Universitat Autònoma de Barcelona

Conocimiento matemático fundamental para el Grado de Educación Primaria: perfiles de conocimiento conceptual aditivo

Angela Castro Inostroza

Universitat Autònoma de Barcelona

Departament de Didàctica de la Matemàtica i de les Ciències Experimentals
Doctorat en Educació

TESIS DOCTORAL

Conocimiento matemático fundamental para el Grado de Educación Primaria: perfiles de conocimiento conceptual aditivo

Autora: Angela Castro Inostroza

Directoras: Núria Gorgorió Solà y Montserrat Prat Moratonas

Noviembre de 2016

Universitat Autònoma de Barcelona

Departament de Didàctica de la Matemàtica i de les Ciències Experimentals
Doctorat en Educació

TESIS DOCTORAL

Conocimiento matemático fundamental para el Grado de Educación Primaria: perfiles de conocimiento conceptual aditivo

Núria Gorgorió Solà
Directora

Montserrat Prat Moratonas
Directora

Angela Castro Inostroza
Autora

Bellaterra, Noviembre del 2016

Dra. Núria Gorgorió Solà, Catedrática del Departamento de Didáctica de la Matemática y las Ciencias Experimentales, con sede en la Facultad de Ciencias de la Educación de la Universidad Autónoma de Barcelona,

Dra. Montserrat Prat Moratonas, profesora del Departamento de Didáctica de la Matemática y las Ciencias Experimentales, con sede en la Facultad de Ciencias de la Educación de la Universidad Autónoma de Barcelona.

HACEMOS CONSTAR QUE:

La Investigación realizada bajo la dirección de las firmantes por la Licenciada ANGELA NOLFA CASTRO INOSTROZA, con título CONOCIMIENTO MATEMÁTICO FUNDAMENTAL PARA EL GRADO DE EDUCACIÓN PRIMARIA: PERFILES DE CONOCIMIENTO CONCEPTUAL ADITIVO, reúne todos los requisitos científicos, metodológicos y formales exigentes por la legislación vigente para su Lectura y Defensa pública delante de la correspondiente Comisión, para la obtención del Grado de Doctor en Educación por la Universidad Autónoma de Barcelona, por consiguiente consideramos procedente autorizar su presentación.

Bellaterra, ...

Firmado: ....

Esta tesis doctoral se ha realizado gracias a una beca Conicyt, del Programa de Formación de Capital Humano Avanzado, BECAS-CHILE, para doctorado en el extranjero.

Esta investigación es parte del proyecto: “Caracterización del conocimiento disciplinar en matemáticas para el Grado de Educación Primaria: matemáticas para maestros” (Ref. I+D EDU2013-4683-R). La autora y las directoras de la misma son miembros del Grupo de Investigación *Educació Matemàtica i Context: Competència Matemàtica (EMiC:CoM)* reconocido y financiado por la Direcció General de Recerca, Generalitat de Catalunya (ref. 2014 SGR 00723).

Agradecimientos

A Dios por brindarme un nuevo comienzo, la oportunidad de cambiar mi vida y vivir una maravillosa experiencia llena de aprendizajes y sueños cumplidos.

A mi familia que, en la distancia, siempre ha estado conmigo en esta gran aventura, apoyándome y no dejándome flaquear. En especial a mi madre por dejarme volar y alentarme a cumplir mis sueños.

A mi nueva familia, mi hija y mi novio Cristhian sin quienes este sueño no estaría completo. Quienes lo han dado todo para que esto sea posible. Quienes me han apoyado y me han levantado las muchas veces que he caído durante este camino, alentándome a alcanzar mis metas.

A mis directoras que me guiaron, apoyaron y acompañaron durante este proceso, tanto académica como personalmente. De quienes he aprendido mucho y agradeceré siempre el apoyo brindado.

A mis amigas españolas con las que he compartido buenos y malos momentos, grandes y pequeñas aventuras, desafíos, fracasos, éxitos y alegrías. En especial a mi gran amiga Elena, a quien siempre llevaré en mi corazón.

A todas esas personas que he conocido durante mi estancia aquí. Gracias por haber compartido conmigo y por haberme permitido conocer un poco de cada uno de ustedes y llevarme un gran recuerdo.

SÍNTESIS

Presentamos una investigación desarrollada con 203 estudiantes del Grado de Educación Primaria que aún no han iniciado la didáctica de la aritmética. Este estudio tiene como objetivo establecer y evaluar el conocimiento matemático fundamental (CMF), en su aspecto conceptual, necesario para iniciar la didáctica de la adición y la sustracción, con la finalidad de determinar perfiles de conocimiento conceptual aditivo. Se establece a nivel teórico el significado que se atribuye al CMF aditivo y se presentan: (i) el análisis y los resultados al cuestionario que evalúa 2 de los 4 componentes del CMF aditivo, el conocimiento del sistema de numeración decimal y el conocimiento sobre los significados de la adición y la sustracción y sus relaciones, y (ii) los perfiles generales de conocimiento que emergen del análisis conjunto de ambos componentes. Los resultados sugieren que, en su mayoría, los alumnos inician su formación como maestros con un conocimiento insuficiente en relación a estos conceptos, poniendo de manifiesto una comprensión fragmentada, incompleta y mecánica. La diversidad de perfiles de conocimiento aditivo identificados sugiere distintos grados de conocimientos e ideas preconcebidas respecto a estos contenidos, ideas que deben ser consideradas en el momento de planificar las asignaturas de matemáticas y su didáctica. En este sentido, las tareas utilizadas en este estudio suponen un referente para explorar la realidad de otros centros de formación y ofrecen una aproximación a los alumnos con los que se espera trabajar las matemáticas y su didáctica.

ÍNDICE

PRESENTACIÓN

EL ESTUDIO Y SUS APORTACIONES…………………………………..….......1

CAPÍTULO I

EL PROBLEMA OBJETO DE ESTUDIO…...............................….……………7

1. Planteamiento del problema……………………………………………......9

2. Pregunta y objetivos de la investigación……………………………..……....11

CAPÍTULO II

MARCO DE REFERENCIA CONCEPTUAL…………………………………13

2.1. Teorías acerca del conocimiento del profesor y CMF………………..…....15

2.2. Conocimiento conceptual y conocimiento conceptual aditivo……………..21

2.2.1. Conocimiento conceptual en matemáticas…..…...….……..………….21

2.2.2. Conocimiento conceptual aditivo……………...…………………..…..25

2.3. Conocimiento matemático fundamental aditivo…………....……………..…27

2.3.1. CMF y Sistema de numeración decimal………………...……..……...28

2.3.2. CMF y Significados y relaciones entre la adición y la sustracción…...30

CAPÍTULO III

DISEÑO, INSTRUMENTOS Y DATOS…………………..…….…………….37

3.1. Diseño de la investigación…………………...………………….……….....39

3.2. Instrumentos……....………………………………………………………...41

3.2.1. Elaboración de un primer instrumento….……………..……………...41

3.2.2. Refinamiento del primer cuestionario………..……...…………….....44

3.2.3. Instrumento definitivo y recogida de datos…..…………………....…47

CAPÍTULO IV

ANÁLISIS Y RESULTADOS: SISTEMA DE NUMERACIÓN DECIMAL....53

4.1. Análisis y resultados por pregunta……..………………..…………….....56

4.1.1. Análisis y resultados de la pregunta 1: “transformar cantidades estructuradas utilizando diferentes unidades del SND”……………....57

4.1.2. Análisis y resultados de la pregunta 2: “identificar la decena más próxima a un número dado”…………....………..……..............…. .65

4.1.3. Análisis y resultados de la pregunta 3: “determinar el número de centenas en un número dado y escribir un número en letras”.……....72

4.1.4. Análisis y resultados de la pregunta 4: “identificar múltiples descomposiciones”………………………………………………......77

4.2. Análisis relacional: caracterización del conocimiento inicial de los alumnos en relación al SND……………………………………………………….80

CAPÍTULO V

ANÁLISIS Y RESULTADOS: SIGNIFICADOS DE LA ADICIÓN Y LA SUSTRACIÓN…………………………………………………………………….97

5.1. Análisis y resultados por pregunta………..…………………..…………..100

5.1.1. Análisis y resultados de la pregunta 1: “explicar que entiendes por sumar y por restar”……………………...…….……………….......101

5.1.2. Análisis y resultados de la pregunta 2: “organizar verbos asociados con sumar”…………..……………………………………..…….107

5.1.3. Análisis y resultados de la pregunta 3: “plantear PAEV aditivos”….114

5.1.4. Análisis y resultados de las preguntas 4 y 5: “valoración del uso de palabras clave” ………………………………………………….120

5.2. Análisis relacional: caracterización del conocimiento inicial de los alumnos en relación a la adición y la sustracción……………………….…….….…127

CAPÍTULO VI

PERFILES DE CONCIMIENTO CONCEPTUAL ADITIVO……………….…139

6.1. Análisis relacional: conocimiento del SND y sobre la adición y la sustracción……………………………………………………..……141

6.2. Perfiles de conocimiento conceptual aditivo…………………….…………..143

CAPÍTULO VII

CONCLUSIONES……………………………………………………..………...147

REFERENCIAS……………………………………………………………….157

ANEXOS……………………………………………………………………169

Anexo 1: Cuestionario toma de datos definitivos……………………………...171

Anexo 2: Extracto de la planilla que recoge las respuestas de los maestros a la pregunta 2 del bloque de preguntas que evalúan el conocimiento del SND…………………………………………………………….175

Anexo 3: Extracto de la planilla que recoge las respuestas de los maestros a la pregunta 3 del bloque de preguntas que evalúan el conocimiento del SND…...177

Anexo 4: Extracto de la planilla que recoge las respuestas de los maestros a la pregunta 4 del bloque de preguntas que evalúan el conocimiento del SND…………………………………………………………….179

Anexo 5: Extracto de la planilla que recoge las respuestas de los maestros a la pregunta 2 del bloque de preguntas que evalúan el conocimiento de los significados y la relación entre la adición y la sustracción…………………………………………………………...181

Anexo 6: Extracto de la planilla que recoge las respuestas de los maestros a la pregunta 3 del bloque de preguntas que evalúan el conocimiento de los significados y la relación entre la adición y la sustracción…………………………………………………………...183

Anexo 7: Extracto de la planilla que recoge las respuestas de los maestros a las preguntas 4 y 5 del bloque de preguntas que evalúan el conocimiento de los significados y la relación entre la adición y la sustracción…………………………………………………………...185

PRESENTACIÓN

EL ESTUDIO Y SUS APORTACIONES

En este documento se presenta el informe de la investigación "Conocimiento Matemático Fundamental para el Grado de Educación Primaria: perfiles de conocimiento conceptual aditivo", desarrollada en el marco del Programa de Doctorado en Educación, ámbito Didáctica de la Matemática, de la Universidad Autónoma de Barcelona.

La investigación que se presenta tiene como objetivo fundamental estudiar el conocimiento inicial aditivo, en su aspecto conceptual, con el que los estudiantes del Grado de Educación Primaria (GEP) inician sus estudios en la didáctica de la aritmética. En particular, se centra en describir hasta qué punto y de qué manera los estudiantes del GEP tienen el conocimiento matemático fundamental para iniciar la didáctica de la adición y la sustracción.

El estudio que presentamos está organizado en 7 capítulos. En el Capítulo 1, *El problema objeto de estudio*, se plantea el problema, objeto de estudio y se proporcionan antecedentes que lo justifican, se plantean los objetivos y la pregunta de investigación. El Capítulo 2, *Marco de referencia conceptual*, se compone de dos bloques temáticos. Un primer apartado centrado en el conocimiento que el profesor de matemáticas necesita para la enseñanza. En este primer bloque se establece la idea de Conocimiento Matemático Fundamental (CMF) a partir la revisión de diferentes teorías del conocimiento del profesor en relación a la enseñanza de las matemáticas. El segundo apartado está dirigido a establecer nuestro posicionamiento en relación al CMF aditivo, en su aspecto conceptual y está organizado en dos secciones. En la primera se hace una revisión de las principales caracterizaciones del término conocimiento conceptual presentes en la literatura y una revisión de las investigaciones existentes en relación al conocimiento conceptual y procedimental aditivo. En la segunda parte de esta revisión conceptual, fijamos el posicionamiento teórico de este estudio. Establecemos el desarrollo de los componentes del CMF aditivo, en su aspecto conceptual, que guían nuestra investigación, argumentamos nuestro interés por dos de estos cuatro componentes y revisamos las investigaciones en torno a ellos.

En el Capítulo 3, *Diseño, instrumentos y datos*, se presenta y justifica el diseño de la investigación, el proceso de construcción y refinamiento del instrumento para la recogida de datos y la descripción del proceso que nos permite obtener la base empírica para nuestra investigación.

El proceso de análisis y los resultados de la investigación se organizan en 3 capítulos. En el primero de ellos, el Capítulo 4, *Análisis y resultados: Sistema de numeración decimal*, se presenta el análisis de las respuestas y las justificaciones dadas por alumnos a las preguntas del cuestionario que evalúa el conocimiento del Sistema de Numeración Decimal. Se inicia el capítulo con la presentación del análisis y resultados para cada una de las preguntas que en su conjunto evalúan diferentes aspectos del conocimiento del SND. El capítulo se completa con el análisis relacional de las respuestas a estas preguntas, a partir del cual emergen los niveles de conocimiento conceptual sobre el SND.

En el Capítulo 5, *Análisis y resultados: Significados y relaciones de la adición y la sustracción*, se presenta el análisis de las respuestas y las justificaciones dadas por los alumnos a las preguntas del cuestionario que evalúan el conocimiento del significado atribuido a la adición y la sustracción. Se inicia el capítulo con los el análisis y los resultados correspondientes a cada una de las preguntas que en su conjunto evalúan diferentes aspectos del conocimiento del significado atribuido a la adición y la sustracción. El capítulo termina con el análisis relacional de las respuestas a estas preguntas del cual emergen la identificación y caracterización de los niveles de conocimiento matemático inicial de los alumnos en relación a la adición y la sustracción.

El Capítulo 6, *Análisis y resultados: Perfiles de conocimiento conceptual aditivo*, empieza presentando el análisis relacional de las categorías generales de conocimiento sobre el SND y las categorías sobre conocimiento de la adición y la sustracción. Finaliza con la descripción de los perfiles de conocimiento conceptual aditivo que emergen de su análisis en conjunto.

Finalmente, en el Capítulo 7, *Conclusiones,* se presentan los resultados más importantes en relación al conocimiento evidenciado por los alumnos en los distintos aspectos evaluados. A su vez, se plantean nuevos interrogantes que surgen ante los resultados obtenidos en el estudio y posibles líneas abiertas de investigación. El estudio realizado tiene aportaciones relevantes a nivel teórico, metodológico y práctico. A nivel teórico, la revisión de la literatura consultada nos ha permitido: (i) establecer el concepto de

Conocimiento Matemático Fundamental (CMF)[1], (ii) establecer los componentes del CMF aditivo en su aspecto conceptual necesarios para iniciar la didáctica de la adición y la sustracción[2], y (iii) presentar un análisis del desarrollo del conocimiento conceptual y procedimental en matemáticas tras décadas de investigación[3] .

A nivel metodológico y práctico, las tareas elaboradas y utilizadas en este estudio para evaluar el conocimiento de aditivo inicial de los alumnos suponen un referente para explorar la realidad de otros centros de formación. Los resultados obtenidos en este estudio ofrecen una los alumnos con los que se espera trabajar las matemáticas y su didáctica, ofreciendo un instrumento a los formadores de maestros que ayude a orientar la planificación de las asignaturas de matemáticas y su didáctica[4,5].

---

[1] Castro, Castro, A., Mengual, E., Prat, M., Albarracín, L., y Gorgorió, N. (2014). Conocimiento matemático fundamental para el grado de educación primaria: inicio de una línea de investigación. En M. T. González, M. Codes, D. Arnau y T. Ortega (Eds.), *Investigación en Educación Matemática XVIII* (pp. 227-236). Salamanca: SEIEM.

[2] Castro, A., Gorgorió, N., Prat, M. (2015). Additive conceptual knowledge for admission to the degree in primary education: an ongoing research. In Di Paola, B., Fazio., *Teaching and learning mathematics: resources and obstacles, Proceedings of CIEAEM 67*, Quaderni di ricerca diddattica, 25-2, (pp. 237-243). Aosta.

[3] Castro, A., Prat, M. y Gorgorió, N. (2016). Conocimiento conceptual y procedimental en matemáticas: su evolución tras décadas de investigación. *Revista de Educación*, 374, 43-68.

[4] Castro, A., Gorgorió, N., Prat, M. (2015). Conocimiento Matemático Fundamental en el Grado de Educación Primaria: Sistema de numeración decimal y valor posicional. En C. Fernández, M. Molina y N. Planas (eds.), *Investigación en Educación Matemática XIX* (pp. 221-228). Alicante: SEIEM.

[5] Castro, A., Gorgorió, N., Prat, M. (2014). Indicios verbales en los PAEV aditivos planteados por estudiantes para maestro. En M. T. González, M. Codes, D. Arnau y T. Ortega (Eds.), *Investigación en Educación Matemática XVIII* (pp. 217-226).

CAPÍTULO I

EL PROBLEMA OBJETO DE ESTUDIO

Durante el transcurso de los años, un creciente cuerpo de investigación en educación matemática ha dedicado sus esfuerzos en identificar los componentes del conocimiento que el profesor necesita para la enseñanza de las matemáticas. A pesar de los esfuerzos destinados a definir y caracterizar la naturaleza de este conocimiento, no existe un marco teórico consensuado para describir el conocimiento matemático necesario para la enseñanza (Petrou y Goulding, 2011). No obstante, el conocimiento disciplinar en matemáticas se ha reconocido como un componente fundamental (Ma, 1999) y necesario para desarrollar los otros tipos de conocimiento, como por ejemplo el conocimiento pedagógico del contenido (Baumert et al., 2010; Lacasa y Rodríguez, 2013). Son (2016) señala que a pesar de que la interacción entre el conocimiento del contenido, el conocimiento pedagógico del contenido y la enseñanza eficaz es compleja, los maestros que poseen un mayor conocimiento del contenido pueden mostrar un repertorio más amplio de estrategias de enseñanza y la creación de situaciones cognitivas de aprendizaje que sean más estimulantes.

Existen ciertos conocimientos matemáticos básicos, entre los que se incluyen el conocimiento de los conceptos, procedimientos y procesos de resolución de problemas que los alumnos del Grado de Educación Primaria (GEP) deberían haber aprendido durante su etapa de escolarización y que necesitan al iniciar su formación. Este conocimiento disciplinar básico, denominado conocimiento matemático fundamental (CMF), es el que los profesores del grado de maestro toman como punto de partida para impartir docencia, y en el que debería sustentarse el conocimiento para la enseñanza de las matemáticas que el estudiante para maestro desarrollará a través de su formación en la facultad de educación (Castro, Mengual, Prat, Albarracín y Gorgorió, 2014). No obstante, existen evidencias que indican que en muchas ocasiones los alumnos que inician los estudios de Magisterio no cuentan con los conocimientos matemáticos básicos que se presumen sabidos al inicio de su formación, no dominan los contenidos referidos a las matemáticas escolares, aplican mal reglas matemáticas y no comprenden los verdaderos significados de los conceptos matemáticos que deberían enseñar (Salinas, 2007; Tsao, 2004, entre otros). Font (2005) señala que los estudiantes para maestros tienen una deficiente formación en matemática elemental. Este autor señala, que a pesar de que el objetivo de la asignatura Didáctica de las Matemáticas en la formación inicial de maestros, es preparar al futuro maestro para enseñar matemáticas de acuerdo con la normativa oficial, en esta asignatura no sólo se deben enseñar contenidos matemáticos, sino que además se debe tratar de incidir sobre las actitudes y creencias que los futuros maestros tienen sobre lo que es el aprendizaje de las matemáticas basadas en su experiencia como alumnos. Ryan y McCrae (2005; 2006) identifican algunos errores cometidos por futuros maestros en aspectos clave para la docencia de las matemáticas, como el conocimiento del valor posicional de la notación decimal, fracciones y cálculos con fracciones, proporcionalidad, conversión de unidades de medida, y el cálculo de áreas y perímetros. Senk, Tatto, Reckase, Rowley, Peck y Bankov (2012) analizan los resultados del estudio TEDS-M 2008, en el que participaron 1500 estudiantes para maestro pertenecientes a 17 países, en su último año de formación. Sus resultados ponen en manifiesto que los futuros maestros tenían dificultades para utilizar las fracciones en problemas de enunciado verbal, reconocer ejemplos de números racionales e irracionales o determinar el área y perímetro de figuras planas simples.

Algunos de los temas básicos que se imparte en la formación matemática de los futuros maestros, en los que se detectan un gran número de errores conceptuales son los relacionados con el sistema de numeración y las operaciones aritméticas. La aritmética es un componente esencial de las matemáticas en la escuela primaria, por lo que también debe serlo en la formación matemática de los futuros maestros (Ruiz, Molina, Lupiañez, Segovia y Flores 2009). Existen diversos estudios que analizan el conocimiento que los maestros en activo y/o en formación poseen en relación a este tema. Dichos estudios han puesto en evidencia que los futuros maestros presentan un conocimiento deficiente sobre conceptos aritméticos que muchas veces se presumen sabidos, como por ejemplo, el significado de la operaciones (Chapman, 2007), el conocimiento del sistema de numeración decimal (Salinas, 2007; Montes, Liñan, Contreras, Climent y Carrillo, 2015) o la compresión de los algoritmos (Salinas, 2003), entre otros. Chapman (2007) analizó la compresión de las operaciones aritméticas en 20 estudiantes para maestro que, hasta ese momento, no habían trabajado de manera específica los significados de las operaciones y problemas aritméticos. Sus resultados sugieren que el conocimiento inicial de los alumnos que participaron en este estudio, era inadecuado para enseñar las operaciones aritméticas con profundidad. El conocimiento matemático evidenciado por los futuros maestros, inicialmente se basaba en la comprensión procesal de las estructuras matemáticas y semánticas del problema, al centrarse por ejemplo en las palabras indicadoras aisladas y descontextualizadas de operaciones con un significado similar. Salinas (2007) analizó las dificultades y errores en relación al sistema de numeración decimal de 663 estudiantes de magisterio, pertenecientes a tres planes de estudio diferentes. Los alumnos participantes en este estudio evidenciaron un bajo desempeño, en particular en aquellas tareas que requieren el establecimiento de relaciones de equivalencia entre las diferentes unidades del sistema. Por su parte, Thanheiser (2009) investigó las concepciones que los futuros maestros tienen de la adición con varios dígitos al inicio de su formación en didáctica de las matemáticas. Sus resultados sugieren que la mayoría de los futuros maestros tienen dificultades para explicar los fundamentos conceptuales que subyacen al uso de los algoritmos estándar de la adición y la sustracción con varios dígitos, evidenciando algún vacío en sus concepciones.

Esta situación resulta preocupante puesto que las matemáticas escolares deben formar parte del conocimiento del contenido del futuro maestro (Salinas, 2007). Los estudiantes de magisterio evidencian carencias en destrezas y conceptos matemáticos elementales, que muchas veces se presumen sabidos al iniciar su formación, con lo cual tendrán dificultades para enseñar conceptos afines (Aballe, 2000). Las expectativas del aprendizaje escolar en Educación Primaria obligan a los futuros maestros a profundizar en los elementos que conforman el conocimiento aditivo (Cañadas y Castro, 2011; NTCM, 2000). Consideramos que un conocimiento matemático sólido permite crear una base para que el estudiante pueda construir el conocimiento pedagógico del contenido necesario para iniciarse en la práctica profesional. Coincidimos con Aballe (2000) al destacar la importancia de conocer la realidad de los alumnos con los que se espera trabajar las matemáticas y su didáctica. Un acercamiento al conocimiento real de las matemáticas elementales que poseen los futuros maestros al iniciar su formación inicial, es fundamental a la hora de programar asignaturas de matemáticas y de su didáctica.

2.- Pregunta y objetivos de la investigación

Empezamos este estudio sin ninguna idea preconcebida sobre el tipo de conocimiento matemático con que los alumnos del Grado de Educación Primaria, objeto de nuestra investigación, inician su formación como maestros y que poseen al comenzar el estudio de la Didáctica de la Aritmética. No obstante, somos conscientes que existe un conocimiento teórico (tal como se ha visto en el apartado anterior) que señala que los estudiantes para maestro no dominan los contenidos que deben enseñar, presentan deficiencias en los contenidos del currículo de Educación Primaria, y no cuentan con los conocimientos básicos de matemáticas elementales al iniciar su formación.

Partimos de la propuesta de Aballe (2000), quien señala que no se puede esperar que los alumnos aprendan Didáctica de las Matemáticas, si no conocen adecuadamente los contenidos a enseñar. Ésto hace necesario determinar los conocimientos que se presumen sabidos cuando el estudiante para maestro comienza estas asignaturas. Ante esta problemática, teniendo como meta contribuir a orientar la planificación de las asignaturas de didáctica de las matemáticas del GEP, en este estudio nos planteamos varios retos. En primer lugar, a nivel teórico, nos proponemos establecer cuál es el conocimiento matemático fundamental (CMF) que deberían tener los alumnos del GEP para iniciar la didáctica de la adición y la sustracción centrándonos en los aspectos conceptuales relativos al Sistema de Numeración Decimal y al significado de la adición y la sustracción. Seguidamente a nivel empírico deseamos dar respuesta a la pregunta ¿con qué tipo de conocimiento inician los estudiantes GEP la didáctica de la adición y la sustracción? En definitiva, nos planteamos hasta qué punto y de qué manera los estudiantes del GEP tienen un conocimiento matemático inicial próximo al CMF establecido a nivel teórico.

Para dar respuesta a esta pregunta, nos propusimos los siguientes objetivos:

1) En relación al Sistema de Numeración Decimal:

   a. Caracterizar las respuestas y las justificaciones que dan los alumnos al resolver tareas relativas a este ámbito de conocimiento.

   b. Caracterizar el conocimiento matemático inicial de los alumnos en relación al Sistema de Numeración Decimal.

2) En relación al significado atribuido a la adición y la sustracción:

   a. Caracterizar de qué forma interpretan los alumnos la adición y la sustracción.

   b. Caracterizar el conocimiento matemático inicial de los alumnos en relación a la adición y la sustracción.

3) Establecer perfiles de conocimiento conceptual aditivo en los alumnos del GEP.

CAPÍTULO II

MARCO DE REFERENCIA CONCEPTUAL

En este apartado se presenta una revisión exhaustiva de la literatura sobre los 2 bloques centrales en los se sustenta el presente estudio. El primero de ellos, centrado en el conocimiento que el profesor de matemáticas necesita para la enseñanza, establece la idea de Conocimiento Matemático Fundamental (CMF) a partir la revisión de diferentes teorías del conocimiento del profesor en relación a la enseñanza de las matemáticas. El segundo bloque está dirigido a establecer nuestro posicionamiento en relación al CMF aditivo, en su aspecto conceptual, entendido como aquella parte del CMF necesaria para que los futuros maestros puedan iniciar la didáctica de la adición y la sustracción. Este bloque comprende dos partes. En la primera se hace una revisión de las principales caracterizaciones del término conocimiento conceptual presentes en la literatura, y una revisión de las investigaciones realizadas en relación al conocimiento conceptual y procedimental aditivo. Al final de este segundo bloque de revisión conceptual fijamos el posicionamiento teórico de este estudio, estableciendo el desarrollo de los componentes del CMF aditivo, en su aspecto conceptual, que guían nuestra investigación, argumentando nuestro interés por dos de estos cuatro componentes y revisando las investigaciones en torno a ellos.

2.1- Teorías acerca del conocimiento del profesor y CMF

En los últimos años las investigaciones referentes a la formación de maestros se han centrado en el estudio del conocimiento que el profesor necesita para la enseñanza. Se han desarrollado distintos enfoques que intentan describir los componentes del conocimiento que el profesor necesita para la enseñanza de las matemáticas. No obstante, a la fecha, no existe un marco teórico único que permita describir este conocimiento.

Shulman (1986, 1987) es uno de los primeros en estudiar con un carácter específico el conocimiento del contenido para la enseñanza. Inicialmente, en 1986 sugiere que el conocimiento que el profesor necesita para la enseñanza se puede dividir en tres categorías: conocimiento de la materia, conocimiento pedagógico del contenido y conocimiento del currículo. Destaca, que el conocimiento del contenido entre otros aspectos, requiere ir más allá de los hechos o conceptos de la materia, requiere entender sus estructuras. Por lo que el maestro no sólo debe entender que algo es así, sino también porqué es así.

Posteriormente, Shulman (1987) señala la existencia de una base de conocimientos para la enseñanza subyacentes a la compresión del profesor, y necesarios para promover la comprensión de los estudiantes. Sugiere que estos conocimientos tienen como mínimo las siguientes categorías: conocimiento de la materia, conocimiento pedagógico general, conocimiento del currículo, conocimiento pedagógico del contenido, conocimiento de los estudiantes y sus características, conocimiento de los contextos educativos y conocimiento de los fines propósitos y valores educativos y sus fundamentos filosóficos e históricos. En relación al conocimiento de la materia, afirma que el profesor debería comprender críticamente el conjunto de ideas que va a enseñar, puesto que sin esta comprensión de la materia el profesor no podrá transformar las ideas para que puedan ser entendidas por sus estudiantes. En esta transformación entra en juego el conocimiento pedagógico del contenido entendido como la amalgama entre el conocimiento del contenido y el conocimiento pedagógico general.

El modelo propuesto por Shulman (1986, 1987) no reconoce las interacciones entre las diferentes categorías del conocimiento (Petrou y Goulding, 2011). Ante esta situación Fennema y Franke (1992) señalan que el conocimiento de la enseñanza tiene una naturaleza dinámica e interactiva. Estos autores defienden que el conocimiento del profesor, tal y como sugiere el sentido común, no es monolítico, si no que un sistema de funcionamiento de gran tamaño e integrado donde cada parte es difícil de aislar. Es decir, cada componente del conocimiento del profesor está relacionado con otros. Además, sostienen que no es posible separar las creencias del conocimiento del profesor.

Petrou y Goulding (2011) indican que existe un paralelismo entre el conocimiento de matemáticas propuesto por Fennema y Franke (1992) y la definición del conocimiento del contenido propuesto por Shulman (1986, 1987). Estas dos categorías se centran en la idea de que los profesores no sólo necesitan conocer los procedimientos, sino también entender los conceptos que subyacen a estos procedimientos, es decir, saber por qué algo es así. Para Fennema y Franke (1992) el conocimiento de matemáticas comprende el conocimiento de los conceptos, los procedimientos, los procesos de resolución de problemas, los conceptos subyacentes a los procedimientos, las interrelaciones de estos conceptos y cómo estos conceptos y procedimientos están en juego en la resolución de problemas. Este conocimiento de matemáticas influye en las decisiones que toma el profesor en la instrucción (Fennema y Franke, 1992).

A partir de la propuesta de Shulman (1986) se han desarrollado diferentes enfoques teóricos que intentan adaptar el concepto a las necesidades de la enseñanza de las matemáticas. Entre ellos cabe señalar el cuarteto de Conocmiento (Knowlege Quartet, KO) – de Rowland, Huckstep y Thwaites (2003); Mathematical Knowledege for Teaching (MKT) – de Ball, Thames y Phelps (2008); y el Conocmínto especializado del profesor de matemáticas (Mathematical Teacher Specialized Knowledge, MTSK)– de Montes, Contreras y Carrillo (2013). Se trata de estudios centrados principalmente en el conocimiento para la enseñanza de las matemáticas de los profesores y maestros en activo, así como en aspectos que conciernen a la formación del profesorado.

Rowland, Huckstep y Thwaites (2003) proponen un marco definido como Knowlege Quartet (KQ) para la identificación y discusión del conocimiento del contenido matemático que los docentes evidencian en la práctica. Este marco tiene como base la distinción del conocimiento de la materia y el conocimiento pedagógico del contenido propuesto por Shulman (1986), pero responde a la idea de un conocimiento dinámico propuesta por Fennema y Franke (1992), según quienes las diferentes partes del conocimiento del profesor están integradas y entran en juego en el aula. Este marco está constituido por cuatro componentes: fundación, transformación, conexión y contingencia (Rowland y Turner, 2007). El conocimiento de la materia está incluido en el componente fundación, que comprende las creencias, el conocimiento proposicional de las matemáticas y de la pedagogía adquirido durante su proceso de formación que puede inferirse de las decisiones y acciones de aula.

Ball, Thames y Phelps (2008) presentan una teoría del conocimiento del profesor basada en la práctica, donde establecen lo que denominan Mathematical Knowledege for Teaching (MKT), tomando como ejes principales la distinción propuesta por Shulman (1986) entre el conocimiento de la materia y el conocimiento pedagógico del contenido. En este marco, el conocimiento de la materia o del contenido es organizado en 3 subdominios: conocimiento común del contenido, conocimiento especializado del contenido y conocimiento del horizonte matemático. Al hablar del conocimiento común del contenido, Ball et., al (2008) hacen referencia a un conocimiento que se utiliza en una amplia variedad de entornos, es decir, no exclusivo de la enseñanza y que todo adulto instruido en matemáticas debería tener (Ball, Hill y Bass, 2005). Asi mismo consideran que el conocimiento especializado del contenido es el conocimiento matemático que requiere una comprensión y un razonamiento matemático que es propio del profesor. Por último, definen el conocimiento del horizonte matemático como los conocimientos de matemáticas que continúan a lo largo del plan de estudios. Estos autores señalan que es importante que los profesores sepan qué matemáticas van a aprender sus alumnos, para poder establecer un fundamento matemático.

Montes, Contreras y Carrillo (2013), señalan que las asignaciones del MKT, propuestas por Ball, Thames y Phelps (2008) generan problemas de indefinición en los subdominios, pues puede darse el caso de que el conocimiento que demuestre un profesor posea distintas naturalezas. Estos autores proponen un modelo denominado "Modelo del conocimiento especializado del profesor de matemáticas" (Carrillo, Climent, Contreras y Muñoz-Catalán, 2013). Dicho modelo, se basa en la idea de que la especialización del conocimiento del profesor de matemáticas proviene de su práctica. Considera la distinción propuesta por Ball y sus colaboradores entre el conocimiento de la materia que denominan conocimiento matemático, y el conocimiento pedagógico del contenido, como elementos esenciales del conocimiento especializado del profesor. Subyacentes a ambos tipos de conocimiento se encontrarían las creencias relativas a las matemáticas y a su enseñanza y aprendizaje. En este modelo, el conocimiento matemático está organizado en 3 subdominios: el conocimiento de los temas, de la estructura matemática y de la práctica matemática. El conocimiento de los temas matemáticos incluye el conocimiento de los conceptos, proposiciones (lemas, teoremas, corolarios, etc.), propiedades, procedimientos, clasificaciones, ejemplos, fórmulas y algoritmos, con sus respectivos significados y demostraciones. En este subdominio se incluyen también las conexiones que se establecen entre los diferentes conceptos puesto que se consideran también vinculadas al conocimiento del significado de un elemento específico (Liñan, Contreras y Barrera, 2016).

El conocimiento de la estructura matemática involucra el conocimiento de los conceptos integrados en un sistema de conexiones, que permitirá al profesor comprender ciertos conceptos avanzados desde una perspectiva elemental y desarrollar ciertos conceptos elementales mediante el uso de herramientas avanzadas. Por otra parte, el conocimiento de la práctica de la matemática incluye aspectos como el conocimiento relativo a diferentes formas de definir, argumentar o demostrar en matemáticas, incluyendo también el conocimiento de la sintaxis matemática (Montes, Contreras y Carrillo, 2013).

En la literatura, también se encuentran otras propuestas que modifican las teorías existentes en relación al conocimiento que el profesor de matemáticas necesita para la enseñanza. Lin y Rowland (2016) hacen una revisión de los trabajos que analizan el conocimiento del profesor de matemáticas y su desarrollo profesional, presentes en los Proceedings del PME (International Group for the Psychology of Mathematics Education) entre 2006 y 2014. En esta revisión, se incluyen entre otros, la revisión de diferentes teorías alternativas a los marcos de Shulman, y al MKT de Ball y colaboradores. Lin y Rowland concluyen que la mayoría de las teorías alternativas revisadas, siguen la propuesta de Shulman (1986, 1987) en la identificación de las familias de tipos de conocimiento, o de situaciones en las que se manifiesta. Por otra parte señalan que la tendencia actual de intentar delimitar las fronteras entre las categorías de estos conocimientos es interesante, aunque poco útil, y destacan el potencial de la búsqueda de puntos en común, o complementariedad, en las teorías disponibles. Estos autores sugieren que las diferencias paradigmáticas entre las perspectivas sociales, individuales, cognitivas y situadas, en relación al conocimiento matemático para la enseñanza siguen sin resolverse y probablemente son irresolubles en el sentido de reflejar las diferentes visiones del mundo. Estos autores concluyen que la comprensión teórica del conocimiento matemático del profesor está estrechamente relacionada con el diseño de los esfuerzos para promover su crecimiento, destacando la existencia de un gran número de enfoques fructíferos, en los que la reflexión estructurada en una comunidad de aprendizaje parece ser especialmente potente.

Tras la revisión realizada, coincidimos con Linsen y Anakin (2012; 2013) en que las descripciones del conocimiento del profesor de matemáticas existentes en la literatura, contienen características de la enseñanza que han sido identificadas y asociadas a profesores expertos, por lo que son inadecuadas para describir la naturaleza del conocimiento que los estudiantes para maestro necesitan para iniciar su formación. El conocimiento con los que los futuros maestros inician sus programas evoluciona a lo largo de su formación y el transcurso de las prácticas en los centros. Este conocimiento no está claramente definido y es un reto para los formadores de maestros poder evaluarlo (Linsen y Anakin, 2012).

En la búsqueda de elementos que nos permitan describir el CMF que el futuro maestro debería tener al iniciar su formación inicial, observamos que no encontramos un modelo del conocimiento del profesor en que podamos situar completamente el conocimiento que nos interesa. Así, la definición del conocimiento de la materia propuesta por Shulman (1986, 1987) se centra en la idea de que los profesores deberían comprender críticamente el conjunto de ideas que van a enseñar, puesto que sin esta comprensión de la materia no podrán transformar las ideas para que puedan ser entendidas por sus estudiantes. Así según este autor, el profesor no sólo necesita conocer los procedimientos, sino también entender los conceptos que subyacen a estos procedimientos, es decir, saber por qué algo es así. No obstante, los alumnos que ingresan al GEP no han tenido necesariamente porque aprender a lo largo de su formación matemática escolar el "porqué" que da lugar a una comprensión profunda.

Del mismo modo, dentro del componente fundación del KQ de Rowland y colaboradores (2003, 2007) que involucra, entre otros aspectos, el conocimiento de la materia o del contenido, podríamos encontrar implícitamente algunos de los aspectos del CMF. Sin embargo, no podemos situarnos completamente dentro de este marco, ya que en el componente fundación hace referencia explícita a elementos del conocimiento del contenido matemático que los futuros maestros deben desarrollar durante su formación, y resultan necesarios para la práctica en el aula como, por ejemplo, la identificación de los errores.

En lo que respecta al MKT propuesto por Ball y colaboradores (2005, 2008) que organiza el conocimiento de la materia en tres subdominios, podemos situar el CMF parcialmente dentro del conocimiento común y del conocimiento del horizonte matemático. Consideramos que a lo largo de su formación matemática estos alumnos deberían haber adquirido el conocimiento común que todo adulto instruido en matemáticas conoce como consecuencia de su escolarización. Por otra parte, también puede situarse parcialmente dentro de la categoría del conocimiento del horizonte, puesto que su formación les ha permitido conocer más matemáticas de las que va a enseñar.

El MTSK propuesto por Carrillo y colaboradores (2013) hace referencia a los elementos que son asociados e identificados desde la práctica de profesores expertos. Por ello podríamos situar el CMF, por debajo de esta teoría, como elementos que ofrecerían una base sólida para que el futuro maestro logre desarrollar dichos conocimientos a través de su formación y la práctica.

Al intentar relacionar el CMF con dichas teorías, vemos que resultan inadecuadas para nuestro propósito –describir la naturaleza del conocimiento que los estudiantes para maestro necesitan para iniciar su formación– dado que están asociadas al conocimiento en la práctica profesional. A partir de ello, en Castro, et al., (2014) considerando la revisión realizada sobre las diferentes teorías del conocimiento del profesor, definimos CMF como el conocimiento deseable y necesario para seguir con aprovechamiento las materias de matemáticas y de didáctica de las matemáticas del GEP. Éste incluye el conocimiento de los conceptos, procedimientos y procesos de resolución de problemas que los alumnos del GEP han aprendido durante su etapa de escolarización y que necesitan traer consigo al iniciar su formación.

2.2- Conocimiento conceptual y conocimiento conceptual aditivo

2.2.1- Conocimiento conceptual en matemáticas

La investigación en relación al conocimiento conceptual y al conocimiento procedimental en matemáticas ha sido tema de interés y foco de debate a lo largo de los años. En la literatura se encuentran discusiones que abordan desde qué debe desarrollarse en mayor medida en la escuela, si las habilidades o los procedimientos, hasta propuestas acerca de cómo deben estudiarse las interacciones entre ambos tipos de conocimiento (ver Castro, Prat y Gorgorió, 2016).

Tras décadas de investigación no se da en la literatura un acuerdo que permita describir con claridad qué es el conocimiento conceptual o el conocimiento procedimental, ni como determinar la mejor manera de medirlos (Baroody, Feil y Johnson, 2007; Crooks y Alibali, 2014; Star, 2005). El análisis de la literatura también deja constancia de la falta de investigaciones desarrolladas en otros dominios matemáticos más allá del conteo, adición con uno y varios dígitos, fracciones y razonamiento proporcional, que son en los que se centraban inicialmente; así como también en otros niveles educativos diferentes a la primaria. Si bien desde hace algunos años se ha empezado a incluir su estudio en adolescentes, adultos y futuros maestros, se requiere mayor investigación en el área para poder contrastar los resultados obtenidos y obtener teoría útil que ayude a desentrañar la complejidad de estos tipos de conocimiento y sus relaciones (Castro, Prat y Gorgorió, 2016).

La variedad de caracterizaciones presentes en la literatura y las tareas utilizadas para medir estos tipos de conocimiento que, por otra parte, no siempre son acordes a cómo se han definido estos conocimientos, hace que sea difícil comprender los principales hallazgos, las formas en qué estos conocimientos se relacionan, o determinar la forma más eficaz de utilizar la investigación para guiar las prácticas de enseñanza (Crooks y Alibali, 2014). Esto se debe esencialmente a qué ambos tipos de conocimiento se encuentran en un continuo, y no siempre pueden separarse (Hiebert y Lefevre, 1986; Rittle-Johnson y Alibali, 1999; Rittle-Johnson, Siegler y Alibali, 2001). Posiblemente la visualización de estos conocimientos como un mismo continuo, que va desde el conocimiento escaso hasta el ricamente conectado, ha dado lugar a que la mayoría de los investigadores en educación matemática intenten distinguir entre tipo y calidad del conocimiento (Baroody, Feil y Johnson, 2007). Así, la diversidad de caracterizaciones presentes en el área, puede ser un reflejo de las diferentes visiones que tienen los investigadores acerca de cómo las personas adquieren los procedimientos y conceptos (Star, 2005).

Las diferentes caracterizaciones del término conocimiento conceptual en matemáticas presentes en la literatura, sugieren que se equipara a un conocimiento profundo, ricamente conectado, flexible y asociado a conocimiento significativo. En esta línea, posiblemente una de las más reconocidas y utilizadas es la que ofrecen Hiebert y Lefevre (1986). Estos autores definen el conocimiento conceptual como una rica red de relaciones entre piezas de información que permiten flexibilidad en el acceso y uso de la información –saber qué o porqué. Está caracterización ha sido ampliamente recogida e interpretada a través de los años. Así por ejemplo, el conocimiento conceptual ha sido definido en términos de las interrelaciones entre las piezas de conocimiento y la comprensión de los conceptos básicos (Byrnes y Wasik, 1991); y también en función de los principios que gobiernan un dominio, que puede ser explícito o no (Rittle-Johnson y Alibali, 1999; Rittle- Johnson, Siegler y Alibali, 2001). Se ha asociado también a la comprensión integral y funcional de las ideas matemáticas, destacándose que el grado de la comprensión conceptual de los alumnos está relacionado con la riqueza y el alcance de las conexiones que estos han hecho (Kilpatric, Swafford y Findelli, 2001; Rittle-Johnson y Star, 2007). Tal y como lo han señalado Hiebert y Lefevre (1986), en estas caracterizaciones se ha destacado el carácter flexible del conocimiento conceptual, que no está vinculado a problemas específicos, siendo ampliamente generalizable y, pudiendo ser o no ser verbalizable. La posibilidad de verbalización se debe en gran medida a su naturaleza abstracta y al hecho de que se puede acceder a él conscientemente, transformándose de manera flexible a través de los procesos de inferencia y la reflexión, lo que a su vez explicaría por qué no está ligado a problemas específicos (Schneider y Star, 2005).

Sin embargo, hay quienes no están de acuerdo con la caracterización del conocimiento conceptual como un conocimiento ricamente conectado. En esta línea, Star (2005) defendió la idea de que el uso popular del término conocimiento conceptual, al igual que el del conocimiento procedimental, confunde tipos de conocimiento con propiedades o cualidades que pueden caracterizarlos. Al igual que De Jong y Fergunson-Hesler (1996) quienes distinguen entre tipos de conocimiento y calidad, caracterizando el conocimiento por la función que cumple en el desempeño de la tarea– Star (2005) propuso definir estos tipos de conocimiento separando ambas dimensiones. La base de su argumento radica en que tanto el conocimiento conceptual como el conocimiento procedimental pueden tener una calidad profunda o superficial, señalando que la flexibilidad procedimental puede ser alcanzada con o sin conocimiento conceptual. A partir de la propuesta de De Jong y Fergunson-Hesler (1996) –quienes definen el conocimiento conceptual como un conocimiento estático, de los hechos, conceptos y principios que se aplican dentro de un determinado dominio– Star (2005) define el conocimiento conceptual como el conocimiento de los principios o los conceptos, que implica relaciones pero no necesariamente ricas.

Baroody, Feil y Johnson (2007) ofrecen una reconceptualización alternativa para el conocimiento conceptual. Estos autores, siguiendo con la recomendación de Star (2005) de definir el tipo de conocimiento independientemente del grado de conexión, definen el conocimiento conceptual como el conocimiento acerca de los hechos, generalizaciones y principios. Baroody y colaboradores (Baroody, 2003; Baroody, Feil y Johnson; 2007) sugieren que, si bien puede existir en cierta medida el conocimiento conceptual superficial y el conocimiento procedimental superficial independientemente, el conocimiento procedimental profundo no puede existir en cierta medida sin un conocimiento conceptual profundo o viceversa. A partir de ello, Baroody, Feil y Johnson (2007) proponen un esquema que ilustra a través del modelo de la “adaptative expertice” el grado de las conexiones o mutua dependencia entre ambos tipos de conocimientos.

La riqueza de las relaciones que se establecen en el conocimiento conceptual, es probablemente lo que ha dado lugar a que éste se asocie a un conocimiento significativo. Coincidimos con Rittle-Johnson y Schneider (2014) en que la visión del conocimiento conceptual, como un conocimiento ricamente conectado, ha avanzado hacia una visión que tiene en cuenta la riqueza de conexiones. Estamos de acuerdo también con ellos cuando sugieren que el conocimiento conceptual debe definirse en términos del conocimiento de los conceptos y no mediante la riqueza de sus conexiones, dado que ésta aumenta con la experiencia. Crooks y Alibali (2014) proponen una definición que recoge gran parte de las caracterizaciones anteriores. Estas autoras definen el conocimiento conceptual como un conocimiento con dos dimensiones: (i) el conocimiento de los principios generales, que incluye el conocimiento de las reglas, definiciones, conexiones y los aspectos de la estructura del dominio; y (ii) el conocimiento de los principios subyacentes a los procedimientos, que implica saber por qué ciertos procedimientos funcionan para determinados problemas, cuál es el propósito de cada paso de un procedimiento, conocer las conexiones entre estos pasos y sus fundamentos conceptuales.

A pesar que no está claro en qué forma se puede medir, con un grado suficiente de validez, el conocimiento conceptual independientemente del conocimiento procedimental, en la literatura encontramos diversidad de tareas utilizadas para evaluarlo. Estas tareas incluyen la utilización tanto de indicadores de conocimiento conceptual explícito –como las definiciones de los conceptos – o de conocimiento implícito – como la evaluación, juicio, justificación y aplicación de procedimientos – (Canobi, et al., 1998, 2003; Canobi, 2005; Canobi y Bethure, 2008; entre otros). En este trabajo se recoge la propuesta de Crooks y Alibali (2014) para definir y evaluar el conocimiento conceptual a partir de la evaluación del conocimiento:

- *de los principios generales*: incluye las tareas de explicación de concepto, que implican tanto explicaciones verbales que evalúan el conocimiento explícito, como definiciones, explicaciones de los elementos de la estructura de un dominio y normas o reglas; y la evaluación de las tareas de ejemplo, que aprovechan formas de conocimiento implícito como reconocer ejemplos, definiciones o afirmaciones de principios.
- *de los principios subyacentes a los procedimientos*: incluye la aplicación y justificación de tareas de procedimiento; y la evaluación de tareas de

procedimiento, valorándolas como correctas o incorrectas y juzgando si son apropiados en ciertas situaciones.

2.2.2- Conocimiento conceptual aditivo

El conocimiento conceptual y el conocimiento procedimental aditivo han sido ampliamente estudiados a través de los años. En un primer momento su estudio se centraba especialmente en niños (Canobi, Reeve y Pattison, 1998; 2002; 2003) intentado, en la mayoría de los casos, determinar el orden de adquisición de los conceptos versus habilidades. Con el trascurso de los años este interés se ha acrecentado y el énfasis puesto en determinar el orden de adquisición ha sido reemplazado por el estudio las interacciones concepto-procedimiento (Castro, Prat y Gorgorió, 2016), incorporándose su estudio en adolescentes, adultos jóvenes (Dubé y Robinson, 2010; Robinson y Ninowski, 2003) y estudiantes para maestro (Gutiérrez-Gutiérrez, Gómez y Rico, 2016; Oyarzún y Salvo, 2010).

Las interacciones entre concepto-procedimiento han sido analizadas esencialmente desde dos perspectivas, la resolución de problemas y las secuencias de instrucción. Desde la perspectiva de la resolución de problemas en el dominio de los principios de la adición, se han analizado las relaciones entre las habilidades de procedimiento en la resolución de problemas de suma, y el conocimiento conceptual de algunos principios de la adición, como lo son la conmutatividad, asociatividad e inversión, entre otros (Canobi, 2004, 2005; Canobi y Bethune, 2008; Canobi, Reeve y Pattison, 1998, 2003; Farrington-Flint, Canobi, Wood y Faulkner, 2007; Gilmore & Bryant, 2006, 2008; Pastel y Canobi, 2010). En estos estudios el conocimiento conceptual ha sido evaluado a través de juicios y justificación de tareas, y del uso de las relaciones parte-todo para resolver los problemas. La habilidad de resolución de problemas ha sido evaluada a través de los repertorios de procedimientos, velocidad y precisión. De aquí se han derivado diferentes perfiles de compresión conceptual y habilidad aritmética en los niños que intentan dar cuenta de cómo se desarrolla este proceso. Ante los resultados obtenidos, la diversidad de perfiles de conocimiento identificados en los niños ha sido interpretada como una muestra de la complejidad en las relaciones parte-todo que los niños comprenden, y de la existencia de diferentes rutas de desarrollo (Canobi, 2004, 2005; Canobi, Reeve y Pattison, 1998, 2003).

Se ha observado que algunas veces los niños desarrollan una comprensión conceptual con ausencia de la habilidad competente, y lo que sugiere que para la mayoría de los niños la comprensión conceptual y la habilidad computacional se desarrollan juntas, mientras que para otros no es así (Gilmore y Bryant, 2006, 2008; Gilmore y Papadatpu-Pastou, 2009). Se ha observado también que la comprensión conceptual de los niños y sus habilidades procedimentales están en gran parte no relacionadas, al menos en algunos puntos durante su desarrollo (Schneider y Stern, 2009).

Los estudios que evalúan la implementación de secuencias de instrucción, centran la atención en la forma en la que un ciclo de aprendizaje, generalmente centrado en un tipo de conocimiento, podría facilitar el cambio del otro conocimiento. En esta línea se han analizado, entre otros, los efectos de la instrucción en la comprensión de números de varios dígitos y la habilidad computacional (Hiebert y Wearne, 1996), los efectos de la instrucción basada conceptualmente en el desarrollo de la flexibilidad de los procedimientos de adición y sustracción (Blöte, Van der Burg y Klein, 2001), y los beneficios de una secuencia iterativa, en comparación con una secuencia de conceptos antes que procedimientos, sobre valor posicional decimal y procedimientos aritméticos (Rittle-Johnson y Koedinger, 2009). Los resultados de estudios sugieren generalmente que las secuencias son una buena fuente para potenciar las relaciones entre ambos conocimientos y facilitar su desarrollo. Apuntan que la práctica de problemas secuenciada basada conceptualmente en principios de la adición, mejora la capacidad de los niños para ampliar su aprendizaje procedimental a los nuevos problemas y conduce a una mejora en la capacidad de verbalizar conceptos clave (Canobi, 2009); o que una secuencia iterativa entre conceptos y procedimientos puede promover el aumento de los procedimientos correctos, conducir a una mejor recuperación del conocimiento y apoyar su integración (Rittle-Johnson y Koedinger, 2009). Si bien en este tipo de estudios el conocimiento tiende a evaluarse con tareas de pre y post test, en ocasiones puede ser necesario algún tipo de conocimiento previo para beneficiarse plenamente de las lecciones centradas en el otro tipo de conocimiento (Rittle-Johnson & Koedinger, 2009). Es importante considerar que para valorar las interacciones entre el conocimiento conceptual y procedimental a través de las secuencias de instrucción, es difícil hacerlo de forma independiente.

2.3-Conocimiento matemático fundamental aditivo

La revisión de las investigaciones que estudian el conocimiento conceptual y procedimental en matemáticas, centrada en aspectos de índole más conceptual en relación al conocimiento de la adición y sus principios (Castro, Prat y Gorgorió, 2016), sugiere que podemos establecer 4 componentes del CMF aditivo.

Estos 4 componentes representan 4 tipos de conocimiento matemático conceptual que son fundamentales:

1) el conocimiento del sistema de numeración decimal (SND),

2) el conocimiento del significado y de las relaciones de la adición y la sustracción,

3) el conocimiento de las propiedades,

3) una aproximación a la compresión de los algoritmos (Castro, Gorgorió y Prat, 2015a).

En esta investigación nos centramos en el estudio de los 2 primeros componentes de este CMF aditivo, es decir:

1) el conocimiento del SND, y

2) el conocimiento de los significados y de las relaciones entre la adición y la sustracción.

El motivo por el cual hemos enfocado nuestro estudio en el segundo componente está basado en la falta de estudios que analicen el conocimiento de los significados y relaciones entre la adición y la sustracción. En la literatura consultada encontramos un gran número de investigaciones que abordan otros componentes del CMF aditivo como, por ejemplo, el estudio de las propiedades de la adición y la sustracción (Baroody y Lai, 2007; Dubé y Robinson, 2010; Robinson y Dubé, 2009; Robinson, Ninowski y Gray, 2006; entre otros). No obstante, los estudios que analizan el conocimiento de los significados y relaciones entre estas operaciones son escasos (Chapman, 2007). Por otra parte, una correcta comprensión de los algoritmos formales de la suma y de la resta en un nivel simbólico requiere, en primer lugar, tener conocimiento de la estructura del SND y de cómo se cuentan los objetos (Maza, 2001). Además, el conocimiento del SND es uno de los temas en los que se detecta el mayor número de errores conceptuales (Castro, Gorgorió y Prat, 2015b; Salinas, 2007). Por ello, incorporamos en nuestra investigación también el primer componente del CMF. Teniendo en cuenta que cada uno de estos componentes, aunque estén enlazados, requiere un estudio por sí mismos, preferimos centrar nuestra investigación en los dos primeros primando la profundidad frente a la diversidad.

2.3.1-CMF y Sistema de Numeración Decimal

Un primer componente del CMF aditivo lo conforma el conocimiento del SND. El sentido numérico es un componente fundamental en el desarrollo del conocimiento matemático de los niños. Para Godino, Font, Konic y Wilhelmi (2009) el sentido numérico involucra una comprensión general sobre los números y las operaciones, así como también la capacidad de usar esta comprensión de manera flexible para emitir juicios matemáticos y desarrollar estrategias útiles para resolver problemas.

Desde la matemática escolar, diversos autores han destacado el papel clave que desempeñan los maestros en el desarrollo del sentido numérico (Yang, 2007; Llinares, 2013; NTCM, 2000). Por ejemplo, Yang, Reys y Reys (2009) señalan que algunos de los factores que inciden en el pobre desempeño numérico de los estudiantes, son el conocimiento que poseen sus maestros sobre el sentido numérico y la importancia que éstos le dan en sus clases. Así, de acuerdo con estos autores, la carencia de sentido numérico en los niños podría deberse en parte a la falta de este conocimiento en sus maestros o a que éstos no saben cómo ayudar a los niños a desarrollarlo.

Un sólido desarrollo del sentido numérico, involucra entre otros componentes, un conocimiento profundo del SND (Castañeda, 2000; Godino et al., 2009; NTCM, 2000; Yang, 2007). El conocimiento del SND es esencial dentro del currículum de matemáticas, siendo fundamental en los procesos de escritura de cantidades y es la base para la comprensión de las operaciones fundamentales con números, fracciones y decimales, entre otros aspectos (Nataraj y Thomas, 2009; Porras y Vivas, 2009). No obstante, a pesar de que la escuela dedica gran parte del tiempo al proceso de escritura, reconocimiento, comparación y descomposición de cantidades; y al reconocimiento del valor posicional de una cifra, la comprensión del SND suele suponer una gran dificultad para los estudiantes de primaria (Thompson, 2000; Porras y Vivas, 2009).

En el contexto de la formación de maestros, al impartir las asignaturas de matemáticas y su didáctica, uno de los temas en los se detectan más errores conceptuales es el relacionado con el SND (Castro, Gorgorió y Prat, 2015b; Salinas, 2007). Algunos estudios que han abordado esta problemática (Hopkins y Cady, 2007; Ortiz, González y Gallardo, 2013; Montes, et al., 2015), ponen en evidencia que los futuros maestros inician su formación con un dominio meramente técnico, limitado y con importantes lagunas conceptuales en la comprensión de este concepto. Por ejemplo, Chick (2003) solicitó a 67 estudiantes para maestro de primaria y secundaria que explicaran por qué al multiplicar por 10 se añade un cero al final de un número entero. Sus resultados sugieren que ambos grupos de profesores tenían dificultad para escribir explicaciones claras, y parecían carecer de fluidez con el idioma del valor posicional, sólo un 10% fue capaz de dar una respuesta satisfactoria.

Un conocimiento deficiente del SND en los futuros maestros resulta preocupante, ya que son justamente los maestros quienes deben propiciar espacios de aprendizaje que potencien el desarrollo de la comprensión de este concepto fundamental en los niños (NTCM, 2000). Si los maestros poseen una comprensión profunda de los conceptos, pueden preparar actividades que ayuden a los niños a explorar de una mejor manera el valor de posición, teniendo una comprensión más empática de sus dificultades y de la forma para ayudarles a superarlas (Hopkins y Cady, 2007). En cambio, los maestros que evidencian deficiencias en conceptos básicos, difícilmente podrán enseñar de forma significativa estos temas o temas afines (Aballe, 2000). El conocimiento que los estudiantes para maestro traen consigo al inicio de los programas de formación, debe ayudarles a construir con éxito el conocimiento pedagógico del contenido necesario para la enseñanza de las matemáticas. Por tanto, si no poseen los conocimientos adecuados, la pretensión de que aprendan su didáctica es vana (Aballe, 2000).

En Castro, Gorgorió y Prat (2015b) se establecen algunos aspectos fundamentales del conocimiento del SND. Para establecer estos aspcetos fundamentales se tuvieron en cuenta estudios realizados en el área, tanto los ya mencionados en el contexto de formación maestros, como los desarrollados con niños (Bedoya y Orozco, 1991; Nunes y Bryant, 2003; Nataraj y Thomas, 2009; entre otros); los realizados en relación a los libros de texto (Ruesga y Guimaraes, 2011; 2012; entre otros); y los que se ocupan de la enseñanza de estos conceptos (Terigi y Wolman, 2007). Estos comprenden el conocimiento de la estructura recursiva multiplicativa en base 10 del SND; la escritura basada en 10 dígitos; el significado del valor relativo y del valor de posición de cada dígito; representar cantidades y números; leer y escribir un número en letras y cifras; comparar y ordenar números; identificar el valor de los dígitos de un número; contar hacia delante y hacia atrás, de 5 en 5, de 10 en 10…; redondear números; componer, descomponer, combinar, transformar cantidades estructuradas, reconocer y completar particiones y reagrupar números; y aplicar el conocimiento del valor posición para realizar cálculos.

2.3.2-CMF y significados y relaciones entre la adición y la sustracción

Un segundo componente del CMF aditivo está centrado en el conocimiento de los significados y las relaciones de la adición y la sustracción. El maestro debe ser capaz de ayudar a los niños para que puedan conectar los diversos significados, interpretaciones y relaciones de la adición y la sustracción, de forma que puedan utilizarlas eficazmente en diferentes contextos de la vida cotidiana (Cañadas y Castro, 2011; Cid, Godino y Batanero, 2004; Maza, 2001). Para la enseñanza de la suma y de la resta, el significado de las operaciones es un aspecto básico entre los conocimientos que el futuro maestro debe poseer.

La adición y la sustracción pueden tomar diversos significados. Una primera distinción, considera el significado basado en la acción realizada por una persona en una situación concreta, y su significado como objeto matemático. El significado basado en la acción, sobre un número o un objeto inicial, puede tener una concepción unitaria y una binaria. En la concepción unitaria de la adición hay una cantidad inicial que experimenta un cambio cuando se le añade una segunda cantidad y el resultado es el incremento de la segunda cantidad sobre la primera. Mientras que en su concepción binaria, hay dos cantidades iniciales que se unen o combinan para obtener un resultado. Por su parte, en la concepción unitaria de la sustracción hay una cantidad inicial que sufre un cambio al quitarle una segunda cantidad y el resultado de la sustracción es la disminución de la segunda cantidad sobre la primera. Su concepción binaria parte de dos cantidades. En este caso se valora lo que hay en el todo y en una de las partes, lo que permite conocer lo que hay en el complemento (Cañadas y Castro, 2011; Maza, 2001). Comprender que estas operaciones pueden ser definidas como operaciones unitarias o binarias, es un avance conceptual clave en el conocimiento conceptual aditivo (Baroody y Ginsbung, 1986).

Desde un lenguaje matemático formal, encontramos distintos tipos de definiciones para la adición y la sustracción de números naturales. Entre las más utilizadas están las definiciones basadas en las operaciones de unión y diferencia de conjuntos, los axiomas de Peano, y los desplazamientos en la recta numérica. Autores como Baroody y Ginsbung (1986), Cañadas y Castro (2011), Cid, Godino y Batanero (2004) y Maza (2001), señalan que la definición conjuntista de la adición, la interpreta como el cardinal obtenido al unir dos conjuntos. La suma representa la operación que se hace sobre los conjuntos disjuntos para formar una nueva colección con la totalidad de los elementos que pertenecen a cada uno de ellos. Para el caso de la sustracción, estos autores señalan que puede representarse mediante la operación conjuntista de complementación, cuando el sustraendo es menor que el minuendo. En este caso la sustracción se define en base a un conjunto A con a elementos y un subconjunto B con b elementos. La diferencia entre a y b será el cardinal complementario de A (el conjunto A-B). Cid, Godino y Batanero (2004) señalan que la definición recursiva de la adición y la sustracción (basada en los axiomas de Peano) corresponde a la noción que aprenden los niños de seguir contando o contar hacia delante para el caso de la suma y descontar o contar hacia atrás para el caso de la resta. En lo que respecta a las definiciones de la suma y diferencia basadas en desplazamientos en la recta numérica, estos autores señalan que en éstas los números naturales son interpretados geométricamente como distancias. La suma puede interpretarse como la distancia total cuando se combinan dos tramos consecutivos, mientras que la resta se interpreta como el retroceso hacia el primer término.

La variedad de significados que se le dan a la adición y la sustracción puede ayudar a los niños a comprender la relación entre estas operaciones y sus propiedades básicas, preparándolos para el aprendizaje y la comprensión de los algoritmos de cálculo (Cid, Godino y Batanero, 2004). No obstante, los fundamentos matemáticos de estas operaciones no siempre están presentes en las definiciones de suma y resta que quedan simplificadas en verbos de acción como *aumentar, añadir* y *unir* para el caso de la suma, y *quitar* o *disminuir* para la resta. Godino, Font y Wilhelmi (2006) analizan una lección sobre la suma y la resta propuesta en un libro de 5º grado de Educación Primaria. Su análisis sugiere que dicho texto presenta una definición incompleta de la suma y de la resta. La suma se define en base a verbos de acción como reunir, juntar, añadir, aumentar e incrementar, sin hacer alusión a la suma como el número de elementos (cardinal) del conjunto unión (dado dos conjuntos disjuntos), mientras que la resta se define como quitar, separar, disminuir y comparar, sin señalar que la resta es el número de elementos que quedan en el conjunto después de quitar algunos. Estos autores destacan que guiarse sólo por estas definiciones puede llevar a considerar como situaciones de suma o resta muchas que no lo son. Por otra parte destacan, que el uso de este tipo de definiciones dificulta que el alumno pueda inferir alguna regla para realizar estas operaciones.

Broitman (1999) señala que en general, los manuales escolares han definido clásicamente la suma y la resta en términos de acciones de agregar y quitar. No obstante, no todos los problemas aditivos pueden englobarse dentro de estas acciones, existiendo diferentes tipos de problemas, en los que agregar y quitar no necesariamente llevan a la acción de sumar o restar.

En función de su estructura semántica podemos hablar de distintos tipos de problemas aritméticos elementales verbales aditivos (PAEV aditivos), dependiendo de las relaciones que se establecen entre los elementos que aparecen en el enunciado. Esencialmente, la literatura consultada (ver Castro, Gorgorió y Prat, 2014b) sugiere que los problemas aditivos pueden clasificarse en 3 categorías básicas: cambio, combinación y comparación. Los problemas de cambio son definidos como aquellos que parten de una cantidad inicial a la que se le añade o se le quita algo para obtener una nueva cantidad mayor o menor que la inicial. Los problemas de combinación y comparación se definen como aquellos que parten de dos cantidades iniciales que se combinan o comparan para producir una tercera cantidad. Con el trascurso de los años, a estas tres categorías básicas se le ha agregado una cuarta categoría, llamada de igualación, resultante de una combinación de las categorías de cambio y comparación, en la que la relación de comparación entre las dos cantidades no se expresa de forma estática. Si además de las relaciones entre las palabras se tiene en cuenta la variable sintáctica, es decir, el orden de los términos en el enunciado, podemos identificar 20 tipos de problemas de suma y resta, de los cuales hay 6 de cambio, 6 de comparación, 2 de combinación y 6 de igualación, en función del lugar que ocupe la incógnita. En esta línea, autores como Vicente, Orrantia y Verschafel (2008) han señalado que en función de la coincidencia o no coincidencia de los indicios verbales que aparecen en el enunciado del problema se pueden clasificar los 20 tipos de PAEV aditivos presentes en la literatura en consistentes (cuando hay coincidencia) e inconsistentes (cuando no hay coincidencia).

Los problemas verbales tienen una gran importancia dentro de la enseñanza y el aprendizaje de las matemáticas. Contribuyen a consolidar los sistemas de conocimiento matemático y la formación de habilidades y hábitos (Yáñez y Bethencourt, 2004), poniendo en funcionamiento diversos recursos operatorios, lingüísticos, conceptuales, proposicionales y argumentativos que deben ser dominados progresivamente para lograr competencia en su resolución (Godino, et.al, 2006). Nesher (1999) propuso un esquema del desarrollo del conocimiento aritmético en los niños, que subyace en la resolución de los diferentes tipos de PAEV aditivos. Este esquema incluye los conocimientos empíricos y las operaciones matemáticas asociadas a estos conocimientos, organizándolas en 4 niveles de complejidad: recuento, cambio, parte-parte-todo y relaciones. El nivel 1, implica la capacidad para contar, encontrar el cardinal de un conjunto y ordenar números, lo que permitiría resolver con éxito los problemas de las estructuras de cambio aumento-disminución con incógnita en la cantidad final y los problemas de combinación con incógnita en el todo. El nivel 2, involucra la compresión de la suma y la resta como procedimientos distintos, permitiendo resolver exitosamente problemas de cambio aumento-disminución con incógnita en el cambio. El nivel 3 requiere de una compresión de la relación entre tres números de una ecuación y la conexión entre la suma y la resta: si a+b=c entonces c-b=a y c-a=b. Esta compresión permitirá resolver exitosamente problemas de combinación con incógnita en una parte del todo, cambio aumento-disminución con incógnita en la cantidad inicial, comparación aumento-disminución con incógnita en la diferencia y el comparando. El nivel 4, requiere la capacidad para manera la desigualdad y su relación con la igualdad, igualándola por adición o sustracción, lo que permitiría resolver exitosamente los problemas con estructura de comparación aumento-disminución con incógnita en el referente.

La resolución de diferentes tipos de PAEV aditivos, también beneficia la adquisición de sentido de la suma y la resta, dotándolas de diferentes significados (Cid, Godino y Batanero, 2004). El planteamiento de diferentes tipos de problemas aditivos podría reflejar la concepción que se tiene de la adición y de la sustracción. Cañadas y Castro (2011) proponen un esquema de las acciones asociadas a una concepción unitaria y binaria de la adición y de la sustracción. En este esquema, acciones como aumentar y disminuir se asocian con una concepción unitaria, mientras que acciones como unir, combinar, comparar e igualar, son asociadas con una concepción binaria de estas operaciones. Recogiendo esta propuesta, es posible tener una aproximación al tipo de concepción basada en la acción, sobre la adición y la sustracción que posee un sujeto al plantear diferentes tipos de PAEV aditivos. Así por ejemplo, los problemas de cambio estarán asociados a una concepción unitaria de la adición y de la sustracción; mientras que los problemas de comparación, igualación y combinación, estarán asociados a una concepción binaria de estas operaciones. En esta línea, autores como Baroody y Ginsbung (1986) y Maza (1991) señalan que los problemas de combinación corresponden a una concepción binaria de la adición, es decir al fundamento conjuntístico de una operación en la que a dos elementos le corresponde uno nuevo, mientras que los de cambio reflejan directamente una concepción unitaria de la adición, en la que a un elemento le corresponde otro (el resultado final) gracias a la aplicación de un cambio fijo de las cantidades del conjunto inicial.

En esta línea, encontramos algunas investigaciones que han analizado los significados de la adición y la sustracción a través del planteamiento y/o resolución de problemas aditivos. En el contexto de la formación de maestros se ha observado en los estudiantes para maestro una visión limitada sobre el significado de la adición y la sustracción, evidenciado en el planteamiento de problemas aditivos en los que la palabra clave es indicador de la operación a realizar y en el uso de estructuras aditivas que en su mayoría sólo involucran un cambio de estado (Castro, Gorgorió y Prat, 2014b). Chapman (2007) analizó la compresión de las operaciones aritméticas en 20 estudiantes para maestro que, hasta ese momento, no habían trabajado de manera específica los significados de las operaciones aritméticas y problemas aritméticos. Sus resultados sugieren que el conocimiento inicial de los alumnos que participaron en este estudio, era inadecuado para enseñar las operaciones aritméticas con profundidad. El conocimiento matemático evidenciado por los futuros maestros, inicialmente estaba basado en la comprensión procesal de las estructuras matemáticas y semánticas del problema, al centrarse por ejemplo en las palabras indicadoras aisladas y descontextualizadas de operaciones con un significado similar. Este autor propuso una secuencia de tareas que ayudó a los futuros maestros a reflexionar sobre el significado de las operaciones, entre las que se incluyen crear problemas de palabras similares a problemas de palabras dadas y comparar los diferentes tipos de problemas de palabras, compartir y discutir sus propuestas con sus pares, y luego crear en colaboración problemas de palabras que reflejaban el significado de cada una de las operaciones.

En esta misma línea, en Castro, Gorgorió y Prat (2014a) presentamos la implementación de una secuencia de formación con 78 estudiantes para maestro que iniciaban sus estudios en la didáctica de la aritmética. Ésta tenía como objetivo que los futuros maestros descubriesen que plantear PAEV aditivos de una etapa, va más allá de enunciar situaciones que contengan los verbos “añadir” o “juntar” para la suma, y “quitar” o “separar” para la resta. Sus resultados sugieren que, al inicio de la secuencia, los estudiantes para maestro basaban la formulación de sus enunciados en palabras clave como indicador de la operación a realizar y rechazaban la idea de la utilización de este tipo de palabras con un significado matemático opuesto al que le atribuye la semántica del lenguaje natural. No obstante, al finalizar la secuencia, los problemas propuestos por los alumnos presentaron un mayor número de estructuras aditivas que involucraban no sólo un cambio de estado sino también relaciones del tipo parte-parte-todo, en los que de palabras clave como indicador de la operación a realizar disminuyó considerablemente.

CAPÍTULO III

DISEÑO, INSTRUMENTOS Y DATOS

Iniciamos este capítulo exponiendo y justificando el diseño de la investigación. Continuamos el capítulo presentando el proceso de construcción y refinamiento del instrumento para la recogida de datos. El capítulo se completa con la descripción del proceso que nos permite obtener la base empírica para nuestra investigación.

3.1- Diseño de la investigación

Existen múltiples formas de conocer y, por tanto, múltiples y diversos métodos que nos permiten acercarnos al objeto de estudio (Martínez, 2011). Desde el punto de vista de la investigación educativa encontramos distintos modelos compartidos por la comunidad científica sobre como concebir e interpretar el mundo. Estos modelos, denominados paradigmas, nos permiten situarnos ante la realidad, interpretarla y dar solución a los problemas que en ella se presentan (González, 2003).

Entre los diferentes paradigmas existentes para la investigación educativa (ver por ejemplo González 2003 o Solà, 2009), el presente estudio se enmarca dentro del paradigma interpretativo. El paradigma interpretativo, hermenéutico o práctico, tiene sus bases en la hermenéutica que inicialmente era una técnica general de interpretación de los significados de los textos, desarrollada por los teólogos del siglo XVII para el entendimiento correcto de la lectura de la Biblia. Este paradigma se basa en la creencia de que las interpretaciones subjetivas de los participantes son componentes de la ciencia, siendo la compresión, el significado y la acción las palabras clave de esta racionalidad científica. La teoría interpretativa pretende revelar el significado de las formas particulares de la vida social. Ésta revelará las reglas y supuestos por los que actúan los participantes, y nos informará sobre el significado de las acciones de los participantes. Así, no existe una verdad única, sino que la verdad surge como una configuración de los distintos significados que las personas dan a las situaciones en las cuales se encuentran.

La realidad social se entiende como una realidad construida con base en los marcos de referencia de los actores. En el proceso de conocimiento se da una interacción entre sujeto y objeto, siendo ambos inseparables. El objetivo final de las investigaciones fundadas en el paradigma interpretativo consiste en comprender la conducta de las personas estudiadas. Ésto se logra a través de la interpretación de los significados que éstas le dan a su propia conducta, a la conducta de los demás, y a los objetos que se encuentran en sus ámbitos de convivencia (González, 2003; Martínez, 2011; Solà, 2009).

En los diferentes enfoques desde los que se observa la realidad, se encuentran implícitos los intereses, las intencionalidades y los conocimientos con los que se perciben, categorizan y conceptualizan los fenómenos estudiados (ver, por ejemplo, González, 2003; Creswell, 2012; Martínez, 2011)

El presente estudio se enmarca dentro de la investigación cualitativa descriptiva, (Bisquerra, 2009; Latorre, Del Rincón y Arnal, 1996) orientada a la compresión, teniendo como objetivo describir, analizar, comprender e interpretar la realidad particular de los estudiantes del GEP al inicio de su formación, respecto a los conocimientos necesarios para iniciar la didáctica de la adición y la sustracción.

La investigación cualitativa se centra en el estudio de un problema y el desarrollo de una comprensión detallada de un fenómeno central. Ésta desarrolla procesos en términos descriptivos, para interpretar las acciones, lenguajes, hechos funcionalmente relevantes y los sitúa en relación con el más amplio contexto social (Martínez, 2011). Autores como Flick (2009) y Martínez (2006) entre otros, señalan que la investigación cualitativa trata de identificar la naturaleza profunda de las realidades, aquella que da razón plena de su comportamiento y de sus manifestaciones. Para ello, se fijan objetivos precisos a lograr (generales o específicos) para clarificar el fenómeno de estudio o área problemática.

Martínez (2006) señala que en metodología cualitativa no se formula una hipótesis a verificar, ya que se está abierto a todas las hipótesis plausibles y se espera que la mejor emerja del estudio de los datos y se imponga por su fuerza convincente.

Entre los diferentes tipos de investigación cualitativa que existen (ver, por ejemplo, Martínez, 2011), en la presente investigación se utiliza como método el estudio de caso. El estudio de casos se ha utilizado ampliamente para comprender en profundidad la realidad social y educativa. Implica un proceso de indagación que se caracteriza por el examen sistemático y en profundidad de los casos de un fenómeno, considerando cada caso como una entidad social o entidad educativa única. El caso a estudiar puede ser un individuo, un grupo, una organización, o una comunidad o sociedad, la cual es vista y analizada como una entidad (Bisquerra, 2009; Latorre et al., 1996; Sandín, 2003).

En el presente estudio, se considera como caso los 203 estudiantes de segundo año del

GEP de la Universidad Autónoma de Barcelona que aún no han iniciado sus estudios en didáctica de la aritmética. Considerando que la investigación cualitativa pretende encontrar respuesta a problemas concretos, y que la selección muestral ha de realizarse en función del interés de la situación o de las personas (Barba, 2013), se ha optado por un muestreo intencional.

3.2- Instrumentos

3.2.1- Elaboración de un primer instrumento

La elaboración del instrumento se inicia con una revisión inicial de la literatura centrada en la enseñanza y el aprendizaje de la aritmética con el objetivo de identificar los aspectos fundamentales que componen el conocimiento aditivo.

A partir de la propuesta de Cañadas y Castro (2011) y para el propósito de este estudio, elaboramos el siguiente esquema en el que se organizan los distintos elementos que componen el conocimiento aditivo, en términos de conocimientos conceptuales y procedimentales (ver Figura 1).

Conocimiento aditivo

(Maza, 2001; Cañadas y Castro, 2011)

Conocimiento Conceptual

- Concepto
  - Unión, incremento (suma)
  - Diferencia, disminución (resta)

(Castro, Rico, Castro, 1995; Maza, 2001; Cañadas y Castro, 2011)

- Significado
  - Basado en la acción sobre un objeto u número inicial
  - Concepción unitaria y binaria

(Maza, 2001; Cañadas y Castro, 2011)

- Representaciones
  - Simbólica (+, - , =)
  - Manipulativa (mat. concretos o virtuales)
  - Icónica (dibujos o imagines)

(Maza, 2001; Cañadas y Castro, 2011)

- Propiedades y algoritmos
  - Propiedades

    (Dikson, Brown,Gibson, 1991; Cañadas y Castro, 2011)
  - Modelos
    - Lineales (recta numérica)
    - Cardinales (diagramas)
    - Medida (longitudinales y otras magnitudes
    - Numerales (símbolos)
    - Funcionales (esquemas)

    (Castro, Rico, Castro, 1995; Cañadas y Castro, 2011)
  - Comprensión de los algoritmos y sus representaciones simbólicas
    - Algoritmos formales
    - Algoritmos informales

  (Dikson, Brown,Gibson, 1991; Maza, 2001; Cañadas y Castro, 2011)

- Situaciones en las que intervienen
  - Tipos de problemas aditivos
    - Cambio (aumento-disminución)
      - Incógnita en la cantidad final
      - Incógnita en la cantidad inicial
      - Incógnita en el cambio
    - Comparación (aumento-disminución)
      - Incógnita en el referente
      - Incógnita en el comparando
      - Incógnita en la diferencia
    - Igualación (aumento-disminución)
      - Incógnita en el referente
      - Incógnita en el comparando
      - Incógnita en la igualación
    - Combinación
      - Incógnita en el todo
      - Incógnita en una parte del todo

(Vergnaud 1982; Riley, Greeno y Heller , 1983; Puig y Cerdán, 1988; Maza, 1991; Carpenter, Fennema, Loef, Levi y Empso, 1999; Orrantia, 2003 y 2006, Orrantia, et al 2005; y Cañadas y Castro (2011), entre otros.

Conocimiento Procedimental

- Estrategias para resolver problemas y operaciones
- Dominio y uso de propiedades y algoritmos
- Estimación de resultados

Figura1: Elementos que componen el conocimiento aditivo

A partir del esquema elaboramos un primer cuestionario piloto, centrándonos en los aspectos de índole conceptual y procedimental, que consideramos fundamentales que el futuro maestro posea al iniciar su formación en didáctica de la aritmética.

Las preguntas del primer instrumento se elaboraron en torno a 6 aspectos fundamentales:

- conocimiento del SND,
- descomposición aditiva,
- aproximación a la comprensión de los algoritmos,
- conocimiento de los significados de la adición y la sustracción,
- conocimiento y uso de las propiedades, y
- conocimiento de las estrategias y resolución de problemas.

Con el objetivo de asegurar que los alumnos respondiesen individualmente, se elaboraron 2 formas distintas del cuestionario. Ambas formas incluían preguntas distintas, que evaluaban un mismo tipo conocimiento, y preguntas que eran comunes en ambas formas del cuestionario que se distribuyeron estratégicamente (ver Tabla 1).

Tabla 1: Preguntas por forma del cuestionario piloto

Grupo A	**Grupo B**	**Objetivo**
1- ¿Cuál o cuáles de las siguientes descomposiciones corresponde al 342? A)3C + 4D + 2U B) 30D + 42U C) 2C + 14D + 2U D) 1C + 2D + 42U E) 34D + 2U	1-¿Cuántas centenas hay en el número 3034?	Conocimiento del SND y de la descomposición aditiva
2-Dábamos una suma desplazada y preguntamos por qué estaba mal.	Se repite la pregunta	Conocimiento del valor posición y algoritmos
3- Explicar que entiendes por sumar/ restar	Se repite la pregunta	Conocimiento de los significados de la adición y la sustracción
4-Dábamos algunas igualdades y preguntamos qué propiedad (es) hay en qué lugar se aplica (n). a) 2 + 3 + 7 = 5 + 7 b) 0 + 4 = 4 = 4 + 0	Se repite la pregunta	Conocimiento y uso de las propiedades

5- La expresión *de 7 a 11 van 4, me llevo 1*, ¿a qué se refiere? 231 -87 4	Se repite la pregunta	Conocimiento de los algoritmos
6- Resolver 4 PAEV aditivos.	Proponer 4 PAEV aditivos.	Resolución de problemas / Estrategias

El cuestionario fue administrado en 1 sesión de una hora a 60 alumnos de segundo año del Grado de Educación Primaria de la Universidad Autónoma de Barcelona, que aún no había cursado la asignatura de Didáctica de la Aritmética. Éste se resolvió individualmente y sin calculadora.

3.2.2- Refinamiento del primer cuestionario

El análisis de los datos recogidos a partir de la primera versión del cuestionario nos permitió obtener información para refinarlo. Para analizar los datos del primer cuestionario, se organizaron en una planilla Excel las respuestas de los alumnos a las preguntas que evaluaban un mismo tipo de conocimiento. Se inició el análisis estudiando la validez de las preguntas a partir de los aspectos fundamentales que esperábamos evaluar. Tras el análisis realizado, se observó que, de manera general, no podían determinarse los conceptos clave que buscábamos de manera diferenciada. Las preguntas planteadas no eran suficientes, ni adecuadas para determinar si los futuros maestros poseían los conocimientos fundamentales necesarios para iniciar la didáctica de la suma y la resta.

A modo de ejemplo, presentamos el análisis y resultados relativos a las 3 preguntas que en conjunto buscaban determinar si los alumnos poseen un conocimiento adecuado sobre los aspectos fundamentales del SND, y las limitaciones que surgen tras su aplicación.

La Tabla 2, recoge las respuestas de los futuros maestros a las 3 preguntas que evaluaban aspectos fundamentales del conocimiento SND.

Tabla 2: Respuestas de los futuros maestros en relación al conocimiento del SND

Forma	Pregunta	Respuestas		
		Tipo	N	%
A	Descomposiciones	No contesta	2	6.7
		Identifica 1	19	63.3

	del 342	Identifica 2	1	3.3
		Identifica 3	4	13.3
		Identifica 4	4	13.3
B	Número de centenas en 3034	No hay centenas 30 centenas Otros valores	11 17 2	36.7 56.7 6.6
A y B	¿Por qué no está bien hecha la suma?	No está bien ordenada	7	11.7
		Orden y no correspondencia de las unidades, decenas, etc.	40	66.7
		Se están sumando decenas con unidades y centenas y así sucesivamente.	5	8.3
		Otros	8	13.3

La lectura de la Tabla 2 sugiere que la mayoría de los alumnos poseen una comprensión incompleta o fragmentada de los conceptos tratados. No obstante, un análisis en mayor profundidad revela que las preguntas utilizadas son insuficientes para poder determinarlo, permitiéndonos identificar sólo algunos de los aspectos del conocimiento de estos conceptos.

Por ejemplo, vemos que:

- De los 30 alumnos que se enfrentan a la identificación de múltiples descomposiciones del 342 (Forma A), un 13.3% las reconoce todas, mientras que un 63.3% reconoce una única descomposición, mayoritariamente (60%) la forma más tradicional en que ésta se presenta.
- En cambio, de los 30 futuros maestros que debían determinar el número de centenas en el número 3034, sólo un 56.7% fue capaz de señalarlas correctamente, mientras que el 43.2% restante no determina cuántas centenas hay, señalando en sus respuestas que no hay centenas ya sea por la correspondencia del cero con la posición (36.7%), o dando cifras del tipo 0.30 (6.6%).

Se observa que al plantear en forma separada las preguntas 1(A) y 1(B) hemos perdido información, pues estas preguntas se complementan y entregan una información más valiosa cuando se plantean al mismo grupo de alumnos.

El análisis de la pregunta 1(A), aplicada a la mitad de los alumnos, sugiere que en su mayoría éstos sólo reconocen la descomposición más común del 342 (3C+ 4D+ 2U), lo que pone de manifiesto que existe un reconocimiento y uso de representaciones equivalentes de un mismo número, en particular de las múltiples descomposiciones, pero que es un conocimiento incompleto. Si a este grupo de alumnos también le hubiésemos preguntado la cuestión 1(B), *¿cuántas centenas hay en 3042?,* hubiera podido determinarse si realmente poseen un conocimiento del valor posición o si, por el contrario, su respuesta en A es un reflejo de la receta de una descomposición memorística. Por otro parte, hubiera podido determinarse si el desconocimiento en el valor posicional observado en el 63.3% de los alumnos a los que se les planteó 1(B) se mantiene, al mismo tiempo que han sido capaces de identificar 1(A).

De manera similar, el análisis de las explicaciones que emergen ante la pregunta de por qué está mal realizada la suma que proponíamos nos permitió observar que:

- El 78.4% de los alumnos utiliza un argumento memorístico para justificar su respuesta. Por ejemplo, vemos que un 11.7% señala que la suma no está bien resuelta porque la posición de los números no es correcta, dando argumentos del tipo: *"no está colocada correctamente"; "...los números que suman deben estar alineados atrás, es decir, no puede quedar ningún espacio en blanco demás"*. En este sentido, el 66.7% del total se refieren a la posición y a la no correspondencia de las unidades con las unidades, las decenas con las decenas y las centenas con las centenas (*"Porque su colocación no es correcta, las unidades deberían ir juntas y no lo están"*).
- Un 8.3 % de los futuros maestros, evidencia un conocimiento adecuado del motivo por el cual no está bien hecha la suma. Estos alumnos señalan que ésto se debe a que se están sumando unidades con decenas, decenas con centenas y así sucesivamente (*"... se han sumado unidades con decenas, decenas con centenas, etc."; "Porque se están sumando decenas con unidades, centenas con decenas..."*; entre otras).

Del mismo modo, el primer cuestionario nos permitió observar que un 13.3% de los futuros maestros tiene errores conceptuales graves. Lo demuestran argumentos cómo que la suma está mal hecha porque: *"El orden de los componentes sí que altera el producto. El numerador y el denominador están intercambiados, el número mayor arriba y el pequeño abajo, desplazado hacia la derecha"; "El número más pequeño debe ir abajo, es decir el* *número más alto va arriba. La posición de estos números tiene un nombre que he estudiado, pero no me acuerdo. Además, el número debe ir lo más próximo a la derecha, motivo por el cual el resultado no es correcto";* entre otros.

El análisis de la pregunta 1 de ambas versiones del primer cuestionario ha permitido observar que, en general, los argumentos de los alumnos sugieren una falta de comprensión del valor posicional, emergiendo esencialmente la idea de posición, sin evidenciar una verdadera comprensión de ésta. Sólo parece reproducirse la idea memorística de que las unidades se ponen con las unidades y las decenas con las decenas, etc., idea que probablemente carece de significado. En consecuencia, la gran mayoría de ellos no son capaces de aplicar el conocimiento del valor posicional para completar cálculos, lo que en algunos casos los lleva a cometer errores conceptuales graves. Sin embrago, al no haber planteado esta pregunta de manera conjunta, 1(A) con 1(B), es imposible poder determinarlo.

Vemos que las preguntas que hemos planteado sólo permiten abordar algunos de los aspectos centrales del valor posicional, pero no permiten ver con claridad conocimientos fundamentales como la comprensión de la estructura recursiva multiplicativa de la base 10 del sistema o el redondeo de números para la parte del valor más cercano, entre otras. Por consiguiente, se vió la necesidad de incluir más preguntas que nos permitieran evaluar los aspectos requeridos y, en algunos casos, plantear las preguntas de manera conjunta.

3.2.3- Instrumento definitivo y recogida de datos

El análisis y la discusión de los resultados obtenidos a partir del primer cuestionario llevaron, por una parte, a reformular la estructuración del cuestionario, incluyendo una mayor cantidad de preguntas que se complementaran entre sí, de tal forma que en su conjunto permitieran evaluar los aspectos fundamentales que se buscan en esta investigación. En segundo lugar, se planteó la necesidad de definir si estamos más interesados en evaluar aspectos de índole más conceptual o procedimental puesto que la no diferenciación en el instrumento del tipo de conocimiento a buscar podía obstaculizar los resultados del estudio. Se reelaboró el instrumento, teniendo en cuenta:

(i) la primera aproximación al conocimiento evidenciada por los futuros maestros en el cuestionario piloto,

(ii) la revisión de las investigaciones sobre conocimiento conceptual y procedimental en matemáticas, y

(iii) aquellos estudios que se centran en aspectos de índole más conceptual en relación al conocimiento de la adición y sus principios, desarrollados tanto en niños como en adultos (ver Castro, Prat y Gorgorió, 2016).

Para establecer el instrumento definitivo, tras la revisión realizada, en primer lugar, recogemos la propuesta de Crooks y Alibali (2014) al definir el conocimiento conceptual como un conocimiento compuesto por el conocimiento de los principios generales y el conocimiento de los principios subyacentes. El conocimiento de los principios generales, incluye reglas, definiciones, conexiones y los aspectos de la estructura del dominio.

En la elaboración del instrumento definitivo, para la evaluación de este tipo de conocimiento se consideran 2 tipos de tareas:

(1) las tareas de explicación de concepto, que implican explicaciones verbales que miden el conocimiento explícito, como definiciones, explicaciones de los elementos de la estructura de un dominio y normas o reglas; y

(2) la evaluación de las tareas de ejemplo, que aprovechan formas de conocimiento implícito como reconocer ejemplos, definiciones o afirmaciones de principios.

La segunda dimensión del conocimiento conceptual considera el conocimiento de los principios subyacentes a los procedimientos, que implica saber por qué ciertos procedimientos funcionan para determinados problemas, cuál es el propósito de cada paso de un procedimiento, y conocer las conexiones entre estos pasos y sus fundamentos conceptuales. Para evaluar el conocimiento de los principios subyacentes a los procedimientos, se consideran 2 tipos de tareas:

(1) aplicación y justificación de tareas de procedimiento; y

(2) evaluación de tareas de procedimiento, como correctos o incorrectos y el por qué, juzgando si son apropiados en ciertas situaciones.

En el proceso de elaboración del instrumento definitivo, en segundo lugar, nos centramos en el conocimiento de 2 aspectos de índole más conceptual en relación al conocimiento de la adición y sus principios, que corresponden a los 2 primeros componentes del CMF aditivo que hemos establecido:

(1) el conocimiento del sistema de numeración decimal (SND), y

(2) el conocimiento del significado y de las relaciones de la adición y la sustracción.

Posteriormente, se elabora un cuestionario (ver en Anexo 1) que permite evaluar estos dos primeros componentes del CMF aditivo (en su aspecto conceptual). En éste se plantean distintos tipos de pregunta por bloque temático considerando tres aspectos:

(i) el contenido a evaluar –por ejemplo, valor relativo y de posición;

(ii) el tipo de conocimiento conceptual que involucra –conocimiento de los principios generales o de los principios que subyacen a los procedimientos; y

(iii) los indicadores de conocimiento conceptual –tareas de aplicación y justificación de procedimientos.

Las preguntas del cuestionario se validaron por expertos, y se distribuyeron estratégicamente antes de fijar su versión final, incluyéndose de manera intercalada preguntas de ambos bloques temáticos. El cuestionario contiene preguntas referidas a contenidos distintos que se complementan entre sí, con la intención de triangular las respuestas de los alumnos y así descartar una incorrecta interpretación de las respuestas obtenidas.

Los alumnos del estudio respondieron el cuestionario en una sesión de la asignatura *"Didáctica de las matemáticas"*, que es la primera asignatura de los estudios del Grado de Educación Primaria de la Universidad Autónoma de Barcelona, donde se trabaja específica el pensamiento aditivo. El cuestionario fue administrado en 4 de los 6 cursos en los que se estaba dictando ésta asignatura en la sesión previa al inicio de la didáctica de la aritmética. El cuestionario fue administrado a los alumnos un día martes y miércoles por la mañana y un viernes por la tarde, en presencia del profesor que dictaba la asignatura. Los alumnos disponían de 1 hora para responder el cuestionario. Las respuestas a las preguntas del cuestionario eran individuales. No se permitía el uso de calculadora, y los alumnos debían realizar todos los cálculos en el propio cuestionario con la finalidad de recoger al máximo la riqueza de sus respuestas. Durante su administración, sólo se respondieron por parte del investigador preguntas que no eran de contenido matemático. Al final de la sesión, por petición de los profesores que dictaban la asignatura, se les entregó a éstos una copia del cuestionario para discutir con los alumnos las dificultades a las que se enfrentaron durante su aplicación.

La Tabla 3 recoge las preguntas que conforman el cuestionario, especificando por bloque temático el aspecto del contenido a evaluar, el tipo de conocimiento conceptual que involucra y sus indicadores.

Tabla 3: Preguntas que conforman el Cuestionario

Bloque CMF1: Sistema de numeración decimal		
Pregunta	Aspecto a evaluar	Conoc. Conceptual e indicadores
1) Completa y explica por qué. a) 50 centenas son ___ unidades = __miles. b) 70 miles son ___ decenas =_____unidades.	*(Centrada)* Conocimiento de la estructura recursiva multiplicativa de la base 10 del SND. *(Otros aspectos evaluados)* Conocimiento del valor relativo y de posición, y la transformación de cantidades estructuradas.	*(Tipo)* Principios que subyacen a los procedimientos. *(Indicador)* Aplicación y justificación de las tareas de procedimiento.
2) Escribe la decena más próxima de los siguientes números y explica por qué lo es: a) 43 b) 36 c) 68 d) 65	*(Centrada)* Conocimiento del valor relativo y de posición. *(Otros aspectos evaluados)* Conocimiento del redondeo de números para la parte del valor más cercano, y contar hacia delante y hacia atrás en las partes del valor posición.	*(Tipo)* Principios que subyacen a los procedimientos. *(Indicador)* Aplicación y justificación de las tareas de procedimiento.
3) ¿Cuántas centenas hay en el número 130.025? ¿Cómo se escribe en palabras el número 130.025?	*(Centrada)* Conocimiento del valor relativo y de posición; y sobre la lectura y escritura de un número en letras. *(Otros aspectos evaluados)* Conocimiento de la estructura del SND.	*(Tipo)* Principios que subyacen a los procedimientos. *(Indicador)* Aplicación y justificación de las tareas de procedimiento.

4) ¿Cuál (es) de las siguientes descomposiciones corresponde (n) al número 342? Enciérrala (s) en un círculo. a) 3C + 4D + 2U b) 30D + 42U c) 2C + 14D + 2U d) 1C + 2D + 42U e) 34D + 2U	*(Centrada)* Reconocimiento y uso de representaciones equivalentes del mismo número. *(Otros aspectos evaluados)* Componer, descomponer, combinar y transformar cantidades estructuradas; comparación de cantidades estructuradas; de la estructura del SND; y del valor relativo y de posición.	*(Tipo)* Principios generales. *(Indicador)* Evaluación de tareas de ejemplo.
Bloque CMF2: Significados y relaciones entre la adición y la sustracción		
1) Explica qué entiendes por: a) Sumar b) Restar	*(Centrada)* Significados de la adición y la sustracción. *(Otros aspectos evaluados)* Relación entre la adición y la sustracción.	(*Tipo*) Principios generales *(Indicador)* Explicación de tareas de concepto
¿Cuál o cuáles de los siguientes verbos asocias con sumar? Organiza los verbos según el criterio del cuadro. a) Juntar b) Recibir c) Agregar d) Combinar e) Unir f) Obtener g) Ganar g) Aumentar h) Incrementar i) Añadir Verbos que asocias claramente con suma. Verbos que no asocias con la suma. Verbos que pueden ser de suma.	*(Centrada)* Concepciones de la adición basadas en la acción. *(Otros aspectos evaluados)* Uso de palabras clave.	(*Tipo*) Principios generales. *(Indicador)* Evaluación de tareas de ejemplo.
Utilizando sólo números naturales, elabora: a) dos problemas de suma, cada uno de los cuales se resuelva con una única operación y que sean distintos entre sí. b) dos problemas de resta, cada uno de los cuales se resuelva con una única operación y que sean distintos entre sí.	*(Centrada)* Significados y relaciones de la adición y la sustracción. *(Otros aspectos evaluados)* Uso de palabras clave.	(*Tipo*) Principios que subyacen a los procedimientos. *(Indicador)* Aplicación y justificación de tareas de procedimiento.
¿Es posible redactar el enunciado de un problema de suma con la palabra menos? ¿Por qué? Da un ejemplo. ¿Es posible redactar el enunciado de un problema de resta con la palabra añadir? ¿Por qué? Da un ejemplo.	*(Centrada)* Relación de la adición y la sustracción. *(Otros aspectos evaluados)* Uso de palabras clave.	(*Tipo*) Principios generales. *(Indicador)* Explicación de tareas de concepto.

CAPÍTULO IV

ANÁLISIS Y RESULTADOS: SISTEMA DE NUMERACIÓN DECIMAL

Para analizar las respuestas y las justificaciones dadas por alumnos a las preguntas del cuestionario, se considera un enfoque cualitativo desde una perspectiva interpretativa. Los instrumentos de análisis emergen del trabajo con los datos, la organización y el análisis de las respuestas que los alumnos dan a las tareas propuestas.

El proceso de análisis se desarrolla en tres fases. En primer lugar, se organizan y analizan las respuestas y justificaciones que los alumnos dan al bloque de preguntas relativas al conocimiento del SND. Este análisis y los resultados de este bloque se presentan en el Capítulo 4. Seguidamente se analizan las respuestas a las preguntas que evalúan el conocimiento de los significados y relaciones de la adición y la sustracción. En base a las respuestas dadas por los alumnos, se establecen distintas categorías emergentes. El análisis y los resultados correspondientes a este bloque de preguntas se presentan en el Capítulo 5. Finalmente, se desarrolla un análisis relacional de las categorías de conocimiento que emergen en relación al SND y en relación al conocimiento de la adición y la sustracción. A partir de ello, se establecen categorías de conocimiento conceptual aditivo y perfiles de conocimiento conceptual aditivo. El análisis, junto con los perfiles, se presentan en el Capítulo 6.

A continuación, en este Capítulo, se presenta el análisis de las respuestas y las justificaciones dadas por los 203 estudiantes a las preguntas del cuestionario que evalúa diferentes aspectos del conocimiento del Sistema de Numeración Decimal. En concreto, en este Capítulo 4 se presentan:

- el análisis y resultados para cada una de las 4 preguntas que en su conjunto evalúan diferentes aspectos del conocimiento del SND,
- el análisis relacional de estas 4 preguntas, es decir el análisis en conjunto del cual emergen los niveles de conocimiento conceptual sobre el SND.

Para el análisis de los datos se considera un enfoque cualitativo desde una perspectiva interpretativa. Se inicia el análisis organizando las respuestas de los estudiantes en una planilla Excel en función del aspecto del conocimiento del SND en el que se centra la pregunta, el tipo de conocimiento conceptual que involucra y sus indicadores.

Una vez organizados los resultados, para caracterizar el conocimiento matemático inicial de los alumnos sobre los aspectos evaluados en cada pregunta:

- se recoge el número de respuestas correctas a cada una de las 4 preguntas propuestas,
- se analiza el tipo de solución matemática que los futuros maestros dan a la tarea propuesta y, cuando corresponde, las explicaciones que las justifican,
- se establecen categorías de conocimiento sobre cada uno de los aspectos del conocimiento del SND en los que se centra cada pregunta.

Para hacer el análisis relacional e identificar niveles de conocimiento conceptual sobre el SND:

- se recogen las categorías de conocimiento sobre los distintos aspectos del conocimiento del SND en el que se centra cada pregunta y el tipo de conocimiento evidenciado en otros aspectos del conocimiento del SND que la pregunta evalúa indirectamente,
- se organizan en una planilla Excel las distintas categorías de conocimiento obtenidas de cada una de las preguntas recogidas por alumno,
- se recogen en una planilla Excel el número de alumnos de cada una de las categorías de conocimiento que emergen de los diferentes aspectos del conocimiento del SND evaluados y
- se realiza un análisis en conjunto de las distintas categorías de conocimiento de cada una de las preguntas y se establecen categorías emergentes de conocimiento conceptual del SND en base a todos los aspectos evaluados.

4.1- Análisis y resultados por pregunta

Para ejemplificar el proceso de análisis realizado para cada una de las 4 preguntas del cuestionario, presentamos en detalle el análisis y los resultados de la pregunta 1 centrada en el conocimiento de la estructura del SND. Dado que las preguntas restantes siguen un proceso de análisis similar, no se presenta en detalle su análisis, pero sí se exponen los aspectos más relevantes que aparecen al analizar cada una de ellas. En los anexos se adjuntan los extractos de las planillas de análisis de las preguntas 2, 3 y 4 con los resultados que no se incluyen en el cuerpo de esta sección.

4.1.1- Análisis y resultados de la pregunta 1: “transformar cantidades estructuradas utilizando diferentes unidades del SND”

La pregunta 1 está formulada de la siguiente forma:

Completa y explica por qué:

50 centenas son =_____ unidades = ______ miles.	Porque:

70 miles son= ______decenas = ______unidades	Porque:

Figura 2: Imagen de la pregunta 1 del bloque de preguntas que evalúa el conocimiento del SND

La pregunta 1 tiene como objetivo evaluar el grado de conocimiento de la estructura del SND que tienen los alumnos, a través del conocimiento de los principios que subyacen a los procedimientos. Se utiliza como indicador de conocimiento conceptual la aplicación y justificación de tareas de procedimiento al solicitar a los alumnos realizar 4 tipos de transformaciones entre unidades del SND.

Se inicia el análisis recogiendo las respuestas de los futuros maestros a la tarea propuesta en una planilla Excel. Para cada alumno se anotan las soluciones matemáticas que dan como resultado de las trasformaciones propuestas y también las explicaciones que las justifican. La Figura 3 recoge una imagen de parte de esta planilla.

Transformar cantidades estructuradas utilizando diferentes unidades del SND						
Alumno	**50C=….U**	**50C=…M**	**Justificación**	**70M=….D**	**70M=…U**	**Justificación**
172	"No lo se"	"No lo se"	"No lo se"	"No lo se"	"No lo se"	"No lo se"
173	0U	0 M	0(M)0500(U)	0D	0U	7000 (D)0 (U)
174	5000U	5 M	N/C	7000D	70000U	N/C
175	0U	N/C	N/C	N/C	N/C	N/C
176	5000U	5 M	50* 100= 5000 5000: 1000=5	700D	70000U	70*1000=7000 70000:10=700
177	50000U	50 M	N/C	700D	70000U	N/C
178	0U	1000 o más M"	"Porque el número de las centenas es 0"	70D;	0U	"El número del 1000 es un 0"
179	5000U	5 M	N/C	7000D	70000U	N/C
180	5000U	5 M	"Factor de conversión"	7000D	70000U	"Factor de conversión"
181	5000U	N/C	N/C	70D	7U	N/C
182	5000U	5 M	"Si 5 centenas son 500 unidades 50 + un 0"	7000D	70000U	"Si 7 miles son 7000 u, entonces + 0 a contrario por decenas"
183	5000U	5 M	"Si hablamos de centenas (100) añadimos 2 ceros para ir hacia unidades y quitamos 1 para ir a miles (1000)"	700D	70000U	"Idem proceso que anterior, añades o quitas ceros"
184	5U	100000 M	"500000"	7D	10000U	"70000"
185	N/C	N/C	N/C	N/C	N/C	N/C
186	5000U	5 M	M C D U 5 0 0 0	7000D	70000U	M C D U 7 0 0 0 0
187	5000U	5 M	M C D U 5 0 0 0	7000D	70000U	M C D U 7 0 0 0 0
188	500U	N/C	N/C	N/C	N/C	N/C
189	5000U	5 M	"Al cambiar de unidad tenemos que multiplicar o dividir por 10, es decir añadir 0 o mover la coma tantas veces como en la recta nos hemos desplazado"	7000D	70000U	"Al cambiar de unidad tenemos que multiplicar o dividir por 10, es decir añadir 0 si vamos a la derecha o mover la coma si vamos a la izquierda tantas posiciones como nos hayamos
190	5000U	5 M	M C D U 5 0 0 0	7000D	70000U	M C D U 7 0 0 0 0
191	5000U	5 M	50* 100 = 5000 (centenas)	7000D	70000U	70*1000=7000 unidades 70000:10= decenas
192	0U	? M	N/C	70D	0U	"Sigo el orden unidades, decenas, centenas.."
193	5000U	0.5 M	"Cuanto más pequeña sea la cifra habra que ir añadiendo 0. Si las unidades son más pequeñas que las centenas habra que poner +0"	7000D	70000U	"Por lo mismo de antes"
194	5000U	5 M	"1 centena= 100 unidades 50*100=5000 1 millon=1000 unidades"	700D	7000U	"1 millón= 1000 unidades 1 millón=10 decenas 1 centena=100 unidades 1 decena=10 unidades"
195	0U	5 M	5 0 0 0 M U" "no hay unidades explicitas y 50 centenas son 5 miles"	0D	0D	7 0 0 0 0 D U "no hay unidades ni decenas ni centenas"
196	0U	N/C	N/C	N/C	N/C	N/C

Figura 3: Extracto de la planilla que recoge las respuestas a la pregunta 1.

Las respuestas de los alumnos se organizan en la Tabla 4, según el número de transformaciones correctas que realizan y el tipo de solución matemática que dan a la tarea propuesta, junto a la explicación que las justifica. Para determinar el tipo de solución matemática y la explicación que la justifica, se revisan las explicaciones de los futuros maestros considerando si las soluciones que obtienen y aceptan como resultado son correctas o evidencian conceptos erróneos.

Se establecen las siguientes categorías para organizar las respuestas:

- No fundamenta, cuando no justifica su respuesta en ningún caso;
- Evidencian falta de conocimiento, cuando dan explicaciones del tipo:

  (A. 12): "*Son 10 unidades ya que el uno ha ido a sumar para obtener 50*",

  (A.125):*"Porque 50 centenas son 500, así que no hay unidades ni miles"*,

  (A. 48):*"No me acuerdo, supongo que es porque el sistema de numeración es así"*,

  (A.160): *"No lo sé";*

  y/o dan y aceptan como válidas soluciones que evidencian el manejo de conceptos erróneos:

  (A. 12): 50M= *"10 U"*,

  (A.184): 70M= *"7D"*,

  (A.172): 70M= *"No lo sé"*,

  (A.178): 50C= *"1000 o más M"*;

- Siguen un procedimiento mecánico, cuando se limitan a añadir o quitar ceros y así lo explican:

  (A.26): *"Porque el orden es unidades (0), decenas (00), centenas (000), mil (0000)"*,

  (A.57): *"El cero lo fijo en la casilla de las centenas, a partir de ahí me fijo en cada unidad completada por ceros"*,

  (A.166): *"Divides por 10 cuando bajas o multiplicas por 10 si subes"*,

  (A.193): *"Cuanto más pequeña sea la cifra habrá que ir añadiendo 0. Si las unidades son más pequeñas que las centenas habrá que poner +0"*, o cuando aceptan cualquier tipo de solución como resultado de éste proceso, ya sea correcta o no:

(A.26): 50C= 0,5U= 5M,

(A.57): 50C=5000U=5M,

(A.166): 50C=5000U=0,5M,

(A.193): 70M=700D=70000U;

- Se limitan a operar, cuando no dan ninguna explicación, y sus soluciones son únicamente el resultado de realizar cálculos, ya sean correctos o no:

  (A.137): *"50*100= 5000 y 5000/1000 = 5"*,

  (A.149): *"70*1000=7000 y 70000:10=700"*,

  (A.157): *"50*100=500 y 5000:1000=5"*,

  (A.176): *"70*1000=70000 y 70000:10=700"*;

- Establecen relaciones de equivalencia, cuando sus explicaciones y soluciones se basan en relaciones de equivalencia aprendidas entre las diferentes unidades del SND, aunque éstas no sean siempre completamente correctas:

  (A.4): *"1 mil= 10 centenas=100 decenas.... 70*100=700 decenas"*,

  (A.28): *"1 mil=1000 unidades=100 decenas……70 mil=7000 decenas y 1 millón=100000 unidades=10000 decenas"*,

  (A.134): *"Una decena son 10 unidades, por tanto 7000 decenas=70000 unidades"*,

  (A.150): *"En 50 centenas hay 5000 veces 1 y 5 veces 1000".*

La tabla que presentamos a continuación, Tabla 4, muestra la distribución de los 203 alumnos según el número de trasformaciones correctas que realizan y el tipo de respuesta que dan a la tarea propuesta.

Tabla 4: Frecuencia del número de transformaciones correctas según el tipo respuesta

Tipo de respuesta	Nº trasformaciones correctas						
	N/C	0	1	2	3	4	Totales
No fundamenta	16	18	6	7	6	6	58
Evidencia falta de conocimiento	*	11	3	10	*	*	25
Procedimiento mecánico	*	2	4	12	33	13	64
Se limita a operar	*	*	*	1	4	4	9
Establece relaciones de equivalencia	*	*	*	2	26	19	47
Totales	16	31	13	32	69	42	203

Se observa que sólo el 20.7% de los alumnos del estudio son capaces de realizar con éxito todas las transformaciones propuestas. Un 34% logra hacer sólo 3; un 37.4% no logra hacer más de 2, y un 7.9% no responde la pregunta.

El análisis del número de trasformaciones correctas, que se recoge en la Tabla 4, junto al tipo de respuesta que los alumnos dan, sugiere que:

- El 21.7% de los futuros maestros que participa en este estudio no son capaces de transformar cantidades estructuradas utilizando diferentes unidades del sistema, no logrando hacer más de 1 trasformación correcta; y un 15.8% no logra hacer más de 2. En ambos casos, tanto las justificaciones como las soluciones que dan y aceptan como válidas en las trasformaciones propuestas muestran una falta de conocimiento, o un conocimiento insuficiente, en relación a la estructura del SND, los conceptos de valor relativo y de posición.

  Esta falta de conocimiento, o conocimiento insuficiente, se refleja en las explicaciones que justifican sus procedimientos de trasformación. Así, por ejemplo, señalan: *"No hay miles ya que las centenas se componen por sólo dos cifras en vez de 3"* (A.22)*; Son 0 unidades porque es el número 0 y 0 miles porque no hay"* (A.76)*; "Porque en 70000 no hay unidades, ni decenas, ni centenas"* (A.195).

  La ausencia o insuficiencia de conocimiento también se muestra en las soluciones que aceptan como válidos resultados incorrectos. De esta forma, encontramos: 70M= 10D (A.62), 50C= 5U=100000M (A.184), 70M=0D=0U (A.195).

En otras ocasiones, este conocimiento insuficiente se refleja en ideas mecánicas como poner ceros y mover comas, por ejemplo: *"Vas agregando ceros"* (A.46); "*Porque es la regla"* (A.78);*"Hemos de tener en cuenta si quitaremos adelante o atrás"* (A.161).

También se constata en que aceptan como válida cualquier solución que resulte de este proceso, como en las respuestas: 50C =500U (A.46); 70M =700000D (A.78); 50C =0,5M (A.161).

En alguna ocasión, la ausencia o insuficiencia de conocimiento se observa en el planteamiento de relaciones erróneas de equivalencia o limitándose sólo a operar.

En un 41.3% de los casos los alumnos no fundamentan sus respuestas.

- El éxito que obtienen el 33.99% de los alumnos que realizan 3 trasformaciones correctas (69 alumnos), en el 47.8% de los casos, no parece radicar en un conocimiento profundo de la estructura del SND.

  Estas respuestas correctas parecen ser el resultado de la aplicación de criterios mecánicos de trasformación que no tienen un fundamento conceptual de fondo, apoyándose en explicaciones del tipo: *"Multiplicamos o dividimos por 10 las veces que se necesite"* (A.10); *"Para pasar de una unidad a otra se añade o quita 0"* (A.35); *"Factor de conversión"* (A.180).

  Dichas respuestas correctas también son resultado de cálculos consistentes en agregar o quitar ceros sobre la cantidad propuesta.

  Sólo en el 37.7% de los casos las tres transformaciones correctas se basan en la formulación de relaciones de equivalencia, aunque no siempre son correctas o bien ejecutadas. Este sería el caso de quienes responden, por ejemplo: *"1 mil= 10 centenas=100 decenas... 70*100=700 decenas"* (A.4); *"10 centenas= 1 decena, 1 decena=10 unidades*" (A.8); "*1 millón=100000 unidades=10000 decenas"* (A.28).

  En un 5.8% de las respuestas correctas el éxito se basa sólo en la realización de cálculos del tipo *"70*1000= 7000 y 70000:10= 700"* (A.149), lo que sugiere la existencia de un conocimiento sobre relaciones de equivalencia entre las diferentes unidades del sistema, aunque no siempre sean bien ejecutadas.

Finalmente, en un 8.7% de los casos no es posible determinarlo al no fundamentar los alumnos su respuesta.

- Únicamente 19 de los 42 alumnos que logran realizar exitosamente todas las transformaciones propuestas (un 20,68% del total) parecen tener un conocimiento profundo del SND y de los conceptos de valor relativo y de posición, basando sus respuestas en el planteamiento de relaciones de equivalencia del tipo: *"Porque 70 mil son 700 centenas; 7000 decenas"* (A.16); *"10 centenas son 1000 unidades, ya que, 1 centena son 100 por tanto, 50 serán 5000 unidades. 5000 unidades son 5 miles ya que es proporcional"* (A.85); "*1 mil son 1000 unidades y 1 centena son 100 unidades, por tanto 5 miles son 5000 unidades y estas hacen un total de 50 centenas"* (A.84).

  Los 23 alumnos restantes parecen seguir con éxito un procedimiento mecánico de transformación, a partir de argumentos del tipo: *"El cero lo fijo en la casilla de las centenas, a partir de ahí me fijo en cada unidad completada por ceros"* (A.57); "*Las unidades en el mínimo número y las centenas en la tercera posición. Lo cual, si le añadimos 0 obtenemos las unidades. Le quitas a los más grandes, con lo cual le quitaras un 0 a las decenas son inferiores a las centenas a los miles etc., un número mayor"* (A.108).

  Vemos además que, en algunas ocasiones, no fundamentan sus respuestas, sólo operan.

A partir del tipo de respuesta que los futuros maestros dan a la tarea propuesta, incluyendo el tipo de solución matemática y la explicación que justifica el procedimiento, y el número de respuestas correctas, se establecen categorías sobre el conocimiento de la estructura del SND en relación a la trasformación de cantidades estructuradas junto con otros aspectos evaluados indirectamente, como son los conceptos de valor relativo de posición. Estas categorías son:

- No se puede determinar
- **Sin conocimiento**
- **Conocimiento insuficiente**

- **Sólo evidencian conocimiento procedimental**
- **Conocimiento incompleto**
- **Conocimiento completo**

La Tabla 5 recoge las 6 categorías junto con su descripción, su frecuencia y ejemplos de algunos datos incluidos en cada una de ellas para ilustrarlas.

Tabla 5: Categorías de conocimiento sobre la estructura del SND

Categoría	Detalle	Frecuencia	Ejemplo
(1) No se puede determinar	Cuando no fundamentan sus respuestas y no contestan la pregunta.	16 (7.9%)	
(2) Sin conocimiento	Cuando no hace más de: • 1 transformación correcta y no fundamenta sus respuestas; • 1 transformación correcta y utiliza un procedimiento mecánico de trasformación (correr comas y poner ceros); o • 2 transformaciones correctas y hay evidencia de falta de conocimiento.	54 (26.6%)	(A.125): 50C=0U=0M y 70M=0D=0U. (A.178): *"0(M)0500(U)"*.
(3) Conocimiento insuficiente	Cuando no hacen más de 2 transformaciones correctas, y: • no fundamentan sus respuestas; • utilizan un procedimiento mecánico de transformación (correr comas y poner ceros) que parece no tener un fundamento conceptual de fondo; • sólo se limitan a operar; o • establecen relaciones de equivalencia que no siempre son correctas.	22 (10.8%)	(A.46): "*Vas agregando ceros"*. (A.195): *"Porque en 70000 no hay unidades, ni decenas, ni centenas"*.
(4) Sólo evidencian conocimiento procedimental	Cuando hacen 3 o 4 transformaciones correctas y no es posible determinar si el éxito que obtienen en sus procedimientos tiene base conceptual. En este caso, se incluyen aquellos alumnos que: • no fundamentan sus	66 (32.5%)	(A.157): *"50*100=500 y 5000:1000=5"*. (A.193): *"Cuanto más pequeña sea la cifra habrá que ir añadiendo*

	respuestas; • siguen un procedimiento mecánico de trasformación; o • sólo operan.		*0. Si las unidades son más pequeñas que las centenas habrá que poner +0".*
(5) Conocimiento incompleto	Cuando hacen 3 transformaciones correctamente, y establecen relaciones de equivalencia entre diferentes unidades del sistema, que no siempre son completamente correctas o bien ejecutadas.	26 (12.8%)	(A.28):*"10 centenas= 1 decena, 1 decena=10 unidades*". (A.149): *"70*1000= 7000 y 70000:10= 700".*
(6) Conocimiento completo	Cuando hacen 4 transformaciones correctas, basadas en el uso de relaciones de equivalencia entre diferentes unidades del sistema.	19 (9.3%)	(A.80). "1 decena= 10 U, 1 centena=100 U, 1 mil=1000 U, 50 C *100=5000U y 5000:1000= 5 miles". (A.141): "1 mil= 100 decenas, 70*100=7000, 1 decena = 10 unidades y 7000 *10= 70000".

4.1.2- Análisis y resultados de la pregunta 2: "identificar la decena más próxima a un número dado"

La pregunta 2 está formulada de la siguiente forma:

Escribe la decena más próxima de los siguientes números y explica porqué lo es.

43 es:	Porque:
36 es:	Porque:
68 es:	Porque:
65 es:	Porque:

Figura 4: Imagen de la pregunta 2 del bloque de preguntas que evalúa el conocimiento del SND

Esta pregunta tiene como objetivo evaluar el grado de conocimiento del valor relativo y de posición que tienen los alumnos, mediante el conocimiento del redondeo de números hacia la parte del valor más cercano. Como indicador de conocimiento conceptual se utiliza la aplicación y justificación de tareas de procedimiento. Para ello se solicita a los alumnos que determinen la decena más próxima a los números 43, 36, 68 y 65 y que expliquen en cada caso por qué es la decena más próxima.

Se inicia el análisis recogiendo las respuestas de los futuros maestros a la tarea propuesta en una planilla Excel. Se anota alumno por alumno las soluciones matemáticas que identifican como las decenas más próximas a los números dados y las explicaciones que las justifican (ver Anexo 2). Una vez recogidas todas las respuestas de los alumnos, éstas se organizan en la Tabla 6 según el número de decenas que identifican correctamente y del tipo de solución matemática que los alumnos dan a la tarea propuesta junto a la explicación que la justifica. Para organizar el tipo de solución matemática y la explicación que las justifica, analizamos las explicaciones que los futuros maestros utilizan para justificar la elección de sus decenas más próximas, considerando si las soluciones que obtienen y aceptan como resultado son correctas o evidencian conceptos erróneos.

A partir de las soluciones dadas, de qué soluciones aceptan como válidas y de las explicaciones que las justifican, se establecen las siguientes categorías de respuesta:

- No fundamenta, cuando no justifica su respuesta en ningún caso.
- Evidencia falta de conocimiento, cuando dan explicaciones del tipo:

  (A.18): *"Es 20 porque 40 son dos grupos de 20"*,

  (A.62): *"El 6 equivale a las unidades y se encuentra por encima del 5, por lo tanto las decenas son 4"*,

  (A.145): *"5 porque se acerca más a la quinta decena el 60"*,

  (A.189): *"En este caso para encontrar el número más próximo escribiría el mismo número añadiéndole un decimal, así pues, la decena más próxima seguiría siendo 6"*,

  o, cuando aceptan como válidas soluciones que evidencian el manejo de conceptos erróneos:

  (A.18): "La decena más próxima a 43 es *20*",

  (A.62): "La decena más próxima a 36 es *4*", (A.145): *“*La decena más próxima a 65 es *5*”,

(A.189): *“*La decena más próxima a 68 es *68,1*”;

- Sigue un procedimiento mecánico de redondeo, cuando sólo aproximan observando si la unidad del número dado pasa o no de 5, evidenciando el manejo de conceptos erróneos, o no discriminando qué situaciones no es necesario elegir:

  (A.13): La decena más próxima a 65 es: *“70. Porque siempre hay que aproximar el número hacia arriba en el momento de hacer la decena de 65”,*

  (A.29): La decena más próxima a 43 es:. *“40. Porque redondeamos para arriba a partir de 5 y 3 es menor que 5”,*

  (A.36): La decena más próxima a 36 es: *“40. 6>5”,*

  (A.173): La decena más próxima a 68 es: *“7. Redondeo”,*

- Analizan la proximidad del número dado, cuando sus elecciones se basan en un análisis de la proximidad de la unidad o del número dado en relación a la decena anterior y posterior, ya sea evidenciando el manejo de conceptos erróneos al confundir el valor relativo con el de posición, o discriminando (o no) en qué situaciones no es necesario elegir entre dos decenas:

  (A.28): La decena más próxima a 65 es: *“60 o 70. Puede ser cualquiera de las dos porque la unidad 5 está a la misma distancia”,*

  (A.34): La decena más próxima a 36 es: *“40. Porque restan 4 unidades para llegar a 40 y 6 han pasado ya de 30”,*

  (A.139): La decena más próxima a 65 es: *“70. A pesar de estar a 5 unidades de 60 y a 5 de 70, en el caso de 5 se considera que está más cerca de la siguiente decena”.*

  (A.60): La decena más próxima a 68 es: *“7. 68 es un número más próximo a 70 que a 60 y 70 son 7 decenas”.*

En la Tabla 7 se recoge la distribución de los 203 alumnos según el número de decenas correctas que identifican y el tipo de respuesta que dan a la tarea propuesta.

Tabla 7: Frecuencia del número de decenas correctas según el tipo respuesta

Tipo de respuesta	Nº decenas correctas							
	N/C	0	1	2	3	4	5	Totales
No fundamenta	1	*	*	*	*	3	1	4
Evidencia falta de conocimiento	*	8	*	1	*	*	*	10
Procedimiento mecánico	*	10	*	1	1	49	17	78
Analiza la proximidad de la unidad	*	6	*	1	6	45	53	111
Totales	1	24	*	3	7	97	71	203

La Tabla 7 muestra que sólo el 35% de los alumnos del estudio logra identificar correctamente las decenas más próximas a los números dados en los 5 casos propuestos en el ejercicio. Un 12.3% no logra identificar correctamente ninguna de ellas o no contesta; un 5% determina 2 o 3; y, un 47.8% identifica 4.

Los resultados del análisis presentado con más detalle, permiten observar que:

- El 82.8% de los estudiantes identifican en 4 o 5 casos las decenas más próximas a los números dados.

  No obstante, sólo en un 31.5% de los casos sus elecciones parecen radicar en un conocimiento profundo del redondeo de números hacia la parte del valor más cercano, basada en el análisis de la proximidad de la unidad del número dado. Estos alumnos discriminan en qué situaciones aproximar o no, llevándolos a determinar correctamente todas las decenas propuestas. Así, por ejemplo, tenemos las siguientes respuestas: *"60 o 70. Está igual de cerca el 60 o el 70, aunque de manera universal se tiende a la decena más alta"* (A.22); *"36 se separa de 40 sólo por 4 unidades mientras que de 30 por 6. Como 4 es un número menor está más cerca de 70"* (A.106); *"65 se considera que está en medio y pueden ser los dos"* (A.99).

  Para un 26.8% de estos alumnos, la diferencia entre identificar 4 o 5 decenas radica en conocer que las decenas más próximas a 65 son tanto el 60 como el 70 y que no es necesario elegir una de las dos. Las siguientes serían ejemplos de estas respuestas: *"No conozco por qué realmente, pero sé que se tiene que redondear hacia arriba en casos así"* (A.65); *"65 es igual de próxima a 60 que a 70, pero al* *hacer aproximaciones se aproxima al número superior”* (A.88); “*La decena más próxima es 60 porque a partir de 5 (unidad) valoramos como más cercanos a las cantidades más pequeñas”* (A.108).

En el 39.3% de los casos restantes, el éxito parece radicar en la aplicación mecánica de un criterio de redondeo, como en las respuestas: *“3 es inferior a 5 por tanto redondeo hacia abajo”* (A.27); *“Porque la unidad pasa del 5”* (A.37); "8>5" (A.55).

En un 2.4% de los casos no es posible determinarlo, pues los alumnos no argumentan su respuesta.

- También se observa que el 16.8% de los alumnos presenta dificultades para determinar la decena más próxima a un número dado, evidenciando un conocimiento insuficiente en relación a los conceptos de valor relativo y de posición, y del redondeo de números hacia la parte de su valor más cercano.

  La mayoría de los 24 alumnos que no logran identificar correctamente ninguna de las decenas más próximas a los números dados evidencian el uso de un criterio mecánico de aproximación y errores conceptuales en relación a los conceptos de valor relativo y de posición, dando explicaciones del tipo: *“No pasa del 5 si fuese 45 la decena próxima sería 5"”* (A.1)*; “La unidad es mayor que 5 por tanto 4"* (A.7)*; “Porque es 4*10=40 la más próxima, 43 se acerca a 40 pero la decena es sólo 4”* (A.51). Sus respuestas también pueden aceptar como decenas más próximas los números 43, 36, 68 y 65 soluciones del tipo: “4, 4, 7 y 7” (A.1), “20, 10, 30 y 30” (A.18) “4, 3, 6 y 6” (A.101); entre otras. Los 10 alumnos que identifican 2 o 3 de las decenas más próximas basan sus respuestas en el análisis de la proximidad del número dado, evidenciando el manejo de conceptos erróneos, confundiendo en la mayoría de los casos el valor relativo con el de posición (*“No hay decena más próxima porque está en el medio entre 60 y 70”* (A.102); “*4 porque la unidad del número se aproxima más al 40 que al 50”* (A.151); *“7 porque sus unidades (5) están más cerca del 70 que del 60”* (A.153).

En la Tabla 7, recogemos el tipo de repuesta que los futuros maestros dan a la tarea propuesta –tipo de solución matemática y explicación que justifica el procedimiento– y el número de respuestas. En la Tabla 8, se establecen las 6 categorías de conocimiento que emergen de las respuestas relacionadas con el valor relativo y de posición y con el conocimiento de otros aspectos involucrados en la pregunta, como son el redondeo de números hacia la parte del valor más cercano y contar hacia delante y hacia atrás en las partes del valor posición. Dichas categorías son:

- No se puede determinar
- **Sin conocimiento**
- **Conocimiento insuficiente**
- **Sólo evidencia conocimiento procedimental**
- **Conocimiento incompleto**
- **Conocimiento completo**

La Tabla 8 recoge las 6 categorías junto con su descripción, su frecuencia y ejemplos de algunos datos incluidos en cada una de ellas para ilustrarlas.

Tabla 8: Categorías de conocimiento sobre el valor relativo y de posición

Categoría	Detalle	Frecuencia	Ejemplo
(1) No se puede determinar	Cuando los alumnos no fundamentan sus respuestas y no contestan la pregunta.	1 (0.5%)	
(2) Sin conocimiento	Cuando no identifican: • ninguna de las decenas más próximas, y utilizan un criterio mecánico de redondeo (pasa o no de 5); • ninguna de las decenas más próximas y analizan la proximidad de la unidad del número dado, evidenciando en sus soluciones y/o explicaciones falta de conocimiento y conceptos erróneos; o • más de 2 decenas correctas, evidenciando en sus explicaciones y soluciones falta de conocimiento y conceptos erróneos.	25 (12.3%)	(A.173): La decena más próxima a 68 es: *“7. Redondeo”*. (A.189): La decena más próxima a 68 es: “68,1”

(3) Conocimiento insuficiente	Cuando identifican: • 2 de las 5 decenas más próximas analizando la proximidad de la unidad del número dado evidenciando el manejo de conceptos erróneos; • 2 de las 5 decenas más próximas utilizando un procedimiento mecánico de redondeo que parece no tener un fundamento conceptual; • 3 de las 5 decenas más próximas y evidencian el manejo de conceptos erróneos.	9 (4.4%)	(A.1): *“No pasa del 5 si fuese 45 la decena próxima sería 5”*. (A.102), *“No hay decena más próxima porque está en el medio entre 60 y 70”*.
(4) Sólo evidencia conocimiento procedimental	Cuando identifican 4 o 5 decenas correctamente y no es posible determinar si el éxito que obtienen en sus procedimientos tiene base conceptual. En este caso, se incluyen aquellos alumnos que: • no fundamentan sus respuestas, o • siguen un procedimiento mecánico de trasformación.	70 (34.5%)	(A.10): “6>5”. (A.57): *“A partir de 5 (con este incluido) se redondea para arriba”*.
(5) Conocimiento incompleto	Cuando identifican 4 de las 5 decenas correctamente, en base al análisis de la proximidad de la unidad del número dado, pero no reconocen que tanto el 60 como el 70 son las decenas más próximas a 65 y que no es necesario elegir una de las dos.	45 (22.2%)	(A.12): *“Está igual de cerca para ambos, pero siempre le hecho para la siguiente decena”* (A.132): *“Es una trampa, está en medio y no sabría decir a cuál pertenece”*
(6) Conocimiento completo	Cuando identifican correctamente todas las decenas más próximas a los números dados en base al análisis de la proximidad de la unidad del número dado.	53 (26.1%)	(A.2): “*Nos fijamos en la unidad 3 y como está más próxima del 0 es 40 y no 50”*". (A.75): *“Las 3 unidades de subida hasta 40 son menores que las 6 de bajada hasta 30”*.

4.1.3- Análisis y resultados de la pregunta 3: “determinar el número de centenas en un número dado y escribir un número en letras”

La pregunta 3 está formulada de la siguiente forma:

¿Cuántas centenas hay en el número 130.025? ¿Cómo se escribe este número en palabras?

Número de centenas que hay:	Se escribe:

Figura 5: Imagen de la pregunta 3 del bloque de preguntas que evalúa el conocimiento del SND

Esta pregunta tiene como objetivo evaluar el grado de conocimiento que tienen los alumnos sobre la lectura y escritura de un número en palabras, sobre el valor relativo y de posición. Como indicador de conocimiento conceptual se utiliza la aplicación y justificación de las tareas de procedimiento, solicitando a los alumnos escribir un número en palabras y determinar su número de centenas.

Las respuestas que los alumnos dan a las 2 preguntas propuestas se recogen en una planilla Excel (ver Anexo 3). Una vez recogidas las respuestas globales a la pregunta, organizamos las respuestas a la pregunta acerca del número de centenas en 130.025, según si lo identifican correctamente o no, y el tipo de solución matemática que dan a la tarea propuesta.

Se establecen las siguientes categorías de respuesta:

- No contesta, cuando no responde la pregunta.
- Evidencia falta de conocimiento, cuando no identifican correctamente el número de centenas, y evidencian el manejo de conceptos erróneos en las soluciones que dan como respuesta:

  (A.3): *“1110”*,

  (A.53): *“0,25”*,

(A.87): *"2"*,

(A.135): *"130 y 1/4"*,

o, confunden el valor relativo con el valor de posición señalando que hay 0 centenas.

- Identifica correctamente, cuando identifican con éxito el número de centenas, señalando que hay 1300.

Por otra parte, las respuestas de los alumnos a la pregunta relativa a la escritura en palabras del número 130.025, se organizan en tres categorías:

- Correcta, cuando estos escriben el numeral correctamente;
- Incorrecta, cuando estos escriben el numeral incorrectamente ya sea como consecuencia de un error generado por el bilingüismo o no:

  (A.110): *"Ciento treinta mil veinte - y - cinco"*,

  (A.111): *"Ciento treinta mil veinti-cinco"*,

  (A.143): *"Ciento treinta + mil veinticinco"*,

  (A.170): *"Ciento treinta mil, veinticinco"*;

- No entiende la pregunta, cuando en lugar de escribir el número en palabras explican otro tipo de situaciones o escriben en palabras el número de centenas que creen que hay, y no el numeral:

  (A.6): *"Mil trecientas"*,

  (A.32): *"Cien mil"*,

  (A.38): *"Se hace una división para saber cuántas hay"*,

  (A.68): "10*100".

En la Tabla 9 se organizan el número total de respuestas para cada categoría en relación a la identificación del número de centenas, junto con el tipo de solución que los futuros maestros dan a ésta tarea y las categorías que emergen del análisis de la escritura en palabras del número dado.

Tabla 9: Frecuencia del tipo de respuesta de los alumnos a las tareas propuestas

Tipo de respuesta		Escribir el número 13025 en palabras			
		Correcta	Incorrecta	No entiende la pregunta	Totales
Determinar el número de centenas	No contesta	8	10	0	18
	Evidencia falta de conocimiento	56	39	22	117
	Determina correctamente	41	7	20	68
Totales		105	56	42	203

De manera general en relación al número de centenas que tiene el número 130.025 vemos que:

- El 33.5% de los alumnos logra identificar exitosamente el número de centenas en un número dado, un 57.6% no logra hacerlo, mientras que un 8.9% de ellos no contesta.

- La falta de éxito en esta tarea, en 60 de las 117 respuestas (51.28%), parece radicar en una falta de conocimiento en relación a los conceptos de valor relativo y de posición y en relación a la estructura del SND. Así por ejemplo, vemos que indican que en el número 130.025 hay: "0 y 1 centenas" (A.33); "100000" (A.196); "4" (A.195). Mientras que en el resto de ocasiones (57 de 117), la falta de éxito se debe a un conocimiento parcial de estos conceptos, evidenciado en la confusión de los conceptos de valor relativo y de posición al señalar que hay 0 centenas. El 20.2% de los futuros maestros determina correctamente el número de centenas en 130.025 y escribe correctamente este número con palabras. Un 3.4% determinan correctamente el número de centenas, pero escribe incorrectamente el numeral en palabras, y un 9.9% lo determina correctamente y no escribe el número dado ya que no entiende la pregunta.

- De manera similar vemos que, el 19.2% de los alumnos que participan en este estudio no determina correctamente en número de centenas en el número dado, evidenciando una falta conocimiento en sus respuestas y tampoco lo escribe correctamente en palabras.

- Un 27.6% no lo determina correctamente, pero en cambio escribe correctamente el número en palabras.

- Un 10.8% no determina correctamente el número de centenas y no escribe el número dado en palabras pues no entiende la pregunta.

En lo que respecta exclusivamente a la escritura del número dado en palabras, vemos que:

- El 51.7% de los alumnos escribe correctamente el número solicitado.

- Un 27.6% escribe de manera incorrecta el número en palabras. Entre otras encontramos las respuestas: "Ciento treinta mil 25" (A.60); "Ciento treinta mil, veinticinco" (A.170); "Ciento treinta mil veinte cinco" (A.158).

- Un 20.6% de los alumnos no entiende la pregunta, ya que explica otras situaciones o escribe en palabras el número de centenas que creen que hay en el número dado. Serían ejemplos de estas respuestas: "Mil trecientas" (A.11); "Cero" (A.40); "Treinta mil" (A.93).

Analizadas las respuestas de los alumnos, se considera que esta pregunta resulta insuficiente para poder determinar el conocimiento que el estudiante para maestro tiene en relación a la lectura y escritura de un numeral en número y cifras. Este resultado inesperado sugiere que este aspecto básico del conocimiento del SND debe abordarse con mayor profundidad. Para ver si esta tendencia se mantiene, en futuras aplicaciones del cuestionario, resultaría necesario incluir algún otro numeral en cifras a escribir en palabras, o al menos un numeral escrito en palabras que deba escribirse en cifras.

Considerando el alto porcentaje de alumnos que no entiende la pregunta en la que se solicita escribir el número 130.025 en palabras (20.7%), y que los resultados obtenidos nos sugieren que la pregunta resulta insuficiente para poder determinar el conocimiento que el estudiante para maestro tiene en relación a la lectura y escritura de un numeral en número y cifras, consideramos necesario dejarla fuera del análisis en conjunto de los resultados generales. Así pues, sólo recogemos de la Tabla 9 el tipo de solución matemática que los futuros maestros dan al determinar el número de centenas en 130.025.

A partir de la Tabla 9, recogemos los 3 tipos de respuesta que dan los alumnos al determinar el número de centenas en el número dado (no contesta, evidencia falta de conocimiento y contesta correctamente). Al ser una pregunta que sólo puede tener una respuesta correcta, consideramos estos tipos de respuesta como el nivel de conocimiento en relación al redondeo de números hacia la parte del valor más cercano y sobre el valor relativo y de posición.

De esta forma, las categorías de conocimiento en relación al redondeo de números para la parte del valor más cercano y sobre el valor relativo y de posición son:

- No contesta,
- **Evidencia falta de conocimiento**
- **Contesta correctamente**.

La Tabla 10 recoge las 3 categorías junto con su descripción, su frecuencia y ejemplos de algunos datos incluidos en cada una de ellas para ilustrarlas.

Tabla 10: Categorías de conocimiento sobre el valor relativo y de posición

Categoría	Detalle	Frecuencia	Ejemplo
(1) No se puede determinar	Cuando los alumnos no responden la pregunta.	18 (8.9%)	
(2) Evidencia falta de conocimiento	Cuando no identifican correctamente el número de centenas, y evidencian el manejo de conceptos erróneos.	117 (57.6%)	(A.40): “0” (A.81): “13”
(3) Conocimiento completo	Cuando identifican exitosamente el número de centenas.	68 (33.5%)	“1300” (A.75) (A.141)

4.1.4- Análisis y resultados de la pregunta 4: “identificar múltiples descomposiciones”

La pregunta 4 está formulada de la siguiente forma:

¿Cuál (es) de las siguientes descomposiciones corresponde (n) al número 342? Enciérrala (s) en un círculo.

a) 3C + 4D + 2U
b) 30D + 42U
c) 2C + 14D + 2U
d) 1C + 2D + 42U
e) 34D + 2U

Figura 6: Imagen de la pregunta 4 del bloque de preguntas que evalúa el conocimiento del SND

Esta pregunta tiene como objetivo evaluar el grado de conocimiento que tienen los alumnos de las representaciones equivalentes de un mismo número, mediante la evaluación del conocimiento de los principios generales. Como indicador de conocimiento conceptual se utiliza la evaluación de tareas de ejemplo, solicitando a los alumnos que determinen cuál (o cuáles) de las descomposiciones corresponden a un número dado.

Las respuestas de los alumnos participantes a la tarea propuesta se recogen en una planilla Excel, en la cual se indica, alumno por alumno, la(s) descomposición(es) que identifica (ver Anexo 4). Una vez recogidas todas las respuestas, se organizan en la Tabla 10 según el número y el tipo de descomposiciones identificadas.

Tabla 11: Frecuencia del número descomposiciones correctas identificadas por tipo

Nº identificadas	Frecuencia por tipo de descomposición	Totales
No contesta	*	4
1 de 4	92A, 2B , 2E y 4AD	100
2 de 4	4AB, 11AE y 2AC	17
3 de 4	25ABE y 4ACE	29
4 de 4	53ABCE	53
Totales		203

A partir de la Tabla 11 y de las respuestas de los alumnos, se observa que:

- Sólo el 26.1% de los estudiantes identifican correctamente las 4 descomposiciones, siendo capaces de descodificar los números aunque no se corresponda su valor relativo con el valor de posición.

- Un 14.3% de los estudiantes identifican 3 descomposiciones. Estos alumnos reconocen mayoritariamente las opciones 3C + 4D + 2U y 34D + 2U, que son visualmente muy similares. Sin embargo, sus siguientes elecciones parecen variar en función de si aceptan o no como válidas las opciones que no expresan el numeral en términos de centenas, decenas y unidades, que son menos similares entre sí. Esto los lleva esencialmente a elegir como tercera opción 30D + 42U, pero a rechazar la idea de expresar el numeral en términos de las centenas, decenas y unidades en torno a otros valores que no se correspondan con el dígito que está en el valor de posición (2C + 14D + 2U). De esta forma, evidencian un conocimiento incompleto en relación a la composición, descomposición, combinación de cantidades estructuradas, la estructura del SND y los conceptos de valor relativo y de posición.

- Un 57.6% de los futuros maestros presentan serias dificultades para reconocer múltiples descomposiciones de un mismo número, no logrando identificar más de 2 descomposiciones. Estos alumnos descodifican los números del valor de posición en su estricto orden, rechazando la idea de expresar centenas, decenas y unidades en torno a otros valores que no se correspondan con el dígito que está en el valor de posición. De esta forma, evidencian una falta de conocimiento o un conocimiento insuficiente en relación a las representaciones equivalentes de un mismo número mediante el uso de cantidades estructuradas, y en relación a la estructura del SND y los conceptos de valor relativo y de posición.

- Los 17 alumnos que identifican 2 descomposiciones, eligen la descomposición del número que se presenta en su formato más habitual (3C + 2C + 4U), eligiendo como segunda opción alguna de las descomposiciones que no expresan el numeral en términos de centenas, decenas y unidades, eligiendo 30D + 42U ó 34D + 2U.

- Los 100 alumnos que identifican 1 descomposición, en su mayoría (96 de 100) no son capaces de identificar descomposiciones que se presenten en un formato distinto al más habitual (de la forma 3C + 2D + 4U), y en algunas ocasiones (4 de 100) también identifican la alternativa incorrecta como descomposición del número 342.

Recogemos de la Tabla 11 el número de descomposiciones identificadas y el análisis realizado en base al tipo de descomposiciones correctas que éstos identifican. A partir de ello, se establecen 4 categorías de conocimiento emergentes sobre las representaciones equivalentes de un mismo número y en relación a otros aspectos involucrados en la pregunta, como son el conocimiento de la composición, descomposición, combinación, trasformación y comparación de cantidades estructuradas, la estructura del SND, y del valor relativo y de posición. Dichas categorías son:

- No se puede determinar
- **Conocimiento insuficiente**
- **Conocimiento incompleto**
- **Conocimiento completo**

La Tabla 12 recoge las 4 categorías junto con su descripción, la frecuencia y ejemplos de algunos datos incluidos en cada una de ellas para ilustrarlas.

Tabla 12. Categorías de conocimiento sobre las representaciones equivalentes de un mismo número

Categoría	Detalle	Frecuencia	Ejemplo
(1) No se puede determinar	Cuando los alumnos no responden la pregunta.	4 (2.0%)	
(2) Conocimiento insuficiente	Cuando no identifican más de 2 descomposiciones: • identifican la descomposición que se presenta en su formato más habitual y • alguna de las descomposiciones que no expresan el numeral en términos de centenas, decenas y unidades, en torno a otros valores que no se correspondan con el dígito que está en el valor de posición. • identifican la descomposición incorrecta y alguna otra.	117 (57.6%)	(A.5): 3C + 2C + 4U. (A.61): 3C + 2C + 4U; 34D + 2U.
(3) Conocimiento incompleto	Cuando identifican 3 de las 4 descomposiciones, rechazando	29 (14.3%)	3C + 4D + 2U;

	en la mayoría de los casos la idea de expresar centenas, decenas y unidades en torno a otros valores que no se correspondan con el dígito que está en el valor de posición.		34D + 2U; 30D + 42U. (A.1) (A.189)
(4) Conocimiento completo	Cuando identifican con éxito todas las descomposiciones del número dado.	53 (26.1%)	3C + 4D + 2U; 34D + 2U; 2C + 14D+ 2U; 30D + 42U. (A.18) (A.103)

4.2- Análisis relacional: caracterización del conocimiento inicial de los alumnos en relación al SND

A partir del análisis relacional de las categorías de conocimiento emergentes en los diferentes aspectos del conocimiento del SND evaluados en el cuestionario (ya presentados en los apartados del 4.1.1 al 4.1.4), caracterizamos el conocimiento inicial que poseen los estudiantes para maestro sobre el SND. Establecemos categorías generales de conocimiento sobre el SND, que emergen de éste análisis conjunto.

Comenzamos el análisis recogiendo y organizando alumno por alumno las distintas categorías de conocimiento en las que se sitúa cada alumno para cada una de las preguntas que evalúan distintos aspectos del conocimiento del SND. La Figura 7 muestra un extracto de la planilla que recoge para cada alumno las categorías de conocimiento en que se sitúa en las distintas preguntas propuestas.

Alumno	P.1_ transf.	P.2_ decenas	P.3_ centenas	P.4_ descop.
1	3	2	2	3
2	4	6	3	2
3	2	4	2	4
4	5	5	3	2
5	2	2	3	2
6	4	2	3	4
7	4	2	2	2
8	5	4	3	4
9	4	4	3	4
10	4	4	3	2
11	4	2	3	3
12	2	5	2	2
13	4	4	2	3
14	5	2	2	1
15	3	5	2	2
16	6	4	3	4
17	5	6	3	4
18	3	2	2	4
19	3	4	1	4
20	4	6	3	4
21	2	4	2	4
22	4	6	2	4
23	1	4	3	2
24	5	6	3	4
25	5	6	3	4
26	3	6	2	2
27	3	4	2	2
28	5	6	2	3

Leyenda				
Categ.	Pregunta			
	P1. Transf. cant. estruc.	P2. Identificar decenas	P3. Número centenas	P4. Ident. descomp.
1	No se puede determinar	No se puede determinar	No se puede determinar	No se puede determinar
2	Sin conocimiento	Sin conocimiento	Sin conocimiento	Insuficiente
3	Insuficiente	Insuficiente	Completo	Incompleto
4	Sólo ev. conoc. procedimental	Sólo ev. conoc. procedimental	*	Completo
5	Incompleto	Incompleto	*	*
6	Completo	Completo	*	*

*= No existe esta posibilidad

Figura 7: Extracto de la planilla que recoge las categorías de conocimiento en las preguntas propuestas

Una vez recogidas y organizadas todas las categorías de conocimiento obtenidas en cada pregunta por alumno, recogemos en una planilla Excel el número de alumnos que se sitúa en cada una de las categorías de conocimiento. La Tabla 13 recoge el número de alumnos por categorías de conocimiento en las distintas preguntas del cuestionario.

Tabla 13: Número de alumnos por categorías de conocimiento en las preguntas propuestas

P4. Ident. Descomp.	P3. Núm. Centenas	P4. Ident. Decenas	P1. Transf. cantidades estructuradas						Totales
			1	2	3	4	5	6	
1	1	3	1	*	*	*	*	*	1
		5	*	1	*	*	*	*	1
	2	2	*	1	*	*	1	*	2
2	1	3	*	1	*	*	*	*	1
		4	1	*	*	1	*	*	2
		5	1	2	*	*	*	1	4
		6	*	*	*	1	1	*	2
	2	1	*	*	1	*	*	*	1
		2	1	3	1	4	1	1	11
		3	*	2	*	1	*	*	3
		4	4	9	3	8	2	2	28
		5	*	12	3	2	2	*	19
		6	1	6	2	3	1	*	13
	3	2	*	1	*	1	*	*	2
		4	1	*	1	4	1	3	10
		5	*	2	*	3	1	1	7
		6	1	1	2	8	1	1	14
3	1	4	2	1	*	*	*	*	3
	2	2	1	1	1	1	*	*	4
		4	1	1	1	4	1	*	8
		5	*	1	*	*	1	*	2
		6	*	1	1	2	1	*	5
	3	2	*	*	*	2	*	1	3
		5	*	*	1	1	*	*	2
		6	*	*	*	2	*	*	2
4	1	3	*	*	*	1	*	*	1
		4	*	*	*	1	*	*	1
		5	*	1	*	*	*	*	1
		6	*	*	*	1	*	*	1
	2	2	*	1	1	*	*	*	2
		3	*	*	*	1	*	*	1
		4	*	3	2	1	1	*	7
		5	1	*	*	1	3	*	5
		6	*	2	*	4	*	*	6
	3	2	*	*	*	1	*	*	1
		3	*	*	*	1	1	*	2
		4	*	*	1	3	2	5	11
		5	*	1	*	2	*	1	4
		6	*	*	*	3	5	2	10

A partir de la Tabla 13, hacemos un análisis relacional de las categorías de conocimiento emergentes en cada una de las preguntas evaluadas, considerando los distintos aspectos del conocimiento del SND en los que se centra cada pregunta y aquellos que son evaluados indirectamente. Partimos de los aspectos del conocimiento del SND evaluados en el cuestionario: (i) conocimiento de la estructura del SND, (ii) del valor relativo y de posición, (iii) del redondeo de números hacia la parte del valor más cercano,

(iv) reconocimiento y uso de representaciones equivalentes del mismo número, (v) componer, descomponer, combinar, comparar y transformar cantidades estructuradas.

A partir de ello, en un primer proceso emergente, se establecen 4 categorías de conocimiento conceptual del SND. Estas categorías, emergen de este análisis relacional y corresponden a 4 niveles de conocimiento de los distintos aspectos evaluados:

- sin conocimiento, de los aspectos evaluados o con alguna noción vaga de alguno de ellos;
- insuficiente, cuando evidencian un conocimiento mayoritariamente insuficiente en los aspectos analizados, con falta de conocimiento en algún otro;
- incompleto, cuando poseen un conocimiento incompleto en alguno de los aspectos analizados y un conocimiento adecuado en los restantes; y
- completo, cuando muestran un conocimiento completo en todos los aspectos evaluados.

No obstante, durante el proceso de categorización, encontramos participantes cuyas respuestas no encajan exactamente en estas categorías. Por ejemplo, encontramos alumnos que, al considerar todos los aspectos evaluados, evidencian un conocimiento insuficiente, aunque la distribución de este nivel de conocimiento en los distintos aspectos evaluados no se ajustaba completamente a la descripción de esta categoría. Este sería el caso de A.40 quien muestra conocimiento procedimental sobre el redondeo de números hacia la parte de su valor más cercano y sobre el valor relativo y de posición a la vez que muestra falta de conocimiento en todos los demás aspectos evaluados. También nos encontramos alumnos que evidencian un nivel de conocimiento más que insuficiente, pero menos que incompleto. En este grupo se situaría, por ejemplo A.108 quien muestra conocimiento incompleto sobre el redondeo y sobre el valor relativo y de posición y sólo conocimiento procedimental de las trasformaciones de cantidades estructuradas y conocimiento insuficiente en relación a los aspectos restantes.

Con el objetivo de hacer una interpretación más completa de los resultados obtenidos, decidimos refinar la descripción de nuestras categorías de conocimiento e incluir una nueva categoría de conocimiento intermedio entre el conocimiento insuficiente y el conocimiento incompleto, que denominamos conocimiento parcial.

Así, tras éste proceso emergente de refinamiento de las categorías iniciales, se establecen 5 **categorías de conocimiento conceptual del SND**:

- **Sin conocimiento del SND.**

  Esta categoría refleja por parte del alumno desconocimiento de los aspectos evaluados o que éste posee alguna noción vaga de alguno(s) de ellos.

  En esta categoría se incluyen aquellos alumnos que muestran falta de conocimiento de todos los aspectos que son evaluados en el cuestionario o en todas las preguntas que responden. Por ejemplo:

  (A.173) muestra falta de conocimiento de la estructura del SND, del valor relativo y de posición, del redondeo, y sobre la trasformación de cantidades estructuradas;

  (A.74) muestra falta de conocimiento en todos los aspectos del conocimiento del SND evaluados en el cuestionario.

  Se incluyen también aquellos alumnos que muestran alguna noción de alguno(s) de ellos y una falta de conocimiento de los restantes aspectos evaluados en el cuestionario y/o en las preguntas que responden. Por ejemplo:

  (A.60) muestra conocimiento insuficiente de la estructura del SND y en relación a la trasformación de cantidades estructuradas, y falta de conocimiento de todos los aspectos que son evaluados en el cuestionario.

- **Conocimiento insuficiente del SND**.

  En esta categoría se incluyen aquellos alumnos que muestran conocimiento sólo procedimental o incompleto en 2 de los aspectos evaluados y falta de conocimiento en los aspectos restantes. Por ejemplo:

  (A.151) muestra conocimiento incompleto sobre la trasformación de cantidades estructuradas y sobre la estructura del sistema, y falta de conocimiento en todos los demás aspectos evaluados.

Se incluyen también aquellos alumnos que muestran conocimiento sólo procedimental o incompleto en no más de 2 de los aspectos evaluados, conocimiento insuficiente y falta de conocimiento en los restantes. Por ejemplo:

(A.33) muestra conocimiento procedimental de la trasformación de cantidades estructuradas y del redondeo de números hacia la parte de su valor más cercano, conocimiento insuficiente de la estructura del sistema y sin conocimiento en los aspectos restantes.

Además, la categoría incluye aquellos alumnos con conocimiento completo en algún aspecto, sólo procedimental o incompleto en algún otro y sin conocimiento en los restantes o con un conocimiento insuficiente en alguno de ellos. Por ejemplo:

(A.133) muestra un conocimiento completo sobre el redondeo, conocimiento incompleto del valor relativo y de posición, y falta de conocimiento en todos los demás aspectos evaluados.

- **Conocimiento parcial del SND.**

En esta categoría caso se incluyen aquellos alumnos que muestran conocimiento incompleto y/o procedimental en 3 de los aspectos evaluados, y conocimiento insuficiente en los restantes. Por ejemplo:

(A.38) muestra conocimiento un conocimiento incompleto la estructura del sistema y sobre el valor relativo y de posición, conocimiento procedimental del redondeo, y conocimiento insuficiente en relación a los aspectos restantes.

Se incluyen también aquellos alumnos con conocimiento completo en alguno de los aspectos evaluados, conocimiento sólo procedimental o incompleto en otros y un conocimiento insuficiente y/o falta de conocimiento en los aspectos restantes. Por ejemplo:

(A.192) muestra conocimiento completo sobre el sobre el redondeo, conocimiento sólo procedimental en relación a la trasformación de cantidades estructuradas, conocimiento insuficiente del valor relativo y de posición y falta de conocimiento en todos los demás aspectos evaluados.

Se incluyen en esta categoría también aquellos alumnos con conocimiento completo en 2 aspectos, sólo procedimental o incompleto en algún otro y conocimiento insuficiente en los restantes. Por ejemplo:

(A.35) muestra conocimiento completo sobre las representaciones equivalentes de un número y en relación a la composición, descomposición, comparación y combinación de cantidades estructuradas, un conocimiento procedimental del redondeo y un conocimiento insuficiente en los aspectos restantes.

- **Conocimiento incompleto del SND.**

En esta categoría se incluyen aquellos alumnos que muestran un conocimiento insuficiente en no más de 2 de los aspectos evaluados y un conocimiento incompleto o procedimental en los restantes. Por ejemplo:

(A.202) muestra conocimiento insuficiente de la trasformación de cantidades estructuradas y un conocimiento incompleto en los demás aspectos evaluados;

o, un conocimiento incompleto y/o procedimental en todos los aspectos evaluados:

(A.137) muestra conocimiento procedimental del redondeo y la trasformación de cantidades estructuradas y un conocimiento incompleto en los demás aspectos evaluados.

La categoría incluye también aquellos alumnos con un conocimiento completo en 2 de los aspectos evaluados, un conocimiento sólo procedimental o incompleto en 2 o más aspectos y conocimiento insuficiente en los restantes. Por ejemplo:

(A.103) muestra conocimiento completo de las representaciones equivalentes de un mismo número y la composición, descomposición, combinación y comparación de cantidades estructuradas, un conocimiento incompleto de la estructura del sistema, del redondeo y del valor relativo y de posición, y falta de conocimiento sobre la transformación de cantidades estructuradas.

Entran también en esta categoría los alumnos con un conocimiento completo en alguno(os) de los aspectos evaluados y un conocimiento incompleto y/o sólo procedimental en los restantes. Por ejemplo:

(A.104) muestra conocimiento completo de la trasformación, reconocimiento de representaciones equivalentes de un mismo número y la composición, descomposición, combinación y comparación de cantidades estructuradas, conocimiento incompleto del redondeo y del valor relativo y de posición.

Finalmente, la categoría incluye también aquellos alumnos con conocimiento completo en 3 de los aspectos evaluados y un conocimiento insuficiente en los restantes. Por ejemplo:

(A.171) muestra conocimiento completo del redondeo, reconocimiento de representaciones equivalentes de un mismo número y la composición, descomposición, combinación y comparación de cantidades estructuradas, y conocimiento insuficiente de la estructura del sistema, del valor relativo y de posición, y de la trasformación de cantidades estructuradas.

- **Conocimiento completo del SND.**

  En esta categoría se incluyen aquellos alumnos que muestran un conocimiento completo en todos los aspectos evaluados. Este sería el caso, por ejemplo, de A.129.

  Se incluyen en esta categoría también aquellos alumnos que muestran conocimiento sólo procedimental en 1 o 2 de los aspectos evaluados y un conocimiento completo en los aspectos restantes. Por ejemplo:

  (A.16) muestra un conocimiento procedimental del redondeo y un conocimiento completo de los aspectos restantes.

  Incluimos a estos alumnos en esta categoría de conocimiento, debido a que no es posible determinar si el conocimiento procedimental que evidencian tiene o no una base conceptual.

El análisis en conjunto de las distintas categorías de conocimiento evidenciadas por los futuros maestros en los diferentes aspectos evaluados, sugiere que el 4.9% de los alumnos que participan en este estudio muestra falta de conocimiento de todos los aspectos que son evaluados o presentan alguna noción vaga en alguno de ellos, un 36.5% muestra un conocimiento insuficiente, un 25.1% un conocimiento parcial, un 26.1 conocimiento incompleto y un 7.4% un conocimiento completo. La Tabla 14 recoge la frecuencia absoluta y relativa de los alumnos que quedan incluidos en cada categoría.

Tabla 14: Frecuencia absoluta y relativa de los alumnos que quedan incluidos en cada categoría de conocimiento del SND

Categoría	Frecuencia absoluta	Frecuencia relativa
Sin conocimiento del SND	10	4.9%
Conocimiento insuficiente del SND	74	36.5%
Conocimiento parcial del SND	51	25.1%
Conocimiento incompleto del SND	53	26.1%
Conocimiento completo del SND	15	7.4%

Posteriormente recogemos una planilla Excel, la distribución de los alumnos incluidos en las 5 categorías de conocimiento del SND, según el conocimiento que muestran en las preguntas evaluadas.

P4. Ident. Descomp.	P3. Número centenas	P4. Ident. Decenas	P1. Transf. cantidades estructuradas						Totales
			1	2	3	4	5	6	
1	1	3	1 SC	*	*	*	*	*	1
		5	*	1 IS	*	*	*	*	1
	2	2	*	1 SC	*	*	1 IS	*	2
2	1	3	*	1 SC	*	*	*	*	1
		4	1 IS	*	*	1 IS	*	*	2
		5	1 IS	2 IS	*	*	*	1 IC	4
		6	*	*	*	1 IS	1 PC	*	2
	2	1	*	*	1 IS	*	*	*	1
		2	1 SC	3 SC	1 SC	4 IS	1 IS	1 IS	11
		3	*	2 SC	*	1 IS	*	*	3
		4	4 IS	9 IS	3 IS	8 IS	2 IS	2 PC	28
		5	*	12 IS	3 IS	2 PC	2 PC	*	19
		6	1 IS	6 IS	2 IS	3 PC	1 PC	*	13
	3	2	*	1 IS	*	1 IS	*	*	2
		4	1 IC	*	1 PC	4 IC	1 IC	3 IC	10

Leyenda				
Categ.	Pregunta			
	P1. Transf. cant. estruc.	P.4.Ident. decena	P3. Deter. centenas	P4. Rec. múltp.desc.
1	No se puede determinar	No se puede determinar	No se puede determinar	No se puede determinar
2	Sin conocimiento	Sin conocimiento	Sin conocimiento	Insuficiente
3	Insuficiente	Insuficiente	Completo	Incompleto
4	Sólo ev. conoc. procedimental	Sólo ev. conoc. Procedimental	*	Completo
5	Incompleto	Incompleto	*	*
6	Completo	Completo	*	*

Figura 8: Extracto de la planilla que recoge las 5 categorías de conocimiento del SND en las preguntas evaluadas

Entrando en el detalle del análisis realizado vemos que:

De los 10 alumnos que evidencian **falta de conocimiento del SND**:

- 2 de ellos muestran falta de conocimiento de la estructura del SND, del valor relativo y de posición, del redondeo y sobre la trasformación de cantidades estructuradas. No obstante, no es posible asegurar si poseen un nivel de conocimiento similar en relación a los aspectos restantes, como la composición, descomposición, combinación y comparación de cantidades estructuras, puesto que no responden a la pregunta que se centra en evaluar el reconocimiento de múltiples descomposiciones.

- 4 alumnos evidencian alguna noción del redondeo y de los conceptos de valor relativo y de posición, pero falta de conocimiento de todos los aspectos evaluados en el cuestionario y/o en las preguntas que responden. Mientras que 1 de ellos, evidencia alguna noción de la estructura del SND y en relación a la trasformación de cantidades estructuradas, pero falta de conocimiento en todos los aspectos evaluados en el cuestionario.

- 3 muestran falta de conocimiento en todos los aspectos del conocimiento del SND evaluados en el cuestionario.

De los 74 alumnos que muestran un **conocimiento insuficiente del SND:**

- 35 alumnos muestran un conocimiento sólo procedimental o incompleto en 2 de los aspectos evaluados y falta de conocimiento en los aspectos restantes.
  Específicamente, vemos que 29 de ellos muestran un conocimiento procedimental o incompleto sobre el redondeo de números hacia la parte de su valor más cercano y sobre el valor relativo y de posición y falta de conocimiento en todos los demás aspectos evaluados.

  Los 6 alumnos restantes, muestran un conocimiento procedimental o incompleto sobre la trasformación de cantidades estructuradas, y sobre la estructura del sistema, y falta de conocimiento en todos los demás aspectos evaluados.

- 31 muestran un conocimiento procedimental o incompleto en no más 2 de los aspectos evaluados, conocimiento insuficiente y falta de conocimiento en los restantes.

  En particular, 6 de ellos muestran un conocimiento procedimental del redondeo y un conocimiento procedimental o incompleto de la trasformación de cantidades estructuradas o del valor relativo y de posición y un conocimiento insuficiente o falta de conocimiento en los aspectos restantes.

  Por otra parte, 14 alumnos muestran un conocimiento incompleto o sólo procedimental de la trasformación de cantidades estructuradas y del redondeo, un conocimiento insuficiente del valor relativo y/o de posición de la estructura del sistema y falta de conocimiento en los demás aspectos evaluados.

  Además, 5 alumnos muestran un conocimiento incompleto sobre el sobre reconocimiento y uso de representaciones equivalentes del mismo número y en relación a la composición, descomposición, combinación y comparación de cantidades estructuradas, un conocimiento insuficiente sobre el valor relativo y de posición y falta de conocimiento en los demás aspectos evaluados.

  Los 6 alumnos restantes, muestran distintos tipos de conocimiento de los aspectos evaluados.

- Los 8 alumnos restantes muestran un conocimiento completo en algún aspecto, sólo procedimental o incompleto en otro y falta de conocimiento en los restantes. Estos muestran un conocimiento completo sobre el redondeo, conocimiento incompleto del valor relativo y de posición y falta de conocimiento en los demás aspectos evaluados.

De entre los 51 alumnos que muestran un **conocimiento parcial del SND**:

- 9 alumnos muestran un conocimiento completo y/o sólo procedimental en 3 de los aspectos evaluados y conocimiento insuficiente en los aspectos restantes.

  Específicamente vemos que, 2 de ellos muestran un conocimiento incompleto sobre el valor relativo y de posición, las representaciones equivalentes de un número y en relación a la composición, descomposición, comparación y combinación de cantidades estructuradas, y un conocimiento insuficiente en los aspectos restantes.

Por otra parte, 3 alumnos muestran un conocimiento incompleto sobre el redondeo y el valor relativo y de posición, un conocimiento sólo procedimental de la trasformación de cantidades estructuradas y conocimiento insuficiente en relación a los aspectos restantes.

Además, 3 alumnos muestran un conocimiento incompleto sobre las representaciones equivalentes de un número y en relación a la composición, descomposición, comparación y combinación de cantidades estructuradas, un conocimiento sólo procedimental sobre el redondeo y un conocimiento insuficiente en los aspectos restantes o con un conocimiento insuficiente del valor relativo y de posición.

El alumno restante muestra un conocimiento incompleto la estructura del sistema y valor relativo y de posición, un conocimiento sólo procedimental de redondeo y conocimiento insuficiente en relación a los aspectos restantes.

- 33 alumnos muestran un conocimiento completo en alguno de los aspectos evaluados, conocimiento procedimental o incompleto en otros, y conocimiento insuficiente y/o sin conocimiento en los restantes.

  En particular, 23 de ellos muestran un conocimiento completo sobre el redondeo y 10 lo muestran sobre la trasformación de cantidades estructuradas.

  Los alumnos que evidencian un conocimiento completo del redondeo muestran:

  - 9 de ellos un conocimiento incompleto del valor relativo y de posición, conocimiento sólo procedimental de la trasformación de cantidades estructuradas, y un conocimiento insuficiente o falta de conocimiento en los demás aspectos evaluados;
  - 4 de ellos muestran un conocimiento sólo procedimental o incompleto en relación a la trasformación de cantidades estructuradas, conocimiento insuficiente del valor relativo y de posición y falta de conocimiento en los demás aspectos evaluados;

- 2 alumnos ponen de manifiesto un conocimiento sólo procedimental de la trasformación de cantidades estructuradas y/o un conocimiento incompleto sobre las representaciones equivalentes de un número y composición, descomposición, combinación y comparación de cantidades estructuradas, y un conocimiento insuficiente en los aspectos restantes;

  y distintos tipos de conocimiento de los aspectos evaluados (8 alumnos).

Mientras que entre los alumnos que muestran un conocimiento completo de la trasformación de cantidades estructuradas,

- 8 alumnos evidencian un conocimiento incompleto del valor relativo y de posición y/o de la estructura del sistema, conocimiento sólo procedimental o incompleto sobre el redondeo, y un conocimiento insuficiente o falta de conocimiento en los demás aspectos evaluados; y
- los 2 alumnos restantes manifiestan un conocimiento incompleto sobre la estructura del sistema, del valor relativo y de posición, de las representaciones equivalentes de un número y sobre composición, descomposición, combinación y comparación de cantidades estructuradas y falta de conocimiento sobre el redondeo.

- 9 alumnos muestran un conocimiento completo en 2 de los aspectos evaluados, un conocimiento procedimental o incompleto en algún otro y un conocimiento insuficiente en los restantes.

  Específicamente, vemos que 7 de ellos muestra un conocimiento completo sobre las representaciones equivalentes de un número y en relación a la composición, descomposición, comparación y combinación de cantidades estructuradas, un conocimiento sólo procedimental sobre el redondeo y un conocimiento insuficiente en los aspectos restantes.

  Por otra parte, 2 de ellos muestran un conocimiento completo sobre las representaciones equivalentes de un número y en relación a la composición, descomposición, comparación y combinación de cantidades estructuradas, un conocimiento incompleto sobre la estructura del sistema o un conocimiento sólo procedimental de la trasformación de cantidades estructuradas y un conocimiento insuficiente en los aspectos restantes.

De los 53 alumnos que muestran un **conocimiento incompleto del SND**:

- 13 alumnos muestran un conocimiento insuficiente en no más de 2 de los aspectos evaluados y un conocimiento incompleto o procedimental en los restantes.

  Específicamente, vemos que 6 de ellos, muestran un conocimiento incompleto de la estructura del sistema, del valor relativo y de posición y conocimiento sólo procedimental y/o incompleto del redondeo y en relación a la trasformación de cantidades estructuradas y conocimiento insuficiente del reconocimiento de representaciones equivalentes de un mismo número y la composición, descomposición, combinación y comparación de cantidades estructuradas.

  Otros 6 alumnos muestran un conocimiento incompleto del reconocimiento de representaciones equivalentes de un mismo número y la composición, descomposición, combinación y comparación de cantidades estructuradas, del valor relativo y de posición, procedimental de la transformación de cantidades estructuradas y conocimiento insuficiente de la estructura del sistema o del redondeo.

  El alumno restante muestra un conocimiento insuficiente de la transformación de cantidades estructuradas y un conocimiento incompleto en los demás aspectos evaluados.

- 5 alumnos muestran un conocimiento incompleto y/o procedimental en todos los aspectos evaluados.

  3 de ellos muestran un conocimiento incompleto en todos los aspectos evaluados o en los que responde la pregunta.

  Los 2 alumnos restantes muestran un conocimiento incompleto en todos los aspectos evaluados y un conocimiento sólo procedimental de la trasformación de cantidades estructuradas y/o del redondeo.

- 7 alumnos muestran un conocimiento completo en 2 de los aspectos evaluados, un conocimiento procedimental o incompleto en 2 o más y conocimiento insuficiente en los restantes.

  En particular, 6 de ellos muestran un conocimiento completo de las representaciones equivalentes de un mismo número y de la composición, descomposición, combinación y comparación de cantidades estructuradas, un conocimiento incompleto de la estructura del sistema y conocimiento sólo procedimental de la transformación de cantidades estructuradas y falta de conocimiento sobre el redondeo; o conocimiento incompleto del valor relativo y de posición y del redondeo, y falta de conocimiento o un conocimiento insuficiente sobre la transformación de cantidades estructuradas.

  El alumno restante, muestra un conocimiento completo del redondeo y la transformación de cantidades estructuradas, conocimiento incompleto de la estructura del sistema y del valor relativo y de posición, y conocimiento insuficiente en los aspectos restantes.

- 26 alumnos muestran un conocimiento completo en alguno(os) de los aspectos evaluados y un conocimiento incompleto y/o procedimental en los restantes.

  En particular, 25 de ellos muestran un conocimiento completo del redondeo y/o del reconocimiento de representaciones equivalentes de un mismo número y de la composición, descomposición, combinación y comparación de cantidades estructuradas, conocimiento sólo procedimental o incompleto de la trasformación de cantidades estructuradas y conocimiento incompleto en todos los restantes aspectos.
  1 alumno muestra conocimiento completo de la transformación, reconocimiento de representaciones equivalentes de un mismo número y la composición, descomposición, combinación y comparación de cantidades estructuradas y conocimiento incompleto del redondeo y del valor relativo y de posición.

- 2 alumnos muestran un conocimiento completo en 3 de los aspectos evaluados Conocimiento completo del redondeo, reconocimiento de representaciones equivalentes de un mismo número y la composición, descomposición, combinación y comparación de cantidades estructuradas y un conocimiento insuficiente en los restantes.

De los 15 alumnos que muestran un **conocimiento completo del SND**:

- Sólo 2 alumnos muestran un conocimiento completo en todos los aspectos evaluados.
- 13 alumnos muestran un completo en todos los aspectos evaluados y un conocimiento sólo procedimental del redondeo y/o la transformación de cantidades estructuradas, que no es posible determinar si tiene o no una base conceptual.

CAPÍTULO V

ANÁLISIS Y RESULTADOS: SIGNIFICADOS DE LA ADICIÓN Y LA SUSTRACCIÓN

En este capítulo se presenta el análisis de las respuestas y las justificaciones dadas por 203 estudiantes para maestro a las preguntas del cuestionario que evalúan diferentes aspectos del conocimiento del significado atribuido a la adición y la sustracción.

En concreto, se presentan:

- los resultados y el análisis de cada una de las 5 preguntas que en su conjunto evalúan diferentes aspectos del conocimiento del significado atribuido a la adición y la sustracción, y
- el análisis relacional, es decir, el análisis de estas 5 preguntas en conjunto del cual emergen los niveles de conocimiento matemático inicial de los alumnos en relación a la adición y la sustracción.

Una vez más, el análisis de los datos se desarrolla con un enfoque cualitativo, desde una perspectiva interpretativa. Se inicia el análisis organizando las respuestas de los futuros maestros en una planilla Excel en función del aspecto que aborda la pregunta en relación al conocimiento de los significados de la adición y la sustracción, el tipo de conocimiento conceptual que involucra y sus indicadores.

Para determinar el conocimiento sobre los aspectos evaluados en cada pregunta:

- se recogen las respuestas dadas por los alumnos a cada una de las 5 preguntas propuestas,
- se analizan las explicaciones y, cuando corresponde, se analizan también los enunciados que los alumnos dan a las tareas propuestas, y
- se identifican las concepciones emergentes sobre el conocimiento de los distintos aspectos en los que se centra cada pregunta.

En este punto, es necesario establecer que nos referimos a las concepciones entendidas como el conjunto de representaciones internas evocadas por un concepto que describen la naturaleza de los objetos matemáticos y de las diferentes imágenes de éstos en la mente (Martínez y Gorgorió, 2004). Estas concepciones permiten el acceso a los fundamentos conceptuales que poseen los estudiantes para maestro sobre un determinado concepto matemático (ver por ejemplo en Chapman, 2007; Thanheiser, 2009; 2010, entre otros).

Para hacer el análisis relacional y caracterizar el conocimiento matemático inicial de los alumnos en relación a la adición y la sustracción:

- se recogen las concepciones emergentes en los distintos aspectos del conocimiento de la adición y la sustracción evaluados en cada pregunta,
- se organizan en una planilla Excel las distintas concepciones que emergen en cada una de las preguntas recogidas por alumno,
- se recogen en una planilla Excel el número de alumnos que se sitúa en cada uno de los tipos de concepciones que emergen de los distintos aspectos evaluados,
- se realiza un análisis en conjunto de los distintos tipos de concepciones emergentes en cada una de las preguntas y
- se establecen categorías emergentes de conocimiento inicial de los alumnos en relación a la adición y la sustracción en base a todos los aspectos evaluados.

5.1- Análisis y resultados por pregunta

Para ejemplificar el proceso de análisis realizado para cada una de las 4 preguntas que evalúan diferentes aspectos del conocimiento del significado atribuido a la adición y la sustracción del cuestionario, presentamos en detalle el análisis y los resultados de la pregunta 1. Dado que las preguntas restantes siguen un proceso de análisis similar, no se presenta todo el detalle de su análisis; no obstante se exponen los aspectos más relevantes al analizar cada una de ellas. En los anexos se adjuntan los extractos de las planillas de análisis de las preguntas 2, 3, 4 y 5 con las respuestas de los alumnos que no se incluyen en el cuerpo de la sección.

5.1.1- Análisis y resultados de la pregunta 1: “explica que entiendes por sumar y por restar”

La pregunta 1 está formulada de la siguiente forma:

Explica qué entiendes por:

a) SUMAR

b) RESTAR

Figura 9: Pregunta 1 del bloque de preguntas que evalúan el conocimiento de los significados y la relación entre la adición y la sustracción

Ésta tiene como objetivo evaluar el grado de conocimiento de los significados de la adición y la sustracción que tienen los alumnos, a través del conocimiento de los principios que subyacen a los procedimientos. Se utiliza como indicador de conocimiento conceptual la explicación de tareas de concepto al solicitar a los alumnos que expliquen qué entienden por sumar y por restar.

Se inicia el análisis recogiendo las respuestas a la tarea propuesta en una planilla Excel. Para cada alumno se anotan paralelamente las explicaciones que dan acerca de lo que significa sumar y restar. La Figura 10 contiene un Extracto de la planilla que recoge las respuestas de los maestros a la pregunta 1.

Explicar que es sumar y restar		
Alumno	**Sumar**	**Restar**
27	"Juntar, agregar"	"Quitar"
28	"Añadir elementos a lo que sea"	"Quitar elementos a lo que sea"
29	"Poner juntos los números para conseguir un total"	"Quitar factores de un número inicial"
30	"Añadir algo a algo a una cosa que ya tienes"	"Quitar algo a alguna cosa"
31	"Hacer el recuento del total de los números que haya"	"Buscar la diferencia entre dos números"
32	"Aumentar en x unidades"	"Disminuir en x unidades"
33	"Unir dos o más elementos"	"Quitar una parte a un elemento"
34	"Añadir a un número una cantidad positiva"	"Quitar tantas unidades como indique a un número"
35	"Añadir unidades a otro número"	"Quitar unidades a otro número"
36	"Añadir a una cantidad determinada otra cantidad diversa y determinar cuánto resulta"	"Quitar una cantidad determinada a otra cantidad y determinar su resultado final"
37	"Añadir una o más cosas a otra (o más cosas)"	"Quitar una cosa (o más) de un conjunto de cosas"
38	"Añadir algo más a algo"	"Quitar algo a algo"
39	"A un número o valor añadir otros"	"A un número o valor restarle otros"
40	"Agregar un número a otro"	"Quitar una cantidad a otra, pero en algunos casos tambien puede ser sumar una cantidad a alguna otra"
41	"Añadir "	"Quitar"
42	"Agregar valores a los existentes"	"Quitar valores a los existentes"
43	"Añadir números, cantidades a una cifra"	"Quitar números, cantidades a una cifra"
44	"Añadir y juntar"	"Quitar"
45	"Añadir una cantidad a un número"	"Quitar una cantidad a otro número"
46	"Agregar"	"Quitar"
47	"Añadir elementos"	"Quitar elementos"
48	"Tener una cantidad de cosas, objetos, etc, a la cual tienes que añadirle más"	"De una cantidad, objeto, etc, hay que quitarle cierta cantidad"
49	"Aumentar, añadir"	"Quitar, diferencia"
50	"Adición de dos o más números"	"Sustracción de dos o mas números"
51	"Añadir dos o mas números a un mismo paquete"	"De un paquete quitar"
52	"Juntar dos valores diferentes o más y convertirlo en un valor unico"	"Quitarle a un valor la cantidad que tu quieras"
53	"Contar en positivo de número menor a una mayor"	"Contar en negativo de número mayor a una menor"
54	"Agregas una cantidad a otra y el resultado es más grande que el inicial"	"Quitas una cantidad de un número y el resultado es inferior al inicial"
55	"Agregar más cantidad a un número que se tenía"	"Quitar más cantidad a un número que se tenía"
56	"Añadir, dar"	"Quitar, perder"
57	"Añadir unidades a una cifra"	"Quitar unidades a una cifra"
58	"Añadir unidades a un número, contar para delante)"	"Quitar unidades a un número, contar para atrás"
59	"Agregar elementos a otros elemntos que ya habían"	"Quitar elemntos a otros que ya habían"
60	"Agregar uno o más elementos a otros elementos"	"Quitar uno o más elementos a otros elementos"
61	"Es una acción matemática que se puede aplicar en cualquier contexto y que consiste en añadir una serie de números"	"Es una acción matemática que consiste en quitar números"

Figura 10: Extracto de la planilla que recoge las respuestas de los maestros a la pregunta 1.

Las interpretaciones de los alumnos acerca de lo que es sumar y restar se organizan se organizan en 6 categorías:

- Interpretación basada en la acción, cuando las operaciones (suma y resta) sólo son interpretadas en base a la acción de añadir, agregar, quitar y/o extraer un número, una cifra, una cantidad, un elemento, un objeto inicial o algo no especificado,

  Las explicaciones dadas para el caso de la suma son del tipo:

  (A. 12): "*Añadir una cantidad a otra*",

(A. 22): "*Añadir"*.

Y, para el caso de la resta:

(A. 88): "*Acción de quitar"*,

(A. 185): "*Quitar una cifra a otra"*

- Interpretación basada en la acción y palabras clave, cuando las operaciones sólo son interpretadas en base a la acción y en base a verbos que se asocian con palabras clave para estas operaciones, como los verbos regalar o perder.

  En esta categoría se incluyen explicaciones para la suma del tipo:

  (A. 56): "*Añadir, dar"*,

  (A. 89): *"Agregar, comprar, aumentar el número en alguna cosa"*.

  Y, para el caso de la resta:

  (A. 89): *"Quitar, regalar, dar alguna cosa"*,

  (A.125): *"Es robar, quitar un número de cosas a otro número, para saber cuántas cosas quedan al final"*

- Interpretación de la suma y la resta como operación, cuando las operaciones son interpretadas como operaciones matemáticas que tienen como finalidad obtener un resultado mayor/menor a las cantidades con las que se opera.

  En esta categoría se incluyen explicaciones sobre lo que es sumar del tipo:

  (A. 65): *"Operación matemática que representa agregar alguna cosa a otra",*

  (A.109): *"Es el cálculo matemático en el que consigues un número mayor que el anterior"*.

  En el caso de la resta:

  (A.75): "*Es esta operación se quitan unidades de una cantidad inicial para dar como resultado una sola cifra*", (A.108): “*Operación que consiste en obtener un resultado inferior a los números con los que realizamos el cálculo*”;

- Interpretación basada en los axiomas de Peano, cuando estas operaciones son interpretadas en términos de contar hacia delante o hacia atrás, con explicaciones para la suma del tipo:

  (A.31): *“Hacer el recuento del total de los números que haya”,*

  (A.53): *“Contar en positivo de número menor a una mayor”*.

  En el caso de la resta:

  (A.53): *“Contar en negativo de número mayor a una menor”*,

  (A.58) *“...contar para atrás”*;

- Interpretación basada en la distancia, cuando la resta es interpretada en términos de la distancia entre dos números, con una explicación del tipo:

  (A.176): *“Saber la distancia que hay entre dos números o la diferencia”*;

- No se puede determinar, cuando los alumnos no responden la pregunta o cuando las explicaciones dadas no explicitan con claridad la interpretación asociada a la operación, al señalar, por ejemplo:

  (A.17): *“Adición de números”*,

  (A.110): *“Sustracción de números”*,

  (A.155): “*La adición de dos cantidades expresadas en unas determinadas unidades”*.

La Tabla 15 recoge las categorías que organizan la distribución de los 203 alumnos según el tipo de interpretación que dan a cada una de las operaciones (suma y resta).

Tabla 15: Frecuencia del tipo de interpretación de los alumnos de la suma y la resta

Interpretación	Suma	Resta
Basada en la acción	163 (80.3%)	165 (81.3%)
Basada en la acción y en palabras clave	5 (2.5%)	5 (2.5%)
Como operación	21 (10.3%)	13 (6.4%)
Basada en los Axiomas de Peano	4 (1.9%)	2 (1%)
Distancia y basada en la acción	*	1 (0.5%)
No se puede determinar	10 (5%)	17 (8.3%)
Totales	203 (100%)	203 (100%)

En base a las interpretaciones que los alumnos hacen sobre estas operaciones, recogidas en la Tabla 15, y a la distinción de la suma y resta basada en la acción o como objeto matemático (Cañadas y Castro, 2011; Maza, 2001) emergen distintos tipos de concepciones que los alumnos muestran sobre el significado de estas operaciones:

- **Concepciones basadas en la acción**

  Un 80.3% de los alumnos participantes en este estudio, muestra una concepción de la suma y la resta que se basa exclusivamente en la acción sobre un número, una cifra, una cantidad, un elemento, un objeto inicial o sin especificar.

  En el 79.2% de los casos para la suma y el 90.9% para la resta, el significado basado en la acción tiene una concepción unitaria. En ésta concepción unitaria, la suma y la resta son definidas sólo en base a las acciones de añadir, aumentar, incrementar, disminuir y/o quitar, con explicaciones para la suma del tipo: *"Añadir una cantidad a otra"* (A.2), *"Aumentar, añadir una cantidad"* (A.19), y para la resta como, por ejemplo: *"Quitar números"* (A.6), *"Quitar algo, disminuir el número"* (A.99).

  En otros casos, 11% para la suma y un 6.7% para la resta, este significado basado en la acción también tiene una concepción binaria (. Cuando la concepción es binaria, las operaciones están definidas en base a las acciones de agrupar, juntar, separar y/o la idea de comparar, señalando, por ejemplo, que sumar es: "*Agrupar diferentes números*" (A.20); *"Agrupar el valor de distintos números de manera que pueda obtenerse una única cantidad final"* (A.106), entre otras; y restar es: *"Separar"* (A.4), *"Separar una parte de un todo"* (A.139), entre otros.

Sólo en algunas ocasiones, en un 9.8% de los casos para la suma y un 2.4% para la resta, esta interpretación evidencia ambas concepciones al dar explicaciones para la suma del tipo: "*Juntar, agregar cosas a algo que ya había*" (A.10), *"Añadir o unir a un conjunto de unidades otro conjunto de unidades, creando un grupo mayor"* (A.69); y para la resta: *"Disminuir, diferencia entre dos números"* (A.159),*"Hacer la diferencia"*(A.196).

Un 2.5% de alumnos definen estas operaciones en base a las acciones de añadir y quitar, pero también en base a acciones asociadas con palabras clave para estas operaciones como, regalar, tirar, comprar, perder o robar. Estos alumnos señalan por ejemplo que sumar es: "*Añadir, regalar, dar más, juntar*" (A.180), "*Añadir, o comprar algo*" (A.125)*"*; mientras que restar consiste en*: "Quitar, perder"* (A.56), *"Quitar, tirar, regalar"* (A.180).

- **Concepciones basadas en otros significados**

Un 10.3% de los alumnos interpreta la suma como una operación matemática que implica agregar o añadir números, cantidades o elementos a otros para obtener un total. Estos alumnos señalan por ejemplo que la suma es una: *"Operación matemática que consiste en añadir unidades para obtener un total"* (A.146), o, una *"Operación matemática que utilizamos para hallar el resultado de añadir diferentes elementos"* (A.157).

De igual forma, vemos que 6.4% de los alumnos interpreta la resta como una operación matemática en la cual quitas o extraes números, elementos o cantidades para obtener un resultado menor que el inicial, señalando por ejemplo que restar: *"Es la operación matemática en la cual extraemos unidades a un número"* (A.126), o, es la *"Operación matemática en la que le sacas x a y"* (A.117).

Menos del 2% de los alumnos interpreta estas operaciones en otro sentido. Para el caso de la suma encontramos 4 alumnos que interpretan la suma en base a los axiomas de Peano, señalando por ejemplo que sumar es: *"Hacer el recuento del total de los números que haya"* (A.31), *"Contar diferentes cifras hasta llegar al resultado que dan entre todas"* (A.193)

Para el caso de la resta, hay sólo 2 alumnos con esta idea: *"Contar en negativo de número mayor a una menor"* (A.53); *"...contar para atrás"* (A.58).

También encontramos 1 alumno que interpreta la resta en términos de distancia entre dos números, al señalar que restar es: *"Saber la distancia que hay entre dos números o la diferencia"* (A.176).

5.1.2- Análisis y resultados de la pregunta 2: "organizar verbos asociados con sumar"

La pregunta 2 está formulada de la siguiente forma:

¿Cuál o cuáles de los siguientes verbos **asocias** con sumar? Márcalo (s) con una cruz. Luego organiza sólo el o los verbos que **asocias** con sumar en una columna vertical escribiendo y enumerando primero los verbos que te parezcan **claramente de suma**.

a) Juntar	f) Recibir
b) Agregar	g) Combinar
c) Unir	h) Obtener
d) Ganar	i) Aumentar
e) Incrementar	j) Añadir

Figura 11: Pregunta 2 del bloque de preguntas que evalúan el conocimiento de los significados y la relación entre la adición y la sustracción

Esta pregunta tiene como objetivo evaluar el conocimiento que poseen los alumnos en relación al significado de la suma basado en la acción sobre un número o un objeto inicial. Se utiliza como indicador de conocimiento conceptual la evaluación de tareas de ejemplo, solicitando a los alumnos organizar una lista de verbos que suelen relacionarse con la suma. Esta lista incluía verbos asociados con una concepción unitaria, como los verbos incrementar, añadir y agregar; una concepción binaria, como los de juntar, unir o combinar; y verbos que se asocian claramente con palabras clave, como los verbos ganar, recibir y obtener. Los alumnos debían organizar estos verbos teniendo en cuenta si se asocian claramente con suma, si son verbos que no se asocian con suma, o si son verbos que podrían asociarse o no con una suma.

Se inicia el análisis recogiendo las respuestas de los futuros maestros a la tarea propuesta en una planilla Excel. Se anota por cada alumno la alternativa de los verbos que asocian claramente con sumar, aquellos que no se asocian y aquellos que creen que podrían asociarse (ver Anexo 5). Una vez recogidas todas las respuestas de los alumnos, se organizan en la Tabla 16 según si los verbos seleccionados en cada caso involucran un cambio de estado, una unión o combinación, o si se asocian claramente con una palabra clave.

Para organizar sus respuestas se establecen 6 categorías:

- Cambio de estado (CE), cuando sus elecciones, ya sea para los verbos que se asocian claramente con suma, aquellos que no se asocian o no están seguros de que sean de suma. sólo incluyen los verbos añadir, incrementar y/o aumentar:

  (A.6): Elige como verbos que se asocia claramente con suma los verbos *agregar y añadir*,

  (A.67): Elige como verbos que pueden ser de suma los verbos *incrementar y aumentar*,

  (A.77): Elige como verbos que pueden ser de suma los verbos *agregar, incrementar y aumentar*;

- Unión o combinación (CB), cuando sus elecciones, ya sea para los verbos que se asocian claramente con suma, aquellos que no se asocian o no están seguros de que sean de suma, sólo incluyen los verbos juntar, unir y/o combinar:

  (A.15): Elige como verbos que no se asocia con suma los verbos *juntar, unir y combinar*,

  (A.77): Elige como verbos que asocia claramente con suma los verbos *juntar y unir*,

  (A.174): Elige como verbos que pueden ser de suma los verbos *juntar y unir*;

- Palabras clave (PC), cuando sus elecciones, ya sea para los verbos que se asocian claramente con suma, aquellos que no se asocian o no están seguros de que sean de suma, sólo incluyen los verbos los ganar, recibir y/o obtener:

(A.3): Elige como verbos que pueden ser de suma los verbos *recibir y obtener*,

(A.15): Elige como verbo que no se asocia con suma sólo el verbo *ganar*,

(A.196): Elige como verbos que asocia claramente con suma los *verbos obtener y recibir*;

- Cambio de estado y combinación (CE y CB), cuando sus elecciones, ya sea para los verbos que se asocian claramente con suma, aquellos que no asocian o no están seguros de que sean de suma, incluyen tanto verbos de CE como los de CB:

(A.12): Elige como verbos que se asocia claramente con suma los *verbos juntar y agregar*,

(A.27): Elige como verbos que se asocia claramente con suma los verbos *juntar, unir y añadir,*

(A.98): Elige como verbos que se asocia claramente con suma los verbos *juntar, agregar, incrementar y añadir*;

- Cambio de estado y palabras clave (CE y PC), cuando sus elecciones, ya sea para los verbos que se asocian claramente con suma, aquellos que no se asocian o no están seguros de que sean de suma, incluyen tanto verbos de CE como los de PC.

(A.1): Elige como verbos que se asocia claramente con suma los verbos *agregar, añadir, recibir, incrementar y aumentar*,

(A.8): Elige como verbos que pueden ser de suma los verbos *incrementar aumentar y recibir*,

(A.192): Elige como verbos que se asocia claramente con suma los verbos *ganar, aumentar, recibir y añadir*;

- Combinación y palabras clave (CB y PC), cuando sus elecciones, ya sea para los verbos que se asocian claramente con suma, aquellos que no se asocian o no están seguros de que sean de suma, incluyen tanto verbos de CB como de PC:

(A.2): Elige como verbos que no se asocia con suma los verbos *ganar y combinar*;

(A.30): Elige como verbos que pueden ser de suma los verbos *juntar y obtener*;

(A.65): Elige como verbos que no asocia con suma los verbos *unir, combinar, juntar y recibir*;

- Cambio de estado, combinación y palabras clave (CE, CB y PC), cuando sus elecciones, ya sea para los verbos que se asocian claramente con suma, aquellos que no se asocian o no están seguros de que sean de suma, incluyen al menos un verbo de CE, CB y PC:

  (A.20): Elige *todos verbos* como verbos que asocia claramente con suma,

  (A.103): Elige como verbos que no se asocia con suma los verbos *combinar, obtener, incrementar y ganar*;

  (A.198): Elige como verbos que se asocia claramente con suma los verbos: *juntar, agregar, unir, ganar, incrementar, recibir y añadir*;

- No se puede determinar (NSD) cuando no contestan.

En la Tabla 16 se recoge la distribución de los 203 alumnos según el tipo de verbos que asocian claramente con sumar, los que no asocian y los que creen que podrían asociarse.

Tabla 16: Frecuencia del tipo de asociación con suma que los alumnos dan a los verbos propuestos

	Asociación con la suma		
Tipo verbo	Claramente	No asocia	Pueden asociarse
CE	47 (23.1%)	1	11
CB	2 (1%)	65	18
PC	1 (0.5%)	20	22
CE y CB	41 (20.2%)	8	15
CE y PC	35 (17.2%)	2	28
CB y PC	*	57	39
CE, CB y PC	71 (35%)	14	55
NSD	6 (2.9%)	36	15
Totales	203 (100%)	203	203

De manera global, de la Tabla 16 se observa que:

- El 70.9% de alumnos no asocia la suma con al menos uno de los verbos que implican combinación o unión (por ejemplo: unir, juntar y/o combinar.) Un 23.2% asocia esta operación de manera clara sólo con aquellos verbos que indican un cambio de estado, eligiendo al menos alguno de los verbos agregar, incrementar, aumentar y/o añadir.

- Mientras que un 17.2% la asocia claramente con al menos uno de estos verbos y, al menos uno de los verbos unir, juntar y/o combinar.

- El 52.7% de los alumnos (107 de 203), entre los verbos que asocia claramente con la suma se encuentran verbos como ganar, recibir y obtener. Sólo un 9.9% de los alumnos no relaciona este tipo de verbos con sumar.

Recogemos de la Tabla 16 las categorías que describen las respuestas en función de los verbos elegidos y por cada alumno y consideramos de manera conjunta los verbos que asocian claramente con suma, los que no y aquellos que creen que pueden asociarse. A partir ello emergen 3 concepciones sobre el significado de la suma basado en la acción que se desprenden de estas elecciones:

- **Concepción unitaria**, cuando no asocian de manera clara la suma con ninguno de los verbos unir, juntar y combinar; pero no creen o no están seguros de que los verbos que involucran una combinación o unión sean de suma. Ejemplos:

  (A.22): Elige como verbos que asocia claramente con suma *agregar, incrementar, aumentar y añadir*, pero no asocia con suma los verbos *juntar, unir y combinar*.

  (A.85): Elige como verbos que asocia claramente con suma *agregar, incrementar, aumentar y añadir*; no asocia con suma el verbo *combinar*, pero no está seguro de que los verbos *juntar, unir, obtener, ganar y recibir* sean de suma.

- **Concepción binaria (B)**, cuando no asocian de manera clara la suma con ninguno de los verbos *aumentar*, *incrementar*, *añadir* y *agregar*; pero no creen o no están seguros de que los verbos que involucran un cambio de estado sean de suma. Ejemplos:

(A.107): Elige como verbos que asocia claramente con suma *juntar, unir*; pero no está seguro de que los verbos *agregar, incrementar, ganar, recibir, aumentar y añadir* sean de suma.

(A.203): Elige como verbos que asocia claramente con suma *juntar, unir*; pero no está seguro de que los verbos *agregar, ganar, incrementar y combinar* sean de suma.

- **Concepción unitaria y binaria**, cuando asocian claramente la suma con alguno de los verbos *aumentar, incrementar, añadir* y/o *agregar* y con al menos uno de los verbos *unir*, *juntar* y *combinar*. Ejemplos:

  (A.107): Elige como verbos que asocia claramente con suma *agregar, ganar, añadir y unir*; y no está seguro de que los verbos *juntar, incrementar y aumentar* sean de suma,

  (A.113): Elige como verbos que asocia claramente con suma *agregar, unir, incrementar, aumentar y añadir*; y no está seguro de que el verbo *juntar*, sea de suma;

- **No se puede determinar (NSD)** cuando no contestan.

El análisis realizado muestra que:

- El 40.4% de los alumnos (82 de 203) evidencia una concepción unitaria de la suma.

  Estos alumnos asocian la suma de manera clara con la mayoría o la totalidad de los verbos que involucran un cambio de estado, eligiendo los verbos *añadir, aumentar, agregar* y/o *incrementar.* 63 asocian suma con 3 o 4 de estos verbos y 19 alumnos la asocian con al menos 2. En el 42.7% de los casos, sus elecciones también incluyen al menos 1 de los verbos *ganar*, *recibir* y *obtener* como verbos que asocian claramente con sumar.

  En cuanto a los verbos que no asocian con la suma, el 75.6% de ellos (62 de 82) no elige al menos uno de los 3 verbos que implican una combinación o unión de elementos, como los verbos *combinar, unir* y/o *juntar* (13 no asocian ninguno, 12 no asocian 2 y 22 no asocian 1). Por otra parte, en su mayoría (60 de 82) no están seguros de que este tipo de verbos sean de suma. Los alumnos restantes o bien no responden la pregunta o bien no asocian sumar de manera clara con los verbos *ganar*, *recibir* y/u *obtener* y sus elecciones para los verbos que pueden ser de suma, incluyen verbos de todo tipo.

- El 55.2% de los alumnos (112 de 203) parecen tener una concepción de la suma tanto unitaria como binaria, aunque incompleta.

  Estos alumnos asocian claramente sumar con al menos 1 de los verbos *añadir*, incrementar, *aumentar* y *agregar*. Específicamente vemos que 56 alumnos asocian la suma con la totalidad de estos verbos, 25 alumnos la asocian con 3, 22 alumnos con 2 y 7 alumnos sólo con 1 de los verbos. A su vez, este grupo de alumnos asocia con sumar al menos 1 de los verbos *unir*, *juntar* y *combinar*. 9 asocian todos los verbos, 63 asocian 2 y 40 asocian suma con al menos 1. En el 63.4% de los casos sus elecciones también incluyen los verbos *ganar*, *recibir* y/o *obtener*.

  Sus elecciones para los verbos que eligen como verbos que asocian o no con suma, incluyen todo tipo de verbos. Así, por ejemplo, vemos que el 71.4% de los casos no asocian la suma con alguno de los verbos *unir*, *combinar* y *juntar*; no asocian sumar con alguno de estos verbos y alguno de los verbos *ganar*, *recibir* y *obtener*; con alguno de estos verbos y con alguno de los verbos *añadir, incrementar, aumentar* y *agregar*; o con alguno de estos verbos y alguno de todos los otros tipos. En un 1.8% (2 de 112) no asocian la suma con al menos uno de los verbos *añadir*, *aumentar*, *incrementar* y *agregar,* y uno de los verbos *recibir*, *ganar* y *obtener*. Un 8.9% (10 de 112) no asocia la suma sólo con los verbos *recibir*, *ganar* y *obtener*; mientras que en un 14.3% no contesta (16 de 112).

- Sólo dos alumnos parecen tener una concepción binaria. Son alumnos que asocian claramente la suma sólo con el verbo *unir*, pero no asocian la suma con los verbos *obtener* y *ganar*, y explicitan que no están seguros de que los verbos que involucran un cambio de estado, como *agregar*, *añadir*, *incrementar* o *aumentar,* se asocien con la suma.

- Por otra parte, un único alumno asocia claramente la suma sólo con los verbos *recibir* y *obtener*; pero no asocia la suma con verbos que involucran unión o combinación de elementos. En cuanto a sus elecciones para los verbos que pueden ser de suma sólo escoge verbos que implican cambio de estado.
- 6 alumnos no responden acerca de qué verbos asocian de manera clara con la suma.

5.1.3- Análisis y resultados de la pregunta 3: "plantear PAEV aditivos"

La pregunta 3 está formulada de la siguiente forma:

Utilizando **sólo números naturales**, elabora:

a) 2 problemas de suma, cada uno de los cuales que se resuelvan con una única operación y sean distintos entre sí.

P.1:
P.2:

b) 2 problemas de resta, cada uno de los cuales, se resuelvan con una única operación y sean distintos entre sí.

P.1:
P.2:

Figura 12: Pregunta 3 del bloque de preguntas que evalúan el conocimiento de los significados y la relación entre la adición y la sustracción

Esta pregunta tiene como objetivo evaluar el grado de conocimiento que poseen los alumnos en relación a los significados y relaciones de la suma y la resta y el uso de palabras clave con un significado matemático opuesto al que le atribuye la semántica del lenguaje natural, a través del conocimiento de los principios que subyacen a los procedimientos. Se utiliza como indicador de conocimiento conceptual la aplicación y justificación de tareas de procedimiento.

Se inicia el análisis recogiendo las respuestas de los alumnos a la tarea propuesta en una planilla Excel. Para cada uno de los problemas propuestos por cada alumno, se anota directamente en la planilla el tipo de problema según la clasificación en base a su estructura semántica (cambio, combinación, igualación y comparación) y se analiza la correspondencia de la palabra clave con la operación a realizar. Cuando los problemas propuestos no cumplen las condiciones solicitadas ya sea porqué involucran números enteros, números decimales, más de una operación o porque no se ajustan al requerimiento de la tarea propuesta, se indica en la casilla que corresponde a la clasificación del problema a que situación corresponde (ver Anexo 6).

Una vez recogidos los tipos de problemas propuestos por los alumnos, se dejan fuera aquellos problemas que no cumplen con las condiciones propuestas (149 de 678). Los enunciados que descartamos son del tipo: "*A las 10 de la mañana la temperatura era de -3 grados. Si a las 5 de la tarde la temperatura ha bajado 5 grados más, ¿a cuántos grados estamos a las 5 de la tarde?"* (A.32). *"¿Cuántos ojos tienen 8 caballos?* (A.44). ¿*Cuánto es 8 + 3?* (A.165). "*¿Cuántos años tengo si mi hermana tiene 18 y ella tiene el triple de años que yo?"* (A.46).

Seguidamente, se recogen en la Tabla 17 los tipos de PAEV aditivos propuestos por los alumnos, indicándose en cada caso si la palabra clave coincide con la operación a realizar. Dado que nos interesa identificar las estructuras aditivas que utilizan con mayor frecuencia, cuando un alumno plantea 2 o 3 problemas con un mismo tipo de estructura contamos su respuesta una única vez.

Tabla 17. Tipos de PAEV aditivos propuestos por los alumnos

Estructura	Descripción	Si es palabra clave		No es palabra clave	
		Nº A	%	Nº A	%
Cambio 1	Aumento con incógnita en la cantidad final	103	24.3	*	*
Cambio 2	Disminución con incógnita en la cantidad final	148	35	*	*
Cambio 3	Aumento con incógnita en el cambio	15	3.6	2	0.5

Cambio 4	Disminución con incógnita en el cambio	9	2.1	*	*
Cambio 5	Aumento con incógnita en la cantidad inicial	*	*	*	*
Cambio 6	Disminución con incógnita en la cantidad inicial	*	*	*	*
Comparación 1	Aumento con incógnita en la diferencia	1	0.2	4	1
Comparación 2	Disminución con incógnita en la diferencia	6	1.4	1	0.2
Comparación 3	Aumento con incógnita en el comparando	*	*	*	*
Comparación 4	Disminución con incógnita en el comparando	*	*	2	0.5
Comparación 5	Aumento con incógnita en el referente	*	*	*	*
Comparación 6	Disminución con incógnita en el referente	*	*	3	0.7
Igualación 1	Aumento con incógnita en la igualación	3	0.7	*	*
Igualación 2	Disminución con incógnita en la igualación	3	0.7	*	*
Igualación 3	Aumento con incógnita en el comparando	*	*	*	*
Igualación 4	Disminución con incógnita en el comparando	*	*	*	*
Igualación 5	Aumento con incógnita en el referente	*	*	*	*
Igualación 6	Disminución con incógnita en el referente	*	*	*	*
Combinación 1	Aumento con incógnita en el todo	120	28.4	*	*
Combinación 2	Disminución con incógnita en una parte	*	*	3	0.7
Totales		407	96.2	16	3.6

A partir de la Tabla 17 se observa que:

- La mayoría de los problemas propuestos (87.7%) se basan en el uso de palabras clave para la suma y la resta como indicador de la operación a realizar e involucran las estructuras aditivas más sencillas de resolver.

  En este tipo de problemas predomina la asociación de verbos como “ganar” o “dar” con la acción de sumar y la asociación de verbos como “quitar” o “perder”, con la acción de restar. Ejemplos: *“Tengo 1 caramelo y mi madre me da 2 más, ¿cuántos tengo ahora?* (A.2); *“¿Tengo 8 canicas y pierdo 6, cuántas canicas me quedan?”* (A.6).

  En lo que respecta a las estructuras aditivas más utilizadas, vemos que éstas corresponden a las categorías de cambio con incógnita en la cantidad final aumento (propuesta por 103 de los 203 alumnos) o disminución (propuesta por 148 alumnos) con enunciados del tipo. Así encontramos enunciados del tipo: *“¿Tengo 3 peras y me acabo de comer 2, ¿cuántas me quedan?* (A.22); “*Tenemos 4 caramelos y vuestro amigo nos regala 3 caramelos más, ¿cuántos caramelos tenemos ahora?* (A.143); “*Dividimos una trata en 8 trozos y para merendar nos comemos 3. ¿Cuántos trozos quedan para el desayuno de mañana?* (A.189).

Encontramos también entre las estructuras aditivas más utilizadas la estructura de combinación con incógnita en el todo (propuesta por 120 alumnos) con enunciados del tipo: "*Un colegio tiene 100 niñas y 120 niños, ¿Cuántos alumnos tiene en total la escuela"* (A.79); *"En una frutería disponen de 18 piñas y 8 manzanas, ¿de cuántas piezas de fruta dispone la frutería?* (A.91); *"En una bolsa hay 25 caramelos de fresa y 15 de menta. ¿Cuántos caramelos hay en la bolsa"?* (A.156).

- Los problemas que requieren una compresión profunda del enunciado, en los que el uso de palabras clave no conduce siempre a la solución del problema y/o que involucran estructuras aditivas más complejas, están presentes únicamente en un 7,4% de los casos.

  A pesar de ello encontramos ejemplos de estructuras de igualación: *"Si María tiene 3 caramelos y Juan tiene 5, ¿cuántos caramelos le faltan por comprar a María"*; ejemplos de estructuras de comparación *"Si Pau tiene 10 años y su madre tiene 42 años, cuántos años se llevan de diferencia"*? (A.19) , y algunos ejemplos de cambio "*Tengo 8 pelotas y me han regalado algunas más. Si ayer tenía 5 pelotas, ¿cuántas me han regalado?"* (A.8).

  Por otra parte, problemas del tipo "*Juan tiene 24 años menos que su madre. Si su madre tiene 53, ¿cuántos años tiene Juan?"* (A.49), que corresponden a la categoría de comparación con incógnita en el comprando disminución, se presentan con una frecuencia muy baja (sólo encontramos propuesta por 2 alumnos). No encontramos ningún caso que haya formulado un problema de igualación con incógnita en el comparando aumento.

Seguidamente analizamos los problemas formulados por los estudiantes recogiendo la propuesta de Cañadas y Castro (2011) en relación a las acciones asociadas a las concepciones de la adición y la sustracción y la propuesta de Nesher (1999) sobre desarrollo del conocimiento aritmético que subyace en la resolución de los diferentes tipos de PAEV aditivos A partir del análisis de los enunciados propuestos, se establecen 4 tipos de concepciones en relación al significado y relaciones de la suma y la resta y el uso de palabras clave con un significado matemático opuesto al que le atribuye la semántica del lenguaje natural:

- **Concepción unitaria**, evidenciada por el 26.6% de los alumnos.

  Estos alumnos proponen problemas que sólo involucran estructuras de cambio aumento-disminución con incógnita en la cantidad final. Ejemplos: *"¿María ha comprado 5 lápices y su madre le ha comprado 6 más, ¿cuántos lápices tiene María?* (A.75); *"Tengo 2 libros y hoy me he comprado 3, ¿cuántos libros tengo ahora en total?"* (A.140).

  En ocasiones (6 alumnos de 54) proponen estructuras cambio aumento-disminución con incógnita en el cambio. Ejemplos: "*Ayer tenía 6 caramelos y hoy tengo 9. ¿Cuál es la diferencia de caramelos que tengo entre ayer y hoy?"* (A.27); "*Carlos fue al mercado con 8 euros en el bolsillo y cuando acabo la compra sólo tenía 2 euros. ¿Cuánto dinero se ha gastado?"* (A. 60). Estos alumnos basan la formulación de sus enunciados en un esquema de cambio, en el que la suma y la resta se interpretan como procedimientos distintos. Las acciones se presentan encadenadas por causa-efecto, siendo en la totalidad de los casos, la palabra clave el indicador de la operación a realizar.

- **Concepción binaria**, evidenciada por el 6.9% de los alumnos.

  Estos alumnos esencialmente proponen enunciados que sólo involucran las estructuras de combinación con incógnita en el todo. En este tipo de problemas sólo es posible determinar la interpretación en base a la acción que estos hacen de la suma, expresada en términos de la unión o una combinación de elementos, por ejemplo: "*Juan tiene 3 euros y Marta tiene 5 euros, ¿cuánto dinero tienen entre los dos?"* ((A.24); "*Tenemos 4 manzanas y 2 naranjas, ¿cuántas piezas de fruta tenemos?* (A.94).

  Sólo en ocasiones los enunciados propuestos por este grupo de alumnos incluyen también alguna estructura que involucra una resta, como las de comparación aumento-disminución con incógnita en la diferencia. Los 4 alumnos que proponen enunciados de ambos tipos, evidencian el manejo de una conexión entre ambas operaciones. Proponen situaciones en las hay dos cantidades que tienen asignado el mismo papel, un todo y una de las partes, y se espera conocer el complemento, ya sea aumentando o disminuyendo; y en las que no siempre la palabra clave es indicador de la operación a realizar. Ejemplos: *"Juan tiene 4 caramelos y María tiene 6. ¿Cuántos caramelos más tiene María?* (A.50)*; "Juan tiene 12 años y Pedro 5, ¿cuál es la diferencia de edad entre ellos?"* (A.95).

- **Concepción unitaria y binaria**, evidenciada por el 55.2% de los alumnos. que proponen enunciados que involucran al menos una estructura de cambio y alguna estructura de combinación, comparación y/o igualación.

  En el 80.5% de los casos estos alumnos sólo proponen enunciados que involucran estructuras de cambio aumento-disminución con incógnita en la cantidad final o con incógnita en el cambio y la estructura de combinación con incógnita en el todo. Ejemplos: "*Marc se ha comprado 5 caramelos y se ha comido 2, ¿cuántos le quedan?* (A.30); *"Si tenía 8 euros y ahora tengo 12, ¿cuántos euros tengo de más?*" (A.25); *"Marta tiene 4 amigas y 2 amigos, ¿cuántos amigos tiene en total?* (A.26). Evidencian una concepción unitaria de la suma y la resta como un cambio de estado y una concepción de la suma como una unión o combinación de elementos. En este caso, estas operaciones se interpretan como procedimientos distintos, siendo en todos los problemas propuestos la palabra clave el indicador de la operación a realizar.

  El 19.5% de los alumnos restantes proponen enunciados que involucran alguna estructura de cambio y una de combinación con incógnita en una parte del todo, comparación aumento-disminución con incógnita en la diferencia, comparación disminución con incógnita en el comprando o en el referente, y/o las estructuras de igualación aumento disminución con incógnita en la igualación. Ejemplos: *"Mi hermano y yo tenemos 10 cromos entre los dos. Si yo tengo 5 cromos, ¿cuántos son de mi hermano?"* (A. 147); *"Carla tiene 10 años y su hermana 5 años menos que ella. ¿Cuántos años tiene su hermana?* (A.61), "*Queremos comprar un juguete de 9 euros, pero solamente tenemos 3. ¿Cuántos euros tenemos que conseguir para comprar el juguete?"* (A.134). Estos alumnos evidencian una concepción unitaria y binaria de estas operaciones, a través del uso de un esquema de relaciones parte-todo-todo y el uso de la relación entre la igualdad y la desigualdad, utilizando la igualación por adición y/o sustracción. Este conocimiento les permite formular enunciados más allá del cambio y la combinación, en los que la palabra clave no siempre es indicador de la operación a realizar. Proporcionan enunciados en los que se requiere establecer relaciones entre la suma y la resta, como por ejemplo interpretar la resta como sumando desconocido, para obtener la solución del problema.

- Por otra vemos que en un 10.8% de los casos no es posible determinar a través del planeamiento de PAEV aditivos los significados y relaciones entre la adición y la sustracción presente en los enunciados, puesto que los problemas que propone este grupo de alumnos no cumplen con las condiciones propuestas para su elaboración o porque no contestan.

5.1.4- Análisis y resultados de las preguntas 4 y 5: "valoración del uso de palabras clave"

Las preguntas 4 y 5 están formuladas de la siguiente forma:

¿Es posible redactar el enunciado de un problema de resta con la palabra **añadir**? ¿Por qué? Da un ejemplo.

¿Es posible? :
¿Por qué? :
Ejemplo:

Figura 13: Pregunta 4 del bloque de preguntas que evalúan el conocimiento de los significados y la relación entre la adición y la sustracción

Éstas tienen como objetivo evaluar el grado de conocimiento que poseen los alumnos de la relación entre la suma y la resta, a través del conocimiento de los principios generales. Se utiliza como indicador de conocimiento conceptual la explicación de tareas de concepto, preguntando a los futuros maestros por la posibilidad de utilizar palabras clave con un significado matemático opuesto al que le atribuye la semántica del lenguaje natural. En ambos casos, debía incluirse un enunciado de ejemplo, el problema debía resolverse con una única operación, involucrar sólo números naturales puesto que el estudio se desarrolla en este contexto.

Se inicia el análisis recogiendo las respuestas de los futuros maestros a la tarea propuesta en una planilla Excel. Se anota, alumno por alumno, para cada pregunta si cree posible o no redactar un enunciado como el que proponemos, el tipo de explicación que justifica su respuesta y el problema aditivo que propone como ejemplo (ver Anexo 7).

De manera general observamos que el 75.9% de los alumnos cree que es posible redactar un problema de resta con el verbo añadir, un 17.2% no lo cree posible, un 2.5% señala que no sabe cómo hacerlo y un 4.4% no contesta. De manera similar se observa que el 68% de los alumnos cree posible redactar un enunciado de suma con la palabra menos, un 17.2% cree que no, un 3.5% señala no sabe cómo hacerlo y un 11.3% no contesta.

Una vez recogidas todas las respuestas de los alumnos, se organizan en la Tabla 18, según el tipo de explicación que los futuros maestros utilizan para justificar sus respuestas y los ejemplos que éstos proponen para ambos casos. Se establecen 6 categorías que emergen de este análisis de las respuestas de los alumnos:

- utiliza sólo como palabra clave, cuando interpreta que los términos dados sólo pueden utilizarse como palabras clave y creen que no es posible redactar enunciados como los que proponemos dando explicaciones del tipo:

  (A.22): *"Porque menos siempre es sinónimo de resta"*,

  (A.97): *"Porque cuando sumas estas añadiendo, no quitando"*,

  (A.171) *"Siempre es de resta"*;

  o, cuando dan ejemplos en los que el verbo *añadir* se utiliza como palabra clave para la suma y la palabra *menos* como palabra clave para la resta o no ejemplifican su respuesta:

  (A. 72): *"Si tengo 2 objetos y añado 2 más. ¿Cuántos tengo ahora?"*;

  (A. 97): *"Tengo 5 manzanas y añado 2 más. ¿Cuántas tengo ahora?"*,

  (A.166): *"¿3 naranjas menos 2 naranjas, cuántas naranjas son?"*;

- cree que confundiría al resolutor, cuando creen que es posible redactar enunciados como los que proponemos, pero que no es recomendable pues confundiría a quien resuelve el problema. Estos alumnos dan explicaciones del tipo:

(A. 66): *“Crea confusión a la persona que resuelve el problema, es mejor no utilizarla”*

(A. 175): *“Es lioso”*

(A. 201): *“Podemos hacer equivocar al alumno”*,

y proponen enunciados que involucran más de una operación, en los que el verbo *añadir* se utiliza como palabra clave para la suma y la palabra *menos* como palabra clave para la resta, ejercicios de suma o resta o no ejemplifican su respuesta:

(A.10): *“Juan tenía 6 caramelos, pero le han robado 2. Si Joan agrega 3 a los caramelos que le han robado, ¿cuántos caramelos le quedan?”*,

(A.155): *“Marta tiene 15 años y su hermana dos años menos, ¿cuántos años tiene entre las dos?*,

(A.184): “9 – 5 + 3 =”;

- utiliza sin relevancia para la suma/resta, cuando sugieren que pueden utilizar las palabras propuestas pero de forma que no sean relevantes para la operación que resuelve el problema.

(A. 16): *“Porque puedes utilizar la palabra menos para dar un dato, pero que no sea necesario restar”*,

(A. 75): *“Puede estar dando una información extra”*,

(A. 130): *“No tiene por qué tener un significado matemático”*,

y proponen enunciados en los que el verbo *añadir* y la palabra *menos* no tienen repercusión en la resolución del problema, ejercicios de suma o resta o no ejemplifican su respuesta:

(A. 3): “*María tiene 3 juguetes en su habitación. Pablo le quita 2 y los añade a su habitación. ¿Cuántos juguetes le quedan a María?”*,

(A. 12): *“Pablo tiene menos lápices que yo. Si él tiene 5 y yo 8, ¿cuántos tenemos entre los dos?”*,

(A. 131): “*Mi madre tiene 5 años menos que mi padre. Si ella tiene 32 y mi padre 37, ¿cuántos años suman sus edades?*;

- utiliza más de una operación, cuando creen posible redactar enunciados como los que proponemos utilizando el verbo *añadir* como una suma y luego hacer aparecer una resta, y/o utilizan la palabra *menos* para originar una resta y luego proponer una suma, dando argumentos del tipo:

  (A. 23): *“Porque se puede añadir y luego quitar más número de cosas”*,

  (A. 26): *“Incorporando más de una operación”*,

  (A. 63): *“Puedes hacer una resta y luego que haya que sumar”*,

  y proponen enunciados que involucran más de una operación, en los que el verbo *añadir* se utiliza como palabra clave para la suma y la palabra *menos* como palabra clave para la resta, ejercicios de suma y resta o no ejemplifican su respuesta:

  (A. 2): *“Se añade 4 peras al saco de Daniel el cual tiene 10 peras. Pero Juan se ha* comido 6 peras *de ese mismo saco. ¿Cuántas peras quedan?”*,

  (A. 5): *“Anna tiene 7 caramelos y su hermana tiene 4 menos. ¿Cuántos caramelos tienen en total?”,*

  (A.98): “5 + 2 - 4=”;

- utiliza relaciones parte-parte-todo, cuando creen posible redactar enunciados como los que proponemos utilizando distintos tipos de relaciones entre estas operaciones. Estos alumnos dan argumentos del tipo:

  (A.8): *"Porque podemos plantear la resta como lo que debemos añadir al número más pequeño para llegar al mayor"*,

  (A.53): *“Puedes pedir una comparación”*,

  (A.69): *“Lo planteas como cuantas unidades hay que añadir para que te de un número”*,

  y proponen enunciados en los que el verbo *añadir* y la palabra *menos* se utilizan para realizar comparaciones o como sumando desconocido.

(A.39): *"Juan tiene 10 canicas menos que antes, ahora tiene 50. ¿Cuántas tenía antes?,*

(A.79): *¿Cuántos caramelos debemos añadir a los 35 que tenemos para tener 60?,*

(A.187): *"Juan tiene 5 magdalenas y Laura tiene 10. Si Juan tiene 6, ¿cuántas magdalenas tiene Juna menos que Laura?*;

- No se puede determinar, cuando las explicaciones y los ejemplos propuestos involucran el uso de números enteros, no dan una respuesta clara, señalan no saber hacerlo, o cuando no justifican su respuesta ni dan un ejemplo en ningún caso:

(A.67): *"Puedes sumar números negativos"*

(A.96): *"Depende del enunciado",*

(A.103): *"No sé hacerlo".*

En la Tabla 18 se recoge la distribución de los 203 alumnos según el tipo de respuesta, explicaciones y ejemplos, que dan a la tarea propuesta:

Tabla 18: Frecuencia del tipo de respuesta de los alumnos a las preguntas propuestas

Tipo de respuesta	Usar añadir y resolver con una resta		Usar menos y resolver con una suma	
	F	%	F	%
Utiliza sólo como palabra clave	34	16.8	22	10.8
Confundiría al resolutor	5	2.5	12	5.9
Utiliza sin relevancia para la resta/suma	24	11.8	35	17.2
Utiliza más de una operación	37	18.2	41	20.2
Utiliza relaciones parte parte-todo	29	14.3	11	5.4
No se puede determinar/ utiliza números enteros	38	18.7	16	7.9
No se puede determinar/ No da una respuesta clara	9	4.4	5	2.5
No se puede determinar/ No sabe cómo hacerlo	5	2.5	7	3.4
No se puede determinar/ No contesta	22	10.8	54	26.6
Totales	203	100	203	100

En base al tipo de respuesta que los alumnos dan recogidos en la Tabla 18 y la propuesta de Nesher (1999) sobre desarrollo del conocimiento aritmético que subyace en la resolución de los diferentes tipos de PAEV aditivos, emergen 2 tipos de concepciones que los alumnos muestran sobre la relación entre la suma y la resta:

- **Conexión entre la suma y la resta**

Evidenciada por un 14.3% de alumnos que relacionan el verbo añadir con una resta y un 5.4% que relaciona la palabra menos con una suma. Estos alumnos muestran una conexión entre estas operaciones a través de un uso flexible de un esquema parte-parte-todo. Esto les permite establecer relaciones del tipo si a + b = c entonces c – b = a y c – a = b, dando explicaciones como: "*Un problema en el que sepas el resultado e insinuemos que era menor que antes dando uno de los sumandos"* (A.39); "*Cuando hacemos una resta obtenemos la diferencia que hay entre dos números, es decir la cantidad que hay que añadir al menor para obtener el mayor"* (A.150); *"Se puede jugar con el hecho de que una persona tenga menos de x cosas en comparación con otra"* (A.187).

Esta conexión también se evidencia en el tipo de enunciados que los alumnos proponen como ejemplo a las tareas propuestas que involucran problemas de las categorías de cambio aumento-disminución con incógnita en la cantidad inicial, problemas de comparación y/o igualación, por ejemplo: "*Si ahora tengo 3 magdalenas menos que esta mañana y ahora tengo 5 magdalenas, ¿cuántas tenía está mañana?* (A.198); "*He de hacer galletas. ¿En la bandeja que he clocado en el horno tengo espacio para 50, si ya he colocado 40, ¿cuántas más podre añadir? (A.106); "Manuel tiene 6 cromos y Alba 10. ¿Cuántos cromos tiene que Añadir Manuel a su colección para tener los mimos que Alba?"* (A.199).

- **La suma y la resta como procedimientos distintos**

Evidenciada por un 49.3% de los alumnos que creen posible redactar un enunciado de resta con el verbo añadir, un 16.8% que no lo creen posible, un 43.3% que cree posible utilizar menos en un enunciado de suma y un 10.8% que no lo cree. En esta, la suma y la resta son consideradas como procedimientos distintos.

Los alumnos que creen posible utilizar el verbo añadir en un enunciado de resta y la palabra menos respectivamente en un enunciado se distribuyen en varios grupos. Aquellos que realizan más de una operación representan el 18.2% y el 20.2%. Estos alumnos utilizan palabras como “palabras clave” para la suma y la resta respectivamente, incorporando una segunda operación en el problema en la que la palabra clave también coincide con la operación a realizar. Dan explicaciones del tipo: *“se puede añadir una resta dentro del problema de suma”* (A.190), *“Haces la suma y luego restas”* (A.32), *“Porque puede restar y a la vez o posteriormente sumar”* (A.164), entre otros. Sus ejemplos, también evidencian esta idea al proponer enunciados del tipo: “*De 5 manzanas que hay en la cesta añado 3, pero después me como 8, ¿cuántas quedan?* (A.50), “*¿Una niña tiene 5 caramelos en una mano y añade 3 seguidamente, pero más tarde se come 4? ¿Cuántos le quedan?”* (A.76), “*Julia tiene 6 coches y María tiene 2 menos. ¿Cuántos coches suman en total?”* (A.125).

Un segundo grupo está constituido por los que utilizan estas palabras sin relevancia para la suma/resta (11.8% y 17.2%). Estos alumnos no relacionan el verbo añadir con una suma y la palabra menos con una resta y sólo las utilizan como información complementaria del enunciado, sin que repercutan en el proceso de resolución, señalando como ocurre en los casos siguientes: *“puedes utilizar la palabra menos para dar un dato, pero sin que sea necesario restar”* (A.85); *“porque puedes usar esa palabra y que sea irrelevante para el problema”* (A.86), *“Se puede utilizar como información complementaria”* (A.113), entre otros. Sus ejemplos también evidencian esta idea al proponer enunciados del tipo: “*Juan recibe 10 caramelos de 2 niños de la clase, menos de Ricardo que le da 2. ¿Cuántos caramelos tiene Juan?* (A.120), *“Oscar tiene 8 caramelos menos que Álvaro que tiene 20, es decir 12. ¿Cuántos caramelos tienen en total?* (A.186), *“María da 5 monedas a Pepe que ya tenía 2. María se quedará con menos monedas que Pepe. ¿Cuántas monedas tiene al final Pepe?* (A.196).

A la vez que utilizan estas palabras sin relevancia para la suma/resta, señalan también que esto resultaría confuso para quien resuelve el problema. Esta idea la señalan 5 de los futuros maestros los cuales creen posible redactar un enunciado de resta con el verbo añadir y por 12 alumnos que creen posible redactar un enunciado de suma con la palabra menos. Estos alumnos dan argumentos del tipo: *“Sería muy* *complicado de resolver"* (A.61), *"Creo que podría, pero no es adecuado porque si el resultado es una suma y añadimos, el menos puede crear confusión y no saber lo que piden"* (A.112), *"Yo no lo haría porque confundiría la estudiante"* (A.142). Sus ejemplos ratifican esta idea, al proponer ejercicios de sumas y restas, o enunciados en los que estas palabras se utilizan utilizando en el mismo sentido de la operación a realizar (e.g *Tengo 5 caramelos en una bolsa y mi madre añade 2 más, ¿cuántos caramelos tengo ahora?* (A.84); *"8 - 3 + 5 = "* (A.61).

Por otra parte, están los alumnos que sólo asocian la palabra menos con resta (22 alumnos) y el verbo añadir con suma (34 alumnos). Estos alumnos rechazan la idea de utilizar estas palabras con un significado matemático distinto al que le atribuye la semántica del lenguaje natural, considerando estas operaciones como procedimientos distintos. Sus argumentos y ejemplos evidencian esta concepción al señalar por ejemplo: *"Siempre que hago una resta le quito, no le añado" (A.45)*, *"La suma implica el más y no el menos"* (A.73), *"Siempre que hablemos de menos quitamos, no podemos añadir (sumar)"* (A.102).

5.2- Análisis relacional: caracterización del conocimiento inicial de los alumnos en relación a la adición y la sustracción

Para caracterizar el conocimiento inicial que poseen los estudiantes para maestro en relación a estas operaciones, comenzamos recogiendo, alumno por alumno, en una planilla Excel, las concepciones que emergen a partir de sus respuestas en los diferentes aspectos evaluados en el cuestionario, ya presentados en los apartados 5.2.1 al 5.2.4. La Figura 13 recoge un extracto de esta planilla.

Al.	P.1_Expl. S y R	P.3_Ord. verbos	P.2_Plant. PAEV	P.4_P.5_ P. clave
1	7	5	5	5
2	2	2	2	5
3	2	4	2	5
4	3	6	2	1
5	4	5	2	7
6	2	2	2	7
7	2	6	5	1
8	2	6	5	8
9	2	6	1	8
10	5	6	2	4
11	7	6	2	1
12	2	4	6	5
13	4	1	5	5
14	2	6	1	1
15	7	5	5	5
16	4	6	6	5
17	1	6	5	1
18	2	4	2	7
19	2	6	6	2
20	2	6	2	1
21	2	6	5	5
22	2	2	5	2
23	2	6	5	5
24	7	2	3	1
25	5	1	5	7
26	7	6	5	5
27	4	4	2	8
28	2	5	2	1
29	7	4	2	1
30	2	5	5	1
31	8	2	2	1
32	7	6	2	5
33	4	6	5	7
34	2	6	2	5
35	2	6	5	5
36	2	2	5	8
37	2	2	2	1
38	2	6	2	5
39	2	2	2	8
40	2	5	2	7
41	2	1	5	7
42	2	5	5	1
43	2	6	1	1

Leyenda				
Concep.	P regunta			
	P1. Expl. Sumar/Restar	P2.Ordenar verbos	P3. Plantear PAEV	P3. Valoración p.clave
1	No se puede determinar	No se puede determinar	No se puede determinar	No se puede determinar
2	Basada en la acción unitaria ambas o en una de ellas	Basada en la acción unitaria para la suma	Basada en la acción unitaria ambas	Proc. distintos/utiliza sólo como palabra clave
3	Basada en la acción binaria ambas	Basada en la acción binaria para la suma	Basada en la acción binaria para la suma	Proc.distintos/ utiliza sólo como palabra clave y, sin relevancia, más de una opearción o cree que confundiría
4	Basada en la acción unitaria ambas y binaria para la suma	Basada en la acción unitaria y binaria para la suma	Basada en la acción binaria ambas	Proc.distintos/ utiliza más de una opearción y/o cree que confundiría
5	Basada en la acción unitaria y binaria ambas	Basada en la acción unitaria para la suma y palabras clave	Basada en la acción unitaria ambas y bianaria para la suma	Proc.distintos/ utiliza más de una opearción y/o sin relenacia para la suma/resta
6	Basada en la acción y palabras clave	Basada en la acción unitaria, binaria para la suma y palabras clave	Basada en la acción unitaria y binaria ambas	Conexiones en 1 y proc.distintos en el otro, utilizando sólo como palabra clave o creyendo que confundiría
7	Otros significados/ operación /acción-operación	*	*	Conexiones en 1 y proc.distintos en otro utilizando más de una opearción y/o sin relenacia para la suma/resta
8	Otros significados/ Peano/ Peano-acción/ distancia	*	*	Conexiones: siempre utiliza relaciones parte-parte-todo

Figura 13: Extracto de la planilla que recoge las distintas concepciones de cada alumno por pregunta.

Una vez recogidas y organizadas las concepciones obtenidas en cada pregunta por cada alumno, recogemos en una planilla Excel el número de alumnos que se sitúa en cada una de ellas. La Figura 14 recoge un extracto de esta planilla.

Sumar y restar es	**Ordenar verbos**	**Planetar PAEV**	**Valoración palabra clave**								**Totales**
			1	**2**	**3**	**4**	**5**	**6**	**7**	**8**	
1	**3**	**3**	**1**	*	*	*	*	*	*	*	**1**
	4	**3**	*	*	*	*	*	*	*	**1**	**1**
		5	*	*	*	*	**1**	*	*	*	**1**
	5	**4**	*	*	*	*	**1**	*	*	*	**1**
	6	**5**	**1**	*	*	*	*	*	*	**1**	**2**
2	**1**	**3**	**1**	*	*	*	*	*	*	*	**1**
		5	*	*	*	*	**1**	*	**1**	*	**2**
	2	**1**	**1**	**1**	**1**	*	*	*	*	*	**3**
		2	**3**	**1**	*	**1**	**3**	*	**1**	**1**	**10**
		3	**1**	*	*	*	**1**	*	*	*	**2**
		5	**6**	**5**	**1**	**1**	**2**	*	*	**1**	**16**
		6	*	**1**	*	*	**1**	*	*	**1**	**3**
	3	**5**	**1**	*	*	*	*	*	*	*	**1**
	4	**1**	**2**	**1**	**1**	*	*	*	*	*	**4**
		2	**1**	**1**	**2**	*	**2**	*	**1**	*	**7**
		4	*	*	*	**1**	*	*	*	*	**1**
		5	**2**	**3**	*	**1**	**2**	*	*	*	**8**
		6	*	*	*	*	**1**	*	*	*	**1**
	5	**1**	**1**	*	*	**1**	*	*	*	*	**2**
		2	**5**	**1**	*	*	*	*	**1**	*	**7**
		5	**3**	**2**	**1**	*	**7**	*	**1**	**1**	**15**
		6	*	**1**	**1**	*	*	*	*	*	**2**
	6	**1**	**4**	**1**	*	*	**1**	*	*	**1**	**7**
		2	**1**	**2**	**1**	*	**4**	*	*	*	**8**
		3	*	*	**1**	*	*	*	*	*	**1**
		4	*	*	*	**1**	*	**1**	*	*	**2**
		5	**3**	*	**2**	*	**10**	**1**	**1**	**1**	**18**
		6	**2**	**1**	*	*	**2**	*	*	*	**5**
3	**2**	**6**	*	*	*	*	*	*	*	**1**	**1**
	4	**2**	*	**1**	*	*	*	*	*	*	**1**
	6	**2**	**1**	*	*	*	*	*	*	*	**1**
4	**1**	**5**	*	*	*	*	**1**	*	*	*	**1**
	2	**1**	*	*	*	*	**1**	*	*	*	**1**
	4	**2**	*	*	*	*	*	**1**	*	**1**	**2**
		5	*	*	*	**1**	**3**	*	**1**	*	**5**
		6	*	*	*	*	**1**	*	*	*	**1**
	5	**2**	*	*	*	*	*	*	**1**	*	**1**

Figura 14: Extracto de la planilla que recoge el número de alumnos por tipo de concepción en las preguntas propuestas.

A partir de la planilla Excel ilustrada en la Figura 14, se realiza un análisis relacional de las concepciones que emergen de la evaluación de los distintos aspectos del conocimiento sobre la adición y la sustracción en los que se centra cada una de las preguntas. Se establecen 5 categorías de conocimiento conceptual inicial en relación a la adición y a la sustracción en base al conocimiento de los siguientes aspectos del conocimiento de la adición y la sustracción evaluados en el cuestionario: interpretación de la adición y sustracción, conocimiento de los significados de la adición y la sustracción, relación entre la adición y la sustracción, y la valoración del uso de palabras clave con un significado matemático opuesto al que le atribuye la semántica del lenguaje natural. Estas categorías surgidas del análisis relacional corresponden a 5 niveles de conocimiento de los distintos aspectos evaluados, dependiendo de si estas operaciones son interpretadas como procedimientos distintos entre sí, o bien se establece una conexión entre ambas. Las categorías son las siguientes:

- **Conocimiento vago de los aspectos evaluados**. Cuando estas operaciones son interpretadas como procedimientos distintos, basando su significado esencialmente en un cambio de estado unitario. Por ejemplo, (A.2) al explicar qué entiende por sumar y restar sólo interpreta estas operaciones en base a las acciones de añadir y quitar respectivamente; asocia con suma sólo verbos que implican un cambio de estado; propone problemas aditivos que sólo involucran un cambio de estado aumentado o disminuyendo; y rechaza la idea de utilizar palabras clave con un significado matemático distinto al que le atribuye la semántica del lenguaje natural.

- **Insuficiente**, cuando interpretan la suma y la resta como procedimientos distintos, basando su significado en cambio de estado unitario para la suma y la resta, y binario para la suma. Por ejemplo, (A.21) al explicar qué entiende por sumar y restar sólo interpreta estas operaciones en base a las acciones de agregar y quitar respectivamente; asocia la suma con verbos que implican un cambio de estado, una combinación o unión de elementos y aquellos que son asociados con palabras clave; propone problemas aditivos que involucran un cambio de estado aumentado o disminuyendo y una combinación de elementos con la incógnita en la cantidad final. Ante la posibilidad de utilizar palabras clave con un significado matemático distinto al que le atribuye la semántica del lenguaje natural, las utiliza sin que estas tengan relevancia para la operación a realizar.

- **Parcial,** cuando establecen conexiones parciales entre estas operaciones en alguno de los aspectos evaluados.

  Estos alumnos establecen relaciones basadas en un esquema parte parte-todo para la suma y la resta en alguno de los aspectos evaluados, y evidencian una interpretación de la suma y la resta como procedimientos distintos en los aspectos restantes. Por ejemplo, (A.73) al explicar qué entiende por sumar y restar sólo interpreta estas operaciones en base a las acciones de añadir y quitar, respectivamente; asocia la suma sólo con verbos que implican un cambio de estado; propone problemas aditivos que involucran un cambio de estado aumentado o disminuyendo y relaciones del tipo parte-parte-todo, en los que la palabra clave siempre es indicador de la operación a realizar; y rechaza la idea de utilizar palabras clave con un significado matemático distinto al que le atribuye la semántica del lenguaje natural.

- **Incompleto,** cuando establecen conexiones incompletas entre estas operaciones. Estos alumnos evidencian el uso de relaciones basadas en un esquema parte-parte-todo para la suma y la resta en 2 de los aspectos analizados y la interpretación como procesos independientes en los restantes.

  Por ejemplo, (A.36) sólo establece una conexión entre estas operaciones en las explicaciones que da ante la posibilidad de redactar un enunciado de suma con la palabra menos y uno de resta con el verbo añadir, las que en ambos casos se basan el uso de relaciones del tipo parte-parte-todo para la suma y la resta. No obstante, muestra una interpretación de la suma y la resta como procedimientos distintos en todos los aspectos restantes y propone problemas aditivos que sólo involucran un cambio de estado añadiendo o quitando o una combinación con la incógnita en la cantidad final. En sus explicaciones sobre lo que es sumar y restar y en su elección para los verbos que asocia de manear clara o no con sumar, sólo evidencia una interpretación basada en la acción unitaria para ambas.

- **Adecuado**, cuando evidencian en la mayoría de los aspectos evaluados una conexión entre estas operaciones, basada en el uso de relaciones del tipo parte-parte-todo para la suma y la resta.

> Por ejemplo, (A.146) al explicar qué entiende por sumar y restar, las interpreta como operaciones matemáticas; asocia verbos que implican un cambio de estado y una unión o combinación; propone problemas aditivos que involucran un cambio de estado aumentado o disminuyendo y relaciones del tipo parte-parte-todo, en los que la palabra clave siempre no siempre es indicador de la operación a realizar. Ante la posibilidad de redactar un enunciado de suma con la palabra menos y uno de resta con el verbo añadir, muestra un uso flexible de un esquema parte-parte-todo.

El análisis en conjunto de las distintas categorías de conocimiento evidenciadas por los futuros maestros en los diferentes aspectos evaluados, sugiere que el 12.8% de los alumnos que participan en este estudio muestra un conocimiento vago sobre todos los aspectos que son evaluados, un 58.1% muestra un conocimiento insuficiente, un 19.2% un conocimiento parcial, un 6.9% un conocimiento incompleto y un 3% un conocimiento adecuado.

Específicamente, el análisis realizado sugiere que:

Los 26 alumnos (12.8% del total) que muestran un **conocimiento vago** en los aspectos evaluados, evidencian una concepción de suma y la resta que esencialmente tiene un significado basado en la acción, en la que estas operaciones se interpretan como procedimientos distintos. Estos alumnos:

- No proponen problemas que involucren relaciones del tipo parte parte-todo, como las estructuras de igualación, comparación y combinación. Sólo proponen problemas que involucran un cambio de estado, aumentando o disminuyendo, en los que la palabra clave siempre es indicador de la operación a realizar.

- Tampoco incluyen en sus definiciones para el caso de la suma la idea de unión o combinación, ni tampoco la idea de complemento para el caso de la resta. 22 de ellos evidencia una concepción de suma y la resta que sólo tiene un significado basado en la acción unitaria, interpretando estas operaciones sólo en base a las acciones de añadir, agregar y quitar. 4 alumnos evidencian en sus explicaciones sobre lo que entienden por sumar y restar un significado distinto, basado en la noción de contar hacia delante y hacia atrás, o de la suma y la resta como operación.

- Todos ellos, asocian la suma de manera clara sólo con verbos que implican un cambio de estado como añadir, incrementar o aumentar y no creen o no están seguros que verbos que implican una combinación o unión de elementos sean de suma. En el 44% de los casos, sus elecciones para los verbos que asocian claramente con suma, también incluyen al menos uno de los verbos regalar, obtener y/o conseguir.

- Ante la posibilidad de redactar un enunciado de suma con la palabra menos y uno de resta con el verbo añadir, un 32% lo cree posible, un 20% no y un 48% no responde claramente la pregunta, señala que no sabe cómo hacerlo, o no contesta. Algunos de los alumnos que creen posible redactar enunciados de este tipo, lo hacen proponiendo realizar más de una operación y/o utilizando estas palabras sin relevancia para la suma/resta. El resto lo hacen señalando que no es recomendable, pues resultaría confuso para quien resuelve el problema. Mientras que los alumnos que no lo creen posible, rechazan la idea de utilizar estas palabras con un significado matemático distinto al que le atribuye la semántica del lenguaje natural.

Los 118 alumnos (58.1% del total) que muestran un **conocimiento insuficiente** sobre los aspectos evaluados interpretan la suma y la resta como procedimientos distintos y ponen de manifiesto, en la mayoría de los casos, una concepción sobre estas operaciones que tiene un significado basado únicamente en la acción unitaria para la suma y la resta, y binaria para la suma. Específicamente vemos que de los 118 alumnos:

- 80 de ellos interpreta estas operaciones sólo en base a las acciones de añadir, agregar y quitar; 16 alumnos incluyen también en sus explicaciones para el caso de la suma, verbos como unir y/o juntar; 4 alumnos incluyen también los verbos regalar, comprar y/o dar.

- 16 alumnos incluyen en sus explicaciones otros significados de estas operaciones y 13 de ellos incluyen su interpretación como operaciones matemáticas. Los alumnos restantes muestran una interpretación basada en la acción y como operación, basada en los axiomas de Peano, o de resta como distancia; 2 alumnos no responden esta pregunta.

- Sus elecciones para los verbos que asocian o no claramente con suma y los PAEV aditivos que proponen sugieren que estos alumnos poseen tanto una concepción unitaria como binaria de la suma Estos asocian con sumar claramente al menos uno de los verbos combinar, unir y/o juntar y/o plantean problemas aditivos que incluyen estructuras que involucran un cambio de estado añadiendo o aumentado y/o combinación de elementos con incógnita en la cantidad total, en las que las palabras clave son siempre indicador de la operación a realizar.

- La interpretación de la suma y resta como procedimientos distintos también se evidencia en las explicaciones que 55 alumnos dan ante la posibilidad de redactar un enunciado de suma con la palabra menos, y uno de resta con el verbo añadir. Estos alumnos que creen posible redactar enunciados de este tipo lo hacen proponiendo realizar más de una operación, utilizar estas palabras sin relevancia para suma/resta, o indicando que no es recomendable pues confundiría a quien resuelve el problema. Los 31 alumnos que no lo creen posible afirman que este tipo de palabras tiene un significado que no se puede cambiar, rechazando la idea de utilizar estas palabras con un significado matemático distinto al que le atribuye la semántica del lenguaje natural. En 32 de los casos no es posible evidenciarlo, puesto que las explicaciones propuestas involucran sólo el uso de números enteros, los alumnos no dan una respuesta clara, señalan que no saben cómo hacerlo y/o no contestan.

Los 39 alumnos (19.2% del total) que evidencian un **conocimiento parcial** establecen relaciones basadas en un esquema parte parte-todo para la suma y la resta en alguno de los aspectos evaluados y evidencian una interpretación de la suma y la resta como procedimientos distintos en los aspectos restantes. De los 39 alumnos:

- 18 de ellos proponen problemas aditivos que evidencian el manejo de relaciones del tipo parte-parte-todo, involucrando todo tipo de estructuras aditivas en las que la palabra clave no siempre es indicador de la operación a realizar. No obstante, ante la posibilidad de redactar enunciados en los que palabras clave tengan un significado matemático opuesto al que le atribuye la semántica del lenguaje natural, sus argumentos y ejemplos, junto con las explicaciones que dan sobre que es sumar y restar, sugieren una interpretación de estas operaciones como procedimientos independientes. Esencialmente definen la suma y la resta en base a las acciones de añadir y quitar. Para el caso de la suma, en ocasiones sus explicaciones incluyen también verbos como juntar o unir o estos son elegidos como verbos que asocian claramente con suma, junto con al menos uno de los verbos ganar, obtener y/o recibir. Ante la posibilidad de redactar enunciados de suma con la palabra menos y de resta con el verbo añadir, proponen su utilización sin que estas palabras tengan relevancia para la operación que se desea realizar. Proponen también utilizarlas haciendo más de una operación, de modo que menos implique una resta y añadir una suma. En otras ocasiones señalan que esto es conveniente pues resulta confuso para el resolutor pues menos siempre implica resta y añadir sumar. En algunos casos no responden estas preguntas.

- En sus explicaciones sobre lo que es sumar y restar, 4 alumnos evidencian una conexión entre estas operaciones al interpretarlas en base a las acciones de añadir, unir, quitar y la idea de comparar. No obstante, sus elecciones para los verbos que asocian con suma, los problemas aditivos que proponen junto con la valoración que hacen sobre el uso de palabras clave con un significado matemático opuesto al lenguaje natural, sugieren una interpretación de las operaciones como procedimientos independientes. Estos alumnos asocian claramente la suma sólo con aquellos verbos que implican un cambio de estado y al menos uno de los verbos ganar, obtener y/o recibir. Proponen problemas que sólo involucran un cambio de estado y/o una combinación de elementos con incógnita en la cantidad final, en los que los indicios verbales siempre coinciden con la operación a realizar. Ante la posibilidad de redactar un enunciado de suma con la palabra menos y uno de resta con el verbo añadir, proponen su utilización sin relevancia para la suma/resta o señalan que enunciados de este tipo no son recomendables pues resultan confusos para quien resuelve el problema.

- Los 17 alumnos restantes no evidencian el uso de distintas relaciones del tipo parte-parte-todo para la suma y la resta en los problemas aditivos que proponen que sólo involucran un cambio de estado aumentando o disminuyendo, y una combinación de elementos en los que la incógnita está en el todo, siendo en todos los casos la palabra clave indicador de la operación a realizar. Tampoco lo hacen cuando explican qué entienden por sumar o restar, interpretando estas operaciones en base a las acciones de añadir y/o juntar para la suma, y quitar para la resta y en base a verbos como ganar, recibir, obtener y/o dar y perder. No obstante, en una de sus explicaciones ante la posibilidad de realizar en enunciado de suma con la palabra menos y uno de resta con el verbo añadir, evidencian el manejo de alguna relación del tipo parte-parte-todo más allá de la combinación con la incógnita en la cantidad final. Sus explicaciones para el otro caso implican la utilización de las palabras dadas haciendo más de una operación o su utilización como información complementaria, sin que afecte la resolución del problema.

Los 14 alumnos (6.9% del total) que ponen de manifiesto un **conocimiento incompleto** evidencian el uso de relaciones basadas en un esquema parte-parte-todo para la suma y la resta en 2 de los aspectos analizados y la interpretación como procesos independientes en los restantes. En concreto, vemos que:

- 7 de ellos muestran un uso de un esquema parte-parte-todo en sus explicaciones sobre lo que es sumar y restar, en las que se evidencia una concepción binaria y/o unitaria de estas operaciones. 2 de estos alumnos lo hacen también en los problemas aditivos que proponen que involucran distintos tipos de estructuras aditivas. No obstante, sus elecciones para los verbos que asocian con sumar, junto con la valoración que hacen sobre el uso de palabras clave con un significado matemático opuesto al que le atribuye el lenguaje natural, sugieren que interpretan las dos operaciones como procedimientos distintos. Estos alumnos asocian sumar de manera clara sólo aquellos verbos que implican un cambio de estado aumentando y alguno de los verbos regalar, obtener y conseguir. Proponen utilizar la palabra menos en un enunciado de suma y el verbo añadir en uno de resta, las utilizan como palabras clave para la operación a realizar haciendo más de una operación. Los 5 alumnos restantes en una o ambas explicaciones que dan cuando se les pregunta acerca de la posibilidad de redactar un enunciado de suma con la palabra menos y uno de resta con el verbo añadir, establecen alguna relación del tipo parte-parte-todo y muestran una interpretación de la suma y la resta como procedimientos distintos en todos los aspectos restantes.

- 6 alumnos sólo establecen una conexión entre estas operaciones en las explicaciones que dan ante la posibilidad de redactar un enunciado de suma con la palabra menos y uno de resta con el verbo añadir y 1 alumno también lo hace en sus explicaciones sobre lo que es sumar y restar, en las que se evidencia una interpretación basada en la acción unitaria y binaria para la suma y la resta. En ambos casos, estos alumnos basan sus justificaciones en el uso de relaciones del tipo parte-parte-todo para la suma y la resta; y muestran una interpretación de la suma y la resta como procedimientos distintos en todos los aspectos restantes. Proponen problemas que sólo involucran un cambio de estado añadiendo o quitando o una combinación con la incógnita en la cantidad final. En sus explicaciones sobre lo que es sumar y restar sólo evidencian una interpretación basada en la acción unitaria para ambas.

- El alumno restante sólo muestra una conexión entre estas operaciones en sus explicaciones sobre lo que es sumar y restar, en las que se evidencia una interpretación basada en la acción unitaria y binaria para la suma y la resta y en una de las explicaciones que da ante la posibilidad de utilizar la palabra menos en un enunciado de suma y el verbo añadir en uno de resta, en base al uso de relaciones del tipo parte-parte-todo.

Los 6 alumnos (3% del total) que ponen de manifiesto un **conocimiento adecuado** en la mayoría de los aspectos evaluados evidencian una conexión entre estas operaciones, basada en el uso de relaciones del tipo parte-parte-todo para la suma y la resta. Específicamente:

- 4 de ellos muestran el uso de un esquema parte-parte-todo tanto en los problemas aditivos que proponen, que involucran el uso de estructuras de cambio, combinación y comparación como en las explicaciones que dan ante la posibilidad de redactar un enunciado de suma con la palabra menos y un enunciado de resta con el verbo añadir. Sus explicaciones para lo que entienden por sumar y restar evidencian una interpretación que puede reflejar una concepción unitaria para ambas; o, unitaria para la suma y la resta, y binaria para la suma; o, binaria para ambas; o, su interpretación como operaciones matemáticas.

- Los 2 alumnos restantes muestran una conexión entre estas operaciones en una o ambas de las explicaciones que dan ante la posibilidad de utilizar la palabra menos en un enunciado de suma y el verbo añadir en uno de resta, en base al uso de relaciones del tipo parte-parte-todo y/o en sus explicaciones sobre lo que es sumar y restar, en las que se evidencia una interpretación basada en la acción unitaria y binaria para la suma y la resta y los problemas aditivos que proponen.

CAPÍTULO VI

PERFILES DE CONOCIMIENTO CONCEPTUAL ADITIVO

En este apartado se presentan los perfiles de conocimiento conceptual aditivo que emergen del análisis en conjunto del conocimiento que muestran los alumnos en relación al SND y a la adición y la sustracción.

En concreto, se presenta:

- el análisis relacional entre las categorías generales de conocimiento sobre el SND y las categorías generales de conocimiento de la adición y la sustracción, presentadas en los capítulos 4 y 5, y
- los perfiles de conocimiento conceptual aditivo que emergen de dicho análisis relacional.

6.1- Análisis relacional: Conocimiento del SND y sobre la adición y la sustracción

Se inicia el análisis recogiendo en una planilla Excel las categorías generales de conocimiento alumno por alumno que emergen en relación a los aspectos que nos interesa considerar. La Figura 15 es la imagen de un extracto de la planilla que recoge en qué categoría de conocimiento se sitúa cada alumno en relación al SND y la adición y la sustracción.

Alumno	Conocimiento general en relación a:	
	La suma y la resta	El SND
1	2	2
2	1	3
3	2	3
4	2	4
5	2	2
6	1	4
7	2	2
8	4	5
9	4	5
10	3	4
11	2	4
12	3	2
13	2	4
14	2	2
15	2	2
16	3	5
17	2	3
18	3	3
19	3	4

Leyenda		
Catg.	Tipo de conocimiento general para:	
	La suma y la resta	El SND
1	Conocimiento vago	Sin conocimiento
2	Insuficiente	Insuficiente
3	Parcial	Parcial
4	Incompleto	Incompleto
5	Adecuado	Completo

Figura 15: Extracto de la planilla que recoge en qué categoría de conocimiento se sitúa cada alumno en relación al SND y la adición y la sustracción.

Una vez recogidas y organizadas las categorías de conocimiento general en las que se sitúa cada alumno de manera individual en relación al conocimiento del SND y a la adición y la sustracción, recogemos en la Tabla 19 la distribución de estas categorías respecto a ambos aspectos conjuntamente.

Tabla 19. Distribución de cada categoría de conocimiento conceptual inicial en relación al SND y la adición y la sustracción

Conocimiento inicial sobre el SND	Conocimiento inicial sobre la suma y la resta					Totales
	Vago	Insuficiente	Parcial	Incompleto	Adecuado	
Sin conocimiento	2 (1%)	3 (1.5%)	5 (2.5%)	*	*	10 (4.9%)
Insuficiente	9 (4.4%)	46 (22.6%)	17 (8.3%)	2 (1%)	*	74 (36.5%)
Parcial	7 (3.5%)	29 (14.2%)	8 (3.9%)	5 (2.5%)	2 (1%)	51 (25.1%)
Incompleto	7 (3.5%)	33 (16.3%)	6 (3%)	3 (1.5%)	4 (2%)	53 (26.1%)
Completo	1 (0.4%)	7 (3.5%)	3 (1.5%)	4 (1.9%)	*	15 (7.4%)
Totales	26 (12.8%)	118 (58.1%)	39 (19.2%)	14 (6.9%)	6 (3%)	203 (100%)

A partir de lo que se observa en la Tabla 19, se establecen 4 **categorías de conocimiento aditivo** en base a los dos aspectos evaluados:

- **Conocimiento vago**, cuando el alumno muestra

  a) falta de conocimiento o un conocimiento vago en relación al SND y a la adición y la sustracción; o

  b) falta de conocimiento o un conocimiento vago en un aspecto y un conocimiento insuficiente en el otro.

- **Insuficiente**, cuando el alumno muestra

  a) falta de conocimiento, un conocimiento vago o insuficiente en un aspecto y un conocimiento parcial en el otro; o

  b) un conocimiento insuficiente en ambos aspectos

- **Conocimiento parcial**, cuando el alumno muestra

  a) un conocimiento vago o insuficiente en un aspecto y un conocimiento incompleto o completo en el otro;

  b) un conocimiento parcial en ambos aspectos; o

  c) un conocimiento parcial en un aspecto y un conocimiento incompleto en el otro.

- **Conocimiento incompleto**, cuando el alumno muestra

  a) un conocimiento parcial o incompleto en un aspecto y un conocimiento adecuado o parcial en el otro; o

  b) un conocimiento incompleto en ambos aspectos.

6.2- Perfiles de conocimiento conceptual aditivo

Cada una de las 4 categorías establecidas en el apartado anterior sugiere un tipo de conocimiento en el que podemos, incluir cada uno de los alumnos, determinando así su perfil individual. De esta forma tenemos 4 perfiles en los que podemos ubicar los alumnos en función de su conocimiento conceptual aditivo en el momento en que participan en el estudio.

El análisis relacional indica que:

- el 6.9% de los alumnos que participan en este estudio muestran un **conocimiento conceptual aditivo vago** (perfil 1) de los aspectos evaluados, con alguna noción de ellos;

- un 51.2% muestran un **conocimiento conceptual aditivo insuficiente** (perfil 2), es decir ponen en evidencia un conocimiento parcial en uno de los aspectos evaluados y un conocimiento no más allá de insuficiente en el otro; o bien muestran un conocimiento insuficiente en ambos;

- un 33.9% muestran un **conocimiento conceptual aditivo parcial** (perfil 3), es decir manifiestan distintos tipos de conocimiento en los aspectos evaluados, evidenciando en su conjunto un conocimiento más que insuficiente, pero menos que incompleto. Estos alumnos muestran un conocimiento no más allá de insuficiente en uno de los aspectos evaluados y un conocimiento incompleto o completo en el otro; conocimiento parcial en ambos aspectos; o conocimiento parcial en un aspecto y conocimiento incompleto en el otro;

- un 7.9% muestran un **conocimiento conceptual aditivo incompleto** (perfil 4), es decir manifiestan un conocimiento adecuado en un aspecto y un conocimiento parcial o incompleto en el otro; o muestran un conocimiento incompleto en ambos;
- ningún alumno muestra un conocimiento conceptual aditivo completo en todos los aspectos evaluados.

La Tabla 20 recoge la frecuencia absoluta del tipo de conocimiento del SND y de la adición y la sustracción que muestran los alumnos en cada perfil.

Tabla 20: Frecuencia absoluta del tipo de conocimiento mostrado por los alumnos en cada perfil

Perfiles	Conocimiento del SND	Conocimiento de la suma y la resta					Totales
		Vago	Insuficiente	Parcial	Incompleto	Adecuado	
Perfil 1. Conocimiento vago	**Sin conocimiento**	2	3	*	*	*	5
	Insuficiente	9	*	*	*	*	9
Perfil 2. Conocimiento insuficiente	**Sin conocimiento**	*	*	5	*	*	5
	Insuficiente	*	46	17	*	*	63
	Parcial	7	29	*	*	*	36
Perfil 3. Conocimiento parcial	**Insuficiente**	*	*	*	2	*	2
	Parcial	*	*	8	5	*	13
	Incompleto	7	33	6	*	*	46
	Completo	1	7	*	*	*	8
Perfil 4. Conocimiento incompleto	**Parcial**	*	*	*	*	2	2
	Incompleto	*	*	*	3	4	7
	Completo	*	*	3	4	*	7
Totales		26	118	39	14	6	203

Los alumnos del perfil 1 y 2 (118 un 58.1% del total de los participantes) muestran un conocimiento del SND y sobre la adición y la sustracción por debajo de lo esperado a su llegada a la universidad.

En el perfil 1, encontramos 14 alumnos, 9 de los cuales (4.4% del total) muestran un conocimiento insuficiente del SND y un conocimiento vago de la suma y la resta. Los 5 alumnos restantes (2.4% del total) muestran una falta de conocimiento sobre el SND y un conocimiento vago o insuficiente sobre la adición y la sustracción.

En el perfil 2, situamos 104 alumnos, un 51.2% del total de los 203 participantes en el estudio. Entre ellos, 46 alumnos, un 22.7% del total de los participantes en el estudio, muestran un conocimiento insuficiente del SND y en relación a la adición y a la sustracción. 22 alumnos (un 10.8% del total) muestran un conocimiento parcial de la suma y la resta y una falta de conocimiento o un conocimiento insuficiente del SND. 29 de ellos (un 14.3% del total) de ellos muestran un conocimiento parcial del SND y un conocimiento vago o insuficiente de la suma y la resta.

Los 69 alumnos que se sitúan en el perfil 3 (un 14% del total de participantes) muestran un conocimiento parcial, distintos tipos de conocimiento en los aspectos evaluados. 8 alumnos (un 4% de los participantes) muestran un conocimiento vago de la suma y la resta y un conocimiento incompleto (7 alumnos) o completo (1 alumno) del SND. 42 alumnos (un 20.7% del total muestra un conocimiento insuficiente un aspecto y un conocimiento incompleto o completo en el otro. En particular vemos que 2 alumnos muestran un conocimiento insuficiente del SND y un conocimiento incompleto de la suma y la resta; 33 muestran un conocimiento incompleto del SND y un conocimiento insuficiente de la suma y la resta; mientras que 7 alumnos muestran un conocimiento completo del SND y un conocimiento insuficiente de la suma y la resta. De los 19 alumnos restantes (un 9.3%del total) del perfil 3, vemos que 11 de ellos muestran un conocimiento parcial en 1 aspecto y un conocimiento incompleto en el otro. Estos alumnos en ocasiones muestran un conocimiento parcial del SND y un conocimiento incompleto de la suma y la resta (5 alumnos); un conocimiento parcial de la suma y la resta y un conocimiento incompleto del SND (6 alumnos). Los alumnos restantes muestran un conocimiento parcial en ambos aspectos (8 alumnos).

Los 16 alumnos que se sitúan en el perfil 4 (un 7.9% del total) muestran un conocimiento incompleto del SND y de la adición y la sustracción. 3 de ellos muestran un conocimiento incompleto en ambos aspectos y 13 alumnos muestran un conocimiento parcial o incompleto en un aspecto y un conocimiento adecuado o parcial en el otro. 6 de estos 13 alumnos muestran un conocimiento parcial o incompleto del SND y un conocimiento adecuado en relación a la adición y la sustracción. Los 7 alumnos restantes muestran un conocimiento completo del SND y un conocimiento parcial o incompleto sobre la suma y la resta.

CAPÍTULO VII

CONCLUSIONES

Con el propósito de contribuir a orientar la planificación de las asignaturas de didáctica de las matemáticas del GEP, en este estudio nos propusimos varios retos. En primer lugar, a nivel teórico, nos planteamos establecer cuál es el CMF en su aspecto conceptual, que deberían tener los alumnos del GEP para iniciar con éxito la didáctica de la adición y la sustracción. En concreto, nos propusimos determinar cuáles son los conocimientos matemáticos básicos en relación a la adición y la sustracción que sustentan el desarrollo de otros tipos de conocimientos necesarios para la enseñanza de la suma y la resta en las aulas de primaria, como el conocimiento pedagógico del contenido, que el futuro maestro desarrollará en su paso por la facultad y posteriormente en su práctica profesional.

Esta investigación nos ha permitido establecer 4 componentes fundamentales del conocimiento matemático fundamental en relación al conocimiento aditivo: el conocimiento del sistema de numeración decimal, el conocimiento de los significados y relaciones de la adición, el conocimiento de las propiedades, y una aproximación a la compresión de los algoritmos. Estos componentes se han establecido como elementos constitutivos del conocimiento matemático que los maestros necesitan tener para enseñanza de la suma y la resta en Educación Primaria en marcos conceptuales del conocimiento del profesor, como por ejemplo en el MKT (Liñán, Contreras y Barrera, 2016).

A nivel empírico, centrándonos en los aspectos conceptuales relativos al conocimiento del SND y al significado de la adición y la sustracción, nos propusimos caracterizar el conocimiento con el que los estudiantes del GEP inician la didáctica de la adición y la sustracción. Analizamos en qué medida los estudiantes del GEP tienen un conocimiento matemático inicial próximo al CMF establecido a nivel teórico en relación al conocimiento del SND y los significados y relaciones de la adición y la sustracción.

Los resultados obtenidos en este estudio sugieren que los estudiantes para maestro inician su formación con un conocimiento aditivo inadecuado, evidenciado en concepciones estereotipadas y/o conceptos erróneos sobre contenidos matemáticos fundamentales que muchas veces se presumen sabidos al inicio de su formación. La diversidad de perfiles de conocimiento identificados sugiere distintos grados de conocimiento e ideas preconcebidas sobre estos conceptos que deben considerarse al momento de planificar las asignaturas de matemáticas y su didáctica. Los resultados obtenidos muestran que el 6.9% de los alumnos que participan en este estudio muestra un conocimiento aditivo vago de los aspectos evaluados, un 51.2% muestra un conocimiento insuficiente, un 33.9% un conocimiento parcial y un 7.9% un conocimiento incompleto. Ningún alumno muestra un conocimiento completo en todos los aspectos evaluados.

En particular, vemos que los resultados obtenidos en el bloque de preguntas que evalúa aspectos del conocimiento del SND confirman el bajo desempeño evidenciado por los estudiantes para maestro en estudios similares. Tal como muestran estudios como los de Hopkins y Cady (2007), Salinas (2007), Montes et al., (2015) y Ortiz, González y Gallardo (2013), vemos que los futuros maestros presentan serias deficiencias, conceptos erróneos y lagunas conceptuales en relación al SND.

La mayoría de los alumnos que participan en nuestro estudio parecen tener serias dificultades para transformar cantidades estructuradas, para reconocer múltiples descomposiciones de un número dado cuando se presentan en un formato diferente al habitual, y confunden el valor relativo con el valor de posición. Este conocimiento deficiente se ve reflejado en el tipo de explicaciones que utilizan para justificar sus respuestas, así como en las soluciones que aceptan como válidas. En general observamos un manejo de conceptos erróneos, procedimientos mecánicos, conocimientos fragmentados e incompletos en relación a los aspectos evaluados. Un ejemplo de ello es el hecho de que casi la totalidad de los alumnos que participa en este estudio logra identificar como descomposición del número 342 la que se presenta en su formato más habitual de la forma 3C + 4D+ 2U. No obstante, el porcentaje de identificación de las descomposiciones que se presentan en un formato distinto a éste disminuye considerablemente. Esto sugiere que el conocimiento evidenciado por los alumnos en relación a la composición, descomposición y combinación de cantidades estructuradas en la mayoría de los casos parece radicar en un conocimiento memorístico, más que en un conocimiento profundo de la estructura del sistema.

La diversidad de niveles de conocimientos identificados en relación al SND sugiere que el éxito en las tareas utilizadas en este estudio, en un alto porcentaje de los casos, no parece radicar en un conocimiento profundo, sino más bien parece deberse al uso de criterios mecánicos como trasladar comas o poner ceros. A menudo los alumnos parecen demostrar un nivel de conocimiento adecuado en relación a estos conceptos al ser capaces de determinar la decena más próxima a un número dado, transformar cantidades estructuradas, determinar el número de centenas en un número dado o reconocer múltiples descomposiciones. Sin embargo, el grado de éxito alcanzado no asegura que posean un nivel de conocimiento afín.

Esto nos permitiría explicar porqué los alumnos que parecen poseer un conocimiento profundo sobre la estructura del SND, logrando realizar correctamente diferentes transformaciones, cuando justifican sus procedimientos, determinan la decena más próxima a un número dado y/o determinan el número de centenas, confunden el valor relativo con el de posición. Posiblemente se deba, tal y como señalan Bedoya y Orozco (1991) y Terigi y Wolman (2007), a que la escuela aborda el trabajo del SND a partir de conteos uno a uno, dejando de lado la importancia de la base 10 como elemento que permite realizar las descomposiciones polinómicas, convirtiendo esencialmente el paso de la unidad de orden inferior a una de orden superior en un proceso mecánico (Castro, Gorgorió y Prat, 2015b).

Los resultados obtenidos correspondientes al bloque de preguntas que evalúan aspectos del conocimiento del SND, por una parte, nos proporcionan una aproximación al tipo de alumnos con los que vamos a trabajar la aritmética y su didáctica en la formación inicial de maestros. Por otro lado, nos obligan a reconocer la dificultad que encierra el manejo del SND, no sólo para los niños, sino también para los futuros maestros. Tal y como apuntan Yang, Reys y Reys (2009), un primer paso para mejorar el conocimiento del sentido numérico en los niños es tomar medidas para mejorar el conocimiento que poseen sus maestros. Nuestra investigación puede contribuir a esta mejora dado que puede ayudar a una formación más sólida de los alumnos del GEP.

Coincidimos con Salinas (2007) en que es necesario tener en cuenta que los alumnos de magisterio adquirieron los conocimientos relativos al SND en edades tempranas, pero en los siguientes años de escolaridad obligatoria y no obligatoria ya no se enfatiza la enseñanza del SND de una forma explícita. Según Salinas (2007), esta situación origina dificultades en la compresión de estos conceptos que pueden llevar a errores conceptuales que en la mayoría de los casos persisten en la época adulta. Autores como Ortiz y González (2016) señalan que en muchas ocasiones los alumnos de magisterio inician su formación con un conocimiento matemático de los sistemas de numeración de tipo instrumental y memorístico, evidenciando un desconocimiento de la organización interna de los principios que los caracterizan, de las justificaciones de los algoritmos de las operaciones aritméticas elementales, y siendo incapaces de resolver tareas equivalentes en sistemas con agrupamientos distintos al usual. Profundizar en la complejidad que involucra el SND y sus relaciones, podría ayudar a que los futuros maestros posean una mejor comprensión de estos conceptos. Por ejemplo, incluir el uso de materiales concretos vinculados a múltiples representaciones y el uso de múltiples bases para mejorar la compresión del valor de posición (Nataraj y Thomas, 2009).

En lo que respecta a los resultados obtenidos en el bloque de preguntas que evalúan aspectos del conocimiento de los significados y relaciones de la adición y la sustracción, vemos que coinciden con resultados obtenidos en los escasos estudios similares que hemos encontrado publicados (Chapman, 2007; Castro, Gorgorió y Prat, 2014 a). Nuestros resultados sugieren que la mayoría de los alumnos que participan en este estudio parecen interpretar la suma y la resta como procedimientos distintos, reduciendo su significado a las acciones de añadir, unir y/o juntar para el caso de la suma y quitar para el caso de la resta. En la mayoría de los casos, estas operaciones también son definidas o asociadas claramente en base acciones como, dar, recibir, ganar, obtener y/o perder, entre otras. Observamos que son casi inexistentes otras interpretaciones de estas operaciones como, por ejemplo, interpretar la suma y la resta en base a desplazamientos en la recta numérica, interpretarlas en base a la noción de contar hacia adelante y hacia atrás, o interpretar la resta como suma con un sumando desconocido.

La concepción estereotipada de la suma y la resta y su interpretación como procedimientos distintos se ven reflejadas, entre otros aspectos, en los problemas aditivos que proponen los alumnos. Sus propuestas, esencialmente involucran un cambio de estado aumentando o disminuyendo, o una combinación de elementos con incógnita en la cantidad final. En muy pocas ocasiones involucran estructuras aditivas que requieran la utilización de relaciones del tipo parte-parte-todo para su resolución, ni tampoco sugieren la utilización de palabras clave con un significado matemático opuesto al que le atribuye la semántica del lenguaje natural. Esta situación coincide con lo expuesto por autores como Nesher (2000) y Martínez y Gorgorió (2004) en relación a los maestros y por Orrantia, González y Vicente (2005) en relación a los libros de texto.

Resolver los problemas de suma y resta que proponen los alumnos participantes en éste estudio, en la mayoría de los casos, sólo requiere un sencillo ejercicio de traducción directa del enunciado verbal al lenguaje matemático, apoyada en el uso de palabras clave. Posiblemente debido a que éstas son las situaciones a las que se han enfrentado con mayor frecuencia a lo largo de su experiencia escolar, siendo las situaciones que sus maestros les han propuesto y las que aparecían más a menudo en sus libros de texto (Castro, Gorgorió y Prat, 2014b). Esto explicaría porque cuando se pregunta a los alumnos por la posibilidad de redactar enunciados con palabras o verbos con significado matemático opuesto al que le atribuye la semántica del lenguaje natural, en un alto porcentaje rechazan la idea y proponen su utilización en un sentido no matemático, o las utilicen como palabras clave haciendo más de una operación.

Asimismo, coincidimos con Orrantia, González y Vicente (2005) en que la utilidad práctica de las matemáticas se refleja, entre otros aspectos, en la resolución de situaciones problemáticas verbales. Estas situaciones ayudan a los alumnos a desarrollar habilidades necesarias para aplicar conocimientos matemáticos a situaciones del mundo real. Por ello, consideramos importante promover la reflexión en los futuros maestros sobre qué tipo de situaciones son las que permitirán a sus alumnos desarrollar estas capacidades. Exponer a los alumnos a un mismo de tipo de problemas aditivos centrado en el uso de indicios verbales como indicador de la operación a realizar, limita su desarrollo del cálculo relacional y los centra en el aprendizaje del cálculo numérico (Vergnaud, 1991). Por otra parte, seguir los indicios verbales aparentemente disminuye la dificultad en la resolución de un problema pero, como apuntan Orrantia, González y Vicente (2005), no alcanzar un nivel de razonamiento óptimo en los PAEV aditivos provocará a la larga una mayor dificultad en la resolución de problemas de mayor complejidad.

Asimismo, las concepciones erróneas y estereotipadas evidenciadas por los futuros maestro en relación a los significados y relaciones de la adición y la sustracción, pueden tener repercusiones didácticas importantes. Entre estas concepciones erróneas mostradas encontramos, entre otras, que restar nunca implica añadir y que el tipo de palabras utilizadas en los problemas aditivos que se proponen a los niños siempre deben corresponder con la operación a realizar. La variedad de significados que se den a la adición y la sustracción puede ayudar a los niños a comprender sus propiedades básicas, preparándolos para el aprendizaje y la comprensión de los algoritmos de cálculo (Cid, Godino y Batanero, 2004). No obstante, si el significado de estas operaciones queda simplificado a verbos de acción – como aumentar, añadir y unir para el caso de la suma, y quitar o disminuir para la resta –, por una parte, dificultará que los alumnos puedan inferir alguna regla para realizar estas operaciones y. por otra, los puede llevar a considerar como situaciones de suma o resta muchas que no lo son (Godino, Font y Wilhelmi, 2006).

Consideramos que la diversidad de perfiles de conocimiento conceptual aditivo inicial identificados en este estudio tiene implicaciones importantes para la formación inicial maestros puesto que indica que los alumnos presentan una variedad de conocimientos fragmentados e incompletos en relación a los conceptos sobre los que se espera construir en didáctica. La propuesta de Crooks y Alibali (2014) del conocimiento conceptual como un conocimiento compuesto de dos dimensiones –- el conocimiento de los principios generales y el conocimiento subyacente a los procedimientos – nos ha permitido observar que el éxito en las tareas planteadas en el cuestionario, en un alto porcentaje de los casos, no parece radicar en un conocimiento profundo sino más bien parece deberse al uso de criterios mecánicos para resolverlas.

Por otra parte, la diversidad de perfiles de conocimiento identificados en este estudio nos plantea el reto de evaluar hasta qué punto y de qué manera se puede enseñar significativamente a los estudiantes del GEP de forma que permita ayudarles a construir un conocimiento sólido del contenido para la enseñanza de las matemáticas en el aula de primaria. Los resultados obtenidos podrían resultar útiles a los formadores de maestro indicándoles la necesidad de poner énfasis en los déficits e ideas falsas que tienen los futuros maestros en relación a estos conceptos. Por otra parte, les podrían ayudar a planificar estrategias más adecuadas para ayudarles. En este sentido, las tareas utilizadas en este estudio para determinar el conocimiento conceptual en relación al SND y en relación a los significados y relaciones de la adición y la sustracción, suponen un referente para explorar el conocimiento inicial con el que los alumnos inician la didáctica de la adición y la sustracción, orientando la toma de decisiones sobre como planificar las asignaturas de didáctica.

Este estudio proporciona una primera aproximación al conocimiento conceptual aditivo con el que los alumnos del GEP inician la didáctica de la adición y sustracción en el contexto de dos de los 4 compontes del CMF aditivo establecidos. Consideramos que iniciamos una línea de investigación que tendría como paso siguiente analizar el conocimiento que poseen los alumnos del GEP en los demás componentes del CMF. Esperamos que la caracterización del CMF aditivo, como instrumento que permite identificar perfiles de conocimiento aditivo en los estudiantes del GEP, pueda orientar la planificación de las clases de didáctica de la aritmética. Esperamos que la revisión teórica realizada del conocimiento conceptual y procedimental en matemáticas en el contexto de este estudio sirva para promover la discusión entre los investigadores sobre cómo abordar el estudio del conocimiento conceptual y procedimental, reconociendo los progresos y las dificultades asociadas a éste. Esperamos que este trabajo haya proporcionado elementos para orientar la elaboración de instrumentos de evaluación en matemáticas, en pequeña o gran escala, como por ejemplo la elaboración de pruebas de diagnóstico escolares o de acceso a la universidad y apuntamos la necesidad de considerar en la elaboración de dichos instrumentos las distintas dimensiones de los conocimientos a evaluar, reconociendo las relaciones existentes, así como las limitaciones en su medición (ver en Castro, Prat y Gorgorió, 2016).

REFERENCIAS

Referencias

Aballe, M. (2000). Aproximación al nivel de conocimiento matemático básico de futuros maestros de primaria. *Uno Revista de Didáctica de las Matemáticas, 25,* 89-107.Barcelona: Graó.

Ball, D.L., Thames, M.H., y Phelps, G. (2008). Content knowledge for teaching: What makes it special? *Journal of Teacher Education, 59*(5), 389-407.

Ball, D. L., Hill, H. C., y Bass, H. (2005). Knowing mathematics for teaching: Who knows mathematics well enough to teach third grade, and how can we decide? *American Educator, 29*(1) , 14–17, 20–22, 43–46.

Barba, J.J. (2013). La investigación cualitativa en educación en los comienzos del siglo XXI. En M. Díaz y A. Giráldez Hayes (Coords.), *Investigación cualitativa en educación musical* (pp. 23-38). Barcelona, España: Grao,

Baroody, A. (2003). The development of adaptive expertise and flexibility: The integration of conceptual and procedural knowledge. In A. Baroody & A. Dowker (Eds), *The development of arithmetic concepts and skills: Constructing adaptive expertise* (pp. 1- 33). Mahwah, NJ: Erlbaum.

Baroody, A., Feil, Y., y Johnson, A. (2007). An alternative reconceptualization of procedural and conceptual knowledge. *Journal for Research in Mathematics Education*, 38, pp. 115–131.

Baroody, A., y Ginsburg, P. (1986): The relationship between initial meaningful and mechanical knowledge of arithmetic. In J. Hiebert (Ed.), *Conceptual and procedural knowledge: the case of mathematics* (pp.75-112). Hillsdale. NJ:Lawrence Associates.

Baroody, A., y Lai, M. (2007). Preschoolers' understanding of the addition–subtraction inversion principle: A Taiwanese sample. *Mathematical Thinking and Learning, 9*, 131–171.

Baumert, J., Kunter, M., Blum, W., Brunner, M., Voss, T., Jordan, A., Klusmann U, Krauss S, Neubrand M. y Tsai Y. (2010). Teachers' mathematical knowledge, cognitive activation in the classroom, and student progress. *American Educational Research Journal*, *47*, 133–180.

Bedoya, E., y Orozco, M. (1991). El niño y el sistema de numeración decimal. *Comunicación, Lenguaje y Educación*, 3(11-12), pp. 55-62.

Bisquerra, R. (2009). Metodología de la investigación educativa. *Madrid:* La Muralla.*Muralla.*

Blöte, A., Van der Burg, E., y Klein, A. (2001). Students' flexibility in solving two-digit addition and subtraction problems: Instruction effects. *Journal of Educational Psychology, 93(3)*, 627-638.

Broitman, C. (1999). Sumar no es siempre agregar ni restar es siempre quitar. *En Las operaciones en el primer ciclo* (pp. 9 – 21). Buenos Aires: Ediciones Novedades Educativas.

Byrnes, J., y Wasik, B. (1991). Role of conceptual knowledge in mathematical procedural learning. *Developmental Psychology*, 27(5), pp. 777-786. http://dx.doi.org/10.1037/0012-1649.27.5.777

Canobi, K. (2004). Individual differences in children's addition and subtraction knowledge. *Cognitive Development, 19*, 81-93.

Canobi, K. (2005). Children's profiles of addition and subtraction understanding. *Journal of Experimental Child Psychology, 92*, 220-246.

Canobi, K. (2009). Concept–procedure interactions in children’s addition and subtraction. *Journal of Experimental Child Psychology, 102*, 131–149.

Canobi, K., y Bethune, N. (2008). Number words in young children’s conceptual and procedural knowledge of addition, subtraction and inversion. *Cognition, 108*, 675–686.

Canobi, K., Reeve, R., y Pattison, P. (1998). The Role of Conceptual Understanding in Children's Addition Problem Solving. *Developmental Psychology, 34(5)*, 882-891.

Canobi, K., Reeve, R., y Pattison, P. (2002) Young Children's Understanding of Addition Concepts. *Educational Psychology: An International Journal of Experimental Educational Psychology, 22(5)*, 513-532.

Canobi, K., Reeve, R., y Pattison, P. (2003). Patterns of Knowledge in Children's Addition. *Developmental Psychology, 39(3)*, 521-534.

Cañadas, M.C., y Castro E. (2011). Aritmética de los números naturales. Estructura aditiva. En Segovia y Rico (coord.). *Matemáticas para maestros de Educación Primaria (pp. 75-78).* Madrid: Pirámide.

Carpenter, T.P., Fennema, E., Franke, M.L, Levi, L.y Empson, S.B. (1999). *Children’s Mathematics. Cognitively Guided Instruction.* Portsmouth: Heinemann.

Carrillo, J., Climent, N., Contreras, L.C., y Muñoz-Catalán, M. C. (2013). Mathematics teacher specialized knowledge. En B. Ubuz, Ç. Haser y M. A. Mariotti (Eds.) *Proceedings of the 8th CERME*. Turkey.

Castañeda, A. (2000). Sentido numérico. *Números,* 43, pp. 267-270.

Castro, A., Gorgorió, N., Prat, M. (2014a). Una secuencia de formación para maestros: reflexionado acerca de los PAEV aditivos de una etapa. En R.Flores (Ed.), *Acta Latinoamericana de Matemática Educativa Vol. 28*. (pp. 1475-1482). Barranquilla: RELME.

Castro, A., Gorgorió, N., Prat, M. (2014b). Indicios verbales en los PAEV aditivos planteados por estudiantes para maestro. En M. T. González, M. Codes, D. Arnau y T. Ortega (Eds.), *Investigación en Educación Matemática XVIII* (pp. 217-226). Salamanca: SEIEM.

Castro, A., Gorgorió, N., Prat, M. (2015a). Additive conceptual knowledge for admission to the degree in primary education: an ongoing research. In Di Paola, B., Fazio., *Teaching and learning mathematics: resources and obstacles, Proceedings of CIEAEM 67, Quaderni di ricerca diddattica*, 25-2, (pp. 237-243). Aosta.

Castro, A., Gorgorió, N., Prat, M. (2015b). Conocimiento Matemático Fundamental en el Grado de Educación Primaria: Sistema de numeración decimal y valor posicional. En C. Fernández, M. Molina y N. Planas (eds.), *Investigación en Educación Matemática XIX* (pp. 221-228). Alicante: SEIEM.

Castro, A., Mengual, E., Prat, M., Albarracín, L., y Gorgorió, N. (2014). Conocimiento matemático fundamental para el grado de educación primaria: inicio de una línea de investigación. En M. T. González, M. Codes, D. Arnau y T. Ortega (Eds.), *Investigación en Educación Matemática XVIII* (pp. 227-236). Salamanca: SEIEM.

Castro, A., Prat, M., y Gorgorió, N. (2016). Conocimiento conceptual y procedimental en matemáticas: su evolución tras décadas de investigación. *Revista de Educación,* 374, 43-68.

Chapman, O. (2007). Facilitating preservice teachers' development of mathematics knowledge for teaching arithmetic operations. Journal of Mathematics Teacher Education, 10, 341–349.

Chick, H.L. (2003, Noviembre-Diciembre). Pre-service teachers' explanations of two mathematical concepts. Documento presentado en *Annual Conference of the Australian Association for Research in Education*, Auckland, New Zealand. Recuperado de: http://www.aare.edu.au/data/publications/2003/chi03413.pdf

Cid, E., Godino, J. y Batanero, C. (2004). Didáctica de los sistemas de numéricos para maestros. Adición y sustracción; Multiplicación y división. En Godino (coord.). *Didáctica para Maestros (pp.187-219). Proyecto Edumat- Maestros.* Ciudad:Editorial.

Creswell, J. W. (2012). *Educational research: Planning, conducting, and evaluating quantitative*. Upper Saddle River, NJ: Pearson Education.

Crooks, N., Alibali, M. (2014). Defining and measuring conceptual knowledge in mathematics. *Developmental Review*, 34(4), pp. 344-377.

http://dx.doi.org/10.1016/j.dr.2014.10.001

De Jong, T., y Ferguson-Hessler, M. (1996). Types and qualities of knowledge. *Educational psychologist, 31(2)*, 105-113.

Dickson, L., Brown, M. y Gibson, O. (1991). *El aprendizaje de las matemáticas*. Barcelona: Labor.

Dubé, A., y Robinson, K. (2010). The relationship between adults' conceptual understanding of inversion and associativity. *Canadian Journal of Experimental Psychology/Revue canadienne de psychologie expérimentale, 64(1)*, 60-66.

Farrington-Flint, L., Canobi, K. H., Wood, C., y Faulkner, D. (2007). The role of relational reasoning in children's addition concepts. *British Journal of Developmental Psychology, 25(2)*, 227-246.

Fennema, E., y Franke, L.M. (1992). Teachers' knowledge and its impact. In D.A. Grouws (Ed.), *Handbook of research on mathematics teaching and learning* (pp. 147-164). New York, NY: MacMillan.

Flick, U. (2009). *An introduction to qualitative research*. London: Sage.

Font, V. (2005). Consideraciones sobre la didáctica de las matemáticas en la formación inicial de maestros. *Educar*, 32, 15-22.

Gilmore, C., y Bryant, P. (2006). Individual differences in children's understanding of inversion and arithmetical skill. *British Journal of Educational Psychology, 76*, 309-331.

Gilmore, C., y Bryant, P. (2008). Can children construct inverse relations in arithmetic? Evidence for individual differences in the development of conceptual understanding and computational skill. *British Journal of Developmental Psychology, 26(3)*, 301-316.

Gilmore, C., y Papadatou-Pastou, M. (2009). Patterns of individual differences in conceptual understanding and arithmetical skill: A meta-analysis. *Mathematical Thinking and Learning*, 11(1-2), 25-40.

Godino, J., Font, V., Konic, P., y Wilhelmi, M. (2009). El sentido numérico como articulación flexible de los significados parciales de los números. *JM* Cardeñoso y M. Peñas (2009), *Investigación en el aula de Matemáticas. Sentido Numérico*, 117-184.

Godino, J. D., Font V., Wilhelmi, M., R. (2006) "Análisis ontosemiótico de una lección sobre la suma y la resta", en *Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa,* número especial, pp. 131-155.

González, A. (2003). Los paradigmas de investigación en las ciencias sociales. *Islas, 45*(138), 125-135.

Gutiérrez, A. G., Gómez, P., y Rico, L. (2016). conocimiento matemático sobre números y operaciones de los estudiantes de magisterio (mathematical knowledge of numbers and operations in spanish future primary teachers). *Educación XX1*, *19*(1), 135.

Hiebert, J., y Lefevre, P. (1986): Conceptual and procedural knowledge in mathematics: An introductory analysis. In J. Hiebert (Ed.), *Conceptual and procedural knowledge: the case of mathematics.* Hillsdale, NJ: Lawrence Associates, pp. 1-27.

Hiebert, J., y Wearne, D. (1996). Instruction, understanding, and skill in multidigit addition and subtraction. *Cognition and Instruction, 14(3)*, 251– 283.

Hopkins, T. M., y Cady, J. A. (2007). Deepening Teachers' Understanding of Place Value. *Teaching Children Mathematics,* 13, pp. 434-437.

Kilpatrick, J., Swafford, J., y Findell, B. (Eds.). (2001). *Adding it up: Helping children learn mathematics*. Washington, DC: National Academy Press.

Lacasa, J.M. y Rodríguez, J.C. (2013). Diversidad de centros, conocimientos y actitudes hacia la enseñanza de las matemáticas de los futuros maestros en España. En IEA (ed.) *TEDS-M Informe español. Estudio Internacional sobre la formación inicial en matemáticas de los maestros*. Volumen II. Análisis secundario. (pp. 63-108). Madrid: Ministerio de Educación, Cultura y Deporte.

Latorre, A., Arnal, J., y Del Rincón, D. (1996). *Bases metodológicas de la investigación educativa*. Barcelona: Hurtado.

Llinares, S. (2013). Conocimiento de matemáticas y tareas en la formación de maestros. En A, Ramirez y Y, Morales (Coord.), Memoria del *I Congreso de Educación Matemática de América Central y El Caribe* (pp. 2-16). Santo Domingo, República Dominicana: CEMACYC.

Lin, F. L., y Rowland, T. (2016). Pre-Service and In-Service Mathematics Teachers' Knowledge and Professional Development. In The Second Handbook of Research on the Psychology of Mathematics Education (pp. 483-520). SensePublishers.

Liñan, M., Contreras, L., Barrera, V. (2016). Conocimiento de los Temas (KoT). En J. Carrillo, L.C. Contreras y M. Montes (Eds.), *Reflexionando sobre el conocimiento del profesor. Actas de las II Jornadas del Seminario de Investigación de Didáctica de la Matemática de la Universidad de Huelva* (pp. 12 -20). SGSE: Huelva.

Linsell, C., y Anakin, M. (2012). Diagnostic Assessment of Pre-Service Teachers' Mathematical Content Knowledge. *Mathematics Teacher Education and Development 14*(2), 4–27.

Linsell, C., y Anakin, M. (2013). Foundation Content Knowledge: What do pre-service teachers need to know? *In V. Steinle, L. Ball y C. Bardini (Eds.), Mathematics Eduction: Yesterday, today and tomorrow (Proc. Of the 36th annual conference of MERGA)* (pp. 442-449). Melbourne, VIC: MERGA.

Ma, L. (1999). *Knowing and teaching elementary mathematics: teachers' understanding* of fundamental mathematics in China and the United States. Hillsdale, NJ: Erlbaum.

Martínez, J. (2011). Métodos de investigación cualitativa. *Revista de Investigación Silogismo*, 1(08).
Recuperado de http://cide.edu.co/ojs/index.php/silogismo/article/viewFile/64/53

Martínez, M. (2006). La investigación cualitativa (síntesis conceptual). *Revista de investigación en psicología*, *9*(1), 123-146.

Martínez, M. y Gorgorió, N. (2004). Concepciones sobre la enseñanza de la resta: un estudio en el ámbito de la formación permanente del profesorado. Revista Electrónica de Investigación Educativa, 6 (1). Consultado el día 5 de febrero de 2015 en: http://redie.uabc.mx/vol6no1/contenido-silva.html

Maza, C. (1991). *Enseñanza de la suma y de la resta.* Madrid: Editorial Síntesis.

Maza, C. (2001). Adición y sustracción. Estructura multiplicativa. En E. Castro (Ed.), *Didáctica de la matemática en la Educación Primaria* (pp. 177-200). Síntesis: Madrid.

Montes, M. A., Contreras, L. C. y Carrillo., J. (2013). Conocimiento del profesor de matemáticas: Enfoques del MKT y del MTSK. En A. Berciano, G. Gutiérrez, A. Estepa y N. Climent (Eds.), *Investigación en Educación Matemática XVII* (pp. 403-410). Bilbao: SEIEM.

Montes, M., Contreras, L., Liñán, M., Muñoz-Catalán, M., Climent, N., y Carrillo, J. (2015). Conocimiento de aritmética de futuros maestros: debilidades y fortalezas. *Revista de Educación,* 367, 36-62.

National Council of Teachers of Mathematics (2000). *Principles and Standards for School Mathematics*. Reston, VA: NCTM.

Nataraj, M., y Thomas, M. (2009). Developing Understanding of Number System Structure from the History of Mathematics. *Mathematics Education Research Journal*, 21(2), pp. 96-115.

http://dx.doi.org/10.1007/bf03217547

Nesher, P. (1999). El papel de los esquemas en la resolución de problemas de enunciado verbal. *Suma*, *31*, 19-26.

Nesher, P. (2000). Posibles relaciones entre lenguaje natural y lenguaje matemático. En N. Gorgorió, J. Deulofeu y A. Bishop (comp.), *Matemáticas y educación: Retos y cambios desde una perspectiva internacional* (pp. 109-121). Barcelona: Graó.

Nunes, T., y Bryant, P. (2003). *Las matemáticas y su aplicación: La perspectiva del niño*. Buenos Aires, Argentina: Siglo XXI.

Orrantia, J. (2003). El rol del conocimiento conceptual en la resolución de problemas aritméticos con estructura aditiva. *Infancia y Aprendizaje*, *26*(4), 451-468.

Orrantia, J. (2006). Dificultades en el aprendizaje de las matemáticas: una perspectiva evolutiva. *Revista de Psicopedagogía, 23*(71), 158-180.

Orrantia, J., González, L., y Vicente, S. (2005). Un análisis de los problemas aritméticos en los libros de texto de Educación Primaria. *Infancia y Aprendizaje 28*(4), 429-451.

Ortiz, A. L., González, J. L. y Gallardo, J. (2013). Avances en el estudio de la comprensión del sistema de numeración decimal en estudiantes del Grado de Maestro de Educación Primaria. En A. Estepa y N. Climent (Eds.) *Investigación en Educación Matemática*. Comunicaciones de los grupos de investigación. XVI Simposio de la SEIEM. Baeza, España: SEIEM, pp. 303-316.

Oyarzún, C., y Salvo, S. (2010). Conocimiento conceptual y dificultades en la resolución de problemas verbales aritméticos en el nivel inicial. *Revista de Estudios y Experiencias en Educación*, 9(18), 13-33.

Pastel, P., y Canobi, K. (2010). The role of number words in preschoolers' addition concepts and problem-solving procedures. *Educational Psychology, 30(2*), 107-124.

Petrou, M., y Goulding, M. (2011). Conceptualising teachers' mathematical knowledge in teaching. En Rowland y Ruthven (coord.). *Mathematical knowledge in teaching* (pp. 9-26). Londres: Springer.

Porras, J. y Vivas, L. (2009). *Equivalencias y valor de posición: elementos que orientan el funcionamiento del sistema de numeración decimal.* En H. Blanco (Coord.), Memoria del 10º Encuentro Colombiano de Matemática Educativa. Pasto, Colombia. Recuperado de: http://asocolme.org/publicaciones-asocolme/memorias-ecme.

Puig, L., & Cerdán Pérez, F. (1988). *Problemas aritméticos escolares*. Madrid: Síntesis.

Riley, M.S., Greeno, J.G., y Heller, J.L. (1983). Development of children's problem-solving ability in arithmetic. In H.P. Ginsburg (Ed.) *The development of mathematical thinking* (pp.153-196). New York: Academic Press

Rittle-Johnson, B., y Koedinger, K. (2009). Iterating between lessons concepts and procedures can improve mathematics knowledge. *British Journal of Educational Psychology*, *79*, 483–500.

Rittle-Johnson, B. y Schneider, M. (2014). Developing conceptual and procedural knowledge of mathematics. To appear in R. Cohen Kadosh & A. Dowker (Eds.), *Oxford handbook of numerical cognition*. Oxford University Press.

Rittle-Johnson, B., Siegler, R., y Alibali, M. (2001). Developing conceptual understanding and procedural skill in mathematics: An iterative process. *Journal of educational psychology*, 93(2), pp. 346-362. http://dx.doi.org/10.1037/0022-0663.93.2.346

Rittle-Johnson, B., y Star, J. (2007). Does comparing solution methods facilitate conceptual and procedural knowledge? An experimental study on learning to solve equations. *Journal of Educational Psychology*, 99(3), pp. 561–574. http://dx.doi.org/10.1037/0022-0663.99.3.561

Robinson, K., y Dubé, A. (2009). Children’s understanding of addition and subtraction concepts. *Journal of experimental child psychology*, *103(4)*, 532-545.

Robinson, K., y Ninowski, J. (2003). Adults' understanding of inversion concepts: How does performance on addition and subtraction inversion problems compare to performance on multiplication and division inversion problems? *Canadian Journal of Experimental Psychology/Revue canadienne de psychologie expérimentale*, *57(4)*, 321-330.

Robinson, K., Ninowski, J., y Gray, M. (2006). Children’s understanding of the arithmetic concepts of inversion and associativity. *Journal of experimental child psychology*, *94(4)*, 349-362.

Ruesga, P., y Guimaraes, G. (2011). Sistema de numeración decimal: un instrumento para seleccionar libros de texto de los tres primeros años de enseñanza. *XIII Conferência Interamericana de Educação Matemática.* Recife, Brasil. Disponible http://www.gente.eti.br/lematec/CDS/XIIICIAEM/artigos/399.pdf

Ruesga, M., y Guimaraes, G. (2012). Los aspectos didácticos básicos del sistema de numeración decimal en los libros de texto. *Revista Eletrônica de Educação*, 6(1), pp. 104-128. Disponible en http://www.reveduc.ufscar.br.

Ruiz, F., Molina, M., Lupiañez, L., Segovia, I., Flores, P. (2009). Formación matemática del profesorado de Primaria en la Universidad de Granada: una adaptación al EEES. *Electronic Journal of Research in Educational Psychology, 17, 7 (1)*, 425-454.

Rowland, T. and Turner, F. (2007) Developing and using the Knowledge Quartet: a framework for the observation of mathematics teaching. *The Mathematics Educator 10*(1), pp. 107-124.

Rowland, T., Huckstep, P., y Thwaites, A. (2003). The Knowledge Quartet. *Proceedings of the British Society for Research into Learning Mathematics*, *23*(3), 97-102.

Ryan, J., y McCrae, B. (2005/6). Assessing pre-service teachers' mathematics subject knowledge. *Mathematics Teacher Education and Development*, 7, 72-89.

Salinas, M. (2003). Comprensión de los algoritmos de las operaciones aritméticas en estudiantes de Magisterio. En E. Castro Martínez (Coord.), *Investigación en educación matemática: séptimo Simposio de la Sociedad Española de Investigación en Educación Matemática* (pp. 339-348). Granada: Universidad de Granada.

Salinas M. (2007). Errores sobre el sistema de numeración decimal en estudiantes de Magisterio. En M. Camacho, P. Flores y P. Bolea (Eds.), *Investigación en Educación Matemática XI*. La Laguna, España: SEIEM, pp. 381- 390.

Sandín, M. P. (2003). Investigación cualitativa en educación. Fundamentos y Tradiciones. Madrid: McGraw-Hill.

Schneider, M., y Stern, E. (2009). The inverse relation of addition and subtraction: A knowledge integration perspective. *Mathematical Thinking and Learning, 11(1-2)*, 92-101.

Senk, S., Tatto, M., Reckase, M., Rowley, G., Peck, R., y Bankov, K. (2012). Knowledge of future primary teachers for teaching mathematics: An international comparative study. *ZDM, 44*(3), 307–324.

Shulman, L.S. (1986). Those who understand: Knowledge growth in teaching. *Educational Researcher, 15* (2), 4-14.

Shulman, L.S. (1987). Knowledge and teaching: Foundations of the new reform. *Harvard Educational Review, 57*(1), 1-22.

Solà J. (2009). Els paradigmes científics en la investigació educativa i el model de camp psicològic. *Temps d'educació*, (37), 235-252.

Son, J. W. (2016). Preservice teachers’ response and feedback type to correct and incorrect student-invented strategies for subtracting whole numbers. *The Journal of Mathematical Behavior*, 42, 49-68.

Star, J. (2005). Reconceptualizing procedural knowledge. *Journal for Research in Mathematics Education,* 36(5), pp. 404–411.

Terigi, F. y Wolman, S. (2007). Sistema de numeración: consideraciones acerca de su enseñanza. *Revista Iberoamericana de Educación,* 43, pp. 59-83.

Thanheiser, E. (2009). Preservice elementary school teachers' conceptions of multidigit whole numbers. *Journal for Research in mathematics Education*, 251-281.

Thompson, I. (2000). Teaching place value in the UK: time for a reappraisal? *Educational Review*, 52(3), pp. 291-298. http://dx.doi.org/10.1080/713664046

Tsao, Y. L. (2011). Exploring the connections among number sense, mental computation performance, and the written computation performance of elementary preservice school teachers. *Journal of College Teaching & Learning (TLC)*, 1(12), pp. 71-90. http://dx.doi.org/10.19030/tlc.v1i12.2022

Vergnaud, G. (1982). A classification of cognitive tasks and operations of thought involved in addition and substraction problems. In T.P.Carpenter, J.M.Moser y T.A.Romberg (eds.), *Additions and Subtraction:A Cognitive Perspective* (pp.39-59). Hillsdale, NJ: Lawrence Erlbaum Associates.

Vergnaud, G. (1991). *El niño, las matemáticas y la realidad. Problemas de la enseñanza de las matemáticas en la escuela primaria*. México: Trillas.

Vicente, S., Orrantia, J., y Verschaffel, L. (2008). Influencia del conocimiento matemático y situacional en la resolución de problemas aritméticos verbales: ayudas textuales y gráficas. *Infancia y Aprendizaje*, 31(4), 463-483.

Yang, D. (2007). Investigating the strategies used by pre-service teachers in Taiwan when responding to number sense questions. *School Science and Mathematics*, 107(7), pp. 293-301. http://dx.doi.org/10.1111/j.1949-8594.2007.tb17790.x

Yang, D. C., Reys, R. E., y Reys, B. J. (2009). Number sense strategies used by pre-service teachers in Taiwan. *International Journal of Science and Mathematics Education*, 7(2), pp. 383-403. http://dx.doi.org/10.1007/s10763-007-9124-5

ANEXOS

Anexo 1: Cuestionario toma de datos definitivos

En el marc de la meva tesi doctoral, estic fent una recerca sobre els coneixements que els estudiants del Grau d'Educació Primària necessiten per iniciar l'estudi dels processos d'ensenyament i aprenentatge de l'aritmètica dels nombres naturals. És per això que et demanem la teva col·laboració responent aquest qüestionari. Gràcies per la col·laboració.   En el marco de mi tesis doctoral, estoy profundizando en los conocimientos que los estudiantes del Grado de Educación Primaria necesitan para iniciar el estudio de los procesos de enseñanza y aprendizaje de la aritmética de los números naturales. En este contexto te pedimos tu colaboración respondiendo al siguiente cuestionario. Agradeciendo de antemano tu ayuda y colaboración.   Ángela Castro

Nombre: ______________________________________Curso: _________Fecha:

Instrucciones: Escribe todos los cálculos en este papel.

1.Escribe la decena más próxima de los siguientes números y explica por qué lo es.

43 es:	Porque:
36 es:	Porque:
68 es:	Porque:
65 es:	Porque:

2. ¿Es posible redactar el enunciado de un problema de resta con la palabra **añadir**? ¿Por qué? Da un ejemplo.

¿Es posible?:
¿Por qué?:
Ejemplo:

3. Explica qué entiendes por:

a) SUMAR

b) RESTAR

4. Utilizando **sólo números naturales**, elabora:

a) 2 problemas de suma, cada uno de los cuales que se resuelvan con una única operación y sean distintos entre sí.

P.1:
P.2:

b) 2 problemas de resta, cada uno de los cuales, se resuelvan con una única operación y sean distintos entre sí.

P.1:
P.2:

5. ¿Cuántas centenas hay en el número 130.025? ¿Cómo se escribe este número en palabras?

Número de centenas que hay:	Se escribe:

6. Completa y explica por qué:

50 centenas son =______ unidades = _______ miles.	Porque:

70 miles son= _______decenas = _______unidades	Porque:

7. ¿Cuál o cuáles de los siguientes verbos **asocias** con sumar? Márcalo (s) con una cruz. Luego organiza sólo el o los verbos que **asocias** con sumar en una columna vertical escribiendo y enumerando primero los verbos que te parezcan **claramente de suma**.

a) Juntar	d) Ganar	g) Combinar	j) Añadir
b) Agregar	e) Incrementar	h) Obtener	
c) Unir	f) Recibir	i) Aumentar	

Verbos que asocio claramente con suma:
Verbos que no asocio con suma:
Verbos que pueden ser de suma:

8. ¿Cuál(es) de las siguientes descomposiciones corresponde (n) al número 342? Enciérrala (s) en un círculo.

a) 3C + 4D + 2U
b) 30D + 42U
c) 2C + 14D + 2U
d) 1C + 2D + 42U
e) 34D + 2U

9. ¿Es posible redactar el enunciado de un problema de suma con la palabra **menos**? ¿Por qué? Da un ejemplo.

¿Es posible?:
¿Por qué?:
Ejemplo:

Anexo 2: Extracto de la planilla que recoge las respuestas de los maestros a la pregunta 2 del bloque de preguntas que evalúan el conocimiento del SND

Indentificar la decena más próxima a un número dado								
Alumno	**De 43 es:**	**Justificación**	**De 36 es:**	**Justificación**	**De 68 es:**	**Justificación**	**De 65 es:**	**Justificación**
1	4	"No pasa del 5 si fuese 45 la decena próxima sería 5"	4	"Porque el 6 está más cerca del 10 que del 0. Pasa el 5"	7	"Porque la unidad es mayor que 5"	7	"Porque la unidad es mayor que 5"
2	40	"Nos fijamos en la unidad 3 y como está más próxima del 0 es 40 y no 50"	40	"36 para llegar al 40 le faltan 4 números, en cambio para llegar al 30 le sobran 6, por lo tanto el proceso será más facil al 40 que no al 30"	70	"Del 68 al 70 van 2, en cambio del 68 al 60 van 98, por lo que aproximamos al 70"	60 o 70	"Puedes aproximar al 60 o al 70, ya que para llegar al 60 o al 70 me faltan 5"
3	40	"Porque la unidad 3 no supera el 5, por tanto se apróxima a 40"	40	"Porque la unidad 6 supera a el 5, por tanto se apróxima a 40"	70	"Porque la unidad 8 supera a el 5, por tanto se apróxima a 70"	60 o 70	"Porque la unidad 5 se encuentra en un punto intermedio"
4	40	"Porque de 40 a 43 sólo hay 3 unidades"	40	"Porque sólo faltan 4 unidades para llegar"	70	"Porque sólo faltan 2 unidades para llegar a la decena más cercana"	60	"Porque es la mitad de la decena y resulta más facil pensar en la decena 60 que en la 70"
5	4	"Ya que apartir de la mitad del 5 se concidera una decena más"	4	"Porque el 6 es más grande que el 5, por tanto la decena más proxima es el 4"	7	"porque el 8 es más grande que 5 y esta más proximo a 10, por tanto se redondea a 70"	6	"Porque está justo a la mitad por tanto se concidera que la decena 6 es la más próxima"
6	4	"Porque el 3 es menor a 5"	4	"Porque el 6 es mayor a 5"	7	"Porque el 6 es mayor a 5"	7	"Porque el 7 se incluye para redondear hacia arriba"
7	4	"Para aproximar la decena y saber si se aproxima más al 5 nos fijamos en la unidad. Si es más pequeña de 5 redondeamos para abajo, sino al reves"	4	"La unidad es mayor que 5 por tanto 4"	7	"La unidad es mayor que 5 por tanto 7"	6	"La unidad es 6"
8	40	"Las unidades no llegan a la mitad de una decena"	40	"Las unidades son supueriores a la mitad de una decena"	70	"Las unidades son supueriores a la mitad de una decena"	60 o 70	"Está exactamente en la mitad"
9	40	"Si las unidades de una decena no llegan a la mitad de esta, se redondan hacia abajo, a si se mantiene la decena"	40	"La unidad sobrepasa la mitad de la decena y asi redondeamos a la decena siguiente"	70	"La unidad sobrepasa la mitad de la decena y asi redondeamos a la decena siguiente"	70	"La unidad corresponde a la mitad de la decena y se redondea a 70 porque esta más aproximada a la siguiente"
10	40	"3<5 ya que 5 es el número medio entre 0 y 10"	40	"6>5"	70	"8>5"	70	"5 está en el medio entre 60 y 70"

Anexo 3: Extracto de la planilla que recoge las respuestas de los maestros a la pregunta 3 del bloque de preguntas que evalúan el conocimiento del SND

Determinar el número de centenas en el número 130.025. Escribir 130.025 en palabras		
Alumno	**Nº centenas**	**Escritura de 130.025 en palabras**
30	1110	"Ciento treinta mil veinticinco"
31	0	"Ciento treinta mil veinticinco"
32	100000	"Cien mil"
33	0 y 1	"Ciento treinta mil veintycinco"
34	130000	"Ciento treinta mil veinticinco"
35	1300	"Ciento treinta mil veinticinco"
36	1300	"Ciento treinta mil veinticinco"
37	0	"Cero"
38	1300	"Se hace una divisón para saber cuantas hay"
39	130	"Ciento- treinta- mil- veinticinco"
40	0	"Cero"
41	100	"Ciento treinta mil veinticinco"
42	0	"Ciento treinta mil veinticinco"
43	100(130)	"Ciento treinta mil veiticinco"
44	1	"Ciento treinta mil veinte y cinco"
45	1300	"Ciento treinta mil veinticinco"
46	1300	"Ciento treinta mil, veinticinco"
47	1300	"Mil trecientos"
48	0	"Ciento treinta mil, veinticinco"
49	0	"Ciento treinta mil veinte y cinco"
50	N/C	N/C
51	0	"Cero"
52	1300	"Ciento treinta mil veinticinco"
53	0,25	"Cero coma veinticinco"
54	1	"Ciento treinta mil veiticinco"
55	1	"Ciento treinta mil veiticinco"
56	0	"Ciento treinta mil veiticinco"
57	0	"Ciento treinta mil veiticinco"
58	0	"Ciento treinta mil, veinticinco"
59	N/C	N/C
60	11	"Ciento treinta mil 25"

Anexo 4: Extracto de la planilla que recoge las respuestas de los maestros a la pregunta 4 del bloque de preguntas que evalúan el conocimiento del SND

Indentificar multiples descomposiciones	
Alumno	**Descomposición (es) que identifica**
70	A-B-C-E
71	A-B-E
72	A
73	A
74	A
75	A
76	A-B-C-E
77	A
78	A
79	A-B-C-E
80	A-B-C-E
81	A-B-E
82	A
83	A
84	A
85	A
86	A
87	A-B
88	A
89	A-B-E
90	A
91	A
92	A
93	A
94	E
95	B
96	A-B-C-E
97	A-D
98	A
99	A
100	A
101	A
102	B
103	A-B-C-E
104	A-B-C-E
105	A

Anexo 5: Extracto de la planilla que recoge las respuestas de los maestros a la pregunta 2 del bloque de preguntas que evalúan el conocimiento de los significados y la relación entre la adición y la sustracción

Ordenar verbos de suma																																	
Alumno	Asocia claramente											No asocia											Pueden ser										
	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J	N/C	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J	N/C	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J	N/C
1	*	1	*	*	1	1	*	*	1	*	*	*	*	*	1	*	*	*	*	*	*	*	1	*	1	*	*	*	1	1	*	*	*
2	*	1	*	*	*	*	*	*	1	1	*	*	*	*	1	*	*	1	*	*	*	*	1	*	1	*	*	*	*	*	1	*	*
3	1	1	*	*	1	*	*	*	1	1	*	*	*	1	1	*	*	1	*	*	*	*	*	*	*	*	*	1	*	1	*	*	*
4	1	1	1	1	1	1	*	1	1	1	*	*	*	*	*	*	*	*	*	*	*	1	*	*	*	*	*	*	1	*	*	*	*
5	*	1	*	*	*	1	*	1	1	1	*	*	*	*	*	*	*	1	*	*	*	*	1	*	1	1	1	*	*	*	*	*	*
6	*	1	*	*	*	*	*	*	*	1	*	*	*	1	*	*	1	1	1	*	*	*	1	*	*	1	1	*	*	*	1	*	*
7	1	1	1	*	1	1	*	*	1	1	*	*	*	*	*	*	*	1	*	*	*	*	1	1	1	*	1	1	*	*	*	1	*
8	1	1	1	1	*	*	*	*	*	1	*	*	*	*	*	*	*	1	1	*	*	*	*	*	*	*	1	1	*	*	1	*	*
9	1	*	1	*	*	1	*	1	*	1	*	*	*	*	*	*	*	*	*	*	*	1	*	1	*	*	1	*	*	*	1	*	*
10	1	1	1	1	1	1	*	*	1	1	*	*	*	*	*	*	*	1	*	*	*	*	*	*	*	*	*	*	*	1	*	*	*
11	1	1	1	1	1	1	*	*	1	1	*	*	*	*	*	*	*	1	*	*	*	*	*	*	*	*	*	*	*	1	*	*	*
12	1	1	*	*	*	*	*	*	*	*	*	*	*	*	*	*	1	1	1	1	*	*	*	*	1	1	1	*	*	*	*	1	*
13	*	*	*	*	1	*	*	*	1	1	*	1	*	*	*	*	*	1	*	*	*	*	*	1	1	1	*	1	*	1	*	*	*
14	1	1	1	1	1	1	*	1	1	1	*	*	*	*	*	*	*	1	*	*	*	*	*	*	*	*	*	*	*	1	*	*	*
15	*	1	*	1	1	*	*	*	1	1	*	1	*	1	*	*	*	1	*	*	*	*	*	*	*	*	*	*	*	1	*	1	*
16	1	1	*	*	1	*	*	1	1	*	*	*	*	*	*	*	*	*	*	*	*	1	*	*	1	*	*	1	1	*	*	1	*
17	1	1	*	1	1	*	*	*	1	1	*	*	*	1	*	*	*	1	*	*	*	*	*	*	*	*	*	1	*	1	*	*	*
18	1	1	1	*	*	*	*	*	1	1	*	*	*	*	*	*	*	1	*	*	*	*	*	*	*	1	1	1	*	1	*	*	*

Leyenda			
Verbos a organizar por alternativa			
A) Juntar	D) Combinar	G) Ganar	J) Añadir
B) Recibir	E) Unir	H)Aumentar	
C)Agregar	F) Obtener	I) Incrementar	
1= Elige verbo			
*= No eliege verbo			

Anexo 6: Extracto de la planilla que recoge las respuestas de los maestros a la pregunta 3 del bloque de preguntas que evalúan el conocimiento de los significados y la relación entre la adición y la sustracción

Alumno	Redactar 2 problemas de suma y 2 de resta que se resuelvan con una única operación							
	P.1.Suma	P.Clav	P.2.Suma	P.Clav	P.1.Resta	P.Clav	P.2.Resta	P.Clav
102	Combinación 1	si	Multiplicación	*	Cambio 2	si	Más de una operación	*
103	Cambio 1	si	N/C	*	Cambio 2	si	Comparación 1	no
104	Cambio 1	si	Más de una operación	*	N/C	*	N/C	*
105	Combinación 1	si	Combinación 1	si	Cambio 2	si	Cambio 2	si
106	Combinación 1	si	N/C	*	Cambio 3	si	N/C	*
107	Cambio 1	si	Combinación 1	si	Cambio 2	si	Cambio 2	si
108	Cambio 1	si	Más de una operación	*	Más de una operación	*	Ejercicio	*
109	Cambio 2	si	Ejercicio	*	Cambio 2	si	Ejercicio	*
110	Combinación 1	si	Cambio 1	si	Cambio 3	si	Cambio 2	si
111	Cambio 1	si	Combinación 1	si	Cambio 2	si	Ejercicio	*
112	Cambio 1	si	N/C	*	Cambio 2	si	N/C	*
113	Combinación 1	si	Combinación 1	si	Cambio 2	si	Cambio 3	si
114	Combinación 1	si	Combinación 1	si	Cambio 2	si	Cambio 3	si
115	Combinación 1	si	Combinación 1	si	Cambio 2	si	Combinación 1	si
116	Combinación 1	si	Combinación 1	si	Cambio 3	si	Ejercicio	*
117	Cambio 1	si	Ejercicio	*	Cambio 2	si	Comparación 4	si
118	Combinación 1	si	Combinación 1	si	Cambio 2	si	Cambio 2	si
119	Combinación 1	si	N/C	*	Cambio 2	si	Comparación 2	no
120	Combinación 1	si	Ejercicio	*	Cambio 2	si	Ejercicio	*
121	Cambio 1	si	Multiplicación	*	Cambio 2	si	Cambio 4	si
122	Cambio 1	si	N/C	*	Cambio 2	si	N/C	*
123	Cambio 1	si	Combinación 1	si	Cambio 4	si	Cambio 2	si
124	Cambio 1	si	Más de una operación	*	Cambio 2	si	Más de una operación	*
125	Ejercicio	*	Cambio 1	si	Cambio 2	si	Ejercicio	*
126	Combinación 2	no	Cambio 2	si	Cambio 2	si	Cambio 3	si
127	Más de una operación	*	Cambio 1	si	Más de una operación	*	Cambio 2	si
128	N/C		N/C	*	N/C	*	N/C	*
129	Combinación 1	si	Ejercicio	*	Cambio 3	si	Cambio 2	si
130	Cambio 1	si	Más de una operación	*	Cambio 2	si	Cambio 2	si
131	Combinación 1	si	Combinación 1	si	Cambio 2	si	Ejercicio	*
132	Cambio 1	si	Cambio 1	si	Cambio 2	si	Cambio 2	si
133	Combinación 1	si	Combinación 1	si	Cambio 2	si	Más de una operación	*
134	Cambio 1	si	Más de una operación	*	Cambio 2	si	Igulación 1	0
135	Cambio 1	si	Combinación 1	si	Cambio 2	si	Cambio 3	si
136	Combinación 1	si	Combinación 1	si	Enteros	*	Cambio 2	si
137	Combinación 1	si	Combinación 1	si	Cambio 2	si	Cambio 2	si
138	Ejercicio	*	Cambio 4	si	Cambio 2	si	Cambio 2	si
139	Cambio 1	si	Cambio 1	si	Cambio 2	si	Cambio 2	si
140	Cambio 1	si	N/C	*	Cambio 2	si	N/C	*
141	Cambio 1	si	Combinación 1	si	Cambio 2	si	Cambio 3	si
142	Combinación 1	si	Combinación 1	si	Cambio 2	si	Cambio 2	si
143	Cambio 1	si	Combinación 1	si	Cambio 2	si	Distintas operaciones	*
144	Cambio 1	si	Combinación 1	si	Cambio 2	si	Cambio 2	si
145	Combinación 1	si	Ejercicio	*	Cambio 2	si	Comparación 2	si
146	Combinación 1	si	Más de una operación	*	Combinación 2	si	Cambio 2	si
147	Combinación 1	si	Cambio 1	si	Igualación 1	si	Combinación 2	no
148	Combinación 1	si	Combinación 1	si	Cambio 2	si	N/C	*
149	Cambio 1	si	Enteros	*	Cambio 2	si	N/C	*
150	Cambio 1	si	Ejercicio	*	Comparación 2	si	Cambio 2	si
151	Combinación 1	si	Combinación 1	si	Cambio 2	si	Cambio 2	si
152	Cambio 1	si	Cambio 1	si	Cambio 2	si	Cambio 2	si
153	Cambio 1	si	Cambio 1	si	Cambio 2	si	Cambio 2	si
154	Cambio 1	si	Combinación 1	si	Cambio 2	si	Cambio 2	si
155	Combinación 1	si	Multiplicación	*	Comparación 1	si	División	*
156	Cambio 1	si	Combinación 1	si	Cambio 2	si	Cambio 2	si
157	N/C		N/C	*	N/C	*	N/C	*

Anexo 7: Extracto de la planilla que recoge las respuestas de los maestros a las preguntas 4 y 5 del bloque de preguntas que evalúan el conocimiento de los significados y la relación entre la adición y la sustracción

Alumno	Usar palabras clave con un significado matemático opuesto al que le atribuye el lenguaje natural					
	Usar añadir resolver con resta			Utilizar menos resolver con suma		
	Si/No	Porque	Ejemplo	Si/No	Porque	Ejemplo
1	Si	"Podemos usarla como información extra"	"En la clase de educación fisica han faltado 2 niños y hay que añadir a Pedro. Si han faltado 3 niños de 10 que son en total, ¿cuántos niños han asistido a clase?"	Si	"Porque se puede utilizar la palabra menos para denotar que hay una persona diferente"	"En esta clase de 20 alumnos todos los alumnos tienen 1 caramelo menos Juan que tiene más. Si Juan tiene 3 caramelos ¿Cuántos caramelos hay en total?"
2	Si	"Puedes añadir lo que quieras si luego la operación que el problema te pida sea la resta"	"Se añade 4 peras al saco de Daniel el cual tiene 10 peras. Pero Juan se ha comido 6 peras de ese mismo saco. ¿Cuántas peras quedan?	Si	"Porque lo importante es la operación que te piden que hagas o realices en el problema o como empieze este"	"8 -3 + 9 ="
3	Si	"Aunque la palabra añadir da el significado de suma la puedes usar como infomación adiconal"	"María tiene 3 juguetes en su habitación. Pablo le quita 2 y los añade a su habitación. ¿cuántos juguetes le quedan a María?"	Si	"Puedes sumar negativos"	"-3 + -5= ? "
4	Si	"Según el planteamiento de este"	N/C	Si	"No se me ocurre ninguno, pero creo que es posible"	N/C
5	Si	"Ya que al añadir también estamos sacando de algún modo"	N/C	Si	"La palabra menos no tiene porque estar directamente asociada a la resta"	"Julia tiene 7 magdalenas y su hermana tiene 4 menos. ¿Cuántás magadalenas tienen en total?"
6	Si	"Añadir implica a veces quitar de otro lugar, de otro número"	3 + 5 - 2	Si	"Porque si añades en parte le estas quitando a otra parte"	"Tú tienes 5 cromos y tu hermano 5 más, tú dejas a tu hermano con 3 menos, ¿cuántos tendrás tú?
7	Si	"El enunciado puede contenerlo"	N/C	No sé		N/C
8	Si	"Porque podemos plantear la resta como lo que debemos añadir al número más pequeño para llegar al mayor"	"¿Cuánto debemos añadir al 4 para llegar a 8?"	Si	"Porque se pueden plantear problemas jugando con el lenguaje, pero no se poner un ejemplo"	N/C
9	Si	"Porque agregar es formular de manera que es restar una parte de la cantidad inicial para sumarla en otra operación"	"¿Si en una bolsa tengo 3 galletas y agrego dos de ellas en otra bolsa, cuantas galletas me quedan en la primera bolsa?"	Si	"Puedes introducir una suma mediante una resta"	"Clara tiene 2 galletas menos que Arni. Si ella tine 5 galletas, ¿cuántas galletas tiene Arni?"
10	Si	"Es muy lioso para el que lo resulve"	"Juan tenía 6 caramelos, pero le han robado 2. Si Joan agrega 3 a los caramelos que le han robado, ¿cuántos caramelos le quedan?	Si	N/C	N/C