	0.04614	0.588	0.02712	0.00452
0.83	0.707	0.05551	0.707	0.03925	0.00654
1.00	0.809	0.06351	0.809	0.05138	0.00856
1.17	0.891	0.06994	0.891	0.06232	0.01039
1.33	0.951	0.07466	0.951	0.07100	0.01183
1.50	0.988	0.07753	0.988	0.07658	0.01276
1.67	1.000	0.07850	1.000	0.07850	0.01308
1.83	0.988	0.07753	0.988	0.07658	0.01276
2.00	0.951	0.07466	0.951	0.07100	0.01183
2.17	0.891	0.06994	0.891	0.06232	0.01039
2.33	0.809	0.06351	0.809	0.05138	0.00856
2.50	0.707	0.05551	0.707	0.03925	0.00654
2.67	0.588	0.04614	0.588	0.02712	0.00452
2.83	0.454	0.03564	0.454	0.01618	0.00270
3.00	0.309	0.02426	0.309	0.00750	0.00125
3.17	0.156	0.01228	0.156	0.00192	0.00032
3.33	0.000	0.00000	0.000	0.00000	0.00000

Se representan gráficamente los resultados de la tabla anterior para la línea de influencia aproximada y el modo de vibración 3 en la Figura 250.

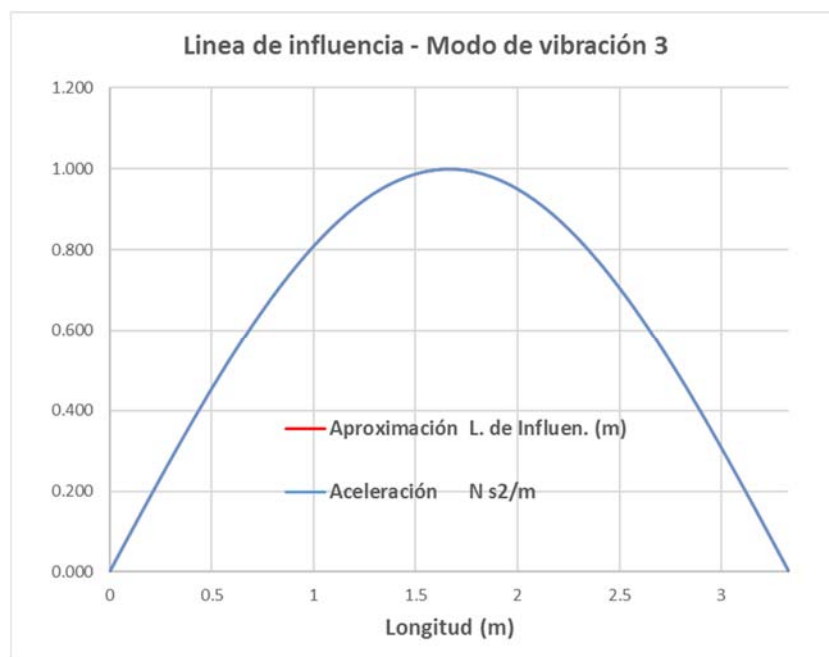


Figura 250- Representación gráfica de la línea de influencia y el campo de aceleraciones para el modo 3.



A partir de los datos de la Tabla 56, se suman las fuerzas de inercia condensadas. Dicha suma se divide por la aceleración del modo en el punto de contacto y se obtiene la masa equivalente del modo 3 en el punto de contacto. El resultado se muestra en la Tabla 57.

Tabla 57- Masa equivalente del modo 3 en el punto de contacto.

$\Sigma F_{INERCIA}$ (KN)	0.131
Aceleración ($x=1.67m$) ($N s^2/m$)	1.000
$M_{e,3}$ (Ton)	0.131

Para su comparación, en la Tabla 58 se presentan las masas equivalentes para la viga objeto de estudio para un impacto situado en $L/6$ (caso actual) y para un impacto en $L/2$ (caso impacto central).

Tabla 58-Comparativa de masas equivalentes en viga para impacto excéntrico en $L/6$ y para impacto central.

Modo	Impacto en $L/6$		Impacto en $L/2$	
	$M_{e,n}$ (Ton)	$M_{e,n}/M_{estructura}$	$M_{e,n}$ (Ton)	$M_{e,n}/M_{estructura}$
1	0.730	93.0%	0.393	50.0%
2	0.223	28.4%	∞	∞
3	0.131	16.7%	0.131	16.7%

Como en los puntos $L/6$ y $L/2$ coinciden dos puntos de máxima amplitud del modo 3, los valores de masas equivalente de éste son idénticos en ambos puntos.

Para el modo 2, como el punto $L/2$ es un nodo del modo 2, este presenta masa equivalente infinita en un impacto central.

Por último, para el modo 1, el punto de contacto en el caso excéntrico ($L/6$) está muy alejado del punto de máxima amplitud, por lo que la masa equivalente en este caso es prácticamente el doble la masa equivalente en un impacto central.



4.2.14.2 Rigideces equivalentes de los modos de vibración en el punto de impacto

Para la obtención de la rigidez en el punto de impacto se aplica el método general explicado en el apartado 4.1.1.1. A continuación se calculan las rigideces equivalentes para los modos de vibración 1, 2 y 3 de la viga objeto de estudio.

Modo 1

Los resultados del cálculo y condensación de las fuerzas elásticas para el modo 1 de vibración se exponen en la Tabla 59:

Tabla 59- Valores de línea de influencia y fuerzas elásticas condensadas para el modo de vibración 1.

Coord. x (m)	Aproximación L. de Influen. (m)	FUERZA EN PUNTO q (KN/m)	FUERZA EN PUNTO CONDESADA (KN/m)	FUERZA EN PUNTO CONDESADA q _{eq} (KN)
0	0.000	0.00	0.00	0.00
0.5	0.454	2.67	1.21	0.61
1	0.809	5.27	4.26	2.13
1.5	0.988	7.74	7.64	3.82
2	0.998	10.02	10.00	5.00
2.5	0.988	12.05	11.91	5.95
3	0.969	13.79	13.36	6.68
3.5	0.941	15.19	14.29	7.15
4	0.905	16.21	14.67	7.33
4.5	0.861	16.84	14.49	7.25
5	0.809	17.05	13.79	6.90
5.5	0.750	16.84	12.63	6.31
6	0.685	16.21	11.10	5.55
6.5	0.613	15.19	9.31	4.65
7	0.536	13.79	7.39	3.69
7.5	0.454	12.05	5.47	2.74
8	0.368	10.02	3.69	1.84
8.5	0.279	7.74	2.16	1.08
9	0.187	5.27	0.99	0.49
9.5	0.094	2.67	0.25	0.13
10	0.000	0.00	0.00	0.00

Se representan gráficamente los resultados de la Tabla 59 para la línea de influencia aproximada y el campo de desplazamientos correspondiente al modo 1 en la Figura 251.

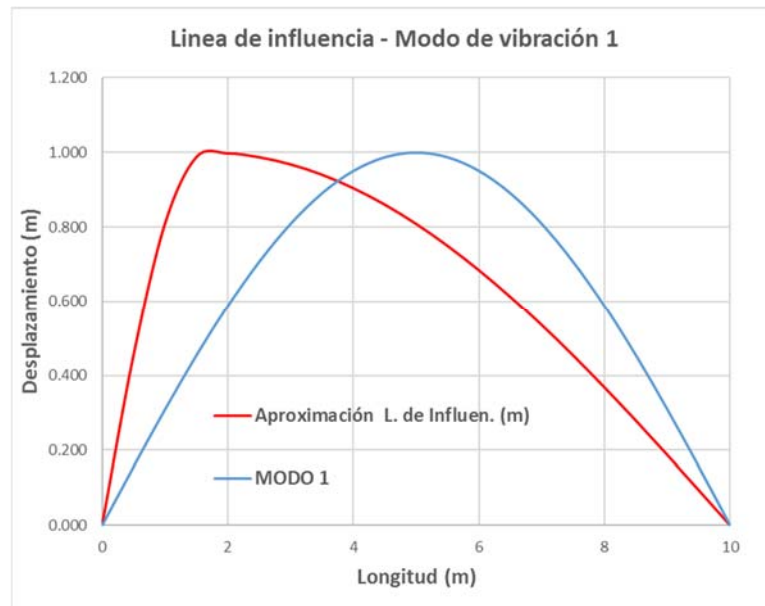


Figura 251- Representación gráfica de la línea de influencia y el campo de desplazamientos para el modo 1.

A partir de los datos de la Tabla 59, se suman las fuerzas elásticas condensadas. Dicha suma se divide por el desplazamiento del modo en el punto de contacto y se obtiene la rigidez del modo 1 en el punto de contacto. El resultado se muestra en la Tabla 60.

Tabla 60- Rigidez del modo 1 en el punto de contacto.

$\Sigma F_{ELASTICAS}(KN)$	79.303
Desplazam. (x=1.67m) (m)	0.500
$K_{e,1}(KN/m)$	158.61

Modo 2

Los resultados del cálculo y condensación de las fuerzas elásticas para el modo 1 de vibración se exponen en la Tabla 61. Sólo se muestran los resultados de la mitad del vano ya que la otra mitad se puede suponer independiente a efectos de rigidez en el punto de contacto.



Tabla 61- Valores de línea de influencia y fuerzas elásticas condensadas para el modo de vibración 2.

Coord. x (m)	Aproximación L. de Influen. (m)	FUERZA EN PUNTO q (KN/m)	FUERZA EN PUNTO CONDESADA (KN/m)	FUERZA EN PUNTO CONDESADA q _{eq} (KN)
0	0.000	0.00	0.00	0.00
0.25	0.233	42.67	9.96	2.49
0.5	0.454	84.28	38.26	9.57
0.75	0.649	123.82	80.42	20.10
1	0.809	160.32	129.70	32.42
1.25	0.924	192.86	178.18	44.54
1.5	0.988	220.66	217.94	54.48
1.75	0.999	243.02	242.83	60.71
2	0.988	259.40	256.20	64.05
2.25	0.962	269.39	259.27	64.82
2.5	0.924	272.75	251.98	63.00
2.75	0.872	269.39	235.04	58.76
3	0.809	259.40	209.86	52.46
3.25	0.734	243.02	178.45	44.61
3.5	0.649	220.66	143.30	35.83
3.75	0.556	192.86	107.15	26.79
4	0.454	160.32	72.78	18.20
4.25	0.346	123.82	42.86	10.71
4.5	0.233	84.28	19.68	4.92
4.75	0.118	42.67	5.01	1.25
5	0.000	0.00	0.00	0.00

Se representan gráficamente los resultados de la Tabla 61 para la línea de influencia aproximada y el campo de desplazamientos correspondiente al modo 2 en la Figura 252.

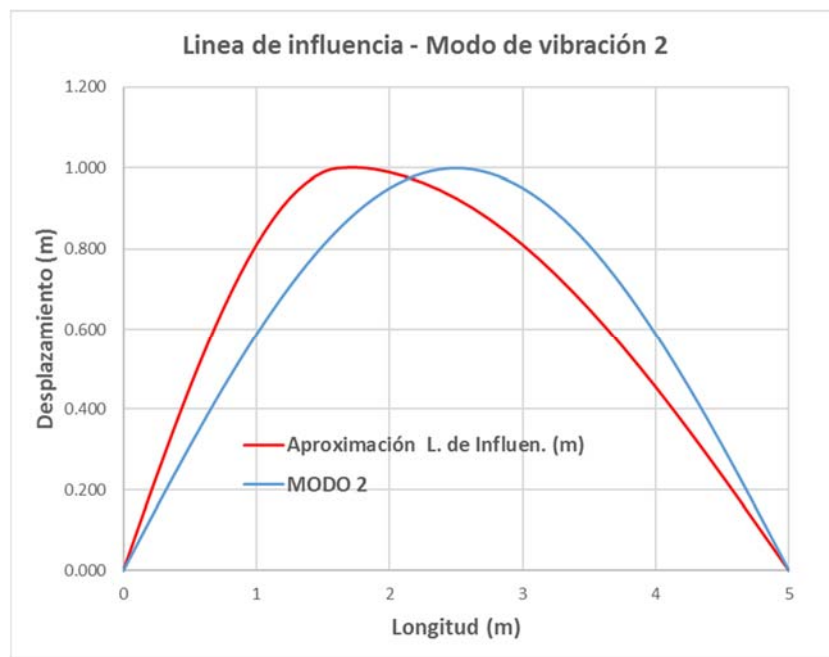


Figura 252- Representación gráfica de la línea de influencia y el campo de desplazamientos para el modo 2.

A partir de los datos de la Tabla 61, se suman las fuerzas elásticas condensadas. Dicha suma se divide por el desplazamiento del modo en el punto de contacto y se obtiene la rigidez del modo 2 en el punto de contacto. El resultado se muestra en la Tabla 62.



Tabla 62- Rigidez del modo 2 en el punto de contacto.

$\Sigma F_{ELASTICAS}(KN)$	669.7
Desplazam. (x=1.67m) (m)	0.87
$K_{e,2}(KN/m)$	773.3

Modo 3

Los resultados del cálculo y condensación de las fuerzas elásticas para el modo 3 de vibración se exponen en la Tabla 63. Sólo se muestran los resultados de un tercio del vano ya que el resto de la viga se puede suponer independiente a efectos de rigidez en el punto de contacto en el modo 3.

Tabla 63-Valores de línea de influencia y fuerzas elásticas condensadas para el modo de vibración 3.

Coord. x (m)	Aproximación L. de Influen. (m)	FUERZA EN PUNTO q (KN/m)	FUERZA EN PUNTO CONDESADA (KN/m)	FUERZA EN PUNTO CONDESADA q_{eq} (KN)
0.00	0.000	0.00	0.00	0.00
0.17	0.156	216.00	33.79	5.63
0.33	0.309	426.68	131.85	21.98
0.50	0.454	626.86	284.59	47.43
0.67	0.588	811.60	477.04	79.51
0.83	0.707	976.35	690.39	115.06
1.00	0.809	1117.07	903.73	150.62
1.17	0.891	1230.28	1096.18	182.70
1.33	0.951	1313.19	1248.92	208.15
1.50	0.988	1363.77	1346.98	224.50
1.67	1.000	1380.77	1380.77	230.13
1.83	0.988	1363.77	1346.98	224.50
2.00	0.951	1313.19	1248.92	208.15
2.17	0.891	1230.28	1096.19	182.70
2.33	0.809	1117.07	903.73	150.62
2.50	0.707	976.35	690.39	115.06
2.67	0.588	811.60	477.05	79.51
2.83	0.454	626.86	284.59	47.43
3.00	0.309	426.68	131.85	21.98
3.17	0.156	216.00	33.79	5.63
3.33	0.000	0.00	0.00	0.00

Se representan gráficamente los resultados de la Tabla 63 para la línea de influencia aproximada y el campo de desplazamientos correspondiente al modo 3 en la Figura 253. Como se puede observar en dicha figura, las curvas son coincidentes.

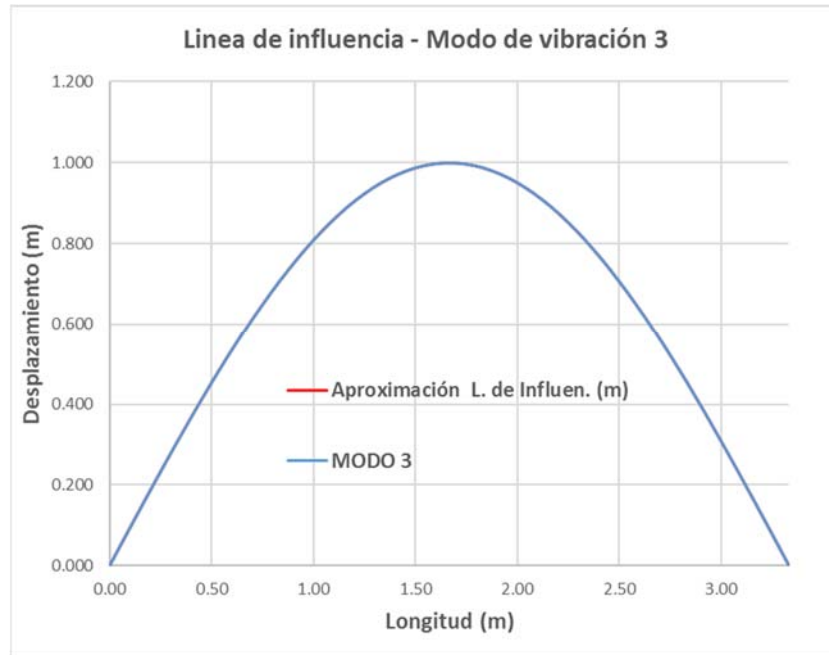


Figura 253- Representación gráfica de la línea de influencia y el campo de desplazamientos para el modo 3.

A partir de los datos de la Tabla 63, se suman las fuerzas elásticas condensadas. Dicha suma se divide por el desplazamiento del modo en el punto de contacto y se obtiene la rigidez del modo 2 en el punto de contacto. El resultado se muestra en la Tabla 64.

Tabla 64- Rigidez del modo 1 en el punto de contacto.

$\Sigma F_{ELASTICAS}(KN)$	2301.3
Desplazam. (x=1.67m) (m)	1.000
$K_{e,3}(KN/m)$	2301.3

Para su comparación, en la Tabla 65 se muestran los valores de la rigidez en el punto de contacto para los modos 1,2 y 3 en el caso de impacto excéntrico en $L/6$, y el caso del impacto central.

Tabla 65- Comparativa de rigideces para el punto de contacto en impacto excéntrico ($L/6$) y para impacto central.

Modo	$K_{e,n}(KN/m)$		$K_{e,n}(L/2) / K_{e,n}(L/6)$
	Impacto en $L/6$	Impacto en $L/2$	
1	159	85	53.6%
2	773	672	86.9%
3	2301	2301	100.0%

Como puede observarse en los resultados de la Tabla 65, las rigideces de los modos 1 y 2 son mayores en el caso de impacto excéntrico. Para el modo 3, dado que tanto en impacto central como en impacto excéntrico de $L/6$ el punto de impacto se presenta en un punto de máxima amplitud del modo, la rigidez es la misma.



4.2.14.3 Caso masa del proyectil diez veces la masa equivalente del modo 1 de la estructura ($\alpha=10$) y velocidad del proyectil previa al impacto ($V_{p,0}$) de 0.5 m/s. No consideración del peso propio del proyectil en el impacto.

Para el caso de $\alpha=10$, sólo se analiza un modo de vibración, dado que a lo largo del documento ha quedado demostrado que para este valor de α un único modo es suficiente para representar adecuadamente el desplazamiento estructural en un impacto.

Los datos de partida para el impacto de este apartado se muestran en la Tabla 66:

Tabla 66- Impacto excéntrico. Caso $\alpha=10$ y $V_p=0.5$ m/s. Datos de partida.

Datos viga		Datos proyectil	
L (m)	10.00	Mp(kg)	7300
b (m)	0.1	Vpo (m/s)	0.50
h (m)	0.1	Eo (N m)	912.5
A (m ²)	1.00E-02	C.M. (N s)	3650.0
I (m ⁴)	8.33333E-06	K _{PROYECTIL}	∞
E (KN / m)	2.10E+08	g(m/s ²)	0
ρ (kg /m ³)	7.85E+03	α	10.00
Punto de impacto "p" (m)	1.67	C _{pp}	0.00

En un impacto excéntrico, desde el punto de vista de la formulación desarrollada, sólo aparece una novedad con respecto a un impacto central. Esta novedad es el cálculo del parámetro $X(p)$. La razón de ser de este parámetro, como se explicó en el apartado 4.2.3.3, es condensar la fuerza de inercia que produce la masa del proyectil en el punto impacto, una vez esté ésta integrada en la estructura. Por este motivo, $X(p)$ toma siempre el valor unidad para un caso de impacto central (computa el 100% de la masa del proyectil) y menor o igual de uno en el caso de impacto excéntrico.

Una buena aproximación del parámetro $X(p)$ es el valor que toma el modo de vibración de deformada X , en el punto de impacto p . Para el impacto en $L/6$ y los tres primeros modos de vibración de flexión, se representa gráficamente el valor de $X(p)$ en la Figura 254.

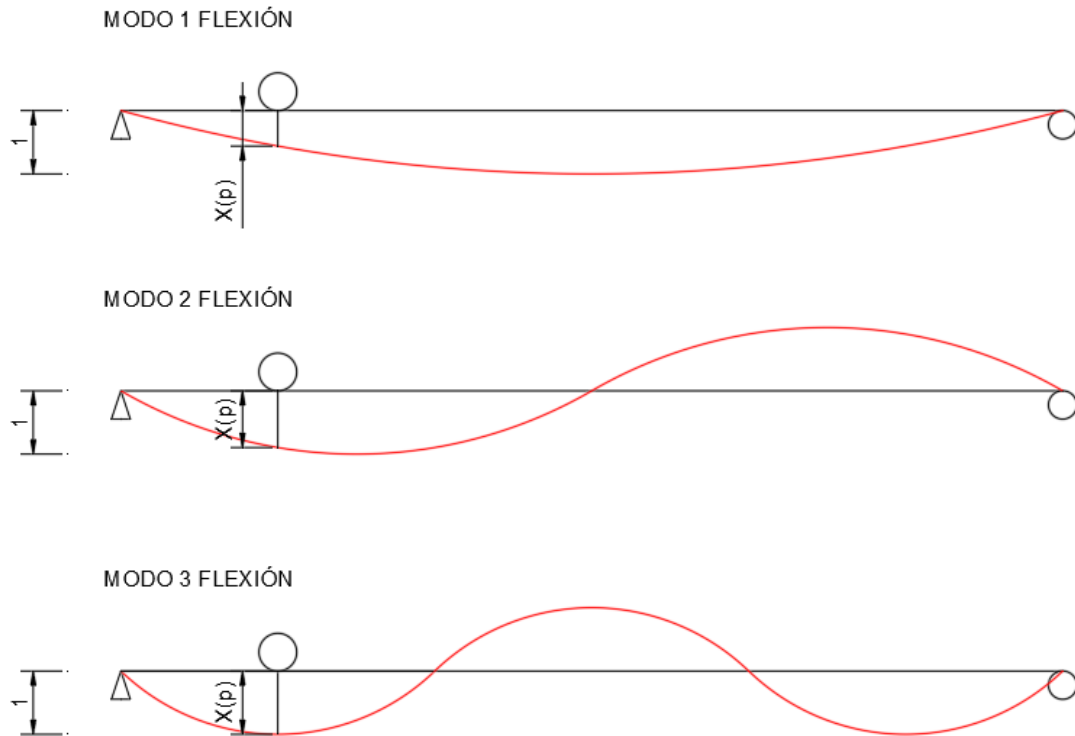


Figura 254-Representación gráfica del parámetro $X(p)$ para impacto en $L/6$ y los tres primeros modos de flexión de la viga.

A partir de la Figura 254, si aproximamos el modo 1 de vibración de la viga por una función seno:

$$X_1(p) = \text{sen}\left(\pi \frac{p}{L}\right)$$

El valor del modo para el punto de impacto ($p = L/6$) resulta: $X_1(p) = 0.5$

A partir de este valor de $X(p)$ y de los datos de partida expuestos en la Tabla 66 se calculan los parámetros necesarios para la aplicación de la formulación según lo expuesto en los apartados 4.2.3.3 y 4.2.7.4 de resolución del impacto. Sólo se analiza el primero modo de vibración, como se ha comentado previamente, por tratarse de un caso de $\alpha=10$. Los valores de los parámetros resultantes se resumen en la Tabla 67.



Tabla 67- Impacto excéntrico. Caso $\alpha=10$ y $V_p=0.5$ m/s. Parámetros resultantes.

Unidades	Modo	1
-	$L/L_{ef,1}$	1
m/s	$V_{p,1}$	0.50
Kg	$M_{e,1}$	730.00
-	α_1	10.00
-	$C_{m,1}$	0.91
m/s	$V_{i,1}$	0.45
kN/m	K_1	159.0
-	$C_{K,1}(M_p)$	1.00
kN/m	$K_{eq,1}$	159.0
rad/s	$W_{e,1}$	14.76
-	$X(p)_1$	0.50
Kg	$M_{p,eq1}$	3650.00
rad/s	$W_{ep,1}$	6.03
Nm	E_1	829.5
%	$E_1(\%)$	90.9%
Nm	$E_{A,1}$	829.5
%	$E_{A,1}(\%)$	91%
Nm	$E_{D,2}$	83.0
%	$E_{D,2}(\%)$	9%

Como se puede comprobar en la Tabla 67, la energía analizada considerando un modo de vibración resulta el 91%, quedando un 9% de energía sin considerar.

A partir de los datos anteriores, se aplica la formulación desarrollada para el cálculo del desplazamiento mediante la ecuación (328):

$$d_{e,1}(t) = \frac{0.5 \times 0.91 \times \text{sen}(6.03 t)}{6.03}$$

En la Figura 255 se comparan los resultados del desplazamiento estructural considerando un único modo de vibración $d_{e,1}(t)$, con los ofrecidos por el modelo desarrollado en Midas NFX en el punto de contacto.

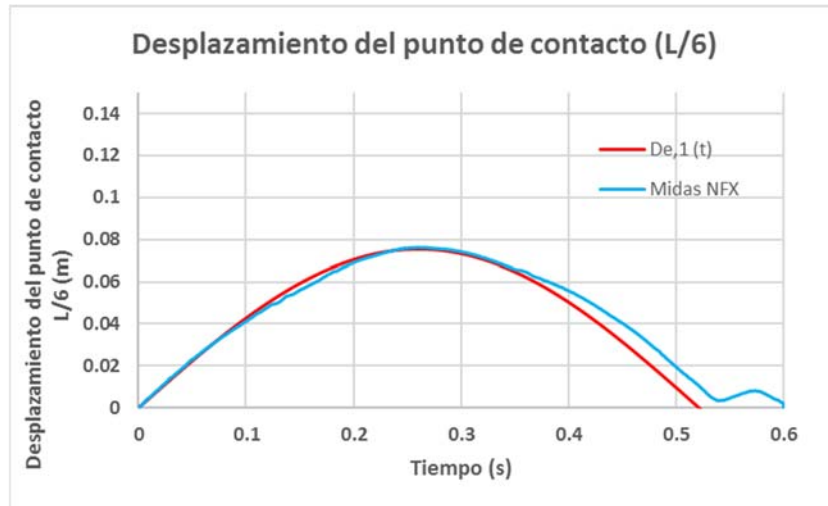


Figura 255- Comparativa de desplazamientos en punto de contacto entre Midas NFX y la formulación desarrollada. Caso $\alpha=10$ $V_p=0.5$ m/s.

Como se aprecia en la Figura 255, los resultados de la formulación desarrollada (curva roja) y los resultados del Midas NFX (curva azul) para el caso del impacto excéntrico estudiado, **son muy próximos.**

4.2.14.4 Caso masa del proyectil un tercio la masa equivalente del modo 1 de la estructura ($\alpha=0.31$) y velocidad del proyectil previa al impacto ($V_{p,0}$) de 0.5 m/s. No consideración del peso propio del proyectil en el impacto.

Para el caso de $\alpha=0.31$ se analizan tres modos de vibración. Los datos de partida para el impacto de este apartado se muestran en la Tabla 68:

Tabla 68- Impacto excéntrico. Caso $\alpha=0.31$ y $V_p=0.5$ m/s. Datos de partida.

Datos viga		Datos proyectil	
L (m)	10.00	Mp(kg)	223
b (m)	0.1	Vpo (m/s)	0.50
h (m)	0.1	Eo (N m)	27.9
A (m ²)	1.00E-02	C.M. (N s)	111.5
I (m ⁴)	8.33333E-06	K _{PROYECTIL}	∞
E (KN / m)	2.10E+08	g(m/s ²)	0
ρ (kg /m ³)	7.85E+03	α	0.31
Punto de impacto "p" (m)	1.67	C _{pp}	0.00



Para este caso de impacto excéntrico, como el punto de contacto es el mismo que en el caso anterior, el coeficiente $X(p)$ mantiene el mismo valor en el modo 1. Por tanto, para el punto de impacto ($p=L/6$) resulta: $X(p) = 0.5$

En el caso del modo 2, la deformada de este modo se puede aproximar por la siguiente función seno:

$$X_2(p) = \text{sen}\left(\pi \frac{2p}{L}\right)$$

Si se analiza el modo 2 para el punto de impacto ($p=L/6$) resulta: $X_2(p) = 0.86$.

Por último, en el caso del modo 3, la deformada de este modo también se puede aproximar por la siguiente función seno:

$$X_3(p) = \text{sen}\left(\pi \frac{3p}{L}\right)$$

Si se analiza el modo 3 para el punto de impacto ($p=L/6$) resulta: $X_3(p) = 1$.

A partir de estos tres valores de $X(p)$ y de los datos de partida expuestos en la Tabla 68, se calculan los parámetros necesarios para la aplicación de la formulación según lo expuesto en los apartados 4.2.3.3 y 4.2.7.4 de resolución del impacto. Los valores de los parámetros resultantes se resumen en la Tabla 69.

Tabla 69- Impacto excéntrico. Caso $\alpha=10$ y $V_p=0.5$ m/s. Parámetros resultantes.

Unidades	Modo	1	Modo	2	Modo	3
-	$L/L_{ef,1}$	1	$L/L_{ef,2}$	2	$L/L_{ef,3}$	3
m/s	$V_{p,1}$	0.50	$V_{p,2}$	0.44	$V_{p,3}$	0.31
Kg	$M_{e,1}$	730.00	$M_{e,2}$	223.00	$M_{e,3}$	131.00
-	α_1	0.31	α_2	1.00	α_3	1.70
-	$C_{m,1}$	0.23	$C_{m,2}$	0.50	$C_{m,3}$	0.63
m/s	$V_{i,1}$	0.12	$V_{i,2}$	0.22	$V_{i,3}$	0.19
kN/m	K_1	159.0	K_2	773.0	K_3	2301.0
-	$C_{K,1}(M_p)$	1.00	$C_{K,2}(M_p)$	1.00	$C_{K,3}(M_p)$	1.00
kN/m	$K_{eq,1}$	159.0	$K_{eq,2}$	773.0	$K_{eq,3}$	2301.0
rad/s	$W_{e,1}$	14.76	$W_{e,2}$	58.88	$W_{e,3}$	132.53
-	$X(p)_1$	0.50	$X(p)_2$	0.86	$X(p)_3$	1.000
Kg	$M_{p,eq1}$	111.50	$M_{p,eq2}$	191.78	$M_{p,eq3}$	223.00
rad/s	$W_{ep,1}$	13.75	$W_{ep,2}$	43.17	$W_{ep,3}$	80.62
Nm	E_1	6.5	E_2	10.7	E_3	6.7
%	E_1 (%)	23.4%	E_2 (%)	38.3%	E_3 (%)	24.1%
Nm	$E_{A,1}$	6.5	$E_{A,2}$	17.2	$E_{A,3}$	23.9
%	$E_{A,1}$ (%)	23%	$E_{A,2}$ (%)	62%	$E_{A,3}$ (%)	86%
Nm	$E_{D,2}$	21.4	$E_{D,3}$	10.7	$E_{D,4}$	4.0
%	$E_{D,2}$ (%)	77%	$E_{D,3}$ (%)	38%	$E_{D,4}$ (%)	14%



Como se puede comprobar en la Tabla 69, la energía total analizada considerando tres modos de vibración resulta el 86%, quedando un 14% de energía sin considerar.

Nótese en dicha tabla, que la masa del proyectil para el caso de estudiado ($\alpha=0.31$) es exactamente la masa equivalente del modo 2 ($\alpha_2=1$) para el punto de impacto. En esta misma tabla también se muestra que el modo 2 es el modo que más energía absorbe (38.3%) respecto de la energía cinética inicial.

A partir de los datos de la Tabla 69, se aplica la formulación desarrollada para el cálculo del desplazamiento mediante la ecuación (385):

$$d_{e,TOTAL}(t) = \frac{0.5 \times 0.23 \times \text{sen}(13.75 t)}{13.75} + \frac{0.44 \times 0.5 \times \text{sen}(59 t)}{43.17} + \frac{0.31 \times 0.63 \times \text{sen}(133 t)}{80.62}$$

En la Figura 256 se comparan los resultados del desplazamiento estructural en el punto de impacto de la viga, considerando los tres primeros modos de vibración $d_{e,TOTAL}(t)$, con los ofrecidos por el modelo desarrollado en Midas NFX en el punto de contacto.

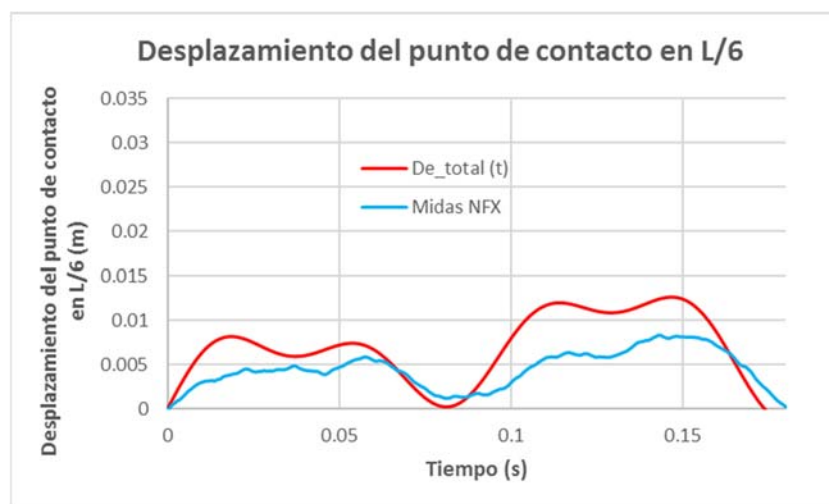


Figura 256- Comparativa de desplazamientos en punto de contacto entre Midas NFX y la formulación desarrollada. Caso $\alpha=10$ $V_p=0.5$ m/s.

Como se puede apreciar en la Figura 256, a pesar de que la forma de las deformadas entre ambas curvas se aproximan y que la formulación (curva roja) refleja adecuadamente la aportación de los modos dos y tres, el desplazamiento que ésta predice es ligeramente mayor que el obtenido con Midas NFX (curva azul). Si se compara la diferencia de resultados del impacto excéntrico analizado, con resultados de impactos centrales, se aprecia un pequeño incremento de la diferencia entre curvas, como ya se había adelantado.



4.2.14.5 Análisis conjunto.

Para ver los 2 casos expuestos anteriormente en su conjunto, y evaluar más fácilmente la precisión de los resultados, se muestran en la Figura 257 los resultados de los impactos excéntricos analizados en función de su correspondiente valor del parámetro α .

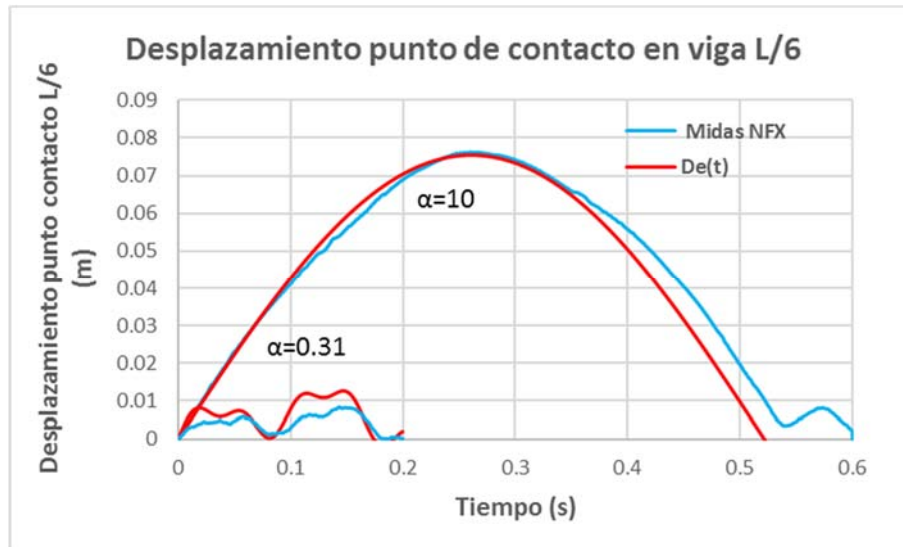


Figura 257- Comparativa de desplazamientos en impacto excéntrico de viga entre Midas NFX y la formulación desarrollada. Casos $\alpha=10$ y $\alpha=0.31$ con $V_p=0.5\text{m/s}$.

A la vista de los resultados de la Figura 257, se concluye que **la formulación desarrollada también permite calcular con precisión suficiente los impactos excéntricos.**



5 ANÁLISIS EXPERIMENTAL

Durante todo el apartado 4 de la presente tesis, se ha validado la formulación desarrollada con respecto a los resultados ofrecidos por el software de elementos finitos MIDAS NFX.

Sin embargo, no se quería finalizar esta investigación sin comprobar la formulación, y el propio Midas NFX, con algún experimento real.

Dos han sido las vías utilizadas para la comprobación experimental:

- En primer lugar, se plantea el objetivo de comprobar la formulación en lo que a desplazamiento estructural se refiere. Para ello, se han realizado una serie de ensayos en el Laboratorio de Estructuras de la Universidad de Cantabria. Estos ensayos consisten en someter a estructuras sencillas a una serie de impactos. Bajo esas condiciones, se procederá a medir los desplazamientos producidos en las estructuras a través de los equipos de instrumentación y monitorización disponibles en el laboratorio.
- En segundo lugar, se plantea el objetivo de comprobar la formulación en lo que la fuerza de contacto se refiere. Realizar un ensayo real propio con la capacidad de medir la fuerza de contacto, ha sido inviable desde el punto de vista técnico. Por este motivo, se han utilizado para la comprobación resultados de ensayos realizados por otros investigadores.

5.1 ENSAYOS DE MEDICIÓN DE DESPLAZAMIENTOS

Como se ha adelantado anteriormente, para la comprobación de la formulación desarrollada se han planteado una serie de ensayos en el laboratorio de estructuras de la universidad de Cantabria. En estos ensayos, a partir del equipo de instrumentación y monitorización de estructuras disponibles en dicho laboratorio, se ha obtenido el desplazamiento real del punto de contacto de dos estructuras cuando son sometidas a diferentes impactos. Estos resultados se compararán con los obtenidos de la aplicación de la formulación desarrollada al caso concreto de estudio.

A continuación, se describen los ensayos realizados, el equipo de medida utilizado y los resultados obtenidos.



5.1.1 Descripción de los ensayos

Se plantean dos estructuras sencillas para ser sometidas a diferentes impactos y comprobar así la formulación en lo que a deformación estructural bajo impacto se refiere.

Ambas estructuras son vigas metálicas simplemente apoyadas. Una de ellas de mayor canto, que produce **un impacto más brusco** debido a su rigidez, y la otra, de menor canto, más flexible y **con impactos mas suaves**. El canto es la única diferencia entre ambas vigas, siendo el resto de parámetros idénticos.

Los ensayos presentan la misma mecánica en ambas estructuras. Se deja caer libremente una masa M_p desde una altura H sobre el centro de luz de la viga concreta, y se mide la deformación bajo el punto de impacto $d_e(t)$. La secuencia se ilustra en la Figura 258.

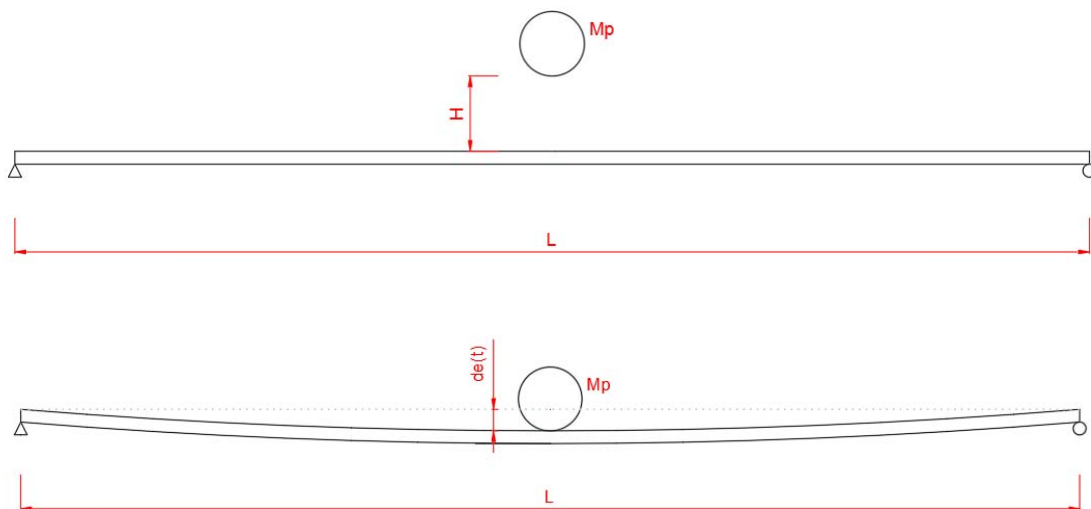


Figura 258-Esquema de ensayos realizados en el Laboratorio de estructuras de la Universidad de Cantabria.

La masa que se deja caer libremente sobre la viga desde la altura H , en el instante previo al impacto, tiene una velocidad $V_{p,o}$.

$$V_{p,o} = \sqrt{2gH}$$

Siendo g la aceleración de la gravedad.

Como se ha comentado, la diferencia principal entre ambas vigas ensayas es el canto de cada una. Ambas son vigas metálicas de secciones macizas de dimensiones $h \times b$, como muestra la Figura 259.

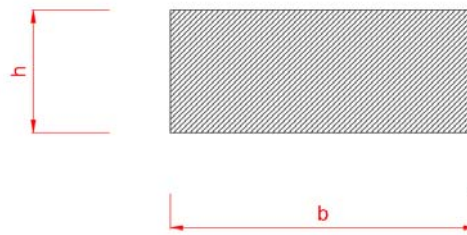


Figura 259-Sección de las vigas metálicas ensayadas.

Todos los ensayos se ejecutan dejando caer libremente la masa, por lo que el impacto se produce en la dirección paralela a la gravedad. Por este motivo, en los cálculos realizados con la formulación desarrollada **se tiene en consideración el efecto del peso propio del proyectil.**

La casuística de ensayos realizados, así como las principales características de las vigas y de los propios ensayos, se muestran en la Tabla 70:

Tabla 70-Casuística de ensayos realizados

Ensayo	Viga	L (m)	b (m)	h (m)	H(m)	M _p (Kg)	V _{po} (m/s)	α	C _{pp}
1	Flexible	1.00	0.030	0.003	0.000	2.55	0.00	7.2	427
2		1.00	0.030	0.003	0.022	2.55	0.66	7.2	0.98
3		1.00	0.030	0.003	0.096	2.55	1.37	7.2	0.47
4		1.00	0.030	0.003	0.001	3.50	0.17	9.9	4.45
5		1.00	0.030	0.003	0.023	3.50	0.67	9.9	1.10
6	Rígida	1.00	0.030	0.012	0.001	3.50	0.17	2.5	0.63
7		1.00	0.030	0.012	0.023	3.50	0.67	2.5	0.16
8		1.00	0.030	0.012	0.010	5.00	0.43	3.5	0.28
9		1.00	0.030	0.012	0.037	5.00	0.85	3.5	0.14
10		1.00	0.030	0.012	0.110	5.00	1.47	3.5	0.08

Como se puede ver en la Tabla 70, todos los ensayos realizados presentan un parámetro $\alpha > 1$. Por este motivo sólo se ha considerado en la formulación desarrollada **la aportación al desplazamiento de los tres primeros modos de vibración activos.**

A partir de los valores referidos al coeficiente de peso propio C_{pp} de la Tabla 70, se puede observar como, a pesar de dejar caer masas semejantes desde alturas parecidas en ambas vigas, la viga rígida es mucho menos susceptible de los efectos derivados del peso propio del proyectil.

En la Figura 260 y en la Figura 261, se muestran dos imágenes correspondientes a los ensayos realizados en el laboratorio de estructuras de la Universidad de Cantabria sobre las vigas denominadas “flexible” y “rígida”, respectivamente.



Figura 260-Ensayo sobre viga "flexible".



Figura 261-Ensayo sobre viga "rígida".



5.1.2 Equipo de medida

El equipo de medida utilizado para los ensayos y para la calibración de los sensores, consta de los siguientes elementos:

- **Equipo de adquisición de datos:** NI-PXIe 1078: Es el elemento encargado de adquirir y guardar los datos procedentes de los sensores.
- **Fuente de alimentación:** Proporciona el voltaje de ± 5 voltios para el transductor de desplazamiento.
- **S.A.I.:** Sistema de alimentación ininterrumpida. Además de proporcionar corriente ante un corte de suministro eléctrico que se produjera durante el ensayo, se encarga de eliminar posibles picos de tensión provenientes de la red.
- **Extensómetro bidireccional de 120 Ω :** Sensor que consta de 2 bandas extensométricas perpendiculares entres sí. La banda orientada según el eje longitudinal de la estructura se encarga de registrar la deformación en el punto objeto de estudio de la estructura. La banda que se orienta en sentido transversal, tiene por objetivo eliminar los efectos debidos a incrementos térmicos.
- **Transductor de desplazamiento:** Sensor para la medición de desplazamientos con precisión de centésimas de milímetro. Utilizado para la calibración del extensómetro.
- **Labview:** Software utilizado para el desarrollo de los programas encargados de la medición y el tratamiento de datos.

Para la realización de los ensayos, se han desarrollado dos programas específicos para impactos mediante el software Labview.

- El primero de ellos se trata de un programa de medición estática utilizado para la calibración del extensómetro, sensor que se muestra en la Figura 267. Dicha calibración se realiza mediante un ensayo estático realizado de manera conjunta con el extensómetro y el transductor de desplazamiento, sensor que se muestra en la Figura 268. En este ensayo estático se obtiene la correlación entre la deformación medida por el extensómetro y el desplazamiento real del punto donde se ha ubicado el extensómetro. El extensómetro se ha situado en el centro de luz de ambas vigas, en la cara inferior de la viga para evitar ser dañado durante la realización de los ensayos.



- Para los ensayos dinámicos, se ha desarrollado un segundo programa mediante Labview para los ensayos de impacto. Este software permite registrar datos con una frecuencia de 1000 Hz con objeto de caracterizar el comportamiento dinámico de la estructura con precisión suficiente.

Por último, se ha procedido a la realización de los ensayos descritos en el apartado 5.1.1 utilizando el programa de impactos desarrollado ya calibrado, y ubicando únicamente el extensómetro en el centro de cada viga.

Todas las conexiones de cables de los sensores han sido estañadas y aisladas mediante fundas termoretráctiles para mejorar la precisión del sistema y estabilizar la medición. El extensómetro se ha conectado en medio puente de wheatstone, como se muestra en la Figura 262.

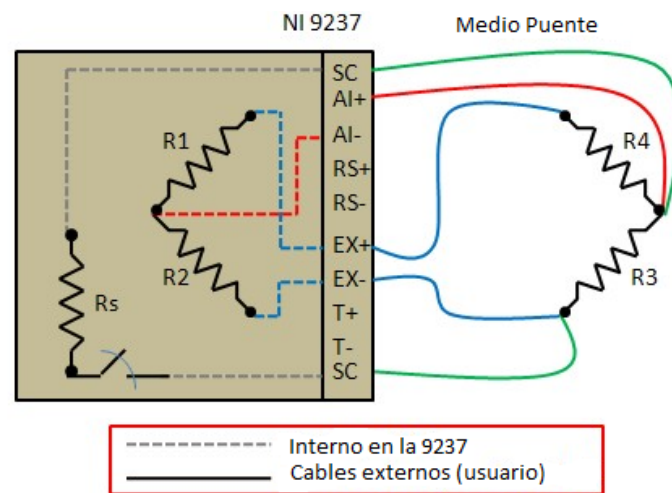


Figura 262-Esquema de conexión de medio puente de Wheatstone.

El diseño de los ensayos, la realización del código de los programas utilizados para la medición, la conexión y calibración de los equipos, y la ejecución de los ensayos, ha sido llevada a cabo por el doctorando específicamente para la presente tesis.

La parte más compleja de los ensayos ha sido, sin duda, el diseño de un sistema de medida que no afecte al comportamiento dinámico de la estructura y tenga precisión suficiente. Las propias dificultades que impone dejar caer una masa sobre una estructura y que esta se mantenga en rango elástico, limitan el tamaño de la estructura a ensayar. En estructuras pequeñas, los sensores aportan masa y, sobre todo, rigidez, pudiendo modificar las características dinámicas del sistema ensayado. La rigidez de los sensores, en general, es pequeña para ensayos estáticos, pero pueden comportarse de manera mucho más rígida ante cargas rápidas como un impacto. El mayor problema reside en que no es fácil detectar este comportamiento.



Figura 263-Cadena completa de equipo de medida.

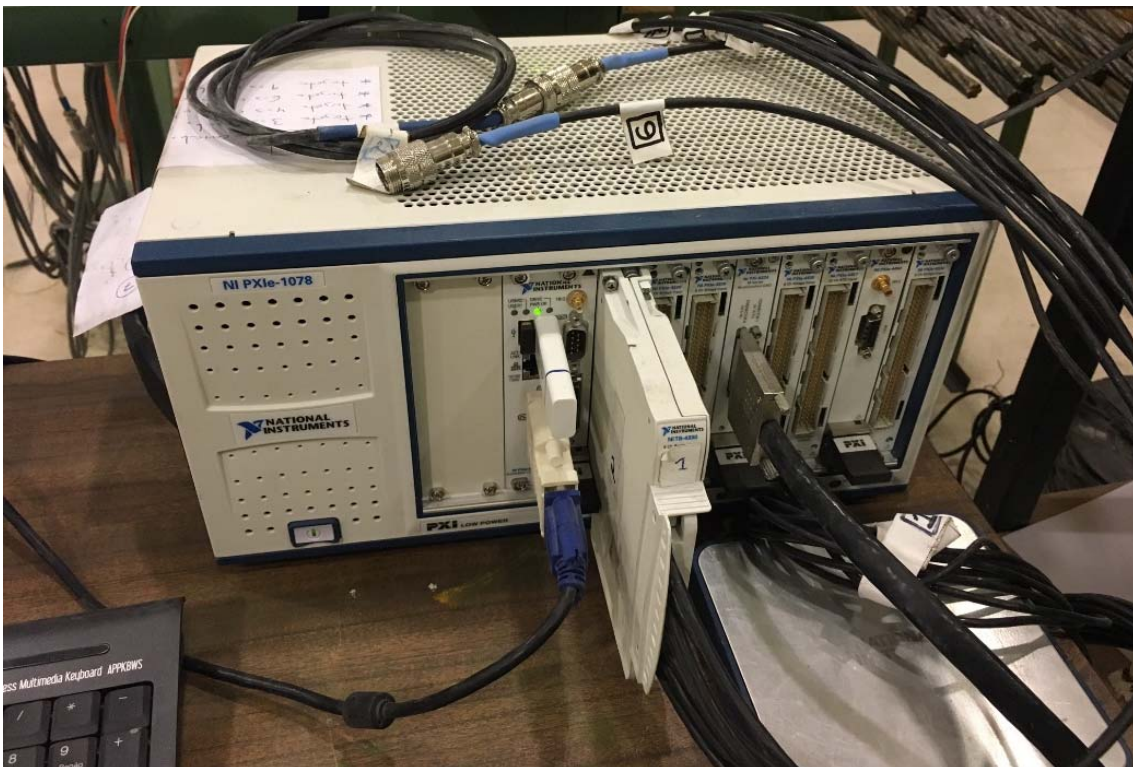


Figura 264-Equipo de adquisición de datos PXI.



Figura 265-Fuente de alimentación.



Figura 266-Sistema de alimentación ininterrumpida.



Figura 267-Extensómetro bidireccional de 120 Ω.



Figura 268-Transductor de desplazamiento para calibración.



5.1.3 Impacto transversal en viga flexible.

A continuación, se muestran los resultados de los 5 ensayos realizados sobre la viga flexible.

5.1.3.1 Ensayo 1: Altura de caída de proyectil nula. Masa del proyectil siete veces la masa equivalente del modo 1 de la estructura ($\alpha=7.2$) y velocidad del proyectil previa al impacto ($V_{p,o}$) nula. Impacto totalmente influenciado por el peso propio del proyectil ($C_{pp} = \infty$).

En la Tabla 71 se muestran los principales datos de partida del ensayo 1:

Tabla 71-Ensayo 1: $\alpha=7.2$ $V=0$ m/s. Datos de partida

Datos viga		Datos proyectil	
L (m)	1.00	Mp(kg)	2.55
b (m)	0.03	Vpo (m/s)	0.00
h (m)	0.003	Eo (N m)	0.0
A (m ²)	9.00E-05	C.M. (N s)	0.0
I (m ⁴)	6.75E-11	K _{PROYECTIL}	∞
E (KN / m)	2.10E+08	g(m/s ²)	9.806
ρ (kg /m ³)	7.85E+03	α	7.22
Punto de impacto "p" (m)	0.50	C _{pp}	∞

A partir de los datos expuestos en la Tabla 71, se calculan los parámetros necesarios para la aplicación de la formulación desarrollada según lo expuesto en los apartados 4.2.5.4 y 4.2.7.4 de resolución del impacto. Los valores de los parámetros resultantes se resumen en la Tabla 72.



Tabla 72- Parámetros resultantes para ensayo 1 Caso $\alpha=7.2$ $V_p=0.0m/s$.

Unidades	Modo	1	Modo	3	Modo	5
-	$L/L_{ef,1}$	1	$L/L_{ef,3}$	3	$L/L_{ef,5}$	5
m/s	$V_{p,1}$	0.00	$V_{p,3}$	0.00	$V_{p,5}$	0.00
Kg	$M_{e,1}$	0.35	$M_{e,3}$	0.12	$M_{e,5}$	0.07
-	α_1	7.22	α_3	21.66	α_5	36.09
-	$C_{m,1}$	0.88	$C_{m,3}$	0.96	$C_{m,5}$	0.97
m/s	$V_{l,1}$	0.00	$V_{l,3}$	0.00	$V_{l,5}$	0.00
kN/m	K_1	0.680	K_3	18	K_5	85.1
-	$C_{K,1}(M_p)$	1.00	$C_{K,3}(M_p)$	1.00	$C_{K,5}(M_p)$	1.00
kN/m	$K_{eq,1}$	0.68	$K_{eq,3}$	18.4	$K_{eq,5}$	85.1
rad/s	$W_{e,1}$	43.89	$W_{e,3}$	394.99	$W_{e,5}$	1097.19
-	$X(p)_1$	1.00	$X(p)_3$	1.0	$X(p)_5$	1.000
Kg	$M_{p,eq1}$	2.55	$M_{p,eq3}$	2.55	$M_{p,eq5}$	2.55
rad/s	$W_{ep,1}$	15.31	$W_{ep,3}$	82.98	$W_{ep,5}$	180.15
Nm	E_1	0.0	E_3	0.0	E_5	0.0

En el ensayo 1, la altura de caída libre del proyectil es nula por lo que no hay energía cinética inicial a repartir. Dado que en este caso todo es debido a la acción del peso propio, **es el modo 1 el encargado de absorber el 100% de la energía potencial que libera el proyectil.**

A partir de lo expuesto y según los datos de la Tabla 72, se aplica la formulación desarrollada para el cálculo del desplazamiento mediante las ecuaciones (361) para el término de peso propio y (385) para el término cinético:

$$d_{e,pp}(t) = \frac{9.806 \times 2.55}{680} \times (1 - \cos(15.31 t))$$

$$d_{e,vp}(t) = \frac{0 \times 0.88 \times \sin(15.31 t)}{15.31} + \frac{0 \times 0.96 \times \sin(395 t)}{82.98} + \frac{0 \times 0.97 \times \sin(1097 t)}{180} = 0$$

El desplazamiento total del centro de la viga se obtiene como suma de los términos de peso propio y cinético:

$$d_{e,TOTAL}(t) = d_{e,vp}(t) + d_{e,pp}(t)$$

Dado que en este ensayo no hay término cinético:

$$d_{e,TOTAL}(t) = d_{e,pp}(t)$$

En la Figura 269 se comparan los resultados del desplazamiento estructural en el punto de impacto de la viga, el centro de luz, considerando el efecto de peso propio con la formulación



desarrollada ($d_{e,TOTAL}(t)$), con los recogidos del ensayo real realizado en el laboratorio ($d_{e,ENSAYO}(t)$). Para evaluar la influencia del peso propio en la deformada total, se incluye también en todas las figura la curva correspondiente a la acción del peso propio del proyectil ($d_{e,pp}(t)$), que en este caso coincide con la deformada total.

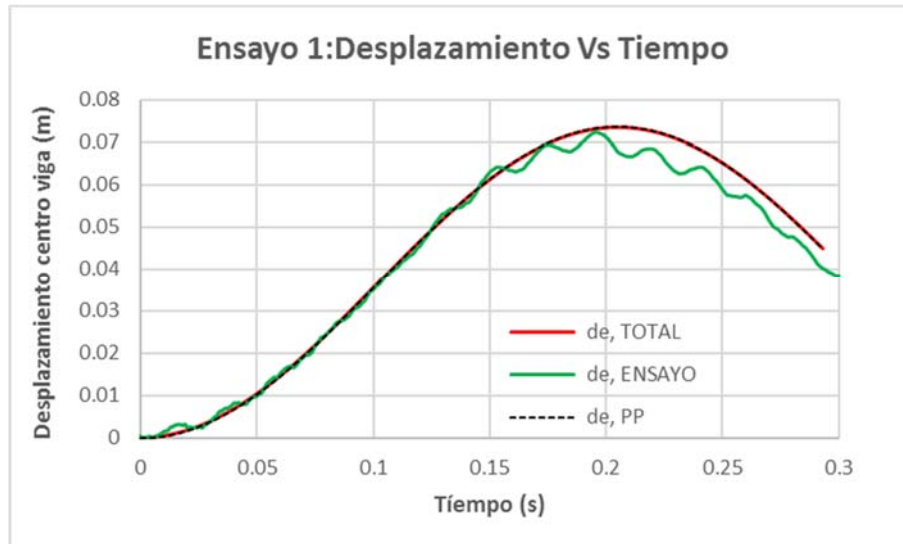


Figura 269-Registro desplazamiento-tiempo del centro de viga. Ensayo 1: $\alpha=7.2$ $V=0m/s$.

A partir de los datos expuestos en la Figura 269 se puede concluir que, para este caso, en el cual prácticamente todo el desplazamiento es debido al efecto gravitatorio ($C_{PP} = \infty$), la formulación se adapta muy bien al desplazamiento producido en el ensayo real. Se dice “prácticamente todo el desplazamiento es debido al efecto gravitatorio”, porque en el ensayo real, **hacer que la altura de caída sea exactamente nula no es tarea sencilla.**

Como se puede ver en la línea verde de la figura, la cual muestra los resultados del ensayo real, la ligera activación del tercer modo producida, hace que el contacto proyectil-estructura sea intermitente. Este hecho es la fuente de la diferencia entre ambas curvas en la zona de máximo desplazamiento. No obstante, se observa cómo la deformada real responde perfectamente a la curva tipo coseno que predice la formulación.



5.1.3.2 *Ensayo 2: Altura de caída de proyectil 2.2 cm. Masa del proyectil siete veces la masa equivalente del modo 1 de la estructura ($\alpha=7.2$) y velocidad del proyectil previa al impacto ($V_{p,0}$) 0.66 m/s. Alta influencia del peso propio del proyectil ($C_{pp} = 0.98$).*

Para el segundo ensayo, la altura de caída de la masa deja de ser nula como en el ensayo anterior, para que exista término cinético. En la Tabla 73 se muestran los principales datos de partida del ensayo 2:

Tabla 73- Ensayo 2: $\alpha=7.2$ $V=0.66$ m/s. Datos de partida

Datos viga		Datos proyectil	
L (m)	1.00	Mp (kg)	2.55
b (m)	0.03	Vpo (m/s)	0.66
h (m)	0.003	Eo (N m)	0.55
A (m ²)	9.00E-05	C.M. (N s)	1.67
I (m ⁴)	6.75E-11	K _{PROYECTIL}	∞
E (KN / m)	2.10E+08	g(m/s ²)	9.806
ρ (kg /m ³)	7.85E+03	α	7.2
Punto de impacto "p" (m)	0.50	C _{pp}	0.98

A partir de los datos expuestos en la Tabla 73, se calculan los parámetros necesarios para la aplicación de la formulación desarrollada según lo expuesto en los apartados 4.2.5.4 y 4.2.7.4 de resolución del impacto. Los valores de los parámetros resultantes se resumen en la Tabla 74.

Tabla 74- Parámetros resultantes para ensayo 2 Caso $\alpha=7.2$ $Vp=0.66$ m/s.

Unidades	Modo	1	Modo	3	Modo	5
-	L/L _{ef,1}	1	L/L _{ef,3}	3	L/L _{ef,5}	5
m/s	V _{p,1}	0.66	V _{p,3}	0.23	V _{p,5}	0.05
Kg	M _{e,1}	0.35	M _{e,3}	0.12	M _{e,5}	0.07
-	α_1	7.22	α_3	21.66	α_5	36.09
-	C _{m,1}	0.88	C _{m,3}	0.96	C _{m,5}	0.97
m/s	V _{i,1}	0.58	V _{i,3}	0.22	V _{i,5}	0.05
kN/m	K ₁	0.680	K ₃	18	K ₅	85.1
-	C _{K,1} (Mp)	1.00	C _{K,3} (Mp)	1.00	C _{K,5} (Mp)	1.00
kN/m	K _{eq,1}	0.68	K _{eq,3}	18.4	K _{eq,5}	85.1
rad/s	W _{e,1}	43.89	W _{e,3}	394.99	W _{e,5}	1097.19
-	X(p) ₁	1.00	X(p) ₃	1.0	X(p) ₅	1.000
Kg	M _{p,eq1}	2.55	M _{p,eq3}	2.55	M _{p,eq5}	2.55
rad/s	W _{ep,1}	15.31	W _{ep,3}	82.98	W _{ep,5}	180.15
Nm	E ₁	0.5	E ₃	0.1	E ₅	0.0
%	E ₁ (%)	87.8%	E ₃ (%)	11.6%	E ₅ (%)	0.5%
Nm	E _{A,1}	0.5	E _{A,3}	0.5	E _{A,5}	0.6
%	E _{A,1} (%)	88%	E _{A,3} (%)	99%	E _{A,5} (%)	100%
Nm	E _{D,3}	0.1	E _{D,5}	0.0	E _{D,7}	0.0
%	E _{D,3} (%)	12%	E _{D,5} (%)	1%	E _{D,7} (%)	0%



Como se puede apreciar en el balance energético mostrado en la Tabla 74, la energía analizada al considerar tres modos de vibración es el 100% de la energía cinética inicial.

A partir de lo expuesto y según los datos de la Tabla 74, se aplica la formulación desarrollada para el cálculo del desplazamiento mediante las ecuaciones (361) para el término de peso propio y (385) para el término cinético:

$$d_{e,pp}(t) = \frac{gM_p}{K_1} (1 - \cos(w_{ep} t)) = \frac{9.806 \times 2.55}{680} \times (1 - \cos(15.31 t))$$
$$d_{e,vp}(t) = \frac{0.66 \times 0.88 \times \text{sen}(15.31 t)}{15.31} + \frac{0.23 \times 0.96 \times \text{sen}(395 t)}{82.98} + \frac{0.05 \times 0.97 \times \text{sen}(1097 t)}{180}$$

El desplazamiento total del centro de la viga se obtiene como suma de los términos de peso propio y cinético:

$$d_{e,TOTAL}(t) = d_{e,vp}(t) + d_{e,pp}(t)$$

En la Figura 270 se comparan los resultados del desplazamiento estructural en el punto de impacto de la viga, el centro de luz, considerando los tres primeros modos de vibración y el efecto de peso propio ($d_{e,TOTAL}(t)$), con los recogidos del ensayo real realizado en el Laboratorio ($d_{e,ENSAYO}(t)$). Para evaluar la influencia del peso propio en la deformada total, se incluye también en la figura la curva correspondiente a la acción del peso propio del proyectil ($d_{e,pp}(t)$).

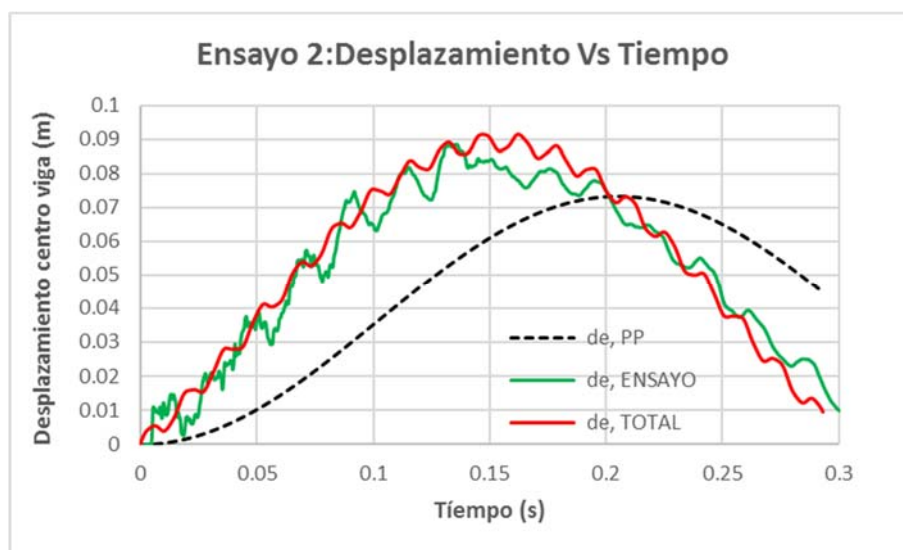


Figura 270- Registro desplazamiento-tiempo del centro de viga. Ensayo 2: $\alpha=7.2$ V=0.66 m/s.



Como se puede apreciar en los resultados mostrados en la Figura 270, la formulación desarrollada (curva roja) y el ensayo real (curva verde) presentan resultados muy próximos. En dicha gráfica se observa también que la componente que proporciona el peso propio (curva negra discontinua) según la formulación es muy importante, pero solamente si se le añade el término cinético se obtiene el mismo desplazamiento máximo y en el mismo instante que en el ensayo real.

A lo largo de todo el documento, cuando se han comparado los resultados de la formulación y del Midas NFX, se ha puesto de manifiesto que, a pesar de la gran coincidencia de resultados entre ambos, la formulación predice una mayor vibración sobre la onda principal (ver Figura 184). A la vista de los resultados de Figura 270, y del resto de ensayos reales, se puede concluir que la formulación desarrollada se acerca más al comportamiento medido en los ensayos reales que el propio Midas NFX.

5.1.3.3 Ensayo 3: Altura de caída de proyectil 9.6 cm. Masa del proyectil siete veces la masa equivalente del modo 1 de la estructura ($\alpha=7.2$) y velocidad del proyectil previa al impacto ($V_{p,o}$) 1.37 m/s. Mediana influencia del peso propio del proyectil ($C_{pp} = 0.47$).

Para el tercer ensayo se aumenta la altura de caída con respecto al ensayo 2. En la Tabla 75 se muestran los principales datos de partida del ensayo 3:

Tabla 75- Ensayo 3: $\alpha=7.2$ $V=1.37$ m/s. Datos de partida

Datos viga		Datos proyectil	
L (m)	1.00	Mp(kg)	2.55
b (m)	0.03	Vpo (m/s)	1.37
h (m)	0.003	Eo (N m)	2.39
A (m ²)	9.00E-05	C.M. (N s)	3.49
I (m ⁴)	6.75E-11	K _{PROYECTIL}	∞
E (KN / m)	2.10E+08	g(m/s ²)	9.806
ρ (kg /m ³)	7.85E+03	α	7.2
Punto de impacto "p" (m)	0.50	C _{pp}	0.47

A partir de los datos expuestos en la Tabla 75, se calculan los parámetros necesarios para la aplicación de la formulación desarrollada según lo expuesto en los apartados 4.2.5.4 y 4.2.7.4 de resolución del impacto. Los valores de los parámetros resultantes se resumen en la Tabla 76.



Tabla 76- Parámetros resultantes para ensayo 3 Caso $\alpha=7.2$ $V_p=1.37$ m/s.

Unidades	Modo	1	Modo	3	Modo	5
-	$L/L_{ef,1}$	1	$L/L_{ef,3}$	3	$L/L_{ef,5}$	5
m/s	$V_{p,1}$	1.37	$V_{p,3}$	0.48	$V_{p,5}$	0.10
Kg	$M_{e,1}$	0.35	$M_{e,3}$	0.12	$M_{e,5}$	0.07
-	α_1	7.22	α_3	21.66	α_5	36.09
-	$C_{m,1}$	0.88	$C_{m,3}$	0.96	$C_{m,5}$	0.97
m/s	$V_{i,1}$	1.20	$V_{i,3}$	0.46	$V_{i,5}$	0.10
kN/m	K_1	0.680	K_3	18	K_5	85.1
-	$C_{K,1}(M_p)$	1.00	$C_{K,3}(M_p)$	1.00	$C_{K,5}(M_p)$	1.00
kN/m	$K_{eq,1}$	0.68	$K_{eq,3}$	18.4	$K_{eq,5}$	85.1
rad/s	$W_{e,1}$	43.89	$W_{e,3}$	394.99	$W_{e,5}$	1097.19
-	$X(p)_1$	1.00	$X(p)_3$	1.0	$X(p)_5$	1.000
Kg	$M_{p,eq1}$	2.55	$M_{p,eq3}$	2.55	$M_{p,eq5}$	2.55
rad/s	$W_{ep,1}$	15.31	$W_{ep,3}$	82.98	$W_{ep,5}$	180.15
Nm	E_1	2.1	E_3	0.3	E_5	0.0
%	E_1 (%)	87.8%	E_3 (%)	11.6%	E_5 (%)	0.5%
Nm	$E_{A,1}$	2.1	$E_{A,3}$	2.4	$E_{A,5}$	2.4
%	$E_{A,1}$ (%)	88%	$E_{A,3}$ (%)	99%	$E_{A,5}$ (%)	100%
Nm	$E_{D,3}$	0.3	$E_{D,5}$	0.0	$E_{D,7}$	0.0
%	$E_{D,3}$ (%)	12%	$E_{D,5}$ (%)	1%	$E_{D,7}$ (%)	0%

Como se puede apreciar en el balance energético mostrado en la Tabla 76, la energía analizada al considerar 3 modos de vibración es el 100% de la energía cinética inicial.

A partir de lo expuesto y según los datos de la Tabla 76, se aplica la formulación desarrollada para el cálculo del desplazamiento mediante las ecuaciones (361) para el término de peso propio y (385) para el término cinético:

$$d_{e,pp}(t) = \frac{gM_p}{K_1} (1 - \cos(w_{ep} t)) = \frac{9.806 \times 2.55}{680} \times (1 - \cos(15.31 t))$$

$$d_{e,vp}(t) = \frac{1.37 \times 0.88 \times \text{sen}(15.31 t)}{15.31} + \frac{0.48 \times 0.96 \times \text{sen}(395 t)}{82.98} + \frac{0.10 \times 0.97 \times \text{sen}(1097 t)}{180}$$

El desplazamiento total del centro de la viga se obtiene como suma de los términos de peso propio y cinético:

$$d_{e,TOTAL}(t) = d_{e,vp}(t) + d_{e,pp}(t)$$

En la Figura 269 se comparan los resultados del desplazamiento estructural en el punto de impacto de la viga, el centro de luz, considerando los tres primeros modos de vibración y el efecto de peso propio ($d_{e,TOTAL}(t)$), con los recogidos del ensayo real realizado en el Laboratorio ($d_{e,ENSAYO}(t)$). Para evaluar la influencia del peso propio en la deformada total, se incluye



también en la figura la curva correspondiente a la acción del peso propio del proyectil ($d_{e,pp}(t)$).



Figura 271- Registro desplazamiento-tiempo del centro de viga. Ensayo 3: $\alpha=7.2$ $V=1.37$ m/s.

En la Figura 271 se puede observar que los resultados de la formulación (curva roja) y los resultados del ensayo (curva verde) son nuevamente **muy próximos**. Para el ensayo 3, la altura de caída se ha aumentado con respecto al ensayo 2, por ese motivo la contribución al desplazamiento que predice la formulación para el peso propio (curva negra discontinua) es, relativamente, menor al ensayo 2.

5.1.3.4 Análisis conjunto: masa del proyectil siete veces la masa equivalente del modo 1 de la estructura ($\alpha=7.2$).

Para ver los casos expuestos en su conjunto, y evaluar más fácilmente la precisión de los resultados, se muestran en la Figura 272 los resultados de los ensayos 1,2 y 3 indicando el correspondiente coeficiente C_{PP} de peso propio. Los tres ensayos presentan un valor del parámetro $\alpha=7.2$.

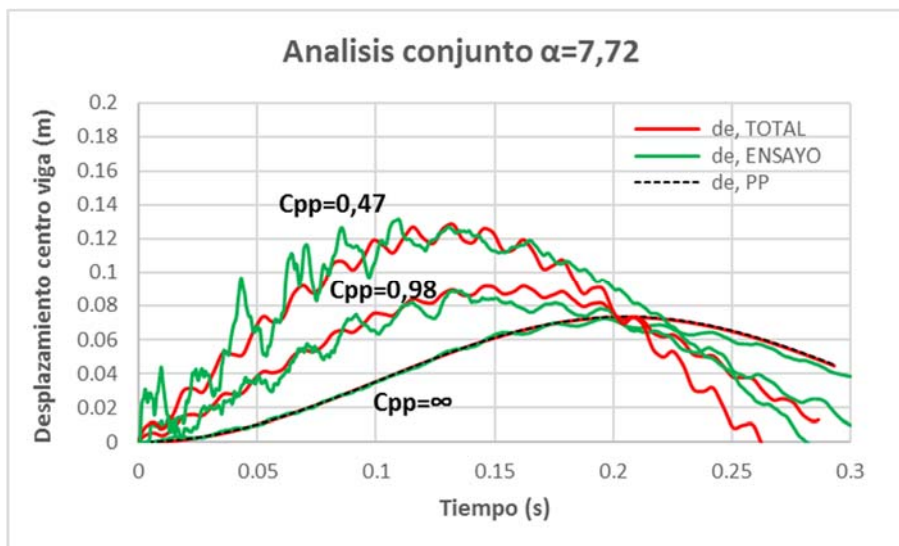


Figura 272- Registro desplazamiento-tiempo del centro de viga. Ensayos 1,2 y 3.

Como se puede apreciar a partir de los resultados en la Figura 272, **a medida que aumenta el término cinético, es decir, a medida que disminuye el coeficiente C_{PP} , la deformada de la estructura pasa de ser una curva tipo coseno a ser una curva tipo seno**. Este hecho trae como consecuencia que la máxima deformación se produzca para $T_{ep}/2$ para C_{PP} elevados y para $T_{ep}/4$ para valores de C_{PP} menores de 1.

El término de peso propio es idéntico en los 3 ensayos, sumándose en cada ensayo el término cinético correspondiente (nulo en el ensayo 1). Como se puede observar en el análisis conjunto, **la proximidad entre las curvas de la formulación y el ensayo real es manifiesta**, siendo capaz la formulación de reflejar perfectamente la componente de peso propio y cinética en cada caso.



5.1.3.5 *Ensayo 4: Altura de caída de proyectil 0.1 cm. Masa del proyectil diez veces la masa equivalente del modo 1 de la estructura ($\alpha=9.9$) y velocidad del proyectil previa al impacto ($V_{p,0}$) 0.17 m/s. Impacto totalmente influenciado por el peso propio del proyectil ($C_{pp} = 4.34$).*

Se realizan dos ensayos más sobre la viga flexible, aumentando la masa del proyectil con respecto a los tres ensayos anteriores. En la Tabla 77 se muestran los principales datos de partida del ensayo 4:

Tabla 77- Ensayo 4: $\alpha=9.9$ $V=0.17$ m/s. Datos de partida

Datos viga		Datos proyectil	
L (m)	1.00	Mp(kg)	3.5
b (m)	0.03	Vpo (m/s)	0.17
h (m)	0.003	Eo (N m)	0.051
A (m ²)	9.00E-05	C.M. (N s)	0.60
I (m ⁴)	6.75E-11	K _{PROYECTIL}	∞
E (KN / m)	2.10E+08	g(m/s ²)	9.806
ρ (kg /m ³)	7.85E+03	α	9.9
Punto de impacto "p" (m)	0.50	C _{pp}	4.34

A partir de los datos expuestos en la Tabla 77, se calculan los parámetros necesarios para la aplicación de la formulación desarrollada según lo expuesto en los apartados 4.2.5.4 y 4.2.7.4 de resolución del impacto. Los valores de los parámetros resultantes se resumen en la Tabla 78.

Tabla 78- Parámetros resultantes para ensayo 4 Caso $\alpha=9.9$ $V_p=0.17$ m/s.

Unidades	Modo	1	Modo	3	Modo	5
-	L/L _{ef,1}	1	L/L _{ef,3}	3	L/L _{ef,5}	5
m/s	V _{p,1}	0.17	V _{p,3}	0.05	V _{p,5}	0.01
Kg	M _{e,1}	0.35	M _{e,3}	0.12	M _{e,5}	0.07
-	α_1	9.91	α_3	29.72	α_5	49.54
-	C _{m,1}	0.91	C _{m,3}	0.97	C _{m,5}	0.98
m/s	V _{i,1}	0.15	V _{i,3}	0.05	V _{i,5}	0.01
kN/m	K ₁	0.680	K ₃	18	K ₅	85.1
-	C _{K,1} (Mp)	1.00	C _{K,3} (Mp)	1.00	C _{K,5} (Mp)	1.00
kN/m	K _{eq,1}	0.68	K _{eq,3}	18.4	K _{eq,5}	85.1
rad/s	W _{e,1}	43.89	W _{e,3}	394.99	W _{e,5}	1097.19
-	X(p) ₁	1.00	X(p) ₃	1.0	X(p) ₅	1.000
Kg	M _{p,eq1}	3.50	M _{p,eq3}	3.50	M _{p,eq5}	3.50
rad/s	W _{ep,1}	13.29	W _{ep,3}	71.26	W _{ep,5}	154.33
Nm	E ₁	0.046	E ₃	0.004	E ₅	0.000
%	E ₁ (%)	90.8%	E ₃ (%)	8.9%	E ₅ (%)	0.3%
Nm	E _{A,1}	0.0	E _{A,3}	0.1	E _{A,5}	0.1
%	E _{A,1} (%)	91%	E _{A,3} (%)	100%	E _{A,5} (%)	100%
Nm	E _{D,3}	0.0	E _{D,5}	0.0	E _{D,7}	0.0
%	E _{D,3} (%)	9%	E _{D,5} (%)	0%	E _{D,7} (%)	0%



Como se puede apreciar en el balance energético mostrado en la Tabla 78, la energía analizada al considerar 3 modos de vibración es el 100% de la energía cinética inicial.

A partir de lo expuesto y según los datos de la Tabla 78, se aplica la formulación desarrollada para el cálculo del desplazamiento mediante las ecuaciones (361) para el término de peso propio y (385) para el término cinético:

$$d_{e,pp}(t) = \frac{gM_p}{K_1} (1 - \cos(w_{ep} t)) = \frac{9.806 \times 3.50}{680} \times (1 - \cos(13.29 t))$$

$$d_{e,vp}(t) = \frac{0.17 \times 0.91 \times \text{sen}(13.3 t)}{13.3} + \frac{0.05 \times 0.97 \times \text{sen}(395 t)}{71.3} + \frac{0.10 \times 0.98 \times \text{sen}(1097 t)}{154}$$

El desplazamiento total del centro de la viga se obtiene como suma de los términos de peso propio y cinético:

$$d_{e,TOTAL}(t) = d_{e,vp}(t) + d_{e,pp}(t)$$

En la Figura 273 se comparan los resultados del desplazamiento estructural en el punto de impacto de la viga, el centro de luz, considerando los tres primeros modos de vibración y el efecto de peso propio ($d_{e,TOTAL}(t)$), con los recogidos del ensayo real realizado en el Laboratorio ($d_{e,ENSAYO}(t)$). Para evaluar la influencia del peso propio en la deformada total, se incluye también en la figura la curva correspondiente a la acción del peso propio del proyectil ($d_{e,pp}(t)$).

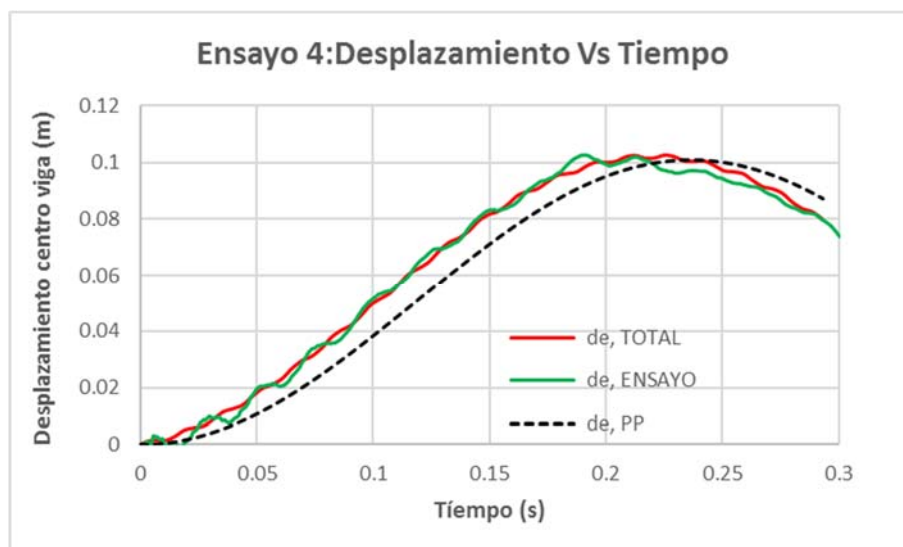


Figura 273- Registro desplazamiento-tiempo del centro de viga. Ensayo 4: $\alpha=9.9$ V=0.17 m/s.

A la vista de los resultados mostrados en la Figura 273, se puede observar como prácticamente toda la respuesta estructural (curva roja) es derivada del peso propio (curva negra discontinua).



En los resultados de la gráfica también se puede apreciar cómo, al aumentar el coeficiente α en el ensayo 4 con respecto a los ensayos 1,2 y 3, la vibración sobre la onda principal ha disminuido debido a que aumenta el porcentaje de energía que absorbe el modo 1.

La proximidad entre los resultados del ensayo real (curva verde) y la formulación desarrollada (curva roja) es muy elevada.

5.1.3.6 Ensayo 5: Altura de caída de proyectil 2.3 cm. Masa del proyectil diez veces la masa equivalente del modo 1 de la estructura ($\alpha=9.9$) y velocidad del proyectil previa al impacto ($V_{p,0}$) 0.67 m/s. Alta influencia del peso propio del proyectil ($C_{pp} = 1.10$).

En la Tabla 79 se muestran los principales datos de partida del ensayo 5:

Tabla 79- Ensayo 4: $\alpha=9.9$ $V=0.67$ m/s. Datos de partida

Datos viga		Datos proyectil	
L (m)	1.00	Mp(kg)	3.5
b (m)	0.03	Vpo (m/s)	0.67
h (m)	0.003	Eo (N m)	0.786
A (m ²)	9.00E-05	C.M. (N s)	2.35
I (m ⁴)	6.75E-11	K _{PROYECTIL}	∞
E (KN / m)	2.10E+08	g(m/s ²)	9.806
ρ (kg /m ³)	7.85E+03	α	9.9
Punto de impacto "p" (m)	0.50	C _{pp}	1.10

A partir de los datos expuestos en la Tabla 79, se calculan los parámetros necesarios para la aplicación de la formulación desarrollada según lo expuesto en los apartados 4.2.5.4 y 4.2.7.4 de resolución del impacto. Los valores de los parámetros resultantes se resumen en la Tabla 80.



Tabla 80- Parámetros resultantes para ensayo 5 Caso $\alpha=9.9$ $V_p=0.67$ m/s.

Unidades	Modo	1	Modo	3	Modo	5
-	$L/L_{ef,1}$	1	$L/L_{ef,3}$	3	$L/L_{ef,5}$	5
m/s	$V_{p,1}$	0.67	$V_{p,3}$	0.20	$V_{p,5}$	0.04
Kg	$M_{e,1}$	0.35	$M_{e,3}$	0.12	$M_{e,5}$	0.07
-	α_1	9.91	α_3	29.72	α_5	49.54
-	$C_{m,1}$	0.91	$C_{m,3}$	0.97	$C_{m,5}$	0.98
m/s	$V_{i,1}$	0.61	$V_{i,3}$	0.20	$V_{i,5}$	0.04
kN/m	K_1	0.680	K_3	18	K_5	85.1
-	$C_{K,1}(M_p)$	1.00	$C_{K,3}(M_p)$	1.00	$C_{K,5}(M_p)$	1.00
kN/m	$K_{eq,1}$	0.68	$K_{eq,3}$	18.4	$K_{eq,5}$	85.1
rad/s	$W_{e,1}$	43.89	$W_{e,3}$	394.99	$W_{e,5}$	1097.19
-	$X(p)_1$	1.00	$X(p)_3$	1.0	$X(p)_5$	1.000
Kg	$M_{p,eq1}$	3.50	$M_{p,eq3}$	3.50	$M_{p,eq5}$	3.50
rad/s	$W_{ep,1}$	13.29	$W_{ep,3}$	71.26	$W_{ep,5}$	154.33
Nm	E_1	0.714	E_3	0.070	E_5	0.002
%	E_1 (%)	90.8%	E_3 (%)	8.9%	E_5 (%)	0.3%
Nm	$E_{A,1}$	0.7	$E_{A,3}$	0.8	$E_{A,5}$	0.8
%	$E_{A,1}$ (%)	91%	$E_{A,3}$ (%)	100%	$E_{A,5}$ (%)	100%
Nm	$E_{D,3}$	0.1	$E_{D,5}$	0.0	$E_{D,7}$	0.0
%	$E_{D,3}$ (%)	9%	$E_{D,5}$ (%)	0%	$E_{D,7}$ (%)	0%

Como se puede apreciar en el balance energético mostrado en la Tabla 80, la energía analizada al considerar 3 modos de vibración es el 100% de la energía cinética inicial.

A partir de lo expuesto y según los datos de la Tabla 80, se aplica la formulación desarrollada para el cálculo del desplazamiento mediante las ecuaciones (361) para el término de peso propio y (385) para el término cinético:

$$d_{e,pp}(t) = \frac{gM_p}{K_1} (1 - \cos(w_{ep} t)) = \frac{9.806 \times 3.50}{680} \times (1 - \cos(13.29 t))$$

$$d_{e,vp}(t) = \frac{0.67 \times 0.91 \times \text{sen}(13.3 t)}{13.3} + \frac{0.20 \times 0.97 \times \text{sen}(395 t)}{71.3} + \frac{0.04 \times 0.98 \times \text{sen}(1097 t)}{154}$$

El desplazamiento total del centro de la viga se obtiene como suma de los términos de peso propio y cinético:

$$d_{e,TOTAL}(t) = d_{e,vp}(t) + d_{e,pp}(t)$$

En la Figura 274 se comparan los resultados del desplazamiento estructural en el punto de impacto de la viga, el centro de luz, considerando los tres primeros modos de vibración y el efecto de peso propio ($d_{e,TOTAL}(t)$), con los recogidos del ensayo real realizado en el Laboratorio ($d_{e,ENSAYO}(t)$). Para evaluar la influencia del peso propio en la deformada total, se incluye también en la figura la curva correspondiente a la acción del peso propio del proyectil ($d_{e,pp}(t)$).

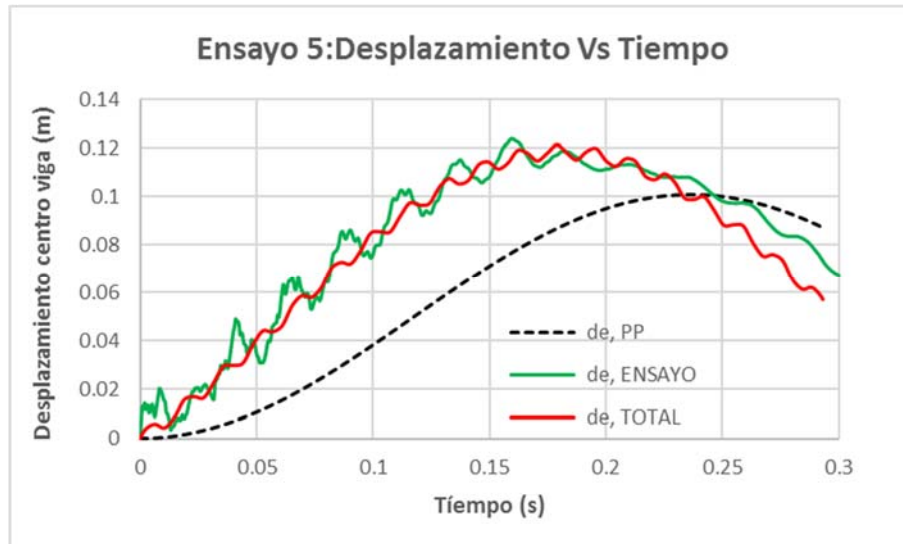


Figura 274- Registro desplazamiento-tiempo del centro de viga. Ensayo 5: $\alpha=9.9$ $V=0.67$ m/s.

Como se puede observar en la Figura 275, los resultados de la formulación (curva roja) y del ensayo real (curva verde) **es muy alta**. Al aumentar la altura de caída con respecto al ensayo 4, el termino cinético ha ganado importancia en el ensayo 5.

5.1.3.7 Análisis conjunto: masa del proyectil diez veces la masa equivalente del modo 1 de la estructura ($\alpha=9.9$).

Para ver los casos expuestos en su conjunto, y evaluar más fácilmente la precisión de los resultados, se muestran en la Figura 275 los resultados de los ensayos 4 y 5 indicando el correspondiente coeficiente C_{PP} de peso propio. Los dos ensayos presentan un valor del parámetro $\alpha=9.9$.

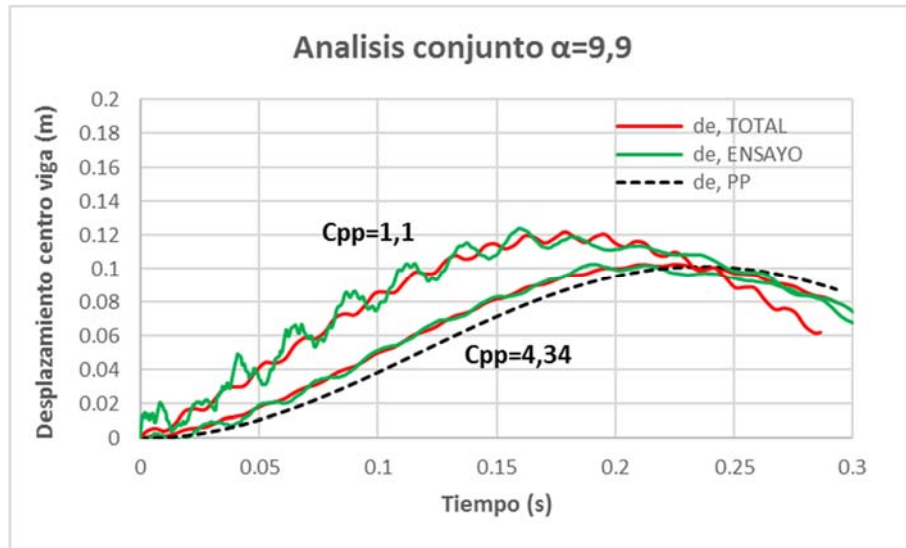


Figura 275- Registro desplazamiento-tiempo del centro de viga. Ensayos 4 y 5.

Como se puede apreciar a partir de los resultados en la Figura 275, **a medida que aumenta el termino cinético, es decir, a medida que disminuye el coeficiente C_{PP} , la deformada de la estructura pasa de ser una curva tipo coseno a aproximarse a ser una curva tipo seno**, como se indicó también en el apartado 5.1.3.4. Este hecho trae como consecuencia que la máxima deformación se produzca para $T_{ep}/2$ para C_{PP} elevados y para $T_{ep}/4$ para valores de C_{PP} menores de 1.

El término de peso propio es idéntico en los 2 ensayos (ensayos 4 y 5), sumándose en cada ensayo el termino cinético correspondiente. Como se puede observar en el análisis conjunto, **la proximidad entre las curvas de la formulación y el ensayo real es manifiesta**, siendo capaz la formulación de reflejar perfectamente la componente de peso propio y cinética en cada caso.



5.1.4 Impacto transversal en viga rígida

A continuación, se muestran los resultados de los 5 ensayos realizados sobre la viga rígida.

5.1.4.1 Ensayo 6: Altura de caída de proyectil 0.1 cm. Masa del proyectil dos veces y media la masa equivalente del modo 1 de la estructura ($\alpha=2.5$) y velocidad del proyectil previa al impacto ($V_{p,0}$) 0.17 m/s. Mediana influencia del peso propio del proyectil ($C_{pp} = 0.63$).

En la Tabla 81 se muestran los principales datos de partida del ensayo 6:

Tabla 81- Ensayo 6: $\alpha=2.5$ $V=0.17$ m/s. Datos de partida

Datos viga		Datos proyectil	
L (m)	1.00	Mp(kg)	3.5
b (m)	0.03	Vpo (m/s)	0.17
h (m)	0.012	Eo (N m)	0.048
A (m ²)	3.60E-04	C.M. (N s)	0.58
I (m ⁴)	4.32E-09	K _{PROYECTIL}	∞
E (KN / m)	2.10E+08	g(m/s ²)	9.806
ρ (kg /m ³)	7.85E+03	α	2.5
Punto de impacto "p" (m)	0.50	C _{pp}	0.63

A partir de los datos expuestos en la Tabla 81, se calculan los parámetros necesarios para la aplicación de la formulación desarrollada según lo expuesto en los apartados 4.2.5.4 y 4.2.7.4 de resolución del impacto. Los valores de los parámetros resultantes se resumen en la Tabla 82.

Tabla 82- Parámetros resultantes para ensayo 6 Caso $\alpha=2.5$ $V_p=0.17$ m/s

Unidades	Modo	1	Modo	3	Modo	5
-	L/L _{ef,1}	1	L/L _{ef,3}	3	L/L _{ef,5}	5
m/s	V _{p,1}	0.17	V _{p,3}	0.09	V _{p,5}	0.03
Kg	M _{e,1}	1.41	M _{e,3}	0.47	M _{e,5}	0.28
-	α_1	2.48	α_3	7.43	α_5	12.38
-	C _{m,1}	0.71	C _{m,3}	0.88	C _{m,5}	0.93
m/s	V _{i,1}	0.12	V _{i,3}	0.08	V _{i,5}	0.03
kN/m	K ₁	43.546	K ₃	1176	K ₅	5443.2
-	C _{K,1} (M _p)	1.00	C _{K,3} (M _p)	1.00	C _{K,5} (M _p)	1.00
kN/m	K _{eq,1}	43.55	K _{eq,3}	1175.7	K _{eq,5}	5443.2
rad/s	W _{e,1}	175.55	W _{e,3}	1579.95	W _{e,5}	4388.75
-	X(p) ₁	1.00	X(p) ₃	1.0	X(p) ₅	1.000
Kg	M _{p,eq1}	3.50	M _{p,eq3}	3.50	M _{p,eq5}	3.50
rad/s	W _{ep,1}	94.15	W _{ep,3}	544.13	W _{ep,5}	1199.59
Nm	E ₁	0.034	E ₃	0.012	E ₅	0.002
%	E ₁ (%)	71.2%	E ₃ (%)	25.3%	E ₅ (%)	3.2%
Nm	E _{A,1}	0.0	E _{A,3}	0.0	E _{A,5}	0.0
%	E _{A,1} (%)	71%	E _{A,3} (%)	97%	E _{A,5} (%)	100%
Nm	E _{D,3}	0.0	E _{D,5}	0.0	E _{D,7}	0.0
%	E _{D,3} (%)	29%	E _{D,5} (%)	3%	E _{D,7} (%)	0%



Como se puede apreciar en el balance energético mostrado en la Tabla 82, la energía analizada al considerar 3 modos de vibración es el 100% de la energía cinética inicial.

A partir de lo expuesto y según los datos de la Tabla 82, se aplica la formulación desarrollada para el cálculo del desplazamiento mediante las ecuaciones (361) para el término de peso propio y (385) para el término cinético:

$$d_{e,pp}(t) = \frac{gM_p}{K_1} (1 - \cos(w_{ep} t)) = \frac{9.806 \times 3.50}{43\,546} \times (1 - \cos(94.15 t))$$
$$d_{e,vp}(t) = \frac{0.17 \times 0.71 \times \sin(94.15 t)}{94.15} + \frac{0.09 \times 0.88 \times \sin(1580 t)}{544} + \frac{0.03 \times 0.93 \times \sin(4389 t)}{1200}$$

El desplazamiento total del centro de la viga se obtiene como suma de los términos de peso propio y cinético:

$$d_{e,TOTAL}(t) = d_{e,vp}(t) + d_{e,pp}(t)$$

En la Figura 276 se comparan los resultados del desplazamiento estructural en el punto de impacto de la viga, el centro de luz, considerando los tres primeros modos de vibración y el efecto de peso propio ($d_{e,TOTAL}(t)$), con los recogidos del ensayo real realizado en el Laboratorio ($d_{e,ENSAYO}(t)$). Para evaluar la influencia del peso propio en la deformada total, se incluye también en la figura la curva correspondiente a la acción del peso propio del proyectil ($d_{e,pp}(t)$).

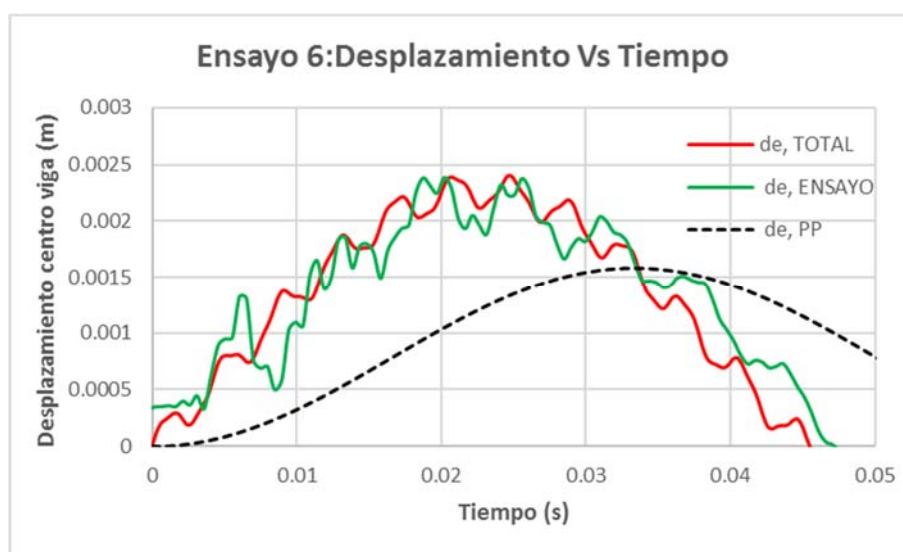


Figura 276- Registro desplazamiento-tiempo del centro de viga. Ensayo 6: $\alpha=2.5$ V=0.17 m/s



En la Figura 279 se muestran los resultados del ensayo 6, primer ensayo de la viga rígida. En la gráfica, se puede observar como el término de peso propio (curva negra discontinua) tiene relevancia en la deformada total de la formulación (curva roja). La proximidad entre los resultados de la formulación y los ensayos (curva verde) sigue **siendo muy alta** para la viga rígida.

5.1.4.2 Ensayo 7: Altura de caída de proyectil 2.3 cm. Masa del proyectil dos veces y media la masa equivalente del modo 1 de la estructura ($\alpha=2.5$) y velocidad del proyectil previa al impacto ($V_{p,0}$) 0.67 m/s. Baja influencia del peso propio del proyectil ($C_{pp} = 0.16$).

En la Tabla 83 se muestran los principales datos de partida del ensayo 7:

Tabla 83- Ensayo 7: $\alpha=2.5$ $V=0.67$ m/s. Datos de partida

Datos viga		Datos proyectil	
L (m)	1.00	Mp(kg)	3.5
b (m)	0.03	Vpo (m/s)	0.67
h (m)	0.012	Eo (N m)	0.786
A (m ²)	3.60E-04	C.M. (N s)	2.35
I (m ⁴)	4.32E-09	K _{PROYECTIL}	∞
E (KN / m)	2.10E+08	g(m/s ²)	9.806
ρ (kg /m ³)	7.85E+03	α	2.5
Punto de impacto "p" (m)	0.50	C _{pp}	0.16

A partir de los datos expuestos en la Tabla 83, se calculan los parámetros necesarios para la aplicación de la formulación desarrollada según lo expuesto en los apartados 4.2.5.4 y 4.2.7.4 de resolución del impacto. Los valores de los parámetros resultantes se resumen en la Tabla 84.



Tabla 84- Parámetros resultantes para ensayo 7 Caso $\alpha=2.5$ $V_p=0.17$ m/s

Unidades	Modo	1	Modo	3	Modo	5
-	$L/L_{ef,1}$	1	$L/L_{ef,3}$	3	$L/L_{ef,5}$	5
m/s	$V_{p,1}$	0.67	$V_{p,3}$	0.36	$V_{p,5}$	0.12
Kg	$M_{e,1}$	1.41	$M_{e,3}$	0.47	$M_{e,5}$	0.28
-	α_1	2.48	α_3	7.43	α_5	12.38
-	$C_{m,1}$	0.71	$C_{m,3}$	0.88	$C_{m,5}$	0.93
m/s	$V_{i,1}$	0.48	$V_{i,3}$	0.32	$V_{i,5}$	0.11
kN/m	K_1	43.546	K_3	1176	K_5	5443.2
-	$C_{K,1}(M_p)$	1.00	$C_{K,3}(M_p)$	1.00	$C_{K,5}(M_p)$	1.00
kN/m	$K_{eq,1}$	43.55	$K_{eq,3}$	1175.7	$K_{eq,5}$	5443.2
rad/s	$W_{e,1}$	175.55	$W_{e,3}$	1579.95	$W_{e,5}$	4388.75
-	$X(p)_1$	1.00	$X(p)_3$	1.0	$X(p)_5$	1.000
Kg	$M_{p,eq1}$	3.50	$M_{p,eq3}$	3.50	$M_{p,eq5}$	3.50
rad/s	$W_{ep,1}$	94.15	$W_{ep,3}$	544.13	$W_{ep,5}$	1199.59
Nm	E_1	0.560	E_3	0.199	E_5	0.025
%	E_1 (%)	71.2%	E_3 (%)	25.3%	E_5 (%)	3.2%
Nm	$E_{A,1}$	0.6	$E_{A,3}$	0.8	$E_{A,5}$	0.8
%	$E_{A,1}$ (%)	71%	$E_{A,3}$ (%)	97%	$E_{A,5}$ (%)	100%
Nm	$E_{D,3}$	0.2	$E_{D,5}$	0.0	$E_{D,7}$	0.0
%	$E_{D,3}$ (%)	29%	$E_{D,5}$ (%)	3%	$E_{D,7}$ (%)	0%

Como se puede apreciar en el balance energético mostrado en la Tabla 84, la energía analizada al considerar 3 modos de vibración es el 100% de la energía cinética inicial.

A partir de lo expuesto y según los datos de la Tabla 84, se aplica la formulación desarrollada para el cálculo del desplazamiento mediante las ecuaciones (361) para el término de peso propio y (385) para el término cinético:

$$d_{e,pp}(t) = \frac{gM_p}{K_1} (1 - \cos(w_{ep} t)) = \frac{9.806 \times 3.50}{43\,546} \times (1 - \cos(94.15 t))$$

$$d_{e,vp}(t) = \frac{0.67 \times 0.71 \times \text{sen}(94.15 t)}{94.15} + \frac{0.36 \times 0.88 \times \text{sen}(1580 t)}{544}$$

$$+ \frac{0.12 \times 0.93 \times \text{sen}(4389 t)}{1200}$$

El desplazamiento total del centro de la viga se obtiene como suma de los términos de peso propio y cinético:

$$d_{e,TOTAL}(t) = d_{e,vp}(t) + d_{e,pp}(t)$$

En la Figura 277 se comparan los resultados del desplazamiento estructural en el punto de impacto de la viga, el centro de luz, considerando los tres primeros modos de vibración y el efecto de peso propio ($d_{e,TOTAL}(t)$), con los recogidos del ensayo real realizado en el Laboratorio ($d_{e,ENSAYO}(t)$). Para evaluar la influencia del peso propio en la deformada total, se incluye



también en la figura la curva correspondiente a la acción del peso propio del proyectil ($d_{e,pp}(t)$).

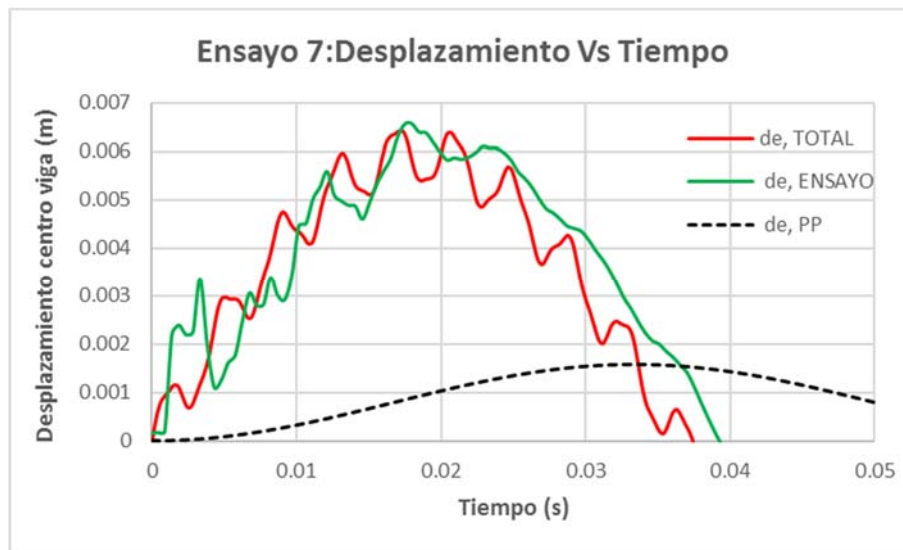


Figura 277- Registro desplazamiento-tiempo del centro de viga. Ensayo 7: $\alpha=2.5$ $V=0.67$ m/s

En la Figura 277 se muestran los resultados del ensayo 7. En la gráfica, se puede observar como el término de peso propio (curva negra discontinua) tiene poca relevancia en la deformada total de la formulación (curva roja). La proximidad entre los resultados de la formulación y los ensayos (curva verde) sigue **siendo muy alta** para la viga rígida.

5.1.4.3 Análisis conjunto: masa del proyectil dos veces y media la masa equivalente del modo 1 de la estructura ($\alpha=7.2$).

Para ver los casos expuestos en su conjunto, y evaluar más fácilmente la precisión de los resultados, se muestran en la Figura 278 los resultados de los ensayos 6 y 7 indicando el correspondiente coeficiente C_{pp} de peso propio. Los dos ensayos presentan un valor del parámetro $\alpha=2.5$.

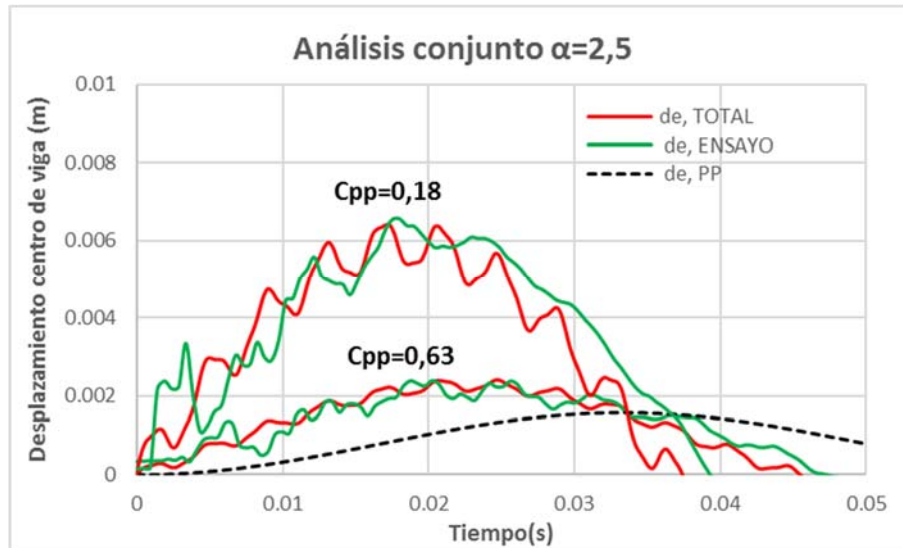


Figura 278- Registro desplazamiento-tiempo del centro de viga. Ensayos 6 y 7.

En el análisis conjunto de los ensayos con un $\alpha=2.5$ expuestos en la Figura 278, se puede observar que la diferencia entre las curvas de ensayo real y formulación aun siendo muy pequeña, ha aumentado ligeramente respecto de los ensayos del 1 al 5 expuesto en la figuras Figura 272 y Figura 275 . Dos son los motivos que explican esta diferencia:

- Por un lado, los ensayos 1-5 presentan unos valores del parámetro α de 7.2 y 9.9, mucho mayores que el valor de 2.5 mostrado en los ensayos 6 y 7 de la Figura 278. Como se ha comentado a lo largo del documento, **la formulación es más precisa cuanto mayor es el parámetro α** y esta razón explica, en parte, el aumento de la diferencia.
- Por otro lado, **el sistema de medida** utilizado en los equipos de monitorización e instrumentación, **aumenta el error en la medida cuanto menor es el parámetro α** . Esta es la consecuencia de utilizar como sensor de medición un extensómetro en vez de un transductor de desplazamiento. Sin embargo, el extensómetro se comporta mejor desde el punto de vista de medición dinámica. Por este motivo, todos los ensayos planteados presentan un α claramente mayor de 1, con intención de minimizar este error.



5.1.4.4 *Ensayo 8: Altura de caída de proyectil 1.0 cm. Masa del proyectil tres veces y media la masa equivalente del modo 1 de la estructura ($\alpha=3.5$) y velocidad del proyectil previa al impacto ($V_{p,0}$) 0.43 m/s. Baja influencia del peso propio del proyectil ($C_{pp} = 0.28$).*

En la Tabla 85 se muestran los principales datos de partida del ensayo 8:

Tabla 85- $\alpha=3.5$ $V=0.43$ m/s. Datos de partida

Datos viga		Datos proyectil	
L (m)	1.00	Mp(kg)	5
b (m)	0.03	Vpo (m/s)	0.43
h (m)	0.012	Eo (N m)	0.462
A (m ²)	3.60E-04	C.M. (N s)	2.15
I (m ⁴)	4.32E-09	K _{PROYECTIL}	∞
E (KN / m)	2.10E+08	g(m/s ²)	9.806
ρ (kg /m ³)	7.85E+03	α	3.5
Punto de impacto "p" (m)	0.50	C _{pp}	0.28

A partir de los datos expuestos en la Tabla 85, se calculan los parámetros necesarios para la aplicación de la formulación desarrollada según lo expuesto en los apartados 4.2.5.4 y 4.2.7.4 de resolución del impacto. Los valores de los parámetros resultantes se resumen en la Tabla 86.

Tabla 86- Parámetros resultantes para ensayo 8 Caso $\alpha=3.5$ $V_p=0.43$ m/s

Unidades	Modo	1	Modo	3	Modo	5
-	L/L _{ef,1}	1	L/L _{ef,3}	3	L/L _{ef,5}	5
m/s	V _{p,1}	0.43	V _{p,3}	0.20	V _{p,5}	0.06
Kg	M _{e,1}	1.41	M _{e,3}	0.47	M _{e,5}	0.28
-	α_1	3.54	α_3	10.62	α_5	17.69
-	C _{m,1}	0.78	C _{m,3}	0.91	C _{m,5}	0.95
m/s	V _{i,1}	0.34	V _{i,3}	0.18	V _{i,5}	0.06
kN/m	K ₁	43.546	K ₃	1176	K ₅	5443.2
-	C _{K,1} (M _p)	1.00	C _{K,3} (M _p)	1.00	C _{K,5} (M _p)	1.00
kN/m	K _{eq,1}	43.55	K _{eq,3}	1175.7	K _{eq,5}	5443.2
rad/s	W _{e,1}	175.55	W _{e,3}	1579.95	W _{e,5}	4388.75
-	X(p) ₁	1.00	X(p) ₃	1.0	X(p) ₅	1.000
Kg	M _{p,eq1}	5.00	M _{p,eq3}	5.00	M _{p,eq5}	5.00
rad/s	W _{ep,1}	82.40	W _{ep,3}	463.58	W _{ep,5}	1015.09
Nm	E ₁	0.360	E ₃	0.093	E ₅	0.008
%	E ₁ (%)	78.0%	E ₃ (%)	20.1%	E ₅ (%)	1.8%
Nm	E _{A,1}	0.4	E _{A,3}	0.5	E _{A,5}	0.5
%	E _{A,1} (%)	78%	E _{A,3} (%)	98%	E _{A,5} (%)	100%
Nm	E _{D,3}	0.1	E _{D,5}	0.0	E _{D,7}	0.0
%	E _{D,3} (%)	22%	E _{D,5} (%)	2%	E _{D,7} (%)	0%

Como se puede apreciar en el balance energético mostrado en la Tabla 86, la energía analizada al considerar 3 modos de vibración es el 100% de la energía cinética inicial.



A partir de lo expuesto y según los datos de la Tabla 86, se aplica la formulación desarrollada para el cálculo del desplazamiento mediante las ecuaciones (361) para el término de peso propio y (385) para el término cinético:

$$d_{e,pp}(t) = \frac{gM_p}{K_1} (1 - \cos(w_{ep} t)) = \frac{9.806 \times 5.0}{43\,546} \times (1 - \cos(82.4 t))$$

$$d_{e,vp}(t) = \frac{0.43 \times 0.78 \times \sin(82.4 t)}{82.4} + \frac{0.2 \times 0.91 \times \sin(1580 t)}{464} + \frac{0.06 \times 0.95 \times \sin(4389 t)}{1015}$$

El desplazamiento total del centro de la viga se obtiene como suma de los términos de peso propio y cinético:

$$d_{e,TOTAL}(t) = d_{e,vp}(t) + d_{e,pp}(t)$$

En la Figura 279 se comparan los resultados del desplazamiento estructural en el punto de impacto de la viga, el centro de luz, considerando los tres primeros modos de vibración y el efecto de peso propio ($d_{e,TOTAL}(t)$), con los recogidos del ensayo real realizado en el Laboratorio ($d_{e,ENSAYO}(t)$). Para evaluar la influencia del peso propio en la deformada total, se incluye también en la figura la curva correspondiente a la acción del peso propio del proyectil ($d_{e,pp}(t)$).

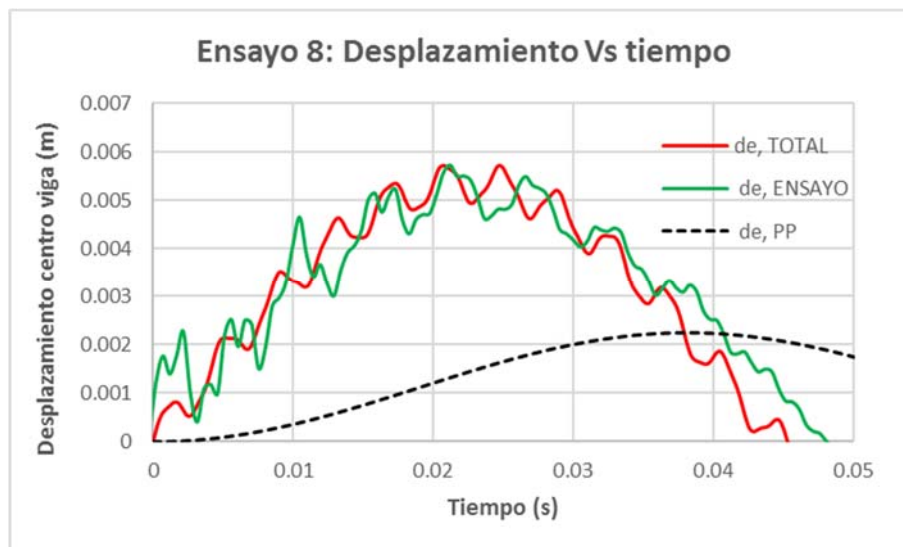


Figura 279- Registro desplazamiento-tiempo del centro de viga. Ensayo 8: $\alpha=3.5$ $V=0.43$ m/s

En la Figura 279 se muestran los resultados del ensayo 8. En la gráfica, se puede observar como el término de peso propio (curva negra discontinua) tiene relativa relevancia en la deformada total de la formulación (curva roja). Nuevamente, la proximidad entre los resultados de la formulación y los ensayos (curva verde) es **muy alta**.



5.1.4.5 *Ensayo 9: Altura de caída de proyectil 3.7 cm. Masa del proyectil tres veces y media la masa equivalente del modo 1 de la estructura ($\alpha=3.5$) y velocidad del proyectil previa al impacto ($V_{p,0}$) 0.85 m/s. Baja influencia del peso propio del proyectil ($C_{pp} = 0.14$).*

En la Tabla 87 se muestran los principales datos de partida del ensayo 9:

Tabla 87- $\alpha=3.5$ $V=0.85$ m/s. Datos de partida

Datos viga		Datos proyectil	
L (m)	1.00	Mp(kg)	5.0
b (m)	0.03	Vpo (m/s)	0.85
h (m)	0.012	Eo (N m)	1.806
A (m ²)	3.60E-04	C.M. (N s)	4.25
I (m ⁴)	4.32E-09	K _{PROYECTIL}	∞
E (KN / m)	2.10E+08	g(m/s ²)	9.806
ρ (kg /m ³)	7.85E+03	α	3.5
Punto de impacto "p" (m)	0.50	C _{pp}	0.14

A partir de los datos expuestos en la Tabla 87, se calculan los parámetros necesarios para la aplicación de la formulación desarrollada según lo expuesto en los apartados 4.2.5.4 y 4.2.7.4 de resolución del impacto. Los valores de los parámetros resultantes se resumen en la Tabla 88.

Tabla 88- Parámetros resultantes para ensayo 9 Caso $\alpha=3.5$ $V_p=0.85$ m/s

Unidades	Modo	1	Modo	3	Modo	5
-	L/L _{ef,1}	1	L/L _{ef,3}	3	L/L _{ef,5}	5
m/s	V _{p,1}	0.85	V _{p,3}	0.40	V _{p,5}	0.12
Kg	M _{e,1}	1.41	M _{e,3}	0.47	M _{e,5}	0.28
-	α_1	3.54	α_3	10.62	α_5	17.69
-	C _{m,1}	0.78	C _{m,3}	0.91	C _{m,5}	0.95
m/s	V _{i,1}	0.66	V _{i,3}	0.36	V _{i,5}	0.11
kN/m	K ₁	43.546	K ₃	1176	K ₅	5443.2
-	C _{K,1} (M _p)	1.00	C _{K,3} (M _p)	1.00	C _{K,5} (M _p)	1.00
kN/m	K _{eq,1}	43.55	K _{eq,3}	1175.7	K _{eq,5}	5443.2
rad/s	W _{e,1}	175.55	W _{e,3}	1579.95	W _{e,5}	4388.75
-	X(p) ₁	1.00	X(p) ₃	1.0	X(p) ₅	1.000
Kg	M _{p,eq1}	5.00	M _{p,eq3}	5.00	M _{p,eq5}	5.00
rad/s	W _{ep,1}	82.40	W _{ep,3}	463.58	W _{ep,5}	1015.09
Nm	E ₁	1.408	E ₃	0.364	E ₅	0.032
%	E ₁ (%)	78.0%	E ₃ (%)	20.1%	E ₅ (%)	1.8%
Nm	E _{A,1}	1.4	E _{A,3}	1.8	E _{A,5}	1.8
%	E _{A,1} (%)	78%	E _{A,3} (%)	98%	E _{A,5} (%)	100%
Nm	E _{D,3}	0.4	E _{D,5}	0.0	E _{D,7}	0.0
%	E _{D,3} (%)	22%	E _{D,5} (%)	2%	E _{D,7} (%)	0%

Como se puede apreciar en el balance energético mostrado en la Tabla 88, la energía analizada al considerar 3 modos de vibración es el 100% de la energía cinética inicial.



A partir de lo expuesto y según los datos de la Tabla 88, se aplica la formulación desarrollada para el cálculo del desplazamiento mediante las ecuaciones (361) para el término de peso propio y (385) para el término cinético:

$$d_{e,pp}(t) = \frac{gM_p}{K_1} (1 - \cos(w_{ep} t)) = \frac{9.806 \times 5.0}{43\,546} \times (1 - \cos(82.4 t))$$

$$d_{e,vp}(t) = \frac{0.85 \times 0.78 \times \sin(82.4 t)}{82.4} + \frac{0.4 \times 0.91 \times \sin(1580 t)}{464} + \frac{0.12 \times 0.95 \times \sin(4389 t)}{1015}$$

El desplazamiento total del centro de la viga se obtiene como suma de los términos de peso propio y cinético:

$$d_{e,TOTAL}(t) = d_{e,vp}(t) + d_{e,pp}(t)$$

En la Figura 280 se comparan los resultados del desplazamiento estructural en el punto de impacto de la viga, el centro de luz, considerando los tres primeros modos de vibración y el efecto de peso propio ($d_{e,TOTAL}(t)$), con los recogidos del ensayo real realizado en el Laboratorio ($d_{e,ENSAYO}(t)$). Para evaluar la influencia del peso propio en la deformado total, se incluye en la figura la curva correspondiente a la acción del peso propio del proyectil ($d_{e,pp}(t)$).

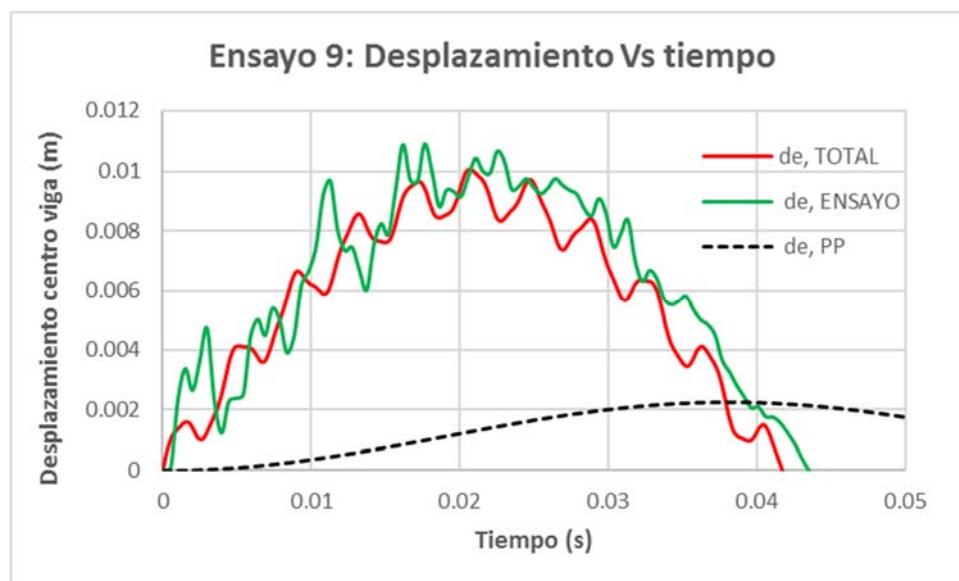


Figura 280- Registro desplazamiento-tiempo del centro de viga. Ensayo 9: $\alpha=3.5$ $V=0.85$ m/s

En la Figura 280 se muestran los resultados del ensayo 9. En la gráfica, se puede observar cómo el término de peso propio (curva negra discontinua) tiene muy poca relevancia en la deformada total de la formulación (curva roja) que, en consecuencia, es prácticamente una curva tipo seno. Nuevamente, la proximidad entre los resultados de la formulación y los ensayos (curva verde) es **muy alta**.



5.1.4.6 *Ensayo 10: Altura de caída de proyectil 11.0 cm. Masa del proyectil tres veces y media la masa equivalente del modo 1 de la estructura ($\alpha=3.5$) y velocidad del proyectil previa al impacto ($V_{p,0}$) 1.47 m/s. Nula influencia del peso propio del proyectil ($C_{pp} = 0.08$).*

En la Tabla 89 se muestran los principales datos de partida del ensayo 10:

Tabla 89- $\alpha=3.5$ $V=1.47$ m/s. Datos de partida

Datos viga		Datos proyectil	
L (m)	1.00	Mp(kg)	5.0
b (m)	0.03	Vpo (m/s)	1.47
h (m)	0.012	Eo (N m)	5.402
A (m ²)	3.60E-04	C.M. (N s)	7.35
I (m ⁴)	4.32E-09	K _{PROYECTIL}	∞
E (KN / m)	2.10E+08	g(m/s ²)	9.806
ρ (kg /m ³)	7.85E+03	α	3.5
Punto de impacto "p" (m)	0.50	C _{pp}	0.08

A partir de los datos expuestos en la Tabla 89, se calculan los parámetros necesarios para la aplicación de la formulación desarrollada según lo expuesto en los apartados 4.2.5.4 y 4.2.7.4 de resolución del impacto. Los valores de los parámetros resultantes se resumen en la Tabla 90.

Tabla 90- Parámetros resultantes para ensayo 10 Caso $\alpha=3.5$ $Vp=1.47$ m/s

Unidades	Modo	1	Modo	3	Modo	5
-	L/L _{ef,1}	1	L/L _{ef,3}	3	L/L _{ef,5}	5
m/s	V _{p,1}	1.47	V _{p,3}	0.69	V _{p,5}	0.20
Kg	M _{e,1}	1.41	M _{e,3}	0.47	M _{e,5}	0.28
-	α_1	3.54	α_3	10.62	α_5	17.69
-	C _{m,1}	0.78	C _{m,3}	0.91	C _{m,5}	0.95
m/s	V _{i,1}	1.15	V _{i,3}	0.63	V _{i,5}	0.19
kN/m	K ₁	43.546	K ₃	1176	K ₅	5443.2
-	C _{K,1} (M _p)	1.00	C _{K,3} (M _p)	1.00	C _{K,5} (M _p)	1.00
kN/m	K _{eq,1}	43.55	K _{eq,3}	1175.7	K _{eq,5}	5443.2
rad/s	W _{e,1}	175.55	W _{e,3}	1579.95	W _{e,5}	4388.75
-	X(p) ₁	1.00	X(p) ₃	1.0	X(p) ₅	1.000
Kg	M _{p,eq1}	5.00	M _{p,eq3}	5.00	M _{p,eq5}	5.00
rad/s	W _{ep,1}	82.40	W _{ep,3}	463.58	W _{ep,5}	1015.09
Nm	E ₁	4.212	E ₃	1.088	E ₅	0.097
%	E ₁ (%)	78.0%	E ₃ (%)	20.1%	E ₅ (%)	1.8%
Nm	E _{A,1}	4.2	E _{A,3}	5.3	E _{A,5}	5.4
%	E _{A,1} (%)	78%	E _{A,3} (%)	98%	E _{A,5} (%)	100%
Nm	E _{D,3}	1.2	E _{D,5}	0.1	E _{D,7}	0.0
%	E _{D,3} (%)	22%	E _{D,5} (%)	2%	E _{D,7} (%)	0%



Como se puede apreciar en el balance energético mostrado en la Tabla 90, la energía analizada al considerar 3 modos de vibración es el 100% de la energía cinética inicial.

A partir de lo expuesto y según los datos de la Tabla 90, se aplica la formulación desarrollada para el cálculo del desplazamiento mediante las ecuaciones (361) para el término de peso propio y (385) para el término cinético:

$$d_{e,pp}(t) = \frac{gM_p}{K_1} (1 - \cos(w_{ep} t)) = \frac{9.806 \times 5.0}{43\,546} \times (1 - \cos(82.4 t))$$

$$d_{e,vp}(t) = \frac{1.47 \times 0.78 \times \sin(82.4 t)}{82.4} + \frac{0.69 \times 0.91 \times \sin(1580 t)}{464} + \frac{0.2 \times 0.95 \times \sin(4389 t)}{1015}$$

El desplazamiento total del centro de la viga se obtiene como suma de los términos de peso propio y cinético:

$$d_{e,TOTAL}(t) = d_{e,vp}(t) + d_{e,pp}(t)$$

En la Figura 281 se comparan los resultados del desplazamiento estructural en el punto de impacto de la viga, el centro de luz, considerando los tres primeros modos de vibración y el efecto de peso propio ($d_{e,TOTAL}(t)$), con los recogidos del ensayo real realizado en el Laboratorio ($d_{e,ENSAYO}(t)$). Para evaluar la influencia del peso propio en la deformada total, se incluye también en la figura la curva correspondiente a la acción del peso propio del proyectil ($d_{e,pp}(t)$).

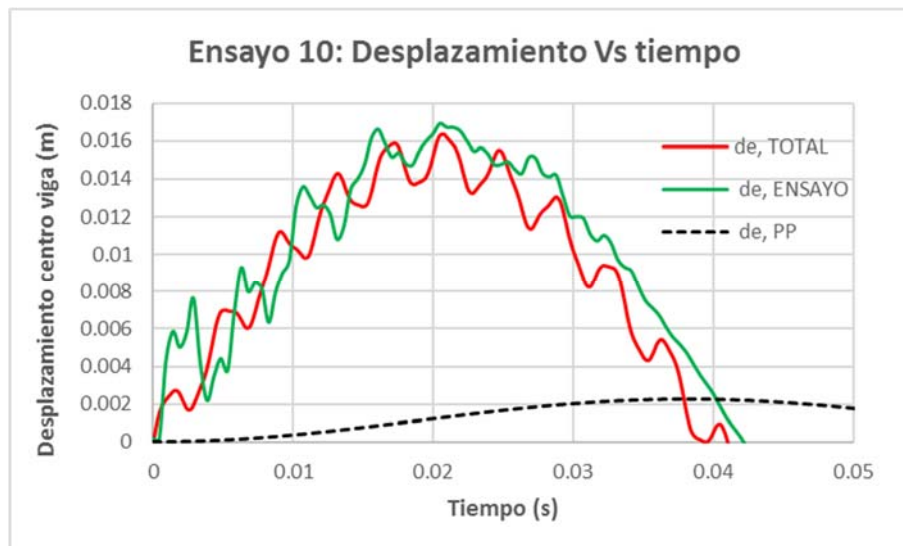


Figura 281- Registro desplazamiento-tiempo del centro de viga. Ensayo 9: $\alpha=3.5$ V=1.47 m/s

En todos los ensayos realizados en el laboratorio, incluidos los mostrados en la Figura 281, existe una ligera diferencia entre la parte de la curva de desplazamiento ascendente y la parte de la



curva descendente. En la parte ascendente, la inicial, la formulación desarrollada (curva roja) aporta resultados como oscilando respecto del valor medio de los resultados del ensayo (curva verde). **Es decir, las curvas que representarían la media de los valores de ambas curvas estarían muy próximas.** Esto no ocurre en la parte descendente de la curva de desplazamientos. En esta parte de la curva, la línea media de los resultados del ensayo se mostraría ligeramente por encima de la línea media de los resultados obtenidos por la formulación.

La explicación a esta ligera diferencia, es que, en la segunda parte de la curva o fase de recuperación de la posición inicial, el proyectil real utilizado en el ensayo correspondiente, el cual está posado sobre la viga en esos instantes, roza ligeramente contra los elementos de posicionamiento utilizados en el ensayo. Este rozamiento produce una ralentización en lo que a la recuperación de la posición de la estructura se refiere que, lógicamente, la formulación no considera.

No obstante, como se indicó anteriormente, el objeto de la investigación está en la fase ascendente de la curva ($t < \frac{T_{ep}}{4}$), dejando, si se considera necesario, el afino de resultados para tiempos mayores para futuras investigaciones.

El objetivo de la investigación mostrada en la presente tesis ha sido plantear una nueva teoría que permitiera adentrarse en el misterio del impacto, para, posteriormente, estudiar todos los casos necesarios completando los detalles que no han sido tenido en cuenta en este estudio.

5.1.4.7 Análisis conjunto: masa del proyectil dos veces y media la masa equivalente del modo 1 de la estructura ($\alpha=3.5$).

Para ver los casos expuestos en su conjunto, y evaluar más fácilmente la precisión de los resultados, se muestran en la Figura 282 los resultados de los ensayos 8, 9 y 10 indicando el correspondiente coeficiente C_{PP} de peso propio. Los tres ensayos presentan un valor del parámetro $\alpha=3.5$.

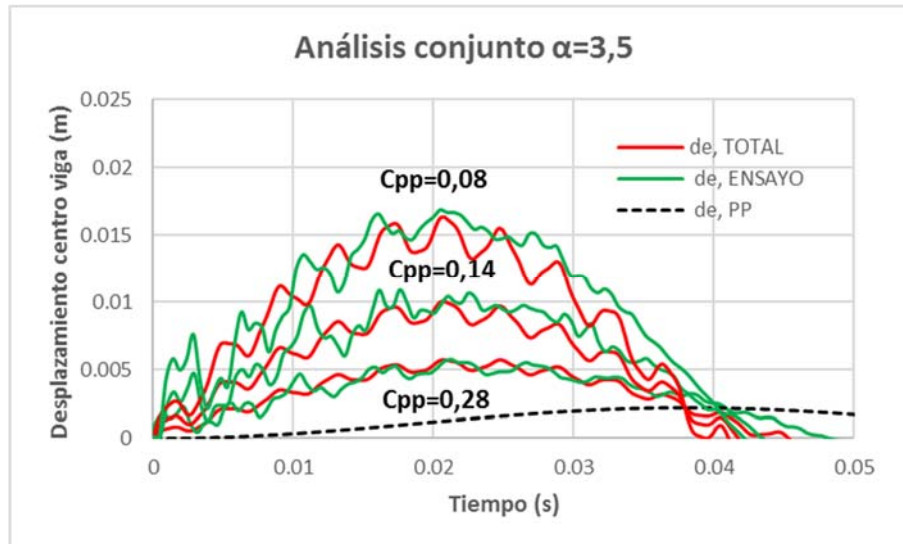


Figura 282- Registro desplazamiento-tiempo del centro de viga. Ensayos 8,9 y 10.

Los resultados mostrados en la Figura 282 corresponden a los ensayos 8, 9 y 10. En la gráfica se observa como a medida que el coeficiente de peso propio disminuye, el efecto del peso propio del proyectil (curva negra discontinua) disminuye su importancia en la deformación total obtenida con la formulación (curva roja). En la gráfica de la Figura 282 se puede apreciar claramente que para valores de coeficiente de peso propio (C_{pp}) menores de 0.1 se puede despreciar el efecto del peso propio.

En dicha grafica se puede apreciar, una vez más, que los resultados entre la formulación desarrollada (curva roja) y los ensayos reales (curva verde) **son muy próximos**.



5.1.5 Viga Rígida Vs. Viga Flexible.

En este apartado se hace una breve comparación entre el comportamiento de las dos vigas empleadas en los ensayos realizados en el Laboratorio de estructuras de la Universidad de Cantabria.

Para la comparación, se analizan los ensayos 5 y 7 descritos anteriormente. A partir de los datos expuestos en la tabla 70, se puede concluir que **ambos ensayos son el mismo, salvo que el impacto lo reciben dos vigas distintas**. En ambos ensayos se deja caer libremente una masa de 3.5 Kg desde una altura de 2.3 cm sobre la viga. En el caso del ensayo 5 sobre la viga flexible (de 3 mm de canto) y en el caso del ensayo 7 sobre la viga rígida (de 12 mm de canto).

El objeto de este análisis es subrayar la diferente manera de absorber la misma cantidad de energía cinética por una y por otra viga y, por extensión, **la capacidad de adaptación que muestra la formulación desarrollada**. En la Figura 283 se puede observar los resultados de desplazamientos para la viga flexible y para la viga rígida, tanto para el ensayo real como para la formulación en las condiciones indicadas.



Figura 283-Comparativa de desplazamientos en los ensayos 5 y 7. $H=0.023$ m; $Mp=3.5$ Kg.

A raíz de los resultados de la Figura 283, desde el análisis deformacional se puede observar cómo el máximo desplazamiento para el impacto en la viga flexible es de 120 mm aproximadamente, mientras que el máximo desplazamiento en la viga rígida es de 6.5 mm aproximadamente.



Respecto del análisis temporal, se puede apreciar cómo el máximo desplazamiento en la viga flexible se consigue para 0.17 segundos aproximadamente, mientras que en el caso de la viga rígida se consigue para 0.02 segundos. **Es decir, la respuesta de cada estructura tiene un orden de magnitud de diferencia.**

Este hecho explica que, en el caso de la viga flexible, el efecto del peso propio tenga una gran influencia ($C_{PP} = 1.1$) mientras que en el caso de la viga rígida prácticamente no la tenga ($C_{PP} = 0.16$). **En el caso de la viga flexible, la energía potencial que pierde el proyectil debido a la gran deformación producida en la viga durante el impacto no es despreciable, mientras que en el caso de la viga rígida sí.**

Respecto de la formulación desarrollada en la presente tesis, cabe destacar que incluso ante dos comportamientos tan distintos como son los mostrados por la viga flexible y la viga rígida para una misma energía de impacto, y como evidencian los resultados de mostrados en la Figura 283, **la formulación se adapta perfectamente:**

- **Desde el punto de vista espacial.**
- **Desde el punto de vista temporal.**
- **Desde el punto de vista de la influencia del peso propio del proyectil en el impacto.**



5.2 ENSAYOS DE MEDICIÓN DE FUERZAS

Para la comprobación de la formulación desarrollada en lo que a la fuerza de contacto se refiere, se reproduce el ensayo realizado por Schwieger H. en 1970²⁸. En el artículo que documenta el ensayo, se obtiene la fuerza máxima producida en el impacto de una masa contra una viga metálica. Este valor de fuerza máxima registrado en el ensayo, se comparará en el presente apartado con el valor de fuerza máxima que se obtiene de la aplicación de la formulación obtenida en la presente tesis.

5.2.1 Descripción del ensayo

El ensayo realizado por Schwieger consistía en lanzar una esfera sujeta por tres cables, de tal forma que, en el momento del impacto, éste se produjera perpendicular a la dirección de la gravedad y en sentido transversal a una viga, la cual recibía el impacto. Esta viga se encontraba simplemente apoyada en sus extremos. El ensayo se muestra en la Figura 284.

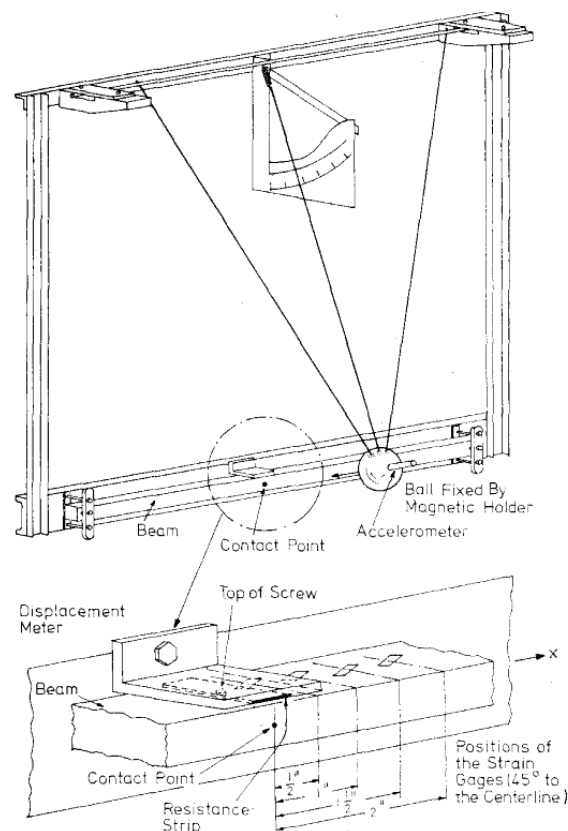


Figura 284-Mecanismo diseñado por Schwieger para la realización del ensayo de impacto.



La viga se instrumentaba con unas bandas extensométricas dispuestas a 45 grados mientras que en la esfera se disponía un acelerómetro.

Como se ha comentado previamente, del ensayo no se detallan los registros fuerza tiempo, pero **sí la fuerza máxima producida.**

Las características de la viga son las siguientes: viga de acero simplemente apoyada de longitud 0,86 m, cuya sección maciza presenta las siguientes dimensiones; 5.1 cm de ancho y 2.5 cm de canto.

La masa de la esfera o masa del proyectil es de 0.885 Kg, lo que supone para este caso un $\alpha=0.21$. El punto de impacto es el centro de luz de la viga.

Bajo estas condiciones, se realizaron tres ensayos con distintas velocidades de la esfera en el momento previo del impacto:

-Ensayo 1: $V=0.5$ m/s.

-Ensayo 2: $V=1.0$ m/s.

-Ensayo 3: $V=1.5$ m/s.

A continuación, se muestran los resultados calculados según la formulación para cada uno de los tres ensayos. Para el cálculo realizado mediante la formulación desarrollada, se han tenido en cuenta **los primeros 7 modos de vibración activos, los cuales representan el 99.7% de la energía de impacto.**



5.2.2 Cálculo ensayo 1

En el ensayo 1 se deja caer una masa la quinta parte de la masa equivalente del modo 1 de la estructura ($\alpha=0.21$) y una velocidad del proyectil previa al impacto ($V_{p,o}$) de 0.5 m/s.

Los datos del ensayo 1 se resumen en la Tabla 91.

Tabla 91-Ensayo 1 Schwieger. Caso $\alpha=0.21$ y $V=0.5$ m/s. Datos de partida.

Datos viga		Datos proyectil	
L (m)	0,86	Mp(kg)	0,885
b (m)	0,051	Vp (m/s)	0,50
h (m)	0,025	Eo (N m)	0,1106
A (m ²)	1,28E-03	CM (N s)	0,4425
I (m ⁴)	6,64063E-08	K	∞
E (KN / m)	2,10E+08	g(m/s ²)	0
ρ (kg / m ³)	7,85E+03	α	0,206
Punto de impacto "P" (m)	0,43	C _{pp}	0,00

A partir de los datos de partida se calculan los parámetros necesarios para la aplicación de la formulación según lo expuesto en los apartados 4.2.3.3 y 4.2.7.4 resolución del impacto. Al ser un impacto central simétrico, los modos pares no se activan, por lo que no se muestran los resultados de estos modos. Los valores de los parámetros resultantes para los 7 modos impares considerados se resumen en la Tabla 92 y en la Tabla 93.

Tabla 92- Parámetros resultantes para ensayo 1 Schwieger. Modos 1,3 y 5. Caso $\alpha=0.21$ $V_p=0.5$ m/s.

Unidades	Modo	1	Modo	3	Modo	5
-	L/L _{ef,1}	1	L/L _{ef,3}	3	L/L _{ef,5}	5
m/s	V _{p,1}	0.50	V _{p,3}	0.46	V _{p,5}	0.36
Kg	M _{e,1}	4.30	M _{e,3}	1.43	M _{e,5}	0.86
-	α_1	0.21	α_3	0.62	α_5	1.03
-	C _{m,1}	0.17	C _{m,3}	0.38	C _{m,5}	0.51
m/s	V _{i,1}	0.09	V _{i,3}	0.17	V _{i,5}	0.18
kN/m	K ₁	1052.4	K ₃	28414.4	K ₅	131548.0
-	C _{K,1} (M _p)	1.00	C _{K,3} (M _p)	1.00	C _{K,5} (M _p)	1.00
kN/m	K _{eq,1}	1052.4	K _{eq,3}	28414.4	K _{eq,5}	131548.0
rad/s	W _{e,1}	494.50	W _{e,3}	4450.47	W _{e,5}	12362.40
-	X(p) ₁	1.00	X(p) ₃	1.0	X(p) ₅	1.000
Kg	M _{p,eq1}	0.89	M _{p,eq3}	0.89	M _{p,eq5}	0.89
rad/s	W _{ep,1}	450.36	W _{ep,3}	3499.96	W _{ep,5}	8680.62
Nm	E ₁	0.019	E ₃	0.035	E ₅	0.029
%	E ₁ (%)	17.1%	E ₃ (%)	31.6%	E ₅ (%)	26.0%
Nm	E _{A,1}	0.019	E _{A,3}	0.1	E _{A,5}	0.1
%	E _{A,1} (%)	17%	E _{A,3} (%)	49%	E _{A,5} (%)	75%
Nm	E _{D,3}	0.1	E _{D,5}	0.1	E _{D,7}	0.0
%	E _{D,3} (%)	83%	E _{D,5} (%)	51%	E _{D,7} (%)	25%



Tabla 93- Parámetros resultantes para ensayo 1 Schwieger. Modos 7,9,11 y 13. Caso $\alpha=0.21$ $V_p=0.5m/s$.

Unidades	Modo	7	Modo	9	Modo	11	Modo	13
-	$L/L_{ef,7}$	7	$L/L_{ef,9}$	9	$L/L_{ef,11}$	11	$L/L_{ef,13}$	13
m/s	$V_{p,7}$	0.25	$V_{p,9}$	0.16	$V_{p,11}$	0.10	$V_{p,13}$	0.05
Kg	$M_{e,7}$	0.61	$M_{e,9}$	0.48	$M_{e,11}$	0.39	$M_{e,13}$	0.33
-	α_7	1.44	α_9	1.85	α_{11}	2.26	α_{13}	2.67
-	$C_{m,7}$	0.59	$C_{m,9}$	0.65	$C_{m,11}$	0.69	$C_{m,13}$	0.73
m/s	$V_{l,7}$	0.15	$V_{l,9}$	0.10	$V_{l,11}$	0.07	$V_{l,13}$	0.04
kN/m	K_7	360967.6	K_9	767187.8	K_{11}	1400722.8	K_{13}	2312087.1
-	$C_{K,7}(M_p)$	1.00	$C_{K,9}(M_p)$	1.00	$C_{K,11}(M_p)$	1.00	$C_{K,13}(M_p)$	1.00
kN/m	$K_{eq,7}$	360967.6	$K_{eq,9}$	767187.8	$K_{eq,11}$	1400722.8	$K_{eq,13}$	2312087.1
rad/s	$W_{e,7}$	24230.31	$W_{e,9}$	40054.19	$W_{e,11}$	59834.03	$W_{e,13}$	83569.85
-	$X(p)_7$	1.000	$X(p)_9$	1.000	$X(p)_{11}$	1.000	$X(p)_{13}$	1.000
Kg	$M_{p,eq7}$	0.89	$M_{p,eq9}$	0.89	$M_{p,eq11}$	0.89	$M_{p,eq13}$	0.89
rad/s	$W_{ep,7}$	15513.65	$W_{ep,9}$	23723.11	$W_{ep,11}$	33128.98	$W_{ep,13}$	43603.8497
Nm	E_7	0.017	E_9	0.0074	E_{11}	0.0028	E_{13}	0.0009
%	E_7 (%)	14.9%	E_9 (%)	6.7%	E_{11} (%)	0.0252	E_{13} (%)	0.8%
Nm	$E_{A,7}$	0.1	$E_{A,9}$	0.1	$E_{A,11}$	0.1	$E_{A,13}$	0.1
%	$E_{A,7}$ (%)	90%	$E_{A,9}$ (%)	96%	$E_{A,11}$ (%)	99%	$E_{A,13}$ (%)	99.7%
Nm	$E_{D,9}$	0.0	$E_{D,11}$	0.0	$E_{D,13}$	0.0	$E_{D,15}$	0.0
%	$E_{D,9}$ (%)	10%	$E_{D,11}$ (%)	4%	$E_{D,13}$ (%)	1%	$E_{D,15}$ (%)	0.3%

Se puede ver en los datos de las tablas anteriores que la energía analizada respecto de la inicial es el 99.7%.

A partir de los datos expuestos en la Tabla 92 y en la Tabla 93, se aplica la ecuación (386) cumpliendo con la condición expuesta mediante la ecuación (387). El resultado, de manera gráfica, de la aplicación de dicha ecuación se muestra en la Figura 285:



Figura 285-Fuerza de contacto para el ensayo 1. $\alpha=0.21$ y $V=0.5$ m/s.

La fuerza máxima resultante producida en el ensayo 1 según la formulación, como muestra la Figura 285, es de 6.79 KN.



5.2.3 Cálculo ensayo 2

En el ensayo 2 se deja caer también una masa la quinta parte de la masa equivalente del modo 1 de la estructura ($\alpha=0.21$) y una velocidad del proyectil previa al impacto ($V_{p,0}$) de 1.0 m/s.

Los datos del ensayo 2 se resumen en la Tabla 94.

Tabla 94- Ensayo 2 Schwieger. Caso $\alpha=0.21$ y $V=1.0$ m/s. Datos de partida.

Datos viga		Datos proyectil	
L (m)	0.86	Mp(kg)	0.885
b (m)	0.051	Vpo (m/s)	1.00
h (m)	0.025	Eo (N m)	0.443
A (m ²)	1.28E-03	C.M. (N s)	0.885
I (m ⁴)	6.64063E-08	K _{PROYECTIL}	∞
E (KN / m)	2.10E+08	g(m/s ²)	0
ρ (kg /m ³)	7.85E+03	α	0.21
Punto de impacto "p" (m)	0.43	C _{pp}	0.00

A partir de los datos de partida se calculan los parámetros necesarios para la aplicación de la formulación según lo expuesto en los apartados 4.2.3.3 y 4.2.7.4 de resolución del impacto. De igual manera que en el caso anterior, al ser un impacto central simétrico, los modos pares no se activan, por lo que no se muestran los resultados de estos modos. Los valores de los parámetros resultantes para los modos impares se resumen en las Tabla 95 y en la Tabla 96.

Tabla 95- Parámetros resultantes para ensayo 2 Schwieger. Modos 1,3 y 5. Caso $\alpha=0.21$ $V_p=1.0$ m/s.

Unidades	Modo	1	Modo	3	Modo	5
-	L/L _{ef,1}	1	L/L _{ef,3}	3	L/L _{ef,5}	5
m/s	V _{p,1}	1.00	V _{p,3}	0.91	V _{p,5}	0.72
Kg	M _{e,1}	4.30	M _{e,3}	1.43	M _{e,5}	0.86
-	α_1	0.21	α_3	0.62	α_5	1.03
-	C _{m,1}	0.17	C _{m,3}	0.38	C _{m,5}	0.51
m/s	V _{i,1}	0.17	V _{i,3}	0.35	V _{i,5}	0.36
kN/m	K ₁	1052.4	K ₃	28414.4	K ₅	131548.0
-	C _{K,1} (M _p)	1.00	C _{K,3} (M _p)	1.00	C _{K,5} (M _p)	1.00
kN/m	K _{eq,1}	1052.4	K _{eq,3}	28414.4	K _{eq,5}	131548.0
rad/s	W _{e,1}	494.50	W _{e,3}	4450.47	W _{e,5}	12362.40
-	X(p) ₁	1.00	X(p) ₃	1.0	X(p) ₅	1.000
Kg	M _{p,eq1}	0.89	M _{p,eq3}	0.89	M _{p,eq5}	0.89
rad/s	W _{ep,1}	450.36	W _{ep,3}	3499.96	W _{ep,5}	8680.62
Nm	E ₁	0.075	E ₃	0.140	E ₅	0.115
%	E ₁ (%)	17.1%	E ₃ (%)	31.6%	E ₅ (%)	26.0%
Nm	E _{A,1}	0.075	E _{A,3}	0.2	E _{A,5}	0.3
%	E _{A,1} (%)	17%	E _{A,3} (%)	49%	E _{A,5} (%)	75%
Nm	E _{D,3}	0.4	E _{D,5}	0.2	E _{D,7}	0.1
%	E _{D,3} (%)	83%	E _{D,5} (%)	51%	E _{D,7} (%)	25%



Tabla 96- Parámetros resultantes para ensayo 2 Schwieger. Modos 7,9,11 y 13. Caso $\alpha=0.21$ $V_p=1.0$ m/s.

Unidades	Modo	7	Modo	9	Modo	11	Modo	13
-	$L/L_{ef,7}$	7	$L/L_{ef,9}$	9	$L/L_{ef,11}$	11	$L/L_{ef,13}$	13
m/s	$V_{p,7}$	0.50	$V_{p,9}$	0.32	$V_{p,11}$	0.19	$V_{p,13}$	0.11
Kg	$M_{e,7}$	0.61	$M_{e,9}$	0.48	$M_{e,11}$	0.39	$M_{e,13}$	0.33
-	α_7	1.44	α_9	1.85	α_{11}	2.26	α_{13}	2.67
-	$C_{m,7}$	0.59	$C_{m,9}$	0.65	$C_{m,11}$	0.69	$C_{m,13}$	0.73
m/s	$V_{i,7}$	0.30	$V_{i,9}$	0.21	$V_{i,11}$	0.13	$V_{i,13}$	0.08
kN/m	K_7	360967.6	K_9	767187.8	K_{11}	1400722.8	K_{13}	2312087.1
-	$C_{K,7}(M_p)$	1.00	$C_{K,9}(M_p)$	1.00	$C_{K,11}(M_p)$	1.00	$C_{K,13}(M_p)$	1.00
kN/m	$K_{eq,7}$	360967.6	$K_{eq,9}$	767187.8	$K_{eq,11}$	1400722.8	$K_{eq,13}$	2312087.1
rad/s	$W_{e,7}$	24230.31	$W_{e,9}$	40054.19	$W_{e,11}$	59834.03	$W_{e,13}$	83569.85
-	$X(p)_7$	1.000	$X(p)_9$	1.000	$X(p)_{11}$	1.000	$X(p)_{13}$	1.000
Kg	$M_{p,eq7}$	0.89	$M_{p,eq9}$	0.89	$M_{p,eq11}$	0.89	$M_{p,eq13}$	0.89
rad/s	$W_{ep,7}$	15513.65	$W_{ep,9}$	23723.11	$W_{ep,11}$	33128.98	$W_{ep,13}$	43603.8497
Nm	E_7	0.066	E_9	0.0298	E_{11}	0.0112	E_{13}	0.0036
%	E_7 (%)	14.9%	E_9 (%)	6.7%	E_{11} (%)	0.0252	E_{13} (%)	0.8%
Nm	$E_{A,7}$	0.4	$E_{A,9}$	0.4	$E_{A,11}$	0.4	$E_{A,13}$	0.4
%	$E_{A,7}$ (%)	90%	$E_{A,9}$ (%)	96%	$E_{A,11}$ (%)	99%	$E_{A,13}$ (%)	99.7%
Nm	$E_{D,9}$	0.0	$E_{D,11}$	0.0	$E_{D,13}$	0.0	$E_{D,15}$	0.0
%	$E_{D,9}$ (%)	10%	$E_{D,11}$ (%)	4%	$E_{D,13}$ (%)	1%	$E_{D,15}$ (%)	0.3%

A partir de los datos expuestos en las Tabla 95 y en la Tabla 96 , se aplica la ecuación (386) cumpliendo con la condición expuesta mediante la ecuación (387). El resultado, de manera gráfica, de la aplicación de dicha ecuación se muestra en la Figura 286:



Figura 286- Fuerza de contacto para el ensayo 1. $\alpha=0.21$ y $V=0.5$ m/s.

La fuerza máxima resultante producida en el ensayo 2 según la formulación, como muestra la Figura 286 , es de 13.58 KN.



5.2.4 Cálculo ensayo 3

En el ensayo 3 se deja caer la misma masa, la cual es la quinta parte de la masa equivalente del modo 1 de la estructura ($\alpha=0.21$) y una velocidad del proyectil previa al impacto ($V_{p,0}$) de 1.5 m/s.

Los datos del ensayo 3 se resumen en la Tabla 97.

Tabla 97- Ensayo 3 Schwieger. Caso $\alpha=0.21$ y $V=1.5$ m/s. Datos de partida.

Datos viga		Datos proyectil	
L (m)	0.86	Mp(kg)	0.885
b (m)	0.051	Vpo (m/s)	1.50
h (m)	0.025	Eo (N m)	0.996
A (m ²)	1.28E-03	C.M. (N s)	1.328
I (m ⁴)	6.64063E-08	KPROYECTIL	∞
E (KN / m)	2.10E+08	g(m/s ²)	0
ρ (kg /m ³)	7.85E+03	α	0.21
Punto de impacto "p" (m)	0.43	Cpp	0.00

A partir de los datos de partida se calculan los parámetros necesarios para la aplicación de la formulación según lo expuesto en los apartados 4.2.3.3 y 4.2.7.4 de resolución del impacto. Nuevamente, al ser un impacto central simétrico, los modos pares no se activan, por lo que no se muestran los resultados de estos modos. Los valores de los parámetros resultantes para los modos impares se resumen en la Tabla 98 y en la Tabla 99.

Tabla 98- Parámetros resultantes para ensayo 3 Schwieger. Modos 1,3 y 5. Caso $\alpha=0.21$ $V_p=1.5$ m/s.

Unidades	Modo	1	Modo	3	Modo	5
-	L/L _{ef,1}	1	L/L _{ef,3}	3	L/L _{ef,5}	5
m/s	V _{p,1}	1.50	V _{p,3}	1.37	V _{p,5}	1.07
Kg	M _{e,1}	4.30	M _{e,3}	1.43	M _{e,5}	0.86
-	α_1	0.21	α_3	0.62	α_5	1.03
-	C _{m,1}	0.17	C _{m,3}	0.38	C _{m,5}	0.51
m/s	V _{i,1}	0.26	V _{i,3}	0.52	V _{i,5}	0.54
kN/m	K ₁	1052.4	K ₃	28414.4	K ₅	131548.0
-	C _{K,1} (M _p)	1.00	C _{K,3} (M _p)	1.00	C _{K,5} (M _p)	1.00
kN/m	K _{eq,1}	1052.4	K _{eq,3}	28414.4	K _{eq,5}	131548.0
rad/s	W _{e,1}	494.50	W _{e,3}	4450.47	W _{e,5}	12362.40
-	X(p) ₁	1.00	X(p) ₃	1.0	X(p) ₅	1.000
Kg	M _{p,eq1}	0.89	M _{p,eq3}	0.89	M _{p,eq5}	0.89
rad/s	W _{ep,1}	450.36	W _{ep,3}	3499.96	W _{ep,5}	8680.62
Nm	E ₁	0.170	E ₃	0.315	E ₅	0.259
%	E ₁ (%)	17.1%	E ₃ (%)	31.6%	E ₅ (%)	26.0%
Nm	E _{A,1}	0.170	E _{A,3}	0.5	E _{A,5}	0.7
%	E _{A,1} (%)	17%	E _{A,3} (%)	49%	E _{A,5} (%)	75%
Nm	E _{D,3}	0.8	E _{D,5}	0.5	E _{D,7}	0.3
%	E _{D,3} (%)	83%	E _{D,5} (%)	51%	E _{D,7} (%)	25%



Tabla 99- Parámetros resultantes para ensayo 3 Schwieger. Modos 7,9,11 y 13. Caso $\alpha=0.21$ $V_p=1.5$ m/s.

Modo	7	Modo	9	Modo	11	Modo	13
$L/L_{ef,7}$	7	$L/L_{ef,9}$	9	$L/L_{ef,11}$	11	$L/L_{ef,13}$	13
$V_{p,7}$	0.75	$V_{p,9}$	0.48	$V_{p,11}$	0.29	$V_{p,13}$	0.16
$M_{e,7}$	0.61	$M_{e,9}$	0.48	$M_{e,11}$	0.39	$M_{e,13}$	0.33
α_7	1.44	α_9	1.85	α_{11}	2.26	α_{13}	2.67
$C_{m,7}$	0.59	$C_{m,9}$	0.65	$C_{m,11}$	0.69	$C_{m,13}$	0.73
$V_{l,7}$	0.45	$V_{l,9}$	0.31	$V_{l,11}$	0.20	$V_{l,13}$	0.12
K_7	360967.6	K_9	767187.8	K_{11}	1400722.8	K_{13}	2312087.1
$C_{K,7}(M_p)$	1.00	$C_{K,9}(M_p)$	1.00	$C_{K,11}(M_p)$	1.00	$C_{K,13}(M_p)$	1.00
$K_{eq,7}$	360967.6	$K_{eq,9}$	767187.8	$K_{eq,11}$	1400722.8	$K_{eq,13}$	2312087.1
$W_{e,7}$	24230.31	$W_{e,9}$	40054.19	$W_{e,11}$	59834.03	$W_{e,13}$	83569.85
$X(p)_7$	1.000	$X(p)_9$	1.000	$X(p)_{11}$	1.000	$X(p)_{13}$	1.000
$M_{p,eq7}$	0.89	$M_{p,eq9}$	0.89	$M_{p,eq11}$	0.89	$M_{p,eq13}$	0.89
$W_{ep,7}$	15513.65	$W_{ep,9}$	23723.11	$W_{ep,11}$	33128.98	$W_{ep,13}$	43603.8497
E_7	0.149	E_9	0.0670	E_{11}	0.0251	E_{13}	0.0081
E_7 (%)	14.9%	E_9 (%)	6.7%	E_{11} (%)	0.0252	E_{13} (%)	0.8%
$E_{A,7}$	0.9	$E_{A,9}$	1.0	$E_{A,11}$	1.0	$E_{A,13}$	1.0
$E_{A,7}$ (%)	90%	$E_{A,9}$ (%)	96%	$E_{A,11}$ (%)	99%	$E_{A,13}$ (%)	99.7%
$E_{D,9}$	0.1	$E_{D,11}$	0.0	$E_{D,13}$	0.0	$E_{D,15}$	0.0
$E_{D,9}$ (%)	10%	$E_{D,11}$ (%)	4%	$E_{D,13}$ (%)	1%	$E_{D,15}$ (%)	0.3%

A partir de los datos expuestos en la Tabla 98 y en la Tabla 99, se aplica la ecuación (386) cumpliendo con la condición expuesta mediante la ecuación (387). El Resultado, de manera gráfica, de la aplicación de dicha ecuación se muestra en la Figura 287:



Figura 287- Fuerza de contacto para el ensayo 3. $\alpha=0.21$ y $V=1.5$ m/s.

La fuerza máxima resultante producida en el ensayo 3 según la formulación, como muestra la Figura 287, es de 20.37 KN.



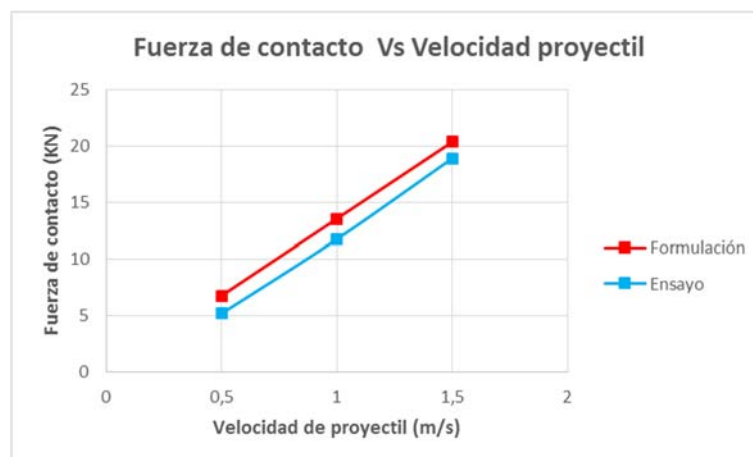
5.2.5 Comparación de resultados.

Los resultados de fuerza de contacto durante el impacto obtenidos en el ensayo real realizado por Schwieger y los resultados obtenidos de la formulación y calculados en los apartados anteriores se muestran en la Tabla 100:

Tabla 100-Comparativa numérica de los valores de fuerza de contacto según el ensayo de Schwieger y según la formulación desarrollada.

N° Ensayo	V impacto (m/s)	FUERZA CONTACTO	
		Formulación	Ensayo
	(m/s)	KN	KN
1	0,5	6,79	5,21
2	1	13,58	11,77
3	1,5	20,37	18,92

Los resultados de la Tabla 100 se muestran en la Figura 288 de manera gráfica:



Como se aprecia en la Figura 288, las fuerzas de ambas curvas **son muy similares**. La tendencia observada en el ensayo real, respecto de la relación lineal entre fuerza y velocidad inicial de impacto, se refleja también en los resultados obtenidos mediante la formulación desarrollada.

La fuerza resultante real muestra un valor ligeramente inferior en los tres casos analizados a la fuerza calculada según la formulación. Este hecho se puede explicar la hipótesis de incompresibilidad del proyectil que, en el ensayo real, no se produce. **Pequeñas deformaciones en el proyectil, puede reducir la fuerza de contacto de manera significativa.**



- Desarrollo de teoría sobre impactos -
- Método simplificado de cálculo de impactos en estructuras -





6 CONCLUSIONS/CONCLUSIONES

A lo largo del documento se ha explicado la investigación realizada, en cada una de sus fases, y se han ido exponiendo algunas conclusiones que, de manera parcial, se han ido obteniendo. En este apartado, se recogen todas ellas y **se añaden las conclusiones de carácter general** que sintetizan la investigación de manera conjunta, y dan medida de su aportación a la comunidad científica. Las principales conclusiones y aportaciones de la investigación realizada serán mostradas primero en inglés (apartados 6.1 a 6.5) y posteriormente en español (apartados 6.6 a 6.10), y son, por tanto, las siguientes:

The various chapters in this thesis have outlined details of the research carried out in each phase and some of the conclusions partially obtained thereby. This last section covers all of those initial conclusions, as well as **the general conclusions** that synthesize our research as a whole and thus define the contribution it makes to the scientific community. The main conclusions and contributions of this research will first be given in English (section from 6.1 to 6.5) and subsequently in Spanish (section from 6.6 to 6.10), and are as follows:

6.1 ABOUT THE CURRENT WAY OF CALCULATING IMPACT

In regard to the task of documenting current theories and the present way of tackling the problem of impact, the following conclusions can be drawn:

- On the basis of our assessment of existing documented theories in the field of impact set forth in Chapter 2 of this thesis, the absence of a **foolproof theory in the field of impact on structures** was demonstrated.
- This lack of a foolproof theory is evident from the absence of a " $\frac{PL^3}{48EI}$ ", taken to be a metaphor for the usefulness of manual calculation, in the field of impact. The "big numbers" used as benchmarks are actually those that enable **simplified manual calculations to be performed, on the basis of which the physical phenomenon under study can be mastered**. When the use of finite element software is the only way of obtaining solutions, the engineer, like an agent alien to the problem, is forced to believe the results it provides, with the risks inherent in such a passive role, so far removed from the stated mission of his profession.



- Furthermore, in the author's experience, the **use of such software in the specific area of impact is far from simple**. Some of the difficulties experienced in writing this thesis include defining a multitude of parameters without sufficient information on them, overcoming problems of convergence of results, very long calculation times, or directly the error messages displayed by the software when calculating the problem.

In addition, **apart from referring individually to a specific type of structure, current theories are very complex** from the point of view of their practical applicability, entailing the development of complex spreadsheets with the same loss of control over the physical problem as occurs with commercial software, but with less rigour in the calculations.

6.2 ABOUT THE IDEALISATION OF STRUCTURE AS RIGIDITY AND EQUIVALENT MASS

The idealisation of the structure as a spring and mass system developed in section 4.1 herein is in itself a tool that simplifies and explains structural calculation in general, beyond the boundaries of impact. The following conclusions can be obtained from such idealisation:

- To address the problem of impact in structures, an independent first step was carried out, which consisted of obtaining the essence of the structure at a specific point on it using rigidity and equivalent mass parameters. That way, the structure can be treated **as a system with one degree of freedom, or a sum of DOFs, for any problem**.
- Reducing the structure to a system with **one degree of freedom enables the problem to be understood, and therefore calculated, and therefore allows for design criteria to be obtained**. In this context, calculation using finite element software serves merely as a way of verifying the results obtained.
- One example of its application detailed herein involves using rigidity and equivalent mass at a point in the structure for each vibration mode in order to **address the dynamic modal calculation of a beam as a sum of independent systems of a degree of freedom**.
- Condensing the essence of the structure into masses and springs has led to the idea that the concrete structure is irrelevant, such that the method of calculating impact developed in this thesis is **global in character and thus does not depend on the particular structure**.



- Both rigidity and equivalent mass at a point in a structure are the result of condensing at that point the system of inertial forces, in the case of mass, and of elastic forces, in the case of rigidity, derived from the movement of the structure.
- For any given structure, **both rigidity and equivalent mass**, and therefore the associated forces, **depend exclusively on the structural deformation**.

6.3 ABOUT THE THEORY OF IMPACT DEVELOPED HEREIN

In regard to the theoretical reasoning of impact, the main conclusions, from the conceptual point of view, obtained from the theory presented herein are as follows:

6.3.1 Breakdown of effects in an impact

- In an impact, the effect due to the **velocity of the projectile, or kinetic term**, can be split from the effect due to the **weight of the projectile, or gravitational term**.
- Furthermore, a structural impact can be broken down into **an approach phase** or phase in which the velocity of the projectile is compared to that of the structure, and a **restitution phase**, where the structure and projectile have the same velocity.
- In the more rapid and abrupt approach phase, the projectile is not part of the structure.
- In the restitution phase, which is slower and softer, the structure has already absorbed the projectile as a structural mass.

6.3.2 Gravitational term of an impact

- **The gravitational term or the term of the projectile's own weight, is only important when the mass of the projectile is greater than the fundamental mode of the structure in flexible structures and at low projectile velocities.** Although the effect of the projectile's own weight is not currently taken into account in many impact calculations, numerous examples have been calculated throughout this thesis in which its importance has been clearly seen.
- **The gravitational term takes into account the potential energy released by the projectile during impact.** To calculate that, it can be considered in practice to only affect



the fundamental mode of the structure. That is because the fundamental mode is the mode mainly responsible for the movement of the structure.

- The gravitational term, both in terms of force and of movement, is seen in the form of a *cosine* curve. This curve reveals a zero tangent initially, since the gravitational term starts with the structure at rest.
- The frequency of vibration of the gravitational term during impact is modified by the absorption of the mass of the projectile by the fundamental mode.
- The gravitational term has its maximum deformation, due to its *cosine* type curve, at a point in time equal to half the vibration period during the impact.

6.3.3 Kinetic term of an impact

- The kinetic term, which may generally be considered the main term in an impact, has proven to be **responsible for the distribution of the impact's energy between the structure's various modes of vibration.**
- As far as the kinetic term is concerned, this research has shown that, given the same impact energy, from the point of view of the structure, it is **not the same for this energy to be due to a small mass at high velocity as for it to be due to a large mass at low velocity.**
- If the mass of the projectile is greater than the mass of the fundamental mode, it is the fundamental mode that absorbs the impact, whereas, if the mass of the projectile is smaller than the fundamental mode, the similar mass modes will be the ones mainly responsible for absorbing that energy.
- **In short, in an impact, those modes whose equivalent mass is the closest to the mass of the projectile will be primarily the ones to be activated, because that way the abruptness of the impact is reduced, as Newton's cradle foresees.**
- For the same impact energy, the **lower the mass of the projectile, the more abrupt the impact will be**, because higher, and therefore more rigid, vibration modes will be activated.
- The kinetic term, as far as both force and displacement are concerned, manifests itself as a *sine*-type curve. This curve has an initial tangent other than zero.
- The initial tangent of the kinetic term can be calculated by considering the structural mass as a free mass, with the initial tangent being the velocity resulting from a totally plastic impact between the projectile and the free mass of the structure.



- The vibration frequency of the kinetic term during an impact is modified by the absorption of the mass of the projectile by the fundamental mode.
- The kinetic term has its maximum deformation, due to it being a *sine* curve, at a point in time equal to a quarter of the vibration period during the impact.

6.3.4 Combination of the gravitational and kinetic terms

- Both in the kinetic term and in the gravitational term, the mass of the projectile during an impact behaves as a structural mass for the fundamental mode, in the restitution phase, until it is stopped. Therefore, **the period of vibration of the structure during the impact is different from its natural period of vibration.**
- In an impact, **the kinetic component and the gravitational component are added together linearly**, so that the displacement of the deformed structure will resemble more closely a *sine* curve or a *cosine* curve, respectively, depending on which term is most dominant.
- Similarly, the instant in which maximum structural deformation occurs will be **approximately a quarter** of the period of fundamental vibration during the impact, or **half that period**, depending on the dominant term.

6.3.5 Applicability of the theory

- The theory of impact developed herein is based on an ideal elastic structure whose rigidity and equivalent mass are condensed at the point of impact.
- As explained, these concepts can be applied to **any one-, two- or three-dimensional structure.**
- Similarly, in this theory, **the important concept is the impact energy** given off by the projectile and not whether that energy is absorbed by any flexure, axial, torsional etc. mechanism.
- The above two points are what afford this newly-developed theory its generic character, which no previous theory has hitherto established. These features represent a unique perspective of impact, which, above all, enables **a general pattern of behaviour in the face of an impact to be determined for any structure.**



- With this understanding of the above concepts, a formulation for calculating impact using a simple calculation model has been developed.

6.4 ABOUT THE FORMULATION DEVELOPED HEREIN

The calculation model developed on the basis on the new theoretical concepts proposed in this thesis has allowed a formulation to be obtained, about which the following conclusions can be drawn:

- The newly-developed formulation generally provides a **very good approximation** to both the **numerical results** obtained with Civil Midas and to the **results of our experiments**.
- Since the theory has been developed with the **assumption of permanent contact between the structure and the projectile**, the formulation is **exact for large projectile masses** with respect to the equivalent mass of the fundamental mode, because this assumption is reproduced.
- For small projectile masses, this assumption does not occur in all cases and the formulation returns a result that is very close to the **mean reference values**.
- This new formulation provides the following:
 - The **displacement** of the structure in an impact.
 - The **force** of contact function that occurs between bodies in an impact.
 - The projectile stoppage **time** in an impact.
- The newly-developed formulation was tested **with satisfactory results** on:
 - Beams of various sizes.
 - Floor slabs.
 - Support brackets.
 - Concrete structures
 - Steel structures
 - Structures made of ideal materials
 - Central impacts
 - Eccentric impacts
 - Transverse impacts
 - Longitudinal impacts



- A method has been developed on the basis of the new formulation to provide an **assessment of energy in an impact** in order to estimate roughly the percentage of energy allocated to each mode. In this way, one can determine how much energy with respect to the projectile's initial energy has been taken into account in the calculations.
- The following can be taken as best practices for applying the formulation:
 - To calculate **displacement**, regardless of the energy analysed, the results are sufficiently close **if the first two modes of vibration are analysed**.
 - To calculate **contact forces**, it is necessary to consider the modes required to ensure that at least **95% of the initial energy** has been taken into account in the calculations.
- The formulation developed herein also provides an **own-weight factor C_{pp}** which gives advanced indication of whether the **weight of the projectile will bear on the final results**. That way, one can decide whether to take that weight into consideration or not, both in the formulation and in calculations using finite element software.
- This paper recommends not taking the weight of the projectile into consideration only when the own-weight factor is less than 0.1 ($C_{pp} < 0.1$).

The newly-developed **formulation also provides** the " $\frac{PL^3}{48EI}$ " or "**big number**" so sought after in the study of impact, one of the few areas of structural engineering where it is still missing.



6.5 ABOUT THE RESEARCH

Finally, and with the sole intention of serving as aid to other researchers, the author would like to present a few brief conclusions about how the research detailed herein was carried out.

- As the **underlying idea** around which everything else is organised, this thesis maintains that in an impact, **equal masses tend to collide**.
- This idea came mainly from observing **Newton's cradle**, which is the principal reason why it has been included in chapter 3 of this thesis.
- All the people and books consulted in regard to Newton's cradle **claimed to understand** its operation and reiterated strongly that the cradle mechanism demonstrated the conservation of energy and momentum.
- However, without querying whether they really did understand it, **none of them was able to explain** the following question, which is accomplished in Chapter 3: If one ball is swung against the other 4 on the cradle, **why does the swinging ball, rather than the last one, not move when it collides with the other four balls, as actually happens?** In both situations, energy and momentum are conserved, so something else was happening that nobody was taking into account.
- Given the author's concerns on this point and at the proposal of the director of the thesis, our **research began with a long and tough period of reflection** about something which, up until then, I believed I understood. In fact, I had used it in calculations for many years, but I had not really grasped it fully: energy and momentum.
- Following that period of reflection, I finally came to understand how Newton's cradles operated and **the solution seemed to be so simple that it makes me blush**: "*Equal masses collide in the cradle because that is the softest way for the cradle to stop the ball*".
- The idea became so clear that an answer soon appeared to the question: **can this logic only be applied to something as minor as Newton's cradle?**
- Bearing that conclusion in mind, the research ventured into a study of impact on structures in the specific case of a projectile mass greater than the mass of the structure. The research was based on the certainty that, with just this condition alone, the fundamental vibration mode, being the mass closest to the projectile, would, in practice, be the only one activated. The remaining infinite modes of vibration were not going to matter in the outcome, regardless of the speed at which the impact occurs.



- This **single idea meant that the unknown response of infinite modes of vibration did not need to be considered in the calculations** prior to anything else being calculated.
- The rest of the research continued with the same conclusion about **Newton's cradle setting the path** to be followed for each issue that arose.
- Years later, having resolved many structural intrigues throughout my professional career, my method of addressing these problems has changed so much that **what now makes me blush when I am presented with a structural problem is not knowing how to articulate it in a simple way.**
- The question to answer now is ... ***is this way of thinking only useful for something as minor as structures?***

*"At first, we stated that Maillart's SalginaTobel Bridge had been discovered by Giedion. The times we now live in and its broad concepts of what constitutes Art will not take long to discover the formidable beauty of bridges, dams, roads, etc....**a fact that is not so significant for public works but of extreme importance for the Art of our era**"*

Javier Manterola Armisen



- Desarrollo de teoría sobre impactos -
- Método simplificado de cálculo de impactos en estructuras -





6.6 SOBRE LA SITUACIÓN ACTUAL DEL CÁLCULO DE IMPACTOS

En lo referente al trabajo de documentación realizado sobre las teorías existentes y la forma de abordar el problema del impacto actualmente, se pueden obtener las siguientes conclusiones:

- A partir de la documentación analizada respecto a las teorías existentes en el campo de los impactos, recogida en el capítulo 2 de la presente tesis, se ha verificado **la ausencia de una teoría cerrada en el área de los impactos en estructuras.**
- Esta ausencia de teoría, se pone de manifiesto en la ausencia de un “ $\frac{PL^3}{48EI}$ ”, entendido éste como metáfora de la utilidad del cálculo manual, en el área de los impactos. Los “números gordos” de referencia, son realmente los que permiten realizar **cálculos manuales simplificados y, a través de ellos, dominar el fenómeno físico a estudiar.** El empleo de softwares de elementos finitos como única vía para obtener soluciones obliga al ingeniero, con los riesgos que conlleva, a creerse los resultados como un agente externo al problema. Estaría, por tanto, fuera del ingenio que da nombre a su profesión.
- Adicionalmente, **el empleo de estos softwares en el área concreta de los impactos**, a partir de la experiencia del doctorando, **no es en absoluto sencillo.** Infinidad de parámetros que han de definirse sin información sobre ellos, problemas de convergencia de resultados, tiempos de cálculos muy elevados o directamente mensajes de error del programa a la hora de calcular el problema, son sólo algunos de los problemas experimentados en la redacción de la presente tesis.
- Por otro lado, **las teorías existentes, además de ser cada una para un tipo de estructura específica, son muy complejas** desde el punto de vista de su aplicabilidad y en la práctica, llevan a desarrollar complejas hojas de cálculo con la misma **pérdida del control sobre el problema físico** que los softwares comerciales, pero con menor rigor en los cálculos que éstos.



6.7 SOBRE LA IDEALIZACIÓN DE LA ESTRUCTURA COMO RIGIDEZ Y MASA EQUIVALENTE

La idealización de la estructura como sistema de muelle y masa desarrollada en el punto 4.1 de la presente tesis, supone, en sí misma, una herramienta que simplifica y explica el cálculo estructural en general, fuera de las fronteras del impacto. De dicha idealización, se pueden obtener las siguientes conclusiones:

- Para abordar el problema del impacto en estructuras, se ha realizado un paso previo, independiente del mismo, que consiste en obtener la esencia de la estructura en un punto concreto de la misma, a partir de los parámetros de rigidez y masa equivalente. De esta forma, se puede tratar la estructura para cualquier problema **como un sistema de un grado de libertad o suma de ellos**.
- Reducir las estructuras a un sistema de un grado de **libertad permite la comprensión del problema, el cálculo del mismo y finalmente la obtención de criterios de diseño**. Quedando el cálculo mediante programas de elementos finitos como una mera comprobación de los resultados obtenidos.
- Un ejemplo de aplicación realizado ha sido, a partir de la rigidez y la masa equivalente en un punto de la estructura para cada modo de vibración, **abordar el problema del cálculo dinámico modal de una viga como suma de sistemas independientes de un grado de libertad**.
- Tener la esencia de las estructuras condensadas en masas y muelles, ha permitido liberar la idea de que la estructura concreta era irrelevante, dotando al método de cálculo de impactos desarrollado en estas tesis de un definitivo **carácter general, independiente de la estructura**.
- Tanto **la rigidez como la masa equivalente** de un punto en una estructura, **son el resultado de condensar** en dicho punto el sistema de **fuerzas**, inerciales en el caso de la masa y elásticas en el caso de la rigidez, que se derivan del movimiento de la estructura.
- Para una estructura dada, **tanto la rigidez como la masa equivalente**, y por tanto sus fuerzas asociadas, **solo dependen de la deformada estructural**.



6.8 SOBRE LA TEORÍA DE IMPACTOS DESARROLLADA

Sobre el razonamiento teórico en los impactos, las principales conclusiones que se han obtenido de la teoría desarrollada, desde el punto de vista conceptual, son las siguientes:

6.8.1 Descomposición de efectos en un impacto

- En un impacto, se puede descomponer de manera independiente el efecto debido a la **velocidad del proyectil, o término cinético**, y el efecto debido al **peso del proyectil, o término gravitatorio**.
- Además, un impacto estructural, se puede descomponer en una **fase de aproximación**, o fase equiparación de velocidades entre proyectil y estructura, **y una fase de restitución**, donde estructura y proyectil tienen la misma velocidad.
- En la fase de aproximación, más rápida y brusca, el proyectil no forma parte de la estructura.
- En la fase de restitución, más lenta y suave, la estructura ya ha absorbido el proyectil como masa estructural.

6.8.2 Término gravitatorio del impacto

- El **término gravitatorio** o de peso propio, **sólo es importante en los casos de masa del proyectil mayor que el modo fundamental de la estructura, en estructuras flexibles y para velocidades de proyectil bajas**. A pesar de que en la actualidad en muchas ocasiones no se calculan impactos considerando el efecto del peso propio del proyectil, a lo largo del documento se han calculado muchos ejemplos en los que su importancia se ha puesto de manifiesto.
- El **término gravitatorio tiene en cuenta la energía potencial liberada por el proyectil durante el impacto**. Para su cálculo, se puede considerar, en la práctica, que sólo afecta al modo fundamental de la estructura. Esto es debido a que este modo es el modo responsable, mayoritariamente, del desplazamiento estructural.
- El término gravitatorio, tanto en lo referente a fuerza como en lo referente a desplazamiento, se manifiesta en forma de curva tipo **coseno**. Esta curva presenta tangente inicial nula, dado que el término gravitatorio parte del reposo de la estructura.



- La frecuencia de vibración del término gravitatorio durante el impacto se ve modificada por la absorción de la masa del proyectil por el modo fundamental.
- El término gravitatorio presenta su máxima deformación, debido a condición de curva tipo *coseno*, en un tiempo igual a medio periodo de vibración durante el impacto.

6.8.3 Término cinético del impacto

- El término cinético, el cual suele se puede considerar el principal en un impacto en términos generales, se ha revelado **como el responsable del reparto energético del impacto entre los distintos modos de vibración de una estructura.**
- Respecto del termino cinético, ha quedado de manifiesto a lo largo de la investigación que, para una misma energía de impacto, **no es lo mismo desde el punto de vista de la estructura que esta energía sea debida a una masa pequeña a mucha velocidad, o a una masa grande con poca velocidad.**
- Si la masa del proyectil es mayor que la masa del modo fundamental, será este modo el que absorba el impacto, mientras que, si la masa del proyectil es pequeña respecto de ésta, serán los modos de masa parecida los principales encargados de absorber dicha energía.
- **En definitiva, en un impacto se activarán principalmente aquellos modos cuya masa equivalente sea lo más parecida posible a la masa del proyectil porque así se reduce la brusquedad del impacto, como adelantó el péndulo de Newton.**
- Para una misma energía de impacto, **a menor masa del proyectil mayor brusquedad del impacto**, porque se activarán modos de vibración más altos y, por tanto, más rígidos.
- El termino cinético, tanto en lo referente a fuerza como en lo referente a desplazamiento, se manifiesta en forma de curva tipo *seno*. Esta curva presenta una tangente inicial distinta de cero.
- La tangente inicial del término cinético se puede calcular a partir de considerar la masa estructural como masa libre, siendo la tangente inicial la velocidad resultante de un impacto totalmente plástico entre el proyectil y la masa libre estructural.
- La frecuencia de vibración del término cinético durante el impacto, se ve modificada por la absorción de la masa del proyectil por el modo fundamental.
- El término cinético presenta su máxima deformación, debido a condición de curva tipo *seno*, en un tiempo igual a un cuarto de periodo de vibración durante el impacto.



6.8.4 Combinación del termino gravitatorio y del término cinético

- Tanto en el término cinético como en el término gravitatorio, la masa del proyectil durante un impacto se comporta como masa estructural para el modo fundamental, en la fase de restitución, hasta que éste es detenido. Por lo que el **periodo de vibración de la estructura durante el impacto es distinto del periodo natural de vibración**.
- En un impacto, **la componente cinética y la componente gravitatoria se suman linealmente**, por lo que la deformada estructural presentará, respectivamente, un desplazamiento con forma más próxima a una curva tipo *seno* o una curva tipo *coseno*, en función de qué término sea más dominante.
- De igual forma, el instante en el que se produce la máxima deformación estructural se aproximará a **un cuarto del periodo** de vibración fundamental durante el impacto, **o un semiperiodo**, en función del término dominante.

6.8.5 Aplicabilidad de la teoría

- La teoría de impactos desarrollada se basa en una estructura ideal elástica de rigidez y masa equivalente condensadas en el punto de impacto.
- Como se ha explicado, estos conceptos pueden ser referidos **a cualquier estructura elástica** ya sea una estructura de una dimensión, de dos o una estructura tridimensional.
- De igual manera, en la teoría desarrollada, **el concepto relevante es la energía de impacto** desprendida por el proyectil, no si ésta se absorbe por mecanismo de flexión, axil, torsión etc.,
- Los dos puntos anteriores son los que dotan a la teoría desarrollada de un **carácter general** que ninguna de las teorías previas ha podido establecer. Estas características suponen una visión única del impacto que permite, sobre todo, **encontrar ese patrón general de comportamiento de cualquier estructura ante un impacto**.
- La comprensión de todos estos conceptos ha permitido la obtención de una formulación para el cálculo de impactos a partir de un sencillo modelo de cálculo.



6.9 SOBRE LA FORMULACIÓN DESARROLLADA

El modelo de cálculo desarrollado en la presente tesis a partir de los nuevos conceptos teóricos, ha permitido obtener una formulación sobre la que se pueden obtener las siguientes conclusiones:

- La formulación desarrollada proporciona, en general, **una muy buena aproximación** tanto de los **resultados numéricos** obtenidos por el Midas NFX como de los **resultados experimentales** considerados.
- Dado que la teoría se ha desarrollado **bajo la hipótesis de contacto permanente entre estructura y proyectil**, la formulación **resulta exacta para masas del proyectil grandes** con respecto a la masa equivalente del modo fundamental porque esta hipótesis se reproduce.
- Para masas de proyectil pequeñas, dicha hipótesis no se da en todos los instantes y la formulación proporciona un **resultado promedio** muy cercano a los valores de referencia.
- Con la formulación desarrollada se puede obtener:
 - El **desplazamiento** de la estructura en un impacto.
 - La función **fuerza** de contacto entre cuerpos producida en un impacto.
 - El **tiempo** de parada del proyectil en un impacto.
- La formulación desarrollada se ha comprobado, con **resultados satisfactorios**, en:
 - Vigas de distintos vanos.
 - Placas.
 - Ménsulas.
 - Estructuras hormigón.
 - Estructuras de acero.
 - Estructuras de materiales ideales.
 - Impactos centrales.
 - Impactos excéntricos.
 - Impactos transversales.
 - Impactos longitudinales.
- A partir de la formulación desarrollada, se ha obtenido la forma de realizar un **análisis energético del impacto** para poder calcular aproximadamente que porcentaje de



energía se lleva cada modo. De esta forma se tiene conoce cuánta energía, respecto de la inicial del proyectil, ha sido tomada en cuenta en los cálculos.

- Como reglas de buena práctica en la aplicación de la formulación, se pueden resumir:
 - Para el cálculo de **desplazamientos**, independientemente de la energía analizada, si se analizan los **dos primeros modos de vibración activos** los resultados obtenidos son suficientemente aproximados.
 - Para el cálculo de **fuerzas de contacto**, se ha de considerar los modos necesarios para que al menos el **95% de la energía inicial** se haya tenido en cuenta en los cálculos.
- La formulación desarrollada proporciona adicionalmente el **coeficiente de peso propio** C_{pp} para poder saber *a priori* si el **peso propio del proyectil va a tener influencia en los resultados finales**. De esta forma se puede decidir si considerarlo o no, tanto en la propia formulación como en cálculos mediante software de elementos finitos.
- Se recomienda no considerar el peso propio del proyectil sólo cuando el coeficiente de peso propio sea menor a 0.1 ($C_{pp} < 0.1$).
- La formulación desarrollada **proporciona** ese " $\frac{PL^3}{48EI}$ " o "**número gordo**" tan buscado en el área de los impactos, por ser una de las pocas áreas estructurales donde aún faltaba.



6.10 SOBRE LA INVESTIGACIÓN

Por último, y con la única intención de poder ser de utilidad para otros investigadores, se quiere exponer unas breves conclusiones sobre cómo se abordó la resolución de la investigación realizada.

- La presente tesis presenta como **idea fundamental** sobre la que se organiza todo, que en un impacto **tienden a chocar a masas iguales**.
- Esta idea surgió fundamentalmente de la observación **del péndulo de Newton**, motivo principal por el cual se ha incluido el apartado 3 en la presente tesis.
- Todas las personas o libros que consultados sobre el péndulo de Newton **decían entender** su funcionamiento, y repetían de manera contundente que el mecanismo del péndulo mostraba la conservación de la energía y de la cantidad de movimiento.
- Sin entrar a valorar si realmente lo entendían, **ninguno supo explicar**, como sí se ha hecho en el apartado 3, la siguiente cuestión: si se lanza una bola contra las otras 4 del péndulo **¿por qué la bola lanzada no moviliza al chocar las cuatro bolas en vez de sólo la última como pasa en la realidad?** En ambas situaciones se conserva la energía y la cantidad de movimiento, por lo que algo adicional que nadie contaba estaba aconteciendo.
- Dado que desde el punto de vista del doctorando no se entendía, y propuesto por el director de la tesis, **la investigación comenzó con un largo y duro periodo de reflexión** sobre algo que hasta entonces el doctorando había creído entender. De hecho, lo utilizaba en los cálculos desde hace muchos años, pero realmente no lo tenía interiorizado: la energía y la cantidad de movimiento.
- Tras el periodo de reflexión, se entendió el funcionamiento del péndulo de Newton cuando **la solución se verbalizó tan simple que generaba rubor**. *“Chocan masas iguales en el péndulo porque es la manera más suave que tiene el péndulo de parar la bola”*.
- Tan clara estaba la idea, que se respondió rápidamente a la pregunta **¿puede esta lógica ser solo aplicable a algo tan menor como el péndulo de Newton?**
- Con esta conclusión presente, la investigación continuó estudiando los impactos en estructuras para el caso concreto de masa del proyectil mayor que la masa de la estructura. La investigación se basaba en la certeza de que, únicamente con esta condición, el modo fundamental de vibración, por ser el de masa más próxima al proyectil, sería en la practica el único que se iba a activar. Los infinitos modos de



vibración restantes no iban a tener importancia en los resultados, independientemente de la velocidad en la que se produjera el impacto.

- Sólo a partir de **una idea, ésta había permitido no tener que considerar en los cálculos la respuesta desconocida de infinitos modos de vibración**, antes de calcular nada.
- El resto de la investigación continuó con la misma conclusión sobre el **péndulo de Newton marcando el camino** que se debía tomar en cada problema que fue surgiendo.
- Años más tarde, y tras muchas intrigas estructurales resueltas a lo largo del desarrollo de la carrera profesional del doctorando, éste ha cambiado tanto la forma de abordar estos problemas **que, de hecho, lo que le ruboriza ahora cuando se le presenta un problema estructural es no saber verbalizarlo de manera simple.**
- La pregunta a responder actualmente es... ***esta forma de pensar, ¿sólo es útil para algo tan menor como las estructuras?***

*“Al principio hemos dicho que el puente de Maillart, el SalginaTobel, había sido descubierto por Giedion. Los tiempos actuales y sus amplios planteamientos sobre lo que es arte no tardarán mucho en descubrir la formidable belleza de los puentes, las presas, las carreteras, etc, etc. **Y este es un hecho que no es demasiado importante para las obras públicas, pero sí es muy importante para el arte de nuestro tiempo**”*

Javier Manterola Armisén.



- Desarrollo de teoría sobre impactos -
- Método simplificado de cálculo de impactos en estructuras -





7 FUTURAS LINEAS DE INVESTIGACIÓN

El marcado carácter innovador del trabajo descrito a lo largo del documento tiene, como es normal en un desarrollo inicial y en general en cualquier investigación, margen de mejora.

A continuación, se exponen las que se consideran las cuatro líneas básicas de investigación para completar el trabajo expuesto en la presente tesis:

- La formulación desarrollada, en lo que se refiere al apartado de generalización para masa cualquiera, presenta resultados promedio susceptibles de ser mejorados. Considerar una masa del **proyectil con dimensiones reales**, mejoraría la precisión de resultados. No obstante, ha de conseguirse sin complicar la solución en exceso para no limar el principal aporte de la formulación desarrollada: la simplicidad de cálculo.
- Ampliar la formulación para un **análisis plástico** permitirá reproducir mayor cantidad de situaciones reales, aumentando la aplicabilidad del modelo. Esto se puede realizar incluyendo dos fases en el cálculo del impacto, una elástica y otra plástica, o introduciendo el concepto de módulo de elasticidad equivalente de tal forma que se tenga en cuenta la plastificación en la formulación tal cual se ha expuesto. Considerar plasticidad en el cálculo de impactos producirá, en cualquier caso, fuerzas de contacto menores que las ya consideradas en el caso elástico.
- En tercer lugar, la consideración de **la deformabilidad del proyectil** es una mejora a la formulación necesaria, dado que permite optimizar el diseño de la estructura y avanzar en el realismo que ésta es capaz de representar. En un caso extremo, un proyectil infinitamente flexible, e independientemente de la energía del impacto, sería totalmente inocuo desde el punto de vista de la estructura. Este concepto se puede implementar o bien incluyendo un proceso iterativo, o bien, para no desvirtuar el carácter sencillo del cálculo, como una velocidad inicial equivalente del proyectil.
- Por último, un modelo que tenga la consideración de **rugosidad en el contacto** es imprescindible para poder desacoplar un impacto con velocidades oblicuas de manera realista. Se podría considerar desacoplar un impacto en impacto transversal y otro axial según las componentes de la velocidad, pero seguramente esta consideración es demasiada conservadora.



- Desarrollo de teoría sobre impactos -
- Método simplificado de cálculo de impactos en estructuras -





8 BIBLIOGRAFÍA

A continuación se muestra la bibliografía consultada para la realización de la presente tesis. Esta bibliografía ha sido utilizada únicamente para el trabajo de documentación del estado del arte. Para el nuevo desarrollo teórico y la nueva formulación obtenida en la investigación, no se referencia ningún documento porque no hay nada similar en ninguna de las bases de datos consultadas.

1. Newton I. *Philosophiae naturalis principia mathematica* (1686). for an english translation, see eg IB cohen and A. whitman. . 1999.
2. Marci M. *De proportione motu*. .
3. Descartes R. 1644. *principia philosophiae*, amsterdam, the netherlands. *Excerpts in The Philosophical Writings of Descartes*. ;1:1984-1991.
4. Wallis J. 1670. *mechanica: Sive, de motu, tractatus geometricus*. London: *Godbid*.
5. Stronge WJ. Introduction to analysis of low speed impact. In: *Impact mechanics*. Cambridge university press; 2004:5.
6. Raman C. The photographic study of impact at minimal velocities. *Physical Review*. 1918;12(6):442.
7. Okubo J. Some experiments on impact. *Sci.rep.Tohoku Imp.Univ*. 1922;11:455.
8. Goldsmith W. The coefficient of restitution. *Bull.Mech.Div.Am.Soc.Eng.Educ*. 1952;2:10-13.
9. Haughton S. *On the dynamical coefficients of elasticity of steel, iron, brass, oak, and teak*. McGlashan & Gill; 1862.



10. Hodgkinson E. On the collision of imperfectly elastic bodies. *Rep.Br.Assoc.Adv.Sci.* 1835;4:534-543.
11. Tait PG. Scientific papers, vol. II. . 1900.
12. Goldsmith W. *Impact*. Courier Corporation; 2001.
13. Goldsmith W. Impact of two bodies in plane motion. In: *Impact*. Courier Corporation; 2001:13.
14. Stronge WJ. Rigid body theory for planar or 2D collisions. In: *Impact mechanics*. Cambridge university press; 2004.
15. Stronge WJ. 3D impact of rough rigid bodies. In: *Impact mechanics*. Cambridge university press; 2004.
16. Walton OR. Granular solids flow projet. . 1992.
17. Simon R. Development of a mathematical tool for evaluating golf club performance. . 1967.
18. Brach RM. Classical planar impact theory and the tip impact of a slender rod. . 1993.
19. Goldsmith W, Lyman PT. The penetration of hard-steel spheres into plane metal surfaces. *Journal of Applied Mechanics*. 1960;27(4):717-725.
20. Hertz H. Über die berührung fester elastischer körper. *Journal für die reine und angewandte Mathematik*. 1882;92:156-171.
21. Hopkinson J. On rupture of iron wire by a blow. . 1872.



22. Hopkinson B. A method of measuring the pressure produced in the detonation of high explosives or by the impact of bullets. *Philosophical Transactions of the Royal Society of London. Series A, Containing Papers of a Mathematical or Physical Character*. 1914;213:437-456.
23. Taylor G. The testing of materials at high rates of loading. *J.Inst.Civil Eng.* 1946;26:486-519.
24. Stronge WJ. Collision against flexible structures. In: *Impact mechanics*. Cambridge university press; 2004.
25. Timoshenko S. Zur frage nach der wirkung eines stosses auf einen balken. *Z.Angew.Math.Phys.* 1913;62(1-4):198-209.
26. Lennertz J. Beitrag zur frage nach der wirkung eines querstoßes auf einen stab. *Arch Appl Mech.* 1937;8(1):37-46.
27. Lee EH. *The impact of a mass striking a beam...* Stanford University.; 1940.
28. Schwieger H. Central deflection of a transversely struck beam. *Exp Mech.* 1970;10(4):166-169.
29. Lim C, Stronge W. Normal elastic-plastic impact in plane strain. *Math Comput Model.* 1998;28(4-8):323-340.
30. Mason MT, Wang Y. Two-dimensional rigid-body collisions with friction. *Journal of Applied Mechanics.* 1992;59(3).
31. Stronge WJ. Rigid body collisions with friction. . 1990;431(1881):169-181.
32. Stronge W. Energy dissipated in planar collision. *Journal of applied mechanics.* 1992;59(3):681-682.



33. Stronge W. Mechanics of impact for compliant multi-body systems. . 1999:137-144.
34. Ujihashi S. Measurement of dynamic characteristics of golf balls and identification of their mechanical models. . 1994:302-308.
35. Villaggio P. The rebound of an elastic sphere against a rigid wall. *Journal of applied mechanics*. 1996;63(2):259-263.
36. Wittenburg J. *Dynamics of systems of rigid bodies*. Vol 33. Springer-Verlag; 2013.
37. Walton O. *Granular solids flow project: Quarterly report, April-June 1987*. 1987.
38. Christoforou A, Yigit A. Effect of flexibility on low velocity impact response. *J Sound Vibrat*. 1998;217(3):563-578.



- Desarrollo de teoría sobre impactos -
- Método simplificado de cálculo de impactos en estructuras -

