



UNIVERSITAT DE
BARCELONA

Estudio de la utilización de vídeos tutoriales como recurso para las clases de matemáticas en el bachillerato con “Flipped Classroom”

Maria Fernanda Massut Bocklet



Aquesta tesi doctoral està subjecta a la llicència **Reconeixement- NoComercial – Compartir Igual 4.0. Espanya de Creative Commons.**

Esta tesis doctoral está sujeta a la licencia **Reconocimiento - NoComercial – Compartir Igual 4.0. España de Creative Commons.**

This doctoral thesis is licensed under the **Creative Commons Attribution-NonCommercial-ShareAlike 4.0. Spain License.**



UNIVERSITAT DE
BARCELONA

FORMACIÓ DEL PROFESSORAT: PRÀCTICA EDUCATIVA I COMUNICACIÓ

DIDÀCTICA DE LA MATEMÀTICA

TESIS DOCTORAL

***Estudio de la utilización de vídeos tutoriales como
recurso para las clases de matemáticas en el bachillerato
con “Flipped Classroom”***

MARIA FERNANDA MASSUT BOCKLET

Directora: Dra. Núria Rosich Sala

Tutor: Joaquín Giménez Rodríguez

**Departament de Didàctica de les Ciències
Experimentals i la Matemàtica**

Bienni: 2012-2013

Barcelona, Octubre 2015

AGRADECIMIENTOS

Este aporte al mundo de la investigación y de la educación matemática, no hubiese sido posible sin la participación de personas e instituciones que han facilitado las cosas para que este trabajo llegue a un feliz término.

Para comenzar quiero agradecer la participación de los alumnos de bachillerato del colegio Jesuïtes Educació - Sant Ignasi Sarrià de las promociones 2014-2015 y 2015-2016, en especial a mis grupos de matemáticas, a la hora de desarrollar la investigación. A Marc, Karla, MariaB, Santi, Javi, Alejandro, Nuria y MariaB, que cooperaron en todo momento. También agradezco inmensamente la participación de los profesores Helena Labarta, Montserrat Arumí, Pau Juan y Francesc Recuero, que sin los cuales hubiese sido imposible realizar todo el trabajo, al equipo directivo que nos acompañó y apoyó durante toda la investigación, y a los amigos-profesores del colegio que me han animado en cada paso.

Especialmente deseo agradecer a la Dra. Nuria Rosich Sala, por su inmensa paciencia y comprensión, por su acompañamiento cercano y por las muchas horas de consejos, trabajo y críticas constructivas que han permitido enmarcar las ideas propias en su orientación y rigurosidad. Su apoyo y confianza en mi trabajo y su capacidad para guiar ha sido un aporte invaluable, no solamente en el desarrollo de esta investigación, sino también en mi formación como investigadora.

A los profesionales y doctores que han colaborado específicamente en la investigación: a Marcela Ballabio por su colaboración y consejos metodológicos y estadísticos, a Cherie Escorche y Hugo Pérez, por su colaboración y consejos tecnológicos, a Virginia Massut, por su colaboración en el diseño, y a Merche Ríos, Mercè Masnou y Mariangels Creixell por su colaboración y consejos generales.

A los amigos, los cercanos y los que acompañan en la distancia, que a pesar del tiempo que hemos dejado de compartir han continuado dándome ánimos, apoyo y sabios consejos.

Al Azafrán, compañero fiel e incondicional.

Y finalmente, a mis padres, Gucky y Gabriel, que me acompañan siempre con su cariño, su apoyo y confianza, aun en la distancia, que son un ejemplo de voluntad y perseverancia, y que nunca bajaron los brazos para que yo tampoco lo haga, aun cuando todo se complicaba; A mis hermanos, Jazmín, Francisco y Virginia y a sus familias, por ser parte de mi vida, y que con su alegría y generosidad me han animado a seguir adelante en todo momento; y a mi padrino Fede, que siempre tiene un abrazo y una palabra de aliento para darme fuerzas.

A Dios, porque siempre ha estado presente en el camino, en las decisiones, en las adversidades y en los momentos de trabajo constante.

¡Por ellos y para ellos...!

Ferchu Massut

INDICE

PRESENTACIÓN	I
1. CONTEXTUALIZACIÓN Y PROBLEMÁTICA DE LA INVESTIGACIÓN	1
1.1. <u>PRESENTACIÓN</u>	5
1.2. <u>EL CONTEXTO DEL ESTUDIO</u>	6
1.2.1. Enfoque sociocultural del aprendizaje significativo	7
1.2.2. Las Matemáticas Inclusivas	8
1.2.3. Currículum de Bachillerato	10
1.2.3.1. Competencias	10
1.2.3.2. Contenidos (NCTM y Cataluña): Funciones	11
1.2.4. El uso de las nuevas tecnologías en el proceso de enseñanza-aprendizaje	12
1.2.4.1. El ordenador como herramienta didáctica	17
1.2.4.2. La incorporación de las TIC en las clases de matemáticas	17
1.3. <u>PRESENTACIÓN DE LA PROBLEMÁTICA DE LA INVESTIGACIÓN</u>	20
1.3.1. El problema de la investigación	21
1.3.2. Los objetivos de la investigación	22
1.3.3. Las hipótesis y supuestos de trabajo	23
1.4. <u>RESUMEN</u>	26
2. MARCOS REFERENCIALES	27
2.1. <u>PRESENTACIÓN</u>	31
2.2. <u>EL APRENDIZAJE DEL ALGEBRA: FUNCIONES</u>	32
2.2.1. Estudios sobre el aprendizaje del álgebra	32
2.2.2. Dificultades, obstáculos y errores en el aprendizaje del álgebra	40
2.2.2.1. Dificultades en el aprendizaje de las matemáticas	40
2.2.2.2. Obstáculos en el aprendizaje de las matemáticas	43
2.2.2.3. Errores en el aprendizaje del álgebra	44
2.2.3. Estudios sobre el aprendizaje de las funciones	46
2.2.3.1. Evolución del concepto de función	46
2.2.3.2. Las funciones en bachillerato	49
2.2.3.3. Las funciones en las pruebas PISA	51
2.2.3.4. Estudios realizados sobre la enseñanza de funciones con TIC	53
2.3. <u>LA UTILIZACIÓN DE ENTORNOS MULTIMEDIA EN LA ENSEÑANZA</u>	58
2.3.1. Diferencias entre hipertexto, multimedia e hipermedia	58
2.3.2. Definición de términos	65
2.4. <u>EL MODELO DE ENSEÑANZA-APRENDIZAJE “FLIPPED CLASSROOM”</u>	67
2.4.1. Marco histórico	67
2.4.2. Definición	69
2.4.3. Las plataformas MOOC utilizadas en el modelo de enseñanza FC	71
2.4.4. El modelo “Flipped Classroom” y el pensamiento educativo actual	73
2.4.5. Estudios realizados sobre el modelo Flipped Classroom en la educación	75
2.4.6. Estudios realizados sobre el modelo Flipped Classroom en matemáticas	79

2.5.	<u>DELIMITACIÓN Y CONCRECIÓN DE NUESTRO MARCO TEÓRICO</u>	83
2.6.	<u>RESUMEN</u>	84
3. METODOLOGÍA		
3.1.	<u>PRESENTACIÓN</u>	89
3.2.	<u>DISEÑO DE LA INVESTIGACIÓN</u>	91
3.3.	<u>TEMPORALIZACIÓN: Cronograma de la investigación</u>	93
3.4.	<u>FASE 1: Las pruebas diagnósticas iniciales</u>	95
3.4.1.	Metodología	95
3.4.2.	Contexto y población de estudio	95
3.4.3.	Instrumentos	97
3.4.3.1.	Prueba diagnóstica de álgebra	99
3.4.3.2.	Prueba diagnóstica de funciones	101
3.4.4.	Procedimientos	106
3.4.4.1.	Condiciones de realización de la pruebas	106
3.4.4.2.	Tratamiento y análisis de los resultados	107
3.5.	<u>FASE 2.1: Desarrollo del modelo “Flipped Classroom” en la unidad de funciones</u>	116
3.5.1.	Metodología	116
3.5.2.	Contexto y población de estudio	117
3.5.3.	Instrumentos	121
3.5.4.	Procedimientos	123
3.5.4.1.	Proceso de recogida de datos	123
3.5.4.2.	Tratamiento y análisis de los resultados	124
3.6.	<u>FASE 2.2: Valoración de la percepción de los alumnos y docentes respecto al modelo de enseñanza “Flipped Classroom”</u>	135
3.6.1.	Metodología	135
3.6.2.	Contexto y población de estudio	135
3.6.3.	Instrumentos	136
3.6.3.1.	Cuestionario para los alumnos	137
3.6.3.2.	Cuestionario para los docentes	137
3.6.4.	Tratamiento y análisis de los resultados	137
3.7.	<u>RESUMEN</u>	139
4. DISEÑO E IMPLEMENTACIÓN DEL MODELO DE ENSEÑANZA “FLIPPED CLASSROOM” EN EL AULA		
4.1.	<u>PRESENTACIÓN</u>	145
4.2.	<u>DISEÑO DEL MATERIAL</u>	146
4.2.1.	Material para los profesores	146
4.2.1.1.	Web	146
4.2.1.2.	Vídeo de presentación del modelo	149
4.2.1.3.	Guías para del docente sobre la implementación del modelo FC	150
4.2.1.4.	Actividades de clase	157
4.2.1.5.	Formularios de valoración de la clase	160
4.2.2.	Material para los alumnos	160
4.2.2.1.	Web	161

4.2.2.2.	Guía de actuación	162
4.2.2.3.	Vídeos tutoriales	162
4.2.2.4.	Plantilla de Cornell para tomar apuntes	169
4.2.2.5.	Cuestionarios sobre la observación	170
4.2.2.6.	Actividades de clase con soluciones	171
4.2.2.7.	Material de ayuda extra	172
4.2.2.8.	Prueba de conocimientos y competencias adquiridas	172
4.3.	<u>CONTENIDOS MATEMÁTICOS DE LA UNIDAD TRABAJADA CON FC</u>	174
4.4.	<u>IMPLEMENTACIÓN DEL MODELO FC EN LA CLASE</u>	175
4.4.1.	Proceso de implementación del Modelo FC en el aula para el docente	175
4.4.2.	Proceso de implementación del Modelo FC en el aula para el alumno	177
4.5.	<u>RESUMEN</u>	179
5.	RESULTADOS DE LAS PRUEBAS DIAGNÓSTICAS	181
5.1.	<u>PRESENTACIÓN</u>	185
5.2.	<u>RESULTADOS DE LA PRUEBA DE HABILIDADES Y DESTREZAS ALGEBRAICAS</u>	187
5.2.1.	Resultados del Proceso Algebraico de Sustitución	187
5.2.2.	Resultados del Proceso Algebraico de Generalización	196
5.2.3.	Resultados del Proceso Algebraico de Modelización	210
5.3.	<u>RESULTADOS DE LA PRUEBA ALGEBRAICA DE FUNCIONES</u>	215
5.4.	<u>RESULTADOS GLOBALES DE LAS PRUEBAS DE ÁLGEBRA Y FUNCIONES</u>	221
5.4.1.	Resultados Globales del Proceso Algebraico de Sustitución	221
5.4.2.	Resultados Globales del Proceso Algebraico de Generalización	223
5.4.3.	Resultados Globales del Proceso Algebraico de Modelización	225
5.4.4.	Resultados Globales de la Prueba de Álgebra	227
5.4.5.	Resultados Globales de la Prueba de Funciones	229
5.4.6.	Resultados Globales de Ambas Pruebas	230
5.5.	<u>RESUMEN DEL CAPÍTULO</u>	237
6.	RESULTADOS DEL ESTUDIO DE CASOS DE LA MODALIDAD DE CCS Y TECNOLOGÍA	239
6.1.	<u>PRESENTACIÓN</u>	243
6.2.	<u>RESULTADOS DEL ESTUDIO DE CASOS: MARC</u>	245
6.2.1.	Resultados de las pruebas diagnósticas	245
6.2.2.	Resultados del proceso de aprendizaje con el modelo FC	249
6.2.2.1.	Apuntes de Cornell	249
6.2.2.2.	Cuestionarios <i>online</i>	249
6.2.2.3.	Actividades de clase	252
6.2.3.	Resultados de la prueba final de la unidad	255
6.2.4.	Evolución de los resultados	256
6.2.5.	Resultados del cuestionario final sobre el modelo FC	259
6.3.	<u>RESULTADOS DEL ESTUDIO DE CASOS: MARIA B</u>	261
6.3.1.	Resultados de las pruebas diagnósticas	261

6.3.2.	Resultados del proceso de aprendizaje con el modelo FC	265
6.3.2.1.	Apuntes de Cornell	266
6.3.2.2.	Cuestionarios online	266
6.3.2.3.	Actividades de clase	268
6.3.3.	Resultados de la prueba final de la unidad	272
6.3.4.	Evolución de los resultados	275
6.3.5.	Resultados del cuestionario final sobre el modelo FC	277
6.4.	<u>RESULTADOS DEL ESTUDIO DE CASOS: ALEJANDRO</u>	279
6.4.1.	Resultados de las pruebas diagnósticas	279
6.4.2.	Resultados del proceso de aprendizaje con el modelo FC	281
6.4.2.1.	Apuntes de Cornell	281
6.4.2.2.	Cuestionarios <i>online</i>	282
6.4.2.3.	Actividades de clase	284
6.4.3.	Resultados de la prueba final de la unidad	285
6.4.4.	Evolución de los resultados	286
6.4.5.	Resultados del cuestionario final sobre el modelo FC	289
6.5.	<u>RESULTADOS DEL ESTUDIO DE CASOS: NÚRIA</u>	291
6.5.1.	Resultados de las pruebas diagnósticas	291
6.5.2.	Resultados del proceso de aprendizaje con el modelo FC	293
6.5.2.1.	Apuntes de Cornell	294
6.5.2.2.	Cuestionarios <i>online</i>	294
6.5.2.3.	Actividades de clase	295
6.5.3.	Resultados de la prueba final de la unidad	297
6.5.4.	Evolución de los resultados	298
6.5.5.	Resultados del cuestionario final sobre el modelo FC	300
6.6.	<u>RESUMEN</u>	302
6.6.1.	Resultados de las pruebas diagnósticas	302
6.6.2.	Resultados del proceso de aprendizaje con el modelo FC	303
6.6.2.1.	Apuntes de Cornell	303
6.6.2.2.	Cuestionarios <i>online</i>	303
6.6.2.3.	Actividades de clase	304
6.6.3.	Resultados de la prueba final de la unidad	304
6.6.4.	Evolución de los resultados	305
6.6.5.	Resultados del cuestionario final sobre el modelo FC	306
7.	RESULTADOS DEL ESTUDIO DE CASOS DE LA MODALIDAD DE CIENCIAS SOCIALES	309
7.1.	<u>PRESENTACIÓN</u>	313
7.2.	<u>RESULTADOS DEL ESTUDIO DE CASOS: KARLA</u>	314
7.2.1.	Resultados de las pruebas diagnósticas	314
7.2.2.	Resultados del proceso de aprendizaje con el modelo FC	320
7.2.2.1.	Apuntes de Cornell	320
7.2.2.2.	Cuestionarios online	321
7.2.2.3.	Actividades de clase	323
7.2.3.	Resultados de la prueba final de la unidad	326

7.2.4.	Evolución de los resultados	328
7.2.5.	Resultados del cuestionario final sobre el modelo FC	331
7.3.	<u>RESULTADOS DEL ESTUDIO DE CASOS: SANTI</u>	332
7.3.1.	Resultados de las pruebas diagnósticas	332
7.3.2.	Resultados del proceso de aprendizaje con el modelo FC	336
7.3.2.1.	Apuntes de Cornell	336
7.3.2.2.	Cuestionarios <i>online</i>	337
7.3.2.3.	Actividades de clase	340
7.3.3.	Resultados de la prueba final de la unidad	341
7.3.4.	Evolución de los resultados	343
7.3.5.	Resultados del cuestionario final sobre el modelo FC	346
7.4.	<u>RESULTADOS DEL ESTUDIO DE CASOS: JAVIER</u>	347
7.4.1.	Resultados de las pruebas diagnósticas	347
7.4.2.	Resultados del proceso de aprendizaje con el modelo FC	349
7.4.2.1.	Apuntes de Cornell	349
7.4.2.2.	Cuestionarios <i>online</i>	349
7.4.2.3.	Actividades de clase	351
7.4.3.	Resultados de la prueba final de la unidad	353
7.4.4.	Evolución de los resultados	354
7.4.5.	Resultados del cuestionario final sobre el modelo FC	357
7.5.	<u>RESULTADOS DEL ESTUDIO DE CASOS: MARIA F</u>	359
7.5.1.	Resultados de las pruebas diagnósticas	359
7.5.2.	Resultados del proceso de aprendizaje con el modelo FC	360
7.5.2.1.	Apuntes de Cornell	361
7.5.2.2.	<u>Cuestionarios <i>online</i></u>	361
7.5.2.3.	<u>Actividades de clase</u>	364
7.5.3.	Resultados de la prueba final de la unidad	366
7.5.4.	Evolución de los resultados	367
7.5.5.	Resultados del cuestionario final sobre el modelo FC	369
7.6.	<u>RESUMEN</u>	371
7.6.1.	Resultados de las pruebas diagnósticas	371
7.6.2.	Resultados del proceso de aprendizaje con el modelo FC	372
7.6.2.1.	Apuntes de Cornell	372
7.6.2.2.	Cuestionarios <i>online</i>	373
7.6.2.3.	Actividades de clase	373
7.6.3.	Resultados de la prueba final de la unidad	374
7.6.4.	Evolución de los resultados	375
7.6.5.	Resultados del cuestionario final sobre el modelo FC	376
8.	RESULTADOS DEL CUESTIONARIO FINAL SOBRE LA PERCEPCIÓN DEL MODELO FC	377
8.1.	<u>PRESENTACIÓN</u>	381
8.2.	<u>RESULTADOS DEL CUESTIONARIO DE VALORACIÓN FINAL DE LOS ALUMNOS</u>	382
8.2.1.	Utilización de la tecnología para el aprendizaje de las matemáticas	382

8.2.1.1.	Vídeos tutoriales	382
8.2.1.2.	Los cuestionarios de autoevaluación	384
8.2.1.3.	El web “trescomacatorze”	385
8.2.1.4.	Sugerencias de cambios	386
8.2.2.	Las clases	386
8.2.2.1.	La Clase Introdutoria	387
8.2.2.2.	Las Clases en el Aula	388
8.2.3.	El modelo de enseñanza-aprendizaje Flipped Classroom	392
8.2.4.	Resumen	396
8.3.	<u>RESULTADOS DE LOS CUESTIONARIO DE VALORACIÓN DE LOS PROFESORES</u>	399
8.3.1.	Primera clase: Trabajo cooperativo	399
8.3.2.	Segunda clase: Trabajo individual	399
8.3.3.	Tercera clase: Tutoría de iguales	400
8.3.4.	Cuarta clase: Trabajo individual	401
8.3.5.	Quinta clase: Trabajo cooperativo	401
8.3.6.	Sexta clase: Tutoría de iguales	402
8.3.7.	Séptima clase: Trabajo individual	402
8.3.8.	Octava clase: Trabajo cooperativo	403
8.3.9.	Percepción final	403
8.4.	<u>RESUMEN</u>	405
9.	CONCLUSIONES	407
9.1.	<u>PRESENTACIÓN</u>	411
9.2.	<u>CONCLUSIONES DE LAS ETAPAS DE LA INVESTIGACIÓN</u>	412
9.2.1.	Primera etapa de la investigación	412
9.2.2.	Segunda etapa de la investigación	415
9.2.3.	Conclusiones de la tercera etapa de la investigación	416
9.5.	<u>APORTES DIDÁCTICOS, LIMITACIONES Y PERSPECTIVAS DE FUTURAS INVESTIGACIONES</u>	426
BIBLIOGRAFIA		429
	<u>B1 - Bibliografía de la Contextualización y Problemática de la Investigación</u>	433
	<u>B2 - Bibliografía del Marco Referencial</u>	435
	<u>B3 - Bibliografía de la Metodología y el diseño de material FC</u>	441
10.	ANEXOS	449

PRESENTACIÓN

"Dime y lo olvido, enséñame y lo recuerdo, involúcrame y lo aprendo".

B. Franklin

Durante estos años de experiencia como profesora de matemáticas en bachillerato comencé a observar que las horas que le dedicaba el alumno a trabajar en casa y a estudiar el tema que habían visto en clase, terminaba siendo para el profesor una "caja negra", ya que con poca frecuencia podía valorar la calidad del trabajo que sus alumnos habían podido realizar antes del examen, y para el alumno, "unas horas de laberinto" ya que no sabía por dónde empezar y a dónde tenía que llegar.

Hace unos años atrás tuve la posibilidad de conocer la web Khan Academy (www.khanacademy.org) recomendada por un profesor, compañero del colegio. Esta web creada por Salman Khan, comenzó a finales de 2004, cuando Khan desde Boston ayudaba a su prima Nadia de Nueva Orleans con una tutoría en matemáticas utilizando una herramienta de Yahoo. Cuando los familiares y amigos pidieron ayuda similar, decidió que sería más práctico distribuir los tutoriales en YouTube.

Desde ese momento, comencé a trabajar con mis alumnos con videos tutoriales de los conceptos trabajados en clase. Su reacción inicial fue de rechazo de la propuesta y desconfianza del recurso. No obstante, cuando unos pocos comenzaron a utilizarlos y ver las ventajas que tenía, ellos mismos eran los que en cada tema me los pedían. Muchos de ellos trabajaban con dos tipos de videos, unos tutoriales de teoría y procedimiento, y otros con resolución de ejercicios. Sin embargo en ese momento no había una metodología de enseñanza-aprendizaje de fondo, simplemente los utilizaban como refuerzo de clase.

Posteriormente conocí la teoría de "Flipped Classroom" mencionada por Khan, y desarrollada en gran parte por dos profesores estadounidenses, Jonathan Bergmann y Aaron Sams. Esta corriente metodológica plantea "invertir la clase". Lo que antes se veía en clase, ahora se ve en videos tutoriales, y las horas de clase se aprovechan para realizar actividades en grupo o co-tutoriales.

Mucho del esfuerzo por humanizar la clase está centrado en la proporción profesor-alumnos. Desde la perspectiva del “Flipped Classroom” (girar la clase), la métrica relevante es la proporción estudiante- tiempo humano y valioso con el profesor. En un modelo tradicional, la mayoría del tiempo los profesores damos clases, calificamos y demás. Pero realmente, quizás estemos sentados el 5% de nuestro tiempo con los alumnos trabajando de verdad con ellos. De la otra forma el 100% de nuestro tiempo lo pasaríamos así.

Esta teoría didáctica me pareció que podía ayudar a personalizar la educación matemática de nuestros alumnos, atendiendo a la diversidad que nos encontramos en el aula. Por este motivo lo que me propongo en esta investigación es ir un paso más allá en mis clases, y para ello centraré el estudio en: observar si los alumnos de primero de bachillerato responden positivamente a la enseñanza del álgebra a través de los vídeos tutoriales dentro del modelo de enseñanza-aprendizaje “Flipped Classroom”, y observar qué dificultades surgen en este proceso.

Para contextualizar el problema de estudio, en el capítulo 1 mostramos cuáles son los objetivos, hipótesis y supuestos que nos planteamos respecto a esta problemática de investigación y el contexto en el que se enmarca. En primer lugar, vemos necesario contemplar el aprendizaje en un contexto socio-cultural que promueve que la educación del alumno no es sólo significativa para él, sino que también es un valor y una consecuencia de la sociedad que lo rodea. Dentro de este enfoque socio-cultural, la educación ha de adaptarse a la diversidad del alumnado, por lo que partimos de una escuela inclusiva, que busca constantemente recursos para acortar las brechas entre la educación y el alumno. Seguidamente, estudiaremos el currículum de matemáticas de primero de bachillerato y cómo puede realizarse el aprendizaje a través de las nuevas tecnologías de la información.

En el capítulo dos presentamos el marco referencial para la finalidad de nuestro estudio. Ello nos lleva a describir tres áreas necesarias para orientar nuestra investigación: el aprendizaje del álgebra, en particular el tema de “funciones”, la utilización de entornos multimedia en la educación, y por último, la descripción histórica y actual del modelo de enseñanza “Flipped Classroom” así como los estudios realizados sobre esta metodología, tanto a nivel general, como en matemáticas.

En el capítulo tres tratamos la metodología utilizada en las distintas etapas de la investigación de acuerdo a sus finalidades, así como las distintas poblaciones de estudio: seis clases de matemáticas del ciclo lectivo 2013-2014, ocho alumnos pertenecientes a dos de estas clases, y 6 clases de matemáticas del curso lectivo 2014-2015. También mostramos los instrumentos y las técnicas procedimentales, así como la temporalización que se han utilizado en las diferentes etapas.

En el capítulo cuatro mostramos el diseño de todo el material necesario para implementar el modelo FC en la unidad de funciones en una clase de matemáticas de primero de bachillerato, así como las pautas a seguir para dicha implementación.

En el capítulo 5 mostramos los resultados de las pruebas diagnósticas de álgebra y de funciones por proceso algebraico, y posteriormente los resultados globales. También mostramos los resultados de realizar una comparativa T-Student a las dos poblaciones que participan en la investigación.

En el capítulo seis mostramos los resultados de analizar la evolución del aprendizaje del “estudio de casos” correspondiente a los alumnos de la modalidad de Ciencias y Tecnología en la unidad de funciones desarrollada con el modelo “Flipped Classroom”. Y en el capítulo siete, lo hacemos de los alumnos de la modalidad de Ciencias Sociales.

En el capítulo ocho, indicamos los resultados del cuestionario final de valoración de la experiencia aplicado a toda la población para conocer la percepción de los alumnos respecto al modelo “Flipped Classroom”, y los resultados de los cuestionarios aplicados a los profesores que participaron del estudio con el fin de conocer cuál es su opinión al respecto.

En el capítulo nueve presentamos las conclusiones en función de la etapa de la investigación, los aportes didácticos realizados, las limitaciones que nos hemos encontrado, así como las nuevas perspectivas de futuros estudios.

1. CONTEXTUALIZACIÓN Y PROBLEMÁTICA DE LA INVESTIGACIÓN

1. CONTEXTUALIZACIÓN Y PROBLEMÁTICA DE LA INVESTIGACIÓN	1
1.1. <u>PRESENTACIÓN</u>	5
1.2. <u>EL CONTEXTO DEL ESTUDIO</u>	6
1.2.1. Enfoque sociocultural del aprendizaje significativo	7
1.2.2. Las Matemáticas Inclusivas	8
1.2.3. Currículum de Bachillerato	10
1.2.3.1. Competencias	10
1.2.3.2. Contenidos (NCTM y Cataluña): Funciones	11
1.2.4. El uso de las nuevas tecnologías en el proceso de enseñanza-aprendizaje	12
1.2.4.1. El ordenador como herramienta didáctica	17
1.2.4.2. La incorporación de las TIC en las clases de matemáticas	17
1.3. <u>PRESENTACIÓN DE LA PROBLEMÁTICA DE LA INVESTIGACIÓN</u>	20
1.3.1. El problema de la investigación	21
1.3.2. Los objetivos de la investigación	22
1.3.3. Las hipótesis y supuestos de trabajo	23
1.4. <u>RESUMEN</u>	26

1.1. PRESENTACIÓN

Los contextos de nuestra investigación se van a presentar y desarrollar en este capítulo.

Para ello vemos necesario enmarcar nuestro estudio y describirlo en el contexto Sociocultural, por su concepción del aprendizaje, que no se considera una actividad realizada por sí misma, sino una actividad integrada en las actividades sociales e interactivas de los miembros de una comunidad. Desde esta perspectiva, el contexto socio-cultural más amplio resulta crítico para el aprendizaje del alumno, al permitir que logre una meta que para él es significativa en lo personal y también valorada en lo social.

Considerar la diversidad del alumnado representa un punto central del enfoque sociocultural del aprendizaje. Por ello partimos de una “escuela inclusiva”, es decir, que nuestro estudio se focalizará en considerar un recurso innovador, los videos tutoriales, como ayuda para superar las “barreras de aprendizaje” de las matemáticas, teniendo en cuenta la diversidad del alumnado, y como apoyo al docente, y no como un medio para aumentar las diferencias entre el alumnado.

Asimismo, se ha visto la necesidad de analizar los contenidos del currículum de primero de bachillerato de matemáticas, puesto que una de las claves para que el proyecto se pueda desarrollar en las escuelas es mantener una relación estrecha con el contenido que se ofrece en el aula y el de las unidades en video tutorial. Así las tareas a realizar ayudarán al alumno y brindarán apoyo al profesor sin que éste deba invertir más trabajo y tiempo con menor incidencia de resultados.

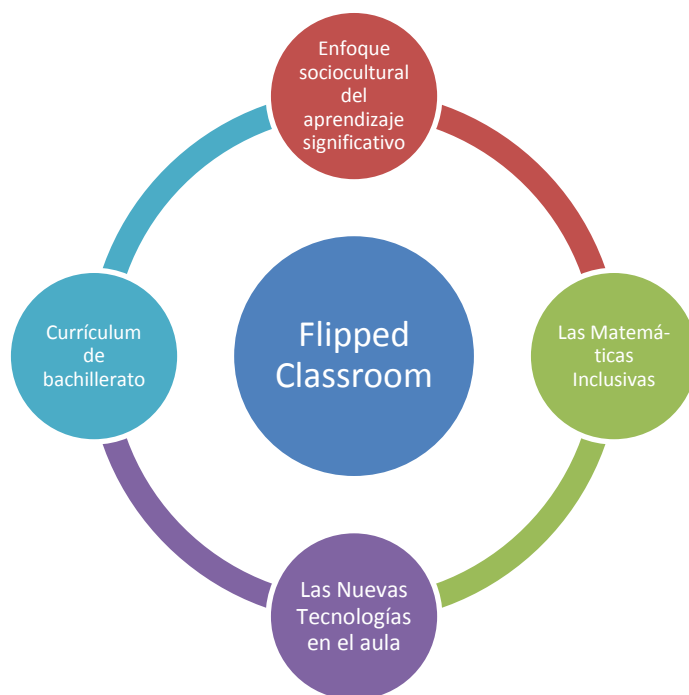
También analizaremos la incorporación progresiva de las nuevas tecnologías de la información y la comunicación en el proceso de enseñanza-aprendizaje en las clases de matemáticas.

La descripción del problema de la investigación y los objetivos de nuestro trabajo serán la conclusión de este primer apartado.

1.2. EL CONTEXTO DEL ESTUDIO

El contexto que planteamos en el marco de esta investigación se resume en una perspectiva sociocultural del aprendizaje significativo, puesto que el nivel de desarrollo y aprendizaje que el alumno puede alcanzar con la ayuda, guía o colaboración de los adultos o de sus compañeros siempre será mayor que el que pueda alcanzar por sí solo. Y también planteamos la importancia de una escuela inclusiva al analizar en nuestro estudio una metodología de enseñanza-aprendizaje que pueda atender a la heterogeneidad y diversidad del alumnado en el aula.

Todo ello conlleva la necesidad de adentrarnos en los contenidos de matemáticas de bachillerato y en el uso de las nuevas tecnologías en el aula, los dos grandes marcos de nuestra investigación (Ilustración 1-1)



*Ilustración 1-1 Contexto de la investigación
Fuente: De elaboración propia*

1.2.1. Enfoque sociocultural del aprendizaje significativo

Cobián, Nielsen y Solis (Cobián, Nielsen y Solis, 1998), nos enfrentan a la naturaleza del conocimiento en sí como un cuerpo inmutable y autoritario de datos, que se ve confrontado con la experiencia: “todos hemos aprendido muchos datos que fueron considerados de importancia crítica, según nuestros maestros, pero que olvidamos poco después de pasar por el examen o aprobar el curso”. Esta afirmación nos indica que la transmisión no es suficientemente efectiva para el aprendizaje significativo y duradero.

Los tres autores plantean una visión alternativa acerca del conocimiento y su relación con el aprendizaje, defendiendo que debe su existencia al hecho de que las personas y la comunidad lo construyen, lo definen, lo extienden y hacen uso significativo de todo ello a fin de resolver sus problemas y entender su contexto sociocultural.

Visto desde esta perspectiva, el conocimiento está en constante transformación y, en las distintas sociedades, los miembros de cada generación se apropian de él y lo modifican o adaptan con el propósito de dar solución a los nuevos problemas a los que deben enfrentarse: “El conocimiento no es invariable y estático, es parte integral y dinámica de la vida misma, de las indagaciones que los miembros de una sociedad hacen acerca de sus condiciones, sus preocupaciones y sus propósitos. Significa un esfuerzo participativo de desarrollar comprensión y cuyo proceso implica que el conocimiento se construye y se reconstruye continuamente. Es en este mismo proceso de indagación y de construcción compartida de significados entre los individuos donde ocurre el aprendizaje”.(Cobián, Nielsen y Solis, 1998)

Así pues, el contexto socio-cultural más amplio es crítico para el aprendizaje del alumno y todo puede influir en él: el rol del docente, el clima de trabajo en el aula, las relaciones entre compañeros, las estrategias para lograr el aprendizaje y la construcción del concepto. En las aulas el alumno recibe continuos mensajes relacionados con el significado social, valorando sus acciones en función de cómo las valoran el profesor y sus compañeros. La experiencia de estos significados sirve al alumno para construir partes esenciales de su identidad teniendo en cuenta tanto la valoración recibida como las expectativas de su entorno. (Nieto, S, Bode, P., 2011)

Nuestra investigación se dispone a trabajar desde esta visión puesto que consideramos que el aprendizaje:

- se desarrolla en un contexto histórico determinado, siendo fruto de un tiempo y una época;
- es el resultado de la interacción con los demás individuos.

Ante todo, consideramos al alumno como un ser cultural; es por ello que plantearemos soluciones al problema de la investigación utilizando medios informáticos, propios del momento sociocultural actual. Pero también lo consideramos como un ser social. Y he aquí el gran desafío de nuestro trabajo: evaluar la interacción entre alumnos y la que existe entre alumno y docente a través de estos medios.

1.2.2. Las Matemáticas Inclusivas

Como comentamos anteriormente, el aprendizaje depende del momento sociocultural en que está inmerso el alumno. En las aulas de hoy en día encontramos diversidad cultural, social, étnica o de cualquier otro tipo. Por ello, la Conferencia Mundial sobre Necesidades Educativas Especiales, celebrado en Salamanca en 1994, sienta las bases de la educación inclusiva. Entre estas la de que los sistemas educativos deberían ser diseñados y los programas aplicados para que recojan todas las diferentes características y necesidades.

En los últimos años, el desafío de la inclusión en matemáticas de manera responsable, atendiendo a la diversidad de los estudiantes que, por derecho, componen el sistema educativo, se ha convertido en una preocupación cada vez mayor. La clase de matemáticas actual, al igual que toda la institución escolar, debe ser tratada como un lugar para todo el mundo, un lugar en el que se respete la diferencia y se eviten los modelos educativos tradicionales modificados para cumplir con el estudiante genérico, que han terminado condicionando todos los estudiantes al ritmo de un currículum estándar considerado normal.

De este modo, aunque el bachillerato actualmente es voluntario, la clase de matemáticas debería de ser para todos y para todas, el espacio donde todos y todas tienen cabida indistintamente de sus características, dificultades y ritmos en su proceso de aprendizaje, partiendo de la premisa de que cualquier alumno puede aprender matemáticas en un entorno ordinario, respondiendo no sólo a las necesidades educativas de algunos alumnos, sino a las de todos los alumnos, sin discriminación de ningún tipo... “Nos estamos refiriendo a la escuela inclusiva asociada a una educación de calidad sin excepciones, y una filosofía que contempla la

escuela como motor de cambio social y de actitudes, basada en la igualdad y la democracia, donde la diversidad es un valor en alza que cohesiona al grupo y ofrece mayores posibilidades de aprendizaje” (Ríos Hernández, 2009).

Pero para que ello sea posible, debemos insistir en que las matemáticas inclusivas han de ser un proceso de transformación y de cambio, no sólo de las prácticas educativas sino también de la organización institucional y del profesorado, para que su quehacer se adapte a las exigencias de una escuela de calidad, eficaz, que acoge a todo el alumnado de la comunidad a la que pertenece. “Así, la diversidad aparece como valor, como una cultura que respeta la diferencia, que impregna toda la comunidad escolar, sin excluir a ninguno de sus miembros: el alumnado, el profesorado, las familias y al propio centro como institución: se considera la diversidad entre el alumnado cuando se observan diferencias que pueden tener un carácter individual (principalmente capacidades, motivaciones, intereses y ritmos de aprendizaje) o social (lengua, etnia, religión, entre otros). Hablar de diversidad es hablar de la identidad de cada persona. Por tanto, asumir la diversidad significa el reconocimiento del derecho a la diferencia como un valor educativo y social” (Ríos Hernández, 2009)

En los NCTM encontramos que uno de los seis principios de la educación matemática es la EQUIDAD: “La excelencia en la enseñanza de las matemáticas requiere equidad en la participación - altas expectativas y un fuerte apoyo a todos los estudiantes” (NCTM, 2000). El logro de este objetivo nos obliga a elevar las expectativas de aprendizaje de los estudiantes, a desarrollar métodos eficaces de apoyo en el aprendizaje de las matemáticas para todos los estudiantes, y a proporcionar a los estudiantes y educadores los recursos que necesitan. Todos los alumnos, independientemente de sus características personales o físicas y de su trayectoria educativa, pueden aprender matemáticas si tienen acceso a una educación matemática de alta calidad. La equidad no significa que todos los alumnos deben recibir una enseñanza idéntica. Lo que implica es que se realicen adaptaciones razonables y apropiadas para que el contenido sea desafiante, y así promover el acceso y el logro para todos los estudiantes. Como expresan Alsina y Planas, “una educación matemática inclusiva que se base en el pensamiento crítico, la manipulación, el juego y la atención a la diversidad,...que sea abierta e integradora, exigente con el conocimiento matemático, y atractiva y útil para las personas” (Alsina, A y Planas, N., 2009).

1.2.3. Currículum de Bachillerato

En la formación matemática del alumnado hay un periodo en el que debe predominar el carácter educativo, yendo más allá del carácter instrumental que predomina en la enseñanza de la matemática en primaria, pero sin llegar al carácter profesional propio de la fase universitaria. Este período no tiene por qué coincidir exactamente con la etapa secundaria, pero es a lo largo de esta etapa donde es predominante. Una vez superada la fase más instrumental, que prioriza el aprendizaje de ciertos contenidos fundamentales para la vida en nuestra sociedad, la formación en la enseñanza secundaria prioriza la formación humana y creativa de los alumnos, así como su pensamiento crítico.

Desde el trabajo experimental y conjetural con la incorporación progresiva del rigor, que predomina en la enseñanza de la matemática en las etapas obligatorias, hasta el profesional que caracteriza a los estudios superiores, el bachillerato constituye el primer periodo post-obligatorio que debe dar respuesta a unos alumnos para ser terminal y a otros, para ser propedéutico. Sin embargo, los estudiantes que comienzan la enseñanza post-obligatoria no necesariamente tienen decidido su futuro después de esta etapa educativa. La enseñanza de la matemática en bachillerato debe permitir que el estudiante capte aspectos estructurales de la disciplina y los relacione con otros, pero el mero logro de unos objetivos y unas competencias, como los que se presentan en el currículum, no es suficiente. Es necesario, además, favorecer la más correcta elección en el futuro educativo, formativo o profesional del estudiante¹.

1.2.3.1. Competencias

Ser competente en matemáticas requiere tener unos conocimientos, capacidades y habilidades que faciliten que el alumno/a pueda y quiera afrontar los retos que se le planteen. Con el tipo de trabajo expuesto, centrado en la resolución de problemas, se desarrollan y son objeto de atención del trabajo docente en el aula las cinco siguientes vertientes de la actividad matemática:

- Resolver problemas matemáticos.
- Comunicarse matemáticamente.
- Razonar matemáticamente.
- Valorar la matemática y su construcción.

¹Currículum de Matemàtiques de Batxillerat. – Decret 142/2008 - DOGC núm. 5183

- Tener confianza en la propia capacidad matemática.

Estas vertientes deben estar siempre presentes en la actividad matemática y conforman los procesos que se deberá desarrollar de manera general a lo largo de toda la etapa.

1.2.3.2. Contenidos (NCTM y Cataluña): Funciones

En bachillerato, los estudiantes deben aprender una fusión ambiciosa de ideas y de usos matemáticos. Esta comprensión matemática compartida es importante tanto para los estudiantes que entren en el mundo laboral como para aquellos que luego se dediquen al estudio de las matemáticas y las ciencias.

Estudiar matemáticas en bachillerato es obligatorio dependiendo de la modalidad de estudio escogida, como es el caso de la modalidad de Ciencias Sociales, o la de Ciencias y Tecnología. En este periodo la educación matemática debe garantizar el acceso a un amplio espectro de carreras y de opciones educativas. Por ello deben descubrir la interacción del álgebra, la geometría, la estadística, la probabilidad, y las matemáticas discretas. Ello requiere que los alumnos entiendan los conceptos matemáticos fundamentales de función y de relación, de invariación, y de transformación. Deben conseguir visualizar, describir, y analizar situaciones en términos matemáticos. Y necesitan poder justificar y probar ideas matemáticamente. (NCTM, 2000)

El currículum algebraico de bachillerato presentado por la NCTM es ambicioso. Las demandas realizadas por los docentes sobre la confección de un currículum que contemple el desarrollo profesional, llevó a proponer los siguientes contenidos algebraicos del tema de funciones (ANEXO 1).

- 1) Interpretación de Funciones
- 2) Construcción de funciones
- 3) Modelos lineales, cuadráticos y exponenciales
- 4) Funciones trigonométricas

En el diseño curricular de matemáticas de la comunidad de Cataluña para bachillerato (Generalitat de Catalunya, Departament d'Ensenyament), observamos que el tema de funciones se adapta a la modalidad escogida por el alumno:

<p align="center">Funciones en 1º bachillerato Ciencias Sociales</p>	<p align="center">Funciones en 1º bachillerato Ciencia y Tecnología</p>
<p>Estudio de las características de ciertos tipos de funciones que pueden ser modelos de fenómenos sociales y económicos:</p> <ul style="list-style-type: none"> • Funciones a partir de tablas y gráficos. Aspectos globales de una función. Las funciones en la interpretación de fenómenos sociales y económicos. • Funciones polinómicas de primer y segundo grado y de proporcionalidad inversa aplicadas a las ciencias sociales. Interpolación y extrapolación lineal. • Funciones definidas a trozos. Una primera idea de continuidad, en contextos que conllevan saltos. <p>El modelo de crecimiento exponencial frente a los modelos lineales o cuadráticos</p> <ul style="list-style-type: none"> • Situaciones que mantienen el tanto por uno de variación constante: modelos exponenciales. La función exponencial. • El crecimiento exponencial frente a otros modelos de crecimiento. • Concepto y propiedades de los logaritmos ligado a la resolución de ecuaciones exponenciales. 	<p>Estudio de las características de ciertos tipos de funciones que pueden ser modelos de fenómenos científicos, tecnológicos y sociales</p> <ul style="list-style-type: none"> • Funciones a partir de tablas y gráficos. Aspectos globales de una función. Utilización de las funciones para la interpretación de fenómenos científicos. • Funciones a trozos. Una primera idea de continuidad, en contextos que conllevan saltos. La función valor absoluto. • Las funciones de proporcionalidad inversa en fenómenos físicos. Comportamiento asintótico. Estudio, con ordenador, de las funciones homográficas como traslación de las funciones de proporcionalidad inversa. • Situaciones que mantienen el tanto por uno de variación constante: modelos exponenciales. Las propiedades de la función exponencial. El crecimiento exponencial frente a otros modelos de crecimiento. Concepto de logaritmo ligado a la resolución de ecuaciones exponenciales. La función logarítmica: aplicación al estudio de fenómenos científicos o tecnológicos.

Ilustración 1-2: Cuadro comparativo del tema de funciones en 1º de bachillerato del currículum de Cataluña según la modalidad

Fuente: Currículum batxillerat – Decret 142/2008 - DOGC núm. 5183

Tanto en los NCTM como en el currículum de Bachillerato de Catalunya de ambas modalidades podemos observar que hay un eje común en los tres programas: Interpretación y construcción de funciones, y modelización de situaciones de un contexto a través de una función. En nuestra investigación desarrollaremos la primera parte del tema. No entraremos en el de “modelos funcionales”.

1.2.4. El uso de las nuevas tecnologías en el proceso de enseñanza-aprendizaje

En los últimos años las nuevas tecnologías de la información y la comunicación (TIC) han provocado un fuerte impacto en la economía, la política, la sociedad y la cultura. Las formas de producir riqueza, de comunicarse, de definir identidades, de relacionarse socialmente, de generar y comunicar conocimiento han cambiado radicalmente.

Dentro del sistema educativo se vienen realizando innumerables experiencias de introducción de las TIC en el aula, pero muchos de estos proyectos han sido resultado de una fuerte presión

social y económica por incluirlas en la educación, sin dar tiempo a una reflexión y planificación a largo plazo de gran escala, incluso sin poder anticipar futuros desarrollos. Por este motivo encontramos en muchas ocasiones “una inadecuación de los marcos institucionales actuales para dar rápida respuesta a los desafíos de las nuevas tecnologías” (Dussel, I. y Quevedo, L., 2010)

¿Cuál es, entonces, el impacto que están teniendo las TIC en el sistema educativo y más específicamente en la escuela? Uno de los rasgos más importantes de las nuevas tecnologías es que permiten la edición de productos ya existentes (intervención, reescritura, modificación y cambio de sentido) que, de alguna manera, están ahora abiertos a la resignificación. Los estudiantes ahora pueden editar y manipular fotos, grabar sus propios vídeos, crear sus propios canales de música, realizar presentaciones de textos que pueden ir acompañadas de imágenes y música, etc. Es decir, según plantean Dussel y Quevedo, ahora el alumno puede en menos tiempo y con una comunicación más efectiva realizar los siguientes procesos:

- Iteración (revisar indefinidamente)
- Retroalimentación (despliegue del proceso de trabajo)
- Convergencia (integración de modos de autoría distintos: vídeo y audio)
- Exhibición (poder desplegar el trabajo en distintos formatos y plataformas para distintas audiencias)

Esto nos hace reflexionar sobre diversos aspectos importantes a los que las escuelas deberían dedicar más atención:

- En primer lugar **los nuevos contenidos curriculares**: “el fomento de lo que llamamos las nuevas competencias de los medios” (Jenkins, 2006) que es un conjunto de competencias culturales y habilidades sociales que los jóvenes necesitan en el nuevo panorama de los medios. La cultura participativa cambia el enfoque de un aprendizaje individual a uno desde la comunidad que rodea al individuo. La educación implica actualmente desarrollar habilidades sociales a través de la cooperación y habilidades de creación y trabajo en red (“networking”). Estas competencias se construyen sobre la base de la enseñanza tradicional, las habilidades de investigación, los conocimientos técnicos y las habilidades de análisis crítico que se enseñan en el aula.

Las nuevas competencias incluyen:

- Jugar: la capacidad de experimentar con lo que nos rodea como una forma de resolución de problemas.
- Desempeño: la capacidad de adoptar identidades alternativas para el propósito de la improvisación y el descubrimiento.
- Simulación: la capacidad de interpretar y construir modelos de procesos dinámicos de mundo real.
- Apropiación: la capacidad de redefinir de manera significativa y “remezclar” contenidos de los medios.
- Multitarea: la capacidad de explorar el medio ambiente y cambiar el enfoque según sea necesario.
- Cognición Distribuida: la capacidad de interactuar de manera significativa con herramientas que amplían las capacidades mentales.
- Inteligencia Colectiva: la capacidad para poner en común conocimientos y comparar notas con otros hacia una meta común.
- Juicio: la capacidad de evaluar la fiabilidad y credibilidad de la información de diferentes fuentes.
- Navegación transmediática: la capacidad de seguir el flujo de historias e información a través de múltiples modalidades.
- Redes: la capacidad de buscar, sintetizar y difundir información.
- Negociación: la capacidad de viajar a través de las diversas comunidades, discernir y respetar perspectivas múltiples, captar y seguir normas alternativas.

Para fomentar estas habilidades sociales y competencias culturales se requiere un enfoque más sistémico en la educación de los medios. Todos los involucrados en la preparación de los jóvenes debemos contribuir en ayudar a los estudiantes a adquirir las habilidades que necesitan para participar plenamente en nuestra sociedad. Actualmente las tendencias en la enseñanza se orientan al fortalecimiento de competencias, conocimientos y valores fundamentales para aprender. En este proceso se identifican las TIC como una valiosa herramienta para ser utilizada en la enseñanza de distintas materias, en cualquier etapa educativa. Ello conlleva una revolución, tanto en la investigación como en la docencia, para poder aprovechar las potencialidades que nos ofrecen los ordenadores y los recursos de internet.

- En segundo lugar, frente a esta realidad las escuelas deben **integrar nuevos entornos de aprendizaje virtual**, nuevos canales de formación a los procesos de enseñanza. Las

funciones de las TIC ofrecen nuevos entornos para el aprendizaje, libres de las restricciones impuestas por la enseñanza presencial. Las TIC permiten un constante contacto profesor-alumno, incluso fuera del horario escolar, cuestión que contribuye de forma mucho más eficaz al seguimiento exhaustivo de la labor realizada por el alumno. Al mismo tiempo, como veremos más adelante, estos nuevos entornos permiten complementar la enseñanza presencial con actividades virtuales y créditos online que pueden desarrollarse en casa, en los centros docentes, etc.

- En tercer lugar, **el profesorado necesita formación en la utilización técnica y pedagógica de las TIC** para poder enfocarlas hacia un paradigma constructivista y no memorístico.
- Realizar planes educativos para **hacer frente a las “desigualdades digitales”**. Podemos encontrar programas de incorporación de las TIC en la educación en Cataluña, por ejemplo el Proyecto Heura² o el Proyecto Educat1x1³ de dotación a escuelas e institutos de ordenadores, pizarras digitales, proyectores, infraestructuras de telecomunicación y programas informáticos para uso educativo, y en España, como por ejemplo el proyecto TICSE 2.0⁴.
- Y por último **cambios en el sistema educativo**: en los sistemas de formación donde se utilicen las TIC es necesario nuevos escenarios y materiales (online), nuevas formas organizativas, nuevos métodos para los procesos educativos. Como señala Javier Echevarría (Echevarría, 2000), la tarea en las escuelas presenciales se complementará - en algunos casos ya es complementaria- con actividades en los entornos educativos virtuales.

En definitiva, las TIC permiten impulsar el cambio hacia un nuevo paradigma educativo más personalizado y centrado en la actividad de los estudiantes. Además, la necesaria alfabetización digital de los alumnos y el aprovechamiento de las TIC para la mejora de la productividad en general, el alto índice de fracaso escolar y la creciente multiculturalidad de la sociedad, con el aumento de la diversidad en las aulas que ello supone, constituyen razones suficientes para aprovechar las posibilidades de innovación metodológica que ofrecen las TIC para lograr una escuela más eficaz e inclusiva.

² Informe sobre el Proyecto Heura publicado el 15 de Junio de 2007 por el Departament d'Educació donde se hace un balance completo de todas las inversiones hechas en la escuela pública catalana.

³ Disponible en

http://www.edubcn.cat/racs_gene/extra/00_educat_1x1/03_documents/Linies_basiques_del_Projecte_eduCAT1x1_publica.pdf

⁴ Disponible en <http://tecedu.webs.ull.es/ticse20/index.php?lang=es>

Sin embargo, los resultados obtenidos hasta el momento no han sido los esperados, dado que la frecuencia de uso de las TIC en el aula es menor que la deseada, y por otro lado “la controversia sobre la contribución de las tecnologías a la innovación educativa sigue abierta” (Sigalés, C.; Mominó, J. y Meneses, J., 2009). De hecho, actualmente, aún con una presencia creciente de las TIC en el aula, en muchos casos la estructura de la clase continua siendo similar a la de hace 15 o más años atrás.

La investigación realizada por Sigalés, C.; Mominó, J. y Meneses, J., les permitió observar que en Cataluña:

- Los docentes utilizan las TIC más fuera que dentro del aula, para buscar información o material para preparar sus clases; en general dentro del aula las utilizan como herramienta de apoyo o complementaria de las actividades que realizan de transmisión de contenidos (vídeos, ppt, películas, etc).
- Los alumnos utilizan las TIC para buscar información del tema que están trabajando en clase, para realizar ejercicios o para escribir.
- Es escaso el uso de las TIC para simular o modelizar situaciones, trabajar actividades auténticas o resolver problemas.
- Excepto en el caso del correo electrónico, las TIC no han ayudado a incrementar la comunicación entre el docente y el alumno. Los foros o la mensajería instantánea son muy poco utilizados.
- Es algunas escuelas ya se ha implementado el cambio de la pizarra por el netbook y los libros en papel por versiones digitales de los mismos. Sin embargo el tipo de práctica educativa continua siendo de carácter transmisivo.

No obstante, en los últimos años ha habido cierto progreso debido al incremento de los recursos tecnológicos y de la formación del profesorado. Hay investigaciones y se desarrollan nuevas corrientes pedagógicas utilizando las TIC, como es el caso del aprendizaje colaborativo basado en la elaboración de proyectos y la incorporación de las TIC⁵ en esta metodología didáctica, o la de “Flipped Classroom” que desarrollaremos más adelante y que es nuestra propuesta de trabajo.

⁵Disponible en http://www.uoc.edu/rusc/3/2/dt/esp/badia_garcia.pdf

1.2.4.1. El ordenador como herramienta didáctica

Para poder utilizar los ordenadores con finalidad didáctica, a pesar de su gran diversidad, hemos de tener presente que se caracterizan por:

- Ser interactivos: responden inmediatamente a la acción del alumno y permiten un diálogo continuo entre el ordenador y el usuario a través de la interface.
- Individualizar el trabajo: el alumno puede adaptarlo a su propio ritmo.
- Ser de fácil uso. Sin embargo, cada alumno debe conocer las normas de trabajo de cada software o aplicación.

Para su uso correcto en el proceso de enseñanza-aprendizaje es necesario que el docente previamente evalúe la calidad del software educativo desde el punto de vista técnico como pedagógico y planifique su concreción para obtener el máximo potencial posible en la integración curricular.

El profesor deberá evaluarlo teniendo en cuenta la interfaz, el contenido y la interacción que ofrece el material con los siguientes criterios:

- De forma general: la facilidad de uso, la coherencia, la motivación y la adaptabilidad.
- De forma específica: los recursos multimedia, la navegación, las estrategias metodológicas, el seguimiento de resultados, la participación y cooperación que el programa posibilita, etc. (García - Valcárcer, 2007)

Como podemos ver, el ordenador introduce una forma innovadora de interacción y comunicación con las informaciones, el conocimiento y con otras personas, diferente de otros medios. En este sentido, las actividades de clases idóneas donde se utiliza el ordenador son aquellas guiadas por el docente, en las que existe cooperación entre alumnos y centradas en un contenido determinado, teniendo en cuenta los conocimientos previos de los alumnos sobre los contenidos a tratar y las situaciones integradas con el resto de las situaciones escolares.

1.2.4.2. La incorporación de las TIC en las clases de matemáticas

En los últimos años el software matemático ofrece nuevas formas de enseñar, aprender y hacer matemáticas. Esto favorece tanto al docente como al alumno, ya que permite mejorar procesos de visualización de conceptos y posibilita una adecuada comprensión de estos al

ofrecer diversos sistemas de representación, además de ser una herramienta que facilita el trabajo autónomo, la atención a la diversidad del alumnado y el aprendizaje personalizado.

En la enseñanza-aprendizaje de la matemática se han realizado algunos avances en cuanto al uso de las TIC como medio, fundamentalmente para facilitar los procedimientos de cálculo (cálculo numérico, optimización, estadística) mediante el uso de software. Contamos con herramientas como Internet, blogs, libros electrónicos, WebQuests, paquetes ofimáticos, vídeos, animaciones, etc.

Las herramientas Web 2.0 como blogs, wikis, etc., despiertan gran interés en los alumnos; entre ellas podemos destacar:

Algunos blogs:

- Edumat.net.
- I-matematicas.com

Algunos wikis:

- Edumates.
- Wikimatematicas
- Wikimatematica

También existen varios paquetes informáticos que se pueden utilizar en el aula para trabajar la estadística, la geometría, la representación de funciones y las matemáticas básicas. Entre ellos tenemos:

- Geogebra: programa de geometría dinámica y álgebra.
- Wiris y Mathway: programas que permiten realizar todo tipo de cálculos
- R o SPSS: programas que permiten realizar análisis estadísticos

También podemos encontrar aplicaciones (apps) para teléfonos móviles como:

- PhotoMath: resuelve todo tipo de problemas matemáticos con sólo escanear al enunciado. (Figura 1.2-2)
- Mathematics: funciona como una calculadora gráfica.
- MathStep: resuelve límites, derivadas e integrales.
- BeatrizMathEstudioEcuations: resuelve ecuaciones paso a paso

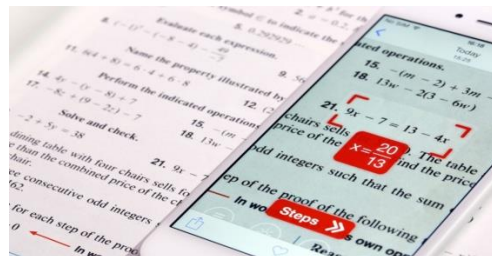


Ilustración 1-3: Aplicación para móviles
PHOTOMATH

Fuente:

<http://www.wayerless.com/2014/10/photomath-resuelve-formulas-al-instante/>

- [Algeographingcalculator](#): Dibuja funciones, encuentra intersecciones. Resuelve integrales y cuenta con una calculadora científica integrada.
- [RENOL](#): permite encontrar la solución de ecuaciones polinómicas por diferentes métodos de aproximación.

También tenemos a nuestro alcance en Internet algunos proyectos como Descartes, Gauss y los libros de matemáticas interactivos del CIDEAD y otros espacios de Internet para su uso en la clase de Matemáticas como:

- [Biografiasyvidas](#). Con acceso a las biografías de algunos famosos matemáticos.
- [Matemáticas divertidas](#). Espacio web para trabajar las matemáticas mediante juegos.
- [Thatquiz](#). Espacio interactivo con test de cuestiones matemáticas.
- [Webmath](#). Portal en inglés para trabajar conceptos matemáticos variados.
- [Mathtv](#), [Khanacademy](#), [Mathmovienetwork](#): portales con vídeos de Matemáticas de todos los niveles en inglés y ejercicios de práctica.
- [Mathsifun](#). Recursos de matemáticas en inglés.
- [Sheppardsoftware](#). Espacio con juegos interactivos de matemáticas en inglés.
- [Seccioneuropeamatesribera](#). Blog de Matemáticas en inglés.
- [Unidades didácticas de Matemáticas europeas](#). Proporcionan el acceso a contenidos matemáticos mediante la utilización de datos reales procedentes de la Unión Europea.
- [Wolframalpha](#): portal de cálculo de todo tipo de problema matemático
- [Creamat](#): recursos de matemáticas en catalán
- [Divulgamat](#): portal de comunicación matemática

También podemos encontrar redes sociales y redes de conocimiento asociadas al área de Matemáticas, además de espacios Moodle de la asignatura como es el caso de [Matestic](#), red de profesores de Matemáticas en Internet en el aula.

Como observamos, en la red se encuentra una gran variedad de espacios web, software, portales, aulas virtuales, redes sociales, etc., que tienen como elemento articulador las matemáticas. No obstante, el mayor desafío para el sistema educativo recae en cómo conseguir que las escuelas, ante estas nuevas posibilidades, desarrollen cambios significativos en la didáctica de la matemática y que el proceso de innovación contemple la incorporación de las TIC como un recurso didáctico que permita la difusión de conocimientos y experiencias cognitivas.

1.3. PRESENTACIÓN DE LA PROBLEMÁTICA DE LA INVESTIGACIÓN

“La música no está en el piano” y “El conocimiento no está en las computadoras”

(Cuban, 2008)

Según el ejemplo de Cuban, podríamos decir que el conocimiento si está en el ordenador, en una máquina que almacena y sintetiza todo tipo de información. No obstante, así como la música que puede dar un piano, lo que no está definido es el tipo de conocimiento que producirá la interacción del alumno con el ordenador, aunque probablemente podamos ubicar esas posibilidades en un cierto rango de experiencias posibles. Con esto queremos decir que la incorporación de las TIC y de los nuevos medios digitales en la escuela “involucra considerar simultáneamente el aspecto más técnico y “duro” del equipamiento y la conectividad y al mismo tiempo el más “blando” de las capacidades, competencias y formas de uso que se hacen de esos nuevos aparatos. Es decir, la separación es analítica, pero no conceptual” (Dussel, I. y Quevedo, L., 2010)

En los últimos años se ha ido incrementando la cantidad de programas, proyectos e investigaciones que buscan la incorporación de las nuevas tecnologías de la información y la comunicación en el aula. El problema que ha aparecido es la constancia de que utilizar las TIC en clase no solo comporta un cambio de pizarra a pantalla digital, sino un cambio en la didáctica de la clase para que el alumno pueda aprender de forma constructiva y ésta no se convierta en una mera transmisión de conocimientos por la vía digital. De hecho en diversas investigaciones como la realizada por Sigalés, C.; Mominó, J. , Meneses, J. y Badia, A. sobre la “integración de Internet en la Educación Escolar Española” encontramos que “podríamos agrupar profesores y directores en dos grandes colectivos de proporciones similares: los que ven en las TIC un instrumento para mejorar la efectividad de las tareas que ya se llevan a cabo, sin introducir grandes cambios en ellas; y los que las perciben como un instrumento para la innovación en los distintos ámbitos educativos.” (Sigalés, C.; Mominó, J. , Meneses, J. y Badia, A. , 2008). Moreira, M. en su investigación sobre “El proceso de integración y uso pedagógico de las TIC en los centros educativos”, comparte esta opinión, concluyendo que la incorporación de las TIC en general está generando en las escuelas cambios organizativos tanto a nivel de centro como del aula, pero no necesariamente innovación pedagógica en las prácticas docentes. (Moreira, 2011)

Para que las TIC sean utilizadas de manera normal y eficaz, deberá pasar un tiempo. Pero la educación no puede quedarse a la espera de que alguien, desde fuera, marque la manera de hacer y de abordar los contenidos. Ante esta perspectiva se han realizado estudios sobre posibles cambios metodológicos de las prácticas educativas incorporando la utilización de las TIC en el proceso de enseñanza-aprendizaje. Entre ellos encontramos el de Badia, A. y García, C. en el que proponen la incorporación de las TIC en la enseñanza a través de una metodología didáctica del aprendizaje basada en la elaboración de proyectos. (Badia, A. y García, C, 2006).

Otra posible opción es la de crear entornos o espacios de aprendizaje individual en línea, una “telescuela obligatoria y gratuita” (Prats, 2002), un portal, moodle, etc., que conste de actividades, información, juegos, herramientas de intercomunicación, entre otros elementos, con espacios de intranet que garantice la restricción de acceso a los usuarios escolares.

O bien, configurar entornos o espacios de trabajo colaborativo en línea. La Educación Asistida por Ordenador (EAO) es otra propuesta didáctica para la utilización educativa del ordenador. Esta facilita la adquisición de contenidos por medio de un programa informático, donde se establece un diálogo con el alumno a partir de una sucesión de preguntas y respuestas, permitiéndole avanzar a su propio ritmo a la vez que se ve implicado en el proceso de forma activa (Escobar, 2009).

No obstante, la propuesta metodológica que consideramos más interesante y en la que centraremos nuestro estudio es la desarrollada en gran parte por dos profesores estadounidenses, Jonathan Bergmann y Aaron Sams, que plantea “invertir la clase”. Lo que antes se veía en clase, se ve en videos tutoriales en casa, y las horas de clase se aprovechan para realizar actividades en grupo o co-tutoriales (Bergmann, J. y Sams, A., 2012)

1.3.1. El problema de la investigación

Hemos visto cual es el contexto que enmarca nuestra investigación, con la finalidad de diseñar e implementar una metodología innovadora de enseñanza, la Flipped Classroom, en la clase de matemáticas en el tema de funciones para alumnado de primero de bachillerato, pero antes de diseñarla deberemos establecer los indicadores de diagnóstico de las habilidades y destrezas algebraicas de los alumnos en este tema, pues deben tenerse en cuenta. Por otro

lado, una de las inquietudes de este estudio ha sido analizar el proceso de la influencia del uso de videos tutoriales hipermedia en el desarrollo de estas habilidades y destrezas algebraicas del alumno y analizar el proceso de enseñanza-aprendizaje del mismo utilizando la metodología de la “*Flipped Classroom*”.

Por tanto el problema de la investigación se ha centrado en las siguientes cuestiones:

¿Se puede acortar la distancia que existe entre las matemáticas y los alumnos, poniendo a su disposición instrumentos y medios, como los videos tutoriales, que faciliten la comprensión y les permitan desenvolverse sin mayores dificultades en esta área? ¿Atiende a la diversidad del alumnado la metodología de la “*Flipped Classroom*”? ¿Qué implica para un profesor implementar en sus clases la metodología de “*Flipped Classroom*”? ¿Qué ventajas y limitaciones surgen de realizar clases con esta metodología? ¿Qué futuro tiene utilizarla? ¿Es factible aplicarla en todas las aulas? ¿Se puede generar un cambio institucional a nivel didáctico con la implementación del modelo de la “*Flipped Classroom*”?

Una vez planteado el problema de la investigación, la enmarcamos en los alumnos de bachillerato y en los créditos dedicados al álgebra del primer curso de esta etapa. Aunque dependiendo del centro escolar de que se trate, el programa que se va a trabajar se puede ubicar en primero o en segundo de bachillerato.

1.3.2. Los objetivos de la investigación

De acuerdo a las finalidades de la investigación, los objetivos que se pretende alcanzar son:

- O1. Identificar indicadores de diagnóstico y formación que nos permitan reconocer niveles de habilidades y destrezas algebraicas de una población de alumnos de primero de bachillerato.
- O2. Trazar lineamientos perspectivas para la utilización de las NTIC en el proceso de enseñanza-aprendizaje de la matemática, en aulas heterogéneas y en primero de bachillerato, a partir de los diferentes tipos de recursos que permiten el uso de la computación como medio de enseñanza.

- O3. Diseñar entornos de evaluación sobre el razonamiento inductivo y deductivo del álgebra vía *online* con alumnos diversos que nos permitan descubrir las dificultades que tienen en su aprendizaje.
- O4. Confeccionar unidades de trabajo en formato video tutorial que potencien las habilidades y destrezas relacionadas con el contexto algebraico de los alumnos de primero de bachillerato.
- O5. Programar la unidad de “Funciones” donde utilicemos el método de “Flipped Classroom” en clase de matemáticas en el trabajo con los alumnos.
- O6. Analizar los resultados del trabajo realizado por los alumnos en las unidades que se realizaron con “Flipped Classroom”.
- O7. Analizar logros de competencias fundamentales asociadas al trabajo algebraico realizado en el campo de las funciones.
- O8. Conocer la opinión de los alumnos y de los profesores que participan en la implantación del modelo de enseñanza “Flipped Classroom” en el aula de primero de bachillerato, sobre los recursos utilizados y el modelo en sí, como método de aprendizaje del álgebra.

Así, en base a lo expresado en este apartado de los objetivos del estudio y una vez conocidos los indicadores de diagnóstico básicos, nos proponemos diseñar, implementar y experimentar la metodología innovadora de enseñanza, Flipped Classroom, utilizando vídeos tutoriales en un entorno virtual formativo para el alumnado del primer curso de bachillerato.

1.3.3. Las hipótesis y supuestos de trabajo

Son muchas las razones que nos llevan a considerar necesario y efectivo poner al alcance del alumnado las tecnologías masmedia, sobre todo a partir de los resultados positivos obtenidos por Bergmann y Sams (Bergmann, J. y Sams, A., 2012), Khan (khan, 2012) y muchos otros.

Es por ello que adoptaremos una hipótesis general constructivista sobre el desarrollo y evaluación de los aprendizajes y la formación. En base a esta hipótesis deberemos diagnosticar la situación inicial del alumnado. Dado que los significados elaborados por los alumnos y docentes en el curso de un aprendizaje y formación dependen de la situación en que se encuentran y de la interacción social, pensamos que el diseño y desarrollo interactivo y teletutorizado puede ayudar especialmente al alumnado, y contribuir al desarrollo profesional del profesor.

Por esto en la investigación se plantean las siguientes hipótesis y supuestos:

H1: “Aplicar las pruebas diagnósticas de habilidades y destrezas algebraicas y la de funciones, favorece el conocimiento del nivel algebraico previo del alumnado y el origen de las dificultades en el aprendizaje de las matemáticas, permitiendo orientar la implementación del modelo de enseñanza-aprendizaje “Flipped Classroom” en la unidad de funciones en 1º de bachillerato”.

S1: “El modelo de “Flipped Classroom” favorece la enseñanza y aprendizaje activo del álgebra, generando un ambiente de cooperación y diálogo en el aula.”

S2: “El modelo “Flipped Classroom” favorece:

- *La comunicación constructiva, tanto a nivel alumno-profesor, mejorando la relación entre ambos, como a nivel alumno-alumno al poder ayudarse unos a otros frente a una duda o dificultad.*
- *La personalización: Posibilita que el estudiante aprenda a su propio ritmo, tenga más control de su propio aprendizaje y estimula la comprensión de cada concepto antes de avanzar al siguiente.*
- *Atiende a la diversidad: Nivelra el aprendizaje respetando la heterogeneidad del alumnado.*
- *Accesibilidad, Recuperación y Revisión continua: Enfrenta el absentismo y permite el acceso libre al alumno al material audiovisual tantas veces como le sea necesario.*
- *Sirve como herramienta de diagnóstico para identificar las dificultades del alumno.”*

H2: “Los alumnos que participan en la implantación del modelo “Flipped Classroom” consideran que utilizar los vídeos tutoriales como recurso para las clases de matemáticas favorece el aprendizaje del álgebra”

H3: “Los alumnos que participan en la implantación del modelo “Flipped Classroom” están a favor de realizar todas las unidades temáticas del curso con esta metodología de enseñanza-aprendizaje”.

S4: “Los profesores que participan en la implantación del modelo “Flipped Classroom” están a favor de realizar todas las unidades temáticas del curso con esta metodología de enseñanza-aprendizaje”.

A continuación presentamos un resumen de los contenidos expuestos en este primer capítulo.

1.4. RESUMEN

En este capítulo hemos tratado los contextos de la investigación que deberemos tener en cuenta para el diseño e implementación de la metodología “Flipped Classroom” en la clase de matemáticas en la unidad de funciones de alumnos de primero de bachillerato. Para ello hemos visto el enfoque socio-cultural del aprendizaje que lleva a plantear propuestas de metodologías de incorporación de las TIC en la práctica educativa de matemáticas en aulas inclusivas. Para finalizar, hemos planteado el problema de la investigación y los objetivos que pretendemos alcanzar con ella.

2. MARCOS REFERENCIALES

2. MARCOS REFERENCIALES	27
2.1. <u>PRESENTACIÓN</u>	31
2.2. <u>EL APRENDIZAJE DEL ALGEBRA: FUNCIONES</u>	32
2.2.1. Estudios sobre el aprendizaje del álgebra	32
2.2.2. Dificultades, obstáculos y errores en el aprendizaje del álgebra	40
2.2.2.1. Dificultades en el aprendizaje de las matemáticas	40
2.2.2.2. Obstáculos en el aprendizaje de las matemáticas	43
2.2.2.3. Errores en el aprendizaje del álgebra	44
2.2.3. Estudios sobre el aprendizaje de las funciones	46
2.2.3.1. Evolución del concepto de función	46
2.2.3.2. Las funciones en bachillerato	49
2.2.3.3. Las funciones en las pruebas PISA	51
2.2.3.4. Estudios realizados sobre la enseñanza de funciones con TIC	53
2.3. <u>LA UTILIZACIÓN DE ENTORNOS MULTIMEDIA EN LA ENSEÑANZA</u>	58
2.3.1. Diferencias entre hipertexto, multimedia e hipermedia	58
2.3.2. Definición de términos	65
2.4. <u>EL MODELO DE ENSEÑANZA-APRENDIZAJE “FLIPPED CLASSROOM”</u>	67
2.4.1. Marco histórico	67
2.4.2. Definición	69
2.4.3. Las plataformas MOOC utilizadas en el modelo de enseñanza FC	71
2.4.4. El modelo “Flipped Classroom” y el pensamiento educativo actual	73
2.4.5. Estudios realizados sobre el modelo Flipped Classroom en la educación	75
2.4.6. Estudios realizados sobre el modelo Flipped Classroom en matemáticas	79
2.5. <u>DELIMITACIÓN Y CONCRECIÓN DE NUESTRO MARCO TEÓRICO</u>	83
2.6. <u>RESUMEN</u>	84

2.1. PRESENTACIÓN

En este capítulo presentamos el marco referencial necesario para diseñar e implementar el modelo de enseñanza *Flipped Classroom* en la clase de primero de bachillerato de matemáticas. Para ello es necesario profundizar en tres aspectos:

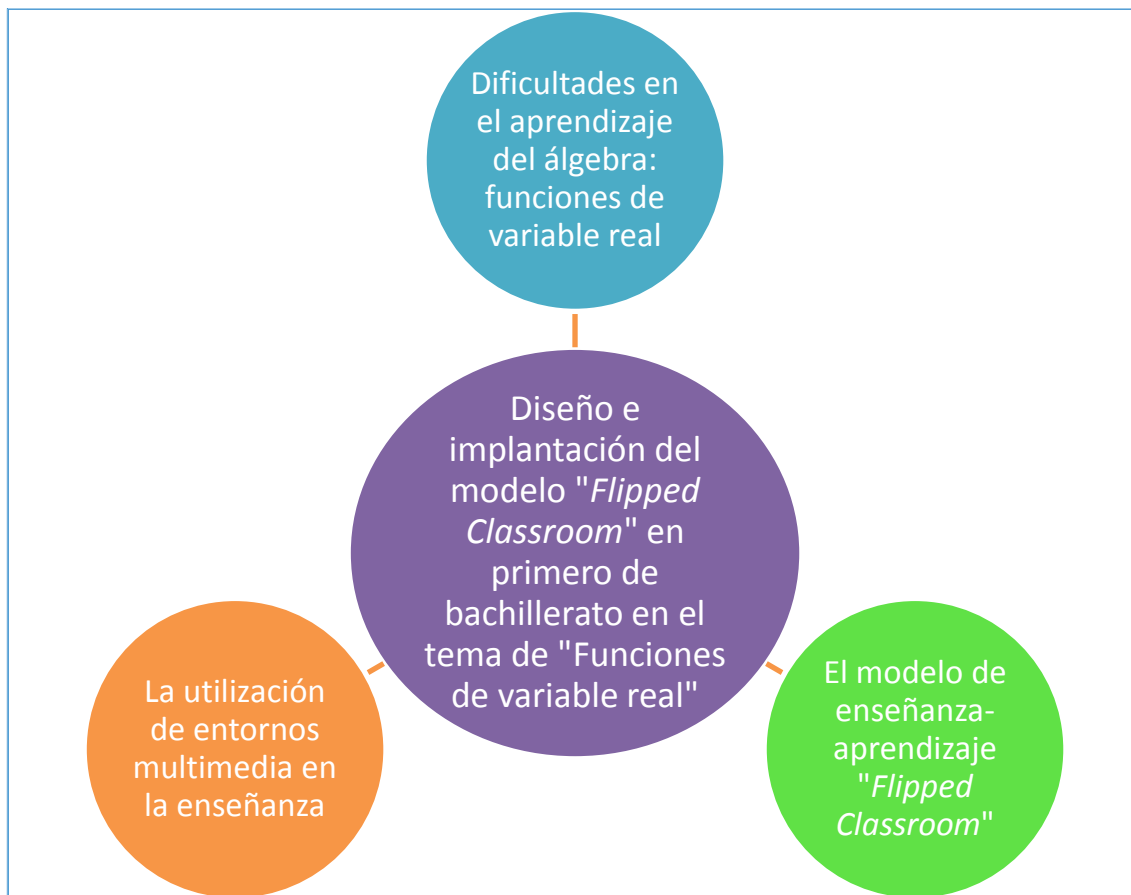


Ilustración 2-1: Ámbitos referenciales de la investigación

Fuente: Elaboración propia

- En primer lugar, respecto a los estudios que se han realizado sobre las dificultades que surgen en el aprendizaje del álgebra y en particular en el tema de funciones.
- En segundo lugar, respecto al uso de la tecnología multimedia en la educación; los criterios y pautas que deben ser considerados en su uso en la práctica educativa, y la definición de conceptos necesarios para el desarrollo del estudio.
- Y por último, estudiar cómo y cuando surge el modelo de enseñanza *Flipped Classroom*, en qué consiste y los estudios realizados tras su uso educativo.

2.2. EL APRENDIZAJE DEL ALGEBRA: FUNCIONES

2.2.1. Estudios sobre el aprendizaje del álgebra

Estudiar aritmética, álgebra y geometría por separado es un error según se ha visto y demostrado. A pesar de que el Movimiento Moderno Matemático intentó influir sobre este punto de vista en las escuelas de matemáticos, más tarde fue abandonado y se volvió a caer en la concepción tradicional.

Si consideramos la relación entre el álgebra y la aritmética, podemos hallar varios puntos de vista distintos. Uno de ellos es el punto de quiebre epistemológico, el corte didáctico, que viene del hecho de que el álgebra es “abstracta” mientras que la aritmética es “concreta”; de que el álgebra es estructural mientras que la aritmética es procesal.

Por otro lado, también hay quienes consideran que el álgebra emerge de la aritmética, ya sea a causa del desarrollo histórico o porque consideran que la primera es una generalización de la segunda. De hecho en las escuelas es tradición añeja enseñar la aritmética antes que el álgebra, y mucha gente tiene éxito al hacerlo así. Como consecuencia, varios estudios han concluido que las dificultades en álgebra vienen del aprendizaje de la aritmética.

Algunos de ellos sugieren que las dificultades aparecen cuando no se comprende bien la aritmética, y que éstas ocasionan nuevas dificultades en el estudio posterior del álgebra. Otros defienden que las dificultades se deben a la consolidación de nociones típicas de aritmética, lo que luego les impide trabajar bien con el álgebra. (Ruano, R. M., Socas, M. M. y Palarea, M. M., 2008)

El aprendizaje del álgebra y la aritmética, en particular, sirve para toda la vida, puesto que emerge de las demandas de la misma. Si se sitúa el aprendizaje en el sentido “real-útil” se motiva al alumno. Es por ello que se considera apropiado empezar con la aritmética dentro y fuera de la escuela.

Para aprender aritmética, tanto dentro como fuera de la escuela, interesa que el alumno sepa calcular, aunque las estrategias sean distintas en ambos casos. En cambio para aprender álgebra la situación es diferente, ya que ésta no es visible fuera de la escuela. Además, el

álgebra trabaja “pensando valores” que resultan extraños en la vida cotidiana. Se caracteriza precisamente por tratar con transformaciones generales de expresiones, la importancia de establecer relaciones con el modelo de un problema y las herramientas para resolverlo.

En otras palabras, mientras que el álgebra es el análisis que apunta a la síntesis, la aritmética es la síntesis guiada por el análisis. La idea clave es que ambas ayudan a las personas a estar mejor preparadas en la vida. Por ello la escuela ha de tener muy presente la relación entre las dos. Y para que esta relación se dé correctamente deberíamos establecer:

- 1- Que el álgebra no debe ser vista como una generalización aritmética;
- 2- Que la aritmética no debe proceder del álgebra;
- 3- Y por último, que el álgebra y la aritmética se relacionan en muchos y diferentes puntos nucleares. (Kieran, C., Filloy, 1989)

Podemos citar algunas causas de que este importante paso no se dé con éxito (Fidela Velázquez, 2003). Ello va a ser debido a:

- La complejidad y concisión del modelo comunicativo y del lenguaje matemático, por su alto grado de conceptualización.
- Una experiencia previa alejada de contextos familiares o de modelización matemática.

Algunos autores como Collis y Piaget estudiaron este proceso de transcurso de la aritmética al álgebra desde los estadios del pensamiento y las diferencias entre ellos, utilizando la siguiente clasificación, en cuanto al desarrollo de los aspectos numéricos – algebraicos que podemos encontrar en (Fidela Velázquez, 2003):

Estadio	Desarrollo del pensamiento en cuanto a numeración	Desarrollo algebraico
1. Estadio preoperatorio (4- 6 años)		
2. Estadio temprano de operaciones concretas (7- 9 años)	<ul style="list-style-type: none"> • Capacidad para efectuar operaciones simples con elementos concretos relacionados con objetos físicos • Concreción numérica relacionada con material físico. • Concreción operatoria relacionada con analogías físicas. • Necesidad de clausura. 	<ul style="list-style-type: none"> • Una letra es representante unívoca de un número, esto es, el sujeto es capaz de sustituir una letra por un número que identifica como su equivalente.
3. Estadio final de operaciones concretas (10-12 años)	<ul style="list-style-type: none"> • Reversibilidad • Inclusión lógica, clasificación y ordenamiento de objetos • Habilidad para conservar ciertas propiedades de los objetos (número, cantidad) a través de los cambios de otras propiedades • En cuanto a numeración: <ul style="list-style-type: none"> - Capacidad de realizar cierto número de operaciones en secuencia con números pequeños - Capacidad de efectuar operaciones simples con números grandes (con clausura) 	<ul style="list-style-type: none"> • Una letra es sustituida por un par de números que permiten hacer generalizaciones y elaborar conclusiones. • Capacidad de retener mentalmente dos o más variables.
4. Estadio de generalización concreta o formal temprana (13-15 años)	<ul style="list-style-type: none"> • Uso de cierto número de operaciones en secuencia, con números no asequibles físicamente (clausura como garantía, no como necesidad). • Uso de elementos generalizados (cifras grandes, letras en sustitución de números) • Capacidad de trabajo con fórmulas. 	<ul style="list-style-type: none"> • La letra representa un número generalizado, con entidad propia e iguales propiedades que otros números con los que tuviera experiencia.
5. Estadio de las operaciones formales (De los 16 años en adelante)	<ul style="list-style-type: none"> • Habilidad de pensar, más allá de experiencias concretas, las consecuencias de cambios en objetos y sucesos. • Capacidad de usar enunciados verbales y proposiciones en lugar de objetos concretos únicamente. • Capacidad para razonar sobre las combinaciones de las variables de un problema. • Capacidad para comprender reglas generales de ejemplos particulares • Capacidad para deducir conclusiones particulares de proposiciones generales • En cuanto a numeración: <ul style="list-style-type: none"> - No es necesaria la relación de elementos, operaciones o combinaciones de ambos con modelos físicos análogos. - Es posible tomar como realidad un sistema abstracto bien determinado, con definiciones, relaciones y reglas. - La clausura no se necesita más que cuando se agotan todas las posibilidades de razonamiento abstracto. - Se resuelven problemas en que las letras representan números o variables que emplean una operación bien determinada. 	<ul style="list-style-type: none"> • Aparición del concepto de letra como incógnita específica. • Aparición del concepto de letra como número generalizado o como variable.

Ilustración 2-2: Estadios de pensamiento y desarrollo de los aspectos numéricos-algebraicos de la edad escolar

Fuente: Elaboración propia partir de (Fidela Velázquez, 2003)

Sin embargo Godino y Font van un paso más allá y proponen que el álgebra debe empezar a desarrollarse desde el estadio pre-operatorio a través del “estudio de patrones (numéricos,

geométricos o de cualquier tipo), las funciones, y la capacidad de analizar situaciones con la ayuda de los símbolos” (Godino, J; Font, V., 2003)

Nuestro estudio se centra en el último estadio, el de las operaciones formales y, como bien expresan Azcarate y Camacho, debemos tener presente que *“Cuando nos referimos a procesos cognitivos implicados en el pensamiento matemático avanzado, pensamos en una serie de procesos matemáticos entre los que destaca el proceso de abstracción que consiste en la substitución de fenómenos concretos por conceptos confinados en la mente. No se puede decir que la abstracción sea una característica exclusiva de las matemáticas superiores, como tampoco lo son otros procesos cognitivos de componente matemática tales como analizar, categorizar, conjeturar, generalizar, sintetizar, definir, demostrar, formalizar, pero resulta evidente que estos tres últimos adquieren mayor importancia en los cursos superiores: la progresiva matematización implica la necesidad de abstraer, definir, demostrar y formalizar. Por otro lado, entre los procesos cognitivos de componente más psicológica, además de abstraer, podemos citar los de representar, conceptualizar, inducir y visualizar”* (Azcarate, C. y Camacho, M., 2003)

Para Fidela (Fidela Velázquez, 2003), la mejor manera de preparar al alumnado para las adquisiciones algebraicas últimas comporta:

1. No perder de vista estos estadios y sus características;
2. No producir saltos en cuanto al orden de aparición de los sucesivos estadios;
3. Desarrollar al máximo todas las capacidades potenciales de cada estadio;
4. Para preparar las capacidades de cada estadio, trabajar de forma suficiente las del estadio precedente.

Debemos tener en cuenta que el aprendizaje matemático se nutre de las características de la “asimilación” y la “acomodación”, en cuanto a sucesivos avances y retrocesos en las adquisiciones, lo que nos obliga a un continuo trabajo de regreso hacia atrás para consolidar las etapas precedentes, como base que se produzca la asimilación de las referencias.

Desde 1976, la desilusión con los resultados de la investigación conductista previa y con la teoría conductista en general impulsó a los investigadores a empezar las investigaciones en álgebra desde procesos de aprendizaje específicos de un contenido, y no desde una teoría

general y neutral respecto del mismo. Algunas de las contribuciones principales de la investigación a un cuerpo creciente de conocimientos sobre los procesos cognitivos involucrados en el aprendizaje del álgebra de secundaria son los que vamos a describir en este apartado (Kieran, 2006).

Los principales temas investigados en álgebra han sido los que describimos a continuación.

a) El marco aritmético de referencia: Cuando los alumnos se enfrentan cara a cara por primera vez con el álgebra, traen consigo nociones y enfoques aritméticos. Y se encuentran ante un gran problema, puesto que lo que pensaban que sería una generalización de la aritmética requiere de ellos un cambio en el pensamiento de las situaciones numéricas concretas (modo informal de representación y resolución de problemas) a proposiciones más generales sobre números y operaciones (modo formal). Las dificultades que ello comporta se ven reflejadas en:

- Su forma de ver el signo igual
- Sus dificultades con la concatenación y con algunas de las convenciones de notación de álgebra
- Su falta de habilidad para expresar formalmente los métodos y los procedimientos que usan para resolver problemas
- Su interpretación de las variables

b) Variables

Se ha visto que los malos usos que interfieren a menudo con la forma en que los estudiantes llegan a entender el significado de los términos variables en las ecuaciones algebraicas y que, a su vez, producen una gran resistencia a asimilar esta parte del álgebra son:

- El uso de las letras como etiquetas. Por ejemplo, $10 \text{ mm} = 1 \text{ cm}$.
- El hecho, observable también en el ejemplo anterior, de que el signo igual no señala una relación de equivalencia, sino más bien una proposición: “hay diez milímetros en un centímetro”.
- El trato de las letras como incógnitas específicas más que como números generalizados o variables, en expresiones y ecuaciones. (Kieran, C., Filloy, 1989)

Ante esta situación, Harper (Harper, 1981) se atrevió a sugerir la existencia de etapas en la comprensión de un término literal como variable, y señaló que los estudiantes

usan los términos literales mucho antes de que sean capaces de conceptualizarlos como variables. Más tarde Booth (Booth, 1998) sugirió que la obtención de este nivel de conceptualización está relacionada con el desarrollo de estructuras cognitivas de orden más alto.

c) Expresiones y ecuaciones

Con respecto a las expresiones, se ha observado que los estudiantes creen que expresiones como $a+3$, están incompletas en algún sentido, y por ello se ven obligados a expresarlas como parte de una igualdad. También se ha comprobado que muchos no asignan significado alguno a “a” porque la expresión carece de signo igual y de un miembro a la derecha.

Por ello se ha visto la necesidad de diseñar experimentos con el objetivo de que los alumnos superen la incapacidad para aceptar que expresiones algebraicas puedan ser soluciones a problemas.

Y hablando de ecuaciones, se ha observado que:

- los alumnos casi nunca usan ecuaciones para representar los problemas aritméticos verbales;
- si se les pide una ecuación, primero resuelven el problema y luego intentan dar la ecuación, ya que son capaces de resolver problemas verbales pero no pueden escribir las ecuaciones que representan las relaciones cualitativas de la situación del problema;
- cuando escriben la ecuación se basan en las operaciones que han usado para resolver el problema. No colocan la incógnita y el resultado del cálculo está, de forma habitual, en el lado derecho del signo igual.

Uno de los factores que favorece estos hechos es que al estudiante a menudo se le presentan las ecuaciones fuera de contexto de auténticas situaciones de problemas verbales. Por ello el alumno carece de un apoyo en el mundo real para interpretarlas. Se ha visto que los procesos que usan los alumnos para resolver proposiciones de sumando desconocido incluyen:

- “contar hacia delante”
- “contar hacia atrás”
- “substitución”
- “uso de hechos numéricos conocidos”.

Se presume que las concepciones primitivas de los niños de lo que es una ecuación no contienen, en general, la idea de que tengan términos literales a ambos lados del signo igual.

La concepción de que “una ecuación es una representación de una relación numérica en la que el lado izquierdo tiene el mismo valor que el lado derecho” fue objeto de un experimento de Kieran (Kieran, 2006). El autor demostró que es posible cambiar la percepción de las ecuaciones que tienen los estudiantes que comienzan en álgebra como algo unidireccional y con la respuesta en el lado derecho.

d) Resolución de ecuaciones

Se ha observado que existen distintos enfoques usados por los estudiantes para resolver ecuaciones. Éstos se pueden clasificar en tres tipos:

- Enfoque de resolución intuitivo: los alumnos que resuelven las ecuaciones de esta manera, trabajan con el uso de hechos numéricos, técnicas de recuento y métodos de recubrimiento. Se han realizado estudios (Kim, K.; Bonk, C., 2006) que mostraron que los alumnos que suelen utilizar una combinación de procesos formales e intuitivos tienen más éxito en las resoluciones que los que usan uno solo de esos procesos. También se observó que las técnicas intuitivas a menudo no se generalizan como en las ecuaciones en que aparecen números negativos.
- Substitución por tanteo: este método de resolución tiene la desventaja de que consume mucho tiempo y coloca una carga pesada en la memoria de trabajo, excepto si todos los intentos se van anotando. Se ha observado que los estudiantes que utilizan este método como un mecanismo primerizo de resolución de ecuaciones poseen una noción más desarrollada del equilibrio entre los dos lados de una ecuación y del papel del signo igual como equivalencia que la que poseen estudiantes que nunca usaron este método. A medida que los estudiantes empiezan a aprender el método formal tienden a abandonar el método de substitución con la desventaja de que ni siquiera lo siguen utilizando para verificar la corrección de una solución.
- El método formal: este método incluye la transposición de términos, esto es cambiar de lado, cambiar de signo y ejecutar la misma operación en ambos lados de la ecuación. El problema que se presenta es que, aunque la transposición de términos se presente como una forma abreviada y más fácil que la del procedimiento de realizar la misma operación a ambos miembros de

la ecuación, los estudiantes no alcanzan a darse cuenta de ello. Como consecuencia, los alumnos no logran interiorizar la simetría de una ecuación.

Se observó que los estudiantes que tienen preferencia por el método de transposición no son capaces, en general, de dotar más tarde de sentido al procedimiento de ejecutar la misma operación en los dos lados de la ecuación. En cambio los estudiantes que tienen preferencia por el método de sustitución, como ven la ecuación como una balanza entre los lados izquierdo y derecho, no tienen ningún problema en comprender el procedimiento enseñado. (Kieran, C., Filloy, 1989)

e) **Funciones y sus gráficas**

Se pueden distinguir dos tipos de concepciones de función. Una es la *operativa*, que es aquella que ve una función como un algoritmo para calcular una magnitud cambiante por medio de otra. Y la otra es una concepción *estructural*, que es la que ve una función como una correspondencia entre dos conjuntos.

Con respecto a la segunda concepción, se ha observado que si se introduce el concepto de función como una correspondencia de varios a uno, entre un dominio y un rango, la concepción de la función será lineal para los estudiantes, independientemente del contexto matemático o científico.

Otras investigaciones han concluido que los subconceptos de función deberían introducirse en formato de gráfica para los estudiantes de alto nivel y en formato de tablas para los estudiantes de bajo nivel, puesto que se observó que los estudiantes más capaces prefieren trabajar el formato de gráfico para todos los conceptos, mientras que los estudiantes menos capaces prefieren el formato de tablas. (Kieran, C., Filloy, 1989). Sin embargo Godino, J. y Font, V. en el manual sobre “El razonamiento algebraico y su didáctica para maestros” proponen que se inicie el uso y estudio del concepto de función a partir de quinto grado de primaria, pues es uno de los principales temas de las matemáticas, y que se haga a través del análisis y estudio de relaciones en contextos significativos para los alumnos. A medida que se vaya desarrollando este razonamiento en cada nivel, el alumno irá progresando en el uso del lenguaje y el simbolismo, hasta que ya en los cursos superiores logre formalizar y generalizar patrones (Godino, J; Font, V., 2003).

En los últimos años se han realizados estudios sobre diferentes aspectos de la enseñanza del álgebra como el de Cerdán, F. sobre “Estudios sobre la familia de problemas Aritmético-algebraicos” (Cerdán, 2008), o el de García, E. sobre “Fundamentos y métodos en la enseñanza y aprendizaje inicial del álgebra. Una propuesta concreta”(García, 2011). No obstante, no es la intención de nuestro trabajo centrarnos en dar relevancia a los estudios sobre álgebra, sino simplemente dirigir nuestra investigación hacia el objetivo propuesto.

Para conocer el nivel de lenguaje algebraico de los alumnos de la muestra de nuestro estudio utilizamos una prueba diagnóstica que consta de tres cuestionarios (Anexo 1) que describiremos con detalle en el Capítulo 3 de Metodología. Los dos primeros cuestionarios fueron diseñados por Martín M. Socas (Socas M. , 1997), para realizar un estudio de errores revisado posteriormente por Ruano, Socas y Palarea en el 2008 (Ruano, R. M., Socas, M. M. y Palarea, M. M., 2008). Por este motivo vemos la necesidad de definir el contexto utilizado en el análisis de los resultados de las pruebas realizadas a los alumnos de la muestra.

2.2.2. Dificultades, obstáculos y errores en el aprendizaje del álgebra

En el proceso de enseñanza-aprendizaje de las matemáticas podemos distinguir tres niveles de concreción de problemas que pueden surgir:

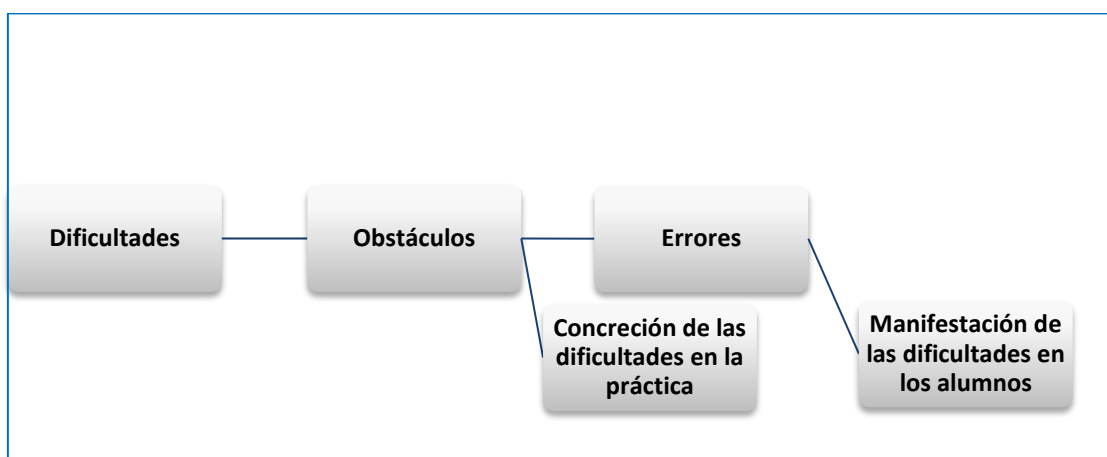


Ilustración 2-3: Niveles de concreción de las dificultades en el aprendizaje de las Matemáticas

Fuente: Elaboración propia a partir de (Ruano, R. M., Socas, M. M. y Palarea, M. M., 2008)

2.2.2.1. Dificultades en el aprendizaje de las matemáticas

Cuando los alumnos resuelven un ejercicio de matemáticas observamos que muchas veces cometen errores, no únicamente como consecuencia de no saber el contenido sino también

como resultado de un “esquema cognitivo inadecuado”. Estas dificultades que se ven a través de los errores, según Socas (Socas M. , 1997) pueden tener diferentes naturalezas:

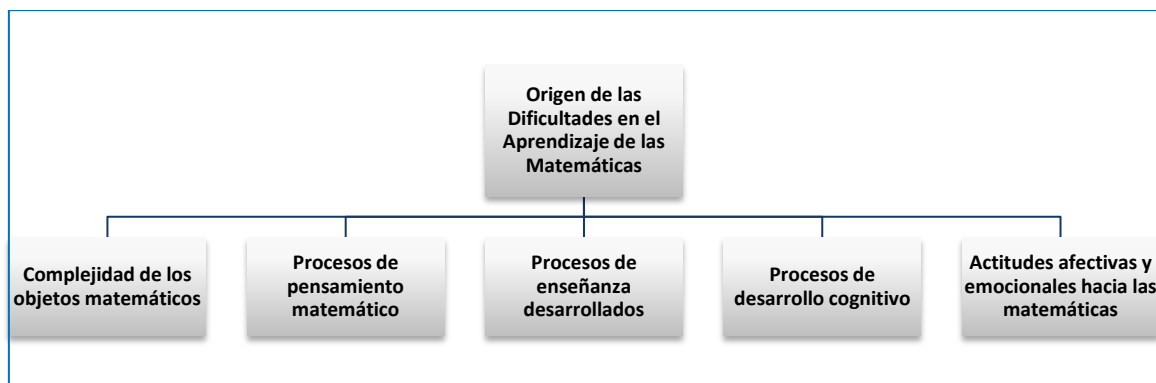


Ilustración 2-4: Origen de las Dificultades en el aprendizaje de las Matemáticas

Fuente: Elaboración propia a partir de (Socas M. , 1997)

1) Dificultades asociadas a la complejidad de los objetos matemáticos

Dentro de las causas de las dificultades asociadas a la complejidad de los objetos de las Matemáticas podemos encontrar:

- Un problema de precisión: se da en la interpretación de los objetos matemáticos, que tienen un significado preciso, a través del lenguaje ordinario.
- El uso de palabras que tienen significado semántico diferente en el lenguaje matemático y en el ordinario. O por el contrario, el uso de palabras que tienen igual significado en el lenguaje matemático que en el ordinario pero el alumno piensa que es distinto.
- El uso de palabras que sólo se utilizan en matemáticas, como el caso de “triángulo isósceles”, “triángulo escaleno”, “derivada”, “arctangente”, etc.
- El uso del lenguaje de signos, ya que su naturaleza es abstracta. Para analizar los errores que se dan al representar conceptos con signos matemáticos se deben contemplar las tres etapas diferentes del sistema de representación cognitivo que propone Socas:
 - Estadio Semiótico: los signos nuevos adquieren significado basándose en los signos ya conocidos.

- Estadio Estructural: esta etapa se estructura dependiendo de la organización de la anterior, manteniendo sus propiedades y en ocasiones ampliándolas. No obstante a veces es necesario poner ciertas reglas o restricciones cuando aparecen dificultades en situaciones que no estaban definidas en la etapa anterior.
- Estadio Autónomo: en este estadio tenemos signos con significado propio que no se han visto en etapas anteriores.

2) Dificultades asociadas a los procesos de pensamiento matemático

Las dificultades que observamos en el proceso de pensamiento matemático pueden deberse a:

- La inutilización de la lógica deductiva que hay detrás de los modelos matemáticos. Se generan situaciones de conflicto cuando, por ejemplo, un alumno debe resolver un problema desde la “lógica matemática” y ve que la respuesta no coincide con la de la “lógica social” o ni siquiera se lo plantea. O por el contrario, cuando la “lógica social” dificulta el verdadero sentido de los objetos matemáticos (Socas M. , 1997).
- Al proceso mismo de construcción del conocimiento matemático nuevo sobre las rupturas del antiguo.

3) Dificultades asociadas a los procesos de enseñanza de las Matemáticas

Las dificultades que podemos encontrar en el proceso de enseñanza de las matemáticas pueden pertenecer a diferentes ámbitos de concreción: ya sea en la institución escolar, en el currículo de matemáticas o en los métodos que utiliza el docente en la clase.

4) Dificultades asociadas a los procesos de desarrollo cognitivo del alumno

Aunque existen actualmente muchas teorías sobre el desarrollo intelectual del alumno que el profesor debería conocer para poder planificar sus clases, surgen dificultades en el aprendizaje debido a que el docente las desconoce o no las tiene presentes en la

metodología de enseñanza-aprendizaje que utiliza en las actividades del aula. (Socas M. , 1997)

5) Dificultades asociadas a las actitudes afectivas y emocionales hacia las Matemáticas

Hay alumnos que, bien sea por experiencias negativas antiguas con las matemáticas (con algún profesor, con el estudio mismo, con falsos prejuicios de la materia, etc.) o por temores, cuando están realizando una actividad matemática sienten ansiedad y/o miedo. Esto puede generar un bloqueo emocional de primer nivel y por consiguiente intelectual de segundo nivel.

2.2.2.2. Obstáculos en el aprendizaje de las matemáticas

Como plantea Socas (Socas M. , 1997), un obstáculo es un conocimiento adquirido, que, si se aplica en un contexto diferente al que fue aprendido y en el que es válido, puede resultar erróneo. Por lo que es necesario identificarlo y rechazarlo en el nuevo dominio.

Basándose en la clasificación de obstáculos de Brousseau y Herscovics, Socas expresa que se puede distinguir el origen de los obstáculos entre:

- Cognitivo: “cuando el estudiante se enfrenta a nuevas ideas que no tienen cabida en sus estructuras cognitivas ya existentes, lo que ocasiona que no pueda enfrentarse adecuadamente a la nueva información”.
- Didáctico: “resultado de las elecciones didácticas que se hacen para establecer la situación de enseñanza”
- Epistemológico: “intrínsecamente relacionados con el propio concepto. Deben su existencia a la aparición y resistencia de ciertos conceptos matemáticos a lo largo de la historia, así como la observación de conceptos análogos en los alumnos, más que a la confirmación de la resistencia de esas concepciones en los alumnos de hoy.”

Socas plantea que en algunas oportunidades los obstáculos están interrelacionados, de tal manera que aminorando uno, lo hace también el otro.

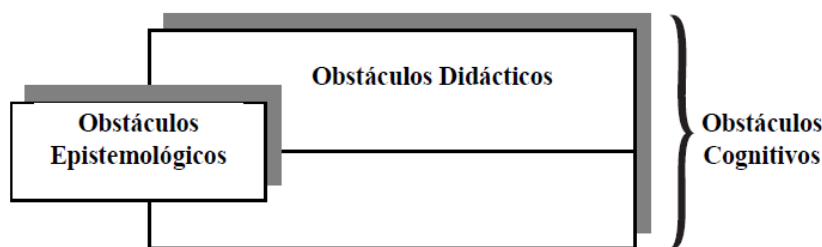


Ilustración 2-5: Organización de obstáculos que surgen en el aprendizaje de las Matemáticas

Fuente: *Dificultades y errores en el aprendizaje de las matemáticas. Análisis desde el enfoque lógico semiótico.* (Socas M. , 1997)

2.2.2.3. Errores en el aprendizaje del álgebra

Los errores en matemáticas aparecen cuando el alumno intenta resolver un nuevo problema o ejercicio utilizando los conocimientos que tiene hasta el momento, pero estos no le alcanzan para resolverlo correctamente. Es entonces cuando, ante el conflicto, necesita aprender nuevos conocimientos, reacomodarlos con los antiguos y generar una nueva estructura cognitiva. (Ruano, R. M., Socas, M. M. y Palarea, M. M., 2008)

Para analizar el origen de los errores es necesario que consideremos tres tipos de naturaleza del error (Ilustración 2-6):

- Los obstáculos: como se vio anteriormente, el obstáculo es un conocimiento que el alumno ha adquirido pero que no es el indicado en el contexto donde lo aplica. Estos obstáculos pueden ser del tipo epistemológico, didáctico o cognitivo.
- La ausencia de sentido: Se origina en los diferentes estadios del desarrollo (semiótico, estructural y autónomo) y se manifiesta en los sistemas de representación, en los que podemos diferenciar tres etapas distintas según Ruano, Socas y Pelarea (Ruano, R. M., Socas, M. M. y Palarea, M. M., 2008):
 1. Errores del álgebra que tienen su origen en la aritmética: Si el alumno no ha entendido los procesos y las relaciones en el contexto aritmético, mucho menos lo hará en el álgebra donde debe generalizarlos. (Kieran, C., Filloy, 1989)
 2. Errores de procedimiento: este tipo de error se observa cuando el alumno utiliza reglas o fórmulas de forma incorrecta.
 3. Errores del álgebra debidos a las características propias del lenguaje algebraico.

- Las actitudes afectivas y emocionales tienen su naturaleza en diferentes causas, como puede ser baja autoestima, bloqueos, temores, prejuicios, etc.

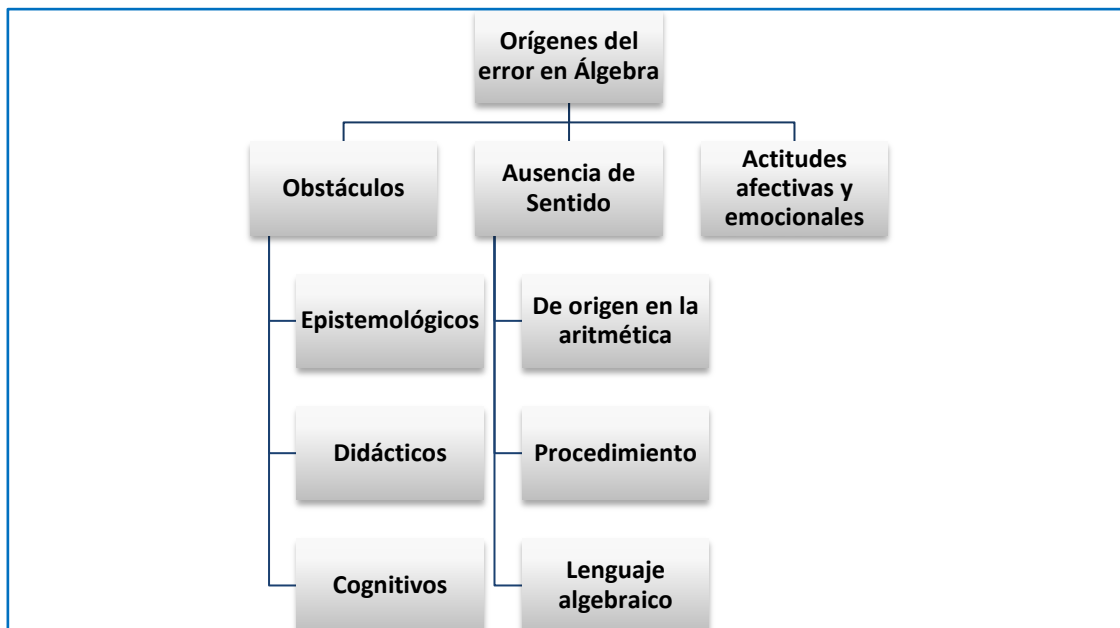


Ilustración 2-6: Clasificación de errores que surgen en el aprendizaje del Álgebra

Fuente: Elaboración propia a partir de (Socas M. , 1997)

Los errores de ausencia de sentido y obstáculos los podemos clasificar en:



Ilustración 2-7: Tipos de errores de origen de ausencia de sentido y/o de obstáculo

Fuente: Elaboración propia a partir de (Socas M. , 1997)

En el capítulo 3 hemos realizado las correspondientes adaptaciones de la teoría de Socas y colaboradores a nuestro estudio.

2.2.3. Estudios sobre el aprendizaje de las funciones

A continuación mostramos la historia del concepto de función, cómo aparece en el currículum de bachillerato y por último los estudios realizados sobre el concepto.

2.2.3.1. Evolución del concepto de función

El concepto de función ha sido uno de los temas fundamentales de la matemática moderna que ha sido utilizado en casi todas las áreas del saber y que se puede aprovechar en una gran variedad de contextos debido a su naturaleza unificadora y modelizante (Font, 2011). También ha sido uno de los conceptos más difíciles de enseñar, dada su complejidad y la gran cantidad de conceptos previos que se necesitan para aprenderlo. Font, V. expresa que “un conocimiento relevante para la enseñanza de las funciones, y más en general de cualquier contenido matemático, es su evolución histórica.” (Font, 2011)

Históricamente el concepto de función ha ido variando (ilustración 2-8):

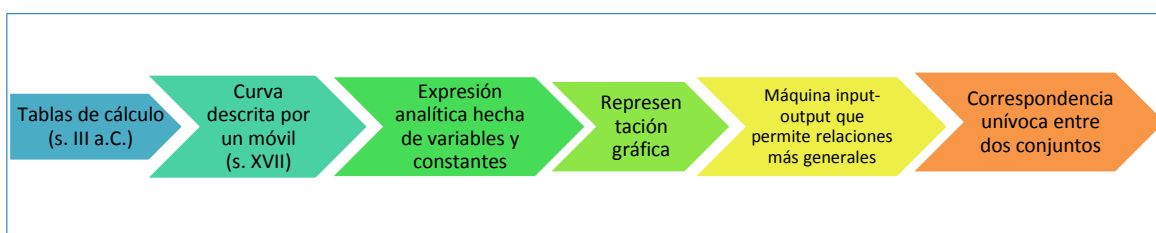


Ilustración 2-8: Evolución histórica del concepto de función

Fuente: Elaboración propia

- **En el año 225 a.C.:** el concepto de función venía dado por la forma de las tablas, como era el caso de las tablillas de cálculo de las matemáticas babilónicas, la Teoría de cónicas de Apolonio de Perga. 150 d.C: Tablas astronómicas del Almagesto, Ptolomeo de Alejandría. Irakion (Creta) de Gisleno ,
- **En la Edad Media y tránsito del siglo XVI al XVII:** el concepto de función se refería a la curva descrita por un móvil en la aplicaciones a la física que fueron utilizadas en “Las latitudes de las formas” del pensador francés Nicolás de Oresme, “Magnitudes estáticas” de Vieta, a unas matemáticas de las variables de Descartes y Fermat.
- **Siglo XVII:** Cálculo infinitesimal 1687 - Principio de Newton. Magnitudes fluyentes y desarrollo en serie de potencias. 1673 - Leibniz, primero en usar el término función. Relación entre ordenadas y abscisas. Isaac Newton. Johann Bernouill, magnitudes que se construyen a partir de magnitudes constantes e indeterminadas.

- **En 1748, Euler** publicó el libro “Introductio in analysin infinitorum” (Introducción al análisis infinito) en el que definió una función como una expresión analítica formada por variables y constantes.
- **Siglo XIX**, Se trabajó sobre si toda curva que se podía dibujar se podía entender como la gráfica de una función, funciones continuas y no continuas, funciones continuas y derivables. En 1822, Fourier, en su obra Teoría del calor, considera que no es posible mantener la idea de asociar la definición de función a una expresión analítica.
- **Finales del XIX**: Se establece el concepto de función dado por el matemático alemán Hermann Haenkel: “Una función se dice y de x si a cada valor de la magnitud variable x que se mueve dentro de un cierto intervalo, le corresponde un determinado valor de y ”. (Wussing, 1998)

Para Freudenthal el concepto moderno de función tiene dos características más desarrolladas: la naturaleza arbitraria y la univocidad. La primera hace referencia a que las funciones pueden estar definidas en cualquier conjunto de objetos sin necesariamente ser conjuntos de números. La segunda característica, la univocidad, que significa que a cada elemento del conjunto dominio le corresponde un único elemento del conjunto rango y fue requerida según Freudenthal por los matemáticos para hacer las funciones más manejables. (Freudenthal, 2001)

Según Ruiz-Higueras, se pueden distinguir siete concepciones colectivas o epistemológicas en la evolución histórica del concepto de función (Ruiz-Higueras, 1993):

Concepciones	Caracterización de la concepción			
	Situaciones	Invariantes	Representaciones	Momento histórico
1- Identificación de ciertas regularidades en fenómenos sujetos al cambio: relación en cantidades de magnitudes variables.	En fenómenos naturales donde intervienen magnitudes físicas.	Establecimiento de regularidades entre las relaciones de causa-efecto.	Medidas de cantidades. Tablas.	Desde la matemática pre-helénica.
1. Razón o proporción.	En las relacionadas con magnitudes físicas y en la geometría y astronomía.	Relaciones de conmensurabilidad entre magnitudes homogéneas.	Mediante proporciones y posteriormente de la forma $a : b :: c : d$	Desde la matemática helénica hasta Oresme y Galileo.
2. Gráfica (Visión Sintética)	En las relacionadas con magnitudes físicas en las que se intentaba representar gráficamente la relación y la dependencia entre dichas variables	Proporcionalidad entre magnitudes	Se usaban términos específicos: "formas", "latitud", "longitud". Se representaba la dependencia por medio de gráficos que adquirirían su significado de forma global.	Desde el siglo XIV en las escuelas de Oxford y París y tuvo su representante más significativo en Oresme.
3. Curva (analítico-geométrica)	Se trataba de encontrar un método de expresión que relacionara la geometría y el álgebra.	Representación analítica.	Ejes cartesianos, coordenadas, representación algebraica.	Surgió a través de los trabajos de Descartes y Fermat (s. XVI-XVII) y permanece en la matemática.
4. Expresión analítica: el nacimiento del álgebra permite expresar la dependencia entre variables por medio de expresiones analíticas.	Tanto en física, astronomía como en el cálculo diferencial: "teoría de fluxiones" de New-ton, el desarrollo en series infinitas y los aspectos geométricos representativos ligados a dichas expresiones algebraicas.	Se identifican las cantidades variables con las expresiones analíticas.	Aparecen términos como fluentes y fluxiones, y en 1673 Leibniz introduce el de "función", que Euler más tarde generaliza como un desarrollo en serie.	Comienza con los estudios de Descartes y Fermat, luego con New-ton y Leibniz en el s. XVII y con Bernoulli, Lagrange y Euler en el s. XVII-XVIII creando poco a poco el Análisis Matemático.
5. Aplicación	Siguen surgiendo de las conexiones entre la física y las matemáticas. Continuidad de funciones.	Se llega a la noción de correspondencia arbitraria.	El término "función" se expresa con $f(x)$ o y . Posteriormente, en la teoría de conjuntos y el estructuralismo boubakista se representará como $f: X \rightarrow Y$ $x \rightarrow f(x)$ Las representaciones gráficas siguen siendo a través de los ejes cartesianos y aparece un tipo nuevo: los diagramas de Venn.	Desde el siglo XVIII, en los últimos trabajos de Euler, continua con Fourier en el s. XIX hasta Cauchy, Dedekind, Loba-chevsky, Riemman y Dirichlet, entre otros.
6. Función como terna $f = (F, X, Y)$: conjunto de pares ordenados que tiene la propiedad especial de que si dos pares (x,y) y (x, z) del con-junto $X \times Y$, tienen el mismo primer elemento, deben siempre tener idéntico el segundo.	Todas las situaciones de variación que deban ser modelizadas funcionalmente, dentro de cualquier dominio científico.	$f = (A, B, G)$ es una función $\Leftrightarrow G \subseteq Ax B,$ $\forall x \in A, \exists y \in B$ tal que $(x, y) \in G.$ f es una función $\Leftrightarrow \forall x, y, z, (x, y) \in f$ y $(x, z) \in f \Rightarrow y = z$	La notación es como la expresada anteriormente, y gráficamente se sigue utilizando los ejes cartesianos.	Finales del siglo XIX y primeras décadas del s. XX, cuando la estructuración sistemática y lógica de la teoría de conjuntos se tomó como base y fundamento de la matemática.

Ilustración 2-9: Concepciones colectivas o epistemológicas de función en la historia

Fuente: Elaboración propia a partir de datos obtenidos en (Ruiz-Higuera, 1993)

Cinco aspectos importantes que considera Font, V. (Font, 2011) que se desprenden de la evolución de la noción de función y que deben trabajar en el aula son:

1. El paso de las magnitudes a las variables, dado que el origen de las funciones fue el estudio de las relaciones que existen entre magnitudes y la dependencia entre variables.
2. La regla de asignación y el dominio de la función: tanto en la ESO como en bachillerato “las funciones se presentan como una regla que a cada valor de la variable independiente le hace corresponde un único valor de la variable dependiente” (Font, 2011). En este contexto el dominio se define como el conjunto de valores de la variable independiente en los cuales está definida la función.
3. Las diferentes representaciones de las funciones: a lo largo de la historia se han utilizado diferentes tipos de representación de una función: mediante tablas, fórmulas, gráficamente o 1 tipo de representación tiene un valor representacional e instrumental.
4. Las metáforas conceptuales dinámicas y estáticas.
5. La visión unitaria y sistémica de las funciones.

Tanto el análisis de Font, V. como el de Ruiz-Higueras sobre la evolución del concepto de función nos pueden ayudar a comprender las dificultades que pueden surgir entre “el concepto imagen” y el “concepto definición” que actualmente nuestros estudiantes tienen al entender y aplicar este concepto clave en las matemáticas de bachillerato.

2.2.3.2. Las funciones en bachillerato

En bachillerato el concepto de función es uno de los conceptos básicos en las Matemáticas y, al mismo tiempo, uno de los más difíciles de adquirir por los estudiantes de este nivel educativo, pues se mezclan en él aspectos complejos en sí mismos como su simbolismo, su representación, sus aplicaciones a otros campos -física, química, biología, tecnología, etc.- y sus propiedades locales y globales, entre otros. Como vimos en el apartado anterior, a lo largo de la historia, este concepto se ha ido desarrollando a partir del estudio de fenómenos variables, fundamentalmente derivados del estudio de problemas de movimiento, y ha sido expresado en distintos lenguajes -verbal, gráfico, algebraico, etc.- Es preciso, por tanto, estudiar este concepto desde distintas facetas, utilizando distintos lenguajes y en distintas situaciones para poder conseguir una aproximación significativa al sentido de las funciones.

En la E.S.O. el concepto de función se ve, desde un punto de vista intuitivo y gráfico -mediante la utilización de descripciones verbales, tablas y gráficas- a través de fenómenos funcionales relacionados con otras áreas de conocimiento -las Ciencias de la Naturaleza, las Ciencias Sociales, etc.- y esto permite que los estudiantes alcancen una primera aproximación al concepto de función (Brihuega Nieto, 1997). Es a partir de esta situación desde la que debe comenzarse el estudio de funciones en el Bachillerato. En este sentido es muy importante que los estudiantes relacionen, con destreza, las familias más comunes de funciones con su gráfica, entendiendo el significado de sus características más importantes. En la actualidad el lenguaje gráfico es un recurso muy importante para la transmisión de la información, y el desarrollo de las capacidades básicas de este lenguaje -lectura e interpretación- es fundamental en este nivel educativo.

La dificultad de visualización de la representación gráfica de una función puede salvarse con el uso de las calculadoras gráficas y los programas informáticos. Ya sea utilizando un solo ordenador en el aula -mediante la proyección de la pantalla-, o con el uso de distintos ordenadores por los estudiantes en un aula especial o mediante la utilización de calculadoras gráficas en el aula, éstos pueden familiarizarse con la forma de las gráficas de las funciones elementales y su modificación en función de sus parámetros. Para que un estudiante pueda comprender el significado de una asíntota, por ejemplo, es preciso que la visualice en distintas funciones y tenga un sentido concreto para la situación que representa. (Brihuega Nieto, 1997)

Autores como Higuera (Higuera, 1998), Robledo (Robledo, 2003) y Azcarate y Deulofeu (Azcarate, C. y Deulofeu J. , 1996) han estudiado las dificultades del concepto de función que están relacionadas con que:

- Hay una construcción deficiente e incompleta del concepto.
- Las actividades propuestas para trabajar los diferentes tipos de representación de una función no facilitan la comprensión de los elementos que son parte del concepto.
- Existe una carencia de situaciones significativas en las actividades del aula.
- Se alcanza un nivel muy bajo de comprensión respecto a la identificación de variables, la relación de dependencia y la clasificación de funciones. Esto genera dificultades a la hora de resolver situaciones en contextos cotidianos.

Ante estas dificultades, nuestro estudio pretende ofrecer un método de enseñanza que tiene como propósito lograr una mejor comprensión del concepto.

2.2.3.3. Las funciones en las pruebas PISA

Para diagnosticar el nivel de conocimientos en el área de funciones de los alumnos de la población utilizamos una prueba diagnóstica que diseñamos a partir de ítems liberados de las Pruebas PISA. Por este motivo vemos la necesidad de contextualizar y definir el marco que utilizaremos para el análisis de los resultados de las pruebas realizadas.

El Programa PISA

El programa PISA (*Programme for International Student Assessment* o Programa Internacional para la Evaluación de los Estudiantes) es un programa de evaluación de conocimientos y habilidades adquiridas por alumnos de diferentes países en la educación obligatoria en las áreas de Matemáticas, Ciencias y Comprensión Lectora que se realiza cada tres años. Este programa es coordinado por la *Organización para la Cooperación y el Desarrollo Económico* (OCDE). La evaluación consiste en la realización de una prueba con problemas estándares y los resultados de las mismas se publican en el denominado Informe PISA. El objetivo de este programa es probar y comparar el rendimiento escolar en diferentes países de todo el mundo para poder mejorar la metodología de enseñanza y el sistema educativo.

Las Pruebas PISA de Matemáticas

En el área de matemáticas, los problemas que se plantean en las pruebas son situaciones de la vida real donde las matemáticas son de utilidad para el alumno para resolverlos, a la vez que relacionan diferentes temas del currículum de la Enseñanza Secundaria Obligatoria. Las ramas de las matemáticas que se evalúan son:

- Aritmética y Álgebra.
- Geometría.
- Funciones y gráficas.
- Estadística descriptiva.
- Combinatoria y probabilidad.

Cada ítem tiene una introducción que puede ser un texto y/o imagen y a continuación una o varias preguntas, como el ejemplo que describe la ilustración 2-10:

FRECUENCIA DE GOTEO

Las infusiones intravenosas (goteo) se utilizan para administrar líquidos y fármacos a los pacientes.

Las enfermeras tienen que calcular la frecuencia de goteo G de las infusiones intravenosas en gotas por minuto.

Utilizan la fórmula $G = \frac{g \cdot v}{60n}$ donde

- g es el factor de goteo expresado en gotas por mililitro (ml)
- v es el volumen de la infusión intravenosa en ml
- n es el número de horas que ha de durar la infusión intravenosa.

Pregunta 1 PM903Q01 – 0 1 2 9

Una enfermera quiere duplicar la duración de una infusión intravenosa. Explica exactamente cómo varía G si se duplica n pero sin variar g y v .

.....

Ilustración 2-10: Ejemplo de ítem liberado de las pruebas PISA de matemáticas

Fuente:

<http://recursostic.educacion.es/inee/pisa/matematicas/presentacion.htm>

En el lado superior de cada pregunta aparecen los códigos de corrección correspondientes a los criterios de calificación específicos ((Ilustración 2-10) ver el lado superior derecho de la “Pregunta 1”). Esto permite corregir directamente el ejercicio marcando el código que mejor se ajuste a la respuesta del alumno, siguiendo los criterios de corrección que se especifican para cada una de las preguntas (Ilustración 2-11).

CRITERIOS DE CORRECCIÓN

Máxima puntuación

Código 2: Explicación que describe tanto el sentido del efecto como su magnitud.

- Se reduce a la mitad
- Es la mitad
- G será un 50% menor
- G será la mitad de grande

Puntuación parcial

Código 1: Sólo el sentido o la magnitud.

- G se reduce
- Hay un cambio del 50%

Sin puntuación

Código 0: Otras respuestas.

Código 9: Sin respuesta.

Ilustración 2-11: Ejemplo de los criterios de corrección de un ítem liberado de las pruebas PISA de matemáticas

Fuente: <http://recursostic.educacion.es/inee/pisa/matematicas/presentacion.htm>

En la respuesta de cada pregunta, después de los criterios de corrección, también se especifican las características de la pregunta (Ilustración 2-12):

- La subescala o dominio de conocimiento: Espacio y forma, Cambio y relaciones, Cantidad e Incertidumbre.
- La situación contextual: personal, pública, educativa o laboral y científica.
- La competencia o proceso cognitivo: reproducción, conexión y reflexión (en orden de menor a mayor complejidad).
- La dificultad: puntuación resultante de un modelo de respuesta al ítem expresado en una escala de media 500 y desviación típica 100 (en algunas preguntas no se incluye por no disponer de la información).


CARACTERÍSTICAS DE LA PREGUNTA

Descripción: Explicar el efecto que tiene sobre el valor resultante la duplicación de una variable en una fórmula si las demás variables se mantienen constantes

Área de contenido matemático: Cambio y relaciones


Contexto: Profesional

Proceso: Emplear



GOBIERNO DE ESPAÑA

MINISTERIO DE EDUCACIÓN, CULTURA Y DEPORTE



Instituto Nacional de Evaluación Educativa

Más información: <http://www.mecd.gob.es/inee>

Ilustración 2-12: Ejemplo de las características de la pregunta de un ítem liberado de las pruebas PISA de matemáticas

Fuente: <http://recursostic.educacion.es/inee/pisa/matematicas/presentacion.htm>

En cada problema o pregunta el alumno debe articular los diferentes procesos cognitivos básicos: razonar, argumentar, construir modelos, representar, calcular, resolver y comunicar para llegar a la solución.

2.2.3.4. Estudios realizados sobre la enseñanza de funciones con TIC

Dadas las dificultades que se han hallado en esta área, debido a que a los estudiantes les cuesta establecer la conexión entre los datos numéricos y los datos gráficos que involucra el plano cartesiano, así también como tratar con escalas en la recta numérica, se ha pensado que

un cambio en el contexto de las tareas podría favorecer la comprensión por parte de los estudiantes de los procesos y algoritmos, antes de traducirlos a definiciones estructurales. Se ha visto que una de las formas podría hacerse incorporando el trabajo con computadoras en los cursos de matemáticas. (Kieran, C., Filloy, 1989)

Uno de los documentos que recoge varias investigaciones relacionadas con estudios sobre funciones y nuevas tecnologías de representación es el de Leinhardt, Zaslavsky y Stein (Leinhardt, G.; Zaslavsky, O. y Stein M., 1990). A partir del trabajo de Schoenfeld, concluyen que es crucial trabajar una noción explícita de la correspondencia de la gráfica y su ecuación algebraica. De hecho, podríamos decir que esta correspondencia es lo que hay que aprender y que probablemente es un buen punto de partida. Consideran que el doble sentido de direccionalidad en el plano cartesiano es otro concepto subyacente que puede confundirse o que el alumno pierde antes de tiempo. Es decir, la idea de que los valores se hacen más grandes cuando van hacia arriba y hacia la derecha, y más pequeños cuando van hacia abajo y a la izquierda, es a la vez arbitrario y fijo. Pero este concepto tiende a competir con el concepto de centralidad del origen y el aumento concéntrico de valores absolutos desde el origen. La bidireccionalidad de la correspondencia de la representación algebraica y gráfica también es importante, ya que, como señalan Leinhardt y colaboradores, los estudiantes prefieren la ruta del álgebra para representar gráficamente (tal vez porque esa es la forma en la que se enseña, aunque no es la forma de su uso). Por este motivo Leinhardt y colaboradores proponen tres categorías para orientar los futuros trabajos sobre la didáctica de las funciones y sus representaciones gráficas:

1. Tener en cuenta los diferentes tipos de actividades y sus formas de presentación.
2. Considerar el aprendizaje, las intuiciones y dificultades que existen alrededor de los procesos de comprensión de las gráficas y las relaciones de funcionalidad.
3. Considerar cómo las funciones, las gráficas y los procedimientos son enseñados en el salón de clase utilizando las TIC.

Así también, Romberg y cols. (Romberg, T.; Fennema, E.; Carpenter, T. (Eds), 2009), en su investigación realizada sobre la didáctica relacionada con la integración de las TIC graficadoras y sobre las funciones, sus representaciones y la problemática (consecuencias, dificultades, inconvenientes y ventajas), proponen considerar fundamentalmente tres criterios:

1. La necesidad de caracterizar conceptual y didácticamente (epistemológica, histórica, fenomenológica y cognitivamente), el dominio o campo de investigación relativo a las funciones y sus representaciones.

2. Que se tenga presente como algo imprescindible todo lo que se refiera a las posibilidades de las nuevas tecnologías.
3. Y, por último, proponen que estos trabajos estén orientados a las implicaciones curriculares sobre las matemáticas en general y las funciones en particular.

Como se podrá comprobar, nuestro estudio se refiere a estos criterios propuestos tanto por Leinhardt y cols. (Leinhardt, G.; Zaslavsky, O. y Stein M., 1990), como por Romberg y cols. (Romberg, T.; Fennema, E.; Carpenter, T. (Eds), 2009) en sus estudios así como en las importantes revisiones realizadas.

También, con el objetivo de actualizar nuestro problema de investigación con respecto a los trabajos más recientes sobre la incorporación de las TIC en el aprendizaje de las funciones, realizamos búsquedas frecuentes y sistemáticas en las principales bases de datos y publicaciones periódicas internacionales y nacionales, con soportes impresos o electrónicos. Los resultados de las búsquedas nos han mostrado la gran cantidad de investigaciones e innovaciones más generales que hay sobre el uso de las TIC en la enseñanza y aprendizaje de las matemáticas. No obstante al elegir los descriptores “funciones” (“*functions*”) y/o TIC (“*ICT*”) o derivados, muy pocos documentos corresponden a trabajos de investigación sobre criterios para la incorporación de las TIC en el tema de funciones. La gran mayoría son estudios sobre la aplicación de algún software en concreto, como el derive o el Geogebra, o bien de una actividad en particular.

No obstante, consideramos importante citar el informe del Proyecto de investigación “Edumat-Maestros” realizado por Godino, J. y cols. (Godino, J; Recio, A.; Roa, R; Ruiz, R y Pareja, J, 2005) sobre los “Criterios de diseño y evaluación de situaciones didácticas basadas en el uso de medios informáticos para el estudio de las matemáticas” aunque no sea específicamente del tema de funciones, debido a que plantean una pauta de análisis muy completa que sirve como pauta para estudiar las condiciones de incorporación de algunas herramientas TIC y las dimensiones a tener presente (de tipo epistémico, cognitivo e instruccional) en la práctica educativa:

- 1) Dimensión epistémica (conocimientos institucionales de referencia)**
- a) Situaciones
1. ¿Qué tipo de situaciones-problemas (tareas) específicas permite plantear el recurso?
 2. ¿Sobre qué tipo de situaciones previas se apoyan las nuevas situaciones?
 3. ¿Qué variables de tarea permiten generalizar la actividad matemática y en qué dirección?
- b) Lenguaje
1. ¿Se introduce un lenguaje específico en la descripción y uso del recurso? ¿Qué nuevos términos, expresiones, símbolos y gráficos se introducen?
 2. ¿Se utiliza más de un registro semiótico, traducciones y tratamientos entre los mismos?
 3. ¿Qué conocimientos lingüísticos previos requiere el uso del recurso?
 4. ¿Es útil en la progresión del aprendizaje matemático el lenguaje específico introducido?
- c) Técnicas (acciones)
1. ¿Qué técnicas específicas se requieren para la solución de las tareas?
 2. ¿Qué técnicas previas es necesario dominar para aplicar las nuevas técnicas?
 3. ¿Es posible generalizar las técnicas y en qué dirección?
- d) Conceptos (reglas conceptuales)
1. ¿Qué conceptos específicos se prevé emergerán de las prácticas matemáticas implementables?
 2. ¿Qué conceptos previos se usan de manera explícita o implícita y se suponen conocidos?
 3. ¿En qué dirección se pueden generalizar los conceptos emergentes?
- e) Propiedades
1. ¿Qué propiedades se prevé emergerán de las prácticas matemáticas implementables?
 2. ¿Qué propiedades previas se usarán de manera explícita o implícita y se suponen conocidas?
 3. ¿En qué dirección se pueden generalizar las propiedades emergentes?
- f) Argumentos (justificaciones)
1. ¿Qué tipo de justificaciones de las técnicas y propiedades proporciona el recurso?
 2. ¿Las argumentaciones específicas propiciadas por el recurso se apoyan en otras previas?
 3. ¿En qué dirección se pueden generalizar las argumentaciones propiciadas por el recurso?
- 2) Dimensión cognitiva (significados personales):** elaborar ítems de evaluación de los significados personales de los estudiantes sobre nociones necesarias para la actividad.
- 3) Dimensión instruccional**
- a) Funciones docentes, discentes y patrones de interacción
1. ¿En qué nivel educativo se puede usar el recurso?
 2. ¿En qué medida facilita el recurso que los estudiantes se impliquen personalmente en la realización de las tareas?
 3. ¿Cuánto tiempo se puede dedicar a los distintos tipos de tareas que se pueden proponer?
 4. ¿Cómo interesa secuenciar las tareas y las técnicas?
 5. ¿Qué conocimientos se deberán institucionalizar (regular) y en qué momento?
 6. ¿Facilita el recurso la evaluación de los conocimientos de los estudiantes?
- b) Desde el punto de vista de las funciones (o roles) del estudiante en el proceso de aprendizaje son:
1. ¿Pueden los estudiantes usar el recurso de manera autónoma para actividades de exploración?
 2. ¿Están disponibles los conocimientos previos necesarios para el desarrollo de las actividades por parte de los estudiantes?
 3. ¿Aporta el recurso elementos para la autoevaluación de los aprendizajes pretendidos?
 4. ¿Ayuda el recurso a identificar conflictos semióticos y resolverlos?
 5. ¿En qué medida facilita el recurso la implementación de configuraciones didácticas de tipo adidáctico, dialógico, magistral o personal?
- c) Otras cuestiones para evaluar globalmente la pertinencia o eficacia de un recurso comparado con otros posibles, pueden ser:
- ¿Existe un recurso alternativo que permita implementar los conocimientos pretendidos de una manera más eficaz? ¿Cómo se puede complementar el recurso con otros para optimizar la progresión del aprendizaje matemático? ¿Para qué tipo de conocimientos?

Ilustración 2-13: Pauta de análisis de las condiciones de incorporación de las TIC y las dimensiones de tipo epistémico, cognitivo e instruccional en la práctica educativa

Fuente: (Godino, J; Recio, A.; Roa, R; Ruiz, R y Pareja, J, 2005)

Esta pauta, diseñada por Godino J. y cols., la retomaremos en el capítulo 4, en el diseño del modelo de enseñanza utilizando TIC, implementado en nuestro estudio.

2.3. LA UTILIZACIÓN DE ENTORNOS MULTIMEDIA EN LA ENSEÑANZA

A continuación describiremos algunos aspectos teóricos de referencia respecto a las nuevas tecnologías que utilizaremos en el diseño e implementación del modelo de enseñanza-aprendizaje “Flipped Classroom”.

2.3.1. Diferencias entre hipertexto, multimedia e hipermedia

Cuando hablamos de los conceptos de hipertexto, hipermedia y multimedia nos estamos refiriendo a los nuevos lenguajes de comunicación, nuevas estructuras textuales y mensajes que han de ser captados a través de nuevas estrategias cognitivas. Podemos definir cada uno de estos conceptos como:

- **HIPERTEXTO:** es una forma de presentación a través de una tecnología software donde se almacena información que consta de una organización de documentos no secuenciales interconectados entre sí, creando una malla de información. A través de él los alumnos exploran e interactúan con la base del conocimiento. En general está compuesto de texto, pero puede ir acompañado de audio e información visual, por medio de la cual el usuario puede llegar a establecer sus propias relaciones entre las partes del documento. Trabaja de forma similar a como lo hace el cerebro: la lectura es no lineal, está escrito y diseñado para proveer varios niveles de lectura en función de los intereses o conocimientos del estudiante.

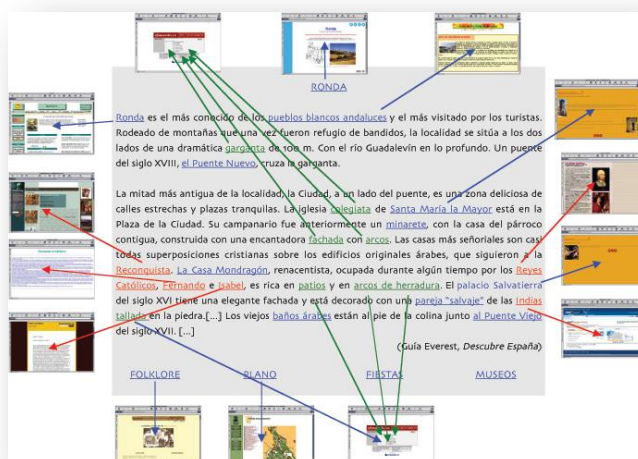


Ilustración 2-14: Ejemplo de hipertexto

Fuente: <http://ale-german.blogspot.com.es/2011/09/hipertexto-concepto-y-ejemplos.html>

En la ilustración 2-14 podemos observar un ejemplo de hipertexto en una web, donde los diferentes colores de las flechas identifican los diversos enlaces; además podemos acceder al fondo de la página a partir de vínculos que aportan ampliación de los temas.

- **MULTIMEDIA:** es un sistema de comunicación interactivo (software y hardware) que utiliza varios medios de forma simultánea en la transmisión de una información en diversos formatos, como el textual, gráfico (dibujos y diagramas), auditivo (música y voz) e icónico (imágenes fijas, animadas y secuencias de vídeo). La comunicación multimedia facilita el aprendizaje al ser muy parecida a la comunicación humana. Emplea un lenguaje directo que integra palabra e imagen, acompañándose de estímulos sonoros. Así, el alumno reacciona ante estímulos superpuestos (cromatismo, forma, sonido...) que se presentan en estructuras formales. Dicha emisión puede realizarse en directo o estar grabada.

Las principales funciones de un sistema multimedia son las de:

- Proporcionar información: enciclopedias, bases de datos, etc.
 - Entretener: juegos, información, etc.
 - Instruir (guiar el aprendizaje): tutoriales, simuladores, etc.
 - Motivar: información, imágenes, vídeo, sonido, etc.
 - Evaluar: conocimientos, habilidades, competencias, etc.
 - Ofrecer entornos: creación, investigación, expresión personal, tratamiento de datos.
 - Facilitar la comunicación interpersonal, la realización de formularios, etc.
- **HIPERMEDIA:** es la combinación de un sistema multimedia con una estructura hipertextual. De esta forma el alumno puede navegar sin una ruta predeterminada por un entorno integrado de gráficos, imágenes animadas y textos, todo ello acompañado de sonido sincronizado (música o voz) y controlado por medio del ratón.

Para situarnos mejor, podemos ubicar los materiales descritos dentro de los principales elementos de las TIC que son la informática, las telecomunicaciones y las tecnologías del sonido e imagen, y las combinaciones entre telemática, mass media y multimedia, a través de la siguiente ilustración:



Ilustración 2-15: Elementos principales del mundo digital
 Fuente:(Pabon, 2013)

Por otra parte las principales diferencias entre estos materiales y los textos tradicionales que nos han llevado a estudiar el entorno multimedia como medio de enseñanza son:

HIPERTEXTO/MULTIMEDIA/HIPERMEDIA	TEXTO TRADICIONAL
Almacenamiento en soportes ópticos y electrónicos.	Almacenamiento en soporte papel.
Informaciones relacionadas de forma no-secuencial.	Comunicación de información con carácter secuencial.
Flexibilidad en el recorrido de la información en función de intereses.	Determinación de una lectura obligada y homogénea.
Gran importancia a la estructura asociativa del pensamiento (divergencia).	Mayor peso de la estructura lógica de la argumentación (coherencia).
Posible utilización de un material con distintos fines y objetivos.	El orden de presentación de la información nos lleva a los objetivos de aprendizaje.
El lector puede añadir nexos u otros textos a lo que está leyendo (convertirse en coautor).	El texto no puede ser modificado por ningún lector.
Posible elasticidad de los textos (se pueden expandir o contraer al seleccionarlos).	Rigidez en la estructura de acceso a la información.
Información multi-código dinámica.	Información textual e icónica estática.
Se ofrece una gran cantidad de información por la que navegar.	Cantidad de información más limitada.
Permite la actualización permanente de la información de forma sencilla y económica.	Difícil y cara actualización informativa.
Mayor implicación del lector en la toma de decisiones sobre lo que quiere aprender.	Las decisiones sobre la elaboración de la información son tomadas por el autor.
Mayor esfuerzo metacognitivo para organizar la información.	La información posee una organización intrínseca determinada por el autor.
Posibilidad de desorientación en la búsqueda de la información relevante.	El texto orienta al lector sobre la información relevante (repetición,...).
El autor debe prever diferentes vías de exploración al diseñar el material.	El autor puede asumir que la lectura del texto se hará siguiendo el orden secuencial.
Dificultad para hacerse una representación mental global del contenido.	Facilita tener una representación mental global del contenido estudiado.
Gestión fácil y rápida de la información.	Limitaciones en la búsqueda y gestión de la información.

Ilustración 2-16: Diferencias entre materiales de entornos media y materiales tradicionales.

Fuente:(Gonzalez, 2013)

En síntesis, se puede decir que los conceptos clave de los nuevos medios son la navegación, la interactividad y la integración de códigos en un mismo documento.

Según García, (García-Varcárcel, 2014) los entornos de aprendizaje pueden clasificarse según dos características. Teniendo en cuenta la primera los divide en:

- 1) **Programas de aprendizaje** (Skill-based transmission software)
 - Enseñanza directiva, programas de ejercitación y práctica
 - Base: conocimientos a adquirir y método instructivo para ello
 - Programas encapsulados, cerrados.
 - El ordenador como máquina de enseñar
- 2) **Programas abiertos** (Open-ended constructivist software)
 - Exploratorios, interactivos
 - Base: encontrar, organizar, manipular y presentar información

- Utilización de Internet (acceder a información), bases de datos, programas gráficos (organizar datos), procesadores de texto (presentar información textual), presentaciones multimedia (presentar informes finales).
- El ordenador como herramienta para aprender

La segunda los diferencia respecto al tipo de uso, que puede ser:

- 1) **Centrado en el alumno** (*learner-centered*): el docente considera el ordenador como una herramienta que permite construir conocimientos, analizar datos, hacer inferencias y tratar de resolver problemas.
- 2) **Centrado en el ordenador** (*computer-directed*): El docente considera que el ordenador es una máquina de enseñar que permite adquirir habilidades y conocimientos curriculares a través de ejercicios prácticos.

Aprendizaje en red

Según Goodyear el "aprendizaje en red" es aquel en el que las TIC son usadas para promover enlaces entre estudiantes, entre estudiantes y docentes, y entre la comunidad educativa y los recursos de aprendizaje. (Goodyear, 2001)

Podemos distinguir diferentes tipos de aprendizaje en red:

- **Aprendizaje colaborativo mediado por ordenador:** Actualmente los proyectos educativos defienden el aprendizaje colaborativo que se basa, entre otros, en los siguientes supuestos:
 - a) Los alumnos aprenden mejor en grupo, mediante la experimentación activa y la discusión reflexiva, que trabajando de forma individual.
 - b) El educador no es la "fuente del saber", sino que su rol es ser promotor y guía de las actividades de aprendizaje.
 - c) El proceso educativo es una forma de interacción social en un entorno rico en información y en oportunidades de cooperación entre iguales donde el conocimiento pasa a ser resultado de una construcción social.
 - d) Los estudiantes deben desarrollar la capacidad de aprender a aprender y resolver problemas trabajando en grupo.

El Aprendizaje colaborativo mediado por ordenador (*CSCL: Computer Supported Collaborative Learning*), es una nueva corriente didáctica que relaciona el aprendizaje

colaborativo con las TIC, basada en una visión socio-cultural del conocimiento y que utiliza la tecnología únicamente como una herramienta para crear, favorecer o enriquecer el contexto interpersonal de aprendizaje y ayudar así al alumno a aprender de una forma más eficiente y efectiva. De esta forma el docente, a través de las TIC, puede diseñar entornos de aprendizaje colaborativo con actividades aplicadas a la vida cotidiana , y planteadas con objetivos reales.

- **Aprendizaje constructivista:** para Garcia-Varcárcel, A. el aprendizaje constructivista tiene las siguientes características:
 - a) Concibe el aprendizaje como una actividad mental constructiva (teoría genética).
 - b) Defiende que la información se procesa en forma de redes que permiten la organización de los conocimientos (teoría del procesamiento de la información)
 - c) Aprender es construir esquemas de conocimiento (teoría del aprendizaje significativo)
 - d) Muchos aprendizajes se consiguen gracias a la interacción con los otros (teoría sociocultural)
 - e) Las redes de ordenadores posibilitan el aprendizaje en colaboración entre comunidades distribuidas (teoría del aprendizaje mediado por ordenador)
 - f) Aprender exige explorar el campo de conocimiento desde distintas perspectivas (teoría de la flexibilidad cognitiva)
 - g) Se aprende en diferentes contextos reales (teoría del aprendizaje situado) (Garcia-Varcárcel, 2014)

- **Aprendizaje multimedial:** este se da cuando en el proceso de enseñanza-aprendizaje se utiliza materiales didácticos multimedia de diversos códigos que incrementan la eficacia del proceso. Varios estudios han comprobado cómo al integrar varias modalidades perceptivas se incrementa la capacidad de comprensión y memorización del alumno, ya que la enseñanza es flexible porque el alumno tiene elección, libertad de maniobra, y control sobre la forma en la que aprende. Las principales aportaciones del material multimedia en un aprendizaje del tipo abierto se deben a que:
 - a) Favorece el aprendizaje individualizado.
 - b) Estimula en el usuario la investigación y exploración.

- c) Permite realizar simulaciones de gran realismo.
 - d) Proporciona entornos de gran capacidad de motivación.
 - e) Constituye entornos lúdicos.
 - f) Desarrolla estrategias metacognitivas.
- **Aprendizaje hipertextual:** es el aprendizaje que se realiza con materiales didácticos no lineales como el hipertexto o el hipermedia, donde el alumno navega de forma autónoma para determinar su propia lectura. La investigación actual pretende estudiar su potencialidad educativa dado que su estructura se asemeja al funcionamiento de la mente humana. La estructura de un hipertexto se parece al modo en que la memoria relaciona conceptos de un área de contenido, por lo que sus conexiones e interacciones reflejarían, en cierta manera, el modelo cognitivo del sujeto. Por ello, podemos pensar que ambos sistemas organizan y relacionan contenidos concretos de un área de la misma forma y por este motivo concluir que el hipertexto debería ser un medio eficaz para transmitir los conocimientos al alumno. (García-Varcárcel, 2014)

Las nuevas tecnologías y especialmente los multimedia desempeñan un rol cada vez más importante en la educación, ya sea a través de la enseñanza on-line, el aprendizaje a distancia, las clases o las universidades virtuales.

Desde una perspectiva constructivista del aprendizaje, los entornos multimedia ofrecen posibilidades de aprendizaje que otros entornos no favorecen, como bien expresa Schnotz, W.: *“Las películas y los videoclips permiten presentar situaciones auténticas de aprendizaje, que deben motivar al aprendiz y situar de forma adecuada el aprendizaje. Las presentaciones estáticas y las animaciones hacen la presentación de la información más concreta y realista, y permiten visualizar y dar nitidez a la situación de aprendizaje, cumpliendo así un principio didáctico. La combinación de imágenes y sonidos se corresponde con otro principio didáctico que aconseja la presentación de la información a través de diferentes canales sensoriales. Los entornos de aprendizaje multimedia computarizados permiten interactuar con una materia: permiten una exploración del aprendizaje autodirigida, en la que un sujeto puede manipular un objeto de aprendizaje y observar los resultados.”* (Schnotz, 2002). O como manifiesta Mayer, el aprendizaje multimedia, es aquel en el que el alumno logra construir conocimiento ante una presentación multimedia. (Mayer, 2005). De los diferentes intentos por incorporar la utilización de multimedia en el proceso de enseñanza-aprendizaje, surgió la metodología de

Flipped Classroom, que describiremos en el siguiente apartado, y en la que se centra nuestra investigación.

2.3.2. Definición de términos

Debido a la aparición de la comunicación cibernética, han aparecido vocablos ingleses que hacen referencia a emisión y retransmisión de grabaciones de sonido o vídeo a través de internet. Algunas de estas palabras, que vamos a utilizar en el desarrollo de nuestro estudio, provienen de la palabra “*broadcast*”, que en inglés significa “emitir”, “transmitir”, “difundir”. Las más conocidas y utilizadas son:

- **Screencast:** Es un vídeo en el que se capturan las imágenes de la pantalla (*screen*) de una computadora y, en ocasiones, la voz de un narrador. Cuando hablamos de *screencasting* nos referimos a vídeos tutoriales que se pueden facilitar a través de soportes digitales como CD, DVD, etc. Cuando se encuentran en internet se les llama *vodcasting*.
- **Podcast:** Es cualquier tipo de archivo de audio, generalmente gratuito, que se puede descargar desde Internet. La mayoría de los podcasts están en un formato que se puede reproducir en casi cualquier ordenador o teléfono inteligente. Se puede oír en directo o descargarlo una vez emitido.
- **Vodcast:** es la transmisión de un vídeo por internet. Se puede ver en directo (*streaming*) o descargarlo una vez emitidas. Cuando hablamos de *Vodcasting* nos referimos a los profesores que producen y publican vídeos tutoriales en línea. (Ilustración 2-17)

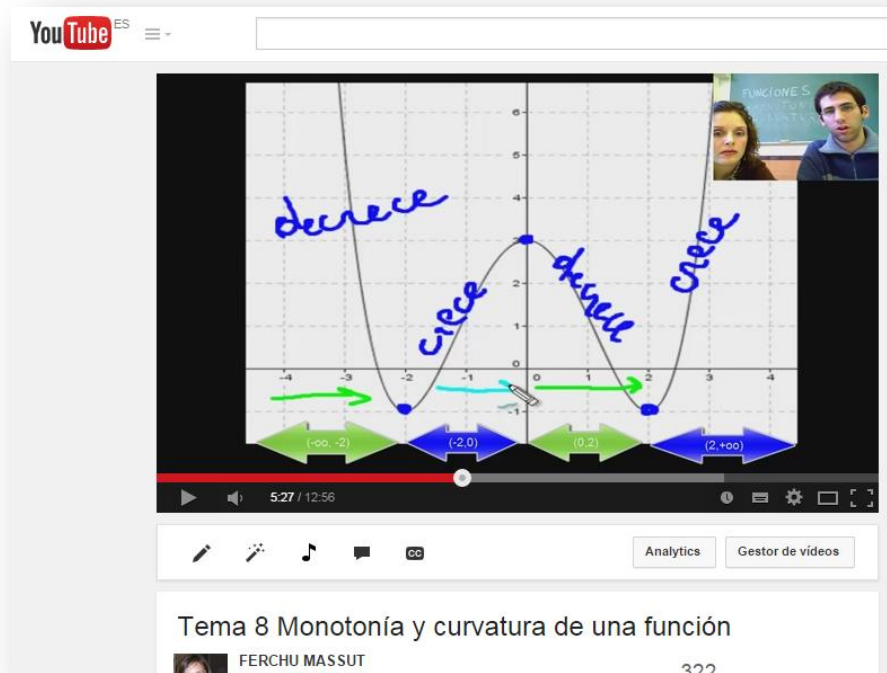


Ilustración 2-17: Vodcast o vídeo tutorial sobre “Monotonía y curvatura de una función” para la implementación del modelo *Flipped Classroom* de nuestro estudio.
Fuente: elaboración propia.

- **Pre-Vodcasting:** es un método de enseñanza en el que el maestro crea un *vodcast* de su conferencia sobre un tema u objetivo para que los estudiantes puedan verlo antes de asistir a la clase en que se va a tratar. El modelo *Flipped Classroom* originalmente fue llamado el método de *pre-vodcasting*.
- **Webcast:** es la transmisión en vídeo por internet de algún hecho que está teniendo lugar en ese momento (transmisión en vivo).
- **Flipped Classroom:** aunque luego nos extenderemos más en su significado, el “aula girada” es un modelo de enseñanza en la que el contenido de una clase tradicional se ve antes de clase en un *vodcast*, para poder dedicar el tiempo de clase al aprendizaje basado en la investigación, que incluiría lo que tradicionalmente se considera como tarea del estudiante.

2.4. EL MODELO DE ENSEÑANZA-APRENDIZAJE “FLIPPED CLASSROOM”

A continuación mostramos de dónde surgió el modelo FC y en qué consiste, así también como los estudios realizados hasta el momento.

2.4.1. Marco histórico

Aunque muchos profesores desean cambiar su forma tradicional de enseñar a un estilo más activo, centrado en el alumno a través de actividades de trabajo cooperativo, desarrollo de proyectos, de investigación y descubrimiento, experimentos o exposiciones en clase, temen sacrificar el contenido del currículum si utilizan estas técnicas. En la década de los noventa, algunos docentes, con el aumento de la disponibilidad de las TIC en la enseñanza, empezaron a proporcionar contenidos a sus alumnos a través de presentaciones de PowerPoint y vídeo conferencias fuera del aula, sobre todo en el ambiente universitario. (Lage, M.; Platt, G., 2000).

A partir de este momento, como el contenido del curso lo tenían asegurado a través de las herramientas multimedia facilitadas para ver fuera del aula, los docentes se percataron de que podían disponer del tiempo de clase para realizar actividades. Esta opción daba al alumno la posibilidad de trabajar el material práctico en un entorno en el que el mismo profesor y el resto de compañeros podían ayudarlo en el proceso de aprendizaje.

Lo que llamaba la atención de esta propuesta de cambio era, sobretodo, la ubicación física del espacio donde se producía la instrucción y un compromiso más fuerte por parte del alumno con el material, puesto que en la forma tradicional el profesor daba la clase como si fuera una conferencia, y el compromiso del alumno se producía fuera de la misma, cuando debía realizar las tareas escolares. En esta nueva propuesta la instrucción se produce fuera de la clase y la participación en el aula. Los investigadores como Baker, J. (Baker, 2000) llamaron a esta propuesta “classroom flip” (giro de aula) o “inverted classroom” (clase invertida) (Lage, M. J., Platt, G. J., & Treglia, M, 2000).

El método actual de “*Flipped Classroom*” fue desarrollado por Jonathan Bergmann y Aaron Sams en Woodland Park, Colorado en 2007 (Bergmann, J.; Sams, A. , 2012), para que los alumnos que faltaban a clase por alguna razón, pudieran acceder a conferencias virtuales donde se desarrollaba el tema visto en el aula. La respuesta que tuvieron de los estudiantes fue muy positiva, por lo que continuaron grabando más lecciones en video. Bergmann y Sams

notaron una mejora en la eficacia de la enseñanza y la participación de sus alumnos. Y se percataron de que esto no se debió a los vídeos tutoriales, sino a un mayor tiempo cara a cara con sus alumnos, puesto que no estaban gastándolo explicando en la pizarra. A través del cambio de una clase tradicional a ver las lecciones en casa a través de videos tutoriales, Bergmann y Sams podían utilizar su tiempo de clase limitado para trabajar con los alumnos uno-a-uno, realizar más prácticas de laboratorio, y responder a más preguntas y dudas. La idea inicial era ayudar a los que estaban ausentes de la clase, pero pronto se dieron cuenta de que este modelo era beneficioso para todos los estudiantes (Bergmann, J.; Sams, A. , 2012). Ambos autores dieron a su nuevo modelo de aprendizaje el nombre de “*Flipped Classroom*”, una experiencia de aprendizaje, donde el contenido teórico de la clase se graba en vídeo para su visualización asíncrona que permite a los alumnos aprovechar el valioso tiempo de la clase para interactuar entre sí y con su profesor.

Esto ha creado una nueva perspectiva en la educación. A principios de 2010, se creó una red de educadores interesados en el modelo “*Flipped Classroom*” en el estado de Colorado que actualmente cuenta con más de 23.000 miembros en todo el mundo⁶ (Overmyer J. , 2015). A mediados de 2013 se creó también en España una red de docentes que trabajan con este modelo⁷ (Touron, J. et al., 2015). Estas redes ofrecen discusiones pedagógicas sobre cómo mejorar las prácticas educativas, así como apoyo pragmático referente al uso de la tecnología y su aplicación docente. Sin embargo, la investigación empírica está empezando a desarrollarse para determinar si sus postulados son en realidad efectivos para incrementar el rendimiento del alumno.

En resumen, en la evolución de la metodología de enseñanza *Flipped Classroom* podemos distinguir tres etapas:

⁶Disponible en <http://flippedclassroom.org/>

⁷Disponible en <http://www.theflippedclassroom.es/>

Etapa	Modelo
I - <i>Live recording</i> (2006-2007)	Se grababan las clases presenciales y luego se almacenaban en un servidor para que quedaran disponibles de manera <i>online</i> para los alumnos. La limitación de este modelo era que los vídeos eran excesivamente largos, de gran tamaño, y no del todo efectivos.
II - <i>Flipped Classroom</i> (2007-2008)	Los vídeos tienen una duración de 5 a 12 minutos, están disponibles en formato DVD o en línea y se ven fuera del aula, para dedicar el tiempo de clase a las actividades colaborativas sincrónicas como práctica y aplicación. Aunque también hay actividades asíncronas basadas en el auto aprendizaje y la evaluación fuera del aula.
III. <i>Flipped Mastery</i> (2008 – 2009)	El modelo actual. El profesor busca la retroalimentación a las evaluaciones que han sido realizadas fuera del aula. De esta manera el alumno recibe un continuo e instantáneo <i>feedback</i> sobre las dudas o conceptos que no han sido del todo comprendidos.

Ilustración 2-18: Evolución del modelo de *Flipped Classroom*

Fuente: elaboración propia.

2.4.2. Definición

Para definir el modelo de “*Flipped Classroom*” (en adelante FC) hemos de remitirnos al Manifiesto “*The Flipped Class Manifest*” realizado por Bennett, B., Bergmann, J., Cockrum, T., Fisch, K., Musallam, R., Overmyer, J., Sams, A., Spencer, D. en 2012 (Bennett, B., Bergmann, J., Cockrum, T., Fisch, K., Musallam, R., Overmyer, J., Sams, A., Spencer, D., 2012) , donde expresan que:

- El modelo FC implica un cambio, un “giro” que sería la traducción de la palabra “*FLIP*”, de rol: el alumno pasa a ser responsable del aprendizaje de los contenidos, pudiendo controlar sus ritmos y tiempos, y el docente se transforma en un guía para que el alumno pueda comprender, en lugar de ser instructor de información.
- Hay un giro en la transferencia activa e intencional de la información que se da fuera de las aulas, con el objetivo de liberar tiempo para hacer un mejor uso de la interacción cara a cara en la escuela. Esto se suele hacer con los videos tutoriales creados por el educador (también conocidos como “*screencasts*” o “*vodcasts*”). Esto da como resultado que cuando el alumno está en el aula, asimilando la información, creando nuevas ideas, etc., el profesor le acompaña para ayudarlo en este proceso.



Ilustración 2-19: Secuencia que muestra una Clase Tradicional vs una clase con el modelo de Flipped Classroom.

Fuente: elaboración propia a partir del video de elaboración propia realizado con PowToon, para la presentación del modelo de trabajo "Flipped Classroom" a los alumnos de la muestra de nuestro estudio. En <https://www.Youtube.com/watch?v=QYacheODNUw>

Según manifiestan Bennet y cols. (Bennett, B., Bergmann, J., Cockrum, T., Fisch, K., Musallam, R., Overmyer, J., Sams, A., Spencer, D., 2012), aplicar este modelo no implica que se deba actuar de forma igual en todas las aulas, cada una de ellas es diferente. No hay un conjunto de reglas o normas a seguir, sino que es un enfoque pedagógico, una ideología, que pretende satisfacer las necesidades de los alumnos en nuestras escuelas. Pero no es una solución mágica para la enseñanza, sino que coincide en objetivos con otros modelos de enseñanza como "Reverse Instruction"⁸, "Investigación-Acción", "Blended Learning"⁹ o formas de instrucción en línea mediante el uso de "podcasting" o "screencasting", recursos Web 2.0, y las actividades de

⁸"Reverse Instruction" o "la clase invertida" es una técnica pedagógica donde las actividades de asimilación de información más pasivas (por ejemplo conferencias) se asignan como tarea, y el tiempo de clase es reservado para trabajar en la resolución de problemas y actividades grupales.

⁹ "Blend my learning" es un programa de educación formal en el que un estudiante aprende en parte a través de aprendizaje en línea, con algún elemento de control del estudiante sobre el tiempo, lugar, recorrido y ritmo; y en parte, en un lugar fuera de casa donde realiza actividades.

investigación. Además los videos tutoriales como herramientas de instrucción, se pueden utilizar de muchas maneras diferentes: pre-enseñanza, instrucción directa, de recuperación, de refuerzo, de ampliación, etc.

Los docentes que utilizan este modelo en sus clases están ajustando, cambiando, quitando o añadiendo elementos del modelo de forma continua, para tratar de mejorarlo a través de la experiencia directa. Reflexionan sin cesar sobre la calidad del aprendizaje, viendo si es atractivo y qué actividades de asimilación e internalización, de creación y aplicación de los contenidos pueden utilizar en lugar de “llenar el tiempo” con tareas.

2.4.3. Las plataformas MOOC utilizadas en el modelo de enseñanza FC

Los MOOC (*Massive Open Online Courses*) son cursos *online* a los que se puede acceder en general de forma gratuita. En algún caso, si se puede obtener una certificación sobre el curso realizado, pueden ser de pago. Los MOOC constan de vídeos tutoriales con clases magistrales, espacios de comunicación e interactividad como foros, combinados con metodologías que motivan a seguir viendo los contenidos a medida que se avanza en el tema, y ejercicios de aplicación.

Cuando el usuario se ha registrado en el curso, tiene acceso a los contenidos a través de vídeos tutoriales de entre 2 a 10 minutos, organizados por unidades didácticas. El usuario tiene la posibilidad de escoger entre una gran cantidad de herramientas *online*, ver otro vídeo, realizar ejercicios de aplicación, participar en un foro de discusión, acceder a cuestionarios de múltiple opción, etc. Cuando termina la unidad, el usuario responde a un *test* o cuestionario para asegurar la comprensión de los contenidos trabajados. Una ventaja de este sistema, es que el usuario puede seguir investigando sobre temas de interés propio, ampliando el campo de conocimiento, una vez ha terminado el curso.

Según Ramos, A., director de operaciones de Eureka Media, empresa española especializada en *E-learning* en España, los MOOC permiten “el acceso libre a contenidos, elevar el aprendizaje no formal a su máxima expresión, construir conocimiento a través de la experiencia colectiva, adaptar la formación a la medida, ampliar redes, poder adquirir cierta relevancia en función del aporte al grupo, democratizar la enseñanza, facilitar la formación continua evitando la barrera del precio y, en definitiva, facilitar el desarrollo personal y profesional. También para las instituciones puede resultar un factor positivo, ya que refuerza

su marca y le permite acceder a un amplio público, lo que puede redundar en ventas cruzadas o en explorar el modelo *freemium*". (Ramos, 2012)

En síntesis, el objetivo de estos portales es democratizar el acceso al conocimiento, acercando contenidos universales a todo el que desee aprender, sin importar su origen, su nivel socioeconómico ni su religión, dejando al individuo en la libertad de decidir sobre qué, cómo, cuándo y dónde aprender.

Como muestra de los MOOC más reconocidos podemos encontrar Coursera, Wedubox, edX y Udacity a nivel universitario, y Khan Academy para los niveles de enseñanza primaria y secundaria.

Khan Academy¹⁰ es una plataforma *online* sin fines de lucro creada por Salman Khan en el 2006. Esta organización educativa, inició su actividad a finales de 2004, cuando su creador ayudaba desde Boston a su prima Nadia, que estudiaba en Nueva Orleans, haciéndole una tutoría en matemáticas a través de una herramienta de *Yahoo*. Cuando los familiares y amigos pidieron ayuda similar, decidió que sería más práctico colocar los tutoriales en Youtube. Con esta experiencia Khan se dio cuenta de que sus primos preferían ver sus videos a las clases con él en persona, puesto que así podían pausar y repetir la lección tantas veces como fuera necesario sin sentir que le estaban haciendo perder el tiempo, repasar la lección que tenían que saber dos semanas o dos años atrás sin pasar vergüenza por preguntarle a su primo, si se aburrían podían adelantar el video, podían verlos cuando querían a sus propios ritmos, y sobre todo, evitar oír, la primera vez que estaban intentando aprender un concepto, "¿entiendes esto?". Más tarde Khan empezó a recibir cartas y comentarios de alumnos y de profesores que utilizaban sus videos como trabajo fuera del aula y que en clase realizaban lo que solían ser deberes o tareas. En la actualidad sus contenidos educativos son utilizados por más de 15 millones de estudiantes en todo el mundo, teniendo un promedio mensual de 6 millones de usuarios activos.

El proyecto cuenta con una multiplataforma web, abierta y gratuita, que ofrece una colección de aproximadamente 4.300 clases, en formato de video tutoriales almacenados en *Youtube*, y más de 100.000 ejercicios de aplicación. Actualmente esta plataforma es seguramente la más utilizada para implementar el modelo de *Flipped Classroom* en aulas de nivel primario y

¹⁰ Disponible en www.khanacademy.org

secundario de matemáticas, historia, finanzas, física, química, biología, astronomía, incluso de economía.

2.4.4. El modelo “Flipped Classroom” y el pensamiento educativo actual

Desde el constructivismo, que sostiene que el uso de actividades interactivas en las que los estudiantes juegan un papel activo puede involucrar y motivar el aprendizaje de manera más eficaz que las actividades donde los alumnos son pasivos, el modelo FC apoya sus principios al dejar tiempo de clase para el aprendizaje basado en la indagación, la práctica y la investigación (Brandt, 1997). El modelo FC mezcla la instrucción directa con el aprendizaje constructivista permitiendo que los alumnos participen en clases interactivas, creativas y de cooperación teniendo como fin último la construcción del conocimiento. (Kim, K.; Bonk, C., 2006).

Desde la teoría de Vigotsky sobre el constructivismo social, donde se enfatiza y valora la importancia de la interacción social en el aprendizaje puesto que el alumno aprende de manera más eficaz cuando lo hace de forma cooperativa (Bolaños, S. et al., 2011), observamos que el modelo FC coincide plenamente con esta filosofía: el profesor puede utilizar el tiempo de clase para realizar trabajo colaborativo y al mismo tiempo ayudar a que cada alumno vaya construyendo su propia estructura cognitiva y sea capaz de construir aprendizajes más complejos.

Desde la perspectiva de la teoría del aprendizaje de la Taxonomía de Bloom (Bloom, 1978), donde se identifican diferentes dominios del aprendizaje, desde la retención básica de los hechos a la aplicación de los conocimientos que crea algo nuevo, el modelo FC facilita que los alumnos realicen los niveles más bajos de trabajo cognitivo (recordar y comprender) en casa, y las etapas más altas de trabajo cognitivo (aplicar, analizar, evaluar y crear) los desarrollen en el aula, donde cuentan con el apoyo de sus compañeros y el profesor (Brame, 2013). Por el contrario, en la clase tradicional el alumno realiza los primeros niveles en clase, comenzando con tareas básicas como recordar datos y luego sigue con la comprensión de la información. Y en casa debe realizar los de nivel más alto, como la aplicación de nuevas estrategias o procedimientos, el análisis y evaluación de la información y por último la creación de una nueva información. Pero en general el alumno no llega a completar el proceso, o bien ha de recurrir a ayuda externa para finalizarlo (Ilustración 2-20): *“Only the most academically adept are likely to reach the pinnacle”* (Wright, 2012) (*“sólo los más académicamente expertos es probable que lleguen a la cima”*).

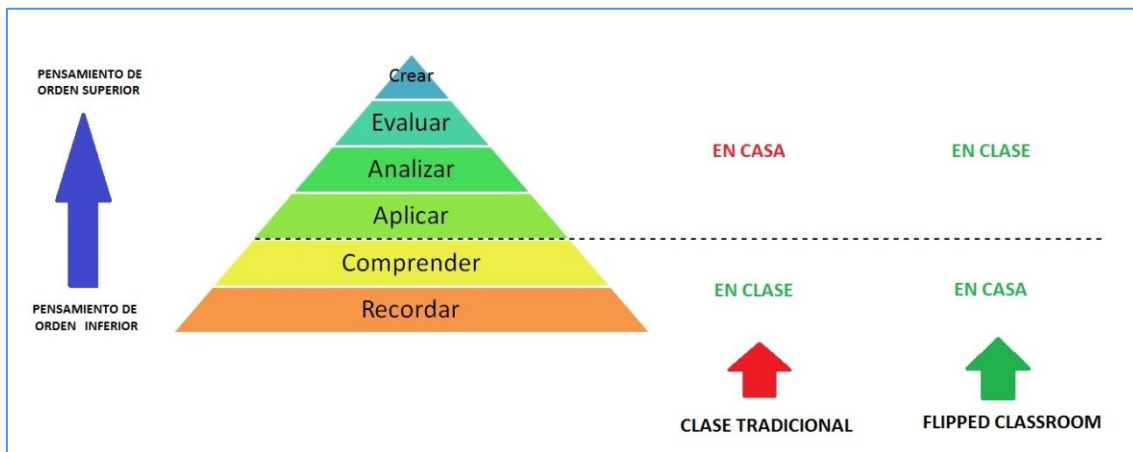


Ilustración 2-20: Taxonomía de Bloom y Flipped Classroom
Fuente: elaboración propia

Según Santiago, R. (Santiago, 2014) podemos conectar las dimensiones cognitivas y la taxonomía revisada de Bloom mediante la siguiente matriz:

Conectando las dimensiones cognitivas y la taxonomía revisada de Bloom

Dimensión del Conocimiento	RECORDAR	COMPRENDER	APLICAR	ANALIZAR	EVALUAR	CREAR
HECHOS	Listar	Parfrasear	Clasificar	Resumir	Ordenar	Categorizar
CONCEPTOS	Recordar	Explicar	Demostrar	Contrastar	Reseñar	Modificar
PROCESOS	Resumir	Estimar	Producir	Hacer un diagrama	Defender	Diseñar
PROCEDIMIENTOS	Reproducir	Dar un ejemplo	Relatar	Identificar	Criticar	Planificar
PRINCIPIOS	Manifiestar	Modificar	Solucionar	Diferenciar	Concluir	Revisar
METACOGNITIVOS	Usar adecuadamente	Interpretar	Descubrir	Inferir	Predecir	Actualizar

The Flipped Classroom <http://www.theflippedclassroom.es/>

Ilustración 2-21: Conexión entre las dimensiones cognitivas y la taxonomía revisada de Bloom
Fuente: (Santiago, 2014)

Dicha matriz la retomaremos en los capítulos 6 y 7, en el estudio de casos, para analizar el proceso de aprendizaje realizado con el modelo FC por los alumnos de la muestra.

2.4.5. Estudios realizados sobre el modelo Flipped Classroom en la educación

Aunque el modelo pedagógico FC se viene usando desde hace más de 30 años (Baker, 2000), la cantidad de literatura y estudios que se refieren a él es limitada, debido a que los profesores solo hace seis o siete años que han dispuesto de la tecnología necesaria para realizar los vídeos tutoriales.

Entre los primeros estudios realizados encontramos el de Lage, Platt y Treglia (Lage, M. J., Platt, G. J., & Treglia, M, 2000), que estudiaron el modelo FC en una clase de economía de pregrado. Los estudiantes dispusieron de múltiples métodos de aprendizaje de los conceptos más importantes fuera del aula; los estudiantes podían leer un libro de texto, ver una presentación de PowerPoint, o ver una conferencia de vídeo en línea. El objetivo era permitir a los estudiantes elegir la metodología de aprendizaje que mejor se adaptase a su estilo de aprendizaje individual. Lage y cols. certificaron que los estudiantes habían disfrutado mucho más de esta metodología que del aula tradicional. Y concluyeron que:

- Los estudiantes se orientan de forma más positiva hacia el modelo FC.
- En un aula con FC, los estudiantes generalmente disfrutaban trabajando juntos y aprenden de sus compañeros cuando estos les explican conceptos de diferentes maneras.
- Los estudiantes se sienten más cómodos haciendo preguntas en clase debido a que tienen más oportunidades de interactuar cara a cara con el profesor.
- La interacción alumno-profesor es beneficiosa en dos aspectos: el estudiante es capaz de resolver cualquier duda en el momento, y el profesor puede observar el desempeño y el grado de comprensión de cada uno de sus alumnos.

Otro estudio lo realizó Strayer (Strayer, 2007) con estudiantes universitarios en clases sobre el medio ambiente. Comparó una clase con instrucción tradicional y otra con el modelo FC. Los resultados del estudio mostraron que los estudiantes de la clase con FC "experimentaron un mayor nivel de innovación y de cooperación en el aula". Sin embargo Strayer señaló que, aunque los alumnos percibían positivamente los aspectos de innovación y cooperación con la metodología FC, estaban menos satisfechos con la estructura de la clase, puesto que tenían la sensación de estar "perdidos", aspecto que los estudiantes que seguían la clase tradicional no experimentaron. Entre las conclusiones de su estudio, Strayer dio tres sugerencias a los educadores que deseen aplicar el modelo de FC:

- Los estudiantes deben tener opción a decidir cómo desean interactuar con el contenido del curso.
- Las actividades en clase deben ser acotadas, ir más paso a paso, y ampliarlas a cursos más avanzados, donde los alumnos están más acostumbrados a la investigación.
- Y, por último, puesto que en el aula con FC los estudiantes llegan a ser más conscientes de su propio proceso de aprendizaje que en entornos más tradicionales, éstos deben tener más espacio para reflexionar sobre sus actividades de aprendizaje, para que puedan realizar las conexiones necesarias con el contenido del curso. Por este motivo el profesor debe prever, dentro de la estructura del curso, momentos que permitan esta reflexión, donde sea capaz de ver y hacer comentarios sobre aspectos específicos de la reflexión de los estudiantes. Este ciclo de retroalimentación es crucial para el aprendizaje.

Day, J. y Foley, J. (Day, J.; Foley, J., 2006) llevaron a cabo un estudio similar al de Strayer (Strayer, 2007). Estudiaron dos clases de introducción a la informática de pregrado de nivel superior. Una recibió clases de estilo tradicional, y la otra clase recibió clases mediante el uso de conferencias virtuales. Day, J. y Foley, J. procuraron determinar qué efecto tuvo el modelo FC en el rendimiento estudiantil y si los alumnos disfrutaron de la experiencia. Los resultados confirmaron su hipótesis. Los estudiantes que participaron de la clase con FC obtuvieron puntuaciones superiores en cada tarea y en cada examen y una mayor puntuación en el curso. Además, estos estudiantes expresaron que aprendieron más con este formato que con el formato de clase tradicional. Asimismo indicaron que tenían una actitud positiva hacia el uso de vídeo-conferencias y el nuevo formato que se les había ofrecido. Los autores también observaron que la aplicación del modelo era fácil y barata, y concluyeron que no veían ninguna razón por la que los resultados de su estudio no pudiesen ser similares en contextos diferentes al suyo.

El modelo *Flipped Classroom* se formalizó en el nivel secundario cuando en el 2010 Bergmann y Sams, dos profesores de ciencias de Colorado, EE.UU. empezaron a distribuir los vídeos tutoriales a estudiantes ausentes de clase debido a una enfermedad. Estos dispusieron en su casa de *screencasts* y conferencias grabadas previamente, para ponerse al día respecto al contenido que se estaba dando en clase. Bergmann y Sams observaron cuán eficiente era el método y decidieron ampliarlo a toda la clase. Se dieron cuenta de que necesitaban menos tiempo que el que tardaban en explicar el contenido en clase y que podían dedicar más tiempo

al trabajo en experimentos mientras interactuaban con sus alumnos (Bergmann, J.; Sams, A. , 2012).

Musallam (Musallam, 2010) examinó el uso de “*screencasts*” (una grabación en vídeo de una pantalla de ordenador con o sin narración) como una técnica de pre-entrenamiento para enseñar a los estudiantes avanzados de química de la escuela secundaria. El objetivo del estudio era determinar los efectos del “*Screencasting*” sobre el manejo de la carga cognitiva intrínseca en el equilibrio químico, la complejidad que ofrece un dominio de conocimientos específicos, y el rendimiento de los estudiantes. Al mirar los resultados posteriores a la prueba, Musallam concluyó que el “*screencasting*” disminuyó significativamente la carga intrínseca y facilitó un mayor rendimiento en las evaluaciones.

McFeeley y Milner (McFeeley, R.; Milner, J., 2009) estudiaron el uso de video tutoriales Kernel en escuelas públicas. Los vídeos Kernel duran unos cinco minutos, y están diseñados para proporcionar información de antecedentes sobre un tema, aclarar las preguntas de los alumnos que se presentan durante la clase, y generar debate estudiantil. McFeeley y Milner concluyeron que el uso de videos Kernel tiene un efecto positivo sobre la participación de los estudiantes en su intento "por incorporar mejores elementos de conferencia sin comprometer la filosofía centrada en el estudiante". La investigación presentada en este trabajo apoya el uso de vídeos tutoriales en el modelo FC como una forma de crear más tiempo para las actividades centradas en el estudiante.

Toto y Nguyen (Toto, R.; Nguyen, H., 2009) examinaron los resultados y la retroalimentación del modelo de FC en un curso de ingeniería industrial. El propósito del estudio fue investigar la percepción de los estudiantes respecto a esta metodología. Toto y Nguyen querían saber si los estudiantes encontraban que el modelo FC reforzaba su comprensión del contenido del curso para decidir seguir trabajando con esta metodología. Las encuestas revelaron una serie de resultados interesantes:

- Los debates de clase eran mucho más productivos si los estudiantes habían visto los vídeos tutoriales antes de la clase y haberlo hecho permitía detectar con más facilidad las áreas de dificultad de los estudiantes en la clase y solucionarlas.
- Los estudiantes se mostraban mucho más receptivos a aceptar la responsabilidad de su propio aprendizaje.
- El profesor debía insistir sobre cuáles eran los objetivos y beneficios de una clase con FC para ganarse la confianza, aceptación y participación de los estudiantes.

- La clase que había trabajado con FC mejoró las calificaciones y (probablemente) la comprensión de los estudiantes que estaban justo por debajo de la media.
- Los estudiantes señalaron sin embargo que sentían que era fácil distraerse mientras veían los vídeos tutoriales.
- En general, los resultados del estudio indicaron que los estudiantes valoraban las clases tradicionales cara a cara, pero que les gustaban los beneficios que el modelo FC ofrecía porque les proporcionaba tiempo adicional en el aula para la resolución de problemas y actividades prácticas. La propuesta de los estudiantes fue que las clases en vídeo se podían usar para suministrar material de teoría, ejemplos, soluciones de problemas y material didáctico complementario.

En conclusión, Toto y Nguyen encontraron que los estudiantes percibieron que el modelo de *Flipped Classroom* era una estrategia de enseñanza efectiva que podría implementarse de forma eficaz durante el 25% del tiempo como mínimo.

Otro estudio fue el realizado por Greg Green (Green, 2012), director de una Escuela Secundaria de las afueras de Detroit, Michigan, que decidió aplicar este modelo a toda la escuela secundaria. La escuela de Green, situada en una zona de nivel socioeconómico bajo, estaba teniendo una alarmante cantidad de fracaso escolar. Después de aplicar el modelo FC durante 18 meses, pudo observar una mejora espectacular: la tasa de asistencia aumentó, los casos de incidencias disciplinarias se redujeron de 736 a 249, el porcentaje de suspensos en la asignatura de inglés disminuyó de 52% a 19%, en matemáticas de 44% a 13%, en ciencias de 41% a 19%, y en ciencias sociales de 28% a 9% (Green, 2012).

Tras mostrar todos estos estudios podemos afirmar que, desde 2006, el uso de los “*podcasts*” de vídeo o vídeos tutoriales en la educación ha crecido con rapidez. Los estudiantes han descrito los vídeos tutoriales como agradables de ver, afirmando que verlos les produce satisfacción, los motiva, los estimula intelectualmente, es útil, provechoso y eficaz para la mejora del aprendizaje. Disfrutaban especialmente al controlar cuándo y dónde aprenden, lo que necesitan para aprender, y el ritmo de aprendizaje. Además, se han observado mejoras en los hábitos de estudio, incluyendo fomento de la independencia, aumento de la auto-reflexión, preparación de la prueba más eficaz, y revisión del material con mayor regularidad. En cuanto al rendimiento del aprendizaje, los investigadores han informado de que el uso de los *podcasts* de vídeo se ha traducido en un aumento significativo de las habilidades estudiantiles. (Kay, R.; Kletskin, I., 2012)

En conclusión, la investigación previa sugiere que el uso de los vídeos tutoriales a través del modelo FC tiene un impacto positivo en las actitudes de los estudiantes, así como en su comportamiento y en su rendimiento en el aprendizaje.

2.4.6. Estudios realizados sobre el modelo Flipped Classroom en matemáticas

Desde el año 2000 se generó un gran interés por estudiar cómo se podía aplicar el modelo FC al aula de matemáticas, y si sería efectivo para elevar el rendimiento de los estudiantes, dada la complejidad que representa para algunos alumnos esta asignatura. Entre los estudios realizados encontramos el de Shyu (Shyu, 2000), que investigó los efectos que producía la utilización de videos tutoriales en la actitud hacia las matemáticas y la enseñanza en general, así como las habilidades de resolución de problemas entre los alumnos de primaria de Taiwán.

El autor concluyó que:

- hubo una mejora significativa en la actitud de los estudiantes hacia las matemáticas;
- los alumnos mejoraron significativamente sus habilidades de resolución de problemas con la instrucción a través de vídeos tutoriales, y todos se beneficiaron de los efectos de la instrucción de vídeo, independientemente de sus habilidades matemáticas y científicas.

Este estudio es importante porque proporciona evidencia empírica del efecto que produce este modelo sobre las respuestas afectivas y cognitivas de los alumnos de quinto grado de primaria en el aprendizaje de las matemáticas.

Otro estudio del tema, Toppo (Toppo, 2011), documenta el trabajo de un profesor de matemáticas de la escuela secundaria Roshan de Michigan, EEUU, que implementó el modelo FC en la clase de Cálculo. El profesor informó que los estudiantes alcanzaron valoraciones más altas en el examen, que se produjo más independencia en el aprendizaje, y que la clase se convirtió en “más tiempo” a disposición del profesor para dedicarlo a repasar y practicar con cada uno de los alumnos. También informó que el modelo FC desplazó del profesor al alumno la responsabilidad de aprender.

Kay y Kletskin (Kay, R.; Kletskin, I., 2012) probaron la eficacia del aprendizaje a través de vídeos tutoriales con procedimientos específicos sobre cómo resolver problemas de matemáticas y

ciencias. Utilizaron 59 vídeos basados en la resolución de problemas que abarcan cinco áreas clave de las matemáticas (operaciones con funciones, resolver ecuaciones, funciones lineales, funciones exponenciales y logarítmicas, y funciones trigonométricas). Los vídeos fueron creados como herramientas de auto-estudio y utilizados por 288 estudiantes de educación superior para adquirir habilidades de pre-cálculo durante un período de tres semanas. Los resultados del estudio indicaron que:

- La mayoría de los estudiantes utilizaban los vídeos con frecuencia.
- Los estudiantes consideraban útiles o muy útiles y fáciles de usar los vídeos.
- Los vídeos eran una herramienta de aprendizaje eficaz, que contribuyeron a un incremento significativo de conocimiento en conceptos de pre-cálculo en los estudiantes que los utilizaron.
- El uso de ejemplos prácticos es un método de enseñanza prometedor para ayudar a los estudiantes novatos en la comprensión de cómo resolver problemas de procedimiento.

Crystal Kirch, un profesor de un área de nivel socio-económico bajo de California, reportó un aumento espectacular en el rendimiento de sus alumnos en la clase de matemáticas al observar que la media de alumnos que obtenían notas de A o B (excelente o notable) crecía debido a la utilización de FC. (Kirch, 2012)

Un estudio similar sobre el modelo FC en las matemáticas de la escuela secundaria de nivel superior lo realizó Faulkner, un profesor de matemáticas de la escuela secundaria de Byron, Minnesota. Faulkner empezó a utilizar el modelo FC en matemáticas en el otoño de 2010 (Pearson Case Study, 2013). Además de trabajar en las horas de clase en tareas individuales y de grupo, los profesores utilizaron la tutoría de iguales en las clases, donde los estudiantes respondían primero a las preguntas de forma individual y luego trabajaban en grupos para convencer a sus compañeros de que sus respuestas eran correctas (Mazur, 1997). En encuestas realizadas por profesores de matemáticas de la escuela de secundaria Byron, el 87% de los padres y el 95% de los estudiantes dijeron que preferían el aprendizaje con FC al formato de clase tradicional de las matemáticas. Muchos estudiantes comentaron que prefieren interactuar con otros durante el tiempo de clase, tener ayuda disponible en la clase, y que además disponen de la ventaja de poder volver a ver los vídeos tutoriales si es necesario. Faulkner también declaró que, debido al aumento del tiempo del uno-a-uno con los estudiantes en clase, los profesores y los estudiantes mejoraban su relación. (Fulton, 2012)

En 2013, Johnson, G. (Johnson, 2013) realizó un estudio sobre la percepción de los estudiantes de tres aulas de matemáticas de la escuela secundaria sobre el modelo FC. Los resultados de las encuestas indicaron que los alumnos disfrutaban aprendiendo, y que lograban resultados más altos a pesar de realizar menos tareas con el modelo FC que en el aula tradicional.

En la investigación realizada por Overmyer (Overmyer G. , 2014) sobre la comparación de clases de álgebra universitaria, utilizando el modelo FC y la estructura de clase/tareas tradicionales, y su efecto en el rendimiento estudiantil, concluyó que no hubo una diferencia estadísticamente significativa en las puntuaciones de los estudiantes en los dos grupos aunque los estudiantes de las clases con FC obtuvieron una puntuación ligeramente superior a la de los estudiantes que siguieron el método tradicional. También concluyó que los alumnos de las clases con FC, cuando el profesor tenía experiencia previa en métodos basados en la indagación y el aprendizaje cooperativo, obtuvieron puntuaciones superiores en los exámenes finales.

La mayor parte de las investigaciones sugieren que el modelo de aprendizaje FC es un modelo de éxito, tanto en el rendimiento estudiantil a nivel universitario como en el aprendizaje de las matemáticas. Un tema común en todas ellas es que uno de los aspectos más importantes del modelo FC no son los vídeos tutoriales, sino el cambio de uso del tiempo de clase para la “exposición de un tema” al “diálogo cara a cara”. Sin embargo, esto no ha impedido que se produzcan algunas críticas a este modelo en la comunidad educativa. Hay profesores que ven el modelo FC como una manera de “simplemente entregar el contenido en línea para disminuir el papel del maestro” (Fink, 2011)(Noschese, 2011).

Existen numerosos blogs en internet e informes sin evaluación que critican diversos aspectos de su uso educativo. Wheeler (Wheeler, 2012) ha mostrado su desacuerdo con el modelo FC en su blog sobre educación. Expresa que "dar la vuelta al aula" se reduce a crear vídeos de contenido y colocarlos en línea para obviar la necesidad de los estudiantes de asistir físicamente a clase. La segunda preocupación de Wheeler es la brecha digital entre los que pueden y no pueden pagar la tecnología necesaria para aplicar el modelo. La definición básica de *Flipped Classroom* asume que los estudiantes deben poder ver los vídeos tutoriales fuera de la escuela, lo que significa que deben disponer de la tecnología que les permita verlos y de conexión a internet. Wheeler señala asimismo que él cree que, en lugar de sustituir explicaciones de contenido con vídeos, se debe dedicar tiempo para mejorar la docencia.

Wheeler destaca que la eliminación de las clases magistrales, no implica que se ofrezca a los estudiantes una educación de calidad.

Cabe reiterar que el modelo FC no disminuye en absoluto el tiempo que un estudiante debe pasar en el aula, en comparación con el método de enseñanza tradicional. Los educadores del modelo FC advierten que no se debe adoptar ciegamente el modelo FC sin considerar con prudencia las necesidades de sus alumnos ((Bergmann, J.; Sams, A. , 2012);(Hamden, N. et al., 2013);(Bennett, et al., 2012)). El modelo FC representa una combinación única de aspectos educativos activos, la interacción cara a cara del docente y el alumno, y el aprendizaje basado en la investigación, combinada con la instrucción directa entregada de forma no sincrónica a través de los vídeos tutoriales en línea (Bishop, J. & Verleger, M. , 2013).

El aumento de la popularidad y la buena prensa del aprendizaje FC ha causado un aumento sinérgico en la publicidad y la aplicación del modelo. No debemos olvidar que es la convergencia de las tecnologías que ha tenido lugar los últimos años la que ha permitido esta innovación en la educación.

2.5. DELIMITACIÓN Y CONCRECIÓN DE NUESTRO MARCO TEÓRICO

Hasta el momento hemos ofrecido una amplia revisión bibliográfica sobre tres temas relativos al diseño y experimentación de nuestro estudio. En primer lugar, los estudios realizados en el ámbito del aprendizaje del álgebra, y de forma más específica en el tema de funciones, y las dificultades que surgen de su aprendizaje. En segundo lugar el uso de entornos multimedia en la educación, que nos ha llevado en tercer lugar, a desarrollar el modelo de *Flipped Classroom*, donde se combinan estos entornos, y a valorar el aprendizaje siguiendo este modelo, basándonos en la investigación aplicada por diversos estudiosos del tema, en el área de matemáticas.

Para situarnos en el ámbito de las dificultades, errores y obstáculos que presentan los alumnos en el proceso de aprendizaje del álgebra, tomamos como marco referente el estudio realizado por Ruano y col. (Ruano, R. M., Socas, M. M. y Palarea, M. M., 2008). Para el diseño del modelo FC en el aula, nos basamos en los estudios realizados por Bergmann y Sams (Bergmann, J.; Sams, A. , 2012), la experiencia de elaboración de la plataforma MOOC de aprendizaje de Salman Khan (Khan, 2012) y las pautas de análisis de incorporación de las TIC realizada por Godino y col. (Godino, J; Recio, A.; Roa, R; Ruiz, R y Pareja, J, 2005). Por último, en cuanto a la implementación en el aula del modelo FC en el tema de funciones, hemos visto que son pocos los estudios realizados y por ello nos referimos a las investigaciones expuestas anteriormente como posibles referentes.

2.6. RESUMEN

En este capítulo hemos presentado los marcos referenciales que constituyen los referentes de nuestra investigación y se han revisado los principales estudios realizados en el entorno a las dificultades en el aprendizaje y enseñanza del álgebra, en particular del tema de funciones. Hemos presentado asimismo los conceptos de tecnología y entornos multimedia en la enseñanza necesarios para el desarrollo de nuestro estudio. Posteriormente, hemos mostrado el marco referencial del modelo "*Flipped Classroom*", su historia, definición, relación con las teorías actuales de la educación y estudios realizados sobre su implementación en el aula en general, y en matemáticas en particular. Y, por último, hemos marcada cual va a ser nuestra posición frente a los tres ámbitos que serán nuestros referentes teóricos.

3. METODOLOGÍA

3. METODOLOGÍA	85
3.1. PRESENTACIÓN	89
3.2. DISEÑO DE LA INVESTIGACIÓN	91
3.3. TEMPORALIZACIÓN: Cronograma de la investigación	93
3.4. FASE 1: Las pruebas diagnósticas iniciales	95
3.4.1. Metodología	95
3.4.2. Contexto y población de estudio	95
3.4.3. Instrumentos	97
3.4.3.1. Prueba diagnóstica de álgebra	99
3.4.3.2. Prueba diagnóstica de funciones	101
3.4.4. Procedimientos	106
3.4.4.1. Condiciones de realización de la pruebas	106
3.4.4.2. Tratamiento y análisis de los resultados	107
3.5. FASE 2.1: Desarrollo del modelo “Flipped Classroom” en la unidad de funciones	116
3.5.1. Metodología	116
3.5.2. Contexto y población de estudio	117
3.5.3. Instrumentos	121
3.5.4. Procedimientos	123
3.5.4.1. Proceso de recogida de datos	123
3.5.4.2. Tratamiento y análisis de los resultados	124
3.6. FASE 2.2: Valoración de la percepción de los alumnos y docentes respecto al modelo de enseñanza “Flipped Classroom”	135
3.6.1. Metodología	135
3.6.2. Contexto y población de estudio	135
3.6.3. Instrumentos	136
3.6.3.1. Cuestionario para los alumnos	137
3.6.3.2. Cuestionario para los docentes	137
3.6.4. Tratamiento y análisis de los resultados	137
3.7. RESUMEN	139

3.1. PRESENTACIÓN

En este capítulo presentamos la metodología de investigación que hemos utilizado de acuerdo a las finalidades que nos hemos propuesto en nuestro estudio, que se centra, en primer lugar, en el nivel de razonamiento algebraico y en particular en el de comprensión del concepto de función de los alumnos de la población. En segundo lugar, queremos estudiar el diseño y la implementación en el aula del modelo de enseñanza “*Flipped Classroom*” de forma específica en el tema de funciones de primer curso de bachillerato. Y por último mostrar la percepción que los alumnos y docentes han tenido del nuevo modelo de enseñanza aplicado.

Dadas las características del tipo de estudio realizado hemos aplicado una metodología mixta con diversidad de técnicas de recogida de datos:

- Una metodología cuantitativa estadística, para poder mostrar los indicadores más significativos de las pruebas diagnósticas, teniendo en cuenta las características de la población.
- Una metodología cualitativa de estudio de casos, para poder determinar el proceso seguido por los alumnos en la implementación del modelo de enseñanza-aprendizaje *Flipped Classroom* en las clases de matemáticas de primero de bachillerato en el tema de funciones. En algunos utilizaremos comparaciones con medias poblacionales, lo que corresponde a una metodología cuantitativa.
- Una metodología cuantitativa descriptiva para conocer la percepción de los alumnos acerca del modelo y una cualitativa para conocer la de los docentes implicados en el estudio.

Para la realización de nuestra investigación trabajamos con alumnos de primero de bachillerato del Colegio Jesuïtes Educació - Sant Ignasi Sarrià de Barcelona, donde podíamos realizar la doble labor de profesor-investigador y proponente, como conclusión de nuestro estudio, un posible cambio institucional a nivel didáctico en bachillerato, en el área de matemáticas. El bachillerato es privado y los alumnos, en general, pertenecen a familias de clase media alta.

Los grupos de alumnos con los que trabajamos son seis clases de primero de bachillerato, tres de la modalidad “científico-tecnológica” y tres de la modalidad “social”. Estos grupos de estudiantes constituyen las diferentes poblaciones de estudio, y ocho de ellos conforman la

muestra para realizar el análisis mediante estudio de casos. En este capítulo presentaremos sus características.



*Ilustración 3-1: Colegio Jesuïtes Educació - Sant Ignasi, de Barcelona.
Fuente: Archivo del colegio. Foto del Bicentenario*

En lo que se refiere a la recogida de datos, debemos apuntar que una metodología mixta requiere el uso de diversas técnicas y a lo largo del capítulo mostraremos las que hemos usado en las diversas fases del proceso de investigación desarrollado.

Los instrumentos de la investigación forman parte fundamental de este capítulo, así como el diseño del estudio de campo incluyendo las herramientas que nos han servido en las diferentes fases del mismo. Para finalizar, destacaremos las categorías para el análisis que se han utilizado en cada fase.

3.2. DISEÑO DE LA INVESTIGACIÓN

De acuerdo a las finalidades y objetivos de nuestro estudio para conocer el nivel de habilidades y destrezas algebraicas de los alumnos de primero de bachillerato y valorar la efectividad de la implementación del modelo de enseñanza “*Flipped Classroom*”, en primero de bachillerato, en el tema de funciones, hemos utilizado dos tipos de metodologías: una de carácter cuantitativo estadístico y otra cualitativa de estudio de casos. La elección de estas metodologías se ha basado en el tamaño de las poblaciones implicadas en el estudio.

Se ha aplicado una metodología cuantitativa descriptiva simple para conocer el nivel de habilidades y destrezas algebraicas a través de pruebas diagnósticas de álgebra y funciones.

Por otro lado, se ha optado por una metodología cualitativa, microetnográfica, de estudio de casos, múltiple e inclusiva. Cualitativa, con el fin de estudiar la implementación del modelo en el contexto natural del aula, tal y como sucede, tratando de dar sentido a los hechos e interpretar los fenómenos de acuerdo a los significados que tienen para los alumnos de la muestra. (Rodríguez, G; Gil, J, y Jiménez, E., 1996). Microetnográfica, con el propósito de estudiar directamente a los alumnos durante un período, utilizando la observación participante para comprender los sucesos desde la interpretación de estos alumnos investigados (Abreu, 1998). De estudio de casos, con el fin de conocer con detalle cual es el proceso seguido por los ocho alumnos de la muestra en el desarrollo de la unidad de funciones con el modelo *Flipped Classroom*. Múltiple para poder realizar una replicación lógica de los resultados, repitiendo el mismo estudio en alumnos diferentes con el objetivo de obtener más pruebas y mejorar la validez externa de la investigación; e inclusiva, para poder comparar los resultados obtenidos en alumnos de la modalidad “científico-tecnológica” y la “modalidad social” ((Rodríguez, G; Gil, J, y Jiménez, E., 1996), (Yin, 2003)). En algunos momentos realizaremos un estudio cuantitativo, en lo que respecta a la comparación con las medias de la población.

Por último se ha optado por una metodología cuantitativa descriptiva simple para conocer la percepción final de los alumnos sobre el modelo de aprendizaje *Flipped Classroom* aplicado en clase de matemáticas en la unidad de funciones, combinada con otra cualitativa para conocer la percepción de los docentes participantes en el estudio sobre el modelo implementado.

A continuación presentamos en forma de tabla las fases de la investigación con la metodología utilizada en cada una de ellas y la población implicada:

Fases de la investigación	Metodología	Poblaciones de estudio
Fase 1: Pruebas diagnósticas de habilidades y destrezas algebraicas, y funciones.	Cuantitativa descriptiva simple	<ul style="list-style-type: none"> ➤ 3 clases de primero de bachillerato de la modalidad “ciencias sociales” del curso 2013-2014. ➤ 3 clases de primero de bachillerato de la modalidad “científico-tecnológica” del curso 2013-2014. ➤ 3 clases de primero de bachillerato de la modalidad “ciencias sociales” del curso 2014-2015. ➤ 3 clases de primero de bachillerato de la modalidad “científico-tecnológica” del curso 2014-2015.
Fase 2.1: Desarrollo del modelo FC en la unidad de funciones	Cualitativa Estudio de casos (cuantitativa en ocasiones)	<ul style="list-style-type: none"> ➤ 4 alumnos de primero de bachillerato de la modalidad “ciencias sociales” del curso 2013-2014. ➤ 4 alumnos de primero de bachillerato de la modalidad “científico-tecnológica” del curso 2013-2014.
Fase 2.2: Cuestionarios para los alumnos y docentes sobre la percepción de la aplicación del modelo FC.	Cuantitativa descriptiva simple	<ul style="list-style-type: none"> ➤ 3 clases de primero de bachillerato de la modalidad “social” del curso 2013-2014. ➤ 3 clases de primero de bachillerato de la modalidad “científico-tecnológica” del curso 2013-2014.
	Cualitativa	<ul style="list-style-type: none"> ➤ 5 profesores de matemáticas de primero de bachillerato que participan en el estudio.

Ilustración 3-2: Fases de la investigación, metodología y población.

Fuente: Elaboración propia

3.3. TEMPORALIZACIÓN: Cronograma de la investigación

De acuerdo a los objetivos y finalidades del estudio, nuestra investigación ha constado de las siguientes etapas:

ETAPAS	OBJETIVOS	ACCIONES	TEMPORALIZACIÓN
1ª ETAPA: EXPLORATORIA	O1. Identificar indicadores de diagnóstico y formación que nos permita reconocer niveles de habilidades y destrezas algebraicas de una población de alumnos de primero de bachillerato.	<ul style="list-style-type: none"> ➤ Búsqueda y/o diseño de las pruebas diagnósticas de habilidades y destrezas algebraicas, y de la de funciones. ➤ Explicar a los docentes que participaran en el estudio en qué consiste la investigación. ➤ Realización de las pruebas diagnósticas por parte de los alumnos ➤ Escoger los ocho alumnos que formarán parte del estudio de casos en la implementación del modelo FC 	Octubre - Diciembre 2013
2ª ETAPA: INTERMEDIA	<p>O2. Trazar lineamientos perspectivos para la utilización de las TIC en el proceso de enseñanza-aprendizaje de la matemática en aulas heterogéneas en primero de bachillerato, a partir de los diferentes tipos de recursos que permiten el uso de la computación como medio de enseñanza, en este proceso.</p> <p>O3. Diseñar entornos de evaluación sobre el razonamiento inductivo y deductivo del álgebra vía <i>online</i> con alumnos diversos que nos permitan conocer las dificultades que tienen en su aprendizaje.</p> <p>O4. Confeccionar unidades de trabajo en formato video tutorial que potencien las habilidades y destrezas relacionadas con el contexto algebraico de los alumnos de primero de bachillerato.</p>	<ul style="list-style-type: none"> ➤ Elaborar todo el material necesario para implementar el modelo FC en la unidad de funciones: vídeos tutoriales, actividades de aula, web para los profesores, web para los alumnos, cuestionarios de autoevaluación teórica, cuestionario de valoración final, prueba final de conceptos y competencias. 	Diciembre 2013
3ª ETAPA:	O5. Programar la unidad de	<ul style="list-style-type: none"> ➤ Explicar a los docentes 	Enero –

DESARROLLO	<p>“Funciones” donde utilicemos el método de “<i>Flipped Classroom</i>” en clase de matemáticas para trabajarlo con los alumnos.</p>	<p>como se implementa el modelo FC, vídeos, actividades, etc.</p> <ul style="list-style-type: none"> ➤ Implementar el modelo FC en las seis aulas de la población. ➤ Trabajo con los ocho alumnos de la muestra 	Febrero 2014
4º ETAPA: FINAL	<p>O6. Analizar los resultados del trabajo realizado por los alumnos en las unidades que se realizaron con “<i>Flipped Classroom</i>”.</p> <p>O7. Analizar logros de competencias fundamentales asociadas al trabajo algebraico realizado en el campo de las funciones.</p> <p>O8. Conocer la opinión de los alumnos y de los profesores que participan en la implantación del modelo de enseñanza “<i>Flipped Classroom</i>” en el aula de primero de bachillerato, sobre los recursos utilizados y el modelo en sí, como método de aprendizaje del álgebra.</p>	<ul style="list-style-type: none"> ➤ Revisión, conclusiones y nuevas propuestas, y redacción definitiva 	Marzo-Diciembre 2014
REDACCIÓN DEFINITIVA			Diciembre 2014 – Octubre 2015

Ilustración 3-3: Fases de la investigación, metodología y población.

Fuente: Elaboración propia

A continuación describiremos la metodología, el contexto y la población de estudio, los instrumentos y el procedimiento utilizados en cada fase de la investigación (Ilustración 3-2).

3.4. FASE 1: Las pruebas diagnósticas iniciales

3.4.1. Metodología

En nuestra investigación, el tipo de análisis que se ha seguido en estas pruebas (Anexo 2) ha sido del tipo cuantitativo descriptivo simple, dadas las circunstancias del planteamiento de estudio y las preguntas e hipótesis que se pretenden resolver. Además, dado que nos interesaba comparar resultados según el tipo de modalidad y el curso así como el origen de los errores realizados, se ha complementado dicho análisis con una descripción detallada cualitativa de los resultados de las actividades.

Para el tratamiento estadístico de los datos hemos utilizado el paquete estadístico *Statistical Package for Social Science*, versión 18 para Windows (SPSS). El tipo de análisis ha sido un análisis de bivariables, entre variables cualitativas (la modalidad de la clase, el curso, y el origen de los errores realizados) y variables cuantitativas (puntuación de las distintas preguntas).

3.4.2. Contexto y población de estudio

Para asegurar que la prueba diagnóstica fuera fiable, recurrimos a alumnos de primero de bachillerato de la modalidad científico-tecnológica y de ciencias sociales del centro educativo Sant Ignasi de Barcelona; 149 alumnos del curso 2013-2014, y 164 alumnos del curso 2014-2015, 313 alumnos en total. Los padres y/o tutores fueron informados sobre los objetivos del estudio y firmaron un formulario de consentimiento antes de iniciarlo (Anexo 3).

Los criterios utilizados para la selección de la población han sido el poder realizar una observación participativa como docente en al menos dos de las seis clases de la población escogida durante los dos años, que las clases fuesen de diferentes modalidades y que tanto la institución, los docentes y los alumnos implicados estuvieran dispuestos a participar en la experiencia. Por todo ello la población quedó determinada de la siguiente forma:

Curso y sección	Modalidad	Cantidad de alumnos		
		2013-2014	Alumnos de la muestra (estudio de casos) 2013-2014	2014-2015
1º Bach - A	Ciencias Sociales	20		19
1º Bach - B	Ciencias Sociales	14		26
1º Bach - C	Ciencias Sociales	30	4	27
1º Bach - D	Científico-Tecnológico	30	4	33
1º Bach - E	Científico-Tecnológico	28		33
1º Bach - F	Científico-Tecnológico	27		26
Total		149		164

Ilustración 3-4: Población de la primera fase de la investigación.

Fuente: Elaboración propia

Una vez se les había informada del proyecto, se pedía la colaboración a los profesores de las cuatro secciones restantes de primero de bachillerato para dedicar dos clases a realizar las pruebas y un seguimiento y control de las mismas. Se les facilitaba una guía con las indicaciones para la realización de las 2 pruebas (Anexo 4) y las fotocopias necesarias para su ejecución.

La muestra para el estudio de casos debía estar formada por ocho alumnos de los 149 del curso académico 2013-2014. Los criterios de selección se basaron en que cuatro perteneciesen a la modalidad de ciencias y tecnología, y el resto a la modalidad de ciencias sociales. A su vez debían pertenecer a una u otra de las dos clases donde podíamos realizar una observación participativa por ser profesores de las mismas. Cada alumno de cada modalidad fue también escogido en base a la nota final obtenida en matemáticas en el primer trimestre del curso académico 2013-2014, siendo representativo de un cuartil del rango de 0 a 10. Y, por último, los alumnos que cumplían todos estos requisitos debían estar dispuestos a participar en el estudio.

Con estas condiciones, la población del estudio quedó constituida de la siguiente manera:

Centro	Año	Curso académico	Población	Muestra del Estudio de casos	
Sant Ignasi	2013-2014	Primero de bachillerato	149 alumnos: ➤ 64 alumnos de la modalidad de ciencias sociales ➤ 85 alumnos de la modalidad de ciencias y tecnología	Modalidad de Ciencias y tecnología	Modalidad de Ciencias Sociales
				1r Cuartil : Marc	1r Cuartil: Karla
				2º Cuartil: MariaB	2º Cuartil: Santi
				3r Cuartil: Alejandro	3r Cuartil: Javier
				4º Cuartil: Nuria	4º Cuartil: María F
Sant Ignasi	2014-2015	Primero de bachillerato	164 alumnos: ➤ 72 alumnos de la modalidad de ciencias sociales ➤ 92 alumnos de la modalidad de ciencias y tecnología		

Ilustración 3-5: Población de la primera fase de la investigación.

Fuente: Elaboración propia

Como se puede ver en la ilustración 3-5 se han realizado las pruebas en dos cursos académicos diferentes para poder contrastar los resultados obtenidos.

3.4.3. Instrumentos

Consideramos oportuno realizar pruebas de diferentes tipos en función de las necesidades de nuestro estudio, además de tener en cuenta las necesidades con las que se encontrarían los alumnos al trabajar el tema de funciones. Realizamos una prueba total, constituida a su vez por dos pruebas distintas: una prueba inicial de álgebra sobre los procesos de sustitución, generalización y modelización, y una segunda sobre funciones.

Los objetivos de las pruebas realizadas eran:

- Detectar el nivel de habilidades y destrezas algebraicas del alumnado que participaba en nuestra investigación, comparables con el alumnado de un curso académico posterior que no participaba en la implementación del modelo FC. Para ello se

tomaron como punto de referencia los niveles del desarrollo de los aspectos numéricos – algebraicos de Collis y Piaget que podemos encontrar en (Fidela Velázquez, 2003) y se ha seguido la dificultad creciente de estos niveles.

- Detectar los tipos de errores más frecuentes que comete un alumno en los procesos de sustitución formal, generalización y modelización, que muestran las dificultades que tienen los alumnos en el área del álgebra. Para ello hemos tomado como punto de referencia el estudio realizado sobre la clasificación de errores cometidos por los alumnos de secundaria en álgebra de Ruano, Socas y Palarea (Ruano, R. M., Socas, M. M. y Palarea, M. M., 2008).
- Detectar el nivel que poseen los alumnos de la población respecto a la modelización del cambio, a las relaciones con las funciones y ecuaciones pertinentes, y a la de crear, interpretar y traducir representaciones simbólicas y gráficas de las relaciones. Para ello hemos tomado como punto de referencia los resultados obtenidos en las pruebas PISA entre los años 2003-2009 y las dimensiones competenciales dadas por Burgués y col. (Burgués, C. ; Sarramona, J. , 2013) adaptadas a bachillerato.
- Detectar el comportamiento de la población total de forma cuantitativa del conocimiento del álgebra y de funciones en particular, según las siguientes características:
 - En la prueba total (en todos los ítems)
 - Según cada proceso del álgebra implicado
 - Según el origen del obstáculo en la resolución, detectado a través del error.
 - Según la modalidad a la que pertenecen los alumnos: “ciencias y tecnología” o “ciencias sociales”
- Comparar el comportamiento de cada curso académico para la prueba de álgebra según los procesos algebraicos implicados, según los niveles de Collis y Piaget (Fidela Velázquez, 2003) y según el tipo de origen del obstáculo de los errores, y para la prueba de funciones según los niveles de competencias matemáticas evaluados en las pruebas PISA (Instituto Nacional de Evaluación Educativa. Ministerio de Educación, 2013).

- Conocer si los dos cursos académicos de la población de estudio tienen comportamientos similares al establecer niveles de conocimiento algebraico.
- Ver si las diferencias o similitudes entre los dos cursos académicos de la población de estudio que aparecen en los resultados de la prueba total son significativas estadísticamente o no.

A continuación presentamos la forma de estructuración de cada una de las dos pruebas.

3.4.3.1. Prueba diagnóstica de álgebra

Uno de los puntos importantes para la implementación del modelo FC en el tema de funciones en primero de bachillerato es conocer el nivel inicial de habilidades y destrezas algebraicas de los alumnos e identificar las dificultades que tienen los alumnos en los procesos de sustitución, generalización y modelización. La prueba diagnóstica fue escogida teniendo en cuenta los siguientes objetivos:

1. Evaluar el razonamiento inductivo y deductivo en álgebra;
2. Detectar las dificultades que se presentan en dicho proceso de resolución;
3. Reconocer niveles de habilidades y destrezas relacionadas con el contexto algebraico.

En función de ellos consideramos una buena opción utilizar la prueba de Ruano y Socas (Ruano, R. y Socas, M., 2001) (Anexo 2) puesto que se estandarizó con una muestra de alumnos españoles con un currículum de matemáticas similar, a pesar de pertenecer a una comunidad educativa distinta. La prueba está formada por dos cuestionarios C1 y C2 con 13 preguntas y 33 ítems, en torno a tres procesos específicos del lenguaje algebraico: la sustitución formal, la generalización y la modelización.

El primer cuestionario C1, consta de 9 preguntas y 29 ítems; en relación con los procesos algebraicos de estudio, las 4 primeras están dedicadas a la sustitución formal (12 ítems) y el resto a la generalización. El cuestionario C2 consta de 6 preguntas (10 ítems) estando las 2 primeras relacionadas con la generalización y las siguientes con la modelización (Ilustración 3-6).

PROCESO ALGEBRAICO	CUESTIONARIO	ITEMS
Sustitución Formal	C1	1-12
Generalización	C1 y C2	13-29 en C1, 30-35 en C2
Modelización	C2	36-39

Ilustración 3-6: Detalle de los ítems clasificados por tipos de proceso algebraico
Fuente: Elaboración propia

Esta categorización se corresponde con los estadios 4 y 5 propuestos por Collis y Piaget (Fidela Velázquez, 2003) de generalización concreta o formal temprana y el de las operaciones formales.

Como podemos ver en el ejemplo (Ilustración 3-6) el ítem 1 correspondería a una actividad del proceso de sustitución y a la vez al estadio de generalización concreta, puesto que la letra representa un número generalizado, con entidad propia e iguales propiedades que otros números:

INSTRUCCIONES: Lee atentamente las siguientes preguntas y contesta lo que te pide.

1. Si $a = 2b$, ¿en qué se transforma $5a + 3$?

1

Ilustración 3-7: Pregunta 1 de la prueba de habilidades y destrezas algebraicas
Fuente: De elaboración propia a partir de (Ruano, R. y Socas, M., 2001)

En cambio los ítems 30, 31 y 32 de la pregunta 10 (Ilustración 3-7), que corresponderían al proceso de generalización, pertenecen a las actividades propias del estadio de las operaciones formales, dado que aquí el concepto de letra aparece como número generalizado o variable.

10. Expresa si las siguientes expresiones son verdaderas: Siempre (S), Nunca (N) o algunas veces (A). En A explicar para qué valores de las letras.

30 a) $a + b = a + b$

31 b) $p + q = p + s$

32 c) $h + m = h + 2m$

Ilustración 3-8: Pregunta 10 de la prueba de habilidades y destrezas algebraicas
Fuente: De elaboración propia a partir de (Ruano, R. y Socas, M., 2001)

3.4.3.2. Prueba diagnóstica de funciones

La prueba diagnóstica de funciones (Anexo 2), la diseñamos a partir de tres ítems liberados de las Pruebas PISA de matemáticas de los años 2003-2009 (Consell Superior d’Avaluació del Sistema Educatiu.Generalitat de Catalunya, 2014), teniendo en cuenta que es una prueba estandarizada y por ello nos permitía categorizar los resultados según sus criterios de corrección.

En las actividades se desarrollan los siguientes contenidos algebraicos, basándose en el Diseño Curricular de cuarto año de la E.S.O. y Primero de Bachillerato, en el área de matemáticas de la Comunidad de Cataluña:

- Variables;
- Ecuaciones;
- Sistemas de ecuaciones;
- Funciones y gráficas;
- Lenguaje simbólico;

De los ítems liberados del área de funciones (Ilustración 3-9) se utilizaron el de “Crecer”, “El mejor Coche” y “Velocidad de un coche de carreras”.

Estímulos de Funciones y gráficas	Curso				Temas relacionados
	1º	2º	3º	4º	
Carpintero			•	•	Geometría del plano
Crecer			•	•	Funciones y gráficas
El columpio				•	Funciones y gráficas
El depósito de agua				•	Gráficas de funciones y Volúmenes
El faro				•	Funciones periódicas
El mejor coche				•	Funciones de varias variables
El sueño de las focas				•	Funciones periódicas
Frenado				•	Funciones y Gráficas
Latidos del corazón			•	•	Funciones
Pasillos móviles				•	Funciones y Gráficas. Movimiento relativo.
Robos			•	•	Funciones y Gráficas
Velocidad de un coche de carreras				•	Funciones y Gráficas
Paseo en coche			•	•	Funciones y Gráficas

Ilustración 3-9: Ítems liberados de las pruebas PISA de matemáticas
 Fuente: <http://recursostic.educacion.es/inee/pisa/matematicas/funciones.htm>

Para escoger estos tres ítems tuvimos presentes:

- las dimensiones de la Competencia Matemática a evaluar: los contenidos, los tipos de competencia y la situación o contexto;
- y, sobre todo, los procesos y tareas que el alumno puede realizar en cada nivel de desempeño de las competencias Matemáticas;

Basándonos en nuestro objetivo de identificar el nivel que los alumnos traen de la E.S.O. en cuanto a modelización del cambio y las relaciones con las funciones y ecuaciones pertinentes, y de crear, interpretar y traducir entre las representaciones simbólicas y gráficas de las relaciones.

Dimensiones evaluadas de la Competencia Matemática

Para evaluar la competencia matemática, es decir, la capacidad de analizar, razonar y comunicar según se plantean y resuelven los problemas que surgen del desarrollo personal y la plena integración en la sociedad de la comunicación, tuvimos en cuenta las tres dimensiones de la competencia matemática que proponen las pruebas PISA: contenidos, procesos y situaciones o contextos:

- De los cuatro contenidos (espacio forma, incertidumbre, cambio y relaciones, y cantidad) de las pruebas PISA, trabajamos con el de cambio y relaciones, que trata de la representación de los cambios, funciones y dependencia entre variables (expresiones algebraicas, interpretación de gráficas, ecuaciones, desigualdades...)
- Grupos de procesos o tipos de competencia: La competencia matemática multifuncional permitirá afrontar diferentes niveles de dificultad, desde las situaciones conocidas que suponen una aplicación de lo aprendido, a las que plantean algún cambio o modificación respecto a la propia experiencia hasta llegar a los problemas inusuales o nuevos en los que se requiere una alta competencia. En este proceso de dificultad creciente se activan los grupos de procesos o competencias de Reproducción, de Conexión y de Reflexión, respectivamente (Ilustración 3-10).

Reproducción	Reproducción del conocimiento practicado; se incluyen las competencias que se utilizan más frecuentemente en las pruebas estandarizadas y en los libros de texto: conocimiento de hechos, representaciones de problemas comunes, reconocimiento de equivalentes, recopilación de propiedades y objetos matemáticos familiares, ejecución de procedimientos rutinarios, aplicación de habilidades técnicas y de algoritmos habituales, el manejo de expresiones con símbolos y fórmulas establecidas y realización de cálculos.
Conexiones	Competencias que se sostienen sobre las del grupo de reproducción, que dan lugar a situaciones de resolución de problemas que ya no son de mera rutina, pero que aún incluyen escenarios familiares o casi familiares.
Reflexión	Competencias que incluyen un elemento de reflexión por parte del alumno sobre los procesos necesarios o empleados para resolver un problema. Relacionan las capacidades del alumnado para planificar estrategias de resolución y aplicarlas en escenarios de problema que contienen más elementos y que pueden ser más “originales” (o inusuales) que los del grupo de conexiones.

Ilustración 3-10: Grupos de competencias

Fuente: (Consell Superior d’Avaluació del Sistema Educatiu.Generalitat de Catalunya, 2014)

- La situación o contexto: PISA elabora sus propias preguntas inspirándose en diferentes situaciones de la vida del ciudadano. Tiene en cuenta el contexto de vida personal (aficiones, actividades propias de la edad), el contexto de vida educacional y ocupacional (intercambios, viajes, relaciones), el contexto público (cumplimiento de sus obligaciones, participación en asuntos sociales) y el contexto científico (participar en los asuntos más complejos que le atañen como ciudadano del mundo) (Evaluación Educativa Aragón). En los ítems escogidos para nuestra prueba el contexto que se utiliza en dos actividades es el científico y en la tercera el público.

El formato de los ítems puede ser del tipo de respuesta única, preguntas de elección múltiple o preguntas de respuesta cerrada.

Cada ítem de las pruebas PISA tiene un nivel de dificultad y por ello se le asigna una puntuación determinada entre 350 y 800 dependiendo del grado de dificultad. La escala de puntuación es la siguiente:

- Nivel 1, entre 350 y 420,
- Nivel 2, entre 420 y 482,
- Nivel 3, entre 482 y 544,

- Nivel 4, entre 544 y 606,
- Nivel 5, entre 606 y 668,
- Nivel 6, entre 668 y 800.

Niveles de las Competencias Matemáticas evaluadas

Para clasificar los resultados de las pruebas utilizamos la escala que propone las pruebas PISA del 2003-2009, donde clasifica a los alumnos en seis niveles de competencia matemática, según el tipo de ejercicios que han realizado correctamente:

NIVEL	DESCRIPCIÓN DE LA ESCALA
NIVEL 6	En el nivel 6 los alumnos saben formar conceptos, generalizar y utilizar información basada en investigaciones y modelos de situaciones de problemas complejos. Pueden relacionar diferentes fuentes de información y representaciones y traducirlas entre ellas de manera flexible. Los estudiantes de este nivel poseen un pensamiento y razonamiento matemático avanzado. Estos alumnos pueden aplicar su entendimiento y comprensión, así como su dominio de las operaciones y relaciones matemáticas simbólicas y formales y desarrollar nuevos enfoques y estrategias para abordar situaciones nuevas. Los alumnos pertenecientes a este nivel pueden formular y comunicar con exactitud sus acciones y reflexiones relativas a sus descubrimientos, interpretaciones, argumentos y su adecuación a las situaciones originales.
NIVEL 5	En el nivel 5, los alumnos saben desarrollar modelos y trabajar con ellos en situaciones complejas, identificando los condicionantes y especificando los supuestos. Pueden seleccionar, comparar y evaluar estrategias adecuadas de solución de problemas para abordar problemas complejos relativos a estos modelos. Los alumnos pertenecientes a este nivel pueden trabajar estratégicamente utilizando habilidades de pensamiento y razonamiento bien desarrolladas, así como representaciones adecuadamente relacionadas, caracterizaciones simbólicas y formales, e intuiciones relativas a estas situaciones. Pueden reflexionar sobre sus acciones y formular y comunicar sus interpretaciones y razonamientos.
NIVEL 4	En el nivel 4, los alumnos pueden trabajar con eficacia con modelos explícitos en situaciones complejas y concretas que pueden conllevar condicionantes o exigir la formulación de supuestos. Pueden seleccionar e integrar diferentes representaciones, incluidas las simbólicas, asociándolas directamente a situaciones del mundo real. Los alumnos de este nivel saben utilizar habilidades bien desarrolladas y razonar con flexibilidad y con cierta perspicacia en estos contextos. Pueden elaborar y comunicar explicaciones y argumentos basados en sus interpretaciones, argumentos y acciones.
NIVEL 3	En el nivel 3, los alumnos saben ejecutar procedimientos descritos con claridad, incluyendo aquellos que requieren decisiones secuenciales. Pueden seleccionar y aplicar estrategias de solución de problemas sencillos. Los alumnos de este nivel saben interpretar y utilizar representaciones basadas en diferentes fuentes de información y razonar directamente a partir de ellas. Son también capaces de elaborar breves escritos exponiendo sus interpretaciones, resultados y razonamientos.
NIVEL 2	En el nivel 2, los alumnos saben interpretar y reconocer situaciones en contextos que solo requieren una inferencia directa. Saben extraer información pertinente de una sola fuente y hacer uso de un único modelo representacional. Los alumnos de este nivel pueden utilizar algoritmos, fórmulas, procedimientos o convenciones elementales. Son capaces de efectuar razonamientos directos e interpretaciones literales de los resultados.
NIVEL 1	En el nivel 1, los alumnos saben responder a preguntas relacionadas con contextos que les son conocidos, en los que está presente toda la información pertinente y las preguntas están claramente definidas. Son capaces de identificar la información y llevar a cabo procedimientos rutinarios siguiendo unas instrucciones directas en situaciones explícitas. Pueden realizar acciones obvias que se deducen inmediatamente de los estímulos presentados.

Ilustración 3-11: Descripción de la escala de competencia matemática (2003-2009)

Fuente:(Instituto Nacional de Evaluación Educativa. Ministerio de Educación, 2013)

Datos de los ítems utilizados en la Prueba Diagnóstica de Funciones

Los datos de cada ítem evaluado en la prueba diagnóstica de funciones (Anexo 2) los podemos resumir a través de las siguientes tablas:

ÍTEM 1: CRECER	Pregunta 1	Pregunta 2	Pregunta 3
Agrupamiento de competencia	Reproducción	Reproducción	Conexiones
Objetivo	Interpretar y razonar en un contexto práctico que implique un uso simple y familiar de las relaciones de tiempo.	Interpretar y razonar en un contexto práctico que implique un uso simple y familiar de las relaciones de tiempo.	Relacionar información dada en un texto con una representación gráfica y explicar las conclusiones.
Contenido	Cambios y relaciones	Cambios y relaciones	Cambios y relaciones
Contexto	Científico	Científico	Científico
Formato	Respuesta abierta restringida	Respuesta abierta restringida	Respuesta abierta construida
Nivel	2	Crédito completo: 3 Crédito parcial: 2	4

Ilustración 3-12: Descripción de los datos del ítem “Crecer” de las Pruebas PISA (2003-2009)

Fuente: De elaboración propia a partir de (Consell Superior d’Avaluació del Sistema Educatiu.Generalitat de Catalunya, 2014)

ÍTEM 2: EL MEJOR COCHE	Pregunta 1	Pregunta 2
Agrupamiento de competencia	Reproducción	Reflexión
Objetivo	Interpretar un texto que describe un algoritmo simple y aplicarlo.	Identificar y aplicar estrategias convenientes para la resolución de problemas
Contenido	Cambios y relaciones	Cambios y relaciones
Contexto	Público	Público
Formato	Respuesta corta	Respuesta abierta construida
Nivel	2	5

Ilustración 3-13: Descripción de los datos del ítem “El mejor Coche” de las Pruebas PISA (2003-2009)

Fuente: De elaboración propia a partir de (Consell Superior d’Avaluació del Sistema Educatiu.Generalitat de Catalunya, 2014)

ÍTEM 3: VELOCIDAD DE UN COCHE DE CARRERAS	Pregunta 1	Pregunta 2	Pregunta 3	Pregunta 4
Agrupamiento de competencia	Conexiones	Reproducción	Reproducción	Conexiones
Objetivo	Interpretar representaciones gráficas de situaciones nuevas del mundo real.	Conectar un texto simple a una característica específica de un gráfico y leer un valor en él.	Conectar un texto simple a una característica específica de un gráfico y leer un valor en él.	Conectar representaciones matemáticas formales a situaciones complejas del mundo real.
Contenido	Cambios y relaciones	Cambios y relaciones	Cambios y relaciones	Cambios y relaciones
Contexto	Científico	Científico	Científico	Científico
Formato	Múltiple opción	Múltiple opción	Múltiple opción	Múltiple opción
Nivel	3	1	1	5

Ilustración 3-14: Descripción de los datos del ítem “Velocidad de un coche de carrera” de las Pruebas PISA (2003-2009)

Fuente: De elaboración propia a partir de (Consell Superior d’Avaluació del Sistema Educatiu. Generalitat de Catalunya, 2014)

3.4.4. Procedimientos

Pasamos a describir las condiciones y forma en que se realizaron las pruebas diagnósticas, así como el proceso de tratamiento de los datos obtenidos en los resultados.

3.4.4.1. Condiciones de realización de las pruebas

Se dio una guía de realización de las pruebas (Anexo 4) al profesor de matemáticas de la clase, donde se le indicaba que:

- Debía explicar de forma previa el objetivo de las pruebas a realizar,
- Los alumnos no debían recibir instrucción del tema antes de la ejecución de las pruebas,
- Los alumnos debían leer los enunciados,
- No se debía proporcionar ningún tipo de ayuda a los alumnos,
- Podía explicar el significado de alguna palabra sólo en el caso que algún alumno lo pidiera explícitamente.

Las pruebas se desarrollaron en dos sesiones de 55 minutos, durante la clase de matemáticas en el mes de enero de 2014, a seis secciones de primero de bachillerato del curso escolar 2013-2014, implicando a un total de 149 alumnos, y en el mes de noviembre de 2014 a otras seis secciones del curso 2014-2015, con un total de 164 alumnos. El profesor siempre estaba presente en la clase y el investigador registraba los datos en vídeo y audio.

3.4.4.2. Tratamiento y análisis de los resultados

Para realizar el tratamiento, categorización y análisis de las pruebas diagnósticas nos hemos basado en los referentes teóricos citados en el capítulo 2, los cuales explicitaremos para cada una de ellas.

En primer lugar desarrollaremos los criterios de categorización utilizados para el análisis cuantitativo de la prueba diagnóstica de álgebra, y en segundo lugar los usados en la prueba diagnóstica de funciones.

Prueba diagnóstica de álgebra

La prueba diagnóstica de álgebra está formada por los cuestionarios 1 y 2 que constaban de varios ítems por cada tipo de proceso algebraico como se muestra en la ilustración 3-15:

PROCESO ALGEBRAICO	CUESTIONARIO	ITEMS
SUSTITUCIÓN FORMAL (12 ítems)	C1	1-12
GENERALIZACIÓN (23 ítems)	C1 y C2	13-29 en C1, 30-35 en C2
MODELIZACIÓN (4 ítems)	C2	36-39

*Ilustración 3-15: Esquema de síntesis de los procesos algebraicos evaluados en cada cuestionario.
Fuente: Elaboración propia*

Para analizar los resultados categorizamos las respuestas de cada pregunta basándonos en la clasificación de errores de Ruano y col. (Ruano, R. M., Socas, M. M. y Palarea, M. M., 2008), descrita en el marco referencial (ilustración 3-16):

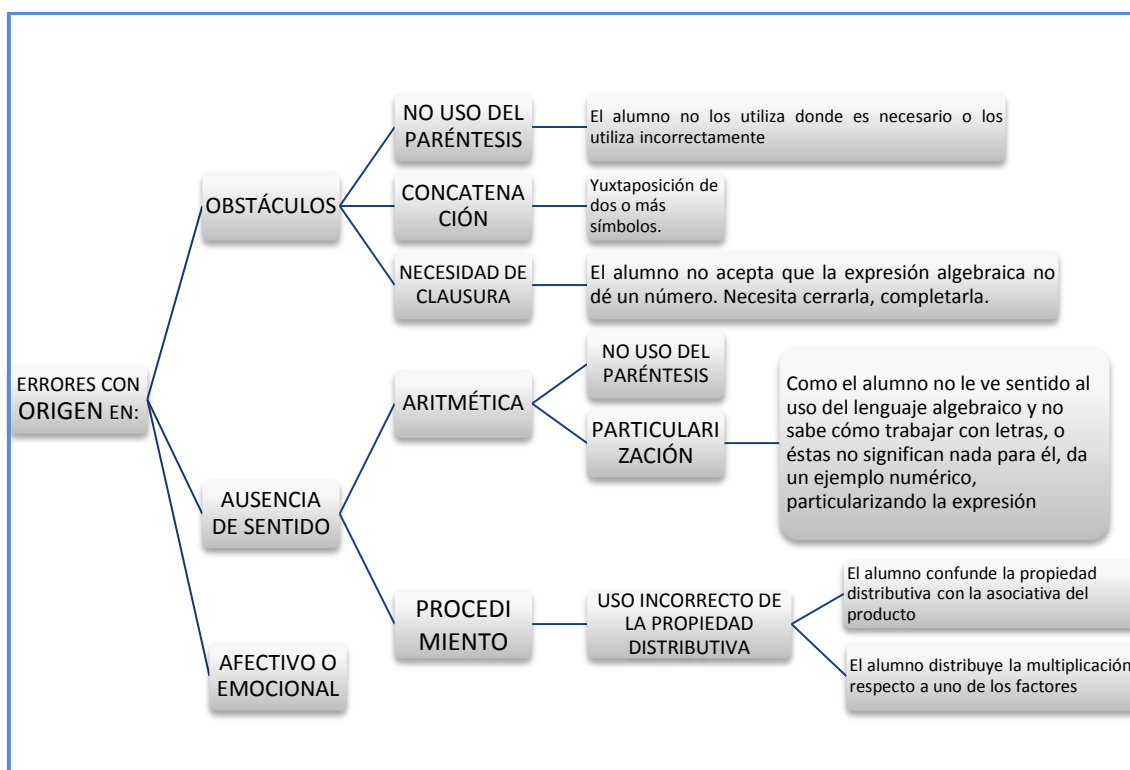


Ilustración 3-16: Clasificación de errores cometidos por alumnos de secundaria en los procesos de Sustitución formal, Generalización y modelización en Álgebra
 Fuente: (Ruano, R. M., Socas, M. M. y Palarea, M. M., 2008)

➤ Para los primeros 12 ítems de Sustitución Formal, la categorización que utilizamos fue:

Código 2: respuesta correcta
Código 1: respuesta parcialmente correcta
Código 0: respuesta incorrecta
Código 99: no sabe/no contesta

Ilustración 3-17: Tabla de codificación de los ítems de sustitución formal
 Fuente: Elaboración propia

Ante respuestas incorrectas realizamos una subcategorización para identificar el tipo de error:

Código 1: origen en un obstáculo	Debido al no uso del paréntesis, concatenación o clausura.
Código 2: origen en la ausencia de sentido	Origen en la aritmética: no uso del paréntesis, particularización (por ej. uso incorrecto de la propiedad distributiva)
	Los errores de procedimiento que se derivan del uso inapropiado que hacen los alumnos de las fórmulas o de las reglas de procedimiento
	Los errores de álgebra debidos a las características propias del lenguaje algebraico, de naturaleza estrictamente algebraica y sin referencia explícita en la aritmética (operaciones, estructuras y procesos)
Código 3: origen afectivo y emocional	Falta de concentración, bloqueo, olvido, etc.

Ilustración 3-18: Tabla de codificación de los errores de los ítems de sustitución formal
 Fuente: Elaboración propia

- Para los ítems del 13 al 29 del C1 y del 30 al 35 del C2 sobre Generalización, la categorización que utilizamos fue:

Código 2: respuesta correcta
Código 1: respuesta parcialmente correcta
Código 0: respuesta incorrecta
Código 99: no sabe/no contesta

Ilustración 3-19: Tabla de codificación de los ítems de generalización

Fuente: De elaboración propia

Ante respuestas incorrectas realizamos una subcategorización para identificar el tipo de error:

Código 1: origen en un obstáculo	Debido al no uso del paréntesis, concatenación o clausura, utilización de la fórmula de los triángulos para los cuadrados, etc.
Código 2: origen en la ausencia de sentido	Los errores que tienen su origen en la aritmética: particularización, confunden multiplicación con potencia o faltaban datos.
	Los errores de procedimiento que se derivan del uso inapropiado que hacen los alumnos de las fórmulas o de las reglas de procedimiento. Por ejemplo, no poder establecer la expresión algebraica que generaliza el patrón.
	Los errores de álgebra debidos a las características propias del lenguaje algebraico.
Código 3: origen afectivo y emocional	Los errores debidos a la falta de concentración, olvido, etc.

Ilustración 3-20: Tabla de codificación de los errores de los ítems de generalización.

Fuente: Elaboración propia

- Para los ítems del 36 al 39 del C2 sobre Modelización la categorización utilizada fue:

Código 2: respuesta correcta
Código 1: respuesta parcialmente correcta
Código 0: respuesta incorrecta
Código 99: no sabe/no contesta

Ilustración 3-21: Tabla de codificación de los ítems de modelización

Fuente: Elaboración propia

Ante respuestas incorrectas realizamos una subcategorización para identificar el tipo de error:

Código 1: origen en un obstáculo	Debido al no uso del paréntesis, concatenación o clausura.
Código 2: origen en la ausencia de sentido	Los errores que tienen su origen en la aritmética: particularización, confunden multiplicación con potencia o faltaban datos.
	Los errores de procedimiento que se derivan del uso inapropiado que hacen los alumnos de las fórmulas o de las reglas de procedimiento
	Los errores de álgebra debidos a las características propias del lenguaje algebraico: registro incompleto
Código 3: origen afectivo y emocional	Los errores debidos a la falta de concentración, olvido, etc.: modelos incompletos

Ilustración 3-22: Tabla de codificación de los errores de los ítems de modelización.

Fuente: De elaboración propia

Prueba diagnóstica de funciones

Para analizar los resultados de cada ítem categorizamos las respuestas de cada pregunta basándonos en la codificación de cada ítem liberado de las pruebas PISA y adaptándola a la escala utilizada en los cuestionarios 1 y 2 para mantener uniformidad de criterio para facilitar el análisis de los resultados.

ÍTEM	CUESTIONARIO	PREGUNTAS
Crecer	C3	1-3
Velocidad de un coche de carreras	C3	1-4
El mejor coche	C3	1-2

Ilustración 3-23: Tabla de ítems evaluados en el cuestionario 3 y preguntas correspondientes

Fuente: De elaboración propia

1) Ítem “Crecer”

En las pruebas PISA encontramos la siguiente categorización correspondiente a las tres preguntas del ítem “crecer”:

➤ Pregunta 1

Crecer:				Puntuaciones:	
M150Q01		Aciertos	%	Máxima puntuación Código 1: 168,3 cm (unidades ya dadas). Ninguna puntuación Código 0: Otras respuestas. Código 9: Sin respuesta.	
Subescala	Cambio y relaciones	OCDE	67,0		
Situación	Científica	España	66,5		
Competencia	Reproducción	Castilla y León	70,4		
Dificultad	477 (nivel 2)	Cataluña	68,7		
		País Vasco	69,7		

Ilustración 3-24: Puntuación de la pregunta 1 del ítem “Crecer” de las pruebas PISA

Fuente: (PISA 2000, 2003, Ítems Liberados.)

➤ Pregunta 2

Crecer:

M150Q03		Aciertos	%
Subescala	Cambio y relaciones	OCDE	44,8
Situación	Científica	España	36,5
Competencia	Conexiones	Castilla y León	35,8
Dificultad	574 (nivel 4)	Cataluña	52,0
		País Vasco	35,5

Puntuaciones:

Máxima puntuación
La clave es que la respuesta debe referirse al cambio del gradiente del gráfico para las chicas. Esto puede hacerse explícita o implícitamente. Los Códigos 11 y 12 son para la mención explícita de la fuerte pendiente de la curva del gráfico, mientras que el código 13 es para la comparación implícita utilizando la cantidad real de crecimiento antes y después de los 12 años de edad.

Código 11: Se refiere a la reducida pendiente de la curva a partir de los 12 años, utilizando lenguaje cotidiano, no lenguaje matemático.

- No sigue yendo hacia arriba, se endereza.
- La curva se nivela.
- Es más plana después de los 12.
- La curva de las chicas se hace uniforme y la de los chicos se hace más grande.
- Se endereza y el gráfico de los chicos sigue subiendo.

Código 12: Se refiere a la reducida pendiente de la curva a partir de los 12 años, utilizando lenguaje matemático.

- Se puede observar que el gradiente es menor.
- La tasa de cambio del gráfico disminuye a partir de los 12 años.
- [El alumno calcula los ángulos de la curva con respecto al eje x antes y después de los 12 años.]

En general, si se utilizan palabras como "gradiente", "pendiente", o "tasa de cambio", considérese como utilización de lenguaje matemático.

Código 13: Comparación del crecimiento real (la comparación puede ser implícita).

- Desde los 10 a los 12 años el crecimiento es aproximadamente de 15 cm, aunque el crecimiento desde los 12 a los 20 es sólo de alrededor de 17 cm.
- La tasa media de crecimiento desde los 10 a los 12 años es de alrededor de 7.5 cm por año, y de alrededor de 2 cm por año desde los 12 a los 20 años.

Ninguna puntuación
Código 01: El alumno indica que la altura de las mujeres se sitúa debajo de la altura de los hombres, pero NO menciona la pendiente del gráfico de las mujeres o una comparación de la tasa de crecimiento de las mujeres antes y después de los 12 años.

- La línea de las mujeres está debajo de la línea de los hombres.

Si el estudiante menciona que el gráfico de las mujeres se vuelve menos empinado, ASÍ COMO el hecho de que el gráfico se sitúa por debajo del gráfico de los hombres, entonces debe asignarse la máxima puntuación (Códigos 11, 12 or 13). No se está buscando aquí una comparación entre los gráficos de los hombres y de las mujeres, de modo que debe ignorarse cualquier referencia a tal comparación, y juzgar en base al resto de la respuesta.

Código 02: Otras respuestas incorrectas. Por ejemplo, la respuesta no se refiere a las características del gráfico, a pesar de que se pregunta claramente cómo está reflejado en el GRÁFICO...

- Las chicas maduran antes.
- Porque las mujeres pasan la pubertad antes de los hombres y tienen antes el aceleramiento de su crecimiento.
- Las chicas no crecen mucho después de los 12. [Se da una afirmación de que las chicas crecen más lentamente después de los 12 años de edad y no se hace referencia al gráfico.]

Código 99: Sin respuesta.

Ilustración 3-25: Puntuación de la pregunta 2 del ítem "Crecer" de las pruebas PISA Fuente: (PISA 2000, 2003, Items Liberados.)

➤ Pregunta 3

Crecer:

M150Q02	Puntuación parcial	Aciertos	%
Subescala	Cambio y relaciones	OCDE	28,1
Situación	Científica	España	19,2
Competencia	Reproducción	Castilla y León	19,0
Dificultad	420 (nivel 1)	Cataluña	27,6
		País Vasco	25,3

Puntuaciones:

Máxima puntuación
Código 21: Se proporciona el intervalo correcto, de 11 a 13 años.

- Entre la edad de 11 y 13.
- Desde los 11 a los 13 años, las chicas son más altas que los chicos como promedio.
- 11-13.

Código 22: Se afirma que las chicas son más altas que los chicos cuando tienen 11 y 12 años. (Esta respuesta es correcta en el lenguaje cotidiano, porque significa lo mismo que el intervalo de 11 a 13).

- Las chicas son más altas que los chicos cuando tienen 11 y 12 años.
- 11 y 12 años.

Puntuación parcial
Código 11: Otros subconjuntos de (11, 12, 13), no incluidos en la sección de máxima puntuación.

- 12 a 13.
- 12.
- 13.
- 11.
- 11,2 a 12,8.

Ninguna puntuación
Código 00: Otras respuestas.

- 1998.
- Las chicas son más altas que los chicos cuando son mayores de 13 años.
- Las chicas son más altas que los chicos desde los 10 a los 11 años.

Código 99: Sin respuesta.

Ilustración 3-26: Puntuación de la pregunta 3 del ítem "Crecer" de las pruebas PISA Fuente: (PISA 2000, 2003, Items Liberados.)

Para nuestro análisis de resultados, adaptamos la codificación de las tres preguntas de la siguiente forma:

Nº PREGUNTA	Codificación Pruebas PISA	Codificación adaptada a nuestro estudio
Pregunta 1	Código 1: respuesta correcta	Código 1
	Código 0: respuesta incorrecta	Código 0
	Código 99: no sabe/no contesta	Código 99
Pregunta 2	Código 11: respuesta correcta expresada con lenguaje cotidiano	Código 2
	Código 12: respuesta correcta expresada con lenguaje matemático	Código 3
	Código 13: comparación de crecimiento real	Código 1
	Código 01: Respuesta incorrecta. No menciona el cambio	Código 0
	Código 02: Respuesta incorrecta. Otras respuestas	Código 0
	Código 99: no sabe/no contesta	Código 99
Pregunta 3	Código 21: respuesta correcta (intervalo)	Código 3
	Código 22: respuesta correcta (edades)	Código 2
	Código 11: respuesta correcta (subconjuntos)	Código 1
	Código 00: Respuesta incorrecta	Código 0
	Código 99: no sabe/no contesta	Código 99

Ilustración 3-27: Adaptación de la codificación del ítem Crecer de las pruebas PISA

Fuente: Elaboración propia

2) Ítem “Velocidad de un coche de carreras”

Para el ítem 2, la categorización de las pruebas PISA es la siguiente:

➤ Pregunta 1

Respuesta correcta: Opción B

Respuesta incorrecta: Otras respuestas o sin responder.

DATOS PARA VELOCIDAD DE UN AUTO DE CARRERA - PREGUNTA 1(M159Q01)

Agrupamiento de competencia	Conexiones
Objetivo	Interpretar representaciones gráficas de situaciones nuevas del mundo real
Contenido	Cambio y relaciones.
Contexto	Científico
Formato	Múltiple opción
Nivel	3
Resultado promedio en los países participantes	Crédito total.....67%

Ilustración 3-28: Puntuación de la pregunta 1 del ítem “Velocidad de un coche de carreras” de las pruebas PISA

Fuente: (División de Investigación, 2009)

➤ Pregunta 2

Respuesta correcta: Opción C
Respuesta incorrecta: Otras respuestas.

Dificultad: 403
Respuesta correcta: C
Aciertos: España 88,6%;
 OCDE 83,3%

Ilustración 3-29: Puntuación de la pregunta 2 del ítem “Velocidad de un coche de carreras” de las pruebas PISA
 Fuente: (PISA 2000, 2003, Items Liberados.)

➤ Pregunta 3

Respuesta correcta: Opción B
Respuesta incorrecta: Otras respuestas

DATOS PARA VELOCIDAD DE UN AUTO DE CARRERA - PREGUNTAS 2, 3 (M159Q02- Q03)

Agrupamiento de competencia	Reproducción
Objetivo	Conectar un texto simple a una característica específica de un gráfico y leer un valor en él.
Contenido	Cambio y relaciones.
Contexto	Científico
Formato	Múltiple opción
Nivel	1
Resultado promedio en los países participantes	Q02 Crédito completo.....83% Q03 Crédito completo.....83%

Ilustración 3-30: Puntuación de la pregunta 3 del ítem “Velocidad de un coche de carreras” de las pruebas PISA
 Fuente: (División de Investigación, 2009)

➤ Pregunta 4

Respuesta correcta: Opción B
Respuesta incorrecta: Otras respuestas

DATOS PARA VELOCIDAD DE UN AUTO DE CARRERA – PREGUNTA 4 (M159Q04)

Agrupamiento de competencia	Conexiones
Objetivo	Conectar representaciones matemáticas formales a situaciones complejas del mundo real.
Contenido	Cambio y relaciones.
Contexto	Científico
Formato	Múltiple opción
Nivel	5
Resultado promedio en los países participantes	Crédito completo.....28%

Ilustración 3-31: Puntuación de la pregunta 4 del ítem “Velocidad de un coche de carreras” de las pruebas PISA
 Fuente: (División de Investigación, 2009)

Para nuestro análisis de resultados, adaptamos la codificación de las cuatro preguntas de la siguiente manera:

Nº PREGUNTA	Codificación Pruebas PISA	Codificación adaptada a nuestro estudio
Pregunta 1, 2, 3 y 4	Código 1: respuesta correcta	Código 1
	Código 0: respuesta incorrecta	Código 0
	Código 99: no sabe/no contesta	Código 99

Ilustración 3-32: Adaptación de la codificación del ítem “Velocidad de un coche de carreras” de las pruebas PISA.

Fuente: Elaboración propia

3) Ítem “El mejor coche”

Para el ítem 3, la categorización de las pruebas PISA es la siguiente:

➤ Pregunta 1

M704Q01T	Cambio y relaciones	Aciertos (%):	72,9	OCDE
Sub-escala:	Pública		71,4	España
Situación:	Reproducción		77,3	Castilla y León
Competencia:			70,9	Cataluña
Dificultad:	447 (nivel 2)		75,1	País Vasco

EL MEJOR COCHE. PUNTUACIÓN DE LA PREGUNTA 37

Máxima puntuación

Código 1: 15 puntos.

Ninguna puntuación

Código 0: Otras respuestas.

Código 9: Sin respuesta.

Ilustración 3-33: Puntuación de la pregunta 1 del ítem “El mejor coche” de las pruebas PISA

Fuente: (PISA 2000, 2003, Items Liberados.)

➤ Pregunta 2

M704Q02T	Cambio y relaciones	Aciertos (%):	25,4	OCDE
Sub-escala:	Pública		22,2	España
Situación:	Reflexión		27,7	Castilla y León
Competencia:			22,5	Cataluña
Dificultad:	657 (nivel 5)		25,8	País Vasco

EL MEJOR COCHE. PUNTUACIÓN DE LA PREGUNTA 38

Máxima puntuación

Código 1: Regla correcta que convierta a Ca en ganador.

Ninguna puntuación

Código 0: Otras respuestas.

Código 9: Sin respuesta.

Ilustración 3-34: Puntuación de la pregunta 2 del ítem “El mejor coche” de las pruebas PISA

Fuente: (PISA 2000, 2003, Items Liberados.)

Para nuestro análisis de resultados, adaptamos la codificación de las dos preguntas de la siguiente manera:

Nº PREGUNTA	Codificación Pruebas PISA	Codificación adaptada a nuestro estudio
Pregunta 1, y 2	Código 1: respuesta correcta	Código 1
	Código 0: respuesta incorrecta	Código 0
	Código 99: no sabe/no contesta	Código 99

Ilustración 3-35: Adaptación de la codificación del ítem “El mejor coche” de las pruebas PISA.

Fuente: Elaboración propia

Tipo de análisis utilizado

Los resultados de las pruebas diagnósticas han sido tratados mediante un análisis cuantitativo descriptivo simple. Es por ello que se optó por el tratamiento estadístico de los datos mediante el paquete estadístico *Statistical Package for Social Science*, versión 18 para PC (SPSS).

El análisis realizado consta de:

- 1) **Una valoración de cada ítem de las pruebas**, obtenida a través del análisis de frecuencias para conocer la distribución de las puntuaciones que se han obtenido en cada una de ellas, distinguiéndolas por cursos académicos diferentes. Esto nos mostrará el tipo de actividades que genera más dificultad al alumnado y el tipo de error cometido en cada subpoblación.
- 2) **Una valoración por proceso** algebraico evaluado (substitución, generalización y modelización) y por el tema de funciones, obtenida a través del cálculo de estadísticos descriptivos, distinguiendo por cursos académicos y por modalidades de bachillerato. A partir de este análisis podremos conocer cuál ha sido el nivel de dificultad de los diferentes procesos que conforman la prueba, y si hay diferencias o similitudes en las subpoblaciones.
- 3) **Una valoración general** de los resultados obtenidos a través del cálculo de estadísticos descriptivos del conjunto de la población, con distinciones entre cursos académicos y por modalidades de bachillerato, con la finalidad de conocer el nivel de dificultad en general de las habilidades y destrezas algebraicas, en particular del tema de funciones.

Finalmente este análisis descriptivo tendrá en cuenta los ocho alumnos que componen la muestra para el estudio de casos, para poder conocer el nivel y dificultades de cada uno, en comparación con el resto de la población.

3.5. FASE 2.1: Desarrollo del modelo “Flipped Classroom” en la unidad de funciones

3.5.1. Metodología

En nuestra investigación, el tipo de análisis que hemos seguido en esta fase ha sido del tipo cualitativo, microetnográfico, de estudio de casos, múltiple e inclusivo, dadas las circunstancias del planteamiento de estudio, y los objetivos que se pretenden resolver son:

- O6. Analizar los resultados del trabajo realizado por los alumnos en las unidades que se realizaron con “*Flipped Classroom*”.
- O7. Analizar logros de competencias fundamentales asociadas al trabajo algebraico realizado en el campo de las funciones.

Estudiamos a los alumnos de la muestra durante la implementación del modelo de aprendizaje FC, utilizando la observación participante para comprender los sucesos desde la interpretación de los alumnos investigados.

Para el estudio de cada alumno realizaremos una triangulación entre los datos obtenidos a partir de los siguientes instrumentos:

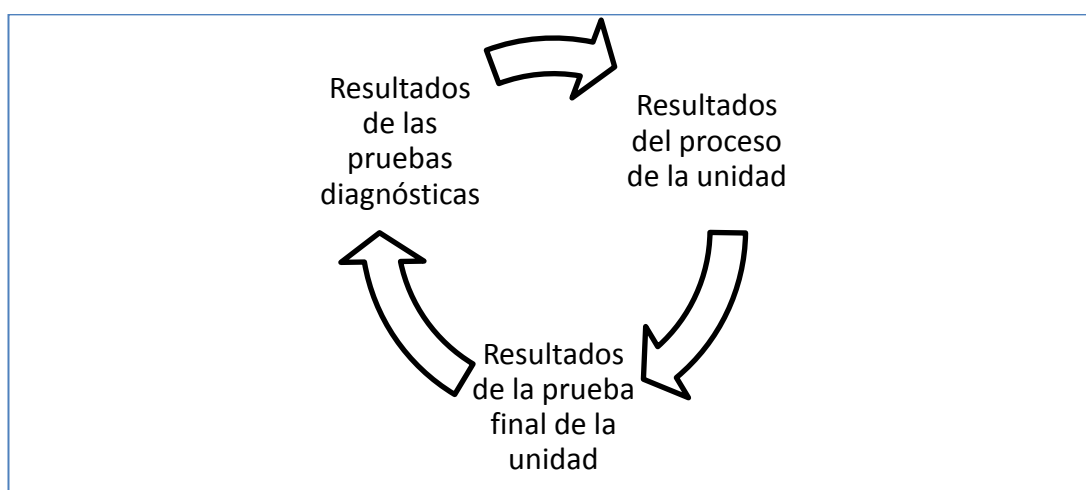


Ilustración 3-36: Triangulación de los resultados académicos
Fuente: Elaboración propia

Esta triangulación nos permite realizar un esquema de evolución del alumno desde que empieza el estudio hasta que finaliza, y poder comparar los resultados con las notas obtenidas anterior y posteriormente a la investigación, en la misma asignatura.

3.5.2. Contexto y población de estudio

La implementación del modelo de aprendizaje FC se realizó en los meses de Enero y Febrero de 2014. Al inicio del estudio se entregó a los alumnos de la muestra el cuestionario de identificación (Anexo 5).

Aunque la implementación del modelo se realizó para las seis clases de la población (para no afectar a ninguna de ellas, tanto en lo que respecta a las ventajas como en las dificultades del modelo implementado), ya hemos dicho que se seleccionó también una muestra formada por ocho alumnos para obtener información fidedigna del proceso. Recordamos que los criterios utilizados para la selección de los ocho alumnos fueron:

- Que los ocho perteneciesen a clases donde pudiésemos realizar una observación participativa como docente.
- Que cuatro de ellos perteneciesen a la modalidad científico-tecnológica y los otros cuatro a ciencias sociales.
- Que los cuatro alumnos de cada modalidad, a su vez, fueran escogidos de tal forma que fuesen representativos de las notas de toda la clase. Por ello se tuvo en cuenta la nota final obtenida en matemáticas en el primer trimestre del curso académico 2013-2014, representando cada uno de ellos un cuartil dentro del rango de 0 a 10:
 - 1r cuartil, nota entre 0 y 2,4;
 - 2º cuartil, nota entre 2,5 y 4,9;
 - 3r cuartil, nota entre 5 y 7,4;
 - y 4º cuartil, nota entre 7,5 y 10.
- Que los alumnos estuviesen dispuestos a participar en el estudio, ya que esto implicaba entre otras cosas, quedarse aproximadamente una hora después de clases durante tres semanas.

Con estas condiciones la muestra del estudio quedó constituida de la siguiente manera:

Centro	Año	Curso académico	Muestra del Estudio de casos	
Sant Ignasi	2013-2014	Primero de bachillerato	Modalidad de Ciencias y tecnología	Modalidad de Ciencias Sociales
			1r Cuartil : Marc	1r Cuartil: Karla
			2º Cuartil: María B	2º Cuartil: Santi
			3r Cuartil: Alejandro	3r Cuartil: Javier
			4º Cuartil: Nuria	4º Cuartil: María F

Ilustración 3-37: Muestra para el estudio de casos.

Fuente: Elaboración propia

Describiremos brevemente a cada uno de los miembros de esta población en esta fase de la investigación:

- **Marc:** Nacido en Barcelona. 16 años. Su padre y su madre tienen estudios universitarios. Tiene dos hermanos, él es el más pequeño. Sus hermanos a veces le ayudan a hacer los deberes. En casa hablan catalán y castellano. Realiza actividades extraescolares deportivas unas 3 horas semanales. Reconoce que lo que más le cuesta de las matemáticas es interpretar los enunciados de los problemas. Cuando se le preguntó si quería participar en la investigación de matemáticas manifestó sentirse contento de poder hacerlo. Cuando vio lo que tenía que hacer pensó que sería todo más pautado que en las clases tradicionales. Cursa matemáticas científico-tecnológicas. Su nota del primer trimestre de la asignatura del curso 2013-2014 fue de 1,1. Es un alumno muy trabajador y perseverante pero tiene dificultades para estudiar en profundidad. Estudia de memoria y de forma superficial aunque dedica muchas horas a ello. A veces presenta dificultades en la comprensión de los temas. En clase siempre está muy atento y le cuesta participar por su timidez.
- **MaríaB:** Nacida en Barcelona. 16 años. Su padre y su madre tienen estudios universitarios. Tiene un hermano, ella es la menor. Su hermano no la ayuda a hacer los deberes. En casa hablan catalán y castellano. Realiza actividades extraescolares deportivas unas 6 horas semanales. Reconoce que lo que más le cuesta de las matemáticas es interpretar los enunciados de los problemas. Cuando se le preguntó si quería participar en la investigación de matemáticas manifestó sentirse contenta de hacerlo. Cuando vio lo que implicaba pensó que sería fácil. Cursa matemáticas científico-tecnológicas. Su nota de primer trimestre de la asignatura del curso 2013-2014 fue de 4,6. Es una alumna que estudia y trabaja de forma irregular, no obstante cuando se dedica a ello, puede obtener muy buenos resultados. No tiene

dificultad de comprensión. En clase muchas veces se distrae y participa muy pocas veces porque no trabaja en casa.

- Alejandro: Nacido en Barcelona. 16 años. Su padre y su madre tienen estudios universitarios. Tiene una hermana, él es el menor. Su hermana a veces le ayuda a hacer los deberes. En casa hablan catalán y castellano, y, en alguna ocasión, francés. Realiza entre 8 y 10 horas semanales de actividades extraescolares. Reconoce que lo que más le cuesta de las matemáticas es interpretar los enunciados de los problemas. Cuando le preguntaron si quería participar en la investigación de matemáticas manifestó sentirse contento, seguro y no le generó ninguna preocupación. Cuando vio lo que tenía que hacer pensó que sería fácil. Cursa matemáticas científico-tecnológicas. Su nota del primer trimestre de la asignatura del curso 2013-2014 fue de 7. Es un alumno que no tiene dificultades en la comprensión ni el estudio. Sin embargo, a veces estudia muy superficialmente o de manera irregular. En clase siempre está atento y participa.

- Nuria: Nacida en Barcelona. 16 años. Su padre y su madre tienen estudios universitarios. Tiene dos hermanos, ella es la menor. Sus hermanos no la ayudan a hacer los deberes. En casa hablan catalán y castellano, y, en alguna ocasión, francés e inglés. Realiza actividades extraescolares deportivas y de idiomas unas 10 horas por semana. Reconoce que lo que más le cuesta de las matemáticas es interpretar los enunciados de los problemas. Cuando le preguntaron si quería participar en la investigación de matemáticas manifestó sentirse contenta, no le preocupó y se sintió más bien segura. Cuando vio lo que tenía que hacer pensó que sería fácil. Cursa matemáticas científico-tecnológicas. Su nota del primer trimestre de la asignatura del curso 2013-2014 fue de 8,5. Es una alumna muy responsable y trabajadora. No presenta dificultades de ningún tipo. En clase siempre está atenta y participa.

- Karla: Nacida en Ecuador. 16 años. Su padre y su madre tienen estudios secundarios. Tiene tres hermanos, ella es la segunda. Sus hermanos no la ayudan a hacer los deberes. En casa hablan siempre en castellano, y, en alguna ocasión, en catalán y francés. Realiza actividades extraescolares deportivas 14 horas por semana. Reconoce que lo que más le cuesta de las matemáticas son las operaciones matemáticas. Cuando le preguntaron si quería participar en la investigación de

matemáticas manifestó sentirse contenta. Cuando vio lo que tenía que hacer pensó que sería todo más pautado que en las clases tradicionales. Cursa matemáticas aplicadas a las ciencias sociales. Su nota del primer trimestre de la asignatura del curso 2013-2014 fue de 2,5. Dedicó muy poco tiempo al estudio. No sabe estudiar, lo hace de manera muy superficial y de memoria. En clase a veces presta atención, y otras, como no entiende lo que se dice, se distrae. Participa muy poco y ha faltado varias veces a clase.

- Santi: Nacido en Barcelona. 16 años. Su padre y su madre tienen estudios universitarios. Tiene una hermana, él es el menor. Su hermana no le ayuda a hacer los deberes. En casa hablan castellano, y con menor frecuencia catalán e inglés. Realiza actividades extraescolares deportivas y de idiomas unas 5 horas semanales. Reconoce que lo que más le cuesta de las matemáticas es interpretar los enunciados de los problemas. Se siente seguro cuando realiza las matemáticas que él conoce y cree que no necesita ayuda en la resolución de problemas. Cuando le preguntaron si quería participar en la investigación de matemáticas manifestó sentirse contento. Cuando vio lo que tenía que hacer pensó que sería difícil. Cursa matemáticas aplicadas a las ciencias sociales. Su nota del primer trimestre de la asignatura del curso 2013-2014 fue de 4,6. Es muy irregular en su estudio, y cuando lo hace, estudia de manera superficial y de memoria. A veces presenta dificultades de comprensión o va más lento en clase. No obstante participa siempre que puede.
- Javi: Nacido en Barcelona. 16 años. Su padre y su madre tienen estudios universitarios. Tiene tres hermanos, él es el mayor. Sus hermanos no le ayudan a hacer los deberes. En casa hablan castellano y catalán, y, con menor frecuencia, inglés. Realiza actividades extraescolares deportivas y académicas unas 14 horas semanales. Reconoce que lo que más le cuesta de las matemáticas es saber aplicar los conocimientos adquiridos durante el estudio en el examen. Cuando le preguntaron si quería participar en la investigación de matemáticas manifestó sentirse contento y seguro, y no le preocupó. Cuando vio lo que tenía que hacer pensó que sería fácil, todo más pautado y más corto. Cursa matemáticas aplicadas a las ciencias sociales. Su nota del primer trimestre de la asignatura del curso 2013-2014 fue de 6. No tiene dificultades de ningún tipo, sólo que a veces no presta atención en clase porque está distraído o socializando con los compañeros. Participa en clase cuando ha trabajado en casa.

- **MariaF:** Nacida en Barcelona. 16 años. Su padre y su madre tienen estudios universitarios. Tiene dos hermanos, ella es la menor. Sus hermanos no la ayudan a hacer los deberes. En casa hablan catalán y castellano, y, en algunas ocasiones, francés e inglés. Realiza actividades extraescolares deportivas y de idiomas unas 10 horas por semana. Reconoce que lo que más le cuesta de las matemáticas es interpretar los enunciados de los problemas. Cuando le preguntaron si quería participar en la investigación de matemáticas manifestó sentirse contenta, no le preocupó y se sintió más bien segura. Cuando vio lo que tenía que hacer pensó que sería fácil. Cursa matemáticas aplicadas a las ciencias sociales. Su nota del primer trimestre de la asignatura del curso 2013-2014 fue de 9,6. No presenta ningún tipo de dificultad. Es muy trabajadora y presta atención en clase. Participa mucho en clase aunque le cuesta relacionarse con los demás porque es su primer año en el colegio.

3.5.3. Instrumentos

Para observar paso a paso la evolución de los ocho alumnos de la muestra, desde el inicio de la implementación del modelo FC hasta que finalizó el estudio, se han utilizado los siguientes instrumentos de los que daremos mayor detalle en el capítulo 5:

- **Prueba diagnóstica de habilidades y destrezas algebraicas, y prueba sobre funciones** (Anexo 2). La misma usada para evaluar el nivel algebraico de toda la población del estudio. En este caso el objetivo de dichas pruebas es valorar el nivel algebraico inicial de los alumnos de la muestra. También nos sirve para comparar la muestra con la población y ver si ésta es representativa.
- **Cuestionario de identificación personal** (Anexo 5): cada uno de los alumnos lo rellenó para así disponer de información referente a algunos aspectos familiares, extraescolares y de relación con la asignatura. Este instrumento se ha adaptado del cuestionario utilizado por Casajús (Casajús, 2005).
- **Plantillas de Cornell** (Anexo 6): este instrumento permite que el alumno tome apuntes de forma organizada durante la visualización de los

vídeos, anote preguntas que le vayan surgiendo y realice una síntesis de lo aprendido. Ayuda a distinguir las posibles dificultades de los alumnos a la hora de resumir el contenido, detectar si saben extraer las ideas principales del tema, así como si son capaces de encontrar la jerarquía de los contenidos y procedimientos. También usamos las preguntas para evaluar la efectividad de nuestros videos. Si cada alumno tenía una pregunta similar, no estábamos enseñando el tema de forma correcta, y tomamos nota para rehacer o modificar ese vídeo en particular.

➤ **Cuestionario *online* después de cada visualización de un vídeo tutorial** (Anexo 7): este instrumento permite analizar si el alumno realiza en casa las etapas del nivel inferior de la Taxonomía de Bloom (recordar, comprender y aplicar) en cada visualización de un vídeo tutorial, además de conocer su opinión sobre el vídeo observado y el grado de aceptación del modelo FC. No son cuestionarios estándar, por lo que los ocho cuestionarios se pasaron a la población total de los 149 alumnos de primero de bachillerato que participaron en la implementación del modelo FC del curso académico 2013-2014 y todos debían completarlos al terminar la visualización de cada vídeo tutorial.

➤ **Actividades de clase** (Anexo10): este instrumento se utilizó para que el alumno trabajara el contenido de la unidad en la hora de clase y realizase las etapas del nivel superior de la Taxonomía de Bloom (análisis, evaluación y creación). Nos permitió también poder comparar como trabajan los alumnos con cada tipo de actividad (en grupo, tutoría de iguales o individual). Las actividades se describen en el capítulo IV.

➤ **Prueba evaluativa final de la unidad** (Anexo 11): este instrumento lo utilizamos para conocer la situación final y saber si el alumno ha adquirido las competencias, conocimientos y habilidades esperadas. También nos permitirá comparar el trabajo de los estudiantes de la muestra con el de la población para ver si es representativa de la misma. La prueba consta de cuatro actividades que evalúan los objetivos de la unidad. La describiremos con mayor detalle en el capítulo V. Se realizaron dos modelos de prueba similares porque se pasó en diferentes horarios a cada sección. La prueba se diseñó en catalán por ser la lengua con la que se trabaja en el colegio. Esto no ha generado ninguna

dificultad pues, para que los alumnos no tuviesen dificultades en unidades posteriores, durante las clases se utilizaba las dos lenguas.

- **Filmaciones en audio y video:** con el permiso del colegio y familiares se registraron las sesiones post-clases de visualización del vídeo correspondiente a los alumnos de la muestra y algunas sesiones de clases. También utilizamos el programa “Camtasia Studio 8” para registrar lo que cada alumno hacía en su ordenador ya que la cámara no podía registrar a los ocho ordenadores al mismo tiempo. Estas grabaciones nos han permitido revisar algunos contenidos y reflexionar sobre los mismos.

- **Cuestionario final** (Anexo 8): este instrumento lo utilizamos para conocer la percepción de los alumnos de la muestra sobre el modelo utilizado y compararlo con la de la población. El cuestionario realizado en función de los objetivos planteados en nuestro estudio fue revisado por la metodóloga Marcela Ballabio de la Universidad de Cuyo de Mendoza, Argentina.

3.5.4. Procedimientos

Pasamos a describir las condiciones y cómo se realizó el proceso de recogida de datos y el análisis de los obtenidos.

3.5.4.1. Proceso de recogida de datos

El proceso de recogida de datos se realizó durante los meses de Enero y Febrero de 2014. Los ocho alumnos de la muestra, después de acabar su jornada académica, se quedaban en clase entre treinta y cuarenta y cinco minutos para visualizar el vídeo correspondiente, tomar apuntes con la plantilla de Cornell y contestar el cuestionario *online*. Los alumnos accedían al material a través de la web de matemáticas de bachillerato del colegio “trescomacatorze”, en la carpeta creada especialmente para el estudio, llamada “*Flipped Classroom*”. Estas sesiones fueron registradas con audio y vídeo, y con el programa Camtasia Estudio, para poder visualizar lo que cada alumno hacía en su ordenador. Los cuestionarios quedaron registrados en una base de datos y las plantillas de Cornell se recogieron al finalizar la unidad.

En clase, los alumnos trabajaban de forma individual, en parejas o en grupo, dependiendo de la actividad planteada. Se recogieron los dossiers de trabajo de cada alumno de la muestra al finalizar la unidad.

La prueba final de la unidad está diseñada para ser realizada en una sesión de clase, en unos 55 minutos. Aunque la prueba se pasó a toda la población, las de los alumnos de la muestra se recogieron aparte, con el fin de realizar su estudio evolutivo pormenorizado. Por último se pasó el cuestionario final en línea de valoración del modelo *Flipped Classroom*.

3.5.4.2. Tratamiento y análisis de los resultados

Para realizar el tratamiento de los diferentes resultados, su categorización y análisis, nos hemos basado en los referentes teóricos citados en el capítulo II.

En primer lugar mostraremos los criterios utilizados para el análisis cuantitativo de la prueba diagnóstica de álgebra y funciones, en segundo lugar presentamos el análisis descriptivo de dicha prueba, en tercer lugar mostraremos las categorías para el análisis cualitativo de los apuntes tomados con el método Cornell, en cuarto lugar mostraremos las categorías para el análisis de las actividades de clase, en el quinto las categorías utilizadas para la corrección de la prueba final y por último las categorías para el análisis cuantitativo del cuestionario final de la experiencia.

Pasamos pues a describir los criterios de categorización utilizados para cada instrumento:

➤ **Prueba diagnóstica de habilidades y destrezas algebraicas, y prueba sobre funciones**

Los criterios de categorización utilizados para el análisis de la prueba diagnóstica de álgebra y la prueba diagnóstica de funciones es el mismo que se utilizó para el análisis de los resultados de toda la población. No obstante, en este caso se añade un análisis cualitativo de las respuestas dadas por los alumnos en cada prueba.

➤ **Plantillas de Cornell**

Para el análisis cualitativo de los apuntes de los alumnos realizados en las plantillas de Cornell realizamos las siguientes categorías:

1.- En la comprensión (C), analizar si los alumnos reconocen las ideas dominantes del vídeo:	
C1	Mantiene la fidelidad al original que se abrevia, sin subjetivismo ni deformaciones. Es claro y concreto.
C2	Parece que no entiende completamente el contenido del vídeo y no expresa del todo bien las ideas principales. Poco claro y concreto.
C3	No entiende el contenido del vídeo. Coloca expresiones sin relación y textuales. Nada claro y concreto.
C4	En blanco.
2.- En la lectura (L): Analizar la legibilidad, claridad y referencia de las notas	
L1	Muy buena (explicita todas las ideas principales claramente y muestra las relaciones entre los temas, ejemplos, etc., mostrando jerarquías si es necesario).
L2	Buena (explica con claridad las ideas sobre el tema).
L3	Incompleta (explica algunas ideas).
L4	Errónea (explica ideas que no son las principales y/o no hay claridad en las notas).
L5	En blanco.
3.- En la expresión (E): analizar el lenguaje propio, la brevedad y la precisión. Así como también el uso de signos convencionales, gráficas, formas geométricas con palabras claves o frases.	
E1	Mixta (Utiliza una combinación de texto con símbolos y gráficas para tomar nota).
E2	Escrita (Utiliza sólo texto para sintetizar).
E3	Gráfica (Utiliza solamente un gráfico o dibujo como notas).
E4	En blanco (Deja el espacio, no toma apuntes.)
4.- En la columna de idea clave o pregunta (P): analizar el nivel de comprensión y síntesis sobre el tema trabajado.	
P1	Muy buena (realiza preguntas que pueden ser respondidas con las notas o luego en clase con el profesor, o coloca ideas claves que sintetizan el contenido de los apuntes).
P2	Buena (realiza una pregunta o palabra clave de síntesis del tema).
P3	Errónea (realiza preguntas que no tienen relación con el tema, o son muy obvias. O la palabra clave no se corresponde con el contenido del tema).
P4	En blanco (deja el espacio).
5.- En la columna de Síntesis o resumen (S): analizar la elaboración de una síntesis utilizando esquemas, cuadros sinópticos, tablas cronológicas (ayudan a recordar lo esencial).	
S1	Correcta (Hace una buena síntesis, utiliza esquemas, etc.).
S2	Parcial (Sólo consigue una síntesis parcial).
S3	Incorrecta (No relaciona los contenidos de los apuntes).
S4	En blanco (Deja la síntesis sin hacer).

Ilustración 3-38: Categorización de los apuntes realizados por los alumnos de la muestra
Fuente: Elaboración propia

Para poder añadir los resultados cualitativos de los apuntes tomados con la plantilla de Cornell a la evolución del aprendizaje de cada alumno realizamos la siguiente cuantificación de los resultados en función de categorías analizadas:

Puntuación numérica	Categorización cualitativa				
	Comprensión	Lectura	Expresión	Ideas Claves	Resumen
10	Las cinco categorías que obtuvo son de nivel 1				
9	Cuatro categorías son de nivel 1 y una de nivel 2				
8	Tres categorías son de nivel 1 y dos de nivel 2				
7	Dos categorías son de nivel 1 y tres de nivel 2				
6	Una categoría es de nivel 1 y el resto de nivel 2 o 3 (pudiendo haber una de nivel 4 o 5)				
5	Las categorías son de nivel 2 y/o 3				
4	Las categorías son de nivel 3 y/o 4				
3	Las categorías son de nivel 3, 4 y 5				
0-2	Las categorías son de nivel 4 y 5				

Ilustración 3-39: Equivalencia entre puntuación numérica y categorización de las actividades de clase

Fuente: Elaboración propia

➤ **Cuestionario online después de cada visualización de un vídeo tutorial**

Para el análisis cualitativo de los cuestionarios *online* (y registro de material audiovisual individualizado) realizados por los alumnos, realizamos las siguientes categorías:

- 1) Respecto a las tres primeras preguntas, nos basaremos en un estudio cualitativo fundamentado en la relación entre las dimensiones cognitivas y la taxonomía revisada de Bloom (Santiago, 2014) de las tres primeras etapas del aprendizaje, citadas en el marco referencial:

1.- Recordar (Re): analizar si el alumno recuerda y reconoce información e ideas además de principios aproximadamente en la misma forma en que los aprendió.	
Re1	Lee la pregunta, recuerda lo que ha visto en el vídeo tutorial y responde las preguntas sin problemas.
Re2	Lee la pregunta, duda y recurre a los apuntes.
Re3	Lee la pregunta, no recuerda nada y necesita volver a ver el vídeo para responderla.
2.- Comprender (Co): analizar si el alumno comprende, esclarece o interpreta la información en base al conocimiento previo.	
Co1	Entiende la pregunta y la responde bien.
Co2	Parece que no entiende completamente lo que plantea la pregunta y responde mal. O expone dudas en la pregunta 3.
3.- Aplicar (Ap): analizar si el alumno selecciona, transfiere y utiliza datos y principios para elaborar una pregunta interesante sobre el tema visto en el vídeo, aplicando los conceptos aprendidos.	
Ap1	Elabora una pregunta de aplicación de los conocimientos trabajados.
Ap2	Elabora una pregunta sobre dudas que le han quedado.
Ap3	Lo deja en blanco.

Ilustración 3-40: Categorización de las pregunta 3 del cuestionario sobre cada vídeo.

Fuente: Elaboración propia

Para poder añadir los resultados cualitativos de los cuestionarios a la evolución del aprendizaje de cada alumno, realizamos la siguiente cuantificación de los mismos, en función de los resultados de las 3 primeras etapas de la Taxonomía de Bloom:

Puntuación numérica	Categorización cualitativa		
	Recordar	Comprender	Aplicar
10	Re1	Co1	Ap1
9	Re1	Co1	Ap2
8	Re1	Co1	Ap3
	Re2	Co2	Ap1
7	Re1	Co2	Ap2
	Re2	Co1	Ap2
	Re2	Co2	Ap1
6	Re1	Co2	Ap3
	Re2	Co1	Ap3
5	Re2	Co2	Ap2
4	Re2	Co2	Ap3
3	Re2	Co3	Ap3
0-2	Re1	Co1	Ap1

Ilustración 3-41: Relación entre puntuación numérica y la categorización cualitativa

Fuente: Elaboración propia

- 2) Respecto a las preguntas sobre la experiencia de visualización del vídeo para el primer cuestionario, la categorización será:

1.- Se ha podido concentrar para ver el vídeo	
Si	
No	
2.- Causas de distracción	
Di1	Causas externas al alumno
Di2	Causas internas del alumno
3.- Número de veces que ha necesitado ver el vídeo para comprender el tema	
1	
2	
3	
4 o más	
4.- Utilización de las funciones de "pausa" y "retroceso"	
Si	
No	
5.- Dudas	
Du1	Dudas respecto al contenido.
Du2	Dudas respecto a la aplicación del concepto/s descripto/s.
Du3	No tiene dudas
6.- Tomar apuntes con la plantilla de Cornell	
Si	
No	
7.- Nivel de comprensión del tema con el vídeo tutorial	
1 y 2	Nivel de ausencia de comprensión. Reconoce el lenguaje pero no es capaz de ir al siguiente paso. Superficial. Le cuesta mucho seguir la explicación y comprender lo que se explica en el vídeo.
3	Nivel literal de comprensión del contenido del vídeo
4 y 5	Nivel simbólico de comprensión. Capta las ideas implícitas. Comprende todo con facilidad y en profundidad
7.- Nivel de comprensión de un tema en clase	
1 y 2	Nivel de ausencia de comprensión. Reconoce el lenguaje pero no es capaz de ir al siguiente paso. Superficial. Le cuesta mucho seguir la explicación y comprender lo que se explica en clase.
3	Nivel literal de comprensión del contenido de la clase.
4 y 5	Nivel simbólico de comprensión. Capta las ideas implícitas. Comprende todo con facilidad y en profundidad.
8.- Nota de matemáticas del primer trimestre	
Suspense	Nota comprendida entre el 0 y el 4,9
Suficiente	Nota comprendida entre el 5 y el 5,9
Bien	Nota comprendida entre el 6 y el 7,4
Notable	Nota comprendida entre el 7,4 y el 8,4
Excelente	Nota comprendida entre el 8,5 y el 10

Ilustración 3-42: Categorización de las preguntas de la visualización del Cuestionario 1.

Fuente: Elaboración propia

Respecto a las preguntas sobre la experiencia de visualización del vídeo para los cuestionarios del 2 al 8, la categorización será:

1.- Se ha podido concentrar para ver el vídeo	
Si	
No	
2.- Causas de distracción	
Di1	Causas externas al alumno
Di2	Causas internas del alumno
3.- Número de veces que ha necesitado ver el vídeo para comprender el tema	
1	
2	
3	
4 o más	
4.- Utilización de las funciones de "pausa" y "retroceso"	
Si	
No	
5.- Dudas	
Du1	Dudas respecto al contenido.
Du2	Dudas respecto a la aplicación del concepto/s descripto/s.
Du3	No tiene dudas.
6.- Tomar apuntes con la plantilla de Cornell	
Si	
No	
7.- Dificultades en el proceso	
Si	
No	
8.- Tipo de dificultad	
Di1	De comprensión del contenido.
Di2	De forma.
Di3	No ha tenido dificultad.
9.- Nivel de comprensión del tema con el vídeo tutorial	
1 y 2	Nivel de ausencia de comprensión. Reconoce el lenguaje pero no es capaz de pasar al siguiente paso. Comprensión Superficial. Le cuesta mucho seguir la explicación y comprender lo que se explica en clase.
3	Nivel literal de comprensión del contenido de la clase.
4 y 5	Nivel simbólico de comprensión. Capta las ideas implícitas. Comprende todo con facilidad y en profundidad.

Ilustración 3-43: Categorización de las preguntas de valoración de la visualización de los cuestionarios del 2 al 6.

Fuente: Elaboración propia

En los capítulos 6 y 7 de resultados las ilustraciones 3-42 y 3-43 las unificaremos en una única ilustración.

En lo referente a las preguntas sobre la experiencia de visualización del vídeo para el cuestionario 7, la categorización será:

1.- Respecto al formato del vídeo	
Fo1	Es mejor el formato con dos profesores visibles.
Fo2	Es mejor el formato con la voz en off del profesor.
2.- Causas de la elección Fo1	
Ca1	Mayor visualización del contenido.
Ca2	Menor índice de distracción.
Ca3	Se entiende mejor.
Causas de la elección Fo2	
Ca4	Se hace más entretenido.
Ca5	Se entiende mejor, explicación más pausada.
Ca6	Es más interactivo.
Ca7	Simula la clase: se parece más a la situación del aula.
Ca8	Se explica de dos formas distintas: diálogo y descripción escrita.
Ca9	Menor índice de distracción.
3.- Opinión sobre la posibilidad de visualizar a los profesores en el vídeo	
Positivo	
Negativo	
4.-Argumentación de la elección de “negativo”	
Arg1	Perjudica la concentración.
Arg2	El hábito de escuchar una única voz facilita la comprensión.
Argumentación de la elección de “positivo”	
Arg3	Se puede visualizar el contenido de dos maneras diferentes.
Arg4	La interacción entre los profesores simula el diálogo alumno-profesor y facilita la comprensión del tema.
Arg5	Incentiva más, el vídeo es más interesante.
Arg6	El lenguaje no verbal de los profesores complementa la explicación
Arg7	Diversidad de explicaciones
Arg8	La edición del vídeo es más compleja: doble contexto visual

Ilustración 3-44: Categorización de las preguntas de valoración de la visualización del Cuestionario 7.

Fuente: Elaboración propia

Respecto a las preguntas sobre la experiencia de visualización del vídeo para el cuestionario 8, la categorización será:

1.- Opinión sobre la posibilidad de visualizar a 2 profesores diferentes del vídeo anterior	
Positivo	
Negativo	
2.-Argumentación de la elección de “negativo”	
Arg1	Perjudica la concentración.
Arg2	El hábito de escuchar siempre a los mismos profesores facilita la comprensión.
Argumentación de la elección de “positivo”	
Arg3	Los dos profesores son conocidos (“es mi profe de clase”)
Arg4	Ir cambiando de profesor invitado hace que el vídeo sea más interesante.
Arg5	Para escuchar otra forma de explicar
Arg6	El diálogo es más entretenido

Ilustración 3-45: Categorización de las preguntas de valoración de la visualización del Cuestionario 8.

Fuente: Elaboración propia

En los capítulos 6 y 7 de resultados las ilustraciones 3-44 y 3-45 las unificaremos en una única ilustración.

➤ **Actividades de clase**

Para el análisis cualitativo de las actividades desarrolladas en clase (dossier de trabajo y registro de material audiovisual) aplicamos una categorización basada en la relación entre las dimensiones cognitivas y la taxonomía revisada de Bloom (Santiago, 2014), de las tres últimas etapas del aprendizaje citadas en el marco referencial (analizar, evaluar y crear).

1.- Analizar (An): analizar si el alumno descompone el conocimiento en sus partes y piensa en cómo estas se relacionan con su estructura global.	
An1	<ul style="list-style-type: none"> ➤ Comprende ciertos conceptos o principios y el porqué de ciertos procedimientos o demostraciones. ➤ Busca y descubre relaciones entre elementos de un problema. ➤ Resuelve problemas no rutinarios que no han sido estudiados antes.
An2	Tiene dudas y dificultades en el proceso de análisis del conocimiento y pide ayuda.
An3	No sabe cómo estructurar y organizar los conceptos, e integrarlos. Expresa que no sabe por dónde comenzar.
2.- Evaluar (Ev): analizar si el alumno hace juicios en base a criterios y estándares utilizando la comprobación y la crítica.	
Ev1	<ul style="list-style-type: none"> ➤ Participa en un grupo de redacción, y retroalimenta a los compañeros en cuanto a la organización y lógica de los argumentos. ➤ Anota las contradicciones que encuentra. ➤ Revisa el ejercicio para ver si se incluyeron todos los pasos necesarios. ➤ Critica una resolución si cree que no está bien. ➤ Prueba alternativas.
Ev2	Se muestra dudoso y tiene dificultades para colaborar y participar en la actividad, para juzgar los resultados y revisarlos. Pide ayuda a sus compañeros o al profesor.
Ev3	No realiza la actividad y deja que sus compañeros la resuelvan primero.
3.- Crear (Cr): Analizar la habilidad que permite reorganizar los elementos para formar un todo coherente y funcional; generar, planear o producir para reorganizar elementos en un nuevo patrón o estructura.	
Cr1	<p>Junta todos los elementos del proceso para hacer algo nuevo de forma coherente y funcional:</p> <ul style="list-style-type: none"> ➤ Genera y propone nuevas ideas, hipótesis o cuestiones. ➤ Planea y produce un nuevo ejemplo de la situación trabajada. ➤ Inventa o mejora la actividad
Cr2	Necesita ayuda para poder plantear una nueva situación, o inventar, o diseñar una nueva propuesta.
Cr3	No continúa. Considera que al acabar la actividad ya ha terminado su tarea.

Ilustración 3-46: Categorización de los apuntes realizados por los alumnos de la muestra.

Fuente: Elaboración propia

Para poder añadir los resultados cualitativos de las actividades a la evolución del aprendizaje de cada alumno realizamos la siguiente cuantificación de los resultados, en función de los resultados de las tres últimas etapas de la Taxonomía de Bloom:

Puntuación numérica	Categorización cualitativa		
	Analizar	Evaluar	Crear
10	An1	Ev1	Cr1
9	An1	Ev1	Cr2
8	An1	Ev1	Cr3
	An2	Ev2	Cr3
7	An1	Ev2	Cr2
	An2	Ev1	Cr2
	An2	Ev2	Cr1
6	An1	Ev2	Cr3
	An2	Ev1	Cr3
5	An2	Ev2	Cr2
4	An2	Ev2	Cr3
3	An2	Ev3	Cr3
0-2	An3	Ev3	Cr3

Ilustración 3-47: Equivalencia entre puntuación numérica y la categorización de las actividades de clase.

Fuente: Elaboración propia

➤ Prueba final de la unidad

La prueba evaluativa final de la unidad (Anexo 11) debía responder tanto a las características del trabajo realizado con el modelo FC, como a los objetivos propuestos en el Currículo de Matemáticas de primero de bachillerato. Por tanto se optó por un análisis cualitativo, viendo las argumentaciones que dan los alumnos de la muestra, así como la corrección o incorrección de cada respuesta, teniendo presentes los objetivos de la unidad:

1. Conocer el concepto de función y expresarla de diferentes formas.
2. Reconocer las funciones reales de variable real, su dominio e imagen.
3. Operar con funciones.
4. Realizar composición de funciones y comprobar las propiedades que verifica esta operación.
5. Conocer el concepto de función inversa de una función y aplicar un proceso para obtenerla.
6. Saber reconocer las propiedades globales de una función.

No obstante, para poder añadir los resultados cualitativos de los cuatro ejercicios que componen la prueba final a la evolución del aprendizaje de cada alumno realizamos la cuantificación que muestra la ilustración 3-48, teniendo presente que cada ejercicio tiene una valoración comprendida entre 0 y 2,5 puntos:

Nº ejercicio	Objetivos evaluados	Codificación del ejercicio	Puntuación
Ejercicio 1	<ul style="list-style-type: none"> • Reconocer las funciones reales de variable real, su dominio e imagen. • Operar con funciones. • Conocer el concepto de función inversa de una función y aplicar un proceso para obtenerla. 	Encuentra la función resultante de dividir $f(x)$ entre $g(x)$	0,5
		Encuentra analíticamente el dominio de la función	0,75
		Obtiene la función inversa	0,75
		Encuentra el dominio de la función inversa para hallar la imagen de la función	0,5
Ejercicio 2	<ul style="list-style-type: none"> • Saber reconocer las propiedades globales de una función: simetría (visual y analítica-mente) 	Estudia la simetría (par e impar) analíticamente de la función $f(x)$	1,25
		Estudia la simetría (par e impar) visualmente de la gráfica de la función $g(x)$	1,25
Ejercicio 3	<ul style="list-style-type: none"> • Realizar composición de funciones y comprobar las propiedades que verifica esta operación. 	Expresa el número de habitantes en función del tiempo	1
		Encuentra el número de habitantes en ese instante	0,75
		Encuentra el número de habitantes transcurrido una año y seis meses	0,75
Ejercicio 4	<ul style="list-style-type: none"> • Reconocer las funciones reales de variable real, su dominio e imagen. • Saber reconocer las propiedades globales de una función 	Identifica el dominio e imagen de la función.	0,5
		Identifica la simetría, continuidad y periodicidad de la función.	0,5
		Identifica las asíntotas de la función.	0,5
		Identifica la monotonía, máximos y mínimos de la función.	0,5
		Identifica la curvatura y puntos de inflexión de la función.	0,5

Ilustración 3-48: Categorización numérica de la prueba final de la unidad.

Fuente: Elaboración propia

➤ **Cuestionario final**

Para valorar la percepción de los alumnos de la muestra respecto a la implementación del modelo FC en clase y la experiencia vivida, se utilizó la misma categorización que en el análisis cuantitativo del cuestionario final que se describe en el siguiente apartado.

3.6. FASE 2.2: Valoración de la percepción de los alumnos y docentes respecto al modelo de enseñanza “Flipped Classroom”

3.6.1. Metodología

En la fase 2.2, el objetivo que pretendemos resolver es el de:

- O8. Conocer la opinión de los alumnos y de los profesores que participan en la implantación del modelo de enseñanza “Flipped Classroom” en el aula de primero de bachillerato, sobre los recursos utilizados y el modelo en sí, como método de aprendizaje del álgebra.

Por este motivo el tipo de análisis que hemos seguido para conocer la percepción y valoración de los alumnos del modelo de aprendizaje FC implementado, ha sido del tipo cuantitativo descriptivo simple, dadas las circunstancias del planteamiento de estudio y el enunciado de preguntas e hipótesis que se pretende resolver.

Para el estudio de la percepción de los profesores sobre las clases con el modelo de aprendizaje FC implementado, se ha realizado un estudio cualitativo de los cuestionarios finales de cada clase.

3.6.2. Contexto y población de estudio

El cuestionario para los alumnos (Anexo 8) se pasó a los 149 alumnos del curso 2013-2014 que participaron en la experiencia de clase con el modelo FC, entre ellos los 8 alumnos de la muestra.

Los criterios utilizados para la selección de la población han sido el de haber participado en las clases con el modelo FC en la unidad de funciones durante el curso académico 2013-2014.

Curso y sección	Modalidad	Cantidad de alumnos	
		2013-2014	Alumnos de la muestra (estudio de casos) 2013-2014
1º Bach - A	Ciencias Sociales	20	
1º Bach - B	Ciencias Sociales	14	
1º Bach - C	Ciencias Sociales	30	4
1º Bach - D	Científico-Tecnológico	30	4
1º Bach - E	Científico-Tecnológico	28	
1ºBach - F	Científico-Tecnológico	27	
Total		149	

Ilustración 3-49: Población de la fase 2.2 de la investigación.

Fuente: Elaboración propia

Respecto a los cuestionarios para los profesores, se cumplimentaron en línea (“online”) al finalizar cada clase. Participaron 5 profesores en total, según se describe en la siguiente tabla:

Curso y sección	Modalidad	Profesor
1º Bach - A	Ciencias Sociales	Profesor P
1º Bach - B	Ciencias Sociales	Profesor M
1º Bach - C	Ciencias Sociales	Profesor F
1º Bach - D	Científico-Tecnológico	Profesor F
1º Bach - E	Científico-Tecnológico	Profesor H
1ºBach - F	Científico-Tecnológico	Profesor R
Total		5 profesores

Ilustración 3-50: Población de profesores de la fase 2.2 de la investigación.

Fuente: Elaboración propia

Los criterios utilizados para escoger a los profesores fueron:

- Que fuesen profesores de matemáticas de primero de bachillerato del colegio donde se realizó el estudio;
- Que estuviesen dispuestos a participar en la experiencia de la investigación, ya que esto implicaba entre otras muchas cuestiones, realizar las clases de forma distinta a la acostumbrada, utilizar las TIC, responder los cuestionarios diarios, cierta flexibilidad y apertura a nuevas formas de trabajo en el aula, etc.

3.6.3. Instrumentos

Para poder conocer la valoración, tanto de los alumnos como de los profesores que participaron en el estudio sobre el modelo FC como un modelo de aprendizaje, se utilizaron dos instrumentos: El Cuestionario Final para alumnos y los Cuestionarios diarios sobre las clases para los docentes.

3.6.3.1. Cuestionario para los alumnos

El cuestionario final de valoración se realizó en línea (*online*) al finalizar la unidad después de haber realizado la prueba final de contenidos. La finalidad del cuestionario era comprobar si la experiencia logró que se cumpliesen los objetivos propuestos en el estudio:

Objetivos de la investigación	Ítem del cuestionario
O2. Trazar lineamientos perspectivas para la utilización de las TIC en el proceso de enseñanza-aprendizaje de la matemática en aulas heterogéneas en primero de bachillerato, a partir de los diferentes tipos de recursos que permiten el uso de la computación como medio de enseñanza en este proceso.	Ítem 1
O3. Diseñar entornos de evaluación sobre el razonamiento inductivo y deductivo del álgebra vía <i>online</i> con alumnos diversos que nos permitan conocer las dificultades que tienen en su aprendizaje.	Ítem 1.2
O4. Confeccionar unidades de trabajo en formato video tutorial que potencien las habilidades y destrezas relacionadas con el contexto algebraico de los alumnos de primero de bachillerato.	Ítem 1.1
O5. Programar la unidad de "Funciones" donde utilicemos el método de " <i>Flipped Classroom</i> " en clase de matemáticas para trabajarlo con los alumnos.	Ítem 2 y 3

Ilustración 3-51: Correspondencia entre los objetivos de la investigación y los ítems del cuestionario final para los alumnos.

Fuente: Elaboración propia

3.6.3.2. Cuestionario para los docentes

Los profesores respondieron ocho cuestionarios (Anexo 9), uno por cada clase. Dichos cuestionarios constaban de cuatro preguntas abiertas respecto a aspectos positivos y negativos (o dificultades) que hayan expresado los alumnos respecto al trabajo en casa (visualización del vídeo, cuestionario de autoevaluación o apuntes); y por otro lado a los aspectos positivos y negativos del desarrollo de la actividad de clase, con la opción de poder hacer sugerencias.

3.6.4. Tratamiento y análisis de los resultados

Para realizar el tratamiento de los diferentes resultados, su categorización y análisis, nos hemos basado en los referentes teóricos citados en el capítulo 2.

Para realizar el análisis cuantitativo del Cuestionario Final para los alumnos hemos utilizado la herramienta estadística de análisis descriptivo de “google drive”. Hemos realizado un análisis de frecuencias de los resultados de cada ítem para conocer la distribución de las valoraciones que se han obtenido en cada pregunta.

En el caso del tratamiento de los datos obtenidos en los cuestionarios para los profesores también se ha realizado un estudio cualitativo de las respuestas. La categorización utilizada para el análisis de dichas respuestas es:

1.- Vídeos tutoriales (Vi): analizar el tipo de observaciones que realiza el profesor sobre los vídeos tutoriales.	
Vi1	Respecto a la logística que el alumno necesita para la visualización.
Vi2	Respecto a la edición.
Vi3	Respecto al contenido.
2.- Formularios (Fo): analizar el tipo de observaciones que realiza el profesor sobre los cuestionarios de autoevaluación.	
Fo1	Respecto a la logística que el alumno necesita para completar el cuestionario.
Fo2	Respecto a la forma, edición, etc.
Fo3	Respecto al contenido.
3.- Apuntes de Cornell (Ap): analizar el tipo de observaciones que realiza el profesor sobre los apuntes de Cornell.	
Ap1	Respecto a la utilización.
Ap2	Respecto al contenido.
4.- Estructura de la clase (Es): analizar el tipo de observaciones que realiza el profesor sobre la estructura de la clase.	
Es1	Respecto a la organización.
Es2	Respecto al desarrollo.
Es3	Respecto a los materiales.
5.- Actividad del día (Ac): analizar el tipo de observaciones que realiza el profesor sobre la actividad de clase.	
Ac1	Respecto al desarrollo.
Ac2	Respecto a los materiales.
Ac3	Respecto al contenido.
6.- Método de clase (Me): analizar el tipo de observaciones que realiza el profesor sobre la metodología utilizada en clase.	
Me1	Respecto al método de trabajo cooperativo.
Me2	Respecto al método de trabajo de tutoría de iguales.
Me3	Respecto al método de trabajo individual.

Ilustración 3-52: Categorización de los resultados de los cuestionarios de los profesores que participaron en la investigación

Fuente: Elaboración propia

3.7. RESUMEN

En este capítulo hemos expuesto la metodología utilizada en cada una de las fases de la investigación, la temporización y la cronología del estudio. Asimismo se han descrito los instrumentos y los criterios empleados en el diseño de las distintas pruebas: las pruebas diagnósticas, las de evolución del aprendizaje y la de percepción del modelo FC utilizado, según los objetivos de cada una de las fases. En cada fase también hemos dado a conocer la población y los criterios de selección de la misma, y a sus integrantes, así como también el proceso de recogida de datos, las categorías y códigos utilizados en las distintas pruebas para poder realizar los diferentes análisis de los resultados.

En la primera fase, se ha descrito el estudio cuantitativo realizado con las pruebas diagnósticas iniciales de álgebra y funciones, y en la segunda fase hemos mostrado, en primer lugar el análisis cualitativo de estudio de casos sobre la respuesta de los alumnos con el modelo de aprendizaje FC, y en segundo lugar el estudio mixto sobre la percepción del modelo FC de los alumnos de la población (cuantitativo) y de los docentes sobre el mismo (cualitativo).

4. DISEÑO E IMPLEMENTACIÓN DEL MODELO DE ENSEÑANZA “FLIPPED CLASSROOM” EN EL AULA

4. DISEÑO E IMPLEMENTACIÓN DEL MODELO DE ENSEÑANZA “FLIPPED CLASSROOM” EN EL AULA	141
4.1. <u>PRESENTACIÓN</u>	145
4.2. <u>DISEÑO DEL MATERIAL</u>	146
4.2.1. Material para los profesores	146
4.2.1.1. Web	146
4.2.1.2. Vídeo de presentación del modelo	149
4.2.1.3. Guías para del docente sobre la implementación del modelo FC	150
4.2.1.4. Actividades de clase	157
4.2.1.5. Formularios de valoración de la clase	160
4.2.2. Material para los alumnos	160
4.2.2.1. Web	161
4.2.2.2. Guía de actuación	162
4.2.2.3. Vídeos tutoriales	162
4.2.2.4. Plantilla de Cornell para tomar apuntes	169
4.2.2.5. Cuestionarios sobre la observación	170
4.2.2.6. Actividades de clase con soluciones	171
4.2.2.7. Material de ayuda extra	172
4.2.2.8. Prueba de conocimientos y competencias adquiridas	172
4.3. <u>CONTENIDOS MATEMÁTICOS DE LA UNIDAD TRABAJADA CON FC</u>	174
4.4. <u>IMPLEMENTACIÓN DEL MODELO FC EN LA CLASE</u>	175
4.4.1. Proceso de implementación del Modelo FC en el aula para el docente	175
4.4.2. Proceso de implementación del Modelo FC en el aula para el alumno	177
4.5. <u>RESUMEN</u>	179

4.1. PRESENTACIÓN

Esta investigación nos ha permitido comprobar las dificultades con que se encuentran los profesores de matemáticas de Educación Secundaria para dedicar tiempo a generar nuevos materiales y pensar nuevas propuestas didácticas. Por otra parte, hemos visto que el uso de las TIC nos permite crear entornos donde el alumno tiene la posibilidad de personalizar su aprendizaje. Por ello, consideramos necesario describir el proceso de diseño del material e implementación del modelo FC en el aula que realizamos en nuestra investigación, con el fin de ponerlo al alcance de los docentes y facilitar su implementación.

4.2. DISEÑO DEL MATERIAL

Para implementar el modelo FC en el aula tuvimos necesidad de generar distintos materiales, tanto para el alumno como para el profesor.

4.2.1. Material para los profesores

En un primer momento realizamos una reunión con los profesores que participan de la experiencia; en ella les dimos a conocer en qué consistía el estudio con la ayuda de una presentación de PowerPoint, y cuál era el papel que iban a jugar ellos en el mismo. En segundo lugar les mostramos y facilitamos los diversos materiales elaborados para acompañarlos en el proceso, materiales que describimos a continuación.

4.2.1.1. Web



Il·lustració 4-1: Web para profesores "Flipped Classroom"
Fuente: <https://sites.google.com/a/fje.edu/flipped-classroom/>

Instalamos el web "FLIPPED CLASSROOM" dentro del portal del colegio (Ilustración 4-1). Allí los profesores podían acceder al material necesario para desarrollar las clases:

- la guía para el docente,
- la guía del desarrollo de cada actividad de clase,
- las actividades de clase con soluciones
- un cuestionario para responder al finalizar cada clase.

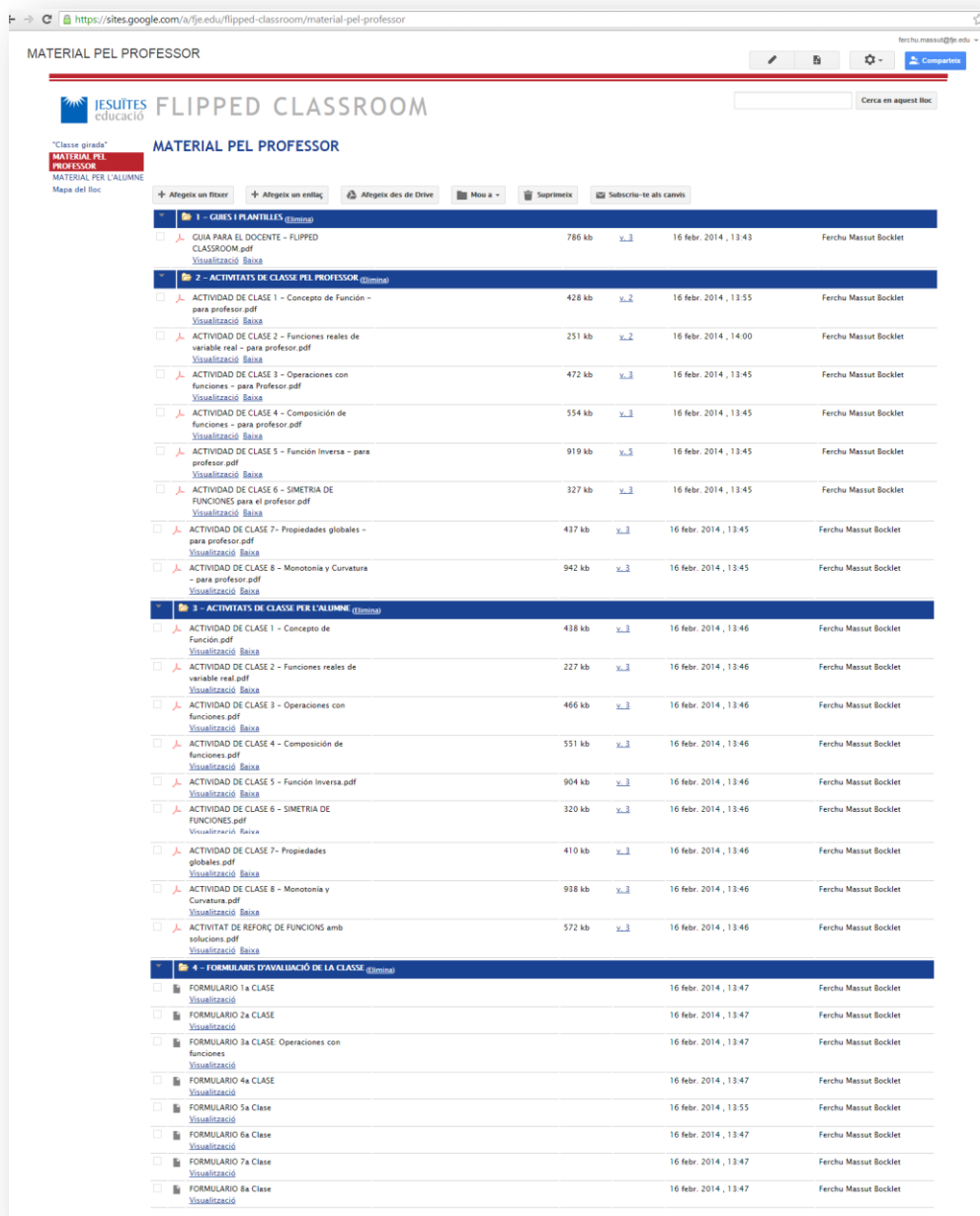


Ilustración 4-2: Material para el profesor en el Web para profesores “Flipped Classroom”
 Fuente: <https://sites.google.com/a/fje.edu/flipped-classroom/>

En el mismo web, los profesores también tienen acceso al material que van a usar los alumnos:

- guía para el alumno,
- plantilla de Cornell,
- vídeos tutoriales,
- cuestionarios,
- actividades con las soluciones.

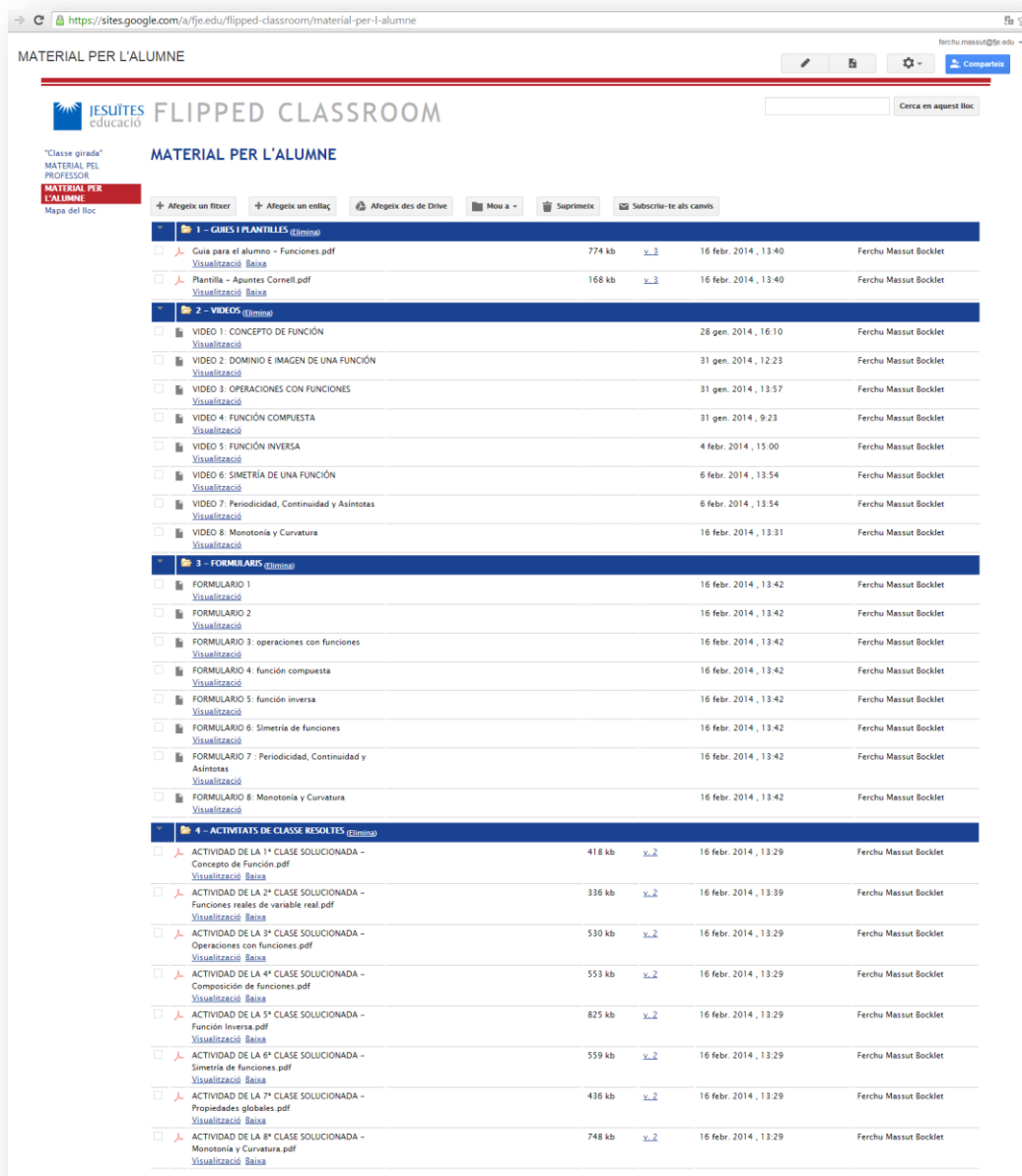


Ilustración 4-3: Material para el alumno en el Web para profesores “Flipped Classroom”

Fuente: <https://sites.google.com/a/fje.edu/flipped-classroom/>

El idioma utilizado en el web es el catalán pues es ésta la lengua oficial de la escuela, no obstante el material anexo de referencia está en español por ser el idioma utilizado en la investigación.

4.2.1.2. Vídeo de presentación del modelo

Para que el profesor pudiese presentar el modelo FC a los alumnos en la primera clase y que ellos se pudiesen hacer una primera idea de en qué consiste, se realizó un vídeo con la aplicación POWTOON¹¹.



Ilustración 4-4: Secuencia extraída del vídeo de presentación del modelo FC elaborado con Powtoon

Fuente: <https://www.youtube.com/watch?v=QYacheODNUw>

En su inicio el vídeo realiza una comparación entre una clase tradicional pasiva en la que surgen problemas cuando los alumnos tienen dudas versus una clase activa con el modelo FC, donde se muestra que los alumnos ven en casa vídeos tutoriales de conceptos y teóricos, y en clase realizan actividades en grupo, en parejas o individualmente. De esta manera el profesor puede acercarse para ver las dudas e identificar de forma directa las dificultades que tiene. El

¹¹Disponible en <http://www.powtoon.com/>

vídeo también hace hincapié en las ventajas de la metodología al convertirse la clase en un espacio activo y de diálogo.

4.2.1.3. Guías para del docente sobre la implementación del modelo FC

Entre los materiales diseñados para esta implementación, encontramos dos guías para el docente:

- **Guía para las pruebas diagnósticas de álgebra y funciones** (Anexo 4): donde aparecen las indicaciones para realizar las pruebas diagnósticas (Anexo 2).
- **Guía sobre la implementación del modelo FC**: donde se muestra con detalle cada cuestión referente a la implementación del modelo y las pautas a seguir: definición del modelo, materiales necesarios, organización de la unidad, pautas para la visualización de los vídeos tutoriales, la utilización de la plantilla de Cornell, el formato de las clases y observaciones sobre la nota académica de cada alumno.

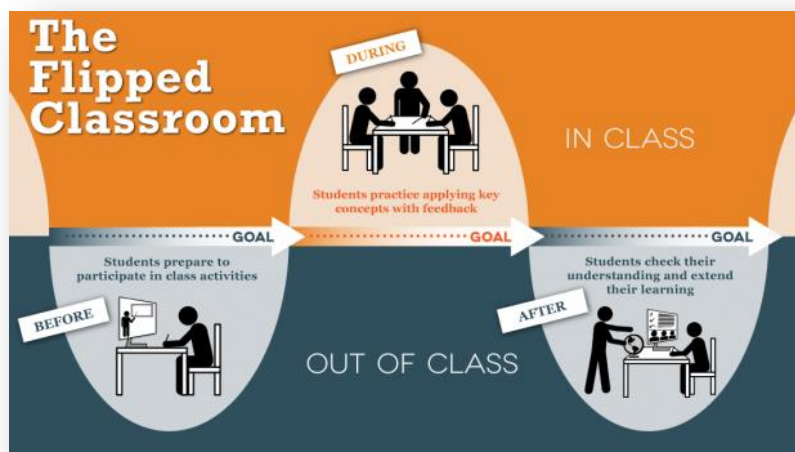
GUIA PARA EL DOCENTE: UNIDAD DE FUNCIONES

1) **PASAR LAS PRUEBAS DIAGNÓSTICAS** (ver guía en la carpeta con las pruebas)

2) **COMENTAR CON LOS ALUMNOS LA METODOLOGÍA DE FLIPPED CLASSROOM**

Entregar a los alumnos “la guía introductoria y organizacional” y comentarla.
En la estructura tradicional de clases, durante el tiempo en que los alumnos están en el aula, especialmente en los niveles superiores de secundaria y en enseñanza superior, los profesores nos dedicamos a explicar la materia y a acercarlos a las ideas fundamentales de cada unidad didáctica, mientras que las tareas se hacen en casa.

Bajo la estructura que propone “**FLIPPED CLASSROOM**” (girar el aula, o la clase de revés), es precisamente al contrario: **en casa los alumnos acceden a los contenidos a través de videos tutoriales mientras que las tareas se desarrollan en el aula.**



Fuente: <http://ctl.utexas.edu/teaching/flipping-a-class>

Probablemente el cambio más importante que conlleva esta metodología, consiste en una repartición distinta de las responsabilidades del aprendizaje, que recaen más claramente en quien aprende. Los alumnos son el agente más activo, no tan solo en lo que refiere a obligaciones, sino también en cuanto a sus derechos. Ellos son los que eligen el ritmo, el momento y el modo en el que realizar el aprendizaje. Eso nos deja a los profesores con un papel de guías o asistentes de ese proceso que estarán llevando a cabo.

Para que esto sea posible, les facilitaremos materiales audiovisuales (vídeos), de una duración no superior a doce minutos a través de los cuales se presenta la unidad, las principales ideas o los conceptos fundamentales.

Bajo el modelo de la “clase del revés” no se llevarán problemas a casa, sino **conocimiento**, y esta situación permitirá que quede libre el tiempo del aula para que cada uno de los alumnos, con nuestra ayuda y la del resto de sus compañeros, pueda trabajar sobre las tareas de la unidad.

De este modo los profesores dispondremos de más tiempo en el aula para trabajar con cada uno, conocer mejor sus necesidades y sus avances. Ellos por su parte tendrán oportunidad de hacer preguntas y resolver problemas con nuestra guía, la de sus padres y la del resto de compañeros, de modo que se favorece la creación de un ambiente de aprendizaje colaborativo.

Al comentar con los alumnos la metodología a emplear en esta unidad deben quedar claros los siguientes puntos:

- 1- La metodología del **Flipped Classroom**, consiste en “girar el aula”, de tal forma que **en casa verán el video** con la materia del tema correspondiente y **en clase realizarán actividades** de aplicación y asimilación.
- 2- Los materiales necesarios se encuentran en
 (Para Matemáticas aplicadas a las ciencias sociales)
“trescomacatorze” → 1r BatxilleratCS → 8-Flipped Classroom

 (Para Matemáticas del científico-tecnológico)
“trescomacatorze” → 1r BatxilleratCiT → 8-Flipped Classroom
- 3- El desarrollo de la unidad será:

ORGANIZACIÓN DE LA UNIDAD

1) **PRUEBAS DIAGNÓSTICAS:** se realizarán 2 pruebas diagnósticas para conocer el nivel de habilidades algebraicas, lenguaje y razonamiento de los alumnos.

2) **TRABAJO EN CASA Y CLASES:**

Tema 1: Concepto de Función

- **Contenidos:** Correspondencia y función; Formas de expresar una función: enunciado verbal, tabla de valores, gráfica y fórmula matemática.
- **Objetivo:** Conocer el concepto de función y expresarla de diferentes formas.
- **Referencias:** Video 1; Libro: 7.1; Hoja de trabajo: Funciones 1.
- **Actividades requeridas:**
 - 1- **EN CASA:**
 - 1) Ver el VIDEO 1,
 - 2) pensar y apuntar en la libreta una pregunta acerca del video para comentar en clase
 - 3) y responder el formulario 1
 - 2- **EN CLASE:** Realizar la actividad “funciones 1” en clase.

Tema 2: Funciones reales de variable real

- **Contenidos:** Variable independiente y dependiente; Dominio e Imagen de una función.
- **Objetivo:** Reconocer las funciones reales de variable real, su dominio e imagen.
- **Referencias:** Video 2; Libro: 7.2; Hoja de trabajo: Funciones 2.
- **Actividades requeridas:**
 - 1- **EN CASA:**
 - 1) Ver el VIDEO 2,
 - 2) pensar y apuntar en la libreta una pregunta acerca del video para comentar en clase
 - 3) y responder el formulario 2
 - 2- **EN CLASE:** Realizar la actividad “funciones 2” en clase

Tema 3: Operaciones con funciones

- **Contenidos:** Suma, resta, producto y división de funciones.
- **Objetivo:** Operar con funciones.
- **Referencias:** Video 3; Libro: 7.3; Hoja de trabajo: Funciones 3.
- **Actividades requeridas:**
 - 1- **EN CASA:**
 - 1) Ver el VIDEO 3,
 - 2) pensar y apuntar en la libreta una pregunta acerca del video para comentar en clase
 - 3) y responder el formulario 3
 - 2- **EN CLASE:** Realizar la actividad “funciones 3” en clase

Tema 4: Función compuesta

- **Contenidos:** Definición; Dominio de una función compuesta.
- **Objetivo:** Realizar composición de funciones y comprobar las propiedades que verifica esta operación.
- **Referencias:** Video 4; Libro: 7.4; Hoja de trabajo: Funciones 4.
- **Actividades requeridas:**

1- EN CASA:

- 1) Ver el VIDEO 4,
- 2) pensar y apuntar en la libreta una pregunta acerca del video para comentar en clase
- 3) y responder el formulario 4

2- EN CLASE: Realizar la actividad “funciones 4” en clase**Tema 5: Función inversa de una función**

- **Contenidos:** Concepto de función inversa; Obtención de la función inversa.
- **Objetivo:** Conocer el concepto de función inversa de una función y aplicar un proceso para obtenerla.
- **Referencias:** Video 5; Libro: 7.5; Hoja de trabajo: Funciones 5.
- **Actividades requeridas:**

1- EN CASA:

- 1) Ver el VIDEO 5,
- 2) pensar y apuntar en la libreta una pregunta acerca del video para comentar en clase
- 3) y responder el formulario 5

2- EN CLASE: Realizar la actividad “funciones 5” en clase**Tema 6: Propiedades globales de una función**

- **Contenidos:** Simetría; Periodicidad; Continuidad; Asíntotas; Monotonía y Máximos y mínimos relativos; Curvatura y puntos de inflexión.
- **Objetivos:**
 - Diferenciar los dos tipos de simetría que pueden presentar las funciones diferenciando entre las funciones pares e impares algebraica y gráficamente.
 - Definir función periódica reconociendo el significado de periodo e identificar la representación gráfica de este tipo de funciones.
 - Reconocer la existencia de continuidad o de discontinuidades en la representación gráfica de una función.
 - Estudiar la presencia de asíntotas en la representación gráfica de una función aplicando la definición.
 - Analizar la monotonía de una función diferenciando entre funciones crecientes, decrecientes y constantes en un intervalo.
 - Deducir la existencia de máximos y mínimos relativos analizando la representación gráfica de una función.
 - Diferenciar entre intervalos en los que la función es cóncava e intervalos en los que la función es convexa.
 - Localizar los posibles puntos de inflexión de una función analizando su representación gráfica.

- **Referencias:** Video 6, 7 y 8; Libro: 7.6; Hoja de trabajo: Funciones 6, Funciones 7 y Funciones 8.

- **Actividades requeridas:**

1- EN CASA:

- 1) Ver el VIDEO 6,
- 2) pensar y apuntar en la libreta una pregunta acerca del video para comentar en clase
- 3) y responder el formulario 6

2- EN CLASE: Realizar la actividad “funciones 6” en clase.

3- EN CASA:

- 1) Ver el VIDEO 7,
- 2) pensar y apuntar en la libreta una pregunta acerca del video para comentar en clase
- 3) y responder el formulario 7.

4- EN CLASE: Realizar la actividad “funciones 7” en clase**5- EN CASA:**

- 1º - Ver el VIDEO 8,
- 2º- pensar y apuntar en la libreta una pregunta acerca del video para comentar en clase
- 3º - y responder el formulario 8

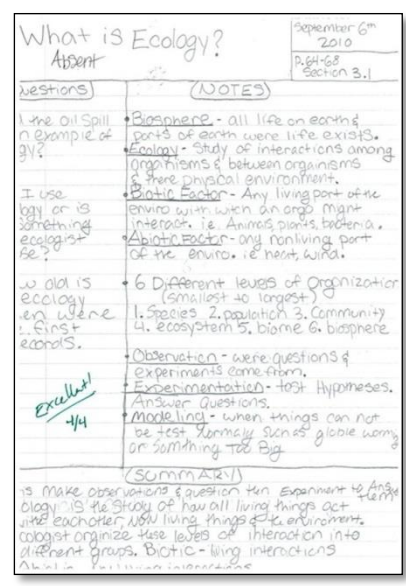
6- EN CLASE: Realizar la actividad “funciones 8” en clase

- 3) Realización de los ejercicios de autoevaluación del libro en casa**
- 4) Clase de repaso y dudas**
- 5) Prueba de contenidos**

3-ENSEÑAR A LOS ALUMNOS CÓMO VER E INTERACTUAR CON LOS VIDEOS

Un primer paso esencial es enseñar a los alumnos cómo ver los videos. El proceso es similar a enseñar a los alumnos cómo leer y usar un libro de texto. **Mirar un video educativo no es como ver una película de entretenimiento o un programa de TV.**

- 1) Estos **videos instructivos** se deben ver más bien en el sentido en el que leería un libro formativo, en oposición a un libro de ficción.
- 2) Alentar a los alumnos a que eliminen las **distracciones**: buscar un sitio donde puedan concentrarse y no sean interrumpidos durante esos minutos.
- 3) No tener el móvil cerca, de tal forma que los mensajes puedan interrumpir la visión y desconcentrarlos.
- 4) Cerrar las páginas webs que no sean necesarias (*Facebook, Hotmail, etc.*)
- 5) No tener encendido el iPod en la oreja, sino **utilizar los auriculares para conectarlos al ordenador** y escuchar el video. Esto facilitará la concentración.
- 6) Tienen total libertad de la utilización de los botones de Pausa y Retroceder para que puedan tomar nota de los puntos clave de cada lección.
- 7) También se les enseñan habilidades efectivas de **tomar notas**. Hay muchas maneras interesantes de tomar notas, pero utilizaremos el **método Cornell**. La plantilla para Notas de Cornell consiste en dividir la hoja en tres áreas como muestra la imagen. Esta plantilla para Notas de Cornell utiliza un sistema que no sólo sirve para escribir puntos claves sino también para hacer preguntas y resumir lo que han aprendido. (Los alumnos tienen la plantilla junto con las indicaciones de observación de los videos). **Podéis utilizar para tener notas de proceso las 8 plantillas realizadas por cada alumno.**

<h3 style="text-align: center;">Ideas</h3> <ul style="list-style-type: none"> * Preguntas sobre el texto * Puntos e ideas importantes * Diagramas simples <p style="text-align: center; margin-top: 20px;">CUANDO</p> <p style="text-align: center;">Después de la visualización del video</p>	<h3 style="text-align: center;">Notas de clase</h3> <p>Aquí se toma nota de todo lo que se dice durante el video. Puede incluir</p> <ul style="list-style-type: none"> * Transcripciones * Diagramas * Listas * Apuntes de todo tipo <p style="text-align: center; margin-top: 20px;">CUANDO</p> <p style="text-align: center;">Durante la visualización del video</p>	<p>Por ejemplo</p>  <p>The image shows a handwritten Cornell note page titled 'What is Ecology?'. It is dated 'September 6th 2010' and 'Page 68 Section 3.1'. The page is divided into three columns: 'Questions', 'Notes', and 'Summary'. Under 'Questions', there are questions like 'What is an oil spill? an example of an ecosystem?' and 'I use the word ecology in what way?'. Under 'Notes', there are definitions for 'Biosphere', 'Ecology', 'Biotic Factor', and 'Abiotic Factor', and a list of '6 Different levels of Organization'. Under 'Summary', there is a definition of ecology and a list of '3 ways to study ecology'. There is a handwritten 'Excellent!' and '-1/4' in the left margin.</p>
<h3 style="text-align: center;">Resumen</h3> <p style="text-align: center;">CUANDO</p> <p style="text-align: center;">durante un repaso</p>		<p>Un breve resumen del texto escrito arriba, útil como referencia rápida</p>
<p>Fuente: http://www.como-estudiar.com/2012/07/como-estudiar-mejor-rapido-metodo-cornell.html</p> <p>Fuente: http://canasto.es/2011/10/tomar-notas-con-el-metodo-cornell/</p>		

8) **Les pedimos que apunten preguntas interesantes:** Para comprobar si los alumnos han visto o no uno de los videos, nos tienen que hacer preguntas interesantes durante los primeros 10 minutos de clase. La pregunta debe estar relacionada con el video y el alumno no debe conocer la respuesta a la misma. Esta interacción con los alumnos son algunos de los momentos más enriquecedores que se experimentan en la clase. Las preguntas las hacen los alumnos ya sea a título individual o en pequeños grupos. Cada alumno debe hacer al menos una pregunta por video. Durante este tiempo de preguntas-y-respuestas, los alumnos pueden hacernos preguntas de las cuales no sabemos la respuesta, entonces debemos trabajar de forma conjunta en la búsqueda de la respuesta. **Las preguntas que hacen los alumnos a menudo revelan sus conceptos erróneos y nos informa a nosotros sobre qué es lo que no hemos enseñado claramente.** Durante el tiempo de clase podemos resolver estos conceptos erróneos, y tomar nota o correcciones para nuestros futuros videos, para prevenir la aparición de nuevas ideas erróneas. **Cada estudiante debe hacer al menos una pregunta acerca de cada video.** Esto es especialmente valioso para los alumnos que generalmente no interactúan con el profesor. En el modelo de “sentarse y recibir”, una minoría de alumnos hace la mayoría de las preguntas. Los alumnos que hacen preguntas son normalmente más abiertos y seguros. Los alumnos callados, introspectivos, suelen tener en mente las mismas preguntas, pero raramente se los escucha en el modelo tradicional. En el modelo de “Flipped Classroom” todos los alumnos deben hacer preguntas.

4 - FORMATO DE LAS CLASES

- 1) Se puede realizar alguna actividad de motivación (problema de pensamiento lateral, acertijo, etc.).
- 2) Después se dedican **algunos minutos (10 o 15) a discutir sobre el video que vieron la noche anterior.** Esto nos permite aclarar conceptos que se hayan entendido de forma

errónea antes de que los apliquen incorrectamente en la práctica.

- 3) Después de la respuesta inicial a las preguntas formuladas, entregamos a los alumnos la **actividad del día** poniendo manos a la obra y/o dejar tiempo a la resolución de problemas (ver tabla).

Tabla: Comparación del Tiempo en la Clase Tradicional versus la Clase Girada.

Clase Tradicional		Clase Girada	
Actividad	Tiempo	Actividad	Tiempo
Actividad de motivación	5 min.	Actividad de motivación	5 min.
Ver las tareas de la noche anterior	15-20 min.	Preguntas sobre los videos	10 min.
Lectura del nuevo contenido	15 min.	Práctica guiada e independiente y/o actividad	40 min.
Práctica guiada e independiente y/o actividad	15-20 min		

Fuente: Bergmann, J.; Sams, A. . (2012). *Flip Your Classroom: Reach Every Student in Every Class Every Day.* International Society for Technology in Education.

- 4) Una vez **finalizados los 6 temas** de la unidad con sus correspondientes actividades, los alumnos realizarán la actividad de **AUTOEVALUACIÓN del libro en casa**.
- 5) **En la clase siguiente** se hará una **puesta en común de dudas y repaso**. De esta forma proporcionamos información oportuna para que los conceptos erróneos sean reaprendidos.
- 6) Se realiza un **examen** basado en los objetivos de la unidad para todos los alumnos de la clase al mismo tiempo.

5 – OBSERVACIONES SOBRE LA NOTA ACADÉMICA DE CADA ALUMNO

Para valorar el proceso de cada alumno podéis contar con:

- 1- La nota de las **8 plantillas de Cornell** realizadas por cada alumno. Se las podéis pedir el día del control y podréis valorar con un positivo a aquellos alumnos que hayan realizado **preguntas interesantes** a principio de cada clase
- 2- Los **formularios** enviados al acabar de ver un video (8 en total)
- 3- La nota de la **prueba de contenidos**

¡Muchas gracias por vuestra colaboración!

4.2.1.4. Actividades de clase

Uno de los aspectos más importantes a la hora de implementar el modelo FC es el diseño de las actividades de clase. Las actividades las diseñamos teniendo presentes dos aspectos básicamente, el contenido de la unidad por un lado, y por otro el método de aprendizaje entre alumnos: individual, de tutoría de iguales o en grupos.

Realizamos 9 actividades que describimos de forma sintética a continuación y que se pueden encontrar en detalle en el Anexo 10:

1ª Actividad: Concepto de función	
Contenidos	Correspondencia y función; Formas de expresar una función: enunciado verbal, tabla de valores, gráfica y fórmula matemática.
Tipo de método de aprendizaje	Trabajo Cooperativo
Desarrollo de la actividad	Se divide la clase en 8 grupos. Se entrega una tarjeta a cada grupo. Los alumnos deben resolver el problema o cuestión que se plantea en la tarjeta que han recibido. Tras un minuto (y medio) se pasa la tarjeta al siguiente grupo. Y así sucesivamente hasta que cada grupo haya trabajado las 8 tarjetas. Posteriormente se revisa entre todos el resultado de cada una.
Duración	45 minutos

Ilustración 4-5: Primera actividad de clase

Fuente: Elaboración Propia

2ª Actividad: Dominio e imagen de una función	
Contenidos	Variable independiente y dependiente; Dominio e Imagen de una función.
Tipo de método de aprendizaje	Trabajo individual
Desarrollo de la actividad	La actividad se divide en dos momentos. En el primero el alumno debe identificar visualmente el dominio y la imagen de una serie de gráficas de funciones, y en el segundo debe encontrar el dominio de unas cuantas funciones de tipo polinómicas, fraccionarias e irracionales, de forma analítica.
Duración	45 minutos

Ilustración 4-6: Segunda actividad de clase

Fuente: Elaboración Propia

3ª Actividad: Operaciones con funciones	
Contenidos	Suma, resta, producto y división de funciones.
Tipo de método de aprendizaje	Tutoría de iguales
Desarrollo de la actividad	Los alumnos resuelven, en un primer momento de forma individual, el ejercicio sobre las operaciones de funciones y encuentran el dominio de la función resultante. Escriben la respuesta en la columna “Respuesta inicial”. Al terminar se colocan en parejas. Comparan los resultados y colocan la respuesta acordada entre los dos, en la columna “respuesta final”. Después se ponen en común los resultados en la pizarra. Por último, entre los dos realizan el siguiente ejercicio.
Duración	45 minutos

Ilustración 4-7: Tercera actividad de clase

Fuente: Elaboración Propia

4ª Actividad: Composición de funciones	
Contenidos	Definición; Dominio de una función compuesta.
Tipo de método de aprendizaje	Trabajo individual
Desarrollo de la actividad	Los alumnos deben resolver tres tipos de ejercicio: el primero consiste en componer funciones, el segundo resolver dos problemas de aplicación de funciones, y el último realizar el proceso inverso de la composición, que es encontrar las funciones que al componerlas dieron por resultado la que se tiene como dato.
Duración	45 minutos

Ilustración 4-8: Cuarta actividad de clase

Fuente: Elaboración Propia

5ª Actividad: Función Inversa	
Contenidos	Concepto de función inversa; Obtención de la función inversa.
Tipo de método de aprendizaje	Trabajo Cooperativo
Desarrollo de la actividad	Se forman grupos de 4 alumnos. El profesor presenta un estudio de casos: “Se ha realizado un examen del tema de “función inversa” a una clase. Se han adquirido 4 copias del examen de 4 alumnos de la clase”. Cada integrante del grupo debe corregir un examen, poniéndose de acuerdo previamente con sus compañeros de equipo, sobre cuáles son las respuestas correctas , y completando la hoja de respuestas . Deben colocar la puntuación correspondiente a cada ejercicio (0 si la respuesta es incorrecta y 2 si es correcta). Un voluntario por grupo anotará en la pizarra las respuestas correctas.
Duración	45 minutos

Ilustración 4-9: Quinta actividad de clase

Fuente: Elaboración Propia

6ª Actividad: Simetría de funciones	
Contenidos	Simetría par e impar de funciones.
Tipo de método de aprendizaje	Tutoría de iguales
Desarrollo de la actividad	Los alumnos resuelven en un primer momento de forma individual, el ejercicio en el que deben analizar visual o analíticamente si la función es simétrica par, impar o no tiene simetría. Escriben la respuesta en la columna “Respuesta inicial”. Al terminar se colocan en parejas. Comparan los resultados y colocan la respuesta acordada entre los dos, en la columna “respuesta final”. Después se ponen en común los resultados en la pizarra. Por último, entre los dos realizan el siguiente ejercicio.
Duración	45 minutos

Ilustración 4-10: Sexta actividad de clase

Fuente: Elaboración Propia

7ª Actividad: Propiedades globales de una función: periodicidad, continuidad y asíntotas	
Contenidos	Periodicidad, continuidad y asíntotas de una función.
Tipo de método de aprendizaje	Trabajo Individual
Desarrollo de la actividad	Individualmente los alumnos analizan visualmente las propiedades globales (simetría, periodicidad, continuidad y asíntotas) de una serie de gráficas de funciones. Posteriormente se corrigen entre todos las respuestas.
Duración	100 minutos

Ilustración 4-11: Séptima actividad de clase

Fuente: Elaboración Propia

8ª Actividad: Propiedades globales de una función: monotonía y curvatura	
Contenidos	Monotonía, máximos y mínimos. Curvatura y puntos de inflexión.
Tipo de método de aprendizaje	Trabajo Cooperativo
Desarrollo de la actividad	Se forman grupos de 4 alumnos. El profesor presenta la siguiente situación: “Cuatro amigos, profesores de matemáticas de diferentes colegios, se han puesto de acuerdo para pasar el mismo control del tema de “Monotonía y curvatura” a sus alumnos. Cada uno lo resolvió por su cuenta y antes de pasar el control a su clase, se reunieron para ver si las respuestas coincidían y se dieron cuenta que habían pequeños errores en sus resoluciones”. Cada integrante del grupo ha de revisar las soluciones de un profesor. Posteriormente han de ponerse de acuerdo todos los integrantes del equipo en cómo estaría bien resuelto cada ejercicio del examen y completar la hoja de respuestas con las soluciones correctas. Al terminar, un voluntario por grupo puede anotar en la pizarra las respuestas correctas.
Duración	100 minutos

Ilustración 4-12: Octava actividad de clase

Fuente: Elaboración Propia

9ª Actividad: Repaso de toda la unidad	
Contenidos	Concepto de función inversa; Obtención de la función inversa.
Tipo de método de aprendizaje	Trabajo individual
Desarrollo de la actividad	De forma individual los alumnos resuelven los ejercicios de repaso de toda la unidad extraídos del libro de texto de la editorial Vicens Vives con el que se trabaja en clase
Duración	55 minutos

Ilustración 4-13: Novena actividad de clase

Fuente: Elaboración Propia

4.2.1.5. Formularios de valoración de la clase

Para conocer la opinión y percepción de los profesores participantes del estudio, realizamos un cuestionario diario *online* que los profesores debían responder al acabar la clase. En cada cuestionario se evaluaban cuatro cuestiones:

1. Aspectos negativos o dificultades que hayan expresado los alumnos respecto al vídeo.
2. Aspectos positivos que hayan expresado los alumnos referentes a la visualización del vídeo.
3. Aspectos negativos del desarrollo de la actividad de clase.
4. Aspectos positivos del desarrollo de la actividad de clase.

4.2.2. Material para los alumnos

Para implementar el modelo FC en el aula se realizó, con la ayuda del vídeo de presentación realizado con la aplicación “Powtoon”, una clase introductoria a los alumnos en la que se les explicó en qué consistía, los materiales que deberían utilizar, cómo acceder a ellos y, por último, cuál sería su trabajo.

4.2.2.1. Web

La web “trescomacatorze” de matemáticas fue diseñada por los profesores de bachillerato del colegio Juan, P., Rovira, E. y Massut, F. durante el curso académico 2012-2013 con el objetivo de elaborar una plataforma que permitiera a los alumnos tener fácil acceso a los materiales necesarios para el desarrollo de la asignatura (Ilustración 4-14).

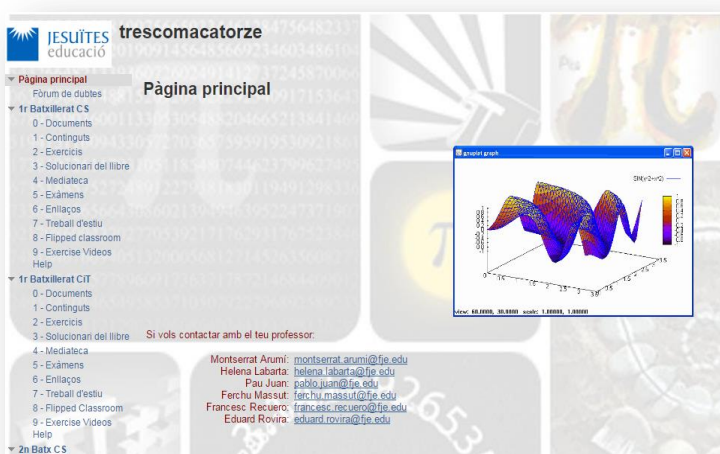


Ilustración 4-14: Web de matemáticas de bachillerato del colegio, “trescomacatorze”.
Fuente: <https://sites.google.com/a/fje.edu/trescomacatorze/home>

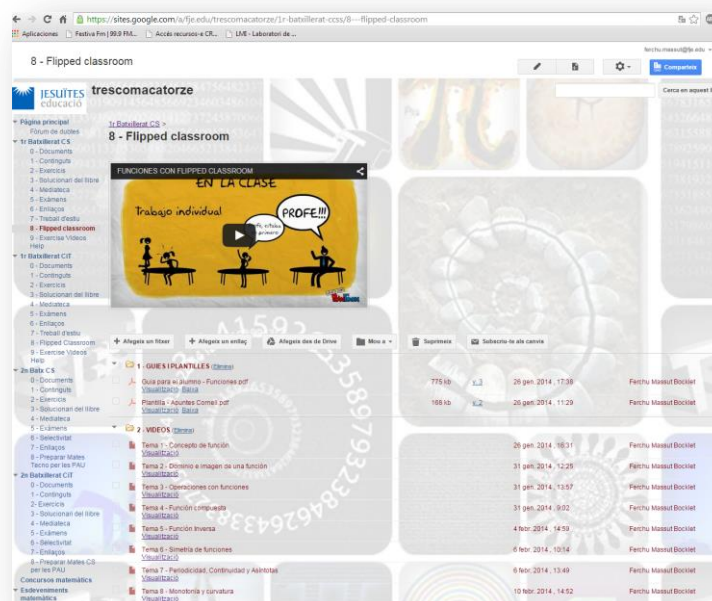


Ilustración 4-15: Web de matemáticas de bachillerato del colegio, “trescomacatorze”, subpágina de “Flipped Classroom” para los alumnos
Fuente: <https://sites.google.com/a/fje.edu/trescomacatorze/1r-batxillerat-ccss/8---flipped-classroom>

En la subpágina “8 – Flipped Classroom” los alumnos encuentran el material que necesitan:

- Guía de actuación;
- Plantilla de Cornell;
- Vídeos tutoriales;
- Cuestionarios correspondientes a cada vídeo;
- Actividades de clase con sus soluciones;
- Material de ayuda extra.

4.2.2.2. Guía de actuación

El primer día de la implementación del modelo FC (clase introductoria) el profesor de clase entrega a los alumnos la guía de actuación (Anexo 11) para que sepan:

- En qué consiste el modelo de aprendizaje *Flipped Classroom* y puedan diferenciarlo de una clase tradicional;
- Cómo pueden acceder al material que deberán utilizar;
- Cuál va a ser la organización de la unidad, los objetivos, referencias y procedimientos a seguir en cada tema;
- Que disponen de una guía para ver los vídeos;
- Cuáles son las pautas de uso de la plantilla de Cornell;
- Como va a ser el formato de las clases;

Además, el profesor puede añadir algunas observaciones referente a las diferentes cuestiones que se valorarán para determinar la nota académica de la unidad.

4.2.2.3. Vídeos tutoriales

Para la implementación del modelo de aprendizaje FC se realizaron ocho vídeos tutoriales, divididos por temas de la unidad:

- **Vídeo tutorial 1:** En él se explican los conceptos de correspondencia y función y las formas de expresar una función: enunciado verbal, tabla de valores, gráfica y fórmula matemática, como describimos en la siguiente secuencia (Ilustración 4-16).¹²

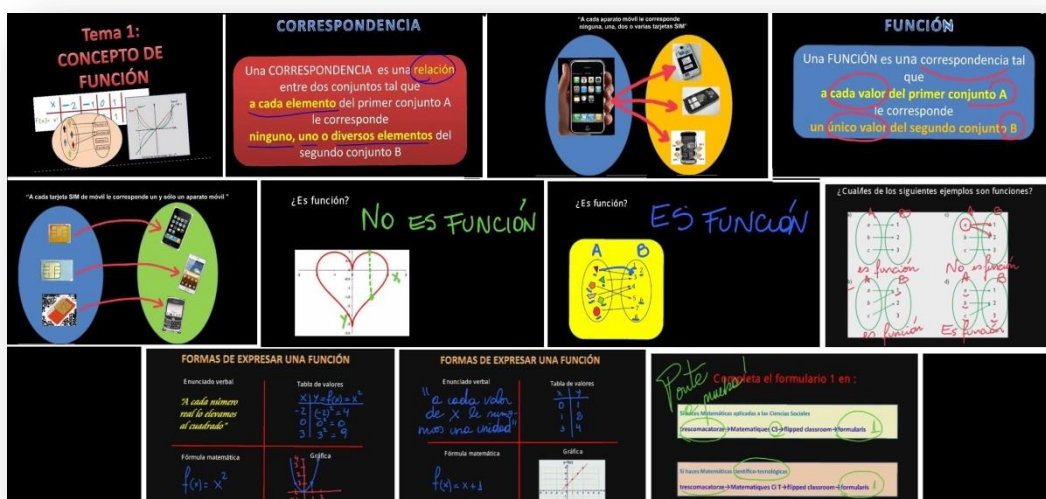


Ilustración 4-16: Secuencia de las diapositivas del vídeo tutorial 1 sobre el concepto de función.
 Fuente: Elaboración propia a partir de <https://www.youtube.com/watch?v=RqdrRfotk8I>

- **Vídeo tutorial 2:** Este vídeo recoge los conceptos de variable independiente y dependiente; Dominio e Imagen de una función. (Ilustración 4-17)

¹²Para la elaboración de este vídeo se utilizaron imágenes de http://es.wikipedia.org/wiki/Funci%C3%B3n_matem%C3%A1tica, http://wmatem.eis.uva.es/~matpag/CONTENIDOS/Tfuncle1/marco_funele.htm, <http://www.safme.es/?p=271>, <http://www.storetrading.com/lang-es/10030315-moviles-multi-sim-moviles-telefonos-moviles>, <http://blog.fnac.es/experto/moviles-dual-sim-inseparables-companeros/>, <https://www.wayerless.com/2013/04/review-samsung-galaxy-s4-w-labs/>, <http://www.freepik.es/fotos-vectores-gratis/tarjeta-sim>, <http://tecnologia.uncomo.com/articulo/como-cortar-una-tarjeta-sim-para-convertirla-en-micro-sim-10280.html>, http://www.inforsecuritel.com/default.php?cPath=5_521, <http://almoraimamoviles.com/servicios>, <http://www.garbarino.com/m/celular-libre-samsung-i9070-advance-blanco/2aa65cbf84>, <http://www.amazon.com/BlackBerry-8330-Silver-Verizon-Wireless/dp/B001FWZB70>, <http://mates3cp.blogspot.com.es/2010/02/san-valentin.html>, <http://matematicasmodernas.com/funciones-lineales-y-cuadraticas/>.

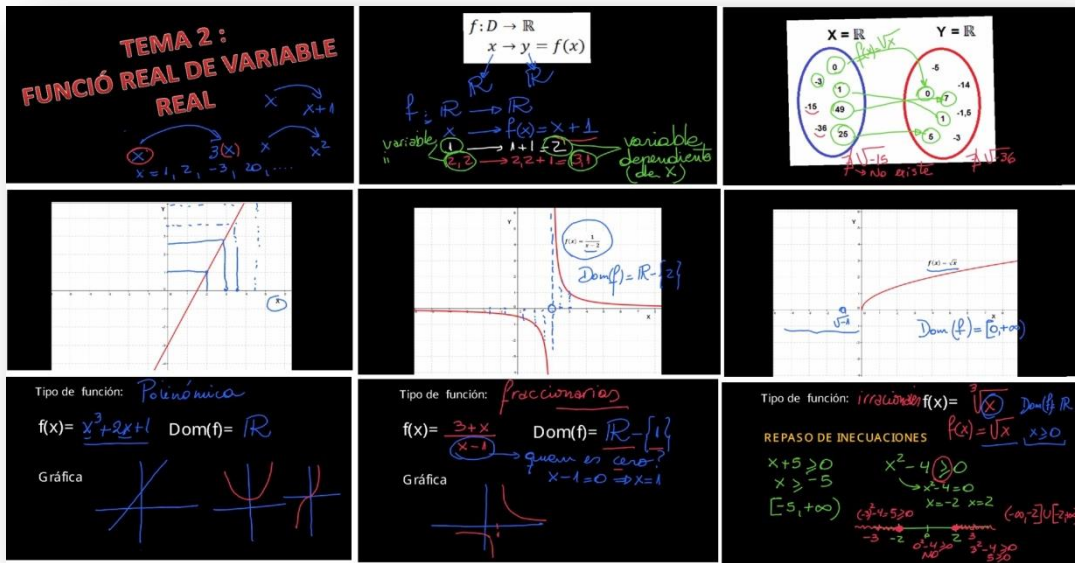


Ilustración 4-17: Secuencia de las diapositivas del vídeo tutorial 2 sobre el concepto de dominio de una función.

Fuente: Elaboración propia a partir de https://www.youtube.com/watch?v=I9q6tkp_WHA

- **Vídeo tutorial 3:** En este vídeo se explican los conceptos de suma, resta, producto y división de funciones. (Ilustración 4-18)

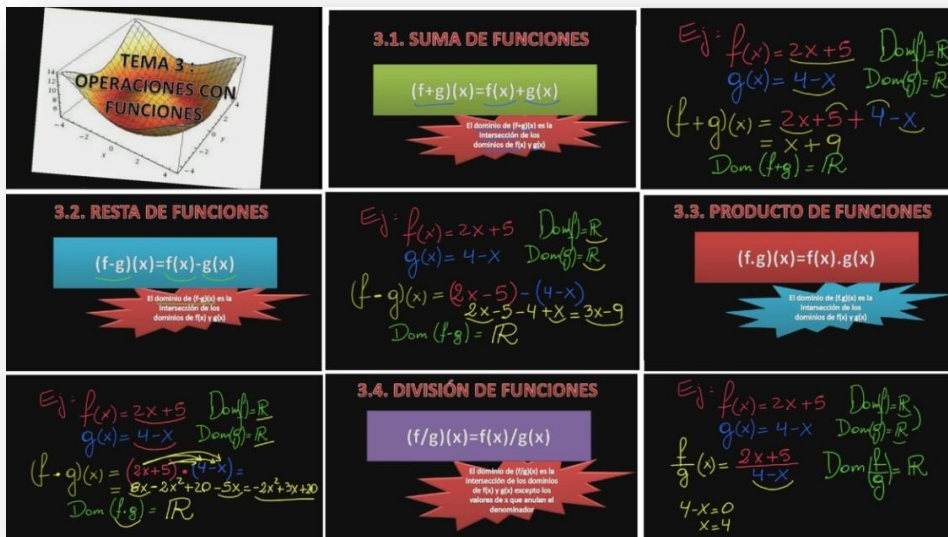


Ilustración 4-18: Secuencia de las diapositivas del vídeo tutorial 3 sobre operaciones con funciones.

Fuente: Elaboración propia a partir de <https://www.youtube.com/watch?v=cm7GyW7BeHs>

- **Vídeo tutorial 4:** En él se recogen los conceptos de definición y dominio de una función compuesta. (Ilustración 4-19)¹³.

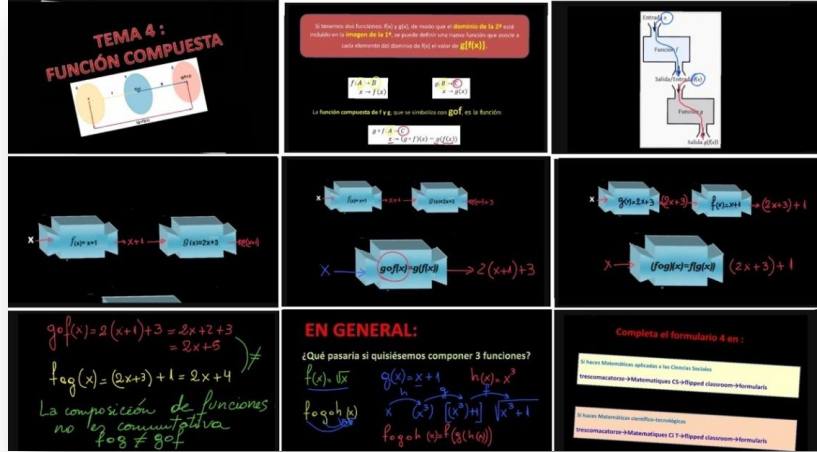


Ilustración 4-19: Secuencia de las diapositivas del vídeo tutorial 4 sobre composición de funciones. Fuente: De elaboración propia a partir de <https://www.youtube.com/watch?v=m6N-shJmOC4>

- **Vídeo tutorial 5:** En este vídeo se explica el concepto de función inversa y cómo obtenerla. (Ilustración 4-20)¹⁴

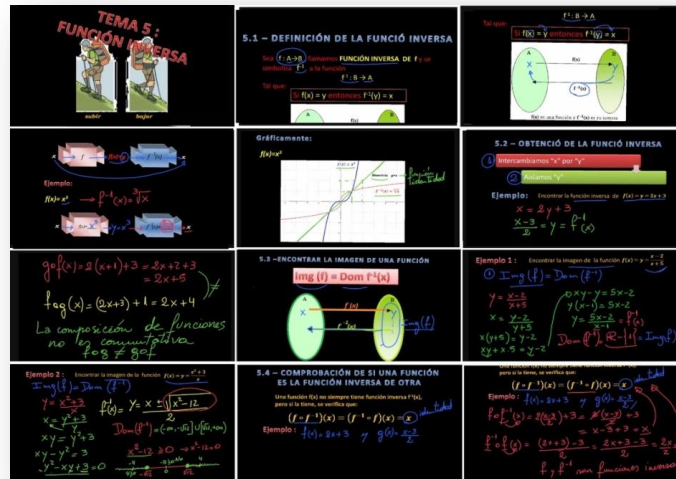


Ilustración 4-20: Secuencia de diapositivas del vídeo tutorial 5 sobre el concepto de función inversa. Fuente: Elaboración propia a partir de <https://www.youtube.com/watch?v=pNjef9-XmU>

¹³Para la elaboración de este vídeo se utilizó una imagen de http://es.wikipedia.org/wiki/Funci%C3%B3n_matem%C3%A1tica y una de <http://masmates.net/category/tematicas/funciones/composicion-de-funciones/>

¹⁴Para la elaboración de este vídeo se utilizaron imágenes de <http://matematica.laguia2000.com/general/funcion-inversa>, <http://printablecolouringpages.co.uk/?s=subir+y+bajar>,

- **Vídeo tutorial 6:** En este vídeo explicamos el concepto de simetría de una función (Ilustración 4-21).¹⁵

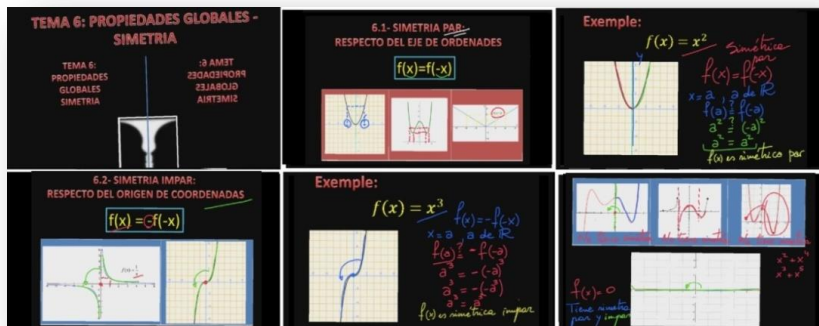


Ilustración 4-21: Secuencia de las diapositivas del vídeo tutorial 6 sobre la simetría de funciones. Fuente: Elaboración propia a partir de [https://www.youtube.com/watch?v= IUeJZpiWI8](https://www.youtube.com/watch?v=IUeJZpiWI8)

- **Vídeo tutorial 7:** En él aparecen los conceptos de tres propiedades globales de una función: periodicidad, continuidad y asíntotas; a diferencia de los anteriores, aparecemos dialogando y explicando el tema en la parte inferior derecha del vídeo tutorial (Ilustración 4-22)¹⁶.

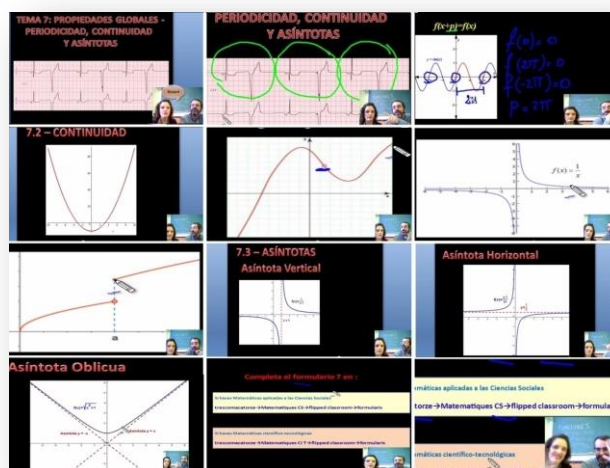


Ilustración 4-22: Secuencia de las diapositivas del vídeo tutorial 7 sobre las propiedades globales de una función.

Fuente: De elaboración propia a partir de <https://www.youtube.com/watch?v=bX1JWtSS1Is>

¹⁵Para la elaboración de este vídeo se utilizaron imágenes de <https://cristina19.wordpress.com/2008/12/07/4/>, <http://www.frsn.utn.edu.ar/funciones/caracteristicas.html>, [http://maralboran.org/wikipedia/index.php/Funciones: Simetr%C3%ADa](http://maralboran.org/wikipedia/index.php/Funciones:_Simetr%C3%ADa),

¹⁶Para la elaboración de este vídeo se utilizaron imágenes de <http://www.laclinicaveterinaria.com/electrocardiograma.asp>, http://catchupmath.com/hotmath_help/spanish/topics/inverse-trigonometric-functions.html, <http://ubvmat.blogspot.com.es/2007/05/continuidad.html>, http://calculo.cc/temas/temas_bachillerato/primerio_ciencias_sociales/funciones_continuidad/teoria/discontinuidad.html, <http://www.ematematicas.net/asintotas.php?a=5>,

- **Vídeo tutorial 8:** En este vídeo se explican los conceptos de dos propiedades globales de una función: monotonía y curvatura (Ilustración 4-23)¹⁷.

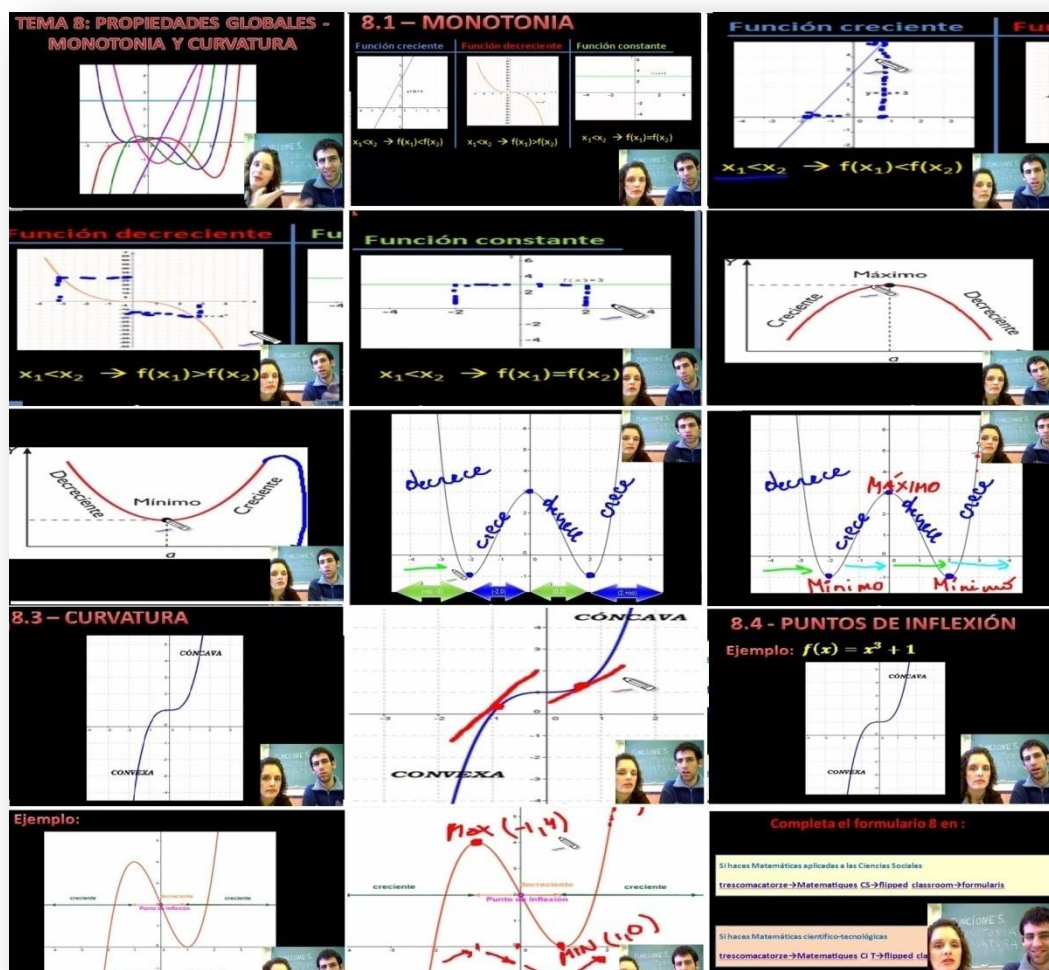


Ilustración 4-23: Secuencia de las diapositivas del vídeo tutorial 8 sobre el concepto de dominio de una función.

Fuente: Elaboración propia a partir de https://www.youtube.com/watch?v=f6x_MfqZ7Dc

Para realizar los vídeos tutoriales seguimos los siguientes pasos:

- 1º - **Preparar el tema** de funciones con el libro de la asignatura “Matemàtiques 1 – Ciències i Tecnologia” y “Matemàtiques 1-Aplicades a les Ciències Socials” de la editorial Vicencs Vives, libro que utilizan los alumnos de la población en primero de bachillerato.

¹⁷ En este vídeo se utilizaron imágenes de <https://sites.google.com/a/iespedrodeluna.es/departamento-de-matematicas/lezcano-miguel/matematicas-aplicadas-a-las-ciencias-sociales-i/t6-funciones-reales-propiedades-globales>, <http://elpenultimoteorema.blogspot.com.es/2015/01/solucionario-funciones-matematicas.html>, <http://www.vadenumeros.es/tercero/funcion-afin.htm>, <http://www.bbc.co.uk/schools/gcsebitsize/maths/algebra/furthergraphhirev1.shtml>, http://datateca.unad.edu.co/contenidos/301301/4_L_Cap_4/funcion_constante.html.

2º - Realizar una **presentación de PowerPoint** con los conceptos que queremos explicar del tema. Esto incluye gráficas de funciones, definiciones, etc.

3º - Para la **edición de los vídeos** utilizamos dos técnicas distintas:

- Los seis primeros los editamos con una aplicación para tablets llamada “*Explain Everything*” (Ilustración 4-24).

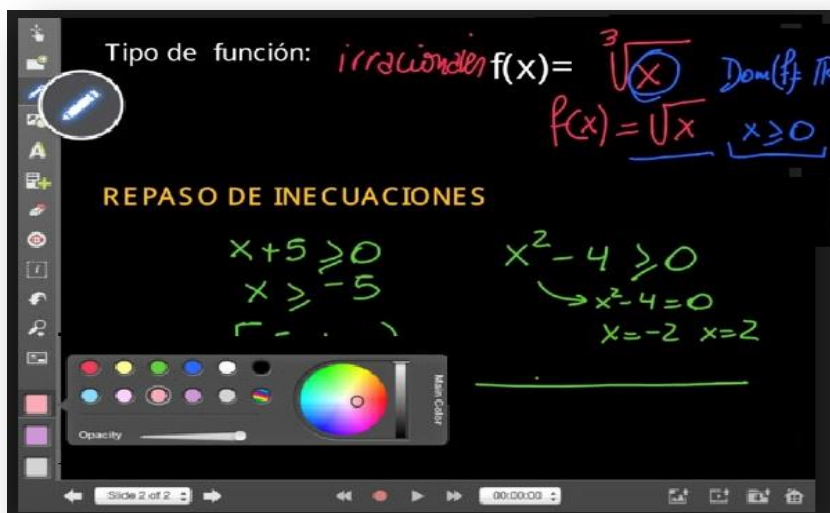


Ilustración 4-24: Aplicación para tablets para editar vídeos tutoriales “*Explain Everything*”

Fuente: *Elaboración propia*

- Para la edición de los dos últimos vídeos utilizamos un ordenador portátil con webcam, un bolígrafo anotador y el programa “*Camtasia Estudio 8*” para poder incluir el diálogo de dos profesores sobre el contenido de la unidad (Ilustración 4-25).

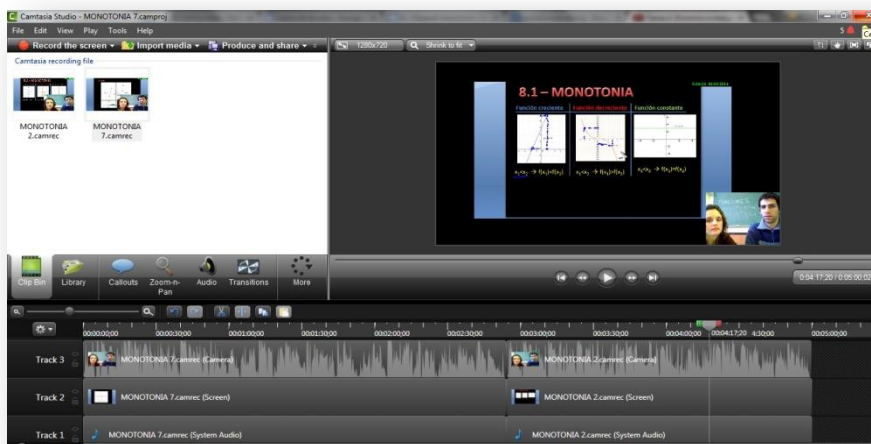


Ilustración 4-25: Software para editar vídeos tutoriales “Camtasia Studio”
Fuente: Elaboración propia

4º - Posteriormente los vídeos se implantaron en un canal de **Youtube** de acceso público.

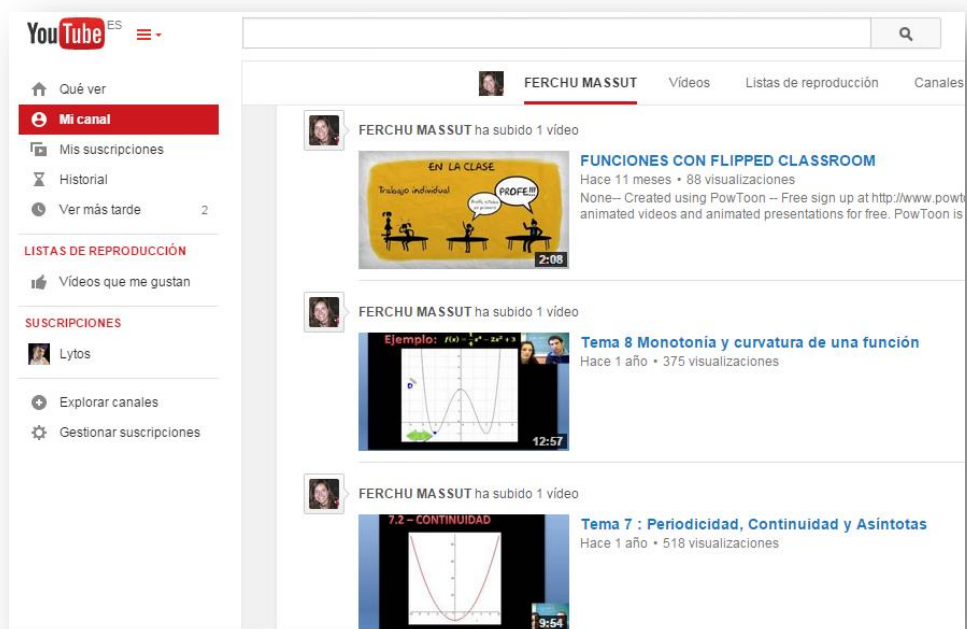


Ilustración 4-26: Canal de Youtube donde se colgaron los vídeos tutoriales
Fuente: Elaboración propia

5º - Por último se **añadió el enlace de cada vídeo en la web “trescomacatorze”** para que los alumnos pudieran acceder al vídeo tutorial correspondiente o al que quisieran.

4.2.2.4. Plantilla de Cornell para tomar apuntes

Bergmann y Sams (Bergmann, J. y Sams, A., 2012) proponen utilizar la plantilla de Cornell para tomar notas porque, en sus experiencias con el modelo FC, han comprobado que los alumnos que la usan suelen llegar a clase con preguntas apropiadas que les ayudan a enfrentar y superar sus conceptos erróneos. También se puede utilizar para evaluar la efectividad de los vídeos, puesto que si todos los alumnos llegan a clase con una pregunta similar significa que el tema no está bien explicado y se debe tomar nota para rehacer o corregir el video correspondiente.

Por ello se proporcionó a los alumnos la plantilla de Cornell (Anexo 6), para que tomaran apuntes mientras visualizaban los vídeos tutoriales. Esta plantilla para notas consiste en dividir la hoja en tres áreas, como muestra la Ilustración 4-27. Utiliza un sistema que no sólo sirve para escribir puntos claves sino también para hacer preguntas y resumir lo que se ha aprendido del tema en cuestión.

<p style="text-align: center;">IDEAS</p> <ul style="list-style-type: none"> - Preguntas del texto; - Puntos e ideas importantes; - Diagramas simples <p style="text-align: center;">CUANDO SE RELLENA</p> <p>Después de ver el vídeo.</p>	<p style="text-align: center;">NOTAS DEL VÍDEO</p> <p>Aquí se toma nota de todo lo que se dice en el vídeo.</p> <p>Puede incluir:</p> <ul style="list-style-type: none"> - Transcripción del vídeo; - Diagramas; - Listas; - Apuntes de todo tipo. <p style="text-align: center;">CUANDO SE RELLENA</p> <p>Durante la visualización del vídeo.</p>
<p>RESUMEN</p> <p>Aquí se anota un breve resumen del texto escrito arriba, útil como referencia.</p> <p>CUANDO SE RELLENA</p> <p>Durante el repaso</p>	

Ilustración 4-27: Plantilla de Notas de Cornell.

Fuente: Adaptación de la imagen de <http://profesoraerikaflores.blogspot.com.es/2012/07/tomar-bien-los-apuntes-en-clase-el.html>

4.2.2.5. Cuestionarios sobre la observación

Se prepararon ocho cuestionarios en línea (Anexo 7) para que los alumnos los respondieran al acabar de ver el vídeo tutorial.

Cada cuestionario está formado por dos partes. La primera consta de dos preguntas acerca del contenido del vídeo que han visualizado y una tercera que les pide que piensen y anoten una pregunta interesante sobre el tema. Con ello se pretende comprobar si el alumno ha realizado los procesos de recordar, comprender y aplicar (Nivel inferior de la Taxonomía de Bloom). Por otro lado, si el profesor de clase puede visualizar las respuestas antes de la clase correspondiente puede trabajar sobre los errores cometidos, sobre las dudas y las preguntas realizadas.

La segunda parte del cuestionario responde a la experiencia de visualización del vídeo tutorial para poder evaluar cómo ha sido la misma (nivel de concentración, número de visualizaciones que ha necesitado, nivel de comprensión, etc.).

4.2.2.6. Actividades de clase con soluciones

Con el objetivo de que aquellos alumnos que han estado ausentes en clase puedan ponerse al día desde casa, y para que a la hora de estudiar para la prueba final de la unidad los alumnos tengan disponibles todas las actividades, en la subpágina “8 - Flipped Classroom” del web “trescomacatorze” se añadieron las actividades de clase con las correspondientes soluciones (Ilustración 4-28).



Ilustración 4-28: Soluciones de las actividades de clase, en la Subpágina de “Flipped Classroom” de la web “Trescomacatorze”

Fuente: <https://sites.google.com/a/fje.edu/trescomacatorze/1r-batxillerat-ccss/8---flipped-classroom>

4.2.2.7. Material de ayuda extra

Para que los alumnos tuviesen ejercicios para practicar, como material extra, se añadieron enlaces a webs con problemas y ejercicios del contenido de la unidad, como Vitutor¹⁸, Educaplay¹⁹, Khanacademy²⁰, etc.

4.2.2.8. Prueba de conocimientos y competencias adquiridas

La prueba de conocimientos adquiridos (Anexo 12) la confeccionamos para conocer el estado final del aprendizaje de los alumnos de la población. Realizamos dos modelos muy similares para poder pasarlos en diferentes horarios, dado que las seis clases que participaban en la investigación no tienen clases de matemáticas simultáneas.

Los objetivos que evaluamos en la prueba son:

1. Conocer el concepto de función y expresarla de diferentes formas.
2. Reconocer las funciones reales de variable real, su dominio e imagen.
3. Operar con funciones.
4. Realizar composición de funciones y comprobar las propiedades que verifica esta operación.
5. Conocer el concepto de función inversa de una función y aplicar un proceso para obtenerla.
6. Saber reconocer las propiedades globales de una función:
 - Diferenciar los dos tipos de simetría que pueden presentar las funciones diferenciando entre las funciones pares e impares algebraica y gráficamente.
 - Definir función periódica reconociendo el significado de periodo e identificar la representación gráfica de este tipo de funciones.
 - Reconocer la existencia de continuidad o de discontinuidades en la representación gráfica de una función.
 - Estudiar la presencia de asíntotas en la representación gráfica de una función aplicando la definición.

¹⁸ Disponible en <http://www.vitutor.com/fun/2/funciones.html>

¹⁹ Disponible en http://www.educaplay.com/es/recursoseducativos/20319/test_funciones_graficas.htm

²⁰ Disponible en <https://es.khanacademy.org>

- Analizar la monotonía de una función diferenciando entre funciones crecientes, decrecientes y constantes en un intervalo.
- Deducir la existencia de máximos y mínimos relativos analizando la representación gráfica de una función.
- Diferenciar entre intervalos en los que la función es cóncava e intervalos en los que la función es convexa.
- Localizar los posibles puntos de inflexión de una función analizando su representación gráfica.

La prueba se confeccionó en catalán por ser el idioma predominante en el colegio y está compuesta por cuatro actividades que evalúan los objetivos planteados (Ilustración 4-29). Cada actividad tiene una puntuación de 2,5 puntos y la nota total es de 10 puntos.

La prueba se pasó en una clase de matemáticas de 55 minutos y era de resolución individual.

Actividad	Objetivos
1) Encontrar el dominio e imagen de una función dada.	2. Reconocer las funciones reales de variable real, su dominio e imagen. 3. Operar con funciones.
2) Estudiar analítica o gráficamente la simetría de dos funciones dadas.	1. Conocer el concepto de función y expresarla de diferentes formas. 6. Saber reconocer las propiedades globales de una función.
3) Resolver un problema de composición de funciones	4. Realizar composición de funciones y comprobar las propiedades que verifica esta operación.
4) Estudiar las propiedades globales de una función dada gráficamente	6. Saber reconocer las propiedades globales de una función.

Ilustración 4-29: Actividades de la prueba final de contenidos correspondientes a los objetivos de la unidad de funciones.

Fuente: Elaboración propia.

4.3. CONTENIDOS MATEMÁTICOS DE LA UNIDAD TRABAJADA CON FC

La unidad trabajada con FC es la de “**Funciones**” correspondiente al currículum de Matemáticas y de Matemáticas Aplicadas a las Ciencias Sociales de primero de bachillerato en Cataluña, como ya describimos en el capítulo. De acuerdo a los contenidos que plantea la *Generalitat de Catalunya*, que es en ambas asignaturas “el estudio de las características de ciertos tipos de funciones que pueden ser modelo de fenómenos científicos, tecnológicos y sociales” (Generalitat de Catalunya, Departament d'Ensenyament), los temas trabajados con el modelo FC son:

- **Tema 1:** Correspondencia y función; Formas de expresar una función: enunciado verbal, tabla de valores, gráfica y fórmula matemática.
- **Tema 2:** Variable independiente y dependiente; Dominio e Imagen de una función.
- **Tema 3:** Suma, resta, producto y división de funciones.
- **Tema 4:** Definición; Dominio de una función compuesta.
- **Tema 5:** Concepto de función inversa; Obtención de la función inversa.
- **Tema 6:** Simetría; Periodicidad; Continuidad; Asíntotas; Monotonía y Máximos y mínimos relativos; Curvatura y puntos de inflexión.

Cada tema, como mostramos en el apartado anterior, se corresponde a un vídeo tutorial, excepto el Tema 6 que se realizó en tres vídeos tutoriales, de tal manera que la simetría se explicó en el sexto, la periodicidad, continuidad y asíntotas en el séptimo, y por último la monotonía, máximos y mínimos, curvatura y puntos de inflexión en el octavo.

4.4. IMPLEMENTACIÓN DEL MODELO FC EN LA CLASE

Para implementar el modelo FC en las seis clases seguimos una serie de pasos necesarios para que todos los participantes de la experiencia estuviesen al corriente de los aspectos y cuestiones necesarias en cada situación. Pasamos a describir cuál fue el proceso en el caso de los docentes y cómo se desarrolló en el caso de los alumnos.

4.4.1. Proceso de implementación del Modelo FC en el aula para el docente

Para implementar el modelo de aprendizaje FC en el aula y trabajarlo con los docentes que lo llevarían a cabo se realizaron las siguientes etapas:



Ilustración 4-30: Etapas de implantación del modelo FC en el aula para el docente.

Fuente: Elaboración propia.

4.4.2. Proceso de implementación del Modelo FC en el aula para el alumno

Para implementar el modelo de aprendizaje FC en el aula y trabajarlo con los alumnos que lo llevarían a cabo se realizaron las siguientes etapas:



Ilustración 4-31: Etapas de implantación del modelo FC en el aula para el alumno
Fuente: Elaboración propia.

4.5. RESUMEN

En este capítulo hemos presentado la forma en la que realizamos la implementación del modelo FC en el aula, el material necesario para llevarlo a cabo, tanto para el profesor como para el alumno, los contenidos trabajados y por último las fases a seguir desde el punto de vista del profesor y del alumno.

5. RESULTADOS DE LAS PRUEBAS DIAGNÓSTICAS

5. RESULTADOS DE LAS PRUEBAS DIAGNÓSTICAS	181
5.1. <u>PRESENTACIÓN</u>	185
5.2. <u>RESULTADOS DE LA PRUEBA DE HABILIDADES Y DESTREZAS ALGEBRAICAS</u>	187
5.2.1. Resultados del Proceso Algebraico de Sustitución	187
5.2.2. Resultados del Proceso Algebraico de Generalización	196
5.2.3. Resultados del Proceso Algebraico de Modelización	210
5.3. <u>RESULTADOS DE LA PRUEBA ALGEBRAICA DE FUNCIONES</u>	215
5.4. <u>RESULTADOS GLOBALES DE LAS PRUEBAS DE ÁLGEBRA Y FUNCIONES</u>	221
5.4.1. Resultados Globales del Proceso Algebraico de Sustitución	221
5.4.2. Resultados Globales del Proceso Algebraico de Generalización	223
5.4.3. Resultados Globales del Proceso Algebraico de Modelización	225
5.4.4. Resultados Globales de la Prueba de Álgebra	227
5.4.5. Resultados Globales de la Prueba de Funciones	229
5.4.6. Resultados Globales de Ambas Pruebas	230
5.5. <u>RESUMEN DEL CAPÍTULO</u>	237

5.1. PRESENTACIÓN

En este capítulo presentamos los resultados obtenidos en las pruebas diagnósticas. Como ya hemos señalado en el capítulo de metodología, el resultado de estas pruebas va a mostrarnos el nivel de habilidades y destrezas algebraicas y de funciones de los alumnos de la población. Se realizaron a través de tres cuestionarios. Los dos primeros responden a los procedimientos de álgebra: sustitución, generalización y modelización, mientras que el tercero lo empleamos para evaluar a los alumnos en las competencias de funciones.

Las pruebas diagnósticas se realizaron en dos fases. La primera corresponde al curso lectivo 2013-2014, y se evaluaron 149 alumnos. De este primer grupo seleccionamos 8 alumnos como muestra para realizar el estudio de casos que nos permitiera certificar la eficacia de la implementación del modelo FC en la clase de matemáticas. La segunda fase corresponde al siguiente curso lectivo 2014-2015, donde se evaluaron 164 alumnos. Esta segunda evaluación responde a fines de control, para asegurar la fiabilidad del instrumento de medición. Las pruebas se tomaron en las secciones A, B, C, que corresponden a la modalidad de matemáticas aplicadas a las ciencias sociales y a las secciones D, E, F, correspondientes a la modalidad de matemáticas científico-tecnológicas. El análisis de frecuencias señala la siguiente composición de los grupos analizados (Ilustración 5-1):

Sección	Curso Lectivo 2013-2014		Curso Lectivo 2014-2015	
	Modalidad de Matemáticas		Modalidad de Matemáticas	
	Aplicadas a las ciencias sociales	Científico-tecnológicas	Aplicadas a las ciencias sociales	Científico-tecnológicas
A	20	0	19	0
B	14	0	26	0
C	30	0	27	0
D	0	30	0	33
E	0	28	0	33
F	0	27	0	26
Total	64	85	72	92
% Total (por ciclo)	43,0%	57,0%	43,9%	56,1%

Ilustración 5-1: Distribución de casos por curso lectivo, modalidad de matemáticas y sección
 Fuente: Elaboración propia. Base cuestionario 1

Observamos que el número de alumnos de la modalidad de matemáticas científico-tecnológicas es mayor, tanto en el curso 2013-2014 (85 casos) como en el curso 2014-2015 (92

casos). Esto nos permite afirmar que la composición de los grupos es similar: en 2013-2014 el 43% corresponde la modalidad de aplicadas a ciencias sociales y el 57% a científico-tecnológico, y en 2014-2015 los porcentajes son del 43,9% para la primera modalidad y del 56,1% para la segunda.

En el capítulo de metodología ya se ha mencionado el uso del programa SPSS versión 18.0. Los gráficos, tablas y parámetros estadísticos de este capítulo se han realizado con este programa.

Dividimos el capítulo en tres apartados: en el primero presentamos los resultados comparativos de la prueba de habilidades y destrezas algebraicas, analizando en cada ítem el tipo de error cometido por los alumnos; en el segundo damos a conocer los resultados de la prueba de funciones; y en el tercero y último ofrecemos un análisis estadístico y comparativo de resultados totales para responder a cuestiones planteadas al inicio de nuestra investigación.

5.2. RESULTADOS DE LA PRUEBA DE HABILIDADES Y DESTREZAS ALGEBRAICAS

5.2.1. Resultados del Proceso Algebraico de Sustitución

Los primeros 12 ítems del cuestionario 1 (Anexo 2) pretenden evaluar a los alumnos en el proceso algebraico de sustitución y ver los tipos de errores que se dan al responderlos:

- En el ítem 1 vemos que, en ambos ciclos lectivos, 7 alumnos no supieron o no quisieron contestar la pregunta. En las 142 respuestas válidas del ciclo 13-14, observamos que sólo el 12,7% de los alumnos cometieron errores (18 casos). El 78,2% respondió correctamente el ítem 1, mientras que el 9,2% contestó de forma parcial. En 2014-2015 el índice de respuestas totalmente correctas es del 72%, y el de respuestas erróneas un 15,9%. Por tanto, aunque el primer grupo tuvo un 3,2% más de efectividad en la respuesta evaluada que el segundo, podemos concluir que la mayoría de alumnos de los dos grupos han entendido bien la pregunta y han realizado bien la sustitución. (Ver ilustración 10.13-1 en Anexo 13).
 - Tipo de Error: De los 18 alumnos (12,7% de 142) que cometieron errores en el ciclo 2013-2014 en el ítem 1, 12 de ellos (66,7%) cometieron un error cuyo “origen es un obstáculo”. Como nos muestra el ejemplo de la ilustración 5-2, el alumno no acepta que la expresión algebraica no dé un número, y siente el impulso de clausurar la operación. Necesita cerrarla, completarla. Los 6 casos restantes (33,3%) tienen errores con “origen en la ausencia de sentido”. De 25 alumnos del ciclo 2014-2015 (15,9% de 157) que respondieron de forma incorrecta la cuestión, encontramos que el origen del error en 21 de ellos (84%) es también del tipo de “origen en un obstáculo”, hay 2 casos del tipo “origen en la ausencia de sentido” (8%) y los 2 casos restantes son del tipo de “origen afectivo y/o emocional” (8%) (Ver ilustración 10.13-2 en Anexo 13).

1. Si $a = 2b$, ¿en qué se transforma $5a + 3$?

$a = 2b$

$5 \cdot 2b + 3 + 10b + 3 =$

$10b = -3$

$b = \frac{-3}{10}$

Ilustración 5-2: Error de origen en un obstáculo en el ítem 1.

Fuente: Cuestionario 1 de un alumno de 1º de bachillerato del ciclo lectivo 2014-2015.

- En el ítem 2, observamos que el ciclo 2013-2014 presenta 140 casos con respuestas válidas, es decir que son 9 los alumnos que no saben o no contestan la pregunta. De aquellos que lo responden, encontramos 33 casos que lo hacen erróneamente representando el 23,6% del total. El 67,1% lo responden correctamente y el 9,3% lo hacen, pero de forma parcial. En 2014-2015 tenemos 10 casos que no saben o no contestan la pregunta y la cantidad de respuestas con error es de 37, lo que equivale al 24% de los alumnos. Así pues, el primer grupo tuvo mayor efectividad en la respuesta que el segundo, por lo que podemos concluir que éste comprendió mejor lo que pedía la pregunta y supo resolverla mejor que el segundo grupo (Ver ilustración 10.13-3 en Anexo 13).
 - Tipo de Error: El tipo de error que predominó en el ítem 2 en ambos ciclos lectivos es el error con origen en un “obstáculo”, representando el 63,6% para el grupo 2013-2014 (21 casos) y el 54,1% para el grupo 2014-2015 (20 casos). Los errores cuyo origen se deben a la “ausencia de sentido” representan el 36,4% para el primer grupo y el 37,8% para el segundo (12 y 14 casos respectivamente). En las respuestas del ciclo 2014-2015, observamos además 3 alumnos que cometieron un error cuyo origen responde algún aspecto afectivo y/o emocional (Ver ilustración 10.13-4 en Anexo 13).
- En el ítem 3, observamos en las respuestas del ciclo 2013-2014, casi la misma cantidad de respuestas con error (60 alumnos) que de repuestas correctas (62 alumnos), lo que representa el 42,6% y el 44% respectivamente. El 13,5% restante pertenecen a los 19 casos que aportan una respuesta parcial. Hubo 8 alumnos que no supieron responder o no contestaron la pregunta. En el ciclo 2014-2015 la cantidad de casos con respuestas erróneas es menor, con 41 casos, lo que significa que existe un 15,8% más de efectividad que el ciclo lectivo anterior. No obstante podemos observar que los

alumnos tuvieron más dificultad para comprender el proceso de sustitución en este ítem (Ver ilustración 10.13-5 en Anexo 13).

- Tipo de Error: De los casos con error en el ítem 3 encontramos que en ambos ciclos lectivos predomina el error de origen en la “ausencia de sentido”. Como podemos observar en la ilustración 5-3, el alumno utiliza incorrectamente la propiedad distributiva. En el ciclo 2013-2014, tenemos 46 casos (76,7%) y en el de 2014-2015, 23 casos (56,1%) con este tipo de error. Por otra parte ambos grupos presentan casos de error con “origen en un obstáculo” (11,7% y 36,6% respectivamente) y casos de error con “origen afectivo y/o emocional” (11,7% y 7,3% respectivamente) (Ver ilustración 10.13-6 en Anexo 13).

3. Si $a = 2b$, ¿en qué se transforma $(a + 3) \cdot (3 - a)$?

$(2b+3) \cdot (3-2b) = 6b - 6b = 0b = 1b$

Ilustración 5-3: Error de origen en la ausencia de sentido en el ítem 3.

Fuente: Cuestionario 1 de un alumno de 1º de bachillerato del ciclo lectivo 2013-2014.

- En el ítem 4 observamos que hay 14 alumnos que no lo contestaron en el ciclo 2013-2014. De las 135 respuestas válidas, observamos que sólo 8 alumnos cometieron errores, lo que representa el 5,9% de las respuestas. El 92,6% respondió correctamente, mientras que el 1,5% contestó de forma parcial. En 2014-2015 la cantidad de respuesta con error fue de 3 casos lo que equivale el 2%. En esta oportunidad es el segundo grupo quien tuvo un 3,9% más de efectividad en la respuesta evaluada; sin embargo podemos observar que la gran mayoría de alumnos de ambos ciclos comprendieron lo que se les pedía en el ítem y supieron responder correctamente (Ver ilustración 10.13-7 en Anexo 13).
- Tipo de error: En este ítem hubo muy pocos alumnos que cometieran algún error al responder. En el ciclo 2013-2014 de los 8 que contestaron erróneamente, 3 de ellos (37,5%) cometieron un error de “origen en un obstáculo”, 2 (25%) presentan un error del tipo “ausencia de sentido” y los 3 restantes cometieron un error de “origen afectivo y/o emocional”. Por otra parte de los 3 alumnos con error del ciclo 2014-2015 encontramos 1 alumno (33,3%) con error de “origen en un obstáculo” y 2 alumnos con error de “origen afectivo y/o emocional” (66,7%) (Ver ilustración 10.13-8 en Anexo 13).

- En el ítem 5 vemos que 44 de un total de 149 alumnos del ciclo 2013-2014 no supieron y/o no contestaron la pregunta, lo que equivale a casi un 30% de “no respuesta”. En el ciclo 2014-2015 el mismo valor alcanza a 41 de 164 alumnos (25%). Ello nos lleva a pensar que este tipo de pregunta comporta una mayor dificultad en los alumnos para realizar el proceso de sustitución. En los casos válidos observamos para los dos ciclos valores similares en las respuestas con error: 40 alumnos en el 2013-2014 y 43 en el 2014-2015, lo que representa el 38,1% y el 35% respectivamente. En el caso de respuestas totalmente correctas la cantidad es de 56 para el primer grupo y 74 para el segundo, lo que significa el 53,3% y el 60,2% de los resultados respectivamente. Finalmente, en el curso 2013-2014 el 8,6% (9 alumnos) tuvo una respuesta parcialmente correcta mientras que en el 2014-2015 se encontraron en la misma situación 6 alumnos, el 4,9% (Ver ilustración 10.13-9 en Anexo 13).
- Tipo de error: 40 alumnos en el ciclo 13-14 y 43 alumnos del ciclo 14-15 cometieron algún error en este ítem y observamos que en ambos ciclos lectivos predomina el error de “origen en un obstáculo” (Ver ilustración 10.13-10 en Anexo 13) que afectó a 29 alumnos (72,5%) en el ciclo 2013-2014 y 31 alumnos (72,1%) en el ciclo 2014-2015. Por otra parte ambos grupos presentan pocos casos de error con “origen en la ausencia de sentido” (5 y 8 alumnos respectivamente) y de error con “origen afectivo y/o emocional”, 6 y 4 alumnos (Ver ilustración 10.13-10 en Anexo 13).
- En el ítem 6 (Ver ilustración 10.13-11 en Anexo 13) observamos que los alumnos comprendieron el proceso de sustitución solicitado, dado que se presenta un alto porcentaje de respuesta totalmente correcta en ambos ciclos (94,9% y 98,5% respectivamente). En 2013-2014, 6 alumnos tuvieron errores en la respuesta (5,1%) mientras que en 2014-2015 solo estuvieron 2 (1,5%) en este caso. Sin embargo en ambos ciclos se observa una elevada cantidad de alumnos que no supieron y/o no contestaron la pregunta, 32 y 27 alumnos respectivamente.
- Tipo de error: De los 6 alumnos que cometieron error en el 2013-2014, 4 de ellos responden a un error con “origen en un obstáculo” (66,7%), mientras que los 2 restantes son errores con “origen afectivo y/o emocional” (33,3%). En el ciclo 2014-2015 los 2 errores cometidos tienen “origen afectivo y/emocional” (Ver ilustración 10.13-12 en Anexo 13).

- En el ítem 7 (Ver ilustración 10.13-13 en Anexo 13) vemos que 38 de un total de 149 alumnos del ciclo 2013-2014 no supieron y/o no contestaron la pregunta, lo que equivale a casi un 25,5% de no respuesta. En el ciclo 2014-2015, 34 de 164 alumnos, un 20%, estuvieron en el mismo caso. Ello nos permite observar que este tipo de pregunta presenta algún tipo de dificultad para los alumnos a la hora de substituir. En los casos válidos, observamos para los dos ciclos valores similares en las respuestas totalmente correctas, 81 y 85 alumnos, respectivamente, lo que significa el 73% y el 65,4% de resultados positivos en cada caso. En lo que respecta a las preguntas con error, se presentaron 30 casos en el 2013-2014 y 45 casos en el 2014-2015, el 27% y el 34,6 % respectivamente. Esto muestra que el primer ciclo fue más eficiente en la respuesta en un 7,6%.
- Tipo de error: en este ítem observamos que más de la mitad ha cometido un error de “origen en un obstáculo”, 63,3% para el ciclo 2013-2014 y 53,3% en 2014-2015. En segundo lugar encontramos los que cometieron errores de “origen en la ausencia de sentido” (30% y 35,6% respectivamente), como podemos ver en la ilustración 5-4, donde el alumno no identifica que la “v” es la misma en las dos expresiones y no aplica la propiedad conmutativa para luego substituir, sino que asocia directamente cada elemento de la primera expresión con dos de la segunda. Finalmente, los que cometieron errores de “origen afectivo y/o emocional” alcanzaron índices del 6,7% para el primer grupo y 11,1% para el segundo (Ver ilustración 10.13-14 en Anexo 13).

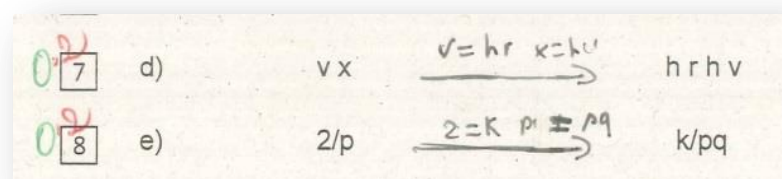


Ilustración 5-4: Error de origen en la ausencia de sentido en los ítems 7 y 8.

Fuente: Cuestionario 1 de un alumno de 1º de bachillerato del ciclo lectivo 2014-2015.

- El ítem 8 (Ver ilustración 10.13-15 en Anexo 13) arroja resultados parecidos a los del ítem 5; observamos que la pregunta presenta dificultades en el proceso cognitivo de sustitución, dado que es muy elevada la cantidad de alumnos que no supieron y/o no contestaron la pregunta: 55 de un total de 149 casos para el ciclo 2013-2014, lo que equivale a 36,9% de no respuesta, y 59 de 164 casos para el ciclo 2014-2015, lo que

representa un 36%. Por otra parte, en los casos válidos observamos que en ambos ciclos las respuestas totalmente correctas son mayoritarias, alcanzando el 64,9% y el 51,4%, respectivamente. Las respuestas con error son menores en el ciclo 2013-2014, un 29,8%, en comparación con las del ciclo 2014-2015, donde alcanzan un 44,8%. Finalmente los casos que dieron una respuesta parcial fueron del 5,3% y del 3,8%, respectivamente.

- Tipo de error: En los 28 casos de respuesta errónea del ciclo 2013-2014, 13 (46,4%) cometieron errores de “origen en un obstáculo”, mientras que 5 (17,9%) cometieron errores de “origen en la ausencia de sentido” (Ilustración 5-4) y los 10 restantes cometieron un error de “origen afectivo y/o emocional”. Por otra parte, de los 47 alumnos que cometieron errores del ciclo 2014-2015 encontramos 20 (42,6%) con “origen en un obstáculo”, 15 con “origen en la ausencia de sentido” (31,9%) y los 12 casos restantes con “origen afectivo y/o emocional” (25,5%) (Ver ilustración 10.13-16 en Anexo 13).
- En las respuestas al ítem 9 vemos que los alumnos comprendieron el proceso de sustitución solicitado, alcanzando elevados porcentaje de respuesta totalmente correcta en ambos ciclos (76,7% y 86,6% respectivamente) (Ver ilustración 10.13-17 en Anexo 13). En 2013-2014 son 24 los casos con error en la respuesta (23,3%) mientras que en 2014-2015 se reducen a 20 (12,7%). Finalmente, solo un caso en el segundo grupo realizó una respuesta parcial (0,6%).
- Tipo de error: En los casos con error en el ítem 9 de ambos ciclos lectivos encontramos que predomina el error de “origen en la ausencia de sentido”, como vemos en el ejemplo de la ilustración 5-5, donde el alumno necesita particularizar la expresión otorgándole un valor numérico a la variable. En concreto son 32 los casos de error para 2013-2014 (94,1%) y 16 los casos para 2014-2015 (80%). Ambos grupos presentan asimismo casos de origen de error en un obstáculo (2,97% y 15% respectivamente) y algún caso de error de origen afectivo y/o emocional (2,9% y 5% respectivamente) (Ver ilustración 10.13-18 en Anexo 13).

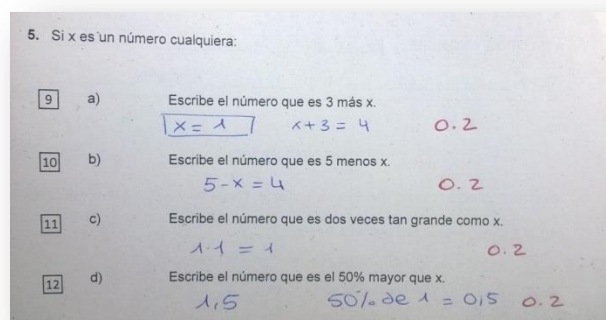


Ilustración 5-5: Error de origen en la ausencia de sentido en los ítems del 9 al 12.

Fuente: Cuestionario 1 de un alumno de 1º de bachillerato del ciclo lectivo 2013-2014.

- El ítem 10 presenta resultados similares a los encontrados en el ítem 9; los alumnos comprendieron el proceso de sustitución solicitado, alcanzando elevados porcentaje de respuesta totalmente correcta para ambos ciclos (71,2% y 75,8% respectivamente). En 2013-2014 son 42 los casos con error en la respuesta (28,8%), con resultados parecidos en 2014-2015 cuando son 37 (23,6%). Solo un caso en el segundo grupo realizó una respuesta parcial (0,6%) (Ver ilustración 10.13-19 en Anexo 13).
 - Tipo de error: Como en el ítem anterior, los casos de error que predominan en éste, para ambos ciclos lectivos, son de error de origen en la ausencia de sentido (Ilustración 5-5). Son 39 casos en 2013-2014 (92,9%) y 32 casos en 2014-2015 (86,5%). Ambos grupos presentan algunos casos de origen de error en un obstáculo (2,4% y 8,1%) y otros de error de origen afectivo y/o emocional (4,8% y 5,4% respectivamente) (Ver ilustración 10.13-19 en Anexo 13).
- En el ítem 11 observamos que las respuestas totalmente correctas predominan en ambos ciclos, pero con valores menores que en los ítems anteriores. Específicamente en el 2013-2014 hablamos de 96 casos (67,6%) y en el 2014-2015, de 120 (77,4%). El número de alumnos que cometió algún error es superior en el primer ciclo lectivo considerado, 46 casos (32,4%), que en el segundo, donde se trata de 35 casos (22,6%) (Ver ilustración 10.13-20 en Anexo 13).
 - Tipo de error: El error que vuelve a predominar en ambos ciclos corresponde al “origen en la ausencia de sentido” (Ilustración 5-5), siendo el 93,5% de los casos en el 2013-2014 y el 82,9% en el 2014-2015 (Ver ilustración 10.13-21 en Anexo 13). Encontramos pocos casos con errores de “origen en un obstáculo”

(2 y 3 casos, lo que equivale al 4,3% y al 8,6%, respectivamente). Lo mismo ocurre con los errores de “origen afectivo y/o emocional” que alcanzaron el 2,2% y 8,6% en cada ciclo lectivo.

- El último ítem con el que evaluamos el proceso cognitivo de sustitución, el ítem 12, presenta un elevado número de casos con error. Los valores alcanzaron el 61,5% en el ciclo 2013-2014 y el 55,7% en el 2014-2015. Las respuestas correctas parciales se dieron solo en 2 casos en el primer ciclo (1,4%) y en 30 casos en el segundo (20,1%). Las respuestas totalmente correctas fueron del 37,1% en 2013-2014 y del 24,2% en 2014-2015 (Ver ilustración 10.13-23 en Anexo 13)
 - Tipo de error: El error predominante, tanto en 2013-2014 como en 2014-2015, ha sido de “origen en la ausencia de sentido” (94,3% y 92,7%) como podemos observar en la ilustración 5-6, donde el alumno no identifica “x” como la unidad que equivale al 100%. Por otra parte el error con “origen en un obstáculo” solo es del 1,1% para el primer grupo y de 3,7% para el segundo. Los alumnos que cometieron error de “origen afectivo y/o emocional” fueron del 4,5% y del 3,7%, respectivamente (Ver ilustración 10.13-24 en Anexo 13).

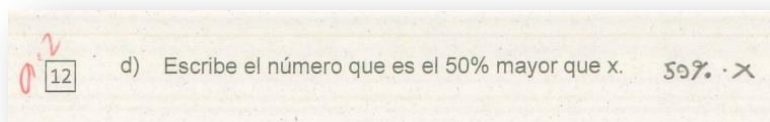


Ilustración 5-6: Error de origen en la ausencia de sentido en el ítem 12.

Fuente: Cuestionario 1 de un alumno de 1º de bachillerato del ciclo lectivo 2014-2015.

Resumen de resultados

La ilustración 5-7 nos muestra los resultados de los doce primeros ítems correspondientes al proceso de sustitución y podemos observar como la gran mayoría de alumnos de ambos ciclos lectivos ha respondido correctamente las cuestiones solicitadas, en diez de doce ítems en total, de lo que se desprende que han comprendido bien la situación que se planteaba. El ítem que presentó mayor dificultad fue el número 12 (Ilustración 5-6), donde más de la mitad de los alumnos de cada ciclo entendió que lo que se pedía en la expresión “50% mayor que x” era “50% de x”.

En cuanto al origen de los errores observados, podemos concluir que en los ocho primeros ítems, son mayoritariamente de “origen en un obstáculo”. Los errores con este origen que se han repetido con mayor frecuencia son:

- Los de necesidad de clausura, en los que el alumno no acepta que el resultado sea una expresión lineal con variables en uno de los términos y no da un número, como vimos en el ejemplo en el ítem 1, (Ilustración 5-2), por lo que termina igualando la expresión a cero y aísla la variable.
- Los de concatenación o yuxtaposición, en los que el alumno no acepta que el resultado sea una combinación lineal, y termina sumando los dos términos

También hemos podido observar en estos primeros ítems errores de procedimiento con “origen en la ausencia de sentido”, en los que el alumno confunde el producto con la propiedad distributiva al aplicarla, como vimos en el ejemplo de la ilustración 5-3. En los últimos cuatro ítems observamos que predomina el error con “origen en la ausencia de sentido”; el alumno comete un error al particularizar, debido a que no sabe cómo trabajar con las letras y necesita darles valores numéricos, como vimos en la ilustración 5-5. Por otro lado, observamos que el porcentaje de valores perdidos (“no sabe/no responde”) oscila entre el 2% y el 9,5% en general, excepto en los ítems del 5 al 8, donde oscila entre el 16% y el 37%. Estos porcentajes nos indican que aproximadamente la cuarta parte de la población de alumnos de ambos ciclos tuvo dificultad en comprender lo que se estaba pidiendo en estas preguntas.

Ítem	Porcentaje de respuestas correctas		Tipo de “origen de error” más frecuente por ítem	
	2013-2014	2014-2015	2013-2014	2014-2015
1	78%	68,9%	66,7% Obstáculo	84% Obstáculo
2	67%	56,5%	63,6% Obstáculo	54,1% Obstáculo
3	13,5% parcial 44% total	21,6% parcial 51,6% total	88,3% Ausencia de sentido	56% Ausencia de sentido
4	92,6%	98%	37,5% Afectivo y/o emocional Y 37,5% Obstáculo	66,7% Afectivo y/o emocional
5	53,3%	60,2%	72,5% Obstáculo	72,1% Obstáculo
6	94,9%	98,5%	66,7% Obstáculo	100% Afectivo y/o emocional
7	73%	54,4%	63,3% Obstáculo	53,3% Obstáculo
8	64,9%	51,4%	46,4% Obstáculo	42,2% Obstáculo
9	76,7%	86,6%	94% Ausencia de sentido	80% Ausencia de sentido
10	71,2%	75,8%	92,9% Ausencia de sentido	86,5% Ausencia de sentido
11	67,6%	77,4%	93,5% Ausencia de sentido	82,9% Ausencia de sentido
12	1,4% parcial 37,1% total	20,1% parcial 24,2% total	94,3% Ausencia de sentido	92,7% Ausencia de sentido

Ilustración 5-7: Resumen de respuestas totalmente (o parcialmente, en ocasiones) correctas y tipos de "origen de error" del proceso algebraico de sustitución

Fuente: De elaboración propia. Base cuestionario 1

5.2.2. Resultados del Proceso Algebraico de Generalización

Los ítems del 13 al 30 del cuestionario 1 y los del 30 a 35 del cuestionario 2 (Anexo 2) nos van a permitir evaluar a los alumnos en el proceso cognitivo de generalización. Los resultados los exponemos comparando los ciclos lectivos y señalando, en aquellos casos en que se cometieron errores, el tipo de origen de error a que corresponden y el porcentaje de los que lo cometieron:

- En el ítem 13 las respuestas son en su mayoría totalmente correctas para ambos ciclos, un total de 127 (87%) en el ciclo 2013-2014 y 148 (93,7%) en el 2014-2015. Por consiguiente observamos un bajo índice de error en ambos ciclos, el 13% y el 6,3%. En esta ocasión el segundo grupo tuvo mayor efectividad de respuesta (Ver ilustración 10.13-25 en Anexo 13).
 - Tipo de error: En ambos ciclos, los errores cometidos en el ítem 13 son en gran parte de "origen de ausencia de sentido" (89,5% y 100%, respectivamente). Sólo 2 casos del ciclo 2013-2014 tienen error de "origen afectivo y/o emocional" (10,5%) (Ver ilustración 10.13-26 en Anexo 13).

- En el ítem 14, como en el anterior, encontramos que la mayoría de las respuestas alcanzadas son totalmente correctas en ambos ciclos, un total de 128 (88,3%) en el ciclo 2013-2014 y de 146 (92,4%) en el 2014-2015. Se observan también poca cantidad de errores, el 11,7% y el 7,6%, respectivamente. En este ítem también el segundo grupo tuvo mayor efectividad de respuesta (Ver ilustración 10.13-27 en Anexo 13).
 - Tipo de error: el error que predomina es el de "origen en la ausencia de sentido" en ambos ciclos (94,1% y 91,7%, respectivamente). Para ambos ciclos lectivos solo tenemos un caso con error de "origen afectivo y/o emocional", representando el 5,9% para el primer grupo y 8,3% para el segundo (Ver ilustración 10.13-28 en Anexo 13).

- En el ítem 15, observamos resultados similares por lo que deducimos que los alumnos comprendieron el proceso de generalización solicitado, alcanzando elevados porcentajes de respuesta totalmente correcta en ambos ciclos (80,1% y 78,2%, respectivamente). En el 2013-2014 se dan 29 casos con error (19,9%) mientras que en el 2014-2015, son 37 casos (21,8%) (Ver ilustración 10.13-29 en Anexo 13).
 - Tipo de error: De los 29 casos del ciclo 2013-2014 que contestaron erróneamente, 3 de ellos (10,3%) cometieron un error de “origen en un obstáculo”, mientras que 24 (82,8%) presentan un error de “origen en ausencia de sentido” y los 2 restantes cometieron un error de “origen afectivo y/o emocional”. De los 34 casos con error del ciclo 2014-2015 encontramos 6 casos (17,6%) de error con “origen en un obstáculo”, 25 casos de error de “origen de ausencia de sentido” (73,5%) y los 3 casos restantes, se debieron a un error con “origen afectivo y/o emocional” (8,8%) (Ver ilustración 10.13-30 en Anexo 13).

- En las respuestas al ítem 16 se mantiene la tendencia de los anteriores; la mayoría de alumnos comprendieron el proceso de generalización solicitado, alcanzando elevados porcentaje de respuesta totalmente correcta en ambos ciclos (89,6% y 91,6%, respectivamente). En 2013-2014 observamos 8 casos con error en la respuesta (5,6%) y 7 casos con respuesta parcial (4,9%); mientras que en 2014-2015 tenemos 11 casos (7,1%) erróneos y 2 casos (1,3%) con respuesta parcial (Ver ilustración 10.13-31 en Anexo 13).
 - Tipo de error: El tipo de error predominante en el ciclo lectivo 2013-2014 es el error de “origen en la ausencia de sentido”, representando el 75% (6 casos), seguido del error de “origen afectivo y/o emocional” (25%). En el ciclo 2014-2015 observamos 6 alumnos que cometieron un error de “origen afectivo y/o emocional” (54,5%) y 5 casos de error de “origen en la ausencia de sentido” (45,5%) (Ver ilustración 10.13-32 en Anexo 13).

- En el ítem 17 vemos que, en el ciclo 2013-2014, el número de casos con respuestas totalmente correctas es de 69 (47,9%), mientras que 64 alumnos dieron una respuesta correcta parcial (44,4%). En el ciclo 2014-2015, el 53,5% tuvo una respuesta totalmente correcta y el 38,7% una respuesta correcta parcial. Así pues una gran

cantidad de alumnos no acabaron el procedimiento que se les pedía en la pregunta, como muestra la ilustración 5-8. Y fueron 11 alumnos los que cometieron errores en el primer ciclo (7,6%) y 12 en el segundo (7,7%) (Ver ilustración 10.13-33 en Anexo 13).

- Tipo de error: el tipo de error que predominó en este ítem es el de “origen en la ausencia de sentido”, con un 72,7% (8 casos) y un 75% (9 casos) para cada ciclo respectivamente. Más escaso fue el error de “origen afectivo y/o emocional” siendo 3 alumnos en el 2013-2014 (27,3%), y 6 alumnos en el 2014-2015 (Ver ilustración 10.13-34 en Anexo 13).

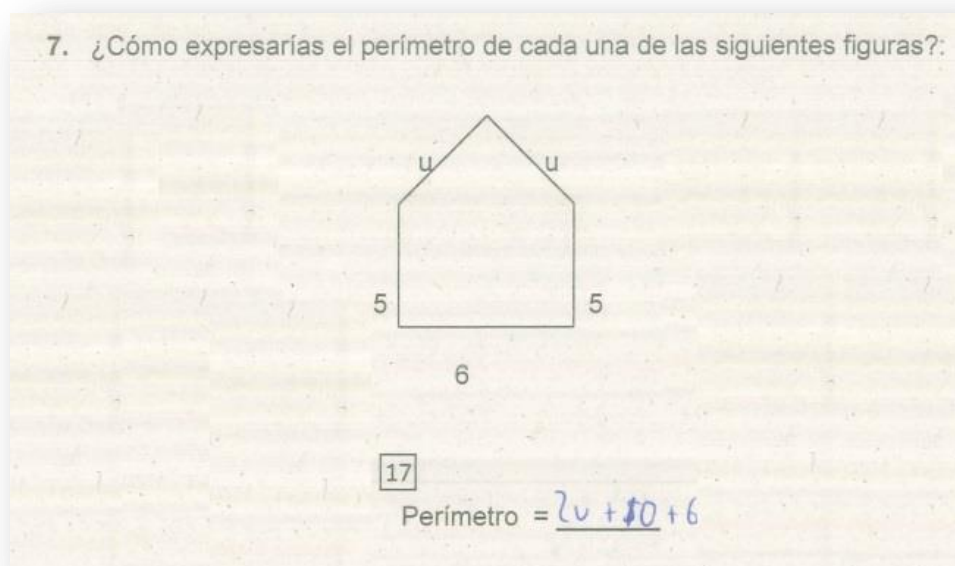


Ilustración 5-8: Respuesta parcialmente correcta en el ítem 17.

Fuente: Cuestionario 1 de un alumno de 1º de bachillerato del ciclo lectivo 2014-2015.

- En el ítem 18 encontramos gran diferencia entre los ciclos lectivos al considerar el número de respuestas correctas. En 2013-2014, 101 alumnos respondieron de forma totalmente correcta (69,7%) y 7 lo hicieron de forma parcialmente correcta (4,8%); en 2014-2015 el número de respuestas totalmente correctas disminuyó a 58 casos (37,2%), y aumentaron en gran número las respuestas correctas parciales, siendo de 64 (41%). En lo que respecta a las respuestas con error el primer grupo presenta 37 casos (25,5%) y el segundo 34 casos (21,8%) (Ver ilustración 10.13-35 en Anexo 13).
 - Tipo de error: De los casos del ciclo 2013-2014 que contestaron erróneamente 2 de ellos (5,4%) cometieron un error con “origen en un obstáculo”, 18 casos son de “origen en la ausencia de sentido” (48,6%) y los 17 restantes de “origen

afectivo y/o emocional” (45,9%). En el ciclo 2014-2015 vemos que, de un total de 34 casos, 23 de ellos (67,6%) responden a un error de “origen afectivo y/o emocional” y los 11 restantes son de “origen en la ausencia de sentido” (32,4%) (Ver ilustración 10.13-36 en Anexo 13).

- En el ítem 19, las respuestas son mayoritariamente totalmente correctas en ambos ciclos, con 131 alumnos (87,9%) en el de 2013-2014 y 152 (97,4%) en el de 2014-2015. Por consiguiente se observan muy pocos errores, un 7,1% y un 2,6% en los ciclos respectivos. En esta ocasión fue el segundo grupo el que tuvo mayor efectividad de respuestas correctas (Ver ilustración 10.13-37 en Anexo 13).
 - Tipo de error: observamos que, en el ciclo 2013-2014, la mitad de los errores de un total de 10 casos son de “origen en la ausencia de sentido” y la otra mitad de “origen afectivo y/o emocional” (50%, respectivamente). En el 2014-2015 de los 4 casos que cometieron errores, 1 es error de “origen en la ausencia de sentido” (25%) y el resto de “origen afectivo y/o emocional” (75%) (Ver ilustración 10.13-38 en Anexo 13).

- El ítem 20 muestra, como el ítem 17, un elevado porcentaje de respuestas correctas (88% y 98,1%, respectivamente). En el ciclo 2013-2014 el número de casos con respuestas totalmente correctas es de 70 (49,3%), mientras que en el ciclo 2014-2015 el número llega a ser de 90 casos (58,4%). Por otra parte, 55 alumnos dieron una respuesta correcta parcial (38,7%) en el primer ciclo lectivo y 61 en el segundo ciclo (39,6%). Finalmente, 17 alumnos cometieron errores en el primer ciclo (12%) y 3 en el segundo (1,9%). En este sentido el segundo grupo tuvo un 10,1% más de efectividad en este ítem (Ver ilustración 10.13-39 en Anexo 13).
 - Tipo de error: Encontramos para ambos ciclos un predominio claro del error de “origen afectivo y/o emocional”: 12 casos (70,6%) en el 2013-2014 y 2 casos (66,7%) en el 2014-2015. Por otra parte, ambos grupos presentan algunos casos de error de “origen de ausencia de sentido” (29,4% y 33,3%, respectivamente) (Ver ilustración 10.13-40 en Anexo 13).

- En el ítem 21 sigue la tendencia de los ítems anteriores y se alcanzan elevados porcentajes de respuesta totalmente correcta en ambos ciclos (82,9% y 85,8%,

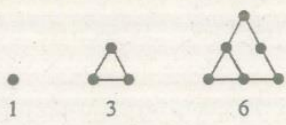
respectivamente). En 2013-2014 son 24 los casos de error en la respuesta (17,1%) y en 2014-2015 son 21 (14,2%). En esta oportunidad el primer grupo tuvo un 2,9% más de efectividad en la respuesta evaluada. (Ver ilustración 10.13-41 en Anexo 13).

- Tipo de error: Entre los casos del ciclo 2013-2014 que contestaron erróneamente, 6 de ellos (25%) cometieron un error cuyo origen se encuentra en un obstáculo, 16 casos (66,7%) presentan un error de origen en la ausencia de sentido y 2 (8,3%) son casos con origen afectivo y/o emocional. En el ciclo 2014-2015 vemos que, de un total de 21 casos, 18 de ellos (85,7%) responden a un error que presenta “origen en la ausencia de sentido” y los 3 casos restantes son de “origen afectivo y/o emocional” (14,3%) (Ver ilustración 10.13-42 en Anexo 13).
- El ítem 22 presenta resultados similares a los anteriores, alcanzando porcentajes de respuesta totalmente correcta superiores al 50% en ambos ciclos (65% y 56%, respectivamente) y 1 caso de respuesta parcial en el primer grupo (0,7%). No obstante observamos un aumento en los casos que cometieron errores, siendo 49 en el 2013-2014 (34,3%) y 70 en el 2014-2015 (44%) (Ver ilustración 10.13-43 en Anexo 13).
- Tipo de error: El error predominante, tanto en 2013-2014 como en 2014-2015, ha sido de “origen en la ausencia de sentido” (83,7% y 92,9%). Hay también 8 y 5 casos, respectivamente, que cometieron un error de “origen afectivo y/o emocional” lo que representa el 16,3% y el 7,1% (Ver ilustración 10.13-44 en Anexo 13).
- En el ítem 23 observamos que el índice de casos con error en ambos ciclos (50,4% y 52,9%, respectivamente) es mayor respecto a otros ítems. En las respuestas totalmente correctas los índices alcanzan el 48,9% en el primer grupo y el 47,1% en el segundo. Sólo se presenta 1 caso de respuesta correcta parcial para el ciclo 2013-2014 (Ver ilustración 10.13-45 en Anexo 13).
- Tipo de error: En ambos ciclos lectivo predomina el error de “origen en la ausencia de sentido” con el 86,8% (59 casos) en el 2013-2014 y con el 80,2% en el 2014-2015, como muestra la ilustración 5-9, donde el alumno comete un error de procedimiento que se deriva del uso inapropiado que hace de las fórmulas o de la reglas de procedimiento, es decir, que no puede establecer la

expresión algebraica que generaliza el patrón. Por otra parte, encontramos errores con “origen afectivo y/o emocional” en ambos ciclos con un 13,2% y un 19,8% respectivamente (Ver ilustración 10.13-46 en Anexo 13).

9.

a) Los números 1, 3, 6, ..., $\frac{n(n+1)}{2}$, reciben el nombre de números triangulares, ya que podían ser dispuestos en forma de triángulos:



¿Podrías dibujar el triángulo que ocupa la posición 6?

23




Ilustración 5-9: Error de origen en la ausencia de sentido en el ítem 23.

Fuente: Cuestionario 1 de un alumno de 1º de bachillerato del ciclo lectivo 2014-2015.

➤ En el ítem 24, como en el anterior, observamos gran dificultad para responder la pregunta, puesto que 33 alumnos (22,1%) en el ciclo 2013-2014 y 37 de 164 alumnos (22,6%) en el ciclo 2014-2015, no supieron y/o no contestaron la pregunta. Por otro lado, un 62,9% del ciclo 2013-2014 y un 51,1% del ciclo 2014-2015 de los que respondieron cometieron algún error. Las respuestas totalmente correctas no llegan a la mitad de los casos, siendo del 35,3% y 43,3%, respectivamente. Los casos que dieron una respuesta parcial fueron del 1,7% para el primer grupo y del 1,6% para el segundo (Ver ilustración 10.13-47 en Anexo 13).

- Tipo de error: Entre los casos con error vemos que, en ambos ciclos lectivos, predomina el error de “origen de ausencia de sentido”, pues, como muestra la ilustración 5-10, los alumnos parecen tener dificultad para relacionar el número triangular “45” con la expresión algebraica que generaliza el patrón. Con el mismo origen de error encontramos en 2013-2014, 57 alumnos (78,1%) y 57 (81,4%) en 2014-2015. Ambos grupos presentan casos de error con

“origen afectivo y/o emocional” en menor cantidad (21,9% y 18,6% respectivamente) (Ver ilustración 10.13-48 en Anexo 13).

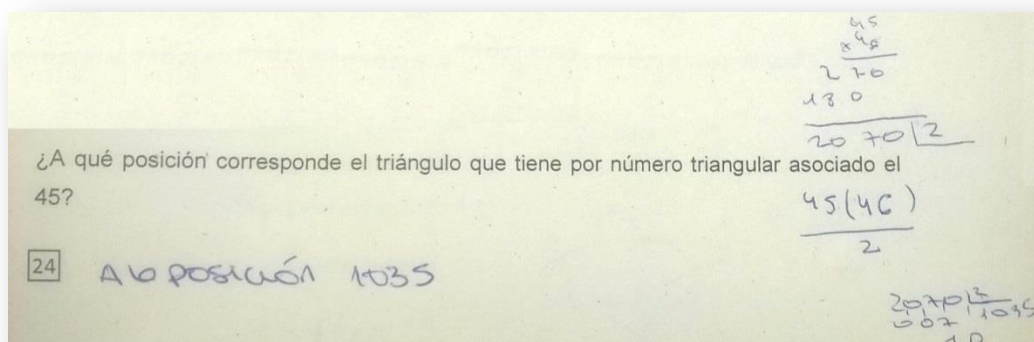


Ilustración 5-10: Error de origen en la ausencia de sentido en el ítem 24.

Fuente: Cuestionario 1 de un alumno de 1º de bachillerato del ciclo lectivo 2013-2014.

- En el ítem 25, la mayoría las respuestas son totalmente correctas en ambos ciclos, con un total de 108 (75%) en el de 2013-2014 y 120 (76,4%) en el de 2014-2015. Se observa una cantidad de errores que no alcanza al 25% de las respuestas siendo 35 casos (24,3%) en el primer grupo y 37 casos en el segundo (23,6%) (Ver ilustración 10.13-49 en Anexo 13).
 - Tipo de error: el origen de error predominante, tanto en 2013-2014 como en 2014-2015 es el de “origen en la ausencia de sentido” con 24 y 26 casos, lo que equivale al 68,6% y 70,3% respectivamente. Por otra parte, son 11 en cada grupo los alumnos que cometieron un error de origen “afectivo y/o emocional”, lo que representa el 31,4% y el 29,7% respectivamente (Ver ilustración 10.13-50 en Anexo 13).

- En el ítem 26 encontramos similitudes entre ciclos lectivos en lo que respecta a las respuestas correctas. En 2013-2014 el 55,1%, 76 casos, presentan una respuesta totalmente correcta y sólo el 1,4% da respuestas parciales (2 casos); en el ciclo 2014-2015 el valor de respuestas totalmente correctas asciende a 95 casos (61,7%) y también observamos 2 respuestas correctas parciales (1,3%). En las respuestas con error el primer grupo presenta 60 casos (43,5%) y el segundo grupo 57 (37%) (Ver ilustración 10.13-51 en Anexo 13).

- Tipo de error: De los 60 casos del ciclo 2013-2014 que respondieron erróneamente, 39 de ellos (65%) cometieron un error de “origen de ausencia de sentido” y los 21 restantes cometieron un error de “origen afectivo y/o emocional”. Por otra parte, entre los 57 casos con error del ciclo 2014-2015 encontramos 2 (3,5%) que corresponden a un error de “origen en un obstáculo”, 24 con un error de “origen de ausencia de sentido” (42,1%) y los 31 casos restantes responden a un error de “origen afectivo y/o emocional” (54,4%) (Ver ilustración 10.13-52 en Anexo 13).
- A diferencia de lo ocurrido en los ítems anteriores, en el ítem 27 vemos que los alumnos tuvieron mayores dificultades en generalizar puesto que la cantidad de alumnos que no supieron y/o no contestaron la pregunta fue de 31 sobre un total de 149 casos para el ciclo 2013-2014, lo que equivale a 20,8% de no respuesta, mientras que para el ciclo 2014-2015 el valor alcanzó a 33 de 164 casos, equivalente al 20,1%. Por otra parte, en los casos válidos observamos una mayoría de respuestas con error en ambos ciclos (66,1% y 58,8%, respectivamente). Las respuestas totalmente correctas no superan un tercio de los casos, siendo del 31,4% y del 35,9% respectivamente. Los casos que dieron una respuesta parcial alcanzaron el 2,5% en el primer grupo y el 5,3% en el segundo (Ver ilustración 10.13-53 en Anexo 13).
- Tipo de error: Entre los casos del ciclo 2013-2014 que contestaron erróneamente, 32 de ellos (41%) responden a un error de “origen en la ausencia de sentido” y los 46 casos restantes a un error de “origen afectivo y/o emocional” (59%), como muestra el ejemplo de la ilustración 5-11, donde el alumno no realiza el punteado correspondiente para no perder tiempo, pero sabe el número de puntos que corresponden. En el ciclo 2014-2015 encontramos que entre un total de 77 casos, 2 de ellos (2,6%) cometieron un error de “origen en un obstáculo”, 29 (17,7%) presentan un error de “origen en la ausencia de sentido” y 46 (28%) un error de “origen afectivo y/o emocional” (Ver ilustración 10.13-54 en Anexo 13).

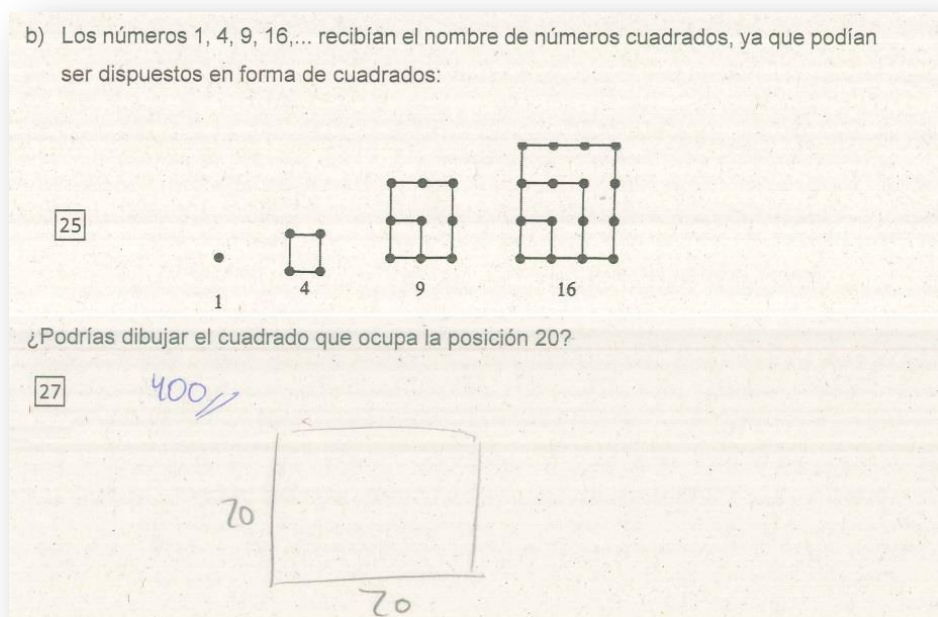


Ilustración 5-11: Error de origen afectivo y/o emocional en el ítem 27.

Fuente: Cuestionario 1 de un alumno de 1º de bachillerato del ciclo lectivo 2014-2015.

- En el ítem 28 encontramos altos porcentajes de respuestas correctas en ambos ciclos lectivos. En 2013-2014, 86 casos (67,7%) dan una respuesta totalmente correcta y en 2014-2015 el valor de respuestas totalmente correctas asciende a 111 casos (75,5%). En 2014-2015 también se observa 1 respuesta correcta parcial (0,7%). En lo que respecta a las respuestas con error, el primer grupo presenta 41 casos (32,3%) y el segundo grupo 35 casos (23,8%) (Ver ilustración 10.13-55 en Anexo 13).
 - Tipo de error: De los casos con error en este ítem encontramos que en ambos ciclos lectivos predomina el error de “origen en la ausencia de sentido” con 31 casos (75,6%) en 2013-2014 y 23 casos (65,7%) en 2014-2015. Por otra parte, ambos grupos presentan casos con error de “origen en un obstáculo” (9,8% y 2,9%, respectivamente) y casos de error de “origen afectivo y/o emocional” (14,6% y 31,4%, respectivamente) (Ver ilustración 10.13-56 en Anexo 13).
- En el ítem 29 observamos también un elevado índice de respuestas totalmente correctas: 63,3% y 68,2% para cada ciclo. No obstante, 44 alumnos en 2013-2014 y 39 alumnos en 2014-2015 cometieron errores, es decir, el 36,7% y el 30,2%,

respectivamente. Sólo 2 alumnos del ciclo 2014-2015 dieron una respuesta correcta parcial (1,6%) (Ver ilustración 10.13-57 en Anexo 13).

- Tipo de error: De los 44 casos de 2013-2014 que contestaron erróneamente, 4 (9,1%) cometieron un error de “origen en un obstáculo”, mientras que 34 (77,3%) cometieron un error de “origen de ausencia de sentido” y los 6 restantes cometieron un error de “origen afectivo y/o emocional” (13,6%). Por otra parte, de los 39 casos con error del ciclo 2014-2015 encontramos 1 caso (2,6%) que corresponde a un error con “origen en un obstáculo”, 30 casos que presentan un error de “origen en la ausencia de sentido” (76,9%) y los 8 casos restantes son de error de “origen afectivo y/o emocional” (20,5%) (Ver ilustración 10.13-58 en Anexo 13).
- En el ítem 30, observamos altos índices de respuesta totalmente correcta para ambos ciclos (97,9% y 96,8%, respectivamente). En 2013-2014, se dieron 2 casos con error en la respuesta (1,4%), mientras que en 2014-2015 fueron 5 los casos erróneos (3,2%) (Ver ilustración 10.13-59 en Anexo 13).
- Tipo de error: en el ciclo 2013-2014, de los 2 casos que respondieron erróneamente, uno es de “origen en la ausencia de sentido” y el otro es de “origen afectivo y/o emocional” (50% c/u). Mientras que para el ciclo 2014-2015 los 5 casos cometieron un error de “origen en la ausencia de sentido” (100%) (Ver ilustración 10.13-60 en Anexo 13).
- En este ítem 31 observamos dos particularidades: En primer lugar se da un elevado número de casos con error en ambos ciclos, alcanzando los valores el 51,1% en 2013-2014 y el 45,1% en 2013-2014. En segundo lugar, también es elevada la cantidad de respuestas correctas parciales, con 35 casos (24,8%) en el primer ciclo y 38 (20,1%) casos en el segundo. Por otra parte, las respuestas totalmente correctas alcanzaron el 24,1% en 2013-2014 y el 30,1% en 2014-2015 (Ver ilustración 10.13-61 en Anexo 13).
- Tipo de error: En el ciclo 2013-2014, de los 71 casos con respuestas erróneas, 69 corresponden a un error de “origen en la ausencia de sentido” (97,2%) como el ejemplo que muestra la ilustración 5-12, donde el error se debe a las características propias del lenguaje algebraico, es decir, el alumno no comprende el concepto de “q” y “s” como variables. Los 2 casos restantes son

con “origen afectivo y/o emocional” (2,8%). También en el ciclo 2014-2015 los 69 casos cometieron un error de “origen en la ausencia de sentido” (100%) (Ver ilustración 10.13-62 en Anexo 13).

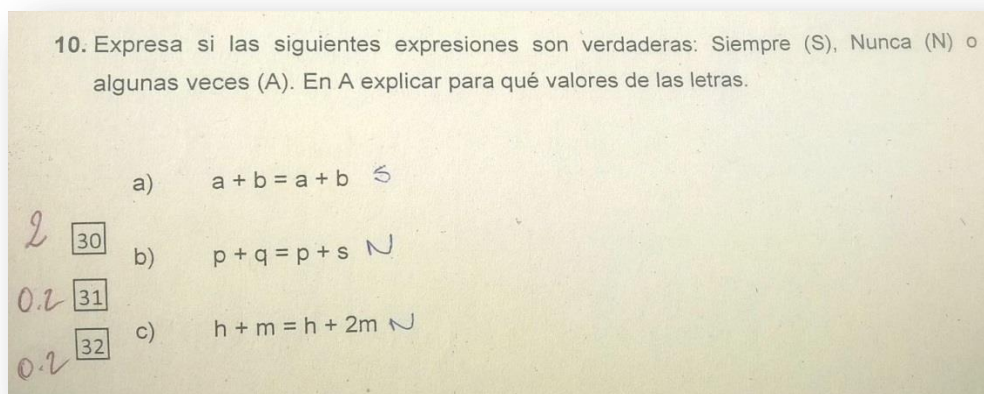


Ilustración 5-12: Error de origen de ausencia de sentido en el ítem 31 y 32.

Fuente: Cuestionario 2 de un alumno de 1º de bachillerato del ciclo lectivo 2013-2014.

- En el ítem 32 observamos asimismo un elevado número de casos con error en ambos ciclos: un 78,7% en 2013-2014 y el 76,7% en 2014-2015. El número de respuestas correctas parciales fueron 13 (9,2%) en el primer ciclo y 17 (11,3%) en el segundo. Por otra parte las respuestas totalmente correctas solo alcanzaron el 12,1% en 2013-2014 y el 12% en 2014-2015 (Ver ilustración 10.13-63 en Anexo 13).
 - Tipo de error: Como en los ítems anteriores, de los 111 casos que respondieron erróneamente en 2013-2014, 110 (99,1%) responden a un error de “origen en la ausencia de sentido” (Ilustración 5-12) y solo 1 (0,9%) a un error de “origen afectivo y/o emocional”. Mientras que para el ciclo 2014-2015 los 114 casos (100%) cometieron un error de “origen en la ausencia de sentido” (Ver ilustración 10.13-64 en Anexo 13).

- En el ítem 33 observamos un elevado número de casos con error en ambos ciclos, un 78,3% en 2013-2014 y un 79,9% en 2014-2015. Las respuestas totalmente correctas solo fueron un 21,7% en 2013-2014 y un 20,1% en 2014-2015 (Ver ilustración 10.13-65 en Anexo 13).
 - Tipo de error: En 2013-2014 de los 112 casos que respondieron erróneamente, 111 (99,1%) responden a un error de “origen en la ausencia de sentido” y solo

1 caso (0,9%) a un error de “origen afectivo y/o emocional”. En 2014-2015 los 122 casos (100%) cometieron un error de “origen en la ausencia de sentido”, como nos muestra la ilustración 5-13, donde el alumno considera que “p” sólo toma valores positivos o cero, sin analizar la posibilidad de que “p” tome valores negativos (Ver ilustración 10.13-66 en Anexo 13).

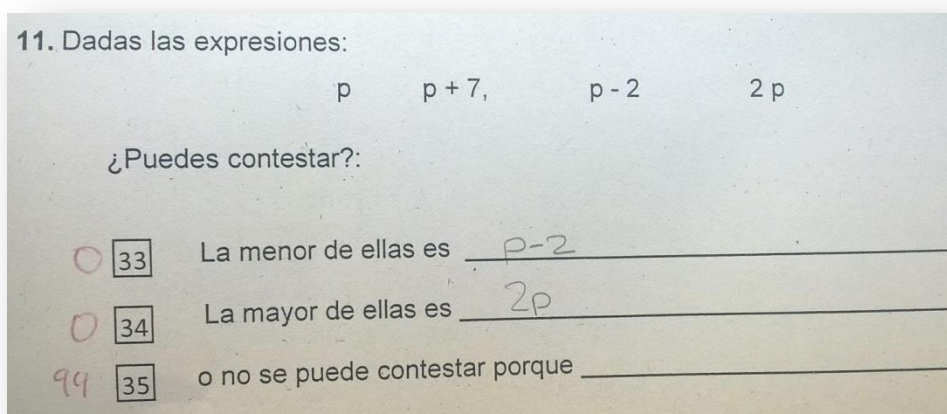


Ilustración 5-13: Error de origen de ausencia de sentido en los ítems 33, 34 y 35.

Fuente: Cuestionario 2 de un alumno de 1º de bachillerato del ciclo lectivo 2014-2015.

- En el ítem 34, a diferencia de los ítems anteriores, encontramos elevados porcentajes de respuesta totalmente correcta para ambos ciclos (73,4% y 72,2%, respectivamente). En 2013-2014, observamos 38 casos con error (26,6%) y en 2014-2015, 42 casos con error (27,8%) (Ver ilustración 10.13-67 en Anexo 13).
 - Tipo de error: de forma similar al ítem anterior (Ilustración 5-13) vemos que, en 2013-2014, de los 38 casos que respondieron erróneamente, 36 (94,7%) tienen “origen en la ausencia de sentido” y solo 2 casos (5,3%) son de “origen afectivo y/o emocional”. Mientras que en 2014-2015 los 42 casos (100%) cometieron un error de “origen en la ausencia de sentido” (Ver ilustración 10.13-68 en Anexo 13).

- El ítem 35 presenta dos particularidades, a semejanza de lo que vimos en el ítem 31. Se da un elevado número de casos con error, un 40,2% en 2013-2014 y un 43% en 2014-2015, puesto que la respuesta dependía de lo que el alumno respondiese en los dos ítems anteriores (Ilustración 5-12). Y es muy elevada la cantidad de respuestas

correctas parciales, 58 casos (43,9%) en el primer ciclo y 25 casos (16,8%) en el segundo. Por otra parte, las respuestas totalmente correctas son del 15,9% en 2013-2014 y del 40,3% en 2014-2015 (Ver ilustración 10.13-69 en Anexo 13).

- Tipo de error: Observamos que, en 2013-2014, de los 53 casos que respondieron erróneamente, 51 (96,2%) responden a un error de “origen en la ausencia de sentido” y solo 2 casos (3,8%) a un “error de origen afectivo y/o emocional”. Mientras que en 2014-2015, fueron 63 los casos (98,4%) que cometieron un error con “origen en la ausencia de sentido” y solo hubo 1 caso de error (1,6%) con “origen afectivo y/o emocional”. (Ver ilustración 10.13-70 en Anexo 13).

Resumen de resultados

Como podemos observar en la ilustración 5-14, los resultados de los 23 ítems correspondientes al proceso algebraico de generalización, muestran que más de la mitad de la población de alumnos de ambos ciclos lectivos ha respondido correctamente en 17 de los 23 ítems planteados (74%). No obstante se observa una disminución en la efectividad de las respuestas en comparación con los resultados de los primeros 12 ítems de sustitución.

En el caso de los que cometieron errores, vemos que en general fueron de “origen en la ausencia de sentido”, ya sea porque el alumno necesitaba particularizar, o porque confundía multiplicación con potencia, o porque usaba inapropiadamente las fórmulas o las reglas de procedimiento, o debido a las características propias del lenguaje algebraico. En algunos ítems también observamos algunos errores de “origen emocional y/o afectivo”, por distracción o por olvido. Donde observamos mayor dificultad es en los ítems 23, 24, 27, 31, 32 y 35. El ítem 27 destaca por un descenso notorio del índice de respuestas correctas, debido a que la mayoría de alumnos no lograron establecer la generalización, es decir, establecer la expresión algebraica que generaliza el patrón aritmético y validarlo de manera local.

Por otro lado, el índice de valores perdidos (“no sabe/no responde”) oscila en general entre el 2% y el 9,5%, excepto en los ítems del 27 al 29, donde aumenta hasta llegar a una media del 20%. Esto se debe en gran parte a que para resolver estos tres ejercicios el alumno debe

encontrar el patrón de comportamiento de los “números cuadrados”, y para conseguirlo debe alcanzar niveles más altos de abstracción.

Si sumamos los alumnos que no respondieron y los que cometieron errores, vemos que como mínimo la quinta parte de la población de alumnos de ambos ciclos tuvo dificultades en el proceso algebraico de generalización en cada ítem, principalmente en los cinco últimos. También observamos que el alumnado del ciclo 2013-2014 tiene un nivel más bajo que el del ciclo 2014-2015 en lo que respecta al proceso algebraico de generalización.

Ítem	Porcentaje de respuestas correctas		Tipo de “origen de error” más frecuente por ítem	
	2013-2014	2014-2015	2013-2014	2014-2015
13	87%	93,7%	89,5% Ausencia de sentido	100% Ausencia de sentido
14	88,3%	92,4%	94,1% Ausencia de sentido	91,7% Ausencia de sentido
15	80,1%	78,2%	82,8% Ausencia de sentido	73,5% Ausencia de sentido
16	89,6%	91,6%	75% Ausencia de sentido	45,5% Ausencia de sentido 54,5% Afectivo y/o emocional
17	44,4% parcial 47,9% total	38,7% parcial 53,5% total	72,7% Ausencia de sentido	75% Ausencia de sentido
18	69,7%	37,2%	48,6% Ausencia de sentido 45,9% Afectivo y/o emocional	32,4% Ausencia de sentido 67,6% Afectivo y/o emocional
19	92,9%	97,4%	50% Ausencia de sentido 50% Afectivo y/o emocional	75% Afectivo y/o emocional
20	38,7% parcial 49,3% total	39,6% parcial 58,4% total	70,6% Afectivo y/o emocional	66,7% Afectivo y/o emocional
21	82,9%	85,4%	66,7% Ausencia de sentido	85,7% Ausencia de sentido
22	65%	56%	83,7% Ausencia de sentido	92,9% Ausencia de sentido
23	0,7% parcial 48,9% total	0% parcial 47,1% total	86,8% Ausencia de sentido	80,2% Ausencia de sentido
24	1,7% parcial 35,3% total	1,6% parcial 43,3% total	78,1% Ausencia de sentido	81,4% Ausencia de sentido
25	75%	76,4%	68,6% Ausencia de sentido	72,7% Ausencia de sentido
26	55,1%	61,7%	65% Ausencia de sentido	50% Ausencia de sentido 50% Afectivo y/o emocional

27	2,5% parcial 31,4% total	5,3% parcial 35,9% total	41% Ausencia de sentido 59% Afectivo y/o emocional	37,7% Ausencia de sentido 59,7% Afectivo y/o emocional
28	67,7%	75,5%	75,6% Ausencia de sentido	65,7% Ausencia de sentido
29	63,3%	68,2%	77,3% Ausencia de sentido	76,9% Ausencia de sentido
30	97,9%	96,8%	50% Ausencia de sentido 50% Afectivo y/o emocional	100% Ausencia de sentido
31	24,8% parcial 24,1% total	24,8% parcial 30,1% total	97,2% Ausencia de sentido	100% Ausencia de sentido
32	9,2% parcial 12,1% total	11,3% parcial 12% total	99,1% Ausencia de sentido	100% Ausencia de sentido
33	78,3%	79,9%	99,1% Ausencia de sentido	100% Ausencia de sentido
34	73,4%	72,2%	94,7% Ausencia de sentido	100% Ausencia de sentido
35	43,9% parcial 15,9% total	16,8% parcial 40,3% total	96,2% Ausencia de sentido	98,4% Ausencia de sentido

Ilustración 5-14: Resumen de respuestas totalmente (parcialmente, en ocasiones) correctas y tipos de "origen de error" del proceso algebraico de generalización

Fuente: elaboración propia. Base cuestionario 1 y 2

5.2.3. Resultados del Proceso Algebraico de Modelización

En los ítems 36 a 39 del cuestionario 2 (Anexo 2) buscamos evaluar a los alumnos en el proceso cognitivo de modelización. Los resultados los exponemos, como hemos hecho en los apartados anteriores, comparando los dos ciclos lectivos y señalando a su vez, entre los que cometieron errores, a qué tipo de error corresponde y en que porcentajes lo cometieron:

- En el ítem 36, observamos dificultad en ambos ciclos lectivos para comprender lo que se plantea en el problema, puesto que un 10,7% en 2013-2014 y un 12,2% en 2014-2015 no saben o no responden la pregunta y, por otra parte, gran cantidad de alumnos de ambos ciclos cometen errores: un 48,3% y un 39% del total, respectivamente. Las respuestas totalmente correctas son del 45,1% en el primer ciclo y del 48,8% en el segundo (Ver ilustración 10.13-71 en Anexo 13).
 - Tipo de error: En ambos ciclos encontramos que el error predominante es el de "origen en la ausencia de sentido" con 71 casos (98,6%) en 2013-2014 y 57

casos (89,1%) en 2014-2015, como nos muestra el ejemplo de la ilustración 5-15 donde el alumno plantea de forma inapropiada la fórmula del área, confundiendo la suma con el producto. Los errores restantes responden a un origen afectivo y/o emocional, con una incidencia del 1,4% y el 10,9%, respectivamente (Ver ilustración 10.13-72 en Anexo 13).

12. Una persona tiene un terreno rectangular de dimensiones 12 metros de frente y 8 metros de fondo. Después, esa misma persona, compra un terreno contiguo de 64 metros cuadrados. Una segunda persona le propone cambiar su terreno completo por otro rectangular, en la misma calle, con la misma área y el mismo fondo, pero en mejor sitio. ¿Cuánto debe medir el frente del nuevo terreno para que el trato sea justo?

Handwritten calculations and diagrams:

- Diagram 1: Rectangle with width 12 and height 8.
- Diagram 2: Rectangle with width 33,6 and height 8.
- Handwritten calculations:

$$44 \cdot 32 = 1408 \text{ m}^2$$

$$24 \cdot 12 = 288 \text{ m}^2$$

$$\underbrace{\hspace{10em}}_{1120 \text{ m}^2}$$
- Final answer: $R: 33,4\text{m}$

Ilustración 5-15: Error de origen de ausencia de sentido en el ítem 36.

Fuente: Cuestionario 2 de un alumno de 1º de bachillerato del ciclo lectivo 2014-2015.

- En el ítem 37, encontramos elevados índices de error en ambos ciclos: un 66,4% en el primero y un 70,4% en el segundo, lo que nos indica que los alumnos tuvieron grandes dificultades para comprenderlo y responderlo. Las respuestas totalmente correctas llegan al 33,6% en 2013-2014 y al 28,9% en 2014-2015 y la respuesta parcial es del 0,7% y únicamente en el segundo grupo. (Ver ilustración 10.13-73 en Anexo 13).
 - Tipo de error: En ambos ciclos encontramos que el error que predomina es el de “origen en la ausencia de sentido”, con 90 casos (96,8%) en 2013-2014 y 101 casos (94,4%) en 2014-2015, como podemos observar en el ejemplo de la ilustración 5-16 donde el alumno sigue pensando de forma numérica y expresa que le faltan datos: “No podemos porque no se puede igualar con ningún dato”. Los errores restantes son con “origen afectivo y/o emocional” con el 3,2% y el 5,6% respectivamente (Ver ilustración 10.13-74 en Anexo 13).

13. En el supermercado un kilo de peras cuesta 90 céntimos de euro; un kilo de plátanos 1,20 euros, el kilo de ciruelas 1,90 euros, el kilo de naranjas 1,80 euros y cada kiwi cuesta b céntimos de euro. La familia de Ana tiene los siguientes gastos en fruta: Compran a la semana 2 kg. de peras, p kilos de plátanos, 3 kilos más de ciruelas que de plátanos y 6 kiwis.

¿Podrías decir cuánto gasta la familia de Ana en fruta en una semana?

$1,80 + \cancel{1,20}p + 3p$

37 No podem perquè no es pot igualar amb cap dada &

Ilustración 5-16: Error de origen de ausencia de sentido en el ítem 37.

Fuente: Cuestionario 2 de un alumno de 1º de bachillerato del ciclo lectivo 2014-2015.

- En el ítem 38, observamos dos dificultades de distinto carácter: la primera responde a una elevada cantidad de alumnos que no supieron y/o no contestaron la pregunta: 35 alumnos de un total de 149 (23,5%) en el ciclo 2013-2014 y 31 de 164 alumnos (18,9%) en el ciclo 2014-2015. La segunda se debe a que, entre los casos de respuesta válida, observamos gran cantidad de respuestas con error para ambos ciclos (71,1% y 71,4%, respectivamente). Mientras que las respuestas totalmente correctas no superan un tercio de los casos, siendo del 28,9% y del 28,6% respectivamente (Ver ilustración 10.13-75 en Anexo 13).
 - Tipo de error: En ambos ciclos encontramos que el error predominante es el de “origen en la ausencia de sentido” con 76 casos (93,8%) en 2013-2014 y 90 casos (94,7%) en 2014-2015. Como se puede observar en la ilustración 5-17, el alumno manifiesta, como en el ítem anterior, que no se puede saber cuánto gasta la familia porque hay dos incógnitas y no hay igualación. En general observamos que no han encontrado el significado del uso de las letras, o bien que han necesitado retroceder a lo numérico para resolver el problema. El resto de errores son de “origen afectivo y/o emocional” (6,2% y 5,3%, respectivamente) (Ver ilustración 10.13-76 en Anexo 13).

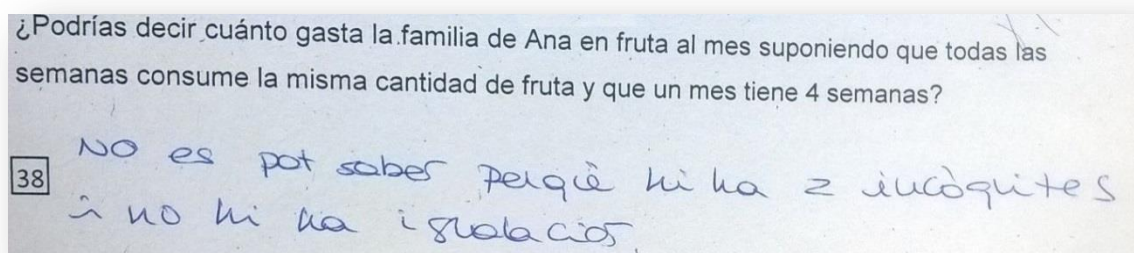


Ilustración 5-17: Error de origen de ausencia de sentido en el ítem 38.

Fuente: Cuestionario 2 de un alumno de 1º de bachillerato del ciclo lectivo 2014-2015.

- En el ítem 39, volvemos a observar un alto índice de alumnos que no supieron y/o no contestaron la pregunta, un 14,1% en 2013-2014, y un 14,6% en 2014-2015. Entre los casos válidos, observamos también gran cantidad de respuestas con error en ambos ciclos (57,8% y 62,9%, respectivamente). Las respuestas totalmente correctas a este ítem son de un 41,4% y un 37,1% de los casos, respectivamente. Solo se presenta una respuesta parcial (0,8%) en el primer grupo. (Ver ilustración 10.13-77 en Anexo 13).
 - Tipo de error: observamos que el 94% en 2013-2014 y el 87,6% en 2014-2015 corresponden a un error de “origen en la ausencia de sentido” (94,6%) y solo un 5,4% en el primer ciclo y un 12,4% en el segundo, son de “origen afectivo y/o emocional”. Este elevado índice de error con “origen en la ausencia de sentido” en la mayoría de los casos se debe a las particularizaciones que el alumno realizó en los ítems anteriores, o bien a confusiones de suma con multiplicación en el ítem 37 al plantear la expresión algebraica. (Ver ilustración 10.13-78 en Anexo 13).

Resumen de resultados

La ilustración 5-18, en la que se reflejan los resultados de los 4 ítems correspondientes al proceso algebraico de modelización, muestra claramente que el alumnado de ambos ciclos tuvo grandes dificultades para comprender lo que se planteaba en el problema y poder expresarlo de forma algebraica.

En el caso de los que cometieron errores, vemos que estos eran, en general, de “origen en la ausencia de sentido”, ya sea porque el alumno necesitaba particularizar, o porque confundía

multiplicación con potencia, o porque no encontraba significado al hecho de utilizar letras. En algunos ítems también observamos algunos errores de “origen emocional y/o afectivo”, por distracción o por olvido.

Por otro lado, el índice de valores perdidos (“no sabe/no responde”) en tres de los cuatro ítems tuvo valores elevados, entre el 10% y el 24%. Esto se debe en gran parte a que el alumno para resolver estos ejercicios necesita representar cantidades con letras, y que para llegar a este procedimiento el alumno debe alcanzar niveles más altos de abstracción.

Sumando los alumnos que no respondieron y los que cometieron errores, vemos que casi la cuarta parte de la población de alumnos de ambos ciclos, pudo resolver correctamente los ítems del proceso algebraico de generalización, principalmente el primero. También podemos observar que el alumnado del ciclo 2013-2014 tiene un nivel más elevado que el alumnado del ciclo 2014-2015 en lo que respecta al proceso algebraico de modelización.

Ítem	Porcentaje de respuestas correctas		Tipo de “origen de error” más frecuente por ítem	
	2013-2014	2014-2015	2013-2014	2014-2015
36	0,8% parcial 45,1% total	55,6%	98,6% Ausencia de sentido	89,1% Ausencia de sentido
37	33,6%	28,9%	96,8% Ausencia de sentido	94,4% Ausencia de sentido
38	28,9%	28,6%	93,8% Ausencia de sentido	94,7% Ausencia de sentido
39	0,8% parcial 41,4% total	37,1%	94,6% Ausencia de sentido	87,6% Ausencia de sentido

Ilustración 5-18: Resumen de respuestas totalmente (parcialmente, en ocasiones) correctas y tipos de “origen de error” del proceso algebraico de modelización

Fuente: elaboración propia. Base cuestionario 2

5.3. RESULTADOS DE LA PRUEBA ALGEBRAICA DE FUNCIONES

Los ítems Crecer, Velocidad y Coche del cuestionario 3 van a ser útiles para evaluar a los alumnos en el proceso cognitivo de funciones (Anexo 2). A continuación mostramos los resultados de las preguntas correspondientes a cada ítem, comparando los ciclos lectivos.

- En la pregunta 1 del ítem “Crecer”, observamos un elevado porcentaje de respuestas correctas en ambos ciclos lectivos, el 89,3% en 2013-2014 y el 79,3% en 2014-2015. Los índices de respuestas incorrectas son de 8,1% y 12,8%, respectivamente, y el índice de valores perdidos es de 2,7% en el primer grupo y 7,9% en el segundo. Aunque el primer grupo tuvo un mayor grado de efectividad en las respuestas que el segundo, en general los alumnos de la población comprendieron lo que se les pedía y supieron resolverlo (Ver ilustración 10.13-79 en Anexo 13). De hecho los índices obtenidos por los dos ciclos de alumnos fueron más elevados, en comparación con los índices de acierto de la OCDE (67%), de España (66,5%), y de Cataluña (68,7%) (PISA 2000, 2003, Items Liberados.).

- En la pregunta 2 del ítem “Crecer”, encontramos un elevado porcentaje de respuestas correctas en ambos ciclos lectivos (72,5% en el primero y 68,3% en el segundo), comparado con los índices obtenidos por OCDE (44,8%), España (36,5%) y Cataluña (52%) (PISA 2000, 2003, Items Liberados.). Los índices de las subcategorizaciones de las respuestas correctas son:
 - Respuesta correcta expresada con lenguaje cotidiano: un 34,2% en 2013-2014 y un 34,8% en 2014-2015, como podemos ver en la ilustración
 - Respuesta correcta expresada con lenguaje matemático: un 21,5% en 2013-2014 y un 27,4% en 2014-2015.
 - Respuesta correcta de comparación de crecimiento: un 16,8% en 2013-2014 y un 6,1% en 2014-2015.

Por otro lado observamos porcentajes de respuestas incorrectas de un 22,8% en 2013-2014 y un 17,1% en 2014-2015, así como un 4,7% y un 14,6%, respectivamente, de valores perdidos, por lo que observamos mayor dificultad en la respuesta a esta pregunta que en la anterior (Ver ilustración 10.13-80 en Anexo 13).

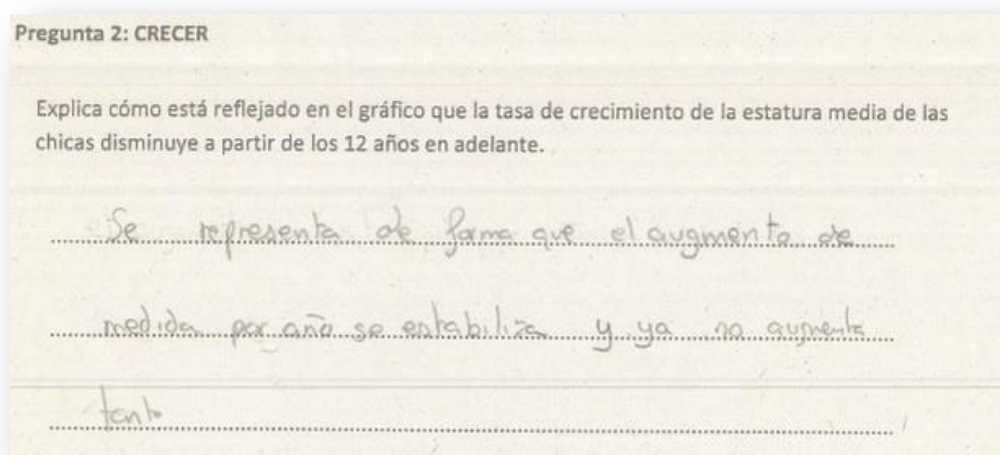


Ilustración 5-19: Respuesta correcta expresada en lenguaje coloquial de la pregunta 2 del ítem “Crecer”.

Fuente: Cuestionario 3 de un alumno de 1º de bachillerato del ciclo lectivo 2014-2015.

- En la pregunta 3 del ítem “Crecer”, encontramos un elevado índice de respuestas correctas en ambos ciclos lectivos (97,2% en el primero y 96,1% en el segundo). Observando la subcategorización, vemos que:
 - Las respuestas correctas de máxima puntuación (con intervalos o edades comprendidas entre el 11 y el 13) alcanzaron índices muy elevados, un 78,5% en el ciclo 2013-2014 y un 77,4% el ciclo 2014-2015, en comparación con la OCDE (54,7%), España (62,4%) y Cataluña (57%) (PISA 2000, 2003, Items Liberados.)
 - Las respuestas correctas de puntuación parcial, donde el alumno expresaba la respuesta con subconjuntos de edades, alcanzó un índice de 16,1% en el 2013-2014 y de 11,6% en el 2014-2015, por debajo de los alcanzados por la OCDE (28,1%), España (19,2%) y Cataluña (27,6%) (PISA 2000, 2003, Items Liberados.)

Finalmente, las respuestas incorrectas alcanzaron el 2,7% y el 3,7%, respectivamente así como el 2,7% y el 7,3% de valores perdidos, lo que nos permite observar un mayor grado de efectividad en las respuestas del primer grupo (Ver ilustración 10.13-81 en Anexo 13).

- En la pregunta 1 del ítem “Velocidad de un coche de carreras”, nos encontramos con un elevado porcentaje de respuestas correctas en ambos ciclos lectivos, un 86,6% en 2013-2014 y un 76,8% en 2014-2015, en comparación con la OCDE (66,9%) y España (65%) (Cataluña participó en el año 2000 a través del INECSE, Instituto Nacional de Evaluación y Calidad del Sistema Educativo, formando parte de la muestra estatal). Por otra parte, el índice de respuestas incorrectas fue del 11,4% y 13,4%, respectivamente, así como el 2% y el 9,8% de valores perdidos. Se evidencia aquí un mayor grado de efectividad en las respuestas del primer grupo (Ver ilustración 10.13-82 en Anexo 13).

- En la pregunta 2 del ítem “Velocidad de un coche de carreras”, se observa un elevado porcentaje de respuestas correctas en ambos ciclos lectivos, 95,3% en 2013-2014 y 89% en 2014-2015, muy similares a los obtenidos por la OCDE (83,3%) y España (88,6%) (PISA 2000, 2003, Items Liberados.). Por otra parte, las respuestas incorrectas fueron de 2,7% y 0,6%, respectivamente, así como el 2% y el 10,4% de valores perdidos, por lo que volvemos a destacar un mayor grado de efectividad en las respuestas del primer grupo (Ver ilustración 10.13-83 en Anexo 13).

- En la pregunta 3 del ítem “Velocidad de un coche de carreras”, como en las preguntas anteriores, encontramos un elevado porcentaje de respuestas correctas en ambos ciclos lectivos, 94% en 2013-2014 y 85,4% en 2014-2015, muy similares a los obtenidos por la OCDE (82,5%) y España (80,6%) (PISA 2000, 2003, Items Liberados.). Por otra parte, el índice de respuestas incorrectas fue de 4% y 4,3%, respectivamente así como el 2% y el 10,4% de valores perdidos. Seguimos observando un mayor grado de efectividad en las respuestas del primer grupo (Ver ilustración 10.13-84 en Anexo 13).

- En la pregunta 4 del ítem “Velocidad de un coche de carreras”, encontramos valores similares en los índices de respuestas correctas e incorrectas. El índice de respuestas correctas es del 49% en 2013-2014 y del 47,6% en 2014-2015, y el de incorrectas es del 49% y del 43,3%, respectivamente, aunque los resultados obtenidos son ciertamente mucho más elevados que los de la OCDE (28,3%) y España (23%) (PISA 2000, 2003, Items Liberados.). La dificultad para encontrar la relación entre los dos diagramas (Ilustración 5-20) se debe al hecho de que el alumno ha de saber que un coche de carreras mantiene la velocidad más alta durante los tramos rectos, mientras que

disminuye en cada curva. Es decir, que debe identificar que la velocidad es una función del espacio recorrido ($v=f(e)$). Ante la dificultad de este razonamiento, seleccionan aquella que visualmente se parece a la gráfica dada: “en el primero tengo tres curvas, entonces si las uno obtengo el diagrama de la opción A”. Por último, teniendo en cuenta que el índice de valores perdidos es del 2% y el 9,1%, respectivamente, se mantiene un mayor grado de efectividad en las respuestas del primer grupo (Ver ilustración 10.13-85 en Anexo 13).

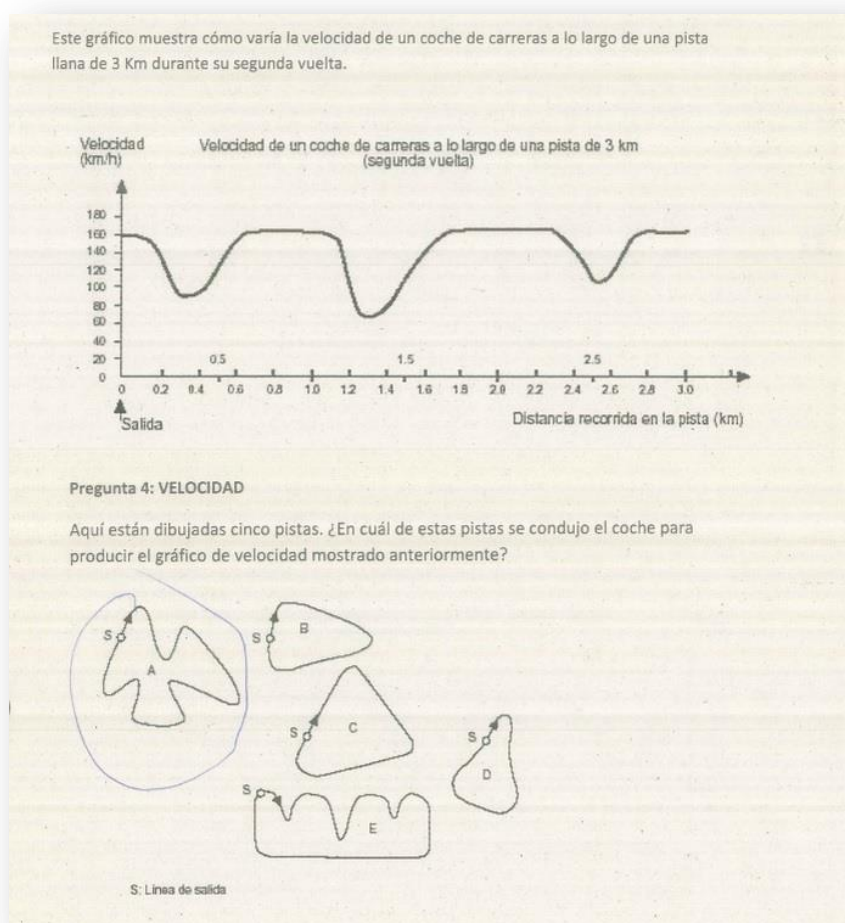


Ilustración 5-20: Respuesta incorrecta de la pregunta 4 del ítem “Velocidad de un coche de carreras”. Fuente: Cuestionario 3 de un alumno de 1º de bachillerato del ciclo lectivo 2014-2015.

- En la pregunta 1 del ítem “el mejor Coche”, observamos índices similares de respuestas correctas en ambos ciclos lectivos, un 93,3% en 2013-2014 y un 84,8% en 2014-2015, muy por encima de los obtenidos por la OCDE (72,9%), España (71,4%) y Cataluña (70,9%). El índice de respuestas incorrectas es del 4,7% y del 4,3%,

respectivamente, y el de valores perdidos es del 2% y del 11%. Por tanto se sigue observando un mayor grado de efectividad en las respuestas del primer grupo (Ver ilustración 10.13-86 en Anexo 13).

- En la pregunta 2 del ítem “el mejor Coche”, también se recogen valores similares en ambos ciclos lectivos, un 60,4% en 2013-2014 y un 56,1% en 2014-2015, muy por encima de los obtenidos por la OCDE (25,4%), España (22,2%) y Cataluña (22,5%). El índice de respuestas incorrectas es de 35,6% y 31,7%, respectivamente, con un 4% y un 12,2% de valores perdidos en cada caso. Deducimos de estos datos que los alumnos tuvieron cierta dificultad para comprender la relación matemática que se les planteaba, y no tuvieron la capacidad de generalizar y utilizar la información recibida. Algunas respuestas sólo cumplían la condición de que el coche “Ca” tenía mayor puntuación que el “M2”, pero no se daban cuenta que su fórmula hacía que la puntuación del coche “Ca” era igual a la de “Sp”, como muestra el ejemplo de la Ilustración 5-21. En otras respuestas observamos que el alumno se limitó a colocar números sin ningún sentido (Ver ilustración 10.13-87 en Anexo 13).

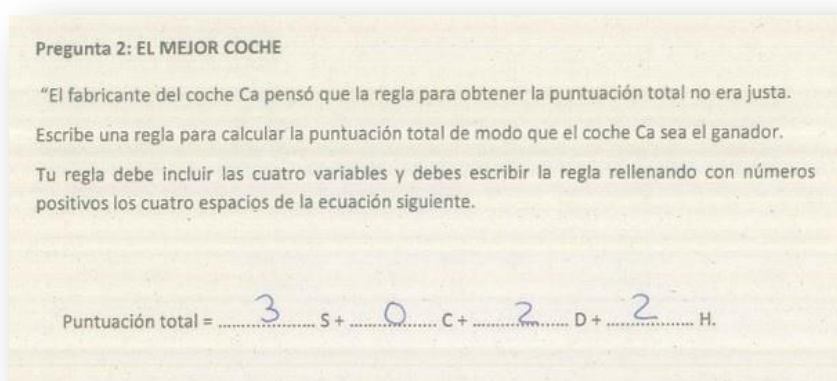


Ilustración 5-21: Respuesta incorrecta de la pregunta 2 del ítem “el mejor coche”.
Fuente: Cuestionario 3 de un alumno de 1º de bachillerato del ciclo lectivo 2014-2015.

Resumen de resultados

Como podemos observar en la ilustración 5-22, los resultados de los 3 ítems correspondientes a la modelización del cambio, a las relaciones con las funciones y ecuaciones pertinentes, y a la de crear, interpretar y traducir representaciones simbólicas y gráficas de las relaciones, muestran claramente que el alumnado de ambos ciclos en general ha resuelto correctamente lo que se le pedía en cada ítem y no ha tenido mayores dificultades para resolver cada cuestión, excepto en la pregunta 4 del ítem de “velocidad de un coche de carreras”.

Ítem	Pregunta	Porcentaje de respuestas correctas				
		2013-2014	2014-2015	OCDE	ESPAÑA	CATALUÑA
Crecer	1	89,3%	79,3%	67%	66,5%	68,7%
	2	72,5%	68,3%	44,8%	36,5%	52%
	3	78,5%	77,4%	54,7%	62,4%	57%
Velocidad	1	86,6%	76,8%	66,9%	65%	-
	2	95,3%	89%	83,3%	88,6%	-
	3	94%	85,4%	82,5%	80,6%	-
	4	49%	47,6%	28,3%	23%	-
Coche	1	93,3%	84,8%	72,9%	71,4%	70,9%
	2	60,4%	56,1%	25,4%	22,2%	22,5%

Ilustración 5-22: Resumen de respuestas totalmente correctas del cuestionario de Funciones de los ciclos 13-14 y 14-15, en comparación con los resultados de la OCDE, España y Cataluña
 Fuente: elaboración propia. Base cuestionario 3

Por otro lado, el índice de valores perdidos (“no sabe/no responde”) en el ciclo 2013-2014 comprende valores entre el 2% y el 5%, llegándose a valores entre el 7% y el 15% en el ciclo 2014-2015. Estos índices y los de las respuestas correctas, nos indican que el alumnado del ciclo 2013-2014 tiene un nivel más elevado que el del ciclo 2014-2015, en lo que respecta a las funciones.

5.4. RESULTADOS GLOBALES DE LAS PRUEBAS DE ÁLGEBRA Y FUNCIONES

A continuación presentamos el estudio estadístico de los resultados totales de cada prueba. En primer lugar presentamos los estadísticos descriptivos de los tres procesos algebraicos de la primera prueba (sustitución, generalización y modelización) por separado y por ciclo lectivo. En segundo lugar analizamos los estadísticos descriptivos de la prueba de funciones por ciclo lectivo. Por último, presentamos el análisis estadístico de los resultados globales de ambas pruebas por ciclo lectivo, y posteriormente por modalidad de bachillerato.

Para poder calcular los estadísticos descriptivos de cada prueba, sumamos el total de puntos de cada ítem. Posteriormente sumamos el puntaje de cada alumno y lo dividimos entre el total de puntos del proceso algebraico evaluado (sustitución: 24 puntos, generalización: 46 puntos, modelización: 8 puntos, y funciones: 13 puntos). Para calcular la nota global de álgebra dividimos el puntaje de cada alumno entre la suma de puntos de los dos primeros cuestionarios (78 puntos) y para calcular la nota final consideramos la suma de puntos de los tres cuestionarios (91 puntos). De esta forma se obtiene una nota final por cada alumno comprendida entre el 0 y el 10, en todos los procesos evaluados y las notas totales.

5.4.1. Resultados Globales del Proceso Algebraico de Sustitución

En lo que respecta a la variable “**Notas Totales del proceso algebraico de Sustitución**”, trabajamos con 147 casos en el primer ciclo y 159 casos en el segundo. Los valores perdidos corresponden a aquellos alumnos que no asistieron a clase el día de la prueba y que no pudieron realizar el cuestionario posteriormente (Ilustración 5-22).

Ciclo lectivo		2013-2014	2014-2015
Número de casos	Válidos	147	159
	Perdidos	2	5
Medidas de Tendencia Central	Media	6,231	6,560
	Mediana	6,7	6,7
	Moda	6,7	6,7
Medidas de Dispersión	Desv. típica	2,2329	2,0651
	Rango	9,6	9,2
	Mínimo	,4	,8
	Máximo	10,0	10,0
Medidas de Posición	Cuartiles 25	4,60	5,40
	50	6,70	6,70
	75	8,30	8,30

Ilustración 5-22: Estadísticos descriptivos Notas Totales Sustitución
 Fuente: elaboración propia. Base Cuestionario 1

Los estadísticos obtenidos nos señalan que ambos ciclos tienen una media que está por encima de los 6 puntos. En el ciclo 2013-2014 esta media es de 6,231 puntos mientras que para el ciclo 2014-2015 es un poco más alta, de 6,560 puntos. Ambos ciclos tienen una mediana y moda de 6,7. Seguidamente procedemos a realizar un diagrama de caja y patillas para ilustrar de forma comparada ambos grupos (Ilustración 5-23).

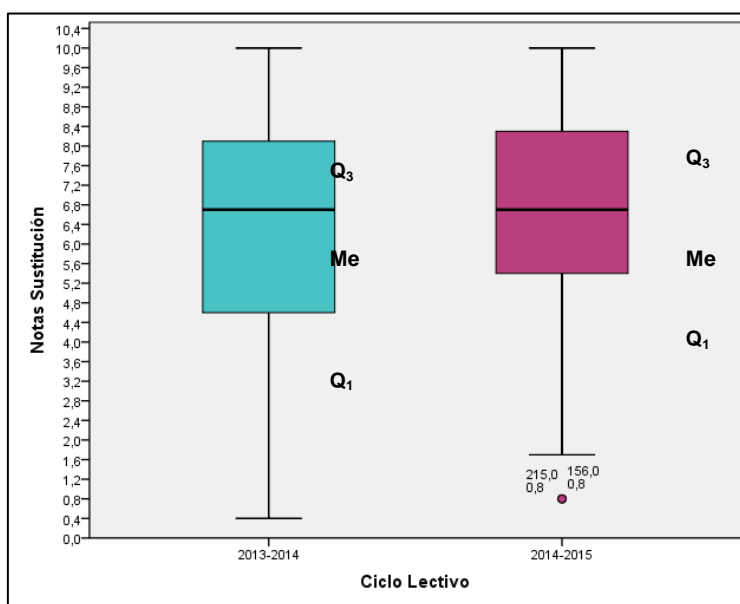


Ilustración 5-23: Diagrama de caja y patillas. Notas Totales Sustitución
 Fuente: Elaboración propia. Base Cuestionario 1

Para el caso de la variable “**Notas Totales del proceso algebraico de Sustitución**” encontramos que en el ciclo lectivo 2013-2014 el primer cuartil es de $Q_1=4,6$ y en el ciclo 2014-2015 es de $Q_1=5,4$ por lo que las notas del 25% de los alumnos con calificaciones más bajas, son más altas en el segundo ciclo lectivo. Posteriormente no se encuentran diferencias entre los grupos, dado que alcanzan igual mediana $Me=6,7$ y el tercer cuartil es $Q_3=8,3$ para cada grupo.

Dentro de las medidas de dispersión el rango es de 9,6 para el primer grupo y de 9,2 para el segundo; como observamos en la gráfica, el recorrido de la variable, desde el valor extremo inferior hasta el superior, es mayor para el primer grupo por 0,2. Es decir que las patillas, representan los valores mínimos de 0,4 y 0,8 y máximos de 10 puntos respectivamente.

La grafica también señala dos casos “*outlier*” para el segundo grupo. Estos son casos que, al obtener una calificación de 0,8, estadísticamente caen fuera del valor esperado que sería 1,8 (origen de la patilla). La desviación típica alcanza valores de 2,2329 puntos para el primer grupo y de 2,0651 para el segundo, valores que también quedan reflejados en la gráfica donde la dispersión es menor para el segundo grupo.

5.4.2. Resultados Globales del Proceso Algebraico de Generalización

En lo que respecta la variable “**Notas Totales del proceso algebraico de Generalización**”, trabajamos con 148 casos en el primer ciclo y 159 casos en el segundo. Los estadísticos descriptivos para la prueba de generalización nos señalan que ambos ciclos tienen una media que está por encima de los 6 puntos (Ilustración 5-24).

En el ciclo 2013-2014 la misma es de 6,047 puntos mientras que para el ciclo 2014-2015 es un poco más alta, de 6,291 puntos.

Ciclo lectivo		2013-2014	2014-2015
Número de casos	Válidos	148	159
	Perdidos	1	5
Medidas de Tendencia Central	Media	6,047	6,291
	Mediana	6,1	6,500
	Moda	6,1	8,0

Medidas de Dispersión	Desv. típica		1,7275	1,6439
	Rango		8,3	7,8
	Mínimo		1,7	1,5
	Máximo		10,0	9,3
Medidas de Posición	Cuartiles	25	4,65	5,2
		50	6,1	6,5
		75	7,2	7,6

*Ilustración 5-24: Estadísticos descriptivos Notas Totales Generalización
Fuente: Elaboración propia. Base Cuestionario 1 y 2*

En esta oportunidad la mediana es menor para el primer grupo con 6,1 puntos contra 6,5 del segundo. La moda es de igual valor que la mediana para el ciclo 2013-2014, pero distinta para el ciclo 2014-2015 (8 puntos). A continuación procedemos a realizar un diagrama de caja y patillas para ilustrar de forma comparada ambos grupos.

Para el caso de la variable “**Notas totales del proceso de Generalización**” encontramos que en el ciclo lectivo 2013-2014 el primer cuartil es de $Q_1=4,56$ y en el ciclo 2014-2015 es de $Q_1=5,2$, por lo que nuevamente las notas del 25% de los alumnos con calificaciones más bajas son mejores para el segundo ciclo lectivo. Asimismo continúan las diferencias entre los grupos, debido a que la mediana del primer ciclo es $Me=6,1$ y la del segundo ciclo es de $Me=6,5$. El tercer cuartil es $Q_3=7,2$ y $7,6$ respectivamente. Dentro de las medidas de dispersión se observa que el rango es de 8,3 para el primer grupo y de 7,8 para el segundo.

Como observamos en la gráfica el recorrido de la variable, desde el valor extremo inferior hasta el superior es mayor para el primer grupo por 0,5. Es decir que las patillas, representan los valores mínimos de 1,7 y 1,5 y máximos de 10 y 9,3 puntos respectivamente.

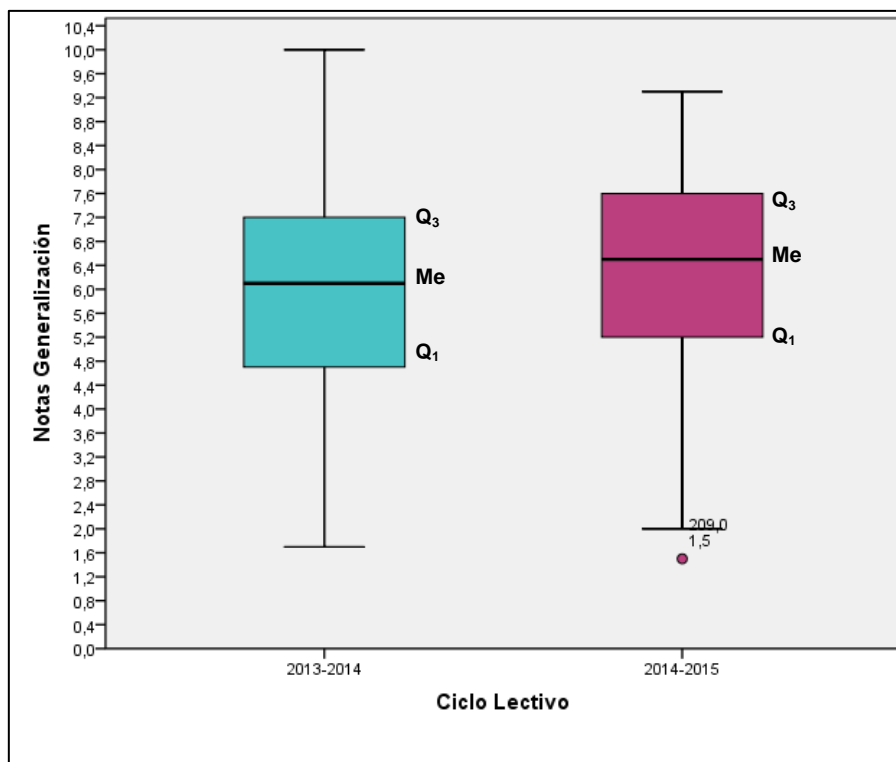


Ilustración 5-25: Diagrama de caja y patillas. Notas Totales Generalización
Fuente: Elaboración propia. Base Cuestionario 1 y 2

La grafica también señala un caso “outlier” para el segundo grupo. Ésta es la observación 209 que, al obtener una calificación de 1,5, estadísticamente cae fuera del valor esperado que sería 2 (origen de la patilla).

La desviación típica alcanza valores de 1,7275 puntos para el primer grupo y de 1,6439 para el segundo, valores que también quedan reflejados en la gráfica donde la dispersión es menor para el segundo grupo, aunque señala una concentración mayor de los valores alcanzados en esta prueba en comparación con la prueba de sustitución donde la desviación típica superaba los 2 puntos.

5.4.3. Resultados Globales del Proceso Algebraico de Modelización

En lo que respecta a la variable “Notas Totales del proceso algebraico de Modelización”, trabajamos con 143 casos en el primer ciclo y 157 casos en el segundo. Los estadísticos descriptivos para la prueba de modelización (Ilustración 5-26) nos señalan que ambos ciclos tienen una media que apenas supera los 3 puntos. Evidenciamos que este proceso es el que mayor dificultad genera a los alumnos dentro de álgebra.

Ciclo lectivo		2013-2014	2014-2015
Número de casos	Válidos	143	157
	Perdidos	6	7
Medidas de Tendencia Central	Media	3,427	3,416
	Mediana	2,5	2,5
	Moda	2,5	2,5
Medidas de Dispersión	Desv. típica	3,1389	3,3805
	Rango	10,0	10,0
	Mínimo	,0	,0
	Máximo	10,0	10,0
Medidas de Posición	Cuartiles 25	0,0	0,0
	50	2,5	2,5
	75	5,0	5,0

Ilustración 5-26: Estadísticos descriptivos Notas Totales Modelización
 Fuente: Elaboración propia. Base Cuestionario 2

En el ciclo 2013-2014 la media alcanzó 3,427 puntos mientras que en el ciclo 2014-2015 es un poco más baja, de 3,416 puntos. A continuación procedemos a realizar un diagrama de caja y patillas para ilustrar de forma comparada ambos grupos (Ilustración 5-27).

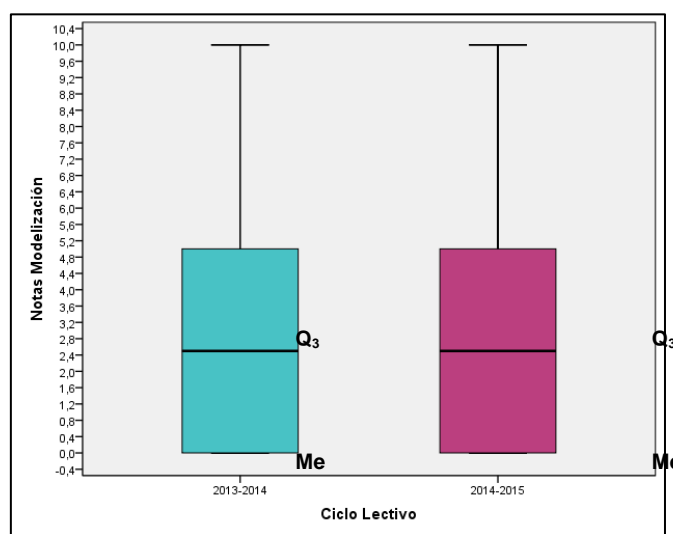


Ilustración 5-27: Diagrama de caja y patillas. Notas Totales Modelización
 Fuente: Elaboración propia. Base Cuestionario 2

En la ilustración 5-27, para el caso de la variable “**Notas totales del proceso algebraico de modelización**” encontramos que en ambos ciclos lectivos el primer cuartil es de $Q_1=0$ esto demuestra que el 25% de los alumnos no comprendió el proceso de modelización en absoluto. Sin embargo continúan las similitudes entre los grupos, puesto que alcanzan igual mediana $Me=2,5$, lo que nos hace ver que el 50% de los estudiantes apenas si logra realizar algún tipo de procedimiento correcto en esta competencia. El tercer cuartil es $Q_3=5$ para ambos grupos.

Dentro de las medidas de dispersión se observa que el rango es de 10. Como observamos en la gráfica el recorrido de la variable, desde el valor extremo inferior hasta el superior, es igual para ambos grupos. Es decir que las patillas representan los valores mínimos de 0 y máximos de 10 puntos respectivamente. La desviación típica alcanza valores de 3,1389 puntos para el primer grupo y de 3,3805 para el segundo, valores que también quedan reflejados en la gráfica donde la dispersión es mayor para el segundo grupo, y mucho mayor aún si la comparamos con las dos pruebas anteriores.

5.4.4. Resultados Globales de la Prueba de Álgebra

En lo que respecta a la variable “**Notas Totales de Álgebra**”, donde consideramos la media obtenida en los dos cuestionarios (que comprenden los procesos de sustitución, generalización y modelización) trabajamos con 148 casos en el primer ciclo y 159 casos en el segundo. Los valores perdidos corresponden a los alumnos que no asistieron a clase el día de la prueba y que posteriormente no pudieron realizarla. Los estadísticos descriptivos para “la nota de álgebra” nos señalan que el ciclo 2013-2014 alcanza un promedio de 5,803 puntos, mientras que el ciclo 2014-2015 presenta una media que está por encima de los 6 puntos (6,087) (Ilustración 5-28)

Ciclo lectivo		2013-2014	2014-2015
Número de casos	Válidos	148	159
	Perdidos	1	5
Medidas de Tendencia Central	Media	5,803	6,087
	Mediana	5,850	6,300
	Moda	5,6	7,1
Medidas de Dispersión	Desv. típica	1,6161	1,4474
	Rango	8,3	7,0
	Mínimo	,5	2,4
	Máximo	8,8	9,4
Medidas de Posición	Cuartiles 25	4,700	5,300
	50	5,850	6,300
	75	6,900	7,100

Ilustración 5-28: Estadísticos descriptivos Notas Totales Álgebra
Fuente: Elaboración propia. Base Cuestionario 1 y 2

En el ciclo 2013-2014 la mediana es de 5,850 y la moda de 5,6 puntos mientras que para el ciclo 2014-2015 ambas son más altas: 6,3 puntos la mediana y 7,1 puntos la moda. Seguidamente ofrecemos un diagrama de caja y patillas para ilustrar de forma comparada ambos grupos.

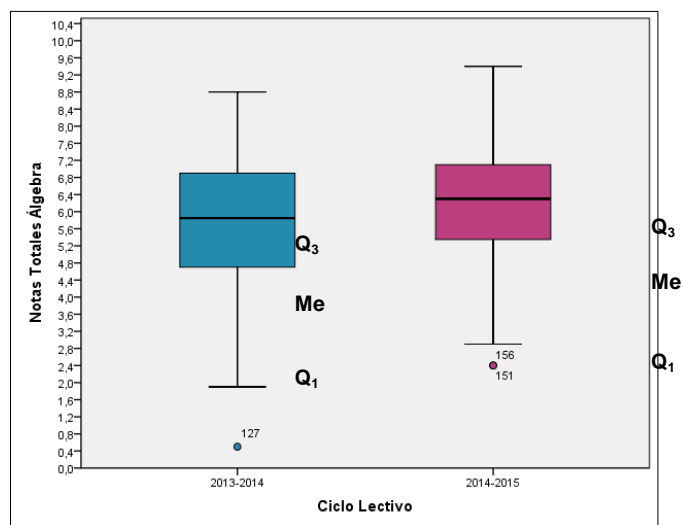


Ilustración 5-29: Diagrama de caja y patillas. Notas Totales Modelización

Fuente: Elaboración propia. Base Cuestionario 2

Para el caso de la variable “**Notas totales álgebra**” vemos que en el ciclo lectivo 2013-2014 el primer cuartil es de $Q_1=4,7$ y en el ciclo 2014-2015 es de $Q_1=5,3$ por lo que nuevamente las notas del 25% de los alumnos con calificaciones más bajas son mejores en el segundo ciclo lectivo (Ilustración 5-29). Asimismo siguen mostrándose las diferencias entre los dos grupos, ya que la mediana del primer ciclo es $Me=5,85$ y la del segundo ciclo es $Me=6,3$. El tercer cuartil son $Q_3=6,9$ y $7,1$ respectivamente. Dentro de las medidas de dispersión se observa que el rango es de $8,3$ para el primer grupo y de 7 para el segundo. Como observamos en la gráfica el recorrido de la variable, desde el valor extremo inferior hasta el superior es mayor para el primer grupo por $1,3$. Es decir, que las patillas representan los valores mínimos de $0,5$ y $2,4$ y máximos de $8,8$ y $9,4$ puntos respectivamente. En la ilustración 5-29 también observamos un caso “*outlier*” para ambos grupos. Estas son las observaciones 127 en ciclo 2013-2014 y las observaciones 151 y 156 en el segundo ciclo, que al obtener una calificación de $0,5$ y $2,4$ (respectivamente) estadísticamente caen fuera del valor esperado que sería 2 (origen de la patilla grupo 1) y $2,8$ (origen de la patilla grupo 2). La desviación típica alcanza valores de $1,6161$ puntos para el primer grupo y de $1,4474$ para el segundo, valores que también quedan reflejados en la gráfica donde la dispersión es menor para el segundo grupo.

5.4.5. Resultados Globales de la Prueba de Funciones

En lo que respecta a las “**Notas Totales de Funciones**” trabajamos con 146 casos en el primer ciclo y 154 casos en el segundo. Los valores perdidos corresponden a los alumnos que no asistieron a clase el día de la prueba y que posteriormente no la realizaron.

Los estadísticos descriptivos para la **prueba de funciones** (Ilustración 5-30) nos señalan que el ciclo 2013-2014 alcanza un promedio de 7,601 puntos, mientras que el ciclo 2014-2015 presenta una media más baja, de 7,522 puntos. A diferencia de las tres pruebas anteriores de álgebra, en el caso de funciones el primer grupo ha alcanzado en promedio una mejor calificación.

Para ambos ciclos la mediana es de 7,7 puntos, mientras que la moda de 7,7 para el ciclo 2013-2014 y de 8,5 puntos para 2014-2015.

		Ciclo lectivo	2013-2014	2014-2015
Número de casos	Válidos		146	154
	Perdidos		3	10
Medidas de Tendencia Central	Media		7,601	7,522
	Mediana		7,700	7,700
	Moda		7,7	8,5
Medidas de Dispersión	Desv. típica		1,4024	1,9851
	Rango		6,9	10,0
	Mínimo		3,1	,0
	Máximo		10,0	10,0
Medidas de Posición	Cuartiles	25	6,900	6,900
		50	7,700	7,700
		75	8,500	9,200

Ilustración 5-30 Estadísticos descriptivos Notas Totales Funciones
Fuente: Elaboración propia. Base Cuestionario 3

Seguidamente procedemos a realizar un diagrama de caja y patillas para ilustrar de forma comparada ambos grupos (Ilustración 5-31). Para el caso de la variable Notas totales funciones encontramos que en ambos ciclos el primer cuartil es de $Q_1=6,9$ y la $Me=7,7$ por lo que las notas del 50% de los alumnos es igual sin importar el ciclo lectivo. Asimismo la diferencia entre los grupos se observa en el tercer cuartil es $Q_3=8,5$ y $9,2$ respectivamente, es decir que en este tercer cuartil alcanzan mejores calificaciones los alumnos del ciclo 2014-2015.

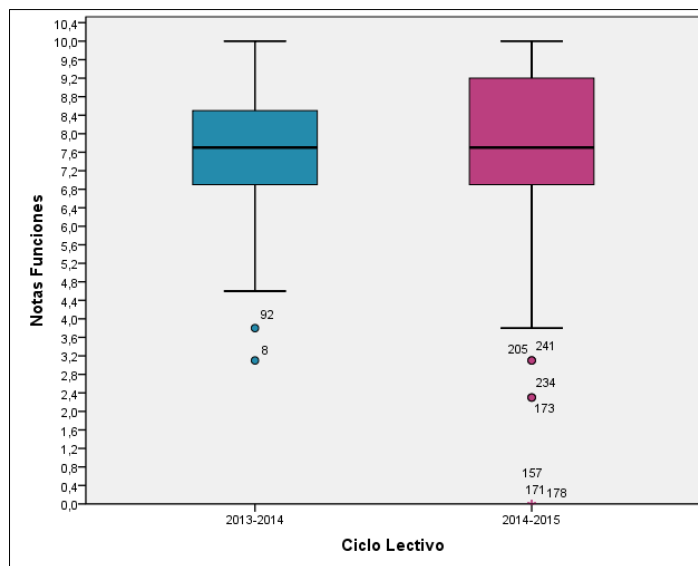


Ilustración 5-31: Diagrama de caja y patillas. Notas Totales Funciones
 Fuente: Elaboración propia. Base Cuestionario 3

Dentro de las medidas de dispersión se observa que el rango es de 6,9 para el primer grupo y de 10 para el segundo. Como observamos en la gráfica el recorrido de la variable, desde el valor extremo inferior hasta el superior es mayor para el segundo grupo, por 3,1. Es decir que las patillas, representan los valores mínimos de 3,1 y 0, y máximo de 10 puntos respectivamente. La ilustración 5-31 también señala varios casos de “outlier” para ambos grupos. Estas son las observaciones 8 y 92 en ciclo 2013-2014 y las observaciones 178, 171, 157, 173, 234 ,205 y 241 en el segundo ciclo que, al obtener una calificación mínima de 3,1 en el primer ciclo y 0 en el segundo, estadísticamente caen fuera del valor esperado que sería 4,5 (origen de la patilla grupo 1) y 3,6 (origen de la patilla grupo 2). La desviación típica alcanza valores de 1,4024 puntos para el primer grupo y de casi dos puntos (1,9851) para el segundo, valores que quedan reflejados en la gráfica donde la dispersión es mucho mayor para el segundo grupo.

5.4.6. Resultados Globales de Ambas Pruebas

Finalmente, en lo que respecta a las “**Notas Totales de las Pruebas**”, trabajamos con 149 casos en el primer ciclo y 160 casos en el segundo. Los estadísticos descriptivos para los resultados totales de ambas pruebas nos señalan que los dos ciclos tienen una media que está por encima de los 6 puntos (Ilustración 5-32). En el ciclo 2013-2014, la misma es de 6,076 puntos mientras que para el ciclo 2014-2015 es un poco más alta con 6,241 puntos. En esta ocasión la mediana es menor para el primer grupo con 6,3 puntos contra 6,45 del segundo. La moda es de 5,9 en el ciclo 2013-2014, y de 7 en el ciclo 2014-2015.

Ciclo lectivo		2013-2014	2014-2015
Número de casos	Válidos	149	160
	Perdidos	0	4
Medidas de Tendencia Central	Media	6,076	6,241
	Mediana	6,300	6,450
	Moda	5,9	7,0
Medidas de Dispersión	Desv. típ.	1,4723	1,4575
	Rango	7,6	8,8
	Mínimo	1,3	,5
	Máximo	8,9	9,3
Medidas de Posición	Cuartiles 25	5,200	5,500
	50	6,300	6,450
	75	7,100	7,375

Ilustración 5-32 Estadísticos descriptivos Notas Totales de las Pruebas
 Fuente: Elaboración propia. Base Cuestionarios 1, 2 y 3

Seguidamente procedemos a realizar un diagrama de caja y patillas para ilustrar de forma comparada ambos grupos (Ilustración 5-33).

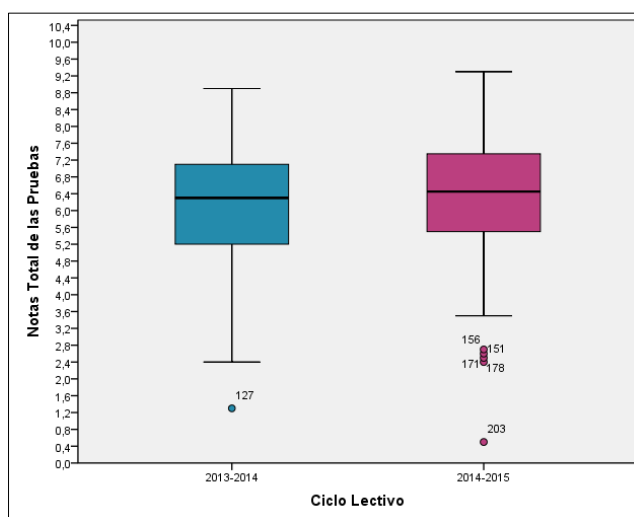


Ilustración 5-33: Diagrama de caja y patillas. Notas Totales de ambas pruebas
 Fuente: Elaboración propia. Base Cuestionarios 1, 2 y 3

En el caso de la variable **Notas totales de las pruebas** vemos que en el ciclo lectivo 2013-2014 el primer cuartil es de $Q_1=5,2$ y en el ciclo 2014-2015 es de $Q_1=5,5$, por lo que las notas del 25% de los alumnos con calificaciones más bajas son mejores para el segundo ciclo lectivo. Siguen las diferencias entre los grupos, debido a que la mediana del primer ciclo es $Me=6,3$ y la del segundo ciclo es de $Me=6,45$. El tercer cuartil son $Q_3=7,1$ y $7,375$ respectivamente. Dentro de las medidas de dispersión se observa que el rango es de 7,6 en el primer grupo y de 8,8 en el segundo. Como observamos en la gráfica, el recorrido de la variable, desde el valor extremo inferior hasta el superior es mayor para el segundo grupo por 1,2 puntos. Es decir que las

patillas, representan los valores mínimos de 1,3 y 0,5 y máximos de 8,9 y 9,3 puntos, respectivamente. La grafica también señala casos “outlier” para ambos grupos. Estas son la observación 127 en el primer grupo y 203, 178, 171, 151 y 156 en el segundo, que al obtener una calificación de 1,3 y 0,5 estadísticamente caen fuera del valor esperado que sería 2 (origen de la patilla). La desviación típica alcanza valores de 1,4723 puntos en el primer grupo y de 1,4575 en el segundo, valores que también quedan reflejados en la gráfica donde la dispersión es un poco menor en el segundo grupo.

Si realizamos un análisis de las **calificaciones obtenidas por los alumnos según la modalidad de Matemáticas sin distinguir el ciclo lectivo**, encontramos que la Científico–tecnológica obtuvo en promedio mejores calificaciones en todas las pruebas tal como se puede observar en la tabla (Ilustración 5-34) y en la gráfica (Ilustración 5-35). La distancia mayor se da en la prueba de generalización, con 0,979 puntos de diferencia, y la de menor distancia se produce en la prueba de funciones, con 0,387 puntos de diferencia. Estos resultados sirven para sostener la idea de que los alumnos que han optado por la modalidad aplicada a las ciencias sociales, tienen mayores dificultades matemáticas.

Modalidad Matemáticas	Aplicadas a las ciencias sociales	Científico- tecnológicas	Diferencia de medias
Calificaciones	Media	Media	
Notas Sustitución	5,955	6,756	-0,801
Notas Generalización	5,624	6,603	-0,979
Notas Modelización	3,187	3,602	-0,415
Notas Total de Álgebra	5,478	6,321	-0,843
Notas Funciones	7,340	7,727	-0,387
Notas Total de las Pruebas	5,693	6,529	-0,836

Ilustración 5-34: Estadísticos descriptivos Notas Totales por Modalidad

Fuente: Elaboración propia. Base Cuestionarios 1,2 y3

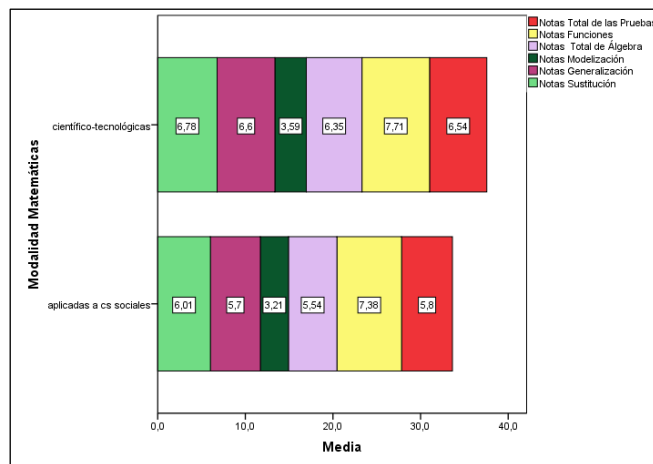


Ilustración 5-35: Tablas barras apiladas del Promedio de calificación de las Pruebas por Modalidad de Matemáticas

Fuente: elaboración propia. Base Cuestionarios 1,2 y3

Si realizamos un análisis de las **calificaciones obtenidas por los alumnos según la modalidad de Matemáticas en el ciclo lectivo 2013-2014**, encontramos que la Científico–tecnológica obtuvo en promedio mejores calificaciones en todas las pruebas, como se puede observar en la tabla (Ilustración 5-36) y la gráfica (Ilustración 5-37). La distancia mayor se da en la prueba de sustitución, con 0,91 puntos de diferencia, y la de menor diferencia en la prueba de modelización, 0,03 puntos de diferencia (aunque casi no hay diferencia entre ambas modalidades). Estos resultados sirven para sostener la idea de los alumnos que han optado por la modalidad aplicada a las ciencias sociales, tienen mayores dificultades matemáticas.

Modalidad Matemáticas	Aplicadas a las ciencias sociales	Científico-tecnológicas	Diferencia de medias
Calificaciones	Media	Media	
Notas Sustitución	5,72	6,63	-0,91
Notas Generalización	5,60	6,39	-0,78
Notas Modelización	3,41	3,44	-0,03
Notas Total de Álgebra	5,39	6,12	-0,72
Notas Funciones	7,72	7,51	0,21
Notas Total de las Pruebas	5,72	6,34	-0,62

Ilustración 5-36: Estadísticos descriptivos de las pruebas del Ciclo 2013-2014

Fuente: Elaboración propia. Base Cuestionarios 1,2 y3

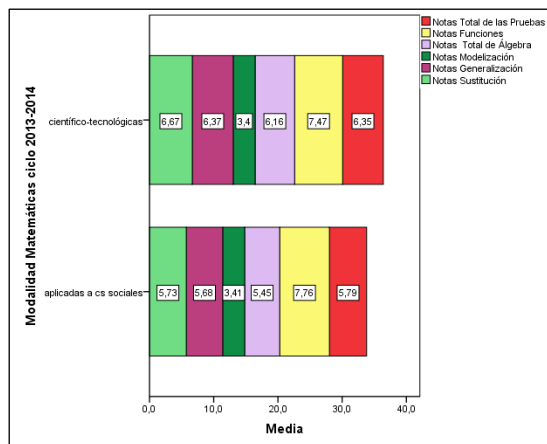


Ilustración 5-37: Tablas barras apiladas del Promedio de calificación Pruebas por Modalidad de Matemáticas
 Fuente: Elaboración propia. Base Cuestionarios 1,2 y3

Finalmente, si realizamos un análisis de las **calificaciones obtenidas por los alumnos según la modalidad** de Matemáticas en el ciclo lectivo 2014-2015, encontramos que la Científico-tecnológica obtuvo en promedio mejores calificaciones en todas las pruebas, como se puede observar en la tabla (Ilustración 5-38) y en la gráfica (Ilustración 5-39).

Modalidad Matemáticas	Aplicadas a las ciencias sociales	Científico-tecnológicas	Diferencia de medias
Calificaciones	Media	Media	
Notas Sustitución	6,17	6,88	-0,71
Notas Generalización	5,65	6,81	-1,17
Notas Modelización	2,99	3,75	-0,76
Notas Total de Álgebra	5,55	6,52	-0,96
Notas Funciones	6,98	7,93	-0,95
Notas Total de las Pruebas	5,67	6,71	-1,04

Ilustración 5-38: Estadísticos descriptivos de las pruebas del Ciclo 2014-2015
 Fuente: Elaboración propia. Base Cuestionarios 1,2 y3

La distancia mayor se produce en la prueba de generalización, con 1,17 puntos de diferencia, y la menor en la prueba de sustitución, con 0,71 puntos de diferencia. Estos resultados sirven para sostener la idea de los alumnos que han optado por la modalidad aplicada a las ciencias sociales, tienen mayores dificultades matemáticas.

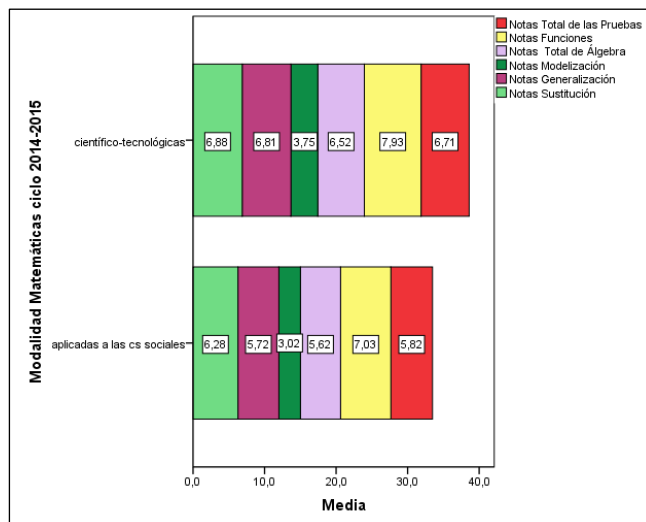


Ilustración 5-39: Tablas barras apiladas del Promedio de calificación Pruebas por Modalidad de Matemáticas
 Fuente: Elaboración propia. Base Cuestionarios 1,2 y3

Comparación de los resultados de las notas de los ciclos 2013-2014 y 2014-2015

Consideramos importante ver si existen diferencias entre las poblaciones de ambos ciclos lectivos (309 alumnos) en los resultados obtenidos de las notas de las pruebas realizadas de álgebra y de funciones. Por ello hemos realizado una prueba de comparación de medias para poblaciones independientes, es decir una **Prueba T para muestras independientes** con el nivel de significación es de α 5%. A continuación mostramos los estadísticos descriptivos (Ilustración 5-40) de grupo de la población utilizados para la decisión:

	Ciclo Lectivo	N	Media	Desviación típica	Error típico de la media
Notas Sustitución	2013-2014	147	6,231	2,2329	,1842
	2014-2015	159	6,560	2,0651	,1638
Notas Generalización	2013-2014	148	6,047	1,7275	,1420
	2014-2015	159	6,291	1,6439	,1304
Notas Modelización	2013-2014	143	3,427	3,1389	,2625
	2014-2015	157	3,416	3,3805	,2698
Notas Total de Álgebra	2013-2014	148	5,803	1,6161	,1328
	2014-2015	159	6,087	1,4474	,1148
Notas Funciones	2013-2014	146	7,601	1,4024	,1161
	2014-2015	154	7,522	1,9851	,1600
Notas Total de las Pruebas	2013-2014	149	6,076	1,4723	,1206
	2014-2015	160	6,241	1,4575	,1152

Ilustración 5-40: Estadísticos descriptivos de grupo
 Fuente: elaboración propia. Base Cuestionarios 1,2 y3

Como podemos observar la tabla en el anexo 13, los p-valores resultantes de la prueba, tanto para las puntuaciones de cada proceso algebraico como para cada prueba, son mayores que el

nivel de significación, por lo que, con un 95% de confianza estamos en condiciones de aceptar la hipótesis que establece que la media de las notas del ciclo lectivo 2013-2014 es igual a la media de las notas de las pruebas del ciclo lectivo 2014-2015, es decir que no existen diferencias significativas entre las dos medias.

Además, al ir aumentando el grado de dificultad de las pruebas, como es el paso de un proceso algebraico a otro (de sustitución a generalización, y de este a modelización) más similares son los resultados obtenidos por las dos poblaciones.

5.5. **RESUMEN**

En este capítulo hemos visto los resultados obtenidos por el alumnado de los dos ciclos lectivos 2013-2014 y 2014-2015.

En la primera parte realizamos el estudio de frecuencias de los resultados de los dos cuestionarios de álgebra diferenciando cada proceso (sustitución, generalización y modelización) y del cuestionario de funciones.

A continuación realizamos el estudio de los estadísticos descriptivos de los resultados globales de la prueba de álgebra y de la de funciones por ciclo lectivo. Posteriormente realizamos el estudio estadístico de los resultados globales de las notas por ciclo lectivo y a continuación por modalidad de bachillerato (científico-tecnológica y ciencias sociales), distinguiendo el ciclo lectivo al que pertenecen.

Finalmente, mostramos los resultados del test estadístico que se ha utilizado para comparar los resultados de los diferentes ciclos lectivos.

6. RESULTADOS DEL ESTUDIO DE CASOS DE LA MODALIDAD DE CIENCIAS Y TECNOLOGÍA

6. RESULTADOS DEL ESTUDIO DE CASOS DE LA MODALIDAD DE CCS Y TECNOLOGÍA	239
6.1. <u>PRESENTACIÓN</u>	243
6.2. <u>RESULTADOS DEL ESTUDIO DE CASOS: MARC</u>	245
6.2.1. Resultados de las pruebas diagnósticas	245
6.2.2. Resultados del proceso de aprendizaje con el modelo FC	249
6.2.2.1. Apuntes de Cornell	249
6.2.2.2. Cuestionarios <i>online</i>	249
6.2.2.3. Actividades de clase	252
6.2.3. Resultados de la prueba final de la unidad	255
6.2.4. Evolución de los resultados	256
6.2.5. Resultados del cuestionario final sobre el modelo FC	259
6.3. <u>RESULTADOS DEL ESTUDIO DE CASOS: MARIA B</u>	261
6.3.1. Resultados de las pruebas diagnósticas	261
6.3.2. Resultados del proceso de aprendizaje con el modelo FC	265
6.3.2.1. Apuntes de Cornell	266
6.3.2.2. Cuestionarios <i>online</i>	266
6.3.2.3. Actividades de clase	268
6.3.3. Resultados de la prueba final de la unidad	272
6.3.4. Evolución de los resultados	275
6.3.5. Resultados del cuestionario final sobre el modelo FC	277
6.4. <u>RESULTADOS DEL ESTUDIO DE CASOS: ALEJANDRO</u>	279
6.4.1. Resultados de las pruebas diagnósticas	279
6.4.2. Resultados del proceso de aprendizaje con el modelo FC	281
6.4.2.1. Apuntes de Cornell	281
6.4.2.2. Cuestionarios <i>online</i>	282
6.4.2.3. Actividades de clase	284
6.4.3. Resultados de la prueba final de la unidad	285
6.4.4. Evolución de los resultados	286
6.4.5. Resultados del cuestionario final sobre el modelo FC	289
6.5. <u>RESULTADOS DEL ESTUDIO DE CASOS: NÚRIA</u>	291
6.5.1. Resultados de las pruebas diagnósticas	291
6.5.2. Resultados del proceso de aprendizaje con el modelo FC	293
6.5.2.1. Apuntes de Cornell	294
6.5.2.2. Cuestionarios <i>online</i>	294
6.5.2.3. Actividades de clase	295
6.5.3. Resultados de la prueba final de la unidad	297
6.5.4. Evolución de los resultados	298
6.5.5. Resultados del cuestionario final sobre el modelo FC	300
6.6. <u>RESUMEN</u>	302
6.6.1. Resultados de las pruebas diagnósticas	302
6.6.2. Resultados del proceso de aprendizaje con el modelo FC	303
6.6.2.1. Apuntes de Cornell	303
6.6.2.2. Cuestionarios <i>online</i>	303
6.6.2.3. Actividades de clase	304

6.6.3.	Resultados de la prueba final de la unidad	304
6.6.4.	Evolución de los resultados	305
6.6.5.	Resultados del cuestionario final sobre el modelo FC	306

6.1. PRESENTACIÓN

Presentamos ahora los resultados del estudio de casos múltiple inclusivo de 4 alumnos de la muestra, correspondientes a la modalidad de Ciencias y Tecnología. Analizaremos tres aspectos del desarrollo del proceso de enseñanza-aprendizaje de cada uno de los cuatro alumnos de la muestra: los resultados de las pruebas diagnósticas, los resultados del trabajo realizado por los alumnos en la unidad que realizamos con el modelo “*Flipped Classroom*”, y por último, el resultado de la prueba de contenidos y competencias final. Es decir, que para el estudio de cada alumno realizaremos una triangulación entre los datos obtenidos a partir de dichos instrumentos (ilustración 6-1), y posteriormente un estudio de la evolución del alumno incluyendo las notas trimestrales del curso, así como la percepción del alumno del modelo FC utilizado.

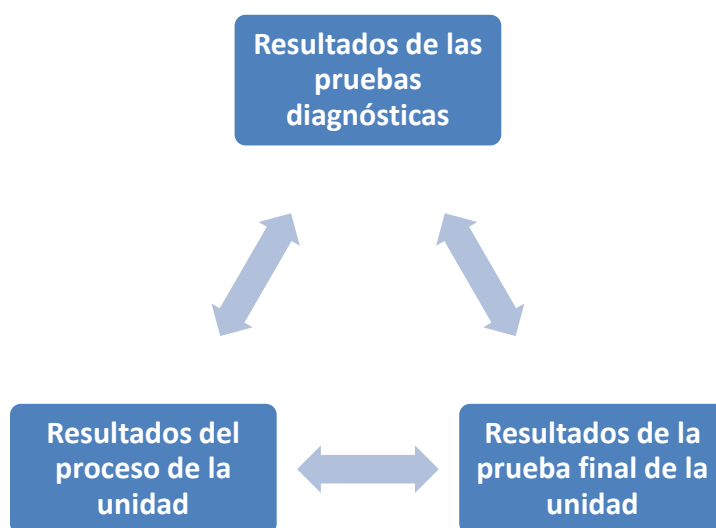


Ilustración 6-1: Triangulación de los resultados académicos

Fuente: Elaboración propia

Como ya mencionamos en el capítulo de metodología, esta triangulación nos permite realizar un esquema de evolución del alumno desde que empieza con el estudio hasta que lo finaliza, y así poder comparar los resultados con las notas obtenidas en la asignatura tanto anteriormente como de forma posterior.

Presentamos los resultados de los 4 alumnos (de total de 8 de la muestra) de la modalidad de bachillerato científico-tecnológica, según la nota global obtenida en matemáticas en el primer trimestre del curso académico 2013-2014, siendo cada uno representativo de un cuartil dentro

del rango de 0 a 10. Es decir que tendremos en cuenta los resultados de Marc, María B, Alejandro y Núria (Ilustración 6-2), para poder compararlos con los de alumnos pertenecientes al mismo cuartil de notas pero de diferente modalidad. El caso de Marc y María B se mostrará a través de un análisis completo (ilustraciones y comentarios) por ser los alumnos que han presentado mayor dificultad, y en los dos casos restantes realizaremos el análisis solo con comentarios pertinentes sin otras ilustraciones sobre el resultado final.

Muestra del Estudio de casos	
Cuartil de notas del 1r trimestre	Modalidad de Ciencias Sociales
1r Cuartil nota entre 0 y 2,4	Marc
2º Cuartil nota entre 2,5 y 4,9;	MaríaB
3r Cuartil, nota entre 5 y 7,4;	Alejandro
4º Cuartil nota entre 7,5 y 10.	Núria

Ilustración 6-2: Muestra de cuatro alumnos de la población para el estudio de casos
Fuente: Elaboración propia



Ilustración 6-3: Alumnos de la muestra de la población trabajando en grupo.
Fuente: Elaboración propia

6.2. RESULTADOS DEL ESTUDIO DE CASOS: MARC

Presentamos ahora los resultados obtenidos por Marc (perteneciente al 1r cuartil de estudio) en las tres etapas de la investigación: pruebas diagnósticas, material de desarrollo de las clases (apuntes de Cornell, dossier de las actividades y registro audiovisual de la clase) y prueba final de contenidos y competencias. Posteriormente realizaremos el análisis de la evolución de Marc durante el curso, y por último, comentaremos su percepción sobre el modelo FC con el que realizó la unidad de Funciones.

Marc obtuvo un 1,1 en la nota del primer trimestre de matemáticas. De hecho, en los dos exámenes parciales del trimestre obtuvo (sobre un total de 10) un 1 en el tema de números complejos, un 1 en la unidad de trigonometría y por último un 0,65 en el examen de evaluación trimestral. Mostraba muchas dificultades para asimilar los conceptos y procedimientos matemáticos.

6.2.1. Resultados de las pruebas diagnósticas

Como observamos en la ilustración 6-4, en las pruebas diagnósticas, Marc obtuvo notas por encima de la media, excepto en el proceso de sustitución.

Pruebas Casos	Notas de las pruebas diagnósticas					
	Sustitución	Generalización	Modelización	Total Álgebra	Funciones	Total Pruebas
Marc	5	6,1	5	5,6	7,7	5,9
Media del Ciclo 2013-2014	6,2	6,0	3,4	5,8	7,61	6,1

*Ilustración 6-4: Notas de Marc en las pruebas diagnósticas de Álgebra y Funciones
Fuente: Elaboración propia a partir de los Cuestionarios 1, 2 y 3.*

Como muestra la ilustración siguiente (6-5), en los ítems correspondientes al proceso algebraico de sustitución (Cuestionario 1, Anexo 2), en primer lugar Marc no comprende que se deben relacionar las expresiones de la columna A con la B, por lo que trabaja con cada expresión por separado e iguala todas las expresiones a cero. Ve la expresión algebraica como un enunciado incompleto, no acepta que la expresión no dé un número. Como mencionamos en el capítulo anterior, este tipo de error tiene su origen en un obstáculo cognitivo.

4. En cada uno de los casos siguientes halla las sustituciones que se hacen para pasar de las expresiones de la columna A a la B.

	A	B
4 a)	$5x - 17 \quad x = \frac{13}{5}$	$5(y+1) - 17 \quad 5y + 5 - 17; \quad y = \frac{-5+17}{5}$
5 b)	$2x \cdot 3y - z \quad x = \frac{z}{3y+2}$	$6xp - z \quad x = \frac{z}{6+p}$
6 c)	$e(j+7) \quad j = \frac{-7e}{e}$	$(j+7)(f-2) \quad j = \frac{-7f+14}{-3+f}$
7 d)	$vx \quad v=x$	$hrhv \quad v = hrv$
8 e)	$2/p \quad p=2$	$k/pq \quad p = \frac{k}{q}$

Handwritten notes:
 $\frac{z}{3} = p$
 $jf - 2j + 7f - 14$
 $j = \frac{-7f+14}{-3+f}$

Ilustración 6-5: Error de Marc con origen en un obstáculo en la pregunta 4. Fuente: Cuestionario 1 de Marc de 1º de bachillerato del ciclo lectivo 2013-2014.

En el proceso de generalización, aunque la nota obtenida por Marc es muy similar a la media de la población (6,1 y 6, respectivamente), observamos que tuvo cierta dificultad para encontrar el patrón en los ítems 22 y 23, como muestra la ilustración 6-6. De hecho, lo que entiende es que debe sumar tres puntos en cada nueva posición, confundiendo la sucesión de “números triangulares” $a_n = \frac{n(n+1)}{2}$ con una progresión aritmética de ecuación $a_n = 3 + (n - 1) \times 3$.

9. a) Los números 1, 3, 6, ..., $\frac{n(n+1)}{2}$, recibían el nombre de números triangulares, ya que podían ser dispuestos en forma de triángulos:

¿Podrías dibujar el siguiente triángulo?

22

¿Podrías dibujar el triángulo que ocupa la posición 6?

23

Ilustración 6-6: Error de Marc con origen en ausencia de sentido en los ítems 22 y 23. Fuente: Cuestionario 1 de Marc de 1º de bachillerato del ciclo lectivo 2013-2014.

Este tipo de error se origina en “la ausencia de sentido” puesto que hay error de procedimiento derivado del uso inapropiado que hace de las fórmulas o reglas de procedimiento, es decir, no puede establecer la expresión algebraica que generaliza el patrón.

Marc tuvo dificultad en dos de los cuatro ítems de modelización. En el ítem 37 (Ilustración 6-7) aunque plantea bien el problema, es decir, el procedimiento de modelización es correcto,

podemos ver que le ocurre lo mismo que en los primeros ítems del cuestionario 1: no acepta que la expresión no dé un número y la iguala a cero.

13. En el supermercado un kilo de peras cuesta 90 céntimos de euro; un kilo de plátanos 1,20 euros, el kilo de ciruelas 1,90 euros, el kilo de naranjas 1,80 euros y cada kiwi cuesta b céntimos de euro. La familia de Ana tiene los siguientes gastos en fruta: Compran a la semana 2 kg. de peras, p kilos de plátanos, 3 kilos más de ciruelas que de plátanos y 6 kiwis.

¿Podrías decir cuánto gasta la familia de Ana en fruta en una semana?

37 $1\text{kg} = 0,90\text{€}$ $1\text{kg kiwi} = b\text{€}$ $1,80\text{€} + 1,20\text{€}p + [(3+p) \cdot 1,90] + 6b$
 $1\text{kg} = 1,20\text{€}$ $-1,80 - 1,20p - 3,7 - 1,90p = b$
 $1\text{kg} = 1,90\text{€}$
 $1\text{kg} = 1,80\text{€}$

¿Podrías decir cuánto gasta la familia de Ana en fruta al mes suponiendo que todas las semanas consume la misma cantidad de fruta y que un mes tiene 4 semanas?

38 $4 \cdot (1,80 + 1,20p + 3,7 + 1,90p + 6b)$

Ilustración 6-7: Error de Marc con origen en ausencia de sentido en los ítems 37 y 38.
Fuente: Cuestionario 2 de Marc de 1º de bachillerato del ciclo lectivo 2013-2014.

En el ítem 38, comete un error con origen afectivo y/o emocional, puesto que al multiplicar 1,9 x 3 coloca que el resultado es 3,7, en lugar de 5,7. No obstante, en lo que respecta al proceso de modelización, plantea bien lo que se pide en el enunciado.

Por lo que podemos concluir, que en los dos primeros cuestionarios correspondientes a los procesos algebraicos de sustitución, generalización y modelización, no hubo casi diferencias entre la población de alumnos del ciclo 2013-2014 en el desarrollo de los ítems, de hecho la nota obtenida por Marc fue de 5,6 y la media de la población 5,8.

En el cuestionario de funciones, la nota que obtiene Marc está un poco por encima de la media de la población de alumnos del ciclo lectivo 2013-2014 (7,7 y 7,61 respectivamente). En general respondió correctamente a la mayoría de preguntas, excepto a la última donde no entendió que debía utilizar las cuatro variables (Ilustración 6-8).

Pregunta 2: EL MEJOR COCHE

“El fabricante del coche Ca pensó que la regla para obtener la puntuación total no era justa.
 Escribe una regla para calcular la puntuación total de modo que el coche Ca sea el ganador.
 Tu regla debe incluir las cuatro variables y debes escribir la regla rellenando con números positivos los cuatro espacios de la ecuación siguiente.

Puntuación total =3*..... S + C + D +3*..... H.

Ilustración 6-8: Error de Marc en la pregunta 2 del Cuestionario 3.
 Fuente: Cuestionario 3 de Marc de 1º de bachillerato del ciclo lectivo 2013-2014.

Por todo ello podemos concluir que aunque Marc ha tenido ciertas dificultades en la resolución de las pruebas, sobre todo en lo que respecta a la necesidad de clausura, su nivel en los procesos algebraicos y de funciones es el esperado con respecto a la media de la población. Como muestra la ilustración 6-9, obtiene una nota total de las pruebas de 5,9 que está levemente por debajo de la media poblacional que es de 6,1.

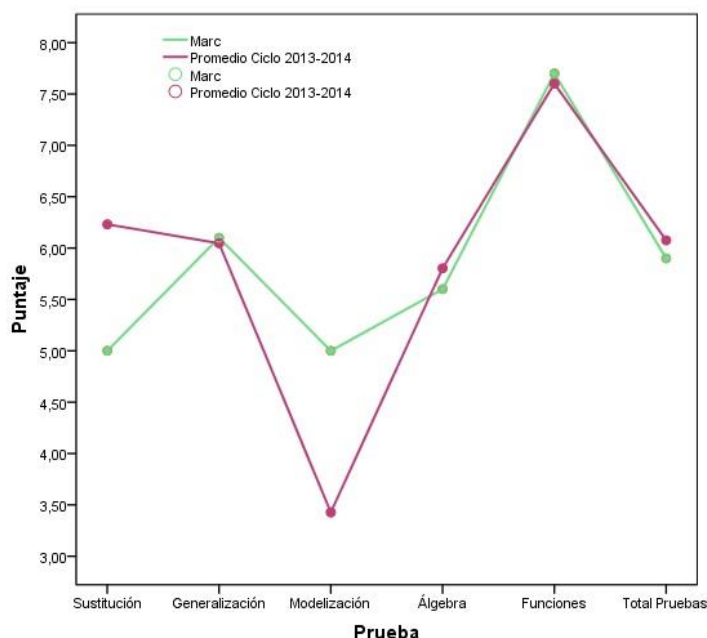


Ilustración 6-9: Diagrama de líneas de las notas resultantes de las pruebas diagnósticas de Marc.
 Fuente: Cuestionarios 1,2 y 3 de Marc, de 1º de bachillerato del ciclo lectivo 2013-2014.

6.2.2. Resultados del proceso de aprendizaje con el modelo FC

Para analizar los resultados obtenidos por Marc en el proceso de aprendizaje con el modelo FC, tendremos en cuenta los siguientes instrumentos: los apuntes que realizó con la plantilla de Cornell (Anexo 6), los cuestionarios *online* (Anexo 7) y las actividades de clase (Anexo 10).

6.2.2.1. Apuntes de Cornell

Según la categorización que planteamos en el capítulo de metodología para los apuntes realizados con la plantilla de Cornell, observamos que los resultados obtenidos por Marc son:

1.- En la comprensión (C), analizar si los alumnos reconocen las ideas dominantes del vídeo:	
C2	<i>Parece que no entiende completamente el contenido del vídeo y no expresa del todo bien las ideas principales. Poco claro y concreto.</i>
2.- En la lectura (L): Analizar la legibilidad, claridad y referencia de las notas	
L2	<i>Buena (explica con claridad las ideas sobre el tema).</i>
3.- En la expresión (E): analizar el lenguaje propio, la brevedad y la precisión. Así como también el uso de signos convencionales, gráficas, formas geométricas con palabras claves o frases.	
E1	<i>Mixta (Utiliza una combinación de texto con símbolos y gráficas para tomar nota).</i>
4.- En la columna de idea clave o pregunta (P): analizar el nivel de comprensión y síntesis sobre el tema trabajado.	
P2	<i>Buena (realiza una pregunta o palabra clave de síntesis del tema).</i>
5.- En la columna de Síntesis o resumen (S): analizar la elaboración de una síntesis utilizando esquemas, cuadros sinópticos, tablas cronológicas (ayudan a recordar lo esencial).	
S4	<i>En blanco (Deja la síntesis sin hacer).</i>

Ilustración 6-10: Categorización de los apuntes de Cornell de Marc.

Fuente: Apuntes de Cornell de Marc, de 1º de bachillerato del ciclo lectivo 2013-2014.

Para poder añadir esta categorización analizada a los resultados cuantitativos de la evolución del aprendizaje de Marc, utilizamos la ilustración 3-39 del capítulo de metodología, donde obtenemos una nota de 6, puesto que una categoría es de nivel 1 y el resto de nivel 2 o 3 (pudiendo haber una de nivel 4 o 5).

6.2.2.2. Cuestionarios *online*

En cuanto a las tres primeras preguntas de los ocho cuestionarios *online* observamos que, en las categorías planteadas y su correspondiente puntuación descrita en el capítulo de metodología, los resultados de Marc han sido los siguientes (Ilustración 3-40):

Proceso/Cuestionarios	C1	C2	C3	C4	C5	C6	C7	C8
1.- Recordar (Re): analizar si el alumno recuerda y reconoce información e ideas además de principios aproximadamente en la misma forma en que los aprendió.	Re2	Re2	Re2	Re2	Re2	Re2	Re2	Re2
2.- Comprender (Co): analizar si el alumno comprende, esclarece o interpreta la información en base al conocimiento previo.	Co2	Co1	Co1	Co2	Co2	Co1	Co2	Co2
3.- Aplicar (Ap): analizar si el alumno selecciona, transfiere y utiliza datos y principios para elaborar una pregunta interesante sobre el tema visto en el vídeo, aplicando los conceptos aprendidos.	Ap2	Ap1	Ap2	Ap2	Ap2	Ap2	Ap2	Ap2
Puntuación	5	8	7	5	5	7	5	5

Ilustración 6-11: Categorización de los cuestionarios online de Marc.

Fuente: Elaboración propia a partir de Cuestionarios online y del registro audiovisual de Marc, de 1º de bachillerato del ciclo lectivo 2013-2014 (Anexo 14).

Calculando la media de las puntuaciones obtenidas según la categorización de las respuestas de los cuestionarios de autoevaluación *online*, Marc obtiene una puntuación de 5,875.

En lo referente a las preguntas sobre la experiencia de visualización del vídeo en cuanto a contenido, los resultados de la categorización son:

Preguntas / Cuestionarios	C1	C2	C3	C4	C5	C6	C7	C8
1.- Se ha podido concentrar para ver el vídeo	Si	Si	Si	Si	Si	No	Si	Si
2.- Causas de distracción						Di1		
3.- Número de veces que ha necesitado ver el vídeo para comprender el tema	1	1	1	1	1	1	1	1
4.- Utilización de las funciones de “pausa” y “retroceso”	No	Si	No	Si	Si	No	No	No
5.- Dudas	Du3	Du3	Du3	Du3	Du3	Du2	Du3	Du3
6.- Tomar apuntes con la plantilla de Cornell	Si	Si	Si	Si	No	Si	Si	Si
7.- Nivel de comprensión del tema con el vídeo tutorial	4	4	4	5	4	3	4	4
8.- Nivel de comprensión de un tema en clase	3							
9.- Dificultades en el proceso		Si	Si	No	Si	No	No	No
10.- Tipo de dificultad		Di1	Di1		Di2			
11.- Nota de matemáticas del primer trimestre	Susp enso							

Ilustración 6-12: Categorización de las preguntas de contenido de la visualización de los cuestionarios de autoevaluación online

Fuente: Elaboración propia a partir de Cuestionarios online de Marc, de 1º de bachillerato del ciclo lectivo 2013-2014

Tras los resultados de la categorización de la ilustración 6-12, observamos que Marc:

- En general no ha tenido dificultad para concentrarse para ver los vídeos tutoriales.
- Ha visto solo una vez el vídeo, y casi no utiliza las funciones de “pausa” y “retroceso”. Este hecho vemos que luego influye en él en la comprensión del tema, puesto que necesita volver a ver los apuntes a la hora de contestar las preguntas sobre el contenido del mismo.
- Excepto en uno de los vídeos, expresa no tener dudas.
- Utiliza la plantilla de Cornell en todos los vídeos excepto en uno.
- En general expresa tener un nivel simbólico de comprensión de los vídeos tutoriales. Capta las ideas implícitas. Comprende todo con facilidad y en profundidad. En cambio expresa que en clase su nivel es de comprensión literal del contenido de la clase.
- Ha tenido dificultades en el proceso de visualización en relación a la comprensión del contenido.
- Ha suspendido el primer trimestre de matemáticas de primero de bachillerato.

Respecto a las preguntas sobre la experiencia de visualización del vídeo en cuanto a su forma para los cuestionarios 7 y 8, los resultados de la categorización son:

Preguntas/Cuestionarios	C7	C8
1.- Respecto al formato del vídeo	Fo1	-
2.- Causas de la elección Fo1	Ca2	-
3.- Opinión sobre la posibilidad de visualizar a los profesores en el vídeo	Positivo	Positivo
4.- Argumentación de la elección de "positivo"	Arg4	Arg4

Ilustración 6-13: Categorización de las preguntas de forma de la visualización de los cuestionarios 7 y 8 de autoevaluación online
Fuente: Elaboración propia a partir Cuestionarios online de Marc, de 1º de bachillerato del ciclo lectivo 2013-2014

Tras los resultados de la categorización de la ilustración 6-13, observamos que Marc:

- Prefiere el formato con dos profesores visibles porque se distrae menos.
- Expresa que visualizar a los profesores en el vídeo y el hecho de que la interacción entre ellos simule el diálogo alumno-profesor le facilita la comprensión del tema.

6.2.2.3. Actividades de clase

Observamos que tiene cierta dificultad para mantener ordenado el material de clase. De las actividades realizadas sólo tiene tres de siete, el resto no las encuentra. De las tres que posee, la 5ª, 6ª y 7ª, que son las que tienen mayor dificultad en cuanto a contenido, observamos que no presenta dificultades en la resolución. Tiene todos los ejercicios resueltos correctamente.

En la actividad de refuerzo observamos dificultad para encontrar el dominio de una función irracional y fraccionaria a la vez (Ilustración 6-14).

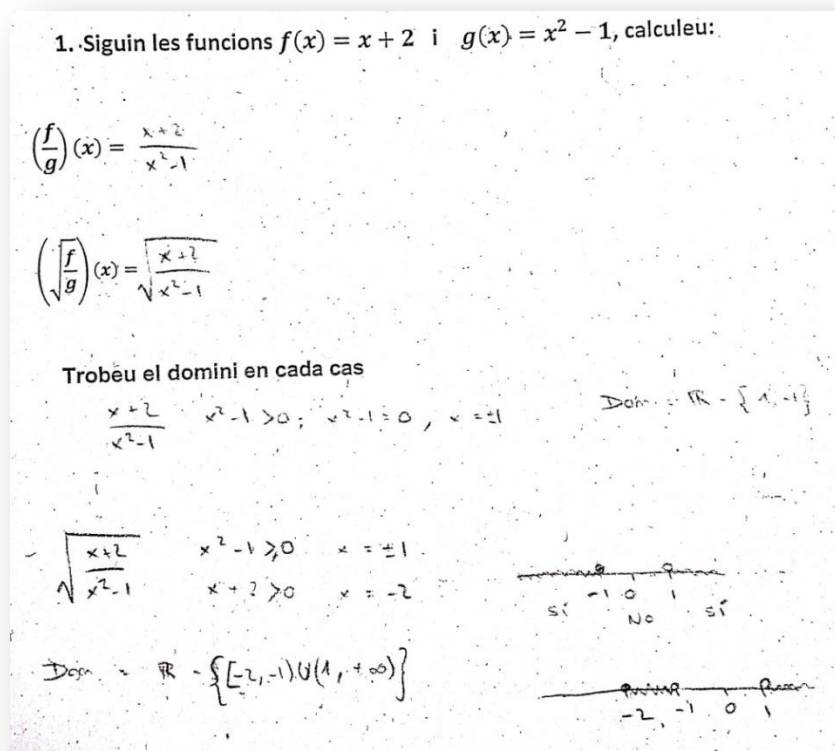


Ilustración 6-14: Ejercicio 1 de la actividad de refuerzo de Marc.
 Fuente: Actividad de Refuerzo de Marc, de 1º de bachillerato del ciclo lectivo 2013-2014.

Comprende que debe buscar los valores de x para los cuales el radicando sea mayor que cero. Comienza planteando que tanto denominador como numerador han de ser mayores que cero, pero no considera la posibilidad de que ambos puedan ser menores que cero. Por otro lado, considera la inecuación $x^2 - 1 \geq 0$, cuando esta inecuación no puede ser cero, ya que en los valores de x, 1 y -1, la fracción sería indeterminada. También vemos que una vez que analiza los intervalos coloca de forma incorrecta el dominio, colocando justamente lo contrario.

En los ejercicios de composición de funciones y función inversa observamos que no ha mostrado dificultades en la resolución. En cuanto al análisis de las propiedades globales, reconoce correctamente las propiedades a partir de la gráfica de la función (ejercicio 5 de la Actividad de refuerzo – Anexo 10). No obstante, cuando tiene que analizar de forma analítica la simetría de la función, en el ejercicio 6, no comprende el procedimiento que debe realizar y olvida el término de grado cero con valor 1 (Ilustración 6-15).

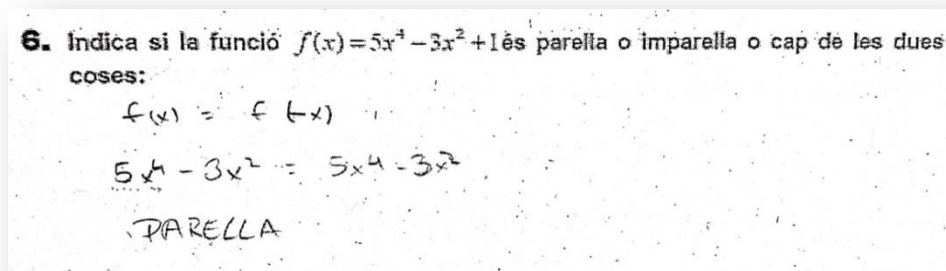


Ilustración 6-15: Ejercicio 6 de la actividad de refuerzo de Marc.

Fuente: Actividad de Refuerzo de Marc, de 1º de bachillerato del ciclo lectivo 2013-2014.

En consecuencia, de todo lo observado en las actividades desarrolladas en clase (dossier de trabajo y registro de material audiovisual), aplicando la categorización basada en la relación entre las dimensiones cognitivas y la taxonomía revisada de Bloom, que presentamos en el capítulo de metodología, los resultados obtenidos por Marc son los siguientes:

Categoría	Resultados del análisis de las actividades y material audiovisual
1.- Analizar (An): analizar si el alumno descompone el conocimiento en sus partes y piensa en cómo estas se relacionan con su estructura global.	An2
2.- Evaluar (Ev): analizar si el alumno hace juicios en base a criterios y estándares utilizando la comprobación y la crítica.	Ev2
3.- Crear (Cr): Analizar la habilidad que permite reorganizar los elementos para formar un todo coherente y funcional; generar, planear o producir para reorganizar elementos en un nuevo patrón o estructura.	Cr2
Puntuación	5

Ilustración 6-16: Categorización de las actividades de clase de Marc

Fuente: Elaboración propia a partir de las actividades de Marc y del material audiovisual de las clases registradas, de 1º de bachillerato del ciclo lectivo 2013-2014.

Es decir, que puesto que hemos observado que Marc tiene dudas y dificultades en el proceso de análisis de los contenidos y que suele pedir ayuda, que a veces se muestra dudoso y tiene dificultades para colaborar y participar en la actividad, y que pide ayuda también a la hora de plantear una nueva situación, o inventar, o diseñar una nueva propuesta, la puntuación correspondiente planteada para poder cuantificar estos resultados cualitativos y añadirla a su evolución del aprendizaje es de 5.

6.2.3. Resultados de la prueba final de la unidad

En la prueba evaluativa final de la unidad (Anexo 12 – 2ª opción de prueba) Marc obtuvo una nota de 6,15 sobre un total de 10 puntos, de acuerdo a la codificación planteada en el capítulo de metodología (Ilustración 6-17):

Nº ejercicio	Objetivos evaluados	Codificación del ejercicio	Puntuación del ítem	Puntuación de Marc
Ejercicio 1	<ul style="list-style-type: none"> Reconocer las funciones reales de variable real, su dominio e imagen. Operar con funciones. Conocer el concepto de función inversa de una función y aplicar un proceso para obtenerla. 	Encuentra la función resultante de dividir $f(x)$ entre $g(x)$.	0,5	0,5
		Encuentra analíticamente el dominio de la función.	0,75	0,75
		Obtiene la función inversa.	0,75	0,75
		Encuentra el dominio de la función inversa para hallar la imagen de la función.	0,5	0,5
Ejercicio 2	<ul style="list-style-type: none"> Saber reconocer las propiedades globales de una función: simetría (visual y analíticamente) 	Estudia la simetría (par e impar) analíticamente de la función $f(x)$.	1,25	0
		Estudia la simetría (par e impar) visualmente de la gráfica de la función $g(x)$.	1,25	1
Ejercicio 3	<ul style="list-style-type: none"> Realizar composición de funciones y comprobar las propiedades que verifica esta operación. 	Expresa el número de habitantes en función del tiempo.	1	0
		Encuentra el número de habitantes en ese instante.	0,75	0
		Encuentra el número de habitantes transcurrido un año y seis meses.	0,75	0,75
Ejercicio 4	<ul style="list-style-type: none"> Reconocer las funciones reales de variable real, su dominio e imagen. Saber reconocer las propiedades globales de una función 	Identifica el dominio e imagen de la función.	0,5	0,25
		Identifica la simetría, continuidad y periodicidad de la función.	0,5	0,5
		Identifica las asíntotas de la función.	0,5	0,25
		Identifica la monotonía, máximos y mínimos de la función.	0,5	0,5
		Identifica la curvatura y puntos de inflexión de la función.	0,5	0,4
Total de puntos de la prueba			10	6,15

Ilustración 6-17: Codificación de los ejercicios de la prueba final de la unidad de Marc

Fuente: Elaboración propia a partir de la prueba de Marc, de 1º de bachillerato del ciclo lectivo 2013-2014.

Como vimos en las actividades de clase, observamos que tuvo dificultades en la simetría de funciones, como muestra la ilustración 6-18, y en identificar las asíntotas de la función del ejercicio 4. No obstante en general comprendió lo que se le pedía y supo resolverlo.

2. Estudieu, analítica o gràficament segon correspongui, la simetria de les següents funcions:

$$f(x) = \frac{x^3 - x}{x^5 + x^7}$$

$f(x) = f(-x) \rightarrow$ NO PARELLA

$$\frac{x^3 - x}{x^5 + x^7} = \frac{-x^3 + x}{-x^5 - x^7}$$

$f(x) = -f(-x) \rightarrow$ SÍ IMPARELLA

$$\frac{x^3 - x}{x^5 + x^7} = \frac{x^3 - x}{x^5 + x^7}$$

Rta: Té simetria imparella

És simetria ~~parella~~ imparella

Ja que no forma un angle de 90°

Ho podem comprovar fent:

$$f(x) = -f(-x)$$

Ilustración 6-18: Ejercicio de simetría de la prueba final de la unidad de Marc
 Fuente: Elaboración propia a partir de la prueba final de Marc, de 1º de bachillerato del ciclo lectivo 2013-2014.

6.2.4. Evolución de los resultados

En resumen, las calificaciones/puntuaciones obtenidas por Marc con cada uno de los instrumentos y la del resultado global de cada trimestre, han sido:

Etapa	Instrumento	Puntuación (sobre 10)
Metodología tradicional de Enseñanza - Aprendizaje	Nota de matemáticas del 1r Trimestre	1,1
Pruebas diagnósticas iniciales	Prueba diagnóstica de álgebra	5,6
	Prueba diagnóstica de funciones	7,7
Modelo FC de enseñanza-aprendizaje	Apuntes de Cornell	6
	Cuestionarios de autoevaluación	5,875
	Actividades de clase	5
	Prueba final de contenidos	6,15
	Nota de matemáticas del 2n Trimestre	5,2
Metodología tradicional de Enseñanza - Aprendizaje	Nota de matemáticas del 3r Trimestre	5

Ilustración 6-19: Tabla con los puntajes obtenidos por Marc en cada instrumento y prueba
Fuente: Elaboración propia

En la evolución del aprendizaje de Marc podemos observar que al empezar el curso con una metodología tradicional tuvo serias dificultades para asimilar los conceptos y procedimientos matemáticos nuevos. No obstante, los resultados de las pruebas diagnósticas muestran que Marc tiene un nivel de razonamiento algebraico muy similar a de la media de la población, y que, de acuerdo a la investigación realizada por Ruano y Socas, como ya comentamos en el Marco referencial, lo sitúa en la franja de la normalidad.

En cuanto a los errores observados por la necesidad de clausura y la dificultad para encontrar la expresión algebraica que generaliza un patrón, observamos que Marc aún no ha terminado el paso del “estadio formal temprano” al de “las operaciones formales”, según Piaget y Collin.

Posteriormente, notamos un punto de inflexión en su evolución cuando empieza a trabajar con la metodología de “*Flipped Classroom*” (ilustración 6-20):

- El uso de la metodología de “*Flipped Classroom*” atiende a sus necesidades de orden y sistematización del estudio: su desorganización habitual con el material le perjudica notablemente. No es cuidadoso ni ordenado. No

obstante, al tener a su disposición todo el material teórico-práctico de la unidad con FC en el web, puede compensar sus deficiencias.

- De acuerdo a las etapas del aprendizaje planteadas por la Taxonomía de Bloom, observamos que en las tres primeras Marc presenta ciertas dificultades para recordar y comprender, y por ello recurre continuamente a los apuntes. Observamos también que en el resto de etapas en general se muestra dudoso. Esto lo lleva a que en clase tienda a pedir ayuda a sus compañeros o al profesor, y participe poco en las actividades grupales. Al desarrollar esta unidad con el modelo FC, el profesor pudo observar a través de los cuestionarios y de las actividades de clase las dificultades que Marc tenía en el aprendizaje con antelación al examen, sobre todo en las tres etapas más elevadas de la Taxonomía de Bloom: analizar, evaluar y crear; y trabajar con él para subsanar errores, dudas o malentendidos.
- La evolución que Marc ha realizado ha sido muy significativa, ya que a finales de la unidad de funciones se encuentra en el 3º cuartil de notas, comprendidas entre el 5 y el 7,5.

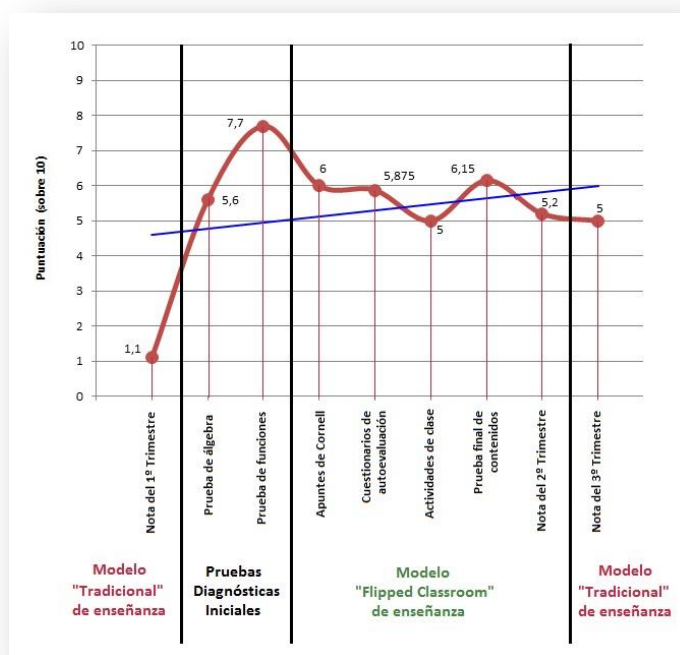


Ilustración 6-20: Evolución del proceso de aprendizaje de Marc con diferentes modelos de enseñanza

Fuente: Elaboración propia

Todo ello permitió que Marc realizase la prueba final de contenidos con más seguridad emocional en cuanto al trabajo realizado en la unidad, con menor cantidad de dudas y mayor

asimilación de los procesos y de los contenidos trabajados, hecho que se vio reflejado en la nota obtenida en el examen. No obstante, observamos que aún quedan dificultades por resolver en cuanto a las operaciones formales y al paso de la aritmética al álgebra.

6.2.5. Resultados del cuestionario final sobre el modelo FC

La percepción personal de Marc expresada en el cuestionario de valoración final de la unidad de funciones trabajada con el modelo FC es la siguiente:

- **Los vídeos tutoriales:** son aburridos, de fácil comprensión e interactivos. Le han ayudado a comprender mejor el tema y a ser más ordenado y riguroso en el estudio, a saber generalizar y a particularizar. Piensa que su potencial matemático ha aumentado. Que pudo moverse a su propio ritmo, pudo revisar lo que necesitaba cuando lo necesitaba. Tuvo la posibilidad de repasar clases mediante el uso del video y del resto de herramientas en línea para estudiar para el examen. Recomienda que en el vídeo, en lugar de que el profesor vaya escribiendo con el cursor, pase diapositivas y vaya apareciendo lo que explica en cada momento.
- **Los cuestionarios de autoevaluación:** no los hubiese realizado si fuesen voluntarios.
- **El Web “trescomacatorze”:** le ha ayudado a organizar sus estudios y a mejorar su rendimiento académico porque le resulta más fácil disponer del material necesario para trabajar. No obstante al principio explica que como no sabía muy bien a donde ir y no conocía el web, le costó llegar hasta los vídeos.
- **Las clases:** las que más le gustaron fueron aquellas en las que trabajó en grupo o en pareja, porque pudo debatir con los compañeros sobre cuál era la respuesta correcta y si no lo entendía se lo explicaban en el momento. De hecho, explica que un día se dejó los apuntes de Cornell en casa, pero su compañero compartió los suyos con él y pudo seguir la clase. No obstante, no percibió que tuviera un rol más activo en el proceso.
- **El modelo FC de enseñanza-aprendizaje:** Considera que es mejor de lo que pensaba cuando se lo presentaron en la “Clase introductoria”, incluso mejor

que el modelo tradicional, porque le obligaba a prepararse el tema para la clase, y porque si tenía dudas podía contar con el profesor para preguntarle en clase, o si faltaba a clase tenía todo lo necesario para ponerse al día. Expresa que durante el curso le gustaría que algunas unidades se trabajasen con el modelo tradicional y otras con FC, pues aunque con esta metodología aprovecha mucho más el tiempo y se puede hacer todo desde casa, cree que los temas difíciles no es suficiente hacerlos con vídeos, sino asistiendo a la explicación en clase.

6.3. RESULTADOS DEL ESTUDIO DE CASOS: MARIA B

Presentamos ahora los resultados obtenidos por María B (perteneciente al 2º cuartil de estudio) en las tres etapas de la investigación: pruebas diagnósticas, material de desarrollo de las clases (apuntes de Cornell, dossier de las actividades y registro audiovisual de la clase) y prueba final de contenidos y competencias. Posteriormente realizaremos el análisis de la evolución de María B durante el curso, y por último, comentaremos su percepción sobre el modelo FC con el que realizó la unidad de Funciones.

MariaB obtuvo un 4,6 en la nota del primer trimestre de matemáticas, como resultado de dos exámenes parciales donde obtuvo (sobre un total de 10) un 2,5 en el tema de números complejos y un 6,75 en la unidad de trigonometría, y del examen de evaluación trimestral en el que consiguió una calificación de 4. Su dificultad residía en el hecho de que se distraía fácilmente en clase y esto producía que su rendimiento en matemáticas fuese irregular.

6.3.1. Resultados de las pruebas diagnósticas

Como observamos en la ilustración 6-21, en las pruebas diagnósticas, en general María B obtuvo notas por debajo de la media de la población, excepto en la prueba de funciones.

Pruebas Casos	Notas de las pruebas diagnósticas					
	Sustitución	Generalización	Modelización	Total Álgebra	Funciones	Total Pruebas
MariaB	2,5	5,9	0	4,2	8,5	4,8
Media del Ciclo 2013-2014	6,2	6,0	3,4	5,8	7,61	6,1

*Ilustración 6-21: Notas de María B de las pruebas diagnósticas de Álgebra y Funciones
Fuente: Elaboración propia a partir de los Cuestionarios 1, 2 y 3.*

En los ítems 2 y 3 correspondientes al proceso algebraico de sustitución (Cuestionario 1, Anexo 2), observamos que María B comete errores de origen afectivo y/o emocional, debido seguramente a una distracción u olvido (Ilustración 6-22). En el ítem 3, realiza correctamente la propiedad distributiva pero se olvida de realizar la sustitución, probablemente como en el caso anterior, por distracción. En los ítems 5, 7 y 8 no respondió a lo que se le pedía.

INSTRUCCIONES: Lee atentamente las siguientes preguntas y contesta lo que te pide.

1. Si $a = 2b$, ¿en qué se transforma $5a + 3$? $a = 2b$
 $5 \cdot 2b + 3 \rightarrow 10b + 3$

2. Si $a = b + 3$, ¿en qué se transforma $5a + 3b$?
 $5(b+3) + b = 0 \rightarrow 5b + 15 + b$

3. Si $a = 2b$, ¿en qué se transforma $(a + 3) \cdot (3 - a)$?
 $3a - a^2 + 9 - 3a \rightarrow -a^2 + 9$

Ilustración 6-22: Errores de María B de origen afectivo y/o emocional en los ítems 2 y 3.
 Fuente: Cuestionario 1 de María B de 1º de bachillerato del ciclo lectivo 2013-2014.

En los ítems del 9 al 12, observamos que María B otorga un valor numérico a la "x". Esto nos muestra que tiene dificultad para encontrar la expresión algebraica correspondiente en cada ítem, y por ello comete un error de origen en la ausencia de sentido (Ilustración 6-23).

5. Si x es un número cualquiera:

9 a) Escribe el número que es 3 más x. $x = 1$
 $3 + 1 = 4$

10 b) Escribe el número que es 5 menos x. $x = 1$
 $5 - x \rightarrow 5 - 1 = 4$

11 c) Escribe el número que es dos veces tan grande como x. $x = 1$
 $2x \rightarrow 2 \cdot 1 = 2$

12 d) Escribe el número que es el 50% mayor que x. $x = 2$
 $\frac{50}{100} \cdot x \rightarrow \frac{100}{100} = 1$

Ilustración 6-23: Errores de MaríaB con origen en la ausencia de sentido en los ítems del 9 al 12.
 Fuente: Cuestionario 1 de MaríaB de 1º de bachillerato del ciclo lectivo 2013-2014.

En el proceso de generalización, observamos que MaríaB tuvo dificultad para encontrar el patrón en los ítems 22 y 23, como muestra la siguiente ilustración, la 6-24.

9.

a) Los números 1, 3, 6, ..., $\frac{n(n+1)}{2}$, reciben el nombre de números triangulares, ya que podían ser dispuestos en forma de triángulos:

¿Podrías dibujar el siguiente triángulo?

22

¿Podrías dibujar el triángulo que ocupa la posición 6?

23

¿A qué posición corresponde el triángulo que tiene por número triangular asociado el 45?

24 $\frac{n(n+1)}{2} = 45$ $\frac{n^2+n}{2} = 4$ $\frac{-1 \pm \sqrt{1^2 - 4(1)(-8)}}{2} = :$

$n^2+n=8$
 $n^2+n-8=0$

$1+32=33$
 $\frac{-1 \pm 33}{2}$

Ilustración 6-24: Errores de María B con origen en la ausencia de sentido en los ítems 22, 23 y 24. Fuente: Cuestionario 1 de María B de 1º de bachillerato del ciclo lectivo 2013-2014.

En el ítem 22 podemos observar que María B entiende que debe sumar tres puntos en cada nueva posición, confundiendo, como sus dos compañeros estudiados anteriormente, la sucesión de “números triangulares” $a_n = \frac{n \cdot (n+1)}{2}$ con una progresión aritmética de ecuación $a_n = 3 + (n - 1) \times 3$. Como vimos, este tipo de error tiene su origen en “la ausencia de sentido” ya que en su error utiliza inapropiadamente las reglas de procedimiento, es decir, no puede establecer la expresión algebraica que generaliza el patrón. En cambio en el ítem 24, plantea correctamente lo que se le pide, pero comete otro error de origen afectivo y/o emocional al olvidar que tiene la fórmula igualada a 45, y no a 4.

En el ítem 37 de modelización, María B confunde producto con multiplicación al expresar $(3 + p) \cdot 1,90$ como $3p \cdot 1,90$. Este error tiene origen en la ausencia de sentido, ya que viene de un aprendizaje aritmético erróneo (Ilustración 6-25). Por lo cual los ítems 38 y 39, a pesar de que estén bien planteados, arrastran el error del ítem 37.

13. En el supermercado un kilo de peras cuesta 90 céntimos de euro; un kilo de plátanos 1,20 euros, el kilo de ciruelas 1,90 euros, el kilo de naranjas 1,80 euros y cada kiwi cuesta b céntimos de euro. La familia de Ana tiene los siguientes gastos en fruta: 510

Compran a la semana 2 kg. de peras , p kilos de plátanos, 3 kilos más de ciruelas que de plátanos y 6 kiwis.

¿Podrías decir cuánto gasta la familia de Ana en fruta en una semana?

37 $2 \cdot 0'90 + 1'20p + 3p \cdot 1'90 + 6b$
 $1'80 + 6'3p + 6b$

¿Podrías decir cuánto gasta la familia de Ana en fruta al mes suponiendo que todas las semanas consume la misma cantidad de fruta y que un mes tiene 4 semanas?

38 $4(1'80 + 6'3p + 6b)$

Si el precio por Kiwi es de $0,12$ céntimos de euro y compran a la semana 1 kilo de plátanos, ¿Podrías decir cuánto gasta la familia de Ana en fruta en una semana?

39 $1'80 + 6'3 + 6 \cdot 0'12$
 $1'80 + 6'3 + 0'72$
 $8'82€$

$1'80$
$6'30$
$0'72$
$8'82$

Ilustración 6-25: Errores de María B con origen en la ausencia de sentido en los ítems 37, 38 y 39.

Fuente: Cuestionario 2 de María B de 1º de bachillerato del ciclo lectivo 2013-2014.

Podemos concluir que María B tuvo dificultades para responder correctamente el cuestionario del proceso algebraico de sustitución. En ocasiones debido a un origen de tipo aritmético y en otras simplemente por despiste u olvido. En el cuestionario de generalización no hubo casi diferencias con los resultados de la población de alumnos del ciclo 2013-2014. En cambio en el de modelización se vio perjudicada por un error de origen aritmético en el ítem 37.

En el cuestionario de funciones, la nota que obtiene María B está casi un punto por encima de la media de la población de alumnos del ciclo lectivo 2013-2014 (8,5 y 7,61 respectivamente). En general respondió correctamente a la mayoría de preguntas, excepto en la pregunta 4 del ítem “Velocidad” donde ella identifica que la velocidad es una función del espacio recorrido ($v = f(e)$) pero no analiza que si fuese la opción D la correcta la velocidad hubiese sido más baja en la primera curva que en la segunda, y esto contradice la gráfica de la función, donde en la segunda disminuye más la velocidad que en la primera (Ilustración 6-26).

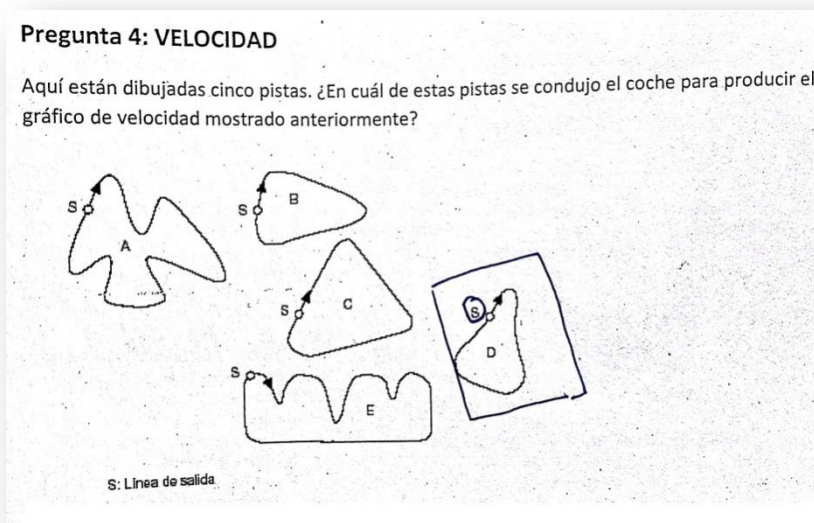


Ilustración 6-26: Error de María B en la pregunta 4 del ítem “velocidad”.
Fuente: Cuestionario 3 de María B de 1º de bachillerato del ciclo lectivo 2013-2014.

Por tanto podemos concluir que María B ha tenido ciertas dificultades en la resolución de las pruebas, sobre todo en lo que respecta a la particularización, y a la distracción. Por otra parte, el nivel de funciones es más elevado que el esperado con respecto a la media de la población. Pero esto no alcanza para que la media final de 4,8 se acerque a la media poblacional de 6,1 (Ilustración 6-27).

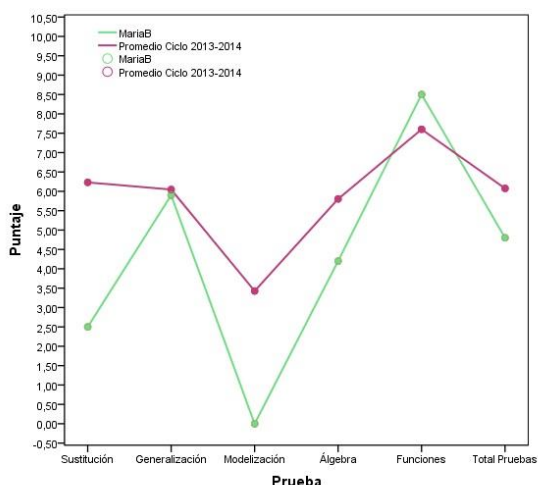


Ilustración 6-27: Diagrama de líneas de las notas resultantes de las pruebas diagnósticas de María B.
Fuente: Cuestionarios 1, 2 y 3 de María B, de 1º de bachillerato del ciclo lectivo 2013-2014.

6.3.2. Resultados del proceso de aprendizaje con el modelo FC

Para analizar los resultados obtenidos del proceso de aprendizaje con el modelo FC de María B, tendremos en cuenta los siguientes instrumentos: los apuntes que realizó con la plantilla de Cornell (Anexo 6), los cuestionarios *online* (Anexo 7) y las actividades de clase (Anexo 10)

6.3.2.1. Apuntes de Cornell

Según la categorización que planteamos en el capítulo de metodología para los apuntes realizados con la plantilla de Cornell, observamos que los resultados obtenidos por MariaB son los siguientes:

1.- En la comprensión (C), analizar si los alumnos reconocen las ideas dominantes del vídeo:	
C1	Mantiene la fidelidad al original que se abrevia, sin subjetivismo ni deformaciones. Es claro y concreto.
2.- En la lectura (L): Analizar la legibilidad, claridad y referencia de las notas	
L1	Muy buena (explicita todas las ideas principales claramente y muestra las relaciones entre los temas, ejemplos, etc., mostrando jerarquías si es necesario).
3.- En la expresión (E): analizar el lenguaje propio, la brevedad y la precisión. Así como también el uso de signos convencionales, gráficas, formas geométricas con palabras claves o frases.	
E1	Mixta (Utiliza una combinación de texto con símbolos y gráficas para tomar nota).
4.- En la columna de idea clave o pregunta (P): analizar el nivel de comprensión y síntesis sobre el tema trabajado.	
P2	Buena (realiza una pregunta o palabra clave de síntesis del tema).
5.- En la columna de Síntesis o resumen (S): analizar la elaboración de una síntesis utilizando esquemas, cuadros sinópticos, tablas cronológicas (ayudan a recordar lo esencial).	
S2	Parcial (Sólo consigue una síntesis parcial).

Ilustración 6-28: Categorización de los apuntes de Cornell de MariaB.

Fuente: Apuntes de Cornell de MariaB, de 1º de bachillerato del ciclo lectivo 2013-2014.

Para poder añadir esta categorización analizada a los resultados cuantitativos de la evolución del aprendizaje de MariaB, utilizamos la ilustración 3-39 del capítulo de metodología, donde obtenemos una nota de 8, ya que tiene tres categorías de nivel 1 y dos de nivel 2.

6.3.2.2. Cuestionarios online

En cuanto a las tres primeras preguntas de los ocho cuestionarios *online* observamos que, de las categorías planteadas y su correspondiente puntuación descrita en el capítulo de metodología (Ilustración 3-40): los resultados de MariaB han sido los siguientes:

Proceso/Cuestionarios	C1	C2	C3	C4	C5	C6	C7	C8
1.- Recordar (Re): analizar si el alumno recuerda y reconoce información e ideas además de principios aproximadamente en la misma forma en que los aprendió.	Re2	Re2	Re2	Re2	Re2	Re2	Re3	Re2
2.- Comprender (Co): analizar si el alumno comprende, esclarece o interpreta la información en base al conocimiento previo.	Co2	Co1	Co1	Co1	Co2	Co1	Co3	Co1
3.- Aplicar (Ap): analizar si el alumno selecciona, transfiere y utiliza datos y principios para elaborar una pregunta interesante sobre el tema visto en el video, aplicando los conceptos aprendidos.	Ap3	Ap2	Ap3	Ap2	Ap3	Ap2	Ap3	Ap3
Puntuación	4	7	6	7	4	7	0	6

Ilustración 6-29: Categorización de los cuestionarios online de MariaB.

Fuente: Elaboración propia a partir de Cuestionarios online y del registro audiovisual de MariaB, de 1º de bachillerato del ciclo lectivo 2013-2014 (Anexo 14).

Calculando la media de las puntuaciones obtenidas según la categorización de las respuestas de los cuestionarios de autoevaluación *online*, María B obtiene una puntuación de 6,83.

En relación a las preguntas sobre la experiencia de visualización del vídeo en cuanto a contenido, los resultados de la categorización son:

Preguntas / Cuestionarios	C1	C2	C3	C4	C5	C6	C7	C8
1.- Se ha podido concentrar para ver el vídeo	Si	Si	Si	Si	Si	Si	-	Si
3.- Número de veces que ha necesitado ver el vídeo para comprender el tema	1	1	1	1	1	1	-	1
4.- Utilización de las funciones de “pausa” y “retroceso”	No	Si	Si	Si	No	Si	-	No
5.- Dudas	Du3	Du2	Du2	Du2	Du3	Du2	-	Du3
6.- Tomar apuntes con la plantilla de Cornell	Si	Si	Si	Si	Si	Si	-	Si
7.- Nivel de comprensión del tema con el vídeo tutorial	5	3	3	4	5	4	-	5
8.- Nivel de comprensión de un tema en clase	3							
9.- Dificultades en el proceso		Si	No	No	No	No	-	No
10.- Tipo de dificultad		Di2						
11.- Nota de matemáticas del primer trimestre	Susp enso							

Ilustración 6-30: Categorización de las preguntas de contenido de la visualización de los cuestionarios de autoevaluación online

Fuente: Elaboración propia a partir de Cuestionarios online de MariaB, de 1º de bachillerato del ciclo lectivo 2013-2014

Tras los resultados de la categorización de la ilustración 6-30, observamos que María B:

- En general no ha tenido dificultad para concentrarse para ver los vídeos tutoriales.
- Ha visto solo una vez el vídeo, y a veces utiliza las funciones de “pausa” y “retroceso”. Esto influye en la comprensión del tema, y en que necesita a veces volver a ver los apuntes a la hora de contestar las preguntas sobre el contenido del mismo.
- Expresa tener dudas, dependiendo del vídeo.
- Utiliza la plantilla de Cornell en todos los vídeos.
- Expresa tener un nivel simbólico de comprensión de algunos vídeos tutoriales. Y en otros, así como en clase, expresa que su nivel es de comprensión literal del contenido.
- Ha tenido cierta dificultad en el 2º vídeo tutorial por la forma y orden en la que se mostraba el contenido.
- Ha suspendido el primer trimestre de matemáticas de primero de bachillerato.

En lo referente a las preguntas sobre la experiencia de visualización del vídeo, en cuanto a su forma para los cuestionarios 7 y 8, los resultados de la categorización son los siguientes:

Preguntas/Cuestionarios	C7	C8
1.- Respecto al formato del vídeo	-	-
2.- Causas de la elección Fo1	-	-
3.- Opinión sobre la posibilidad de visualizar a los profesores en el vídeo	-	Positivo
4.- Argumentación de la elección de “positivo”	-	Arg7

Ilustración 6-31: Categorización de las preguntas de forma de la visualización de los cuestionarios 7 y 8 de autoevaluación online

Fuente: Elaboración propia a partir de Cuestionarios online de María B, de 1º de bachillerato del ciclo lectivo 2013-2014

Tras los resultados de la categorización de la ilustración 6-31, observamos que María B expresa que la posibilidad de visualizar a los profesores en el vídeo es positiva puesto que la explicación de uno complementa a la del otro y viceversa.

6.3.2.3. Actividades de clase

En las actividades observamos que María B las tiene todas resueltas y corregidas, en general. No obstante, observamos cierta dificultad en el cálculo del dominio de funciones fraccionarias y de las irracionales de la actividad 3 (Anexo 10), trabajo que se realizaba en parejas (Ilustración 6-32). Esto se corresponde con lo que María B expresa en el cuestionario de

autoevaluación 3, sobre que no comprendió en su totalidad el proceso para hallar el dominio, debido a que no tiene claro los tipos de funciones que existen.

1) Dadas las funciones $f(x) = x^2 - 9$ y $g(x) = 16 - x^2$, resuelve individualmente las siguientes operaciones de funciones y encuentra su dominio. Escribe la respuesta en la columna de "Respuesta inicial".

$\left(\frac{f}{g}\right)(x)$	$\frac{x^2 - 9}{16 - x^2}$ $16 - x^2 = 0$ $-x^2 = -16$ $x = \pm 4$ $x = \sqrt{16}$ $x = -4$ $\text{Dom}\left(\frac{f}{g}\right) = \text{todo } \mathbb{R} \setminus \{4\}$	$\frac{x^2 - 9}{16 - x^2}$
$\left(\sqrt{\frac{f}{g}}\right)(x)$	$\sqrt{\frac{x^2 - 9}{16 - x^2}} = \frac{x - 3}{4 - x}$ $4 - x = 0$ $x = -4$ $\text{Dom}\left(\sqrt{\frac{f}{g}}\right) = \mathbb{R} \setminus \{-4\}$	$\frac{x - 3}{4 - x}$

Ilustración 6-32: Actividad 3 de María B

Fuente: Actividad 3 de María B, de 1º de bachillerato del ciclo lectivo 2013-2014.

En la ilustración 6-32 observamos que, para encontrar el dominio del cociente, al principio considera que son todos números reales excepto el 4. Luego agrega el -4 cuando lo corrige con su compañero/a, pero no consigue colocar el dominio simbólicamente de forma correcta. Por otra parte, en la función irracional observamos que trabaja el dominio con las mismas condiciones que una función fraccionaria, olvidando considerar que, siendo una raíz cuadrada, el radicando ha de ser mayor o igual a cero.

En la actividad de refuerzo volvemos a observar que María B tiene dificultad para encontrar el dominio de una función irracional (Ilustración 6-33). Avanza en el proceso, considerando que el radicando ha de ser mayor que cero, pero aún no entiende cómo debe hacerlo y considera solo la opción que tanto numerador como denominador sean ambos mayores que cero, sin considerar la contraria, que ambos sean menores que cero.

1. Siguen les funcions $f(x) = x + 2$ i $g(x) = x^2 - 1$, calculeu:

$\left(\frac{f}{g}\right)(x) = \frac{x+2}{x^2-1}$ $x^2-1=0$ Dom $\mathbb{R} - \{-1, 1\}$
 $x^2=1$
 $x=\pm 1$

$\left(\sqrt{\frac{f}{g}}\right)(x) = \sqrt{\frac{x+2}{x^2-1}}$ $\rightarrow x+2 \geq 0 \quad x \geq -2$
 $\rightarrow x \neq \pm 1 \quad x^2-1 > 0$
 $x > \pm 1$

Trobéu el domini en cada cas

$\text{Dom}\left(\sqrt{\frac{f}{g}}\right) = [-2, +\infty)$

$-2 \quad -1 \quad 0 \quad 1$

$1+2 > 0$
 $3 > 0$
 $0+2 > 0$
 $2 > 0$

$-1+2 > 0$
 $1 > 0$

$-2+2 > 0$
 $0 > 0$

$-3+2 > 0$
 $-1 > 0$

Il·lustració 6-33: Ejercicio 1 de la Actividad de Refuerzo de María B
 Fuente: Actividad de Refuerzo de María B, de 1º de bachillerato del ciclo lectivo 2013-2014.

También observamos cierta dificultad a la hora de realizar la composición de funciones (Ilustración 6-34), como vemos en el ejercicio 2 de la actividad de refuerzo. En este ejercicio María B no comprende el significado de componer una función con otra y por ello se confunde: en el apartado “a” aplica dos veces seguidas la función $h(x)$. En el apartado “b” debe aplicar $f(x)$ en primer lugar y lo hace en segundo. En el apartado “c” vuelve a cometer el mismo tipo de error. Luego lo corrige cuando se explica la resolución en la pizarra.

2. A partir de les expressions de les funcions següents, calcula els valors de les funcions compostes que s'indiquen: $f(x) = x - 3$; $g(x) = x^2 + 1$ i $h(x) = -5x + 2$:

a) $(f \circ g \circ h)(3) = -5x + 2 \rightarrow -5(x^2 + 1) + 2 \rightarrow -5(x + 3)^2 + 1 + 2$
 $-5 \cdot 82 + 2 = \boxed{-408}$

b) $(h \circ g \circ f)(3) = x - 3 \rightarrow (x^2 + 1) - 3 \rightarrow ((-5x + 2)^2 + 1) - 3 = \boxed{167}$

c) $(g \circ h \circ f)(3) = x - 3 \rightarrow (x^2 + 1) \rightarrow x - 3 \rightarrow (-5x + 2) - 3 \rightarrow (-5(x^2 + 1) + 2) - 3 \rightarrow \boxed{-51}$

a) $-5x + 2 \rightarrow (-5x + 2)^2 + 1 \rightarrow ((-5x + 2)^2 + 1) - 3 \rightarrow \boxed{167}$

b) $x - 3 \rightarrow (x - 3)^2 + 1 \rightarrow -5((x - 3)^2 + 1) + 2 \rightarrow \boxed{-3}$

c) $x - 3 \rightarrow -5(x - 3) + 2 \rightarrow (-5(x - 3) + 2)^2 + 1 \rightarrow \boxed{5}$

Ilustración 6-34: Ejercicio 2 de la Actividad de Refuerzo de María B
 Fuente: Actividad de Refuerzo de María B, de 1º de bachillerato del ciclo lectivo 2013-2014.

En consecuencia, tras lo observado en las actividades desarrolladas en clase (dossier de trabajo y registro de material audiovisual) y aplicando la categorización basada en la relación entre las dimensiones cognitivas y la taxonomía revisada de Bloom, que presentamos en el capítulo de metodología, los resultados obtenidos por María B son los siguientes:

Categoría	Resultados del análisis de las actividades y material audiovisual
1.- Analizar (An): analizar si el alumno descompone el conocimiento en sus partes y piensa en cómo estas se relacionan con su estructura global.	An2
2.- Evaluar (Ev): analizar si el alumno hace juicios en base a criterios y estándares utilizando la comprobación y la crítica.	Ev1
3.- Crear (Cr): Analizar la habilidad que permite reorganizar los elementos para formar un todo coherente y funcional; generar, planear o producir para reorganizar elementos en un nuevo patrón o estructura.	Cr2
Puntuación	7

Ilustración 6-35: Categorización de las actividades de clase de María B
 Fuente: Elaboración propia a partir de las actividades de María B y del material audiovisual de las clases registradas, de 1º de bachillerato del ciclo lectivo 2013-2014.

Es decir, que al haber observado que María B en ocasiones tiene dudas y dificultades en el proceso de análisis de los contenidos pero que pide ayuda, que colabora y participa en el trabajo en grupo, y retroalimenta a los compañeros en cuanto a la organización y lógica de los

argumentos, que anota las contradicciones que encuentra, que revisa el ejercicio para ver si se incluyeron todos los pasos necesarios, que critica una resolución si cree que no está bien, y que necesita ayuda para plantear nuevas situaciones, la puntuación correspondiente que se plantea para poder cuantificar estos resultados cualitativos y añadirla a la evolución del aprendizaje de María B, es de 7.

6.3.3. Resultados de la prueba final de la unidad

En la prueba evaluativa final de la unidad (Anexo 12 – 2ª opción de prueba) María B obtuvo una nota de 3,3 sobre un total de 10 puntos, de acuerdo a la codificación planteada en el capítulo de metodología (Ilustración 6-36):

Nº ejercicio	Objetivos evaluados	Codificación del ejercicio	Puntuación del ítem	Puntuación de MariaB
Ejercicio 1	<ul style="list-style-type: none"> Reconocer las funciones reales de variable real, su dominio e imagen. Operar con funciones. Conocer el concepto de función inversa de una función y aplicar un proceso para obtenerla. 	Encuentra la función resultante de dividir $f(x)$ entre $g(x)$.	0,5	0,5
		Encuentra analíticamente el dominio de la función.	0,75	0,75
		Obtiene la función inversa.	0,75	0
		Encuentra el dominio de la función inversa para hallar la imagen de la función.	0,5	0
Ejercicio 2	<ul style="list-style-type: none"> Saber reconocer las propiedades globales de una función: simetría (visual y analíticamente) 	Estudia la simetría (par e impar) analíticamente de la función $f(x)$.	1,25	0
		Estudia la simetría (par e impar) visualmente de la gráfica de la función $g(x)$.	1,25	0,75
Ejercicio 3	<ul style="list-style-type: none"> Realizar composición de funciones y comprobar las propiedades que verifica esta operación. 	Expresa el número de habitantes en función del tiempo.	1	0
		Encuentra el número de habitantes en ese instante.	0,75	0
		Encuentra el número de habitantes transcurrido un año y seis meses.	0,75	0
Ejercicio 4	<ul style="list-style-type: none"> Reconocer las funciones reales de variable real, su dominio e imagen. Saber reconocer las propiedades globales de una función 	Identifica el dominio e imagen de la función.	0,5	0,25
		Identifica la simetría, continuidad y periodicidad de la función.	0,5	0,5
		Identifica las asíntotas de la función.	0,5	0,4
		Identifica la monotonía, máximos y mínimos de la función.	0,5	0,15
		Identifica la curvatura y puntos de inflexión de la función.	0,5	0
Total de puntos de la prueba			10	3,3

Ilustración 6-36: Codificación de los ejercicios de la prueba final de la unidad de María B.

Fuente: Elaboración propia a partir de la prueba de María B, de 1º de bachillerato del ciclo lectivo 2013-2014.

En la prueba final observamos que MariaB ha tenido dificultades en los cuatro ejercicios:

- En el primero observamos que cuando debe calcular la imagen de la función se olvida de todo el proceso lógico (buscar el dominio de la función inversa)

1. Trobeu analíticament el domini i la imatge de la funció $(\frac{f}{g})(x)$ si $f(x) = x+5$ i $g(x) = x-2$

$$\left(\frac{f}{g}\right)(x) = \frac{x+5}{x-2}$$

$x-2=0$
 $x=2$ ✓

$\text{Dom}\left(\frac{f}{g}\right) = \mathbb{R} - \{2\}$ ✓

$\text{Im}\left(\frac{f}{g}\right) = \text{tots } \mathbb{R}$ ✗

Ilustración 6-37: Ejercicio de dominio e imagen de la prueba final de la unidad de María B

Fuente: Elaboración propia a partir de la prueba final de María B, de 1º de bachillerato del ciclo lectivo 2013-2014.

- En el segundo ejercicio observamos errores de distracción, como considerar (-x) solo en una parte de la expresión, o no aplicar bien la regla de los signos.

2. Estudieu, analítica o gràficament segon correspongui, la simetria de les següents funcions:

$f(x) = \frac{x^3 - x}{x^5 + x^7}$

simetria parella: $g(x) = -x$

$$\frac{x^3 - x}{x^5 + x^7} = \frac{(-x)^3 - (-x)}{(-x)^5 + (-x)^7}$$

$$= \frac{-x^3 - x}{-x^5 - x^7}$$

no és parella ✗

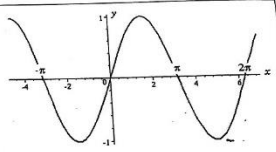
simetria imparella

$$\frac{x^3 - x}{x^5 + x^7} = - \left(\frac{-x^3 - (-x)}{-x^5 - x^7} \right)$$

$$\frac{x^3 - x}{x^5 + x^7} = - \left(\frac{-x^3 + x}{-x^5 - x^7} \right)$$

no és imparella ✗

R: la funció no té simetria



gràficament podem observar que la funció és simètrica respecte l'eix de coordenades, per tant simetria imparella (la funció fa un gir de 180°)

Ilustración 6-38: Ejercicio de simetría de la prueba final de la unidad de María B

Fuente: Elaboración propia a partir de la prueba final de María B, de 1º de bachillerato del ciclo lectivo 2013-2014.

- En el tercer ejercicio, en el apartado "a" observamos que María B no realiza la composición, sino que cambia el nombre de la función. Por lo que el resto de apartados también serán erróneos. En las actividades de clase, sobre todo en la actividad de refuerzo, María B no realizó este tipo de problemas, por lo que no supo cómo resolverlos en la prueba.

3) El nombre d'habitatges construïts per any, N , depèn de la taxa d'interès hipotecària r d'acord amb la fórmula $N(r) = \frac{80}{100+r^2}$.

on N està en milions d'habitatges. La taxa d'interès actualment està en 12% i es preveu que disminuirà a 8% en els dos següents anys d'acord amb la fórmula $r(t) = 12 - \frac{8t}{t+24}$.

On t és el temps mesurat en mesos, a partir d'ara.

a) Expressau el nombre d'habitatges en funció del temps.
 b) Quin és el nombre d'habitatges en aquest instant?
 c) Quin és el nombre d'habitatges transcorregut un any i 6 mesos?

a) $N(t) = \frac{12-8t}{t+24}$? X

b) $\frac{12-8}{1+24} = 0'16$ milions d'habitatges ✓

c) $N(t) = 12 - \frac{8 \cdot 18}{18+24} = 8'57$ milions d'habitatges X

Il·lustració 6-39: Ejercicio de composición de funciones de la prueba final de la unidad de María B
 Fuente: Elaboración propia a partir de la prueba final de María B, de 1º de bachillerato del ciclo lectivo 2013-2014.

- En el ejercicio 4, María B responde correctamente algunas propiedades de la función expresada de forma gráfica. No obstante tuvo dificultades en el reconocimiento de la imagen, el análisis de la monotonía y de la curvatura.

OPCIÓN B

asíntotes

1 - Domini: $(-\infty, -1) \cup (-1, 0) \cup (0, 8)$? X
 2 - Imatge: $(-\infty, 0) \cup (0, -2] \cup [2, +\infty)$? X

7 - Monotonía: ?

8 - Màxims i mínims: mínim relatiu $(0'5, 1'4)$
 màxim relatiu $(-0'8, -2'2)$ ✓

9 - Curvatura: ~~presenta~~ no presenta concavitat (per tant es constant) de $(-\infty, -2)$ concava de $(-2, -1)$ de $(1, 2)$. ~~convexa de $(1, 2)$~~
 punts d'inflexió $(0'5, 1'4)$ de $(1, -0'8)$

convexa $(0, 0'5)$
 $(-0'8, 0)$

Il·lustració 6-40: Ejercicio de análisis de las propiedades globales de una función de la prueba final de la unidad de María B.
 Fuente: Elaboración propia a partir de la prueba final de María B, de 1º de bachillerato del ciclo lectivo 2013-2014.

6.3.4. Evolución de los resultados

En resumen, las calificaciones/puntuaciones obtenidas por María B con cada uno de los instrumentos y la del resultado global de cada trimestre, han sido las siguientes:

Etapa	Instrumento	Puntuación (sobre 10)
Metodología tradicional de Enseñanza - Aprendizaje	Nota de matemáticas del 1r Trimestre	4,6
Pruebas diagnósticas iniciales	Prueba diagnóstica de álgebra	4,2
	Prueba diagnóstica de funciones	8,5
Modelo FC de enseñanza-aprendizaje	Apuntes de Cornell	8
	Cuestionarios de autoevaluación	6,83
	Actividades de clase	7
	Prueba final de contenidos	3,3
	Nota de matemáticas del 2n Trimestre	6,2
Metodología tradicional de Enseñanza - Aprendizaje	Nota de matemáticas del 3r Trimestre	5,7

*Ilustración 6-41: Tabla con los puntajes obtenidos por María B en cada instrumento y prueba
Fuente: Elaboración propia*

En la evolución del aprendizaje de María B podemos observar que al iniciar el curso con una metodología tradicional tuvo algunas dificultades para asimilar los conceptos y procedimientos matemáticos, debido en gran parte a su predisposición para cometer errores de origen afectivo y/o emocional. Este supuesto podemos confirmarlo con los resultados de las pruebas diagnósticas, que muestran que María B tiene un nivel de razonamiento algebraico por debajo de la media de la población, debido a deficiencias en algunos conceptos aritméticos que arrastra de tiempo atrás (probablemente a causa de su facilidad para distraerse en clase).

En cuanto a los errores observados por la necesidad de particularización y la dificultad para encontrar la expresión algebraica que generaliza un patrón, observamos que María B todavía no ha dado el paso del “estadio formal temprano” al de “las operaciones formales”, según Piaget y Collin (Fidela Velázquez, 2003).

Posteriormente, notamos un cambio en su evolución cuando comienza con el modelo de “*Flipped Classroom*” en el aula (ilustración 6-42):

- La utilización de la metodología de “*Flipped Classroom*” atiende a sus necesidades de sistematización en el estudio: Su falta de concentración y focalización la perjudica notablemente. No obstante, al trabajar en equipo o por parejas en muchas las clases, María B puede compensar sus deficiencias con el análisis y el trabajo que realiza entre todos los integrantes del grupo.
- De acuerdo a las etapas del aprendizaje planteadas por la Taxonomía de Bloom, observamos que en las tres primeras María B presenta ciertas dificultades para recordar y comprender conceptos por problemas de atención, y por ello recurre continuamente a los apuntes. En las tres etapas superiores, trabaja correctamente, pero en los conceptos/ejercicios que requieren mayor elaboración y concentración abandona rápidamente y no se ve capaz de trabajarlos/resolverlos. Este hecho se refleja en la etapa de “evaluar” donde aparecen carencias y errores de contenidos y procesos que María B no ha asimilado correctamente en las etapas anteriores.
- Aunque la línea de tendencia es casi constante, la evolución de María B ha sido importante, ya que a final de la unidad de Funciones ha pasado de estar en el 2º cuartil al 3º cuartil de notas, comprendidas entre el 5 y el 7,5. Aunque la diferencia de notas no es mucha, si lo es en cuanto a calificación global, puesto que llega a aprobar el 2º trimestre, y el 3º más tarde.

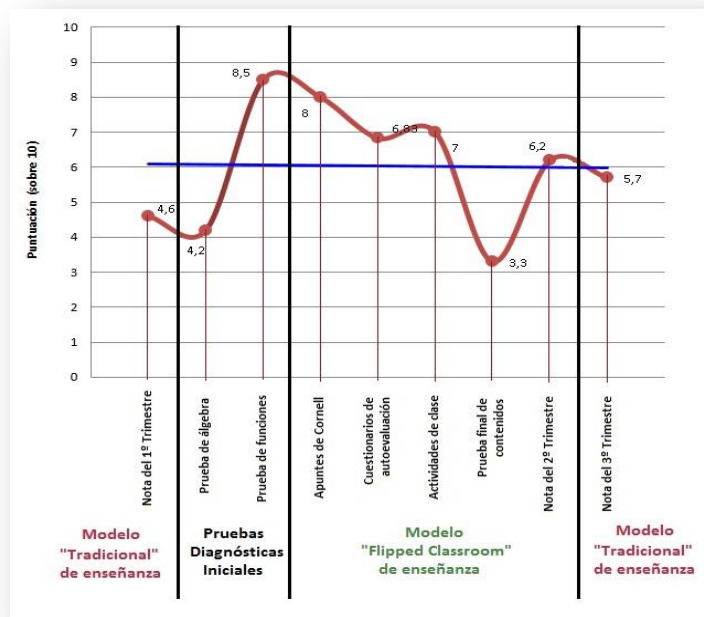


Ilustración 6-42: Evolución del proceso de aprendizaje de María B con diferentes modelos de enseñanza

Fuente: Elaboración propia

6.3.5. Resultados del cuestionario final sobre el modelo FC

La percepción personal de María B expresada en el cuestionario de valoración final de la unidad de funciones trabajada con el modelo FC es la siguiente:

- Los vídeos tutoriales:** De fácil comprensión, interactivos, tienen explicaciones muy fáciles del tema, pero luego los ejercicios son más complicados. Expresa que su nivel de comprensión de los temas a través de los vídeos ha sido regular. Para la prueba de contenidos final volvió a ver todos los vídeos para repasar, como una forma de estudiar. Sentía temor de dejarse algún tema importante sin ver. El uso de los mismos la ayudó a ser más rigurosa en el estudio. Piensa que su potencial matemático continúa igual que antes.
- Los cuestionarios de autoevaluación:** no los hubiese realizado si hubieran sido voluntarios.

- **El Web “trescomacatorze”:** expresa que ha utilizado las actividades resueltas que están colgadas allí para estudiar para la prueba final. Expresa que el web no le ha ayudado a organizar sus estudios ni a mejorar su rendimiento.
- **Las clases:** las que más le gustaron fueron aquellas en las que trabajó en grupo o en pareja, porque podía completar o corregir si tenía mal hecho el ejercicio. Le resulto provechosa la clase introductoria para enterarse cómo funciona el modelo FC y le pareció que sería fácil hacerlo.
- **El modelo FC de enseñanza-aprendizaje:** Considera que es mejor el modelo tradicional, porque prefiere que el profesor explique el tema en la pizarra. Con los vídeos no “se le queda nada gravado”. No obstante considera que utilizar las TIC para las clases es una forma de progresar. Y utilizó el web, los vídeos tutoriales y la actividad resuelta del tema 7 (continuidad, periodicidad y asíntotas de una función) un día que faltó a clase para ponerse al día. Considera que este modelo de trabajo no le ha ayudado a mejorar en la asignatura.

6.4. RESULTADOS DEL ESTUDIO DE CASOS: ALEJANDRO

Presentamos ahora los resultados obtenidos por Alejandro (perteneciente al 3r cuartil de estudio) en las tres etapas de la investigación: pruebas diagnósticas, material de desarrollo de las clases (apuntes de Cornell, dossier de las actividades y registro audiovisual de la clase) y prueba final de contenidos y competencias. Posteriormente realizaremos el análisis de la evolución de Alejandro durante el curso, y por último, comentaremos su percepción sobre el modelo FC con el que realizó la unidad de Funciones.

Alejandro tuvo un 7 en la nota del primer trimestre de matemáticas, como resultado de dos exámenes parciales donde obtuvo (sobre un total de 10) un 9,15 en el tema de números complejos y un 5 en la unidad de trigonometría, y del examen de evaluación trimestral que aprobó con un 6,5.

6.4.1. Resultados de las pruebas diagnósticas

Como observamos en la ilustración 6-43, en las pruebas diagnósticas, Alejandro obtuvo notas por encima de la media de la población en las de sustitución y generalización, y por debajo en el proceso de modelización y en funciones.

Pruebas Casos	Notas de las pruebas diagnósticas					
	Sustitución	Generalización	Modelización	Total Álgebra	Funciones	Total Pruebas
Alejandro	7,1	7	2,5	6,5	5,4	6,4
Media del Ciclo 2013-2014	6,2	6,0	3,4	5,8	7,61	6,1

*Ilustración 6-43: Notas de Alejandro de las pruebas diagnósticas de Álgebra y Funciones
Fuente: Elaboración propia a partir de los Cuestionarios 1, 2 y 3.*

En el proceso algebraico de sustitución observamos que en general respondió correctamente. En el proceso algebraico de generalización, en los ítems del 31 a 35, Alejandro tuvo dificultades para trabajar con expresiones con letras, ya que trabaja con el significado literal de la letra y no con que el valor de la letra sea variable, como por ejemplo observamos en el ítem 31, donde indica que la igualdad $p + q = p + s$ nunca puede ser verdadera.

En los ítems 37 y 38, nuevamente tiene dificultades para trabajar con expresiones que contienen letras. Supone que cada término representa una situación aislada de otra y por ello

no las escribe como una combinación lineal. No obstante cuando en el ítem 39 ha de calcular el gasto en una semana y ya tiene los valores numéricos de las variables, entonces ya puede trabajar con esos valores sumándolos, y calcula correctamente el resultado.

En el cuestionario de funciones comete algunos errores de origen afectivo y/o emocional. No obstante en la pregunta 4 del ítem de “velocidad” comete un error muy similar al del resto de alumnos de la población, seleccionando aquella que visualmente se parece a la gráfica dada. Es decir, no identifica que la velocidad sea una función del espacio recorrido ($v = f(e)$).

Por lo que podemos concluir que más allá de que Alejandro ha tenido ciertos errores en la resolución de las pruebas, sobre todo en lo que respecta al manejo de expresiones algebraicas, el nivel de los procesos algebraicos y de funciones es el esperado con respecto a la media de la población. Como muestra la ilustración 6-44, obtiene una nota total de las pruebas de 6,4 que está levemente por encima de la media poblacional, que es de 6,1.

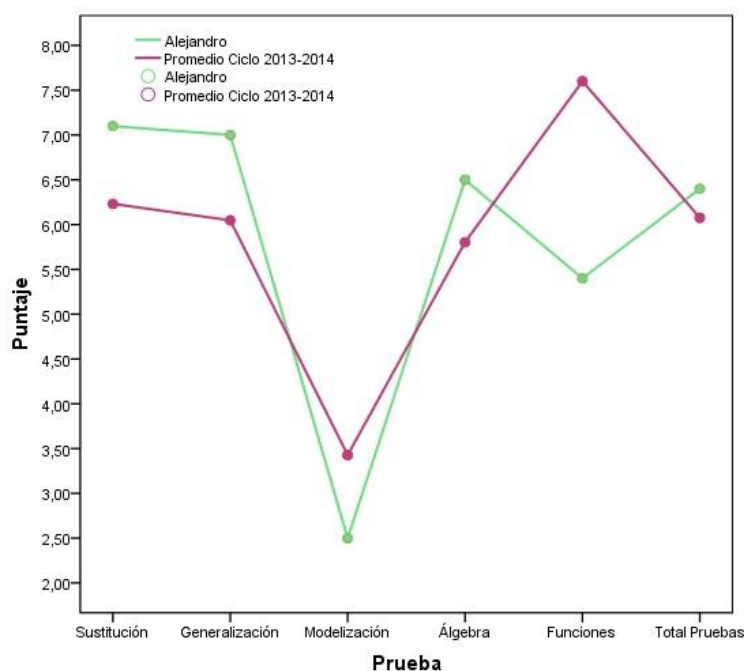


Ilustración 6-44: Diagrama de líneas de las notas resultantes de las pruebas diagnósticas de Alejandro.

Fuente: Cuestionarios 1,2 y 3 de Alejandro, de 1º de bachillerato del ciclo lectivo 2013-2014.

6.4.2. Resultados del proceso de aprendizaje con el modelo FC

Para analizar los resultados obtenidos en el proceso de aprendizaje con el modelo FC de Alejandro, tendremos en cuenta los siguientes instrumentos: los apuntes que realizó con la plantilla de Cornell (Anexo 6), los cuestionarios *online* (Anexo 7) y las actividades de clase (Anexo 10).

6.4.2.1. Apuntes de Cornell

Según la categorización que planteamos en el capítulo de metodología para los apuntes realizados con la plantilla de Cornell, observamos que los resultados obtenidos por Alejandro son los siguientes:

1.- En la comprensión (C), analizar si los alumnos reconocen las ideas dominantes del vídeo:	
C1	Mantiene la fidelidad al original que se abrevia, sin subjetivismo ni deformaciones. Es claro y concreto.
2.- En la lectura (L): Analizar la legibilidad, claridad y referencia de las notas	
L1	Muy buena (explicita todas las ideas principales claramente y muestra las relaciones entre los temas, ejemplos, etc., mostrando jerarquías si es necesario).
3.- En la expresión (E): analizar el lenguaje propio, la brevedad y la precisión. Así como también el uso de signos convencionales, gráficas, formas geométricas con palabras claves o frases.	
E1	Mixta (Utiliza una combinación de texto con símbolos y gráficas para tomar nota).
4.- En la columna de idea clave o pregunta (P): analizar el nivel de comprensión y síntesis sobre el tema trabajado.	
P1	Muy buena (realiza preguntas que pueden ser respondidas con las notas o luego en clase con el profesor, o coloca ideas claves que sintetizan el contenido de los apuntes).
5.- En la columna de Síntesis o resumen (S): analizar la elaboración de una síntesis utilizando esquemas, cuadros sinópticos, tablas cronológicas (ayudan a recordar lo esencial).	
S1	Correcta (Hace una buena síntesis, utiliza esquemas, etc.).

Ilustración 6-45: Categorización de los apuntes de Cornell de Alejandro.

Fuente: Apuntes de Cornell de Alejandro, de 1º de bachillerato del ciclo lectivo 2013-2014.

Para poder añadir esta categorización analizada a los resultados cuantitativos de la evolución del aprendizaje de Alejandro, utilizamos la ilustración 3-39 del capítulo de metodología, donde obtenemos una nota de 10, ya que todas las categorías son de nivel 1.

6.4.2.2. Cuestionarios *online*

En lo que respecta a las tres primeras preguntas de los ocho cuestionarios *online* observamos que, de las categorías planteadas y su correspondiente puntuación descrita en el capítulo de metodología, los resultados de Alejandro han sido los siguientes (Ilustración 3-40):

Proceso/Cuestionarios	C1	C2	C3	C4	C5	C6	C7	C8
1.- Recordar (Re): analizar si el alumno recuerda y reconoce información e ideas además de principios aproximadamente en la misma forma en que los aprendió.	Re2	Re2	Re1	Re1	Re1	Re1	Re2	Re2
2.- Comprender (Co): analizar si el alumno comprende, esclarece o interpreta la información en base al conocimiento previo.	Co2	Co2	Co1	Co1	Co1	Co1	Co2	Co2
3.- Aplicar (Ap): analizar si el alumno selecciona, transfiere y utiliza datos y principios para elaborar una pregunta interesante sobre el tema visto en el vídeo, aplicando los conceptos aprendidos.	Ap2	Ap1	Ap1	Ap2	Ap1	Ap2	Ap3	Ap2
Puntuación	5	8	10	9	10	9	4	5

Ilustración 6-46: Categorización de los cuestionarios online de Alejandro.

Fuente: Elaboración propia a partir de Cuestionarios online y del registro audiovisual de Alejandro, de 1º de bachillerato del ciclo lectivo 2013-2014 (Anexo 14).

Calculando la media de las puntuaciones obtenidas según la categorización de las respuestas de los cuestionarios de autoevaluación *online*, Alejandro obtiene una puntuación de 7,5.

Respecto a las preguntas sobre la experiencia de visualización del vídeo en cuanto a contenido, los resultados de la categorización son:

Preguntas / Cuestionarios	C1	C2	C3	C4	C5	C6	C7	C8
1.- Se ha podido concentrar para ver el vídeo	Si	Si	Si	Si	Si	Si	Si	Si
2.- Causas de distracción								
3.- Número de veces que ha necesitado ver el vídeo para comprender el tema	1	1	1	1	1	1	1	1
4.- Utilización de las funciones de “pausa” y “retroceso”	Si	Si	Si	Si	Si	Si	Si	Si
5.- Dudas	Du3	Du3	Du3	Du1	Du1	Du3	Du3	Du3
6.- Tomar apuntes con la plantilla de Cornell	Si	Si	Si	Si	Si	Si	Si	Si
7.- Nivel de comprensión del tema con el vídeo tutorial	4	4	4	3	4	3	4	5
8.- Nivel de comprensión de un tema en clase	4							
9.- Dificultades en el proceso		No	No	No	Si	No	No	No
10.- Tipo de dificultad					Di2			
11.- Nota de matemáticas del primer trimestre	Bien							

Ilustración 6-47: Categorización de las preguntas de contenido de la visualización de los cuestionarios de autoevaluación online

Fuente: Elaboración propia a partir de Cuestionarios online de Alejandro, de 1º de bachillerato del ciclo lectivo 2013-2014

Tras los resultados de la categorización de la ilustración 6-47, observamos que Alejandro:

- En general no ha tenido dificultad para concentrarse para ver los vídeos tutoriales.
- Ha visto solo una vez el vídeo, y que generalmente utiliza las funciones de “pausa” y “retroceso”.
- Excepto en dos vídeos, expresa no tener dudas.
- Utiliza la plantilla de Cornell en todos los vídeos.
- En general expresa tener un nivel simbólico de comprensión de los vídeos tutoriales. Capta las ideas implícitas. Comprende todo con facilidad y en profundidad. Expresa que en clase su nivel de comprensión es similar.
- Ha tenido dificultades en el proceso de visualización de comprensión del contenido.

Respecto a las preguntas sobre la experiencia de visualización del vídeo en cuanto a su forma, para los cuestionarios 7 y 8, los resultados de la categorización son:

<i>Preguntas/Cuestionarios</i>	C7	C8
1.- Respecto al formato del vídeo	Fo1	-
2.- Causas de la elección Fo1	Ca3	-
3.- Opinión sobre la posibilidad de visualizar a los profesores en el vídeo	Positivo	Positivo
4.- Argumentación de la elección de "positivo"	Arg4	Arg4

Ilustración 6-48: Categorización de las preguntas de forma de la visualización de los cuestionarios 7 y 8 de autoevaluación online

Fuente: Elaboración propia a partir de Cuestionarios online de Alejandro, de 1º de bachillerato del ciclo lectivo 2013-2014

Tras los resultados de la categorización de la ilustración 6-48, observamos que Alejandro:

- Prefiere el formato con dos profesores visibles porque se distrae menos.
- Expresa que la posibilidad de visualizar a los profesores en el vídeo y que la interacción entre ellos simule el diálogo alumno-profesor hace que uno tenga la sensación de estar en clase. Y también porque cada uno explica su punto de vista y se aprende de dos profesores a la vez.

6.4.2.3. Actividades de clase

Observamos que tiene cierta dificultad para mantener ordenado el material de clase. De las actividades realizadas sólo tiene tres de siete, y el resto no las encuentra. De las tres que posee (la 5a, 6a y 7a) observamos que en general no muestra tener dificultades en la resolución, excepto en el estudio analítico de la simetría de una función, donde observamos que los ejercicios de la Actividad 6 (Anexo 10) están incompletos. En el resto de actividades observamos que tiene todos los ejercicios resueltos correctamente.

En la actividad de refuerzo observamos dificultad para encontrar el dominio de una función fraccionaria, en la composición de funciones donde confunde qué función debe aplicar en primer lugar si le piden $(f \circ g)(x)$. También observamos que no resuelve los problemas de aplicación de conceptos. El resto de ejercicios están resueltos correctamente.

En consecuencia, de todo lo observado en las actividades desarrolladas en clase (dossier de trabajo y registro de material audiovisual), aplicando la categorización basada en la relación entre las dimensiones cognitivas y la taxonomía revisada de Bloom, que presentamos en el capítulo de metodología, los resultados obtenidos son los siguientes:

Categoría	Resultados del análisis de las actividades y material audiovisual
1.- Analizar (An): analizar si el alumno descompone el conocimiento en sus partes y piensa en cómo estas se relacionan con su estructura global.	An1
2.- Evaluar (Ev): analizar si el alumno hace juicios en base a criterios y estándares utilizando la comprobación y la crítica.	Ev1
3.- Crear (Cr): Analizar la habilidad que permite reorganizar los elementos para formar un todo coherente y funcional; generar, planear o producir para reorganizar elementos en un nuevo patrón o estructura.	Cr2
Puntuación	9

Ilustración 6-49: Categorización de las actividades de clase de Alejandro

Fuente: Elaboración propia a partir de las actividades de Alejandro y del material audiovisual de las clases registradas, de 1º de bachillerato del ciclo lectivo 2013-2014.

Es decir, que al haber observado que Alejandro comprende ciertos conceptos o principios y el porqué de ciertos procedimientos o demostraciones, que participa en un grupo de redacción, y retroalimenta a los compañeros en cuanto a la organización y lógica de los argumentos, que revisa el ejercicio para ver si se incluyeron todos los pasos necesarios y que en ocasiones necesita ayuda para poder plantear una nueva situación, o inventar, o diseñar una nueva propuesta, la puntuación correspondiente planteada para poder cuantificar estos resultados cualitativos y añadirla a la evolución del aprendizaje de Alejandro, es de 9.

6.4.3. Resultados de la prueba final de la unidad

En la prueba evaluativa final de la unidad (Anexo 12 – 2ª opción de prueba) Alejandro obtuvo una nota de 6,65 sobre un total de 10 puntos, de acuerdo a la codificación planteada en el capítulo de metodología (Ilustración 6-50).

Observamos que tuvo dificultades, al igual que vimos en las actividades de clase, en la simetría de funciones, y en estudiar la curvatura de la función del ejercicio 4. No obstante en general comprendió lo que se le pedía y supo resolverlo.

Nº ejercicio	Objetivos evaluados	Codificación del ejercicio	Puntuación del ítem	Puntuación de Alejandro
Ejercicio 1	<ul style="list-style-type: none"> • Reconocer las funciones reales de variable real, su dominio e imagen. • Operar con funciones. • Conocer el concepto de función inversa de una función y aplicar un proceso para obtenerla. 	Encuentra la función resultante de dividir $f(x)$ entre $g(x)$.	0,5	0,5
		Encuentra analíticamente el dominio de la función.	0,75	0,75
		Obtiene la función inversa.	0,75	0,75
		Encuentra el dominio de la función inversa para hallar la imagen de la función.	0,5	0,5
Ejercicio 2	<ul style="list-style-type: none"> • Saber reconocer las propiedades globales de una función: simetría (visual y analíticamente) 	Estudia la simetría (par e impar) analíticamente de la función $f(x)$.	1,25	0
		Estudia la simetría (par e impar) visualmente de la gráfica de la función $g(x)$.	1,25	0
Ejercicio 3	<ul style="list-style-type: none"> • Realizar composición de funciones y comprobar las propiedades que verifica esta operación. 	Expresa el número de habitantes en función del tiempo.	1	1
		Encuentra el número de habitantes en ese instante.	0,75	0,5
		Encuentra el número de habitantes transcurrido un año y seis meses.	0,75	0,5
Ejercicio 4	<ul style="list-style-type: none"> • Reconocer las funciones reales de variable real, su dominio e imagen. • Saber reconocer las propiedades globales de una función 	Identifica el dominio e imagen de la función.	0,5	0,5
		Identifica la simetría, continuidad y periodicidad de la función.	0,5	0,5
		Identifica las asíntotas de la función.	0,5	0,5
		Identifica la monotonía, máximos y mínimos de la función.	0,5	0,4
		Identifica la curvatura y puntos de inflexión de la función.	0,5	0,25
Total de puntos de la prueba			10	6,65

Ilustración 6-50: Codificación de los ejercicios de la prueba final de la unidad de Alejandro
 Fuente: Elaboración propia a partir de la prueba de Alejandro, de 1º de bachillerato del ciclo lectivo 2013-2014.

6.4.4. Evolución de los resultados

En resumen, las calificaciones/puntuaciones obtenidas por Alejandro con cada uno de los instrumentos y la del resultado global de cada trimestre, han sido las siguientes:

Etapa	Instrumento	Puntuación (sobre 10)
Metodología tradicional de Enseñanza - Aprendizaje	Nota de matemáticas del 1r Trimestre	7
Pruebas diagnósticas iniciales	Prueba diagnóstica de álgebra	6,5
	Prueba diagnóstica de funciones	5,4
Modelo FC de enseñanza-aprendizaje	Apuntes de Cornell	10
	Cuestionarios de autoevaluación	7,5
	Actividades de clase	9
	Prueba final de contenidos	6,65
	Nota de matemáticas del 2º Trimestre	7,7
Metodología tradicional de Enseñanza - Aprendizaje	Nota de matemáticas del 3r Trimestre	7,3

Ilustración 6-51: Tabla con las puntuaciones obtenidos por Alejandro en cada instrumento y prueba

Fuente: Elaboración propia

En la evolución del aprendizaje de Alejandro podemos observar que ha aumentado casi un punto desde que comenzó el curso con una metodología tradicional hasta la prueba final de contenidos del modelo FC. Aunque los resultados de las pruebas diagnósticas fueron un poco irregulares, muestran que Alejandro tiene un nivel de razonamiento algebraico muy similar a de la media de la población, que, de acuerdo a la investigación realizada por Ruano y Socas, como comentamos en el Marco referencial, lo sitúan en la franja de la normalidad.

En cuanto a los errores observados debidos a la dificultad de trabajar con expresiones algebraicas y variables, observamos que Alejandro aún está en proceso de paso del “estadio formal temprano” al de “las operaciones formales”, según Piaget y Collin (Fidela Velázquez, 2003).

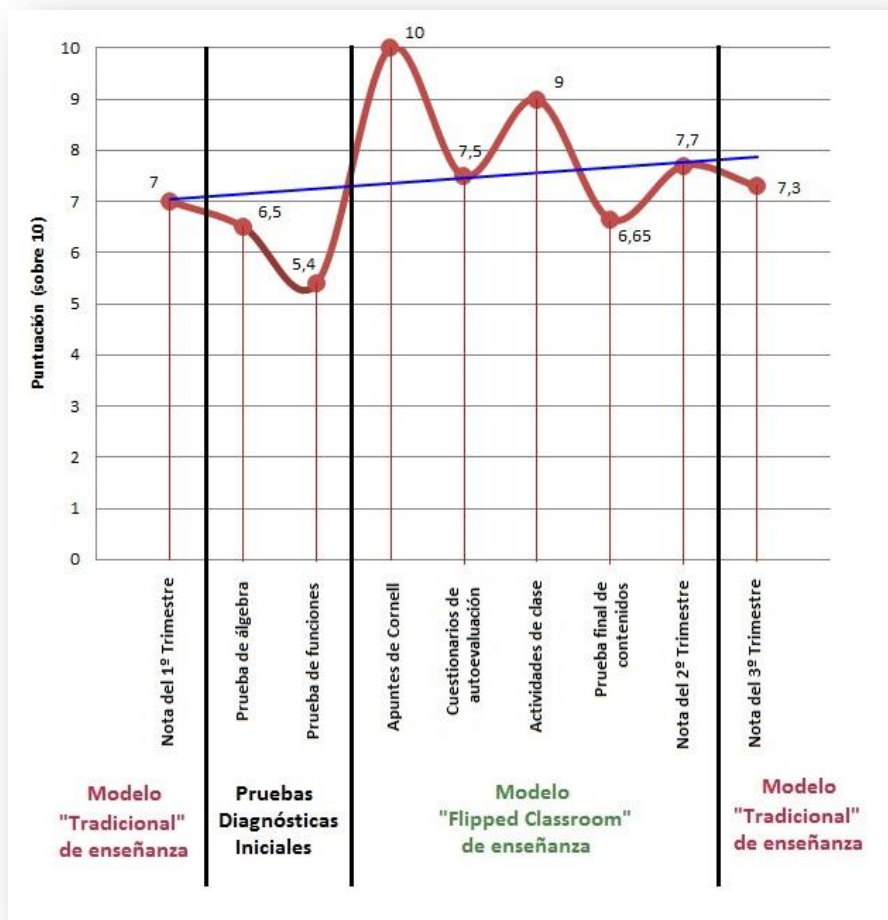


Ilustración 6-52: Evolución del proceso de aprendizaje de Alejandro con diferentes modelos de enseñanza

Fuente: Elaboración propia

La línea de tendencia nos muestra que la evolución de Alejandro ha sido positiva con el modelo de “*Flipped Classroom*” (ilustración 6-52):

- La utilización de la metodología de “*Flipped Classroom*” atiende a sus necesidades de orden y sistematización del material y del estudio: Su desorganización con el material le perjudica. Por lo que tener a su disposición todo el material teórico-práctico de la unidad con FC en el web, puede compensar sus deficiencias.
- De acuerdo a las etapas del aprendizaje planteadas por la Taxonomía de Bloom, observamos que en las tres primeras Alejandro no presenta dificultades para recordar y comprender. No obstante, su desorden personal perjudica el desarrollo esperado en las etapas de “aplicar” y por consiguiente

en la de “evaluar”, por este motivo su rendimiento en las pruebas disminuye alrededor de un 30%.

- La evolución de Alejandro ha sido importante, puesto que a final de la unidad de Funciones ha pasado de estar en el 3r cuartil al 4º cuartil de notas, comprendidas entre el 5 y el 7,5. Aunque la diferencia de notas no es mucha, si lo es en cuanto a calificación global.

6.4.5. Resultados del cuestionario final sobre el modelo FC

La percepción personal de Alejandro expresada en el cuestionario de valoración final de la unidad de funciones trabajada con el modelo FC es la siguiente:

- **Los vídeos tutoriales:** le resultaron entretenidos, de fácil comprensión e interactivos. Expresa que su nivel de comprensión a través de los vídeos es muy bueno. Que para estudiar para el examen volvió a ver tres de ellos para repasar y porque tenía dudas. Que el uso sistemático de los vídeos le ayudó a ser más riguroso con su estudio. Que la teoría vista en los vídeos considera que le ha servido para saber qué hacer en cada caso.
- **Los cuestionarios de autoevaluación:** los hubiese realizado si fuesen voluntarios, porque le han servido para reforzar el contenido teórico que vio en el vídeo y para comprobar si entendió el contenido del vídeo.
- **El Web “trescomacatorze”:** expresa que le parece un buen instrumento para acceder al material, sobre todo a las actividades resueltas que le sirven para controlar si lo que hizo en clase estaba correcto y para estudiar para el examen.
- **Las clases:** las que más le gustaron fueron las que trabajó en grupo o en pareja, porque se le hacían más cortas. La clase introductoria le sirvió para familiarizarse con el modelo FC y también para ver cómo debería utilizar la tecnología. El dossier de guía le sirvió también para entender lo que tenía que hacer. Piensa que los 10 minutos de introducción en cada clase para resolver dudas eran necesarios porque se comparten opiniones y tal vez surgen dudas

que a uno mismo no se le hubiesen ocurrido. Expresa que en este modelo, tanto el alumno como el profesor ocupan roles secundarios.

- **El modelo FC de enseñanza-aprendizaje:** Considera que es mejor el modelo FC, porque le obligaba a prepararse el tema para la clase, porque le ordenaba el estudio y porque la clase era más divertida. Expresa que sus resultados académicos con ambas metodologías son iguales. Considera que este modelo es un cambio en positivo para la asignatura y que era mejor de lo que pensaba. Le gustaría que durante el curso la mayoría de clases fuesen con *Flipped Classroom*, pero en alguna clase concreta, como por ejemplo empezar a aprender derivadas o integrales o algún concepto más difícil, prefiere el método tradicional ,o sino, un "mix" de los dos.

6.5. RESULTADOS DEL ESTUDIO DE CASOS: NÚRIA

A continuación presentamos los resultados obtenidos por Núria (perteneciente al 4º cuartil de estudio) en las tres etapas de la investigación: pruebas diagnósticas, material de desarrollo de las clases (apuntes de Cornell, dossier de las actividades y registro audiovisual de la clase) y prueba final de contenidos y competencias. Posteriormente realizaremos el análisis de la evolución de Núria durante el curso, y por último, comentaremos su percepción sobre el modelo FC con el que realizó la unidad de Funciones.

Núria obtuvo un 8,5 en la nota del primer trimestre de matemáticas. En los dos exámenes parciales del trimestre obtuvo (sobre un total de 10) un 9,25 en el tema de números complejos, no realizó el de trigonometría y por último, obtuvo un 8 en el examen de evaluación trimestral.

6.5.1. Resultados de las pruebas diagnósticas

Como observamos en la ilustración 6-53, en las pruebas diagnósticas Núria obtuvo notas por encima de la media, excepto en el proceso de modelización.

Pruebas Casos	Notas de las pruebas diagnósticas					
	Sustitución	Generalización	Modelización	Total Álgebra	Funciones	Total Pruebas
Núria	9,2	9,3	2,5	8,6	7,7	8,5
Media del Ciclo 2013-2014	6,2	6,0	3,4	5,8	7,61	6,1

*Ilustración 6-53: Notas de Núria de las pruebas diagnósticas de Álgebra y Funciones
Fuente: Elaboración propia a partir de los Cuestionarios 1, 2 y 3.*

En los ítems correspondientes al proceso algebraico de modelización (Cuestionario 2, Anexo 2), confunde producto con multiplicación al expresar $(3 + p) \cdot 1,90$ como $3p \cdot 1,90$. Este error tiene origen en la ausencia de sentido, ya que viene de un aprendizaje aritmético erróneo. Por lo cual los ítems 38 y 39, a pesar de que estén bien planteados, arrastran el error del ítem 37.

En la prueba de funciones, observamos que en la pregunta 4 del ítem velocidad, Núria al igual que Alejandro, se equivoca al seleccionar aquella pista que visualmente se parece a la gráfica dada porque no haya la relación entre la gráfica de la velocidad en función del espacio

recorrido, que es que un coche de carreras mantiene la velocidad más alta durante los tramos rectos, mientras que disminuye en cada curva. Es decir, no identifica que la velocidad sea una función del espacio recorrido ($v = f(e)$). En el resto de preguntas no ha mostrado ninguna dificultad para resolverlas correctamente.

Por lo que podemos concluir que más allá de que Núria ha tenido alguna dificultad en modelización, los resultados están por encima de lo esperado con respecto a la media de la población. Como muestra, la ilustración 6-54, obtiene una nota total de las pruebas de 8,5 que está muy por encima de la media poblacional que es de 6,1.

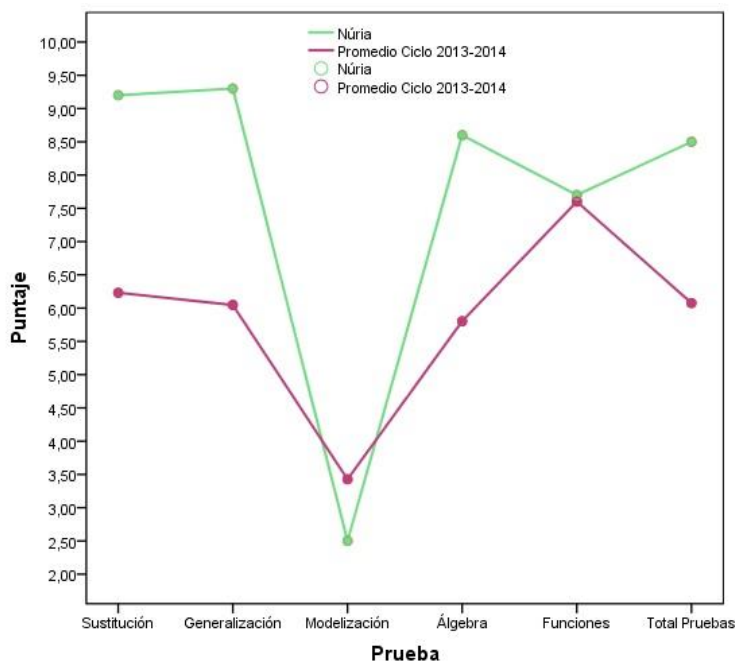


Ilustración 6-54: Diagrama de líneas de las notas resultantes de las pruebas diagnósticas de Núria.

Fuente: Cuestionarios 1,2 y 3 de Núria, de 1º de bachillerato del ciclo lectivo 2013-2014.

6.5.2. Resultados del proceso de aprendizaje con el modelo FC

Para analizar los resultados obtenidos del proceso de aprendizaje con el modelo FC de Núria, tendremos en cuenta los siguientes instrumentos: los apuntes que realizó con la plantilla de Cornell (Anexo 6), los cuestionarios *online* (Anexo 7) y las actividades de clase (Anexo 10).

6.5.2.1. Apuntes de Cornell

Según la categorización que planteamos en el capítulo de metodología para los apuntes realizados con la plantilla de Cornell, observamos que los resultados obtenidos por Núria son los siguientes:

1.- En la comprensión (C), analizar si los alumnos reconocen las ideas dominantes del vídeo:	
C1	Mantiene la fidelidad al original que se abrevia, sin subjetivismo ni deformaciones. Es claro y concreto.
2.- En la lectura (L): Analizar la legibilidad, claridad y referencia de las notas	
L1	Muy buena (explicita todas las ideas principales claramente y muestra las relaciones entre los temas, ejemplos, etc., mostrando jerarquías si es necesario).
3.- En la expresión (E): analizar el lenguaje propio, la brevedad y la precisión. Así como también el uso de signos convencionales, gráficas, formas geométricas con palabras claves o frases.	
E1	Mixta (Utiliza una combinación de texto con símbolos y gráficas para tomar nota).
4.- En la columna de idea clave o pregunta (P): analizar el nivel de comprensión y síntesis sobre el tema trabajado.	
P4	En blanco (deja el espacio).
5.- En la columna de Síntesis o resumen (S): analizar la elaboración de una síntesis utilizando esquemas, cuadros sinópticos, tablas cronológicas (ayudan a recordar lo esencial).	
S1	Correcta (Hace una buena síntesis, utiliza esquemas, etc.).

Ilustración 6-55: Categorización de los apuntes de Cornell de Núria.

Fuente: Apuntes de Cornell de Núria, de 1º de bachillerato del ciclo lectivo 2013-2014.

Para poder añadir esta categorización analizada a los resultados cuantitativos de la evolución del aprendizaje de Núria, utilizamos la ilustración 3-39 del capítulo de metodología, donde obtenemos una nota de 9, ya que 4 categorías son de nivel 1, y una de nivel 4.

6.5.2.2. Cuestionarios online

En cuanto a las tres primeras preguntas de los ocho cuestionarios *online* observamos que, de las categorías planteadas y su correspondiente puntuación descrita en el capítulo de metodología, los resultados de Núria han sido los siguientes (Ilustración 3-40):

Proceso/Cuestionarios	C1	C2	C3	C4	C5	C6	C7	C8
1.- Recordar (Re): analizar si el alumno recuerda y reconoce información e ideas además de principios aproximadamente en la misma forma en que los aprendió.	Re2	Re2	Re1	Re1	Re1	Re1	-	Re2
2.- Comprender (Co): analizar si el alumno comprende, esclarece o interpreta la información en base al conocimiento previo.	Co2	Co2	Co1	Co1	Co1	Co1	-	Co2
3.- Aplicar (Ap): analizar si el alumno selecciona, transfiere y utiliza datos y principios para elaborar una pregunta interesante sobre el tema visto en el vídeo, aplicando los conceptos aprendidos.	Ap3	Ap2	Ap3	Ap3	Ap3	Ap3	-	Ap3
Puntuación	4	4	8	8	8	8	-	4

Ilustración 6-56: Categorización de los cuestionarios online de Núria.

Fuente: De elaboración propia a partir Cuestionarios online y del registro audiovisual de Núria, de 1º de bachillerato del ciclo lectivo 2013-2014 (Anexo 14).

Calculando la media de las puntuaciones obtenidas según la categorización de las respuestas de los cuestionarios de autoevaluación *online*, Núria obtiene una puntuación de 6,29.

Respecto a las preguntas sobre la experiencia de visualización del vídeo en cuanto a contenido, los resultados de la categorización son:

Preguntas / Cuestionarios	C1	C2	C3	C4	C5	C6	C7	C8
1.- Se ha podido concentrar para ver el vídeo	Si	Si	Si	Si	Si	Si	-	Si
2.- Causas de distracción								
3.- Número de veces que ha necesitado ver el vídeo para comprender el tema	1	1	1	1	1	1	-	1
4.- Utilización de las funciones de “pausa” y “retroceso”	No	No	No	No	No	No	-	No
5.- Dudas	Du3	Du1	Du3	Du3	Du1	Du3	-	Du3
6.- Tomar apuntes con la plantilla de Cornell	Si	Si	Si	Si	Si	Si	-	Si
7.- Nivel de comprensión del tema con el vídeo tutorial	5	5	5	5	3	3	-	4
8.- Nivel de comprensión de un tema en clase	4							
9.- Dificultades en el proceso		No	No	No	No	No	-	No
10.- Tipo de dificultad								
11.- Nota de matemáticas del primer trimestre	Exce lente							

Ilustración 6-57: Categorización de las preguntas de contenido de la visualización de los cuestionarios de autoevaluación online

Fuente: Elaboración propia a partir de Cuestionarios online de Núria, de 1º de bachillerato del ciclo lectivo 2013-2014

De los resultados de la categorización de la ilustración 6-57, observamos que Núria:

- No ha tenido dificultad para concentrarse para ver los vídeos tutoriales.
- Ha visto solo una vez el vídeo, y no utiliza las funciones de “pausa” y “retroceso”.
- Excepto en un vídeo, expresa no tener dudas.
- Utiliza la plantilla de Cornell en todos los vídeos.
- En general expresa tener un nivel simbólico de comprensión de los vídeos tutoriales. Capta las ideas implícitas. Comprende todo con facilidad y en profundidad. Expresa que en clase su nivel de comprensión es similar.

Respecto a las preguntas sobre la experiencia de visualización del vídeo en cuanto a su forma para los cuestionarios 7 y 8, los resultados de la categorización son los siguientes:

Preguntas/Cuestionarios	C7	C8
1.- Respecto al formato del vídeo	-	-
2.- Causas de la elección	-	-
3.- Opinión sobre la posibilidad de visualizar a los profesores en el vídeo	-	Positivo
4.- Argumentación de la elección de “positivo”	-	Arg5

Ilustración 6-58: Categorización de las preguntas de forma de la visualización de los cuestionarios 7 y 8 de autoevaluación online

Fuente: De elaboración propia a partir Cuestionarios online de Núria, de 1º de bachillerato del ciclo lectivo 2013-2014

De los resultados de la categorización de la ilustración 6-48, observamos que Núria:

- Prefiere el formato con dos profesores visibles porque se distrae menos.
- Expresa que la posibilidad de visualizar a los profesores en el vídeo y que la interacción entre ellos simule el diálogo alumno-profesor hace que uno tenga la sensación de estar en clase. Y también porque cada uno explica su punto de vista y se aprende de dos profesores a la vez.

6.5.2.3. Actividades de clase

Núria tiene cierta dificultad para tener todo el material ordenado y al día. De las actividades realizadas sólo tiene cuatro de siete, y el resto no las encuentra. De las cuatro que posee (3ª, 5ª, 6ª y 7ª) observamos que en general todo está resuelto correctamente.

En la actividad de refuerzo observamos dificultad en el análisis de la simetría de funciones. También observamos que no resuelve los problemas de aplicación de conceptos. El resto de ejercicios están bien resueltos.

Como consecuencia a todo lo observado en las actividades desarrolladas en clase (dossier de trabajo y registro de material audiovisual), aplicando la categorización basada en la relación entre las dimensiones cognitivas y la taxonomía revisada de Bloom, que presentamos en el capítulo de metodología, los resultados obtenidos son los siguientes:

Categoría	Resultados del análisis de las actividades y material audiovisual
1.- Analizar (An): analizar si el alumno descompone el conocimiento en sus partes y piensa en cómo estas se relacionan con su estructura global.	An1
2.- Evaluar (Ev): analizar si el alumno hace juicios en base a criterios y estándares utilizando la comprobación y la crítica.	Ev1
3.- Crear (Cr): Analizar la habilidad que permite reorganizar los elementos para formar un todo coherente y funcional; generar, planear o producir para reorganizar elementos en un nuevo patrón o estructura.	Cr2
Puntuación	9

Ilustración 6-59: Categorización de las actividades de clase de Núria

Fuente: Elaboración propia a partir de las actividades de Núria y del material audiovisual de las clases registradas, de 1º de bachillerato del ciclo lectivo 2013-2014.

Del registro audiovisual observamos que participa en clase en el trabajo en grupo y en muchas ocasiones resuelve el ejercicio sola y luego lo comparte con sus compañeros. Es un referente en el grupo.

En resumen, observamos que Núria:

- Comprende ciertos conceptos o principios y el porqué de ciertos procedimientos o demostraciones.
- Busca y descubre relaciones entre elementos de un problema.
- Participa en un grupo de redacción, y retroalimenta a los compañeros en cuanto a la organización y lógica de los argumentos.
- Anota las contradicciones que encuentra.
- Revisa el ejercicio para ver si se incluyeron todos los pasos necesarios.
- Critica una resolución si cree que no está bien.

- A veces necesita ayuda para poder plantear una nueva situación, o inventar, o diseñar una nueva propuesta.

Por todo ello la puntuación correspondiente planteada para poder cuantificar estos resultados cualitativos y añadirla a la evolución del aprendizaje de Núria, es de 9.

6.5.3. Resultados de la prueba final de la unidad

En la prueba evaluativa final de la unidad (Anexo 12 – 2ª opción de prueba) Núria obtuvo una nota de 7,15 sobre un total de 10 puntos, de acuerdo a la codificación planteada en el capítulo de metodología (Ilustración 6-60).

Observamos que tuvo dificultades, al igual que vimos en las actividades de clase, en la simetría de funciones, y en el problema de aplicación de composición de funciones.

Nº ejercicio	Objetivos evaluados	Codificación del ejercicio	Puntuación del ítem	Puntuación de Núria
Ejercicio 1	<ul style="list-style-type: none"> Reconocer las funciones reales de variable real, su dominio e imagen. Operar con funciones. Conocer el concepto de función inversa de una función y aplicar un proceso para obtenerla. 	Encuentra la función resultante de dividir $f(x)$ entre $g(x)$.	0,5	0,5
		Encuentra analíticamente el dominio de la función.	0,75	0,75
		Obtiene la función inversa.	0,75	0,75
		Encuentra el dominio de la función inversa para hallar la imagen de la función.	0,5	0,5
Ejercicio 2	<ul style="list-style-type: none"> Saber reconocer las propiedades globales de una función: simetría (visual y analíticamente) 	Estudia la simetría (par e impar) analíticamente de la función $f(x)$.	1,25	0,5
		Estudia la simetría (par e impar) visualmente de la gráfica de la función $g(x)$.	1,25	1,25
Ejercicio 3	<ul style="list-style-type: none"> Realizar composición de funciones y comprobar las propiedades que verifica esta operación. 	Expresa el número de habitantes en función del tiempo.	1	0,75
		Encuentra el número de habitantes en ese instante.	0,75	0
		Encuentra el número de habitantes transcurrido un año y seis meses.	0,75	0
Ejercicio 4	<ul style="list-style-type: none"> Reconocer las funciones reales de variable real, su dominio e imagen. Saber reconocer las propiedades globales de una función 	Identifica el dominio e imagen de la función.	0,5	0,4
		Identifica la simetría, continuidad y periodicidad de la función.	0,5	0,5
		Identifica las asíntotas de la función.	0,5	0,5
		Identifica la monotonía, máximos y mínimos de la función.	0,5	0,35
		Identifica la curvatura y puntos de inflexión de la función.	0,5	0,4
Total de puntos de la prueba			10	7,15

Ilustración 6-60: Codificación de los ejercicios de la prueba final de la unidad de Núria

Fuente: Elaboración propia a partir de la prueba de Núria, de 1º de bachillerato del ciclo lectivo 2013-2014.

6.5.4. Evolución de los resultados

En resumen, las calificaciones/puntajes obtenidos por Núria con cada uno de los instrumentos y la del resultado global de cada trimestre, han sido:

Etapa	Instrumento	Puntuación (sobre 10)
Metodología tradicional de Enseñanza - Aprendizaje	Nota de matemáticas del 1r Trimestre	8,5
Pruebas diagnósticas iniciales	Prueba diagnóstica de álgebra	8,6
	Prueba diagnóstica de funciones	7,7
Modelo FC de enseñanza-aprendizaje	Apuntes de Cornell	9
	Cuestionarios de autoevaluación	6,29
	Actividades de clase	9
	Prueba final de contenidos	7,15
	Nota de matemáticas del 2º Trimestre	8,7
Metodología tradicional de Enseñanza - Aprendizaje	Nota de matemáticas del 3r Trimestre	8,5

Ilustración 6-61: Tabla con los puntajes obtenidos por Núria en cada instrumento y prueba
Fuente: Elaboración propia

En la evolución del aprendizaje de Núria podemos observar que ha mantenido su rendimiento desde que comenzó el curso con una metodología tradicional hasta la prueba final de contenidos del modelo FC. Aunque el resultado de la prueba diagnóstica de modelización fue bajo, observamos que tiene un nivel de razonamiento algebraico por encima de la media de la población. En cuanto a los errores observados, vemos que son de origen afectivo y/o emocional, o de algún concepto mal aprendido en la aritmética, es decir, de origen en la ausencia de sentido. No obstante, todo lo analizado nos muestra que Núria se encuentra en el inicio del estadio de “las operaciones formales”, según Piaget y Collin (Fidela Velázquez, 2003).

La línea de tendencia nos muestra que la evolución de Núria ha sido positiva durante todo el curso (ilustración 6-62):

- La utilización de la metodología de “*Flipped Classroom*” le ayuda a acceder al material que por su desorganización a veces no guarda bien, aspecto que le perjudica. Como a sus compañeros, tener a su disposición todo el material teórico-práctico de la unidad con FC en el web, compensa sus deficiencias.
- De acuerdo a las etapas del aprendizaje planteadas por la Taxonomía de Bloom, observamos que en las tres primeras Núria no presenta dificultades.

No obstante, observamos cierta dificultad en ocasiones en la etapa de “crear” debido a que a veces se queda con dudas.

- La evolución de Núria ha sido buena, puesto que a final de la unidad de Funciones se ha mantenido en el mismo cuartil de notas.

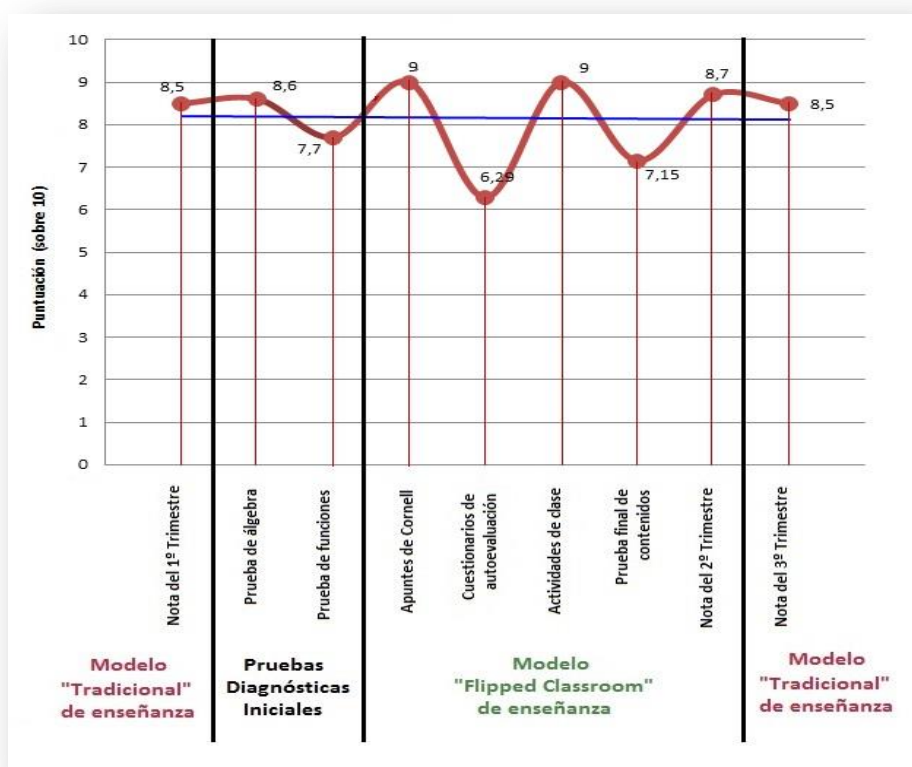


Ilustración 6-62: Evolución del proceso de aprendizaje de Núria con diferentes modelos de enseñanza
Fuente: Elaboración propia

6.5.5. Resultados del cuestionario final sobre el modelo FC

La percepción personal de Núria, expresada en el cuestionario de valoración final de la unidad de Funciones trabajada con el modelo FC es la siguiente:

- **Los vídeos tutoriales:** le resultaron entretenidos, de fácil comprensión y cortos. Expresa que su nivel de comprensión a través de los vídeos es bueno. Que para estudiar para el examen volvió a verlos para repasar, para memorizar los conceptos y porque tenía dudas. Que el uso sistemático de los vídeos le ayudó a ser más rigurosa con su estudio. Que la teoría vista en los vídeos considera que le ha servido para saber qué hacer en cada caso. Expresa que con los vídeos su potencial matemático ha mejorado.

- **Los cuestionarios de autoevaluación:** si no hubiesen sido obligatorios no los hubiese realizado.
- **El Web “trescomacatorze”:** califica “regular” al web como herramienta para el aprendizaje de las matemáticas, no obstante expresa que las actividades resueltas colgadas le sirvieron para estudiar para el examen.
- **Las clases:** Expresa que las que más le gustaron fueron aquellas en las que hubo trabajo en grupo, porque se le hacían más cortas. En relación a la clase introductoria, opina que le sirvió para entender en qué consistía la metodología y que le pareció medianamente difícil. La guía le sirvió para saber lo que tenía que hacer en cada momento.
- **El modelo FC de enseñanza-aprendizaje:** Le da igual con qué metodología de clase trabaje. Ambas le parecen bien. Piensa que los resultados obtenidos fueron peores que con la metodología tradicional, pero expresa que ha aprendido lo mismo. Prefiere la metodología tradicional porque es mucho más cómoda, puesto que las dudas se pueden preguntar y solucionar al instante.

6.6. RESUMEN

Como fin de capítulo realizamos un resumen de los resultados observados en cada prueba e instrumento de los cuatro alumnos de la modalidad de Ciencias y Tecnología.

6.6.1. Resultados de las pruebas diagnósticas

En los cuatro casos de estudio analizados de la modalidad de Ciencias y Tecnología, observamos que los resultados son bastante heterogéneos y que dependen del alumno. Pero apreciamos gran dificultad en el proceso algebraico de modelización (Ilustración 6-63):

Pruebas Casos	Notas de las pruebas diagnósticas					
	Sustitución	Generalización	Modelización	Total Álgebra	Funciones	Total Pruebas
Marc	5	6,1	5	5,6	7,7	5,9
MaríaB	2,5	5,9	0	4,2	8,5	4,8
Alejandro	7,1	7	2,5	6,5	5,4	6,4
Núria	9,2	9,3	2,5	8,6	7,7	8,5
Media del Ciclo 2013-2014	6,2	6,0	3,4	5,8	7,61	6,1

Ilustración 6-63: Notas de los alumnos de la muestra de la modalidad de Ciencias y Tecnología de las pruebas diagnósticas de Álgebra y Funciones.

Fuente: Elaboración propia a partir de los Cuestionarios 1, 2 y 3.

Los tipos de errores observados en los dos primeros casos de estudio (Marc y María B) provienen de la necesidad de particularizar, de clausura y de la dificultad para encontrar el patrón de comportamiento. Por lo que podemos concluir que la mayoría de errores cometidos tienen su origen en un obstáculo o en la ausencia de sentido.

En los dos casos de estudio pertenecientes al 3º y 4º cuartil (Alejandro y Núria) observamos en gran parte errores con origen afectivo y/o emocional, y en ocasiones de origen de ausencia de sentido, al confundir producto con suma.

6.6.2. Resultados del proceso de aprendizaje con el modelo FC

Presentamos a continuación un resumen de los resultados observados en los cuatro alumnos durante el proceso de enseñanza-aprendizaje con el modelo FC, medidos a partir de los apuntes de Cornell (Anexo 6), los cuestionarios *online* (Anexo 7) y las actividades de clase (Anexo 10).

6.6.2.1. Apuntes de Cornell

En los cuatro alumnos observamos que sus apuntes mantienen la fidelidad del contenido explicado en el vídeo, sin subjetivismo ni deformaciones. Son claros y concretos. Explicitan todas las ideas principales claramente y muestran las relaciones entre los temas, ejemplos, etc., mostrando jerarquías si es necesario. Utilizan una combinación de texto con símbolos y gráficas para tomar nota. También observamos que en general realizan preguntas correspondientes a una duda que les ha quedado, pero que en contadas ocasiones la pregunta es de aplicación del tema. Las síntesis suelen ser parciales.

6.6.2.2. Cuestionarios *online*

En los resultados observados en los cuestionarios *online*, vemos que son muy similares en los cuatro, ya que han respondido correctamente a los que corresponden a los temas más fáciles, y con cierta dificultad a los de mayor complejidad, como la composición de funciones, función inversa y propiedades globales de una función.

En cuanto al nivel de comprensión a través de los vídeos, en general expresan tener un nivel simbólico de comprensión:

- Captan las ideas implícitas.
- Comprenden todo con facilidad y en profundidad.
- Expresan que en clase su nivel de comprensión es más bajo o similar (en el caso de Núria).

Es decir, que las tres primeras etapas de la Taxonomía de Bloom, en general se llegan a realizar, con algunas dificultades en ocasiones, pero dando pie al profesor en clase para que pueda trabajar sobre ellas.

Algunos de ellos utilizan las funciones de “pausa” y “retroceso” como una ventaja, ven solo una vez el vídeo para prepararse para la clase, aunque vuelven a verlo para prepararse para la prueba final.

Los cuatro prefieren el formato con los dos profesores visibles porque se distraen menos, y porque el hecho de visualizar a los profesores en el vídeo interactuando, simulando el diálogo alumno-profesor, les facilita la comprensión del tema.

6.6.2.3. Actividades de clase

En lo que se refiere a las actividades, observamos que María B tiene todo el material ordenado y en condiciones. En cambio, al resto les faltan actividades o bien porque no las encuentran o porque no las han realizado.

En las tres primeras etapas de la Taxonomía de Bloom observamos que en el caso de Marc le cuesta estructurar y organizar los conceptos, e integrarlos. Expresa que no sabe por dónde empezar. En general resuelve las actividades con mucha dificultad y con ayuda de los compañeros del grupo o del profesor. María B, en cambio, presenta dificultad en la etapa de “análisis” en la que frecuentemente pide ayuda. En el caso de Alejandro y Núria, en general las seis etapas llegan a completarse, aunque en ocasiones necesitan ayuda en la de “crear”, que es la última.

6.6.3. Resultados de la prueba final de la unidad

En la prueba evaluativa final de la unidad (Anexo 12 – 2ª opción de prueba) notamos una gran mejoría en el caso de Marc, no así en María B que vuelve a suspender, reflejo claro de que no es consciente de los conceptos que ha aprendido y de las dificultades que tiene aún por trabajar. En el caso de Alejandro y Núria, los resultados obtenidos en la prueba están por debajo de los de referencia del primer trimestre, según su percepción, debido a que comprenden menos la materia con los vídeos que con las clases tradicionales.

6.6.4. Evolución de los resultados

En resumen, observamos que los resultados obtenidos por una u otra razón son positivos en los cuatro casos:

- En el caso de Marc, la metodología de trabajo ha permitido que Marc exprese sus dudas y dificultades en clase, de esta manera el profesor pudo detectar con antelación al examen que necesitaba ayuda y trabajar con él. Ha sido el alumno cuyo cambio ha sido el más significativo, en positivo.
- En el caso de María B, el modelo la ayudó a centrarse. A pesar que ella tenía todo el material al día, bien ordenado y elaborado, y las capacidades y habilidades necesarias para obtener muy buenos resultados, su dificultad para concentrarse disminuía su rendimiento de forma notable. El modelo FC le ayudó a que el esfuerzo de concentración fuese menor al tener que visualizar vídeos de entre 10 y 15 minutos, y en clase sus propios compañeros, al trabajar en grupos o parejas, la ayudaban a centrarse en la actividad que tocaba ese día. Aunque los resultados no fueron los esperados, significó el punto de inflexión para que ella aprendiese a focalizar su atención, utilizando diferentes recursos.
- En el caso de Alejandro observamos que, dadas las carencias que tenía en la metodología tradicional de sistematización y orden en su estudio, el proceso natural del modelo FC hizo que pudiese empezar a trabajar con cierto grado de rigurosidad, tanto en clase como en casa. Esto permitió que su rendimiento y potencial matemático se incrementase.
- En el caso de Núria, notamos una gran resistencia para trabajar con el modelo FC pues está adaptada a la metodología tradicional y obtiene muy buenos resultados con ella. En cambio el nuevo modelo le exige un alto nivel de elaboración y asimilación de los contenidos. No obstante, vemos que tiene gran capacidad de adaptación al cambio. La nota de la prueba final fue más baja que las notas que está acostumbrada a obtener en los exámenes. Pero su capacidad de trabajo y estudio se incrementó, no sólo a modo personal, sino que influyó de forma positiva en los compañeros que trabajaban con ella en el grupo. Probablemente, con un periodo más largo de aplicación del modelo FC, hubiese empezado a obtener excelentes resultados.

Por todo lo referido, observamos que el modelo FC atiende a la diversidad del alumnado, adaptándose a las necesidades y dificultades de cada uno, respetando sus tiempos y sobre

todo logra que haya una comunicación permanente entre compañeros y con el profesor. Por lo que podemos concluir que el modelo FC ayuda a los alumnos a distintos niveles:

- Nivel algebraico. Se pueden trabajar los conceptos desde lo más básico en casa, e ir adaptando en clase el ritmo de aprendizaje a cada alumno, hasta que pueda llegar a conceptos más complejos y descubrir las relaciones que hay entre ellos, conjuntamente con los compañeros y el profesor.
- Nivel de hábitos de estudio. Les ayuda a ser capaces de adaptarse a diferentes sistemas de aprendizaje, a ir más allá de la simple memorización de contenidos y repetición de ejercicios sin ningún sentido. Este modelo colabora en la realización de una práctica reflexiva en cada actividad, lo que conduce a un aprendizaje mucho más consciente y efectivo, siendo el propio alumno es el que va elaborándolo a su ritmo.

6.6.5. Resultados del cuestionario final sobre el modelo FC

La percepción de los cuatro alumnos sobre el modelo es bastante variada, no obstante encontramos algunas similitudes en sus respuestas respecto a:

- **Los vídeos tutoriales:** les resultaron entretenidos y de fácil comprensión. Volvieron a verlos para estudiar para la prueba final, para repasar y/o para quitarse dudas. El uso sistemático de los vídeos les ayudó a ser más rigurosos en su estudio.
- **Los cuestionarios de autoevaluación:** tres de los cuatro respondieron que si fuesen voluntarios no los hubiesen utilizado. El que resta, Alejandro, expresa que los hubiese respondido para comprobar que lo que había entendido en el vídeo estaba bien.
- **El Web “trescomacatorze”:** le ha ayudado a organizar sus estudios y a mejorar su rendimiento académico porque les resulta más fácil adquirir el material necesario para trabajar, sobre todo las actividades resueltas.
- **Las clases:** Expresan que la clase introductoria les ayudó a ver en qué consistía la nueva metodología de clase, y la guía, para saber que tenían que hacer en cada momento. Las clases que más le gustaron fueron aquellas en las que

trabajaron en grupo porque podían compartir las dudas que tenían y alguien del grupo las respondía.

- **El modelo FC de enseñanza-aprendizaje:** la opinión al respecto está dividida, ya que dos de los cuatro expresan que prefieren las clases tradicionales porque no entienden tanto los conceptos con los vídeos tutoriales, y los otros dos opinan que prefieren el modelo FC porque les obliga a prepararse el tema para la clase, porque si tenían dudas podían contar con el profesor para preguntarle en clase, o si faltaban a clase encontraban en el web los materiales de apoyo con todo lo necesario para ponerse al día.

7. RESULTADOS DEL ESTUDIO DE CASOS DE LA MODALIDAD DE CIENCIAS SOCIALES

7. RESULTADOS DEL ESTUDIO DE CASOS DE LA MODALIDAD DE CIENCIAS SOCIALES	309
7.1. <u>PRESENTACIÓN</u>	313
7.2. <u>RESULTADOS DEL ESTUDIO DE CASOS: KARLA</u>	314
7.2.1. Resultados de las pruebas diagnósticas	314
7.2.2. Resultados del proceso de aprendizaje con el modelo FC	320
7.2.2.1. Apuntes de Cornell	320
7.2.2.2. Cuestionarios online	321
7.2.2.3. Actividades de clase	323
7.2.3. Resultados de la prueba final de la unidad	326
7.2.4. Evolución de los resultados	328
7.2.5. Resultados del cuestionario final sobre el modelo FC	331
7.3. <u>RESULTADOS DEL ESTUDIO DE CASOS: SANTI</u>	332
7.3.1. Resultados de las pruebas diagnósticas	332
7.3.2. Resultados del proceso de aprendizaje con el modelo FC	336
7.3.2.1. Apuntes de Cornell	336
7.3.2.2. Cuestionarios <i>online</i>	337
7.3.2.3. Actividades de clase	340
7.3.3. Resultados de la prueba final de la unidad	341
7.3.4. Evolución de los resultados	343
7.3.5. Resultados del cuestionario final sobre el modelo FC	346
7.4. <u>RESULTADOS DEL ESTUDIO DE CASOS: JAVIER</u>	347
7.4.1. Resultados de las pruebas diagnósticas	347
7.4.2. Resultados del proceso de aprendizaje con el modelo FC	349
7.4.2.1. Apuntes de Cornell	349
7.4.2.2. Cuestionarios <i>online</i>	349
7.4.2.3. Actividades de clase	351
7.4.3. Resultados de la prueba final de la unidad	353
7.4.4. Evolución de los resultados	354
7.4.5. Resultados del cuestionario final sobre el modelo FC	357
7.5. <u>RESULTADOS DEL ESTUDIO DE CASOS: MARIA F</u>	359
7.5.1. Resultados de las pruebas diagnósticas	359
7.5.2. Resultados del proceso de aprendizaje con el modelo FC	360
7.5.2.1. Apuntes de Cornell	361
7.5.2.2. Cuestionarios <i>online</i>	361
7.5.2.3. Actividades de clase	364
7.5.3. Resultados de la prueba final de la unidad	366
7.5.4. Evolución de los resultados	367
7.5.5. Resultados del cuestionario final sobre el modelo FC	369
7.6. <u>RESUMEN</u>	371
7.6.1. Resultados de las pruebas diagnósticas	371
7.6.2. Resultados del proceso de aprendizaje con el modelo FC	372
7.6.2.1. Apuntes de Cornell	372
7.6.2.2. Cuestionarios <i>online</i>	373
7.6.2.3. Actividades de clase	373

7.6.3.	Resultados de la prueba final de la unidad	374
7.6.4.	Evolución de los resultados	375
7.6.5.	Resultados del cuestionario final sobre el modelo FC	376

7.1. PRESENTACIÓN

En este capítulo presentamos los resultados del estudio de casos múltiple inclusivo de 4 alumnos de la muestra, correspondientes a la modalidad de Ciencias Sociales. Como en el capítulo anterior, analizaremos tres aspectos del desarrollo del proceso de enseñanza-aprendizaje en cada uno de los cuatro alumnos de la muestra: los resultados de las pruebas diagnósticas, los resultados del trabajo realizado por los alumnos en la unidad que realizamos con el modelo “*Flipped Classroom*”, y por último, el resultado de la prueba de contenidos y competencias final, y posteriormente el estudio de la evolución del alumno, incluyendo las notas trimestrales del curso, así como la percepción del alumno del modelo FC utilizado.

Presentaremos los resultados de los 4 alumnos (de total de 8 de la muestra) de la modalidad de bachillerato ciencias sociales, según la nota global obtenida en matemáticas en el primer trimestre del curso académico 2013-2014, cada uno representativo de un cuartil dentro del rango de 0 a 10. Es decir que presentaremos los resultados de Karla, Santi, Javier y María F (Ilustración 7-1), para poder también comparar los resultados entre alumnos pertenecientes al mismo cuartil de notas. Mostraremos el caso de Karla y Santi con un análisis completo (ilustraciones y comentarios) por ser los alumnos con mayor dificultad, y en los dos casos restantes realizaremos el análisis solo con comentarios pertinentes sin ninguna ilustración.

Muestra del Estudio de casos	
Cuartil de notas del 1r trimestre	Modalidad de Ciencias Sociales
1r Cuartil nota entre 0 y 2,4	Karla
2º Cuartil nota entre 2,5 y 4,9;	Santi
3r Cuartil, nota entre 5 y 7,4;	Javier
4º Cuartil nota entre 7,5 y 10.	MaríaF

Ilustración 7-1: Muestra de cuatro alumnos de la población para el estudio de casos
Fuente: *Elaboración propia*



Ilustración 7-2: Alumnos de la muestra de la población trabajando en grupo para el estudio de casos.

Fuente: *Elaboración propia*

7.2. RESULTADOS DEL ESTUDIO DE CASOS: KARLA

A continuación presentamos los resultados obtenidos por Karla (modalidad de Ciencias Sociales, perteneciente al 1r cuartil de estudio) en las tres etapas de la investigación: pruebas diagnósticas, material de desarrollo de las clases (apuntes de Cornell, dossier de las actividades y registro audiovisual de la clase) y prueba final de contenidos y competencias. Tras ello realizaremos el análisis de la evolución de Karla durante el curso, y por último, comentaremos su percepción sobre el modelo FC con el que realizó la unidad de Funciones.

Karla obtuvo un 2,5 en la nota del primer trimestre de matemáticas, como resultado de dos exámenes parciales donde obtuvo (sobre un total de 10) un 0,5 en el tema de ecuaciones y un 3,5 en la unidad de inecuaciones, y del examen de evaluación trimestral donde obtuvo un 2,25. Mostraba muchas dificultades de comprensión y asimilación de los conceptos y procedimientos matemáticos.

7.2.1. Resultados de las pruebas diagnósticas

Como observamos en la ilustración 7-3, en las pruebas diagnósticas, Karla obtuvo notas muy por debajo de la media de la población.

Pruebas Casos	Notas de las pruebas diagnósticas					
	Sustitución	Generalización	Modelización	Total Álgebra	Funciones	Total Pruebas
Karla	0,4	3	0	1,9	6,2	2,5
Media del Ciclo 2013-2014	6,2	6,0	3,4	5,8	7,61	6,1

*Ilustración 7-3: Notas de Karla de las pruebas diagnósticas de Álgebra y Funciones
Fuente: Elaboración propia a partir de los Cuestionarios 1, 2 y 3.*

En los ítems 1 y 2 correspondientes al proceso algebraico de sustitución (Cuestionario 1, Anexo 2), observamos que Karla realiza bien el paso de sustitución (Ilustración 7-4), pero no acepta que la expresión no dé un número, por lo que la iguala a cero y aísla la incógnita.

Si recordamos el análisis realizado de estos ítems en el capítulo anterior, este tipo de error, con origen en un obstáculo, era el más frecuente en la población, debido a que el alumno necesita cerrar la operación, clausurarla.

INSTRUCCIONES: Lee atentamente las siguientes preguntas y contesta lo que te pide.

1. Si $a = 2b$, ¿en qué se transforma $5a + 3$?

1 $5 \cdot 2b + 3 \rightarrow 10b + 3 \rightarrow b = \frac{3}{10}$

2. Si $a = b + 3$, ¿en qué se transforma $5a + 3b$?

2 $5 \cdot (b+3) + 3 \rightarrow 5b + 15 + 3 = \rightarrow b = \frac{18}{5}$

3. Si $a = 2b$, ¿en qué se transforma $(a + 3) \cdot (3 - a)$?

3 $(2b+3) \cdot (3-2b)$

Ilustración 7-4: Errores de Karla con origen en un obstáculo en los ítems 1 y 2

Fuente: Cuestionario 1 de Karla de 1º de bachillerato del ciclo lectivo 2013-2014

Los ítems del 4 al 8 no los responde, probablemente por la dificultad que conlleva relacionar las expresiones de ambas columnas.

En los ítems del 9 al 12, observamos que Karla tiene dificultad para encontrar la expresión algebraica correspondiente a cada ítem y por ende da un valor concreto a la "x". En su caso le otorga el valor de $x=2$ (Ilustración 7-5).

5. Si x es un número cualquiera:

9 a) Escribe el número que es 3 más x.
 $3 \cdot 2 = 5$

10 b) Escribe el número que es 5 menos x.
 $5 - 2 = 3$

11 c) Escribe el número que es dos veces tan grande como x.
6

12 d) Escribe el número que es el 50% mayor que x.
4

Ilustración 7-5: Errores de Karla con origen en la ausencia de sentido en los ítems del 9 al 12.

Fuente: Cuestionario 1 de Karla de 1º de bachillerato del ciclo lectivo 2013-2014.

Este tipo de error con origen en la ausencia de sentido, se da porque el alumno necesita particularizar la expresión, otorgándole un valor numérico a la variable.

En el proceso de generalización, observamos que Karla tuvo dificultad para encontrar el patrón en los ítems 22 y 23, como muestra la ilustración 7-6, y no respondió al ítem 24.

De manera similar a Marc, en el ítem 22 podemos observar que Karla entiende que debe sumar tres puntos en cada nueva posición, confundiendo la sucesión de "números triangulares" $a_n = \frac{n \cdot (n+1)}{2}$ con una progresión aritmética de ecuación $a_n = 3 + (n - 1) \times 3$.

Este error tiene su origen en “la ausencia de sentido” puesto que hay un error de procedimiento derivado del uso inapropiado que hace de las fórmulas o de las reglas del mismo, es decir, no puede establecer la expresión algebraica que generaliza el patrón. Lo mismo sucede en el ítem 23, al confundir la posición 6 con el número triangular 6, y en los ítems siguientes.

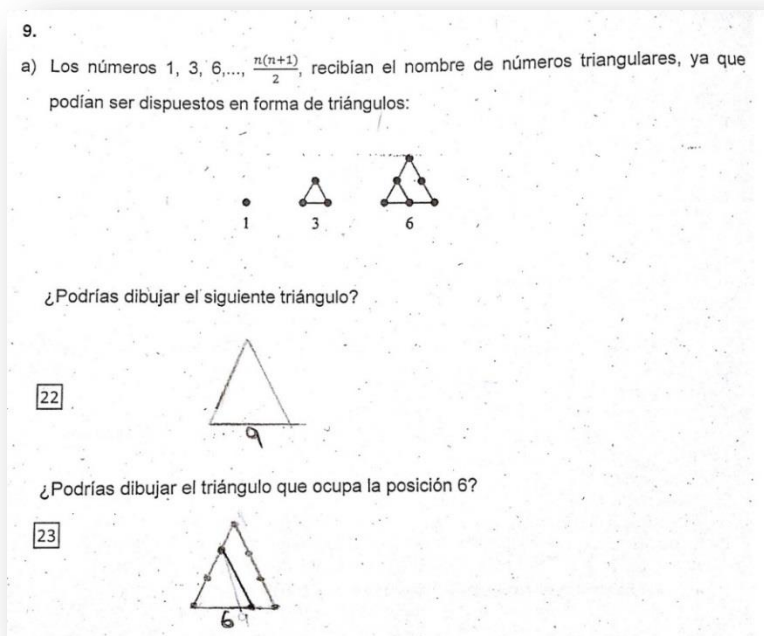


Ilustración 7-6: Errores de Karla con origen en la ausencia de sentido en los ítems 22 y 23. Fuente: Cuestionario 1 de Karla de 1º de bachillerato del ciclo lectivo 2013-2014.

En los ítems de modelización, Karla tuvo mucha dificultad para resolver las cuestiones que le planteábamos. En el ítem 12 (Ilustración 7-7) confunde área con longitud, diciendo que el frente del terreno cuadrado, mide 64 m, cuando en realidad este dato corresponde al área de este terreno (64 m²). Por lo que termina sumando los 64 m a los 12 m del otro terreno para calcular cuánto debe medir el frente.

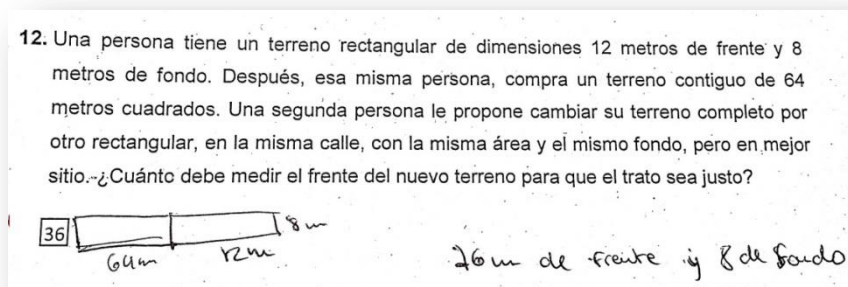


Ilustración 7-7: Error de Karla con origen en la ausencia de sentido en el ítem 36. Fuente: Cuestionario 2 de Karla de 1º de bachillerato del ciclo lectivo 2013-2014.

En los ítems 37, 38 y 39, Karla comete errores de origen en la ausencia de sentido, ya que sigue pensando numéricamente y expresa que le faltan datos (Ilustración 7-8). De hecho podemos observar que no incluye en ninguna de las expresiones las variables “b” i “p”.

13. En el supermercado un kilo de peras cuesta 90 céntimos de euro; un kilo de plátanos 1,20 euros, el kilo de ciruelas 1,90 euros, el kilo de naranjas 1,80 euros y cada kiwi cuesta b céntimos de euro. La familia de Ana tiene los siguientes gastos en fruta: Compran a la semana 2 kg. de peras, p kilos de plátanos, 3 kilos más de ciruelas que de plátanos y 6 kiwis.

¿Podrías decir cuánto gasta la familia de Ana en fruta en una semana?

6 kiwis
1 Kg 90centi

37 2kg peras: 1'80€
3 kg plátanos: 3'60€
6kg ciruelas: 5'70€ 11'4€

¿Podrías decir cuánto gasta la familia de Ana en fruta al mes suponiendo que todas las semanas consume la misma cantidad de fruta y que un mes tiene 4 semanas?

38 No es pot fer

Si el precio por Kiwi es de 0,12 céntimos de euro y compran a la semana 1 kilo de plátanos, ¿Podrías decir cuánto gasta la familia de Ana en fruta en una semana?

39 $1'80 + 3'60 + 11'4 + 0'72 + 1'20 = 18'72$
No es pot fer

Ilustración 7-8: Error de Karla con origen en la ausencia de sentido en los ítems 36,37 y 38.
Fuente: Cuestionario 2 de Karla de 1º de bachillerato del ciclo lectivo 2013-2014.

Por todo ello podemos concluir que Karla tuvo grandes dificultades para resolver los dos primeros cuestionarios, correspondientes a los procesos algebraicos de sustitución, generalización y modelización, en comparación con la población de alumnos del ciclo 2013-2014. Observamos que tiene capacidad para efectuar operaciones simples (con clausura), que presenta errores en el uso de elementos generalizados (letras en sustitución de números) y que aún no tiene capacidad para trabajar con fórmulas. Podríamos decir que Karla, según los estadios del desarrollo del pensamiento en cuanto a numeración estudiados en el capítulo II, presenta cierto retraso para su edad en el proceso del transcurso de la aritmética al álgebra, pues se sitúa actualmente en el paso del estadio de las “operaciones concretas” al de “generalización concreta o formal temprano” (paso que suele hacerse entre los 12 y los 14 años).

En el cuestionario de funciones, a pesar de estar casi un punto y medio por debajo de la media de la población de alumnos del ciclo lectivo 2013-2014 (6,2 contra 7,61 respectivamente), la nota que obtiene Karla muestra que en general respondió correctamente a la mayoría de preguntas, excepto a las dos primeras del ítem “crecer”, donde interpretó la “disminución de la tasa de crecimiento” como “la disminución de la variable estatura” directamente. Nuevamente observamos en ella un pensamiento aritmético. No identifica el cambio de la relación entre variables, sino el cambio de la variable (Ilustración 7-9).

Pregunta 1: CRECER

Desde 1980 la estatura media de las chicas de 20 años ha aumentado 2,3 cm, hasta alcanzar los 170,6 cm. ¿Cuál era la estatura media de las chicas de 20 años en 1980?

Respuesta: 170,6 cm

Pregunta 2: CRECER

Explica cómo está reflejado en el gráfico que la tasa de crecimiento de la estatura media de las chicas disminuye a partir de los 12 años en adelante.

..... No disminuye, solo se van quedando más bajas
 y crecen menos en comparación de los chicos

Ilustración 7-9: Error de Karla en las preguntas 1 y 2 del ítem “Crecer”.

Fuente: Cuestionario 3 de Karla de 1º de bachillerato del ciclo lectivo 2013-2014.

También tuvo dificultades en la pregunta 4 del ítem “Velocidad” donde, como la gran mayoría de alumnos de la población que se equivocaron en esta pregunta, ella no identifica que la velocidad es una función del espacio recorrido ($v = f(e)$).

Ante la dificultad de este razonamiento, selecciona la que visualmente se parece a la gráfica dada (Ilustración 7-10).

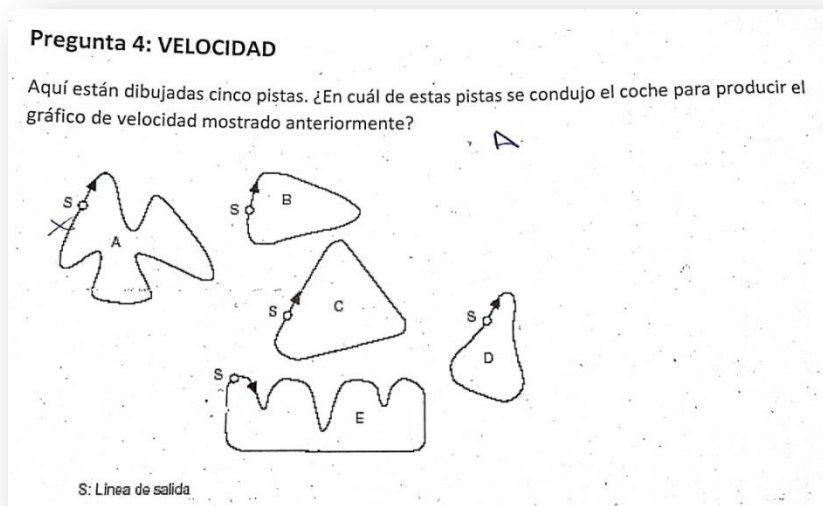


Ilustración 7-10: Error de Karla en la pregunta 4 del ítem “Velocidad”.
 Fuente: Cuestionario 3 de Karla de 1º de bachillerato del ciclo lectivo 2013-2014.

Por todo ello podemos concluir que Karla ha tenido ciertas dificultades en la resolución de las pruebas, sobre todo en lo que respecta a la necesidad de clausura y a la particularización. Su nivel de procesos algebraicos no es el esperado respecto a la media de la población. Como muestra vemos la ilustración 7-11, en la que su nota total de las pruebas (2,5) está muy por debajo de la media poblacional que es de 6,1.

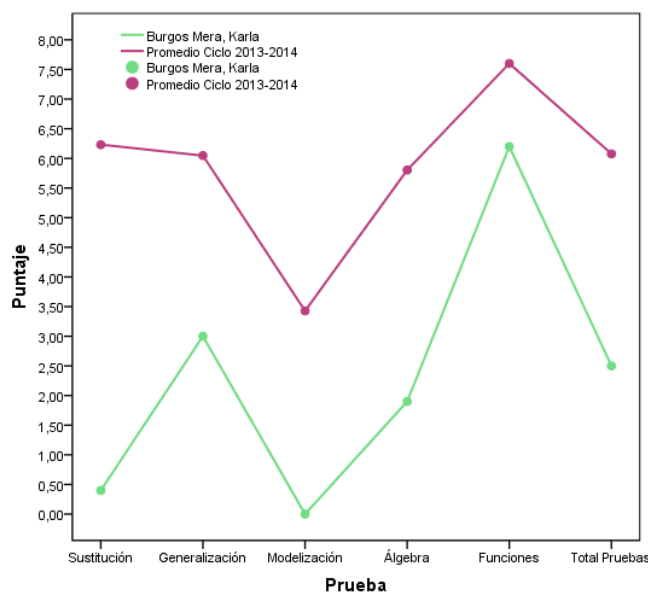


Ilustración 7-11: Diagrama de líneas de las notas resultantes de las pruebas diagnósticas de Karla.
 Fuente: Cuestionarios 1,2 y 3 de Karla, de 1º de bachillerato del ciclo lectivo 2013-2014.

7.2.2. Resultados del proceso de aprendizaje con el modelo FC

Para analizar los resultados obtenidos del proceso de aprendizaje con el modelo FC de Karla, tendremos en cuenta los siguientes instrumentos: los apuntes que realizó con la plantilla de Cornell (Anexo 6), los cuestionarios *online* (Anexo 7) y las actividades de clase (Anexo 10)

7.2.2.1. Apuntes de Cornell

Según la categorización que planteamos en el capítulo de metodología para los apuntes realizados con la plantilla de Cornell, observamos que los resultados obtenidos por Karla son:

1.- En la comprensión (C), analizar si los alumnos reconocen las ideas dominantes del vídeo:	
C3	No entiende el contenido del vídeo. Coloca expresiones sin relación y textuales. Nada claro y concreto.
2.- En la lectura (L): Analizar la legibilidad, claridad y referencia de las notas	
L3	Incompleta (explica algunas ideas).
3.- En la expresión (E): analizar el lenguaje propio, la brevedad y la precisión. Así como también el uso de signos convencionales, gráficas, formas geométricas con palabras claves o frases.	
E1	Mixta (Utiliza una combinación de texto con símbolos y gráficas para tomar nota).
4.- En la columna de idea clave o pregunta (P): analizar el nivel de comprensión y síntesis sobre el tema trabajado.	
P4	En blanco (deja el espacio).
5.- En la columna de Síntesis o resumen (S): analizar la elaboración de una síntesis utilizando esquemas, cuadros sinópticos, tablas cronológicas (ayudan a recordar lo esencial).	
S2	Parcial (Sólo consigue una síntesis parcial).

Ilustración 7-12: Categorización de los apuntes de Cornell de Karla.

Fuente: Apuntes de Cornell de Karla, de 1º de bachillerato del ciclo lectivo 2013-2014.

En la comprensión, queremos resaltar que presenta una gran dificultad de orden de ideas en los apuntes y, sobre todo, falta de prioridades: no podemos distinguir cuales son ideas principales de las secundarias.

Para poder añadir esta categorización analizada a los resultados cuantitativos de la evolución del aprendizaje de Karla, utilizamos la ilustración 3-39 del capítulo de metodología, donde obtenemos una nota de 6, ya que una categoría es de nivel 1 y el resto de nivel 2 o 3 (pudiendo haber una de nivel 4 o 5).

7.2.2.2. Cuestionarios online

En cuanto a las tres primeras preguntas de los ocho cuestionarios online observamos que, de las categorías planteadas y su correspondiente puntuación descrita en el capítulo de metodología, los resultados de Karla han sido los siguientes (Ilustración 7-13):

Proceso/Cuestionarios	C1	C2	C3	C4	C5	C6	C7	C8
<i>1.- Recordar (Re): analizar si el alumno recuerda y reconoce información e ideas además de principios aproximadamente en la misma forma en que los aprendió.</i>	Re1	Re2	Re1	Re2	Re2	Re1	Re2	Re2
<i>2.- Comprender (Co): analizar si el alumno comprende, esclarece o interpreta la información en base al conocimiento previo.</i>	Co1	Co2	Co1	Co2	Co2	Co1	Co2	Co2
<i>3.- Aplicar (Ap): analizar si el alumno selecciona, transfiere y utiliza datos y principios para elaborar una pregunta interesante sobre el tema visto en el vídeo, aplicando los conceptos aprendidos.</i>	Ap3	Ap3	Ap1	Ap2	Ap2	Ap3	Ap3	Ap2
Puntuación Numérica	8	4	10	5	5	8	4	5

Ilustración 7-13: Categorización de los cuestionarios online de Karla.

Fuente: Elaboración propia a partir de Cuestionarios online y del registro audiovisual de Karla, de 1º de bachillerato del ciclo lectivo 2013-2014 (Anexo 14).

Calculando la media de las puntuaciones obtenidas, según la categorización de las respuestas de los cuestionarios de autoevaluación *online*, Karla obtiene una puntuación de 6,125.

Respecto a las preguntas sobre la experiencia de visualización del vídeo en cuanto a contenido, los resultados de la categorización son:

Preguntas / Cuestionarios	C1	C2	C3	C4	C5	C6	C7	C8
1.- Si se ha podido concentrar para ver el vídeo	Si	Si	Si	Si	Si	Si	Si	Si
3.- Número de veces que ha necesitado ver el vídeo para comprender el tema	1	1	1	1	1	1	1	1
4.- Utilización de las funciones de “pausa” y “retroceso”	Si	Si	Si	No	Si	Si	Si	Si
5.- Dudas	Du3	Du2	Du3	Du3	Du3	Du3	Du3	Du3
6.- Tomar apuntes con la plantilla de Cornell	Si	Si	Si	Si	Si	Si	Si	Si
7.- Nivel de comprensión del tema con el vídeo tutorial	4	4	4	4	4	4	5	4
8.- Nivel de comprensión de un tema en clase	3							
9.- Dificultades en el proceso		No	No	Si	Si	No	No	No
10.- Tipo de dificultad				Di2	Di1			
11.- Nota de matemáticas del primer trimestre	Suspenseo							

Ilustración 7-14: Categorización de las preguntas de contenido de la visualización de los cuestionarios de autoevaluación online

Fuente: Elaboración propia a partir de Cuestionarios online de Karla, de 1º de bachillerato del ciclo lectivo 2013-2014

A partir de los resultados de la categorización de la ilustración 7-14, observamos que Karla:

- No ha tenido dificultad para concentrarse para ver los vídeos tutoriales.
- Ha visto solo una vez el vídeo, y que utiliza las funciones de “pausa” y “retroceso”.
- Excepto en un vídeo, expresa no tener dudas. Esto se contradice luego con preguntas que realiza en la pregunta 3, donde se pregunta “¿Qué pregunta interesante se te ocurre sobre el tema visto?” y ella, en cuatro oportunidades, coloca preguntas de dudas que muestran que no ha comprendido el contenido del vídeo en su totalidad.
- Utiliza la plantilla de Cornell en todos los vídeos.
- En general expresa tener un nivel simbólico de comprensión de los vídeos tutoriales. Capta las ideas implícitas. Comprende todo con facilidad y en profundidad. En cambio expresa que en clase su nivel es de comprensión literal del contenido de la clase.
- En ocasiones ha tenido dificultades de comprensión del contenido y de forma durante el proceso de visualización.
- Ha suspendido el primer trimestre de matemáticas de primero de bachillerato.

Respecto a las preguntas sobre la experiencia de visualización del vídeo en cuanto a su forma, para los cuestionarios 7 y 8, los resultados de la categorización son:

Preguntas/Cuestionarios	C7	C8
1.- Respecto al formato del vídeo	Fo1	-
2.- Causas de la elección Fo1	Ca3	-
3.- Opinión sobre la posibilidad de visualizar a los profesores en el vídeo	Positivo	Positivo
4.- Argumentación de la elección de "positivo"	Arg4	Arg4

Ilustración 7-15: Categorización de las preguntas de forma de la visualización de los cuestionarios 7 y 8 de autoevaluación online

Fuente: Elaboración propia a partir Cuestionarios online de Karla, de 1º de bachillerato del ciclo lectivo 2013-2014

De los resultados de la categorización de la ilustración 7-15, observamos que Karla:

- Prefiere el formato con dos profesores visibles porque se entiende mejor.
- Expresa que por el hecho de visualizar a los dos profesores en el vídeo y la interacción habida entre ellos le ha parecido que estaban dándole la clase personalmente, y eso le ha facilitado la comprensión del tema.

7.2.2.3. Actividades de clase

Respecto a las actividades, observamos que Karla las tiene resueltas, de modo general. No obstante, no observamos procesos de resolución en varias ocasiones, como es el caso del ejercicio 3 de la actividad 3 (Anexo 10) que se realizaba en parejas (Ilustración 7-16). Lo que nos da a entender que, o bien en los trabajos en grupo o tutoría de iguales Karla copia el resultado del razonamiento realizado por sus compañeros, o bien copia los resultados de la pizarra cuando se corrigen. Por lo que vemos claramente que, a pesar de que Karla en los cuestionarios de autoevaluación dice haber comprendido cada tema, cuando debe aplicar los conceptos, no sabe cómo hacerlo.

3) Dadas las funciones $f(x) = \sqrt{x^2 - 9}$ y $g(x) = \sqrt{16 - x^2}$, resuelve con tu compañero/a de trabajo las siguientes operaciones de funciones y encontrad su dominio.

$\left(\frac{f}{g}\right)(x)$	$\frac{\sqrt{x^2-9}}{\sqrt{16-x^2}}$
	$\text{Dom}\left(\frac{f}{g}\right) = (-4, -3] \cup [3, 4)$

Ilustración 7-16: Ejercicio 3 de la actividad 3 de Karla.

Fuente: Actividad 3 de Karla, de 1º de bachillerato del ciclo lectivo 2013-2014.

También observamos, en el caso de la actividad 6 de simetría de funciones (anexo 10), que Karla no realiza el estudio completo de la simetría. En el caso del ejemplo que muestra la ilustración 7-17, Karla solo analiza que la función no tenga simetría par. Coloca la expresión para comprobar si la función tiene simetría impar pero no lo realiza. Tampoco compara su resultado con el de su compañero/a. Por lo que el análisis de la simetría de la función queda incompleto.

ACTIVIDAD DE CLASE 6: SIMETRÍA DE FUNCIONES

1) Dadas las siguientes fórmulas o gráficas de funciones analiza y escribe en la columna de "Respuesta inicial" si son simétricas pares, impares o no tienen simetría

FUNCIÓN	RESPUESTA INICIAL	RESPUESTA FINAL
$h(x) = \frac{x^2 - 1}{x + 5}$	$\frac{a^2 - 1}{a + 5} \stackrel{?}{=} \frac{-a^2 - 1}{-a + 5}$ $\neq \frac{a^2 - 1}{-a + 5}$ <p>$f(a) = -f(-a)$ No tiene simetría</p>	

2) Ponte con un compañero/a de trabajo. Compara los resultados con él/ella y coloquen la respuesta acordada entre los dos, en la columna de "respuesta final"

Ilustración 7-17: Actividad 6 de Karla.

Fuente: Actividad 6 de Karla, de 1º de bachillerato del ciclo lectivo 2013-2014.

En el estudio de las propiedades globales de una función a partir de su gráfica, observamos que Karla comete errores en la actividad 8 por falta de comprensión del concepto de máximo y mínimo de una función. Como observamos en la ilustración 7-18, Karla escribe que hay un máximo relativo en el punto (-4,3) y otro en el punto (5,1). Pero luego al corregirlo con sus compañeros de equipo lo tacha porque se da cuenta que para que haya un máximo es necesario que la función pase de ser creciente a decreciente en ese punto.

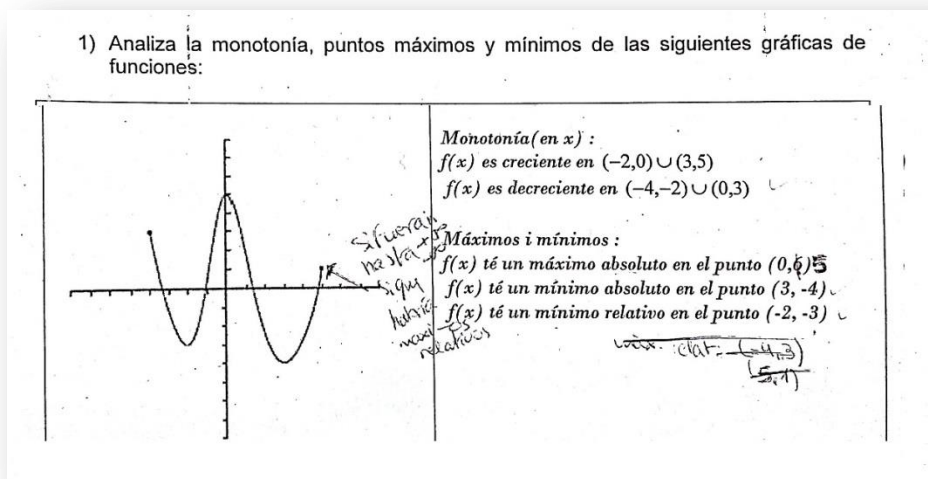


Ilustración 7-18: Ejercicio 1 de la actividad 8 de Karla.

Fuente: Actividad 8 de Karla, de 1º de bachillerato del ciclo lectivo 2013-2014.

En la actividad de refuerzo observamos que ha realizado los ejercicios muy por encima, e incluso algunos no están resueltos.

Después de todo lo observado en las actividades desarrolladas en clase (dossier de trabajo y registro de material audiovisual), aplicando la categorización basada en la relación entre las dimensiones cognitivas y la taxonomía revisada de Bloom, presentada en el capítulo de metodología, los resultados obtenidos por Karla son los siguientes:

Categoría	Resultados del análisis de las actividades y material audiovisual
1.- Analizar (An): analizar si el alumno descompone el conocimiento en sus partes y piensa en cómo estas se relacionan con su estructura global.	An3
2.- Evaluar (Ev): analizar si el alumno hace juicios en base a criterios y estándares utilizando la comprobación y la crítica.	Ev3
3.- Crear (Cr): Analizar la habilidad que permite reorganizar los elementos para formar un todo coherente y funcional; generar, planear o producir para reorganizar elementos en un nuevo patrón o estructura.	Cr3
Puntuación	2

Ilustración 7-19: Categorización de las actividades de clase de Karla

Fuente: Elaboración propia a partir de las actividades de Karla y del material audiovisual de las clases registradas, de 1º de bachillerato del ciclo lectivo 2013-2014.

Es decir que habiendo observado que Karla no sabe cómo estructurar y organizar los conceptos, e integrarlos, que no realiza la actividad en el momento destinado para ello,

dejando que sus compañeros la resuelvan primero, y que considera que al acabar la actividad ya ha terminado su tarea, la puntuación correspondiente planteada para poder cuantificar estos resultados cualitativos y añadirla a la evolución del aprendizaje de Karla, es de 2.

7.2.3. Resultados de la prueba final de la unidad

En la prueba evaluativa final de la unidad (Anexo 12 – 1ª opción de prueba) Karla obtuvo una nota de 3,15 sobre un total de 10 puntos, de acuerdo a la codificación planteada en el capítulo de metodología (Ilustración 7-20):

Nº ejercicio	Objetivos evaluados	Codificación del ejercicio	Puntuación del ítem	Puntuación de Karla
Ejercicio 1	<ul style="list-style-type: none"> Reconocer las funciones reales de variable real, su dominio e imagen. Operar con funciones. Conocer el concepto de función inversa de una función y aplicar un proceso para obtenerla. 	Encuentra la función resultante de dividir $f(x)$ entre $g(x)$.	0,5	0,5
		Encuentra analíticamente el dominio de la función.	0,75	0,75
		Obtiene la función inversa.	0,75	0
		Encuentra el dominio de la función inversa para hallar la imagen de la función.	0,5	0
Ejercicio 2	<ul style="list-style-type: none"> Saber reconocer las propiedades globales de una función: simetría (visual y analítica-mente) 	Estudia la simetría (par e impar) analíticamente de la función $f(x)$.	1,25	0
		Estudia la simetría (par e impar) visualmente de la gráfica de la función $g(x)$.	1,25	0
Ejercicio 3	<ul style="list-style-type: none"> Realizar composición de funciones y comprobar las propiedades que verifica esta operación. 	Expresa el número de habitantes en función del tiempo.	1	Ns/Nc
		Encuentra el número de habitantes en ese instante.	0,75	Ns/Nc
		Encuentra el número de habitantes transcurrido un año y seis meses.	0,75	Ns/Nc
Ejercicio 4	<ul style="list-style-type: none"> Reconocer las funciones reales de variable real, su dominio e imagen. Saber reconocer las propiedades globales de una función 	Identifica el dominio e imagen de la función.	0,5	0,5
		Identifica la simetría, continuidad y periodicidad de la función.	0,5	0,4
		Identifica las asíntotas de la función.	0,5	0,5
		Identifica la monotonía, máximos y mínimos de la función.	0,5	0,5
		Identifica la curvatura y puntos de inflexión de la función.	0,5	0
Total de puntos de la prueba			10	3,15

Ilustración 7-20: Codificación de los ejercicios de la prueba final de la unidad de Karla.

Fuente: De elaboración propia a partir de la prueba de Karla, de 1º de bachillerato del ciclo lectivo 2013-2014.

En la prueba final observamos que Karla presenta dificultades similares a las que vimos anteriormente en las actividades de clase. Por ejemplo cuando debe realizar el proceso de resolución trabajando con expresiones algebraicas como muestra la ilustración 7-21, sabe de memoria que debe aplicar la fórmula de la ecuación de segundo grado pero no sabe cómo hacerlo.

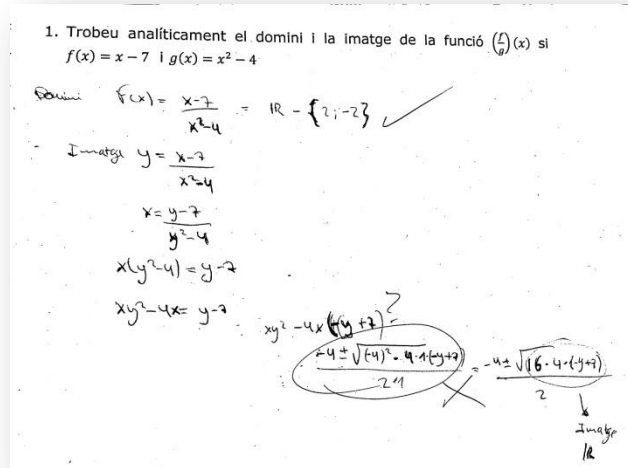


Ilustración 7-21: Ejercicio de dominio e imagen de la prueba final de la unidad de Karla
Fuente: Elaboración propia a partir de la prueba final de Karla, de 1º de bachillerato del ciclo lectivo 2013-2014.

En el ejercicio de simetría de funciones (Ilustración 7-22) observamos que en lugar de estudiar la simetría de la función dada gráficamente, lo hace de todas las propiedades globales, y además, el estudio que hace de la simetría es incorrecto. Por otra parte, en lugar de estudiar la simetría de la función dada a través de su fórmula, busca la función inversa.

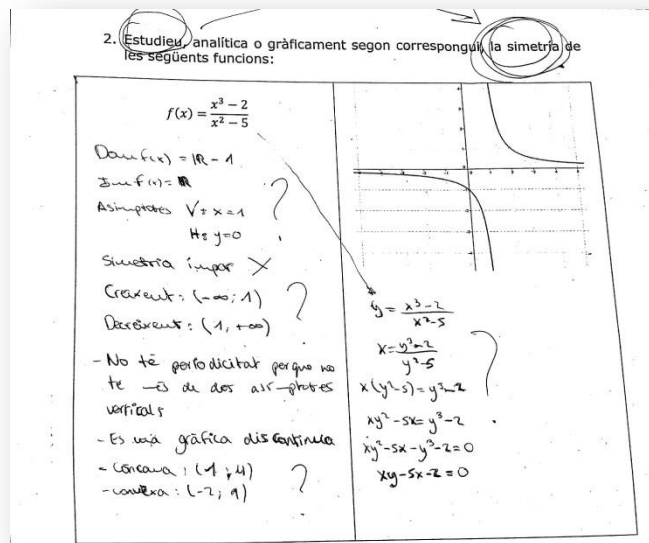


Ilustración 7-22: Ejercicio de simetría de la prueba final de la unidad de Karla
Fuente: De elaboración propia a partir de la prueba final de Karla, de 1º de bachillerato del ciclo lectivo 2013-2014.

No resolvió el ejercicio 3, de composición de funciones aplicado a un problema. No obstante, realizó correctamente el estudio de las propiedades globales a partir de la gráfica en el 4.

7.2.4. Evolución de los resultados

En resumen, las calificaciones/puntajes obtenidos por Karla con cada uno de los instrumentos y la del resultado global de cada trimestre, han sido:

Etapa	Instrumento	Puntuación (sobre 10)
Metodología tradicional de Enseñanza - Aprendizaje	Nota de matemáticas del 1r Trimestre	2,5
Pruebas diagnósticas iniciales	Prueba diagnóstica de álgebra	1,9
	Prueba diagnóstica de funciones	6,2
Modelo FC de enseñanza-aprendizaje	Apuntes de Cornell	6
	Cuestionarios de autoevaluación	6,125
	Actividades de clase	2
	Prueba final de contenidos	3,15
	Nota de matemáticas del 2º Trimestre	4,2
Metodología tradicional de Enseñanza - Aprendizaje	Nota de matemáticas del 3r Trimestre	1,5

Ilustración 7-23: Tabla con las puntuaciones obtenidos por Karla en cada instrumento y prueba

Fuente: Elaboración propia

En la evolución del aprendizaje de Karla observamos que tuvo serias dificultades para asimilar los conceptos y procedimientos matemáticos nuevos, al comenzar el curso con una metodología tradicional, debido a su retraso en el paso de la aritmética al álgebra, que se pudo detectar en los resultados de las pruebas diagnósticas.

En cuanto a los errores observados por la necesidad de clausura y particularización, y la dificultad para encontrar la expresión algebraica que generaliza un patrón y modelizar en la resolución de problemas, observamos que Karla aún no ha terminado el paso del estadio de las “operaciones concretas” al de “generalización concreta o formal temprano”, que describen Piaget y Collin (Fidela Velázquez, 2003).

Aunque la línea de tendencia disminuye en la evolución del aprendizaje de Karla, notamos un cambio en la misma cuando empieza el trabajo con la metodología de “*Flipped Classroom*” (ilustración 7-24):

- El uso de la metodología de “*Flipped Classroom*” atiende a sus necesidades de orden y priorización de ideas principales en el estudio: No sabe tomar apuntes. Todo es bueno y no sigue un orden en las ideas. No obstante, tener a su disposición todo el material teórico-práctico de la unidad con FC en el web y elaborar las respuestas con sus compañeros en las actividades de clase, le permite compensar sus deficiencias.
- De acuerdo a las etapas del aprendizaje planteadas en la Taxonomía de Bloom, observamos que en las tres primeras, Karla presenta ciertas dificultades para comprender o lo hace superficialmente, aunque expresa lo contrario. Por este motivo en clase no pide ayuda a sus compañeros o al profesor, y participa poco en las actividades grupales. Se limita a copiar las respuestas consensuadas por el grupo o corregidas en la pizarra. Al desarrollar esta unidad con el modelo FC, el profesor con antelación al examen pudo observar, a través de las actividades de clase, que Karla tenía serias dificultades en el aprendizaje sin que ella lo reconociera, sobre todo en las tres etapas más elevadas de la Taxonomía de Bloom: analizar, evaluar y crear; todo ello como consecuencia de deficiencias en la segunda etapa de “comprender”. Pero el profesor no pudo trabajar con ella los errores, pues Karla no expresaba tener dudas o conceptos malentendidos.
- La evolución de Karla no ha sido tan significativa como la de Marc, pero al terminar la unidad de funciones se encuentra en el 2º cuartil de notas, comprendidas entre el 2,5 y el 5.

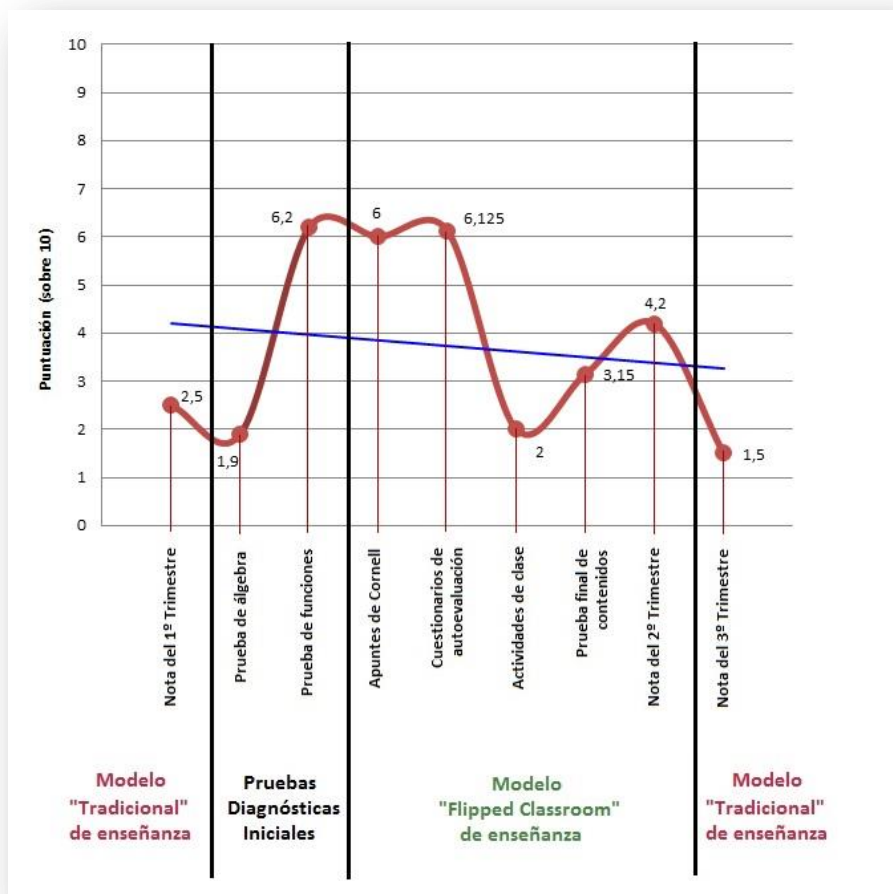


Ilustración 7-24: Evolución del proceso de aprendizaje de Karla con diferentes modelos de enseñanza
 Fuente: Elaboración propia

Todo esto permitió que Karla realizase la prueba final de contenidos con un poco más de base, con menor cantidad de dudas y mayor asimilación de los procesos y de los contenidos trabajados. Pero la tarea realizada no alcanzó para que aprobase, debido a su negación personal a reconocer que tiene dificultades y a que sigue limitándose a estudiar los ejercicios de clase, porque no sabe cómo estudiar de manera más profunda.

Dadas las dificultades profundas observadas en Karla, procedimos a comunicar los resultados a su tutor de aula para que pudiera recibir ayuda externa, sobre todo en lo referente al trabajo de detección de ideas principales y secundarias, y a la metodología de estudio personal.

7.2.5. Resultados del cuestionario final sobre el modelo FC

La percepción personal de Karla, expresada en el cuestionario de valoración final de la unidad de funciones trabajada con el modelo FC, es la siguiente:

- **Los vídeos tutoriales:** son aburridos, largos y de fácil comprensión. Expresa que el nivel de comprensión de los temas a través de los mismos ha sido malo. Opinión que se contradice con lo que respondió en los cuestionarios de autoevaluación después de visualizar cada vídeo tutorial. No sabe si su potencial matemático ha aumentado. Como tuvo que faltar a una clase utilizó el sistema del video y la actividad correspondiente resuelta que estaba colgada en el web para estudiar y se apoyó para su estudio en una persona externa al colegio (familiar, profesor particular, etc.). Expresa que algunos vídeos “no le quedaron claros”.
- **Los cuestionarios de autoevaluación:** le servían para comprobar si entendía el contenido del vídeo, porque las preguntas de teoría y las respuestas son las claves del tema.
- **El Web “trescomacatorze”:** expresa que el material colgado le ha ayudado cuando ha faltado a clase, para controlar si lo que hizo en clase estaba correcto, y para ver que los ejercicios se pueden resolver por distintos métodos y llegar al mismo resultado.
- **Las clases:** las que más le gustaron fueron aquellas en las que se trabajó en grupo o en pareja, porque al final de la clase tenía las respuestas correctas.
- **El modelo FC de enseñanza-aprendizaje:** Considera que es mejor que el modelo tradicional, porque le obliga a prepararse el tema para la clase, porque le ordena el estudio y porque las clases son más divertidas. Expresa que le gustaría que fuese así todo el curso. No obstante, continúa percibiendo que, con el modelo FC, ella ocupa un papel secundario en el aprendizaje y que el principal es el del profesor.

7.3. RESULTADOS DEL ESTUDIO DE CASOS: SANTI

Presentamos ahora los resultados obtenidos por Santi (modalidad de Ciencias Sociales, perteneciente al 3r cuartil de estudio) en las tres etapas de la investigación: pruebas diagnósticas, material de desarrollo de las clases (apuntes de Cornell, dossier de las actividades y registro audiovisual de la clase) y prueba final de contenidos y competencias. Posteriormente realizaremos el análisis de la evolución de Santi durante el curso, y por último, comentaremos su percepción sobre el modelo FC con el que realizó la unidad de funciones.

Santi obtuvo un 4,6 en la nota de primer trimestre de matemáticas, como resultado de dos exámenes parciales donde obtuvo (sobre un total de 10) un 7,25 en el tema de ecuaciones y un 5,25 en la unidad de inecuaciones, y del examen de evaluación trimestral que no superó al obtener un 3. Su dificultad residía en la sistematización de su estudio y en la comprensión de la globalidad de los conceptos trabajados.

7.3.1. Resultados de las pruebas diagnósticas

Como observamos en la ilustración 7-25, en las pruebas diagnósticas Santi obtuvo, en general, notas por debajo de la media de la población, excepto en la prueba de funciones.

Pruebas Casos	Notas de las pruebas diagnósticas					
	Sustitución	Generalización	Modelización	Total Álgebra	Funciones	Total Pruebas
Santi	2,5	4,3	2,5	3,6	8,5	4,3
Media del Ciclo 2013-2014	6,2	6,0	3,4	5,8	7,61	6,1

*Ilustración 7-25: Notas de Santi de las pruebas diagnósticas de Álgebra y Funciones
Fuente: Elaboración propia a partir de los Cuestionarios 1, 2 y 3.*

En los ítems del 4 al 8 correspondientes al proceso algebraico de sustitución (Cuestionario 1, Anexo 2), observamos que Santi no realizó el ejercicio. En los ítems del 9 al 12, al igual que María B, le otorgó un valor a "x", en particular $x=6$ (Ilustración 7-26). Esto nos muestra que Santi tiene dificultad trabajar con el concepto de letra como número generalizado o como variable y nos da la pauta de que el alumno aún está en proceso de cambio del estadio de "generalización concreta" al de "las operaciones formales" según Piaget y Collin (Fidela Velázquez, 2003)

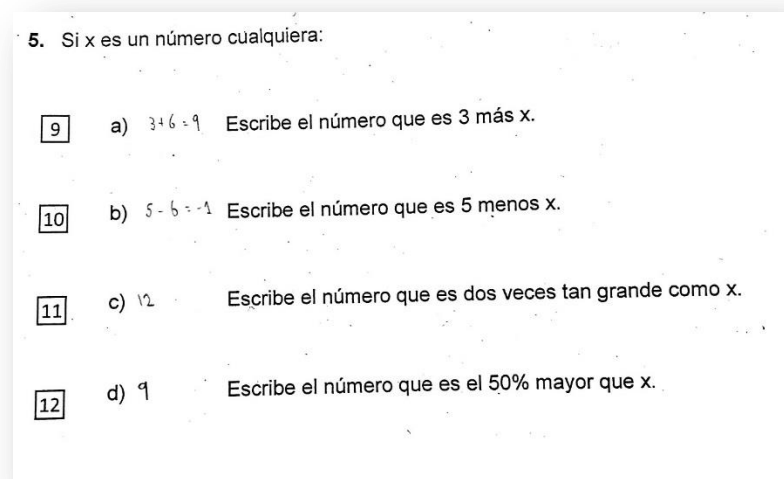


Ilustración 7-26: Errores de Santi con origen en la ausencia de sentido en los ítems del 9 al 12.

Fuente: Cuestionario 1 de Santi de 1º de bachillerato del ciclo lectivo 2013-2014.

En el ítem 15 observamos que confunde producto con suma, por lo que en lugar de escribir que el área del rectángulo es $A = (x + 2) \cdot 5$, responde que el área es $A = 2x \cdot 5$, por lo que comete un error con origen de ausencia de sentido (Ilustración 7-27)

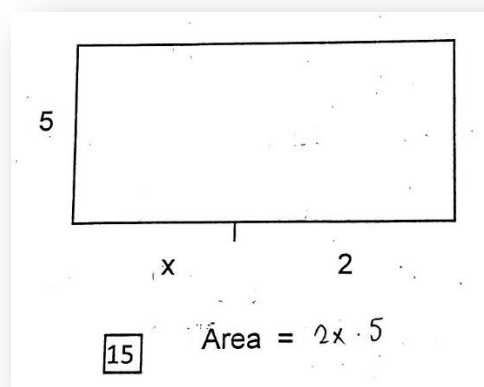


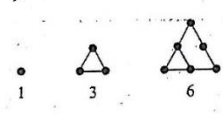
Ilustración 7-27: Error de Santi con origen en la ausencia de sentido en el ítem 15

Fuente: Cuestionario 1 de Santi de 1º de bachillerato del ciclo lectivo 2013-2014.

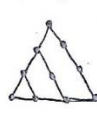
En el proceso algebraico de generalización, observamos que Santi tuvo cierta dificultad para el ítem 23, pero que resuelve correctamente el 22, lo que nos hace pensar que el error que cometió es de origen afectivo y/o emocional, es decir, que “son muchos puntos para dibujar” (Ilustración 7-28). En cambio en el ítem 24, observamos que hay un error de proceso, pues en lugar de aplicar la fórmula del término general de la sucesión, aplica proporcionalidad directa.

9.

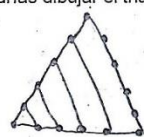
a) Los números 1, 3, 6, ..., $\frac{n(n+1)}{2}$, reciben el nombre de números triangulares, ya que podían ser dispuestos en forma de triángulos:



¿Podrías dibujar el siguiente triángulo?

22 

¿Podrías dibujar el triángulo que ocupa la posición 6?

23 

¿A qué posición corresponde el triángulo que tiene por número triangular asociado el 45?

24 $3 \rightarrow 6$ $3 \times 15 = 45$
 $\rightarrow 45$ $45 \div 6 =$

Ilustración 7-28: Error de Santi con origen afectivo y/o emocional en el ítem 23, y de ausencia de sentido en el ítem 24.
 Fuente: Cuestionario 1 de Santi de 1º de bachillerato del ciclo lectivo 2013-2014.

En los ítems del 30 a 35, observamos que Santi vuelve a presentar dificultades para trabajar con letras como número generalizado o como variable (Ilustración 7-29). Interpreta el significado literal de las letras y no es capaz de otorgarle un valor numérico variable.

10. Expresa si las siguientes expresiones son verdaderas: Siempre (S), Nunca (N) o algunas veces (A). En A explicar para qué valores de las letras.

a) $a + b = a + b$ S

30 b) $p + q = p + s$ N

31 c) $h + m = h + 2m$ N

32

Ilustración 7-29: Error de Santi con origen en la ausencia de sentido en los ítems 31 y 32.
 Fuente: Cuestionario 2 de Santi de 1º de bachillerato del ciclo lectivo 2013-2014.

En cuanto al proceso de modelización, observamos que el planteamiento de Santi del problema de la pregunta 13, es bueno, en general, pero que comete un error de distracción,

de origen afectivo y/o emocional al colocar 90 en lugar de 0,90 de euro, y no coloca paréntesis en la expresión “3+p” por lo que no realiza correctamente las operaciones posteriores. Este último error es de origen en un obstáculo. No resuelve el ítem 38, y en el 39 se equivoca en el cálculo de la cantidad de ciruelas, debido al error cometido en el ítem 37 (Ilustración 7-30)

13. En el supermercado un kilo de peras cuesta 90 céntimos de euro; un kilo de plátanos 1,20 euros, el kilo de ciruelas 1,90 euros, el kilo de naranjas 1,80 euros y cada kiwi cuesta b céntimos de euro. La familia de Ana tiene los siguientes gastos en fruta: Compran a la semana 2 kg. de peras, p kilos de plátanos, 3 kilos más de ciruelas que de plátanos y 6 kiwis.

¿Podrías decir cuánto gasta la familia de Ana en fruta en una semana?

37 $90 \times 2 = 180$ $6 \cdot b = 6b$ $(90 \times 2) + (1,20p) + ((3+p) \cdot 1,90) + (6 \cdot b)$ $180 = -6,90p$
 $1,20 \times p = 1,20p$ $180 + 1,20p + 3 + 1,90p + 6b$
 $3p \times 1,90 = 5,70p$ $180 + 1,20p + 5,70p + 6b$

¿Podrías decir cuánto gasta la familia de Ana en fruta al mes suponiendo que todas las semanas consume la misma cantidad de fruta y que un mes tiene 4 semanas?

38

Si el precio por Kiwi es de 0,12 céntimos de euro y compran a la semana 1 kilo de plátanos, ¿Podrías decir cuánto gasta la familia de Ana en fruta en una semana?

39 $6 \times 0,12 = 0,72$ $0,72$
 $1 \times 1,20 = 1,20$ $1,20$
 $2 \times 0,90 = 1,80$ $1,80$
 $3 \times 1,90 = 5,70$ $4,20$
7,92 €

Ilustración 7-30: Error de Santi de origen afectivo y/o emocional y de obstáculo en los ítems 37 y 39. Fuente: Cuestionario 2 de Santi de 1º de bachillerato del ciclo lectivo 2013-2014.

En la prueba de funciones, en general no tuvo dificultades, excepto en la pregunta 4 del ítem “Velocidad” donde como la gran mayoría de los alumnos de la población que se equivocaron en esta pregunta, Santi no identifica que la velocidad es una función del espacio recorrido ($v = f(e)$). Ante la dificultad de este razonamiento, selecciona la que visualmente se parece a la gráfica dada.

Por todo ello podemos concluir que Santi ha tenido ciertas dificultades en la resolución de las pruebas, sobre todo en lo referente al trabajo con el concepto de letra como incógnita específica, o con el concepto de letra como número generalizado o como variable. Su nivel de procesos algebraicos no es el esperado con respecto a la media de la población. Como muestra

la ilustración 7-31, obtiene una nota total de las pruebas de 4,3 que está casi dos puntos por debajo de la media poblacional, que es de 6,1.

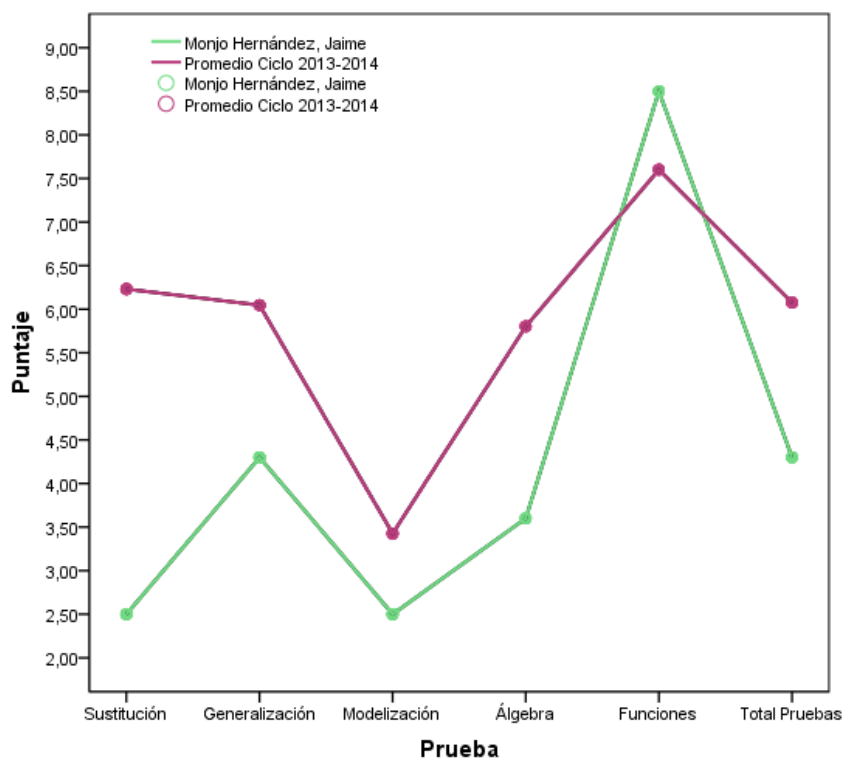


Ilustración 7-31: Diagrama de líneas de las notas resultantes de las pruebas diagnósticas de Santi.

Fuente: Cuestionarios 1, 2 y 3 de Santi, de 1º de bachillerato del ciclo lectivo 2013-2014.

7.3.2. Resultados del proceso de aprendizaje con el modelo FC

Para analizar los resultados obtenidos por Santi en el proceso de aprendizaje con el modelo FC, tendremos en cuenta los siguientes instrumentos: los apuntes que realizó con la plantilla de Cornell (Anexo 6), los cuestionarios online (Anexo 7) y las actividades de clase (Anexo 10)

7.3.2.1. Apuntes de Cornell

Según la categorización que planteamos en el capítulo de metodología para los apuntes realizados con la plantilla de Cornell, observamos que los resultados obtenidos por Santi son:

1.- En la comprensión (C), analizar si los alumnos reconocen las ideas dominantes del vídeo:	
C1	Mantiene la fidelidad al original que se abrevia, sin subjetivismo ni deformaciones. Es claro y concreto.
2.- En la lectura (L): Analizar la legibilidad, claridad y referencia de las notas	
L1	Muy buena (explicita todas las ideas principales claramente y muestra las relaciones entre los temas, ejemplos, etc., mostrando jerarquías si es necesario).
3.- En la expresión (E): analizar el lenguaje propio, la brevedad y la precisión. Así como también el uso de signos convencionales, gráficas, formas geométricas con palabras claves o frases.	
E2	Escrita (Utiliza sólo texto para sintetizar).
4.- En la columna de idea clave o pregunta (P): analizar el nivel de comprensión y síntesis sobre el tema trabajado.	
P2	Buena (realiza una pregunta o palabra clave de síntesis del tema).
5.- En la columna de Síntesis o resumen (S): analizar la elaboración de una síntesis utilizando esquemas, cuadros sinópticos, tablas cronológicas (ayudan a recordar lo esencial).	
S1	Correcta (Hace una buena síntesis, utiliza esquemas, etc.).

Ilustración 7-32: Categorización de los apuntes de Cornell de Santi.

Fuente: Apuntes de Cornell de Santi, de 1º de bachillerato del ciclo lectivo 2013-2014.

En los apuntes observamos que Santi realiza una transcripción textual del contenido del vídeo y que no suele dibujar los gráficos con los que se ha trabajado, ni tampoco realiza esquemas de síntesis. No obstante podemos distinguir cuales son ideas principales de las secundarias.

Para poder añadir esta categorización analizada a los resultados cuantitativos de la evolución del aprendizaje de Santi utilizamos la ilustración 3-39 del capítulo de metodología, donde obtenemos una nota de 8, ya que tres categorías son de nivel 1 y el resto de nivel 2.

7.3.2.2. Cuestionarios online

En cuanto a las tres primeras preguntas de los ocho cuestionarios *online* observamos que, de las categorías planteadas y su correspondiente puntuación descrita en el capítulo de metodología, los resultados de Santi han sido los siguientes (Ilustración 7-33):

Proceso/Cuestionarios	C1	C2	C3	C4	C5	C6	C7	C8
1.- Recordar (Re): analizar si el alumno recuerda y reconoce información e ideas además de principios aproximadamente en la misma forma en que los aprendió.	Re2	Re2	Re2	Re2	Re2	Re2	Re2	Re2
2.- Comprender (Co): analizar si el alumno comprende, esclarece o interpreta la información en base al conocimiento previo.	Co2	Co1	Co2	Co2	Co2	Co1	Co1	Co1
3.- Aplicar (Ap): analizar si el alumno selecciona, transfiere y utiliza datos y principios para elaborar una pregunta interesante sobre el tema visto en el vídeo, aplicando los conceptos aprendidos.	Ap2	Ap2	Ap1	Ap2	Ap2	Ap2	Ap1	Ap2
Puntuación Numérica	5	7	6	5	5	7	8	7

Ilustración 7-33: Categorización de los cuestionarios online de Santi.

Fuente: Elaboración propia a partir de Cuestionarios online y del registro audiovisual de Santi, de 1º de bachillerato del ciclo lectivo 2013-2014 (Anexo 14).

Calculando la media de las puntuaciones obtenidas, según la categorización de las respuestas de los cuestionarios de autoevaluación *online*, Santi obtiene una puntuación de 6,25.

Respecto a las preguntas sobre la experiencia de visualización del vídeo en cuanto a contenido, los resultados de la categorización son:

Preguntas / Cuestionarios	C1	C2	C3	C4	C5	C6	C7	C8
1.- <i>Se ha podido concentrar para ver el vídeo</i>	Si	Si	Si	Si	Si	Si	Si	Si
3.- <i>Número de veces que ha necesitado ver el vídeo para comprender el tema</i>	1	1	1	1	1	1	1	1
4.- <i>Uso de las funciones de "pausa" y "retroceso"</i>	Si	Si	Si	Si	No	Si	Si	No
5.- <i>Dudas</i>	Du3	Du3	Du3	Du3	Du3	Du3	Du3	Du3
6.- <i>Tomar apuntes con la plantilla de Cornell</i>	Si	Si	Si	Si	Si	Si	Si	Si
7.- <i>Nivel de comprensión del tema con el vídeo tutorial</i>	5	4	4	5	5	5	5	5
8.- <i>Nivel de comprensión de un tema en clase</i>	4							
9.- <i>Dificultades en el proceso</i>		No	No	No	No	No	No	No
10.- <i>Tipo de dificultad</i>								
11.- <i>Nota de matemáticas del primer trimestre</i>	Susp enso							

Ilustración 7-34: Categorización de las preguntas de contenido de la visualización de los cuestionarios de autoevaluación online

Fuente: De elaboración propia a partir de Cuestionarios online de Santi, de 1º de bachillerato del ciclo lectivo 2013-2014

Los resultados de la categorización de la ilustración 7-34, nos permiten observar que Santi:

- No ha tenido dificultad para concentrarse para ver los vídeos tutoriales.
- Ha visto solo una vez el vídeo, y que, en general, utiliza las funciones de “pausa” y “retroceso”.
- Expresa no tener dudas. Esto se contradice luego con las dudas que dice tener en la pregunta 3 del cuestionario, donde debe responder a la cuestión “¿Qué pregunta interesante se te ocurre sobre el tema visto?” y en todos los cuestionarios coloca preguntas que muestran que no ha terminado de comprender el contenido del vídeo, aunque algunas son sobre ejemplos con mayor complejidad.
- Utiliza la plantilla de Cornell en todos los vídeos.
- En general expresa tener un nivel simbólico de comprensión de los vídeos tutoriales. Capta las ideas implícitas. Comprende todo con facilidad y en profundidad. Este nivel es el que también tiene en clase.
- No ha tenido dificultades en el proceso de visualización de los vídeos tutoriales.
- Ha suspendido el primer trimestre de matemáticas de primero de bachillerato.

En relación a las preguntas sobre la experiencia de visualización del vídeo en cuanto a su forma para los cuestionarios 7 y 8, los resultados de la categorización son:

Preguntas/Cuestionarios	C7	C8
1.- Respecto al formato del vídeo	Fo2	-
2.- Causas de la elección Fo2	Ca2	-
3.- Opinión sobre la posibilidad de visualizar a los profesores en el vídeo	Negativo	Negativo
4.- Argumentación de la elección de “positivo”	Arg4	Arg4

Ilustración 7-35: Categorización de las preguntas de forma de la visualización de los cuestionarios 7 y 8 de autoevaluación online

Fuente: Elaboración propia a partir de Cuestionarios online de Santi de 1º de bachillerato del ciclo lectivo 2013-2014

Los resultados de la categorización de la ilustración 7-35, nos permiten observar que Santi:

- Prefiere el formato con la voz en *off* del profesor.
- Expresa que el hecho de visualizar a los dos profesores en el vídeo le genera mayor distracción que si solo los escucha. Expresa que la mejor opción sería que el profesor apareciese en una pizarra explicando el contenido. No obstante, si solo habla, piensa que es mejor el formato con la voz en *off*.

7.3.2.3. Actividades de clase

En las actividades observamos que en general las tiene resueltas, pero no hasta el final. Y también que suele dejar sin resolver los últimos dos ejercicios de cada actividad.

No obstante, no observamos sus procesos de cálculo y/o resolución en varias ocasiones, como es el caso del ejercicio 4 de la actividad 2 (Ilustración 7-36), o el ejercicio 1 de la actividad 3 (Ilustración 7-37). Este último se realizaba en parejas, lo que nos da a entender que, o bien copia el resultado del razonamiento realizado por sus compañeros, o bien copia los resultados de la pizarra cuando se corrigen. Por lo que vemos claramente que, a pesar de que Santi en los cuestionarios de autoevaluación dice haber comprendido el tema, cuando debe aplicar los conceptos, no sabe siempre cómo hacerlo.

4 - Calcular el dominio de las funciones radicales:

1 $f(x) = \sqrt[3]{\frac{3x+2}{x+1}}$ $D = \mathbb{R} - \{-1\}$

2 $f(x) = \sqrt[3]{\frac{x}{x^2 - 5x + 6}}$ $D = \mathbb{R} - \{2, 3\}$

3 $f(x) = \sqrt{x-2}$ $D = [-2, \infty)$

4 $f(x) = \sqrt{x^2 - 6x + 8}$ $D = \mathbb{R} - \{2, 4\}$

5 $f(x) = \sqrt{-x^2 + 6x - 8}$ $D = \mathbb{R} - \{2, 4\}$

Ilustración 7-36: Ejercicio 4 de la actividad 2 de Santi.

Fuente: Actividad 2 de Santi, de 1º de bachillerato del ciclo lectivo 2013-2014.

$\left(\sqrt{\frac{f}{g}}\right)(x)$	$\sqrt{\frac{x^2-9}{16-x^2}} = x $	$ x = \sqrt{\frac{x^2-9}{16-x^2}}$
	$Dom\left(\sqrt{\frac{f}{g}}\right) = (-4, 3] \cup [3, 4)$	$Dom = \{-3, 3\}$

2) Ponte con un compañero/a de trabajo. Compara los resultados con él/ella y coloquen la respuesta acordada entre los dos, en la columna de "respuesta final"

Ilustración 7-37: Ejercicio 1 y 2 de la actividad 3 de Santi.

Fuente: Actividad 3 de Santi, de 1º de bachillerato del ciclo lectivo 2013-2014.

En la actividad de refuerzo observamos que ha realizado todos los ejercicios y que, en general, éstos están bastante completos.

Como consecuencia de todo lo observado en las actividades desarrolladas en clase (dossier de trabajo y registro de material audiovisual), aplicando la categorización basada en la relación entre las dimensiones cognitivas y la taxonomía revisada de Bloom, que presentamos en el capítulo de metodología, los resultados obtenidos por Santi son los siguientes:

Categoría	Resultados del análisis de las actividades y material audiovisual
1.- Analizar (An): analizar si el alumno descompone el conocimiento en sus partes y piensa en cómo estas se relacionan con su estructura global.	An2
2.- Evaluar (Ev): analizar si el alumno hace juicios en base a criterios y estándares utilizando la comprobación y la crítica.	Ev2
3.- Crear (Cr): Analizar la habilidad que permite reorganizar los elementos para formar un todo coherente y funcional; generar, planear o producir para reorganizar elementos en un nuevo patrón o estructura.	Cr2
Puntuación	5

Ilustración 7-38: Categorización de las actividades de clase de Santi

Fuente: Elaboración propia a partir de las actividades de Santi y del material audiovisual de las clases registradas, de 1º de bachillerato del ciclo lectivo 2013-2014.

Es decir que, al haber observado que Santi tiene dificultades para resolver la actividad en el momento destinado a ello, que en ocasiones deja que sus compañeros la resuelvan primero, y que considera que al acabar la clase ya ha terminado su tarea y no completa lo que falta por hacer, la puntuación correspondiente planteada para poder cuantificar estos resultados cualitativos y añadirla a la evolución del aprendizaje de Santi, es de 5.

7.3.3. Resultados de la prueba final de la unidad

En la prueba evaluativa final de la unidad (Anexo 12 – 1ª opción de prueba), Santi obtuvo una nota de 4,65 sobre un total de 10 puntos, de acuerdo a la codificación planteada en el capítulo de metodología (Ilustración 7-39):

Nº ejercicio	Objetivos evaluados	Codificación del ejercicio	Puntuación del ítem	Puntuación de Santi
Ejercicio 1	<ul style="list-style-type: none"> Reconocer las funciones reales de variable real, su dominio e imagen. Operar con funciones. Conocer el concepto de función inversa de una función y aplicar un proceso para obtenerla. 	Encuentra la función resultante de dividir $f(x)$ entre $g(x)$.	0,5	0,5
		Encuentra analíticamente el dominio de la función.	0,75	0,75
		Obtiene la función inversa.	0,75	0
		Encuentra el dominio de la función inversa para hallar la imagen de la función.	0,5	0
Ejercicio 2	<ul style="list-style-type: none"> Saber reconocer las propiedades globales de una función: simetría (visual y analíticamente) 	Estudia la simetría (par e impar) analíticamente de la función $f(x)$.	1,25	1
		Estudia la simetría (par e impar) visualmente de la gráfica de la función $g(x)$.	1,25	0
Ejercicio 3	<ul style="list-style-type: none"> Realizar composición de funciones y comprobar las propiedades que verifica esta operación. 	Expresa el número de habitantes en función del tiempo.	1	Ns/Nc
		Encuentra el número de habitantes en ese instante.	0,75	Ns/Nc
		Encuentra el número de habitantes transcurrido un año y seis meses.	0,75	Ns/Nc
Ejercicio 4	<ul style="list-style-type: none"> Reconocer las funciones reales de variable real, su dominio e imagen. Saber reconocer las propiedades globales de una función 	Identifica el dominio e imagen de la función.	0,5	0,5
		Identifica la simetría, continuidad y periodicidad de la función.	0,5	0,5
		Identifica las asíntotas de la función.	0,5	0,4
		Identifica la monotonía, máximos y mínimos de la función.	0,5	0,5
		Identifica la curvatura y puntos de inflexión de la función.	0,5	0,5
Total de puntos de la prueba			10	4,65

Ilustración 7-39: Codificación de los ejercicios de la prueba final de la unidad de Santi.

Fuente: Elaboración propia a partir de la prueba de Santi, de 1º de bachillerato del ciclo lectivo 2013-2014.

En la prueba final observamos que Santi presenta dificultades cuando debe realizar el proceso de resolución trabajando con expresiones algebraicas, como muestra la ilustración 7-40. Esta dificultad ya se había observado en las pruebas diagnósticas y la vimos también en las actividades realizadas. De hecho en los ejercicios en los que debía realizar un desarrollo, no lo hacía y colocaba directamente el resultado.

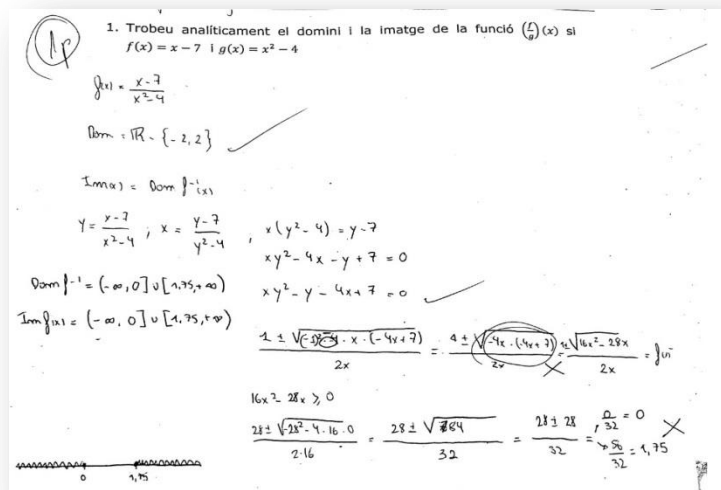


Ilustración 7-40: Ejercicio de dominio e imagen de la prueba final de la unidad de Santi
 Fuente: Elaboración propia a partir de la prueba final de Santi, de 1º de bachillerato del ciclo lectivo 2013-2014.

En el ejercicio de análisis de la simetría presenta dificultades en el análisis de la gráfica, y no resuelve el ejercicio 3 de aplicación de composición de funciones. No obstante, realiza correctamente el análisis de las propiedades de la función a partir de la gráfica.

7.3.4. Evolución de los resultados

En resumen, las calificaciones/puntuaciones obtenidas por Santi en cada uno de los instrumentos y la del resultado global de cada trimestre, han sido:

Etapa	Instrumento	Puntuación (sobre 10)
Metodología tradicional de Enseñanza - Aprendizaje	Nota de matemáticas del 1r Trimestre	4,6
Pruebas diagnósticas iniciales	Prueba diagnóstica de álgebra	3,6
	Prueba diagnóstica de funciones	8,5
Modelo FC de enseñanza-aprendizaje	Apuntes de Cornell	8
	Cuestionarios de autoevaluación	6,25
	Actividades de clase	5
	Prueba final de contenidos	4,65
	Nota de matemáticas del 2n Trimestre	7,1
Metodología tradicional de Enseñanza - Aprendizaje	Nota de matemáticas del 3r Trimestre	7,1

Ilustración 7-41: Tabla con los puntajes obtenidos por Santi en cada instrumento y prueba
Fuente: Elaboración propia

En la evolución del aprendizaje de Santi podemos observar como al comenzar el curso con una metodología tradicional tuvo dificultades para asimilar los conceptos y procedimientos matemáticos nuevos, debido a su deficiencia en el trabajo con fórmulas y expresiones algebraicas, que se pudo detectar en los resultados de las pruebas diagnósticas.

En cuanto a los errores observados por la necesidad de particularización, y la dificultad para encontrar la expresión algebraica que generaliza un patrón y el uso de letras como variables, observamos que Santi aún no ha terminado el paso del estadio de las “generalización concreta o formal temprano” al de “las operaciones formales”, según Piaget y Collin (Fidela Velázquez, 2003).

Aunque la línea de tendencia aumenta en la evolución del aprendizaje de Santi, notamos un cambio en su evolución cuando comienza con la metodología de “*Flipped Classroom*” (ilustración 7-42):

- La utilización del modelo de “*Flipped Classroom*” atiende a sus necesidades de orden y sistematización en el estudio.
- Durante el desarrollo del modelo FC Santi no realiza grandes cambios en cuanto a su forma de trabajar, continúa teniendo problemas para finalizar las actividades y esto perjudica a su rendimiento. No obstante, notamos que después de finalizar con la unidad, su motivación por la materia se

incrementó. Por lo cual, observamos que en los dos últimos trimestres la nota de Santi ha pasado de estar en el 2º cuartil (4,6) al 4º cuartil (7,1).

- De acuerdo a las etapas del aprendizaje planteadas en la Taxonomía de Bloom, observamos que en las tres primeras, Santi presenta ciertas dificultades para comprender, por lo que trabaja y estudia utilizando la memoria. En clase participa, pero en general copia de la pizarra los resultados, sin hacer el esfuerzo de comprender las causas de cada proceso de resolución.

Al desarrollar esta unidad con el modelo FC, el profesor con antelación al examen pudo observar a través de las actividades de clase que Santi tenía serias dificultades para comprender lo que hacía en cada ejercicio, sobre todo en la etapa de “analizar”, lo que luego le perjudicaba en la prueba. Pero el profesor no pudo trabajar con él los errores, puesto que en general adoptaba un rol pasivo en de la clase.

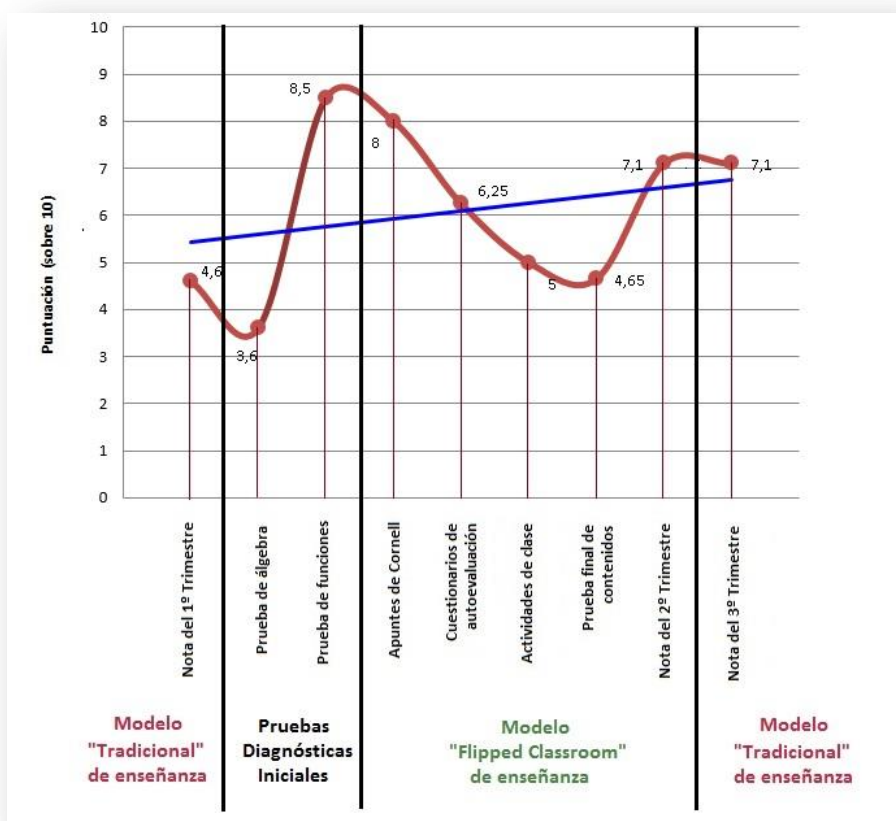


Ilustración 7-42: Evolución del proceso de aprendizaje de Santi con diferentes modelos de enseñanza
Fuente: Elaboración propia

7.3.5. Resultados del cuestionario final sobre el modelo FC

La percepción personal de Santi expresada en el cuestionario de valoración final de la unidad de Funciones trabajada con el modelo FC es la siguiente:

- **Los vídeos tutoriales:** son largos, de fácil comprensión e interactivos. Expresa que el nivel de comprensión de los temas a través de los mismos ha sido bueno. Que para el examen volvió a verlos, al menos 3 de ellos, para repasar, porque tenía dudas en algunos temas. El uso de los vídeos le ayudó a ser más sistemático en el estudio. Expresa que a partir de la teoría vista en los vídeos considera que este instrumento le ha servido para saber qué hacer en cada caso. Piensa que su potencial matemático ha mejorado.
- **Los cuestionarios de autoevaluación:** le servían para comprobar si entendía el contenido del vídeo, porque las preguntas de teoría y las respuestas son las claves del tema.
- **El Web “trescomacatorze”:** expresa que el web le ha ayudado a acceder al material que necesitaba, sobre todo a las actividades resueltas que le ayudaron en el momento de tener que estudiar para la prueba de contenidos.
- **Las clases:** Expresa que la clase introductoria le fue bien para saber de qué trataba el modelo FC. Las que más le gustaron fueron las que trabajó en grupo o en pareja, pero en las que aprendió más fue en las de trabajo personal.
- **El modelo FC de enseñanza-aprendizaje:** Considera que es mejor que el modelo tradicional, porque le permite elaborar el tema a él, porque le obliga a prepararse el tema para la clase y porque le ordena el estudio. Y que gracias al modelo sus resultados académicos han mejorado. Aunque sigue percibiendo que con el modelo FC él ocupa un papel secundario en el aprendizaje y que el principal es el del profesor, expresa que le gustaría que la asignatura se diese así durante todo el curso puesto que sus resultados han mejorado.

7.4. RESULTADOS DEL ESTUDIO DE CASOS: JAVIER

Presentamos ahora los resultados obtenidos por Javier (perteneciente al 3r cuartil de estudio) en las tres etapas de la investigación: pruebas diagnósticas, material de desarrollo de las clases (apuntes de Cornell, dossier de las actividades y registro audiovisual de la clase) y prueba final de contenidos y competencias. Posteriormente realizaremos el análisis de su evolución durante el curso, y por último, comentaremos su percepción sobre el modelo FC con el que realizó la unidad de Funciones.

Javier obtuvo un 6 en la nota del primer trimestre de matemáticas, como resultado de, dos exámenes parciales donde obtuvo (sobre un total de 10) un 4 en el tema de ecuaciones y un 1 en la unidad de inecuaciones, y del examen de evaluación trimestral donde obtuvo un 7,5. Javier tenía dificultades sobre todo para concentrarse y estudiar.

7.4.1. Resultados de las pruebas diagnósticas

Como observamos en la ilustración 7-43, en las pruebas diagnósticas Javier obtuvo notas por encima de la media de la población en las de sustitución y generalización, y por debajo en el proceso de modelización y en funciones.

Pruebas Casos	Notas de las pruebas diagnósticas					
	Sustitución	Generalización	Modelización	Total Álgebra	Funciones	Total Pruebas
Javier	6,7	5,7	0	5,4	9,2	5,9
Media del Ciclo 2013-2014	6,2	6,0	3,4	5,8	7,61	6,1

*Ilustración 7-43: Notas de Javier de las pruebas diagnósticas de Álgebra y Funciones
Fuente: Elaboración propia a partir de los Cuestionarios 1, 2 y 3.*

En la prueba del proceso de algebraico de sustitución Javier no presenta dificultades, en general. En cambio en el de generalización observamos, por ejemplo en el ítem 16, que Javier confunde el concepto de perímetro, y dice que es igual al producto de los lados del pentágono propuesto. En el ítem 19, confunde nuevamente perímetro con área, del triángulo en este caso. En los ítems del 25 al 29, vuelve a equivocarse al pensar que la expresión general de los

números cuadrados es $n \cdot (n + 1)$. No obstante, realiza correctamente los ítems donde debe trabajar con variables y expresiones algebraicas.

En lo que respecta al proceso algebraico de modelización, en el ítem 37 expresa que le faltan datos, aunque alcanza a plantear la expresión algebraica de lo que gasta la familia, pero no acierta en el cálculo al sumar (error de origen afectivo y/o emocional), por lo que arrastra este error a los dos ítems siguientes.

En la prueba de funciones resuelve de forma correcta la mayoría de preguntas.

Podemos concluir que, más allá de que Javier ha tenido ciertos errores en la resolución de las pruebas, sobre todo en lo que respecta a la modelización, el nivel de los procesos algebraicos es el esperado con respecto a la media de la población, incluso en el de funciones, casi dos puntos por encima. Como muestra la ilustración 7-44, obtiene una nota total de las pruebas de 5,9 que está levemente por debajo de la media poblacional, que es de 6,1.

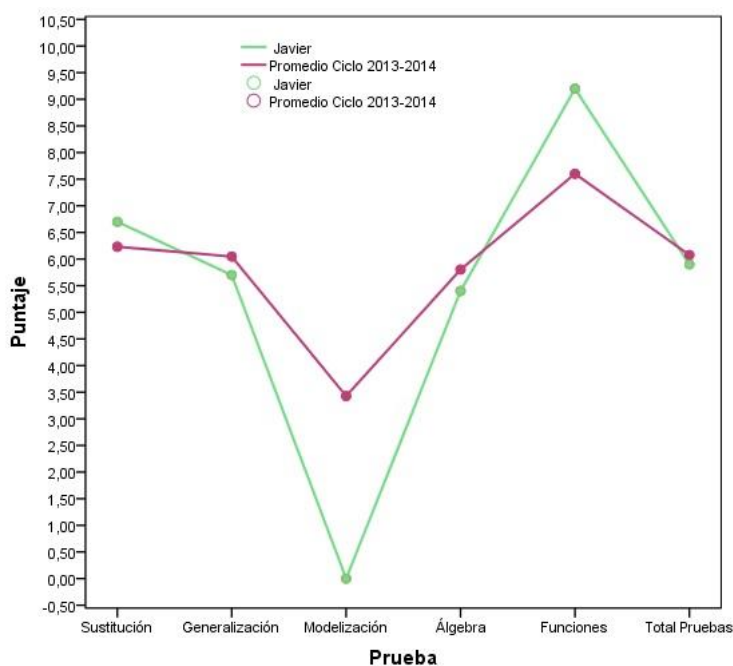


Ilustración 7-44: Diagrama de líneas de las notas resultantes de las pruebas diagnósticas de Javier.

Fuente: Cuestionarios 1, 2 y 3 de Javier, de 1º de bachillerato del ciclo lectivo 2013-2014.

7.4.2. Resultados del proceso de aprendizaje con el modelo FC

Para analizar los resultados obtenidos por Javier en el proceso de aprendizaje con el modelo FC tendremos en cuenta los siguientes instrumentos: los apuntes que realizó con la plantilla de Cornell (Anexo 6), los cuestionarios *online* (Anexo 7) y las actividades de clase (Anexo 10).

7.4.2.1. Apuntes de Cornell

Según la categorización que planteamos en el capítulo de metodología para los apuntes realizados con la plantilla de Cornell, observamos que los resultados obtenidos por Javier son:

1.- En la comprensión (C), analizar si los alumnos reconocen las ideas dominantes del vídeo:	
C1	Mantiene la fidelidad al original que se abrevia, sin subjetivismo ni deformaciones. Es claro y concreto.
2.- En la lectura (L): Analizar la legibilidad, claridad y referencia de las notas	
L2	Buena (explica con claridad las ideas sobre el tema).
3.- En la expresión (E): analizar el lenguaje propio, la brevedad y la precisión. Así como también el uso de signos convencionales, gráficas, formas geométricas con palabras claves o frases.	
E1	Mixta (Utiliza una combinación de texto con símbolos y gráficas para tomar nota).
4.- En la columna de idea clave o pregunta (P): analizar el nivel de comprensión y síntesis sobre el tema trabajado.	
P2	Buena (realiza una pregunta o palabra clave de síntesis del tema).
5.- En la columna de Síntesis o resumen (S): analizar la elaboración de una síntesis utilizando esquemas, cuadros sinópticos, tablas cronológicas (ayudan a recordar lo esencial).	
S2	Parcial (Sólo consigue una síntesis parcial).

Ilustración 7-45: Categorización de los apuntes de Cornell de Javier.

Fuente: Apuntes de Cornell de Javier, de 1º de bachillerato del ciclo lectivo 2013-2014.

Para poder añadir esta categorización analizada, a los resultados cuantitativos de la evolución del aprendizaje de Javier, utilizamos la ilustración 3-39 del capítulo de metodología, donde obtenemos una nota de 7, ya que tiene dos categorías de nivel 1 y tres de nivel 2.

7.4.2.2. Cuestionarios *online*

En cuanto a las tres primeras preguntas de los ocho cuestionarios *online*, observamos que, en las categorías planteadas y su correspondiente puntuación, descrita en el capítulo de metodología, los resultados de Javier han sido (Ilustración 3-40):

Proceso/Cuestionarios	C1	C2	C3	C4	C5	C6	C7	C8
1.- Recordar (Re): analizar si el alumno recuerda y reconoce información e ideas además de principios aproximadamente en la misma forma en que los aprendió.	Re1	Re1	Re1	Re2	Re2	Re1	Re2	Re2
2.- Comprender (Co): analizar si el alumno comprende, esclarece o interpreta la información en base al conocimiento previo.	Co1	Co1	Co1	Co2	Co2	Co1	Co2	Co2
3.- Aplicar (Ap): analizar si el alumno selecciona, transfiere y utiliza datos y principios para elaborar una pregunta interesante sobre el tema visto en el vídeo, aplicando los conceptos aprendidos.	Ap1	Ap3	Ap3	Ap2	Ap3	Ap1	Ap3	Ap3
Puntuación Numérica	10	8	8	5	4	10	4	4

Ilustración 7-46: Categorización de los cuestionarios online de Javier

Fuente: Elaboración propia a partir de Cuestionarios online y del registro audiovisual de Javier, de 1º de bachillerato del ciclo lectivo 2013-2014 (Anexo 14).

Calculando la media de las puntuaciones obtenidas según la categorización de las respuestas de los cuestionarios de autoevaluación *online*, Javier obtiene una puntuación de 6,625.

Respecto a las preguntas sobre la experiencia de visualización del vídeo en cuanto a contenido, los resultados de la categorización son:

Preguntas / Cuestionarios	C1	C2	C3	C4	C5	C6	C7	C8
1.- Se ha podido concentrar para ver el vídeo	Si	Si	Si	Si	Si	Si	No	Si
3.- Número de veces que ha necesitado ver el vídeo para comprender el tema	1	1	1	1	1	1	1	1
4.- Utilización de las funciones de “pausa” y “retroceso”	Si	Si	Si	Si	Si	No	Si	No
5.- Dudas	Du3	Du3	Du3	Du1	Du3	Du3	Du3	Du3
6.- Tomar apuntes con la plantilla de Cornell	Si	Si	Si	Si	Si	Si	Si	Si
7.- Nivel de comprensión del tema con el vídeo tutorial	5	5	5	3	3	5	4	5
8.- Nivel de comprensión de un tema en clase	4							
9.- Dificultades en el proceso		No	No	Si	No	No	No	No
10.- Tipo de dificultad				Di1				
11.- Nota de matemáticas del primer trimestre	Bien							

Ilustración 7-47: Categorización de preguntas de contenido de visualización de cuestionarios de autoevaluación online

Fuente: De elaboración propia a partir de Cuestionarios online de Javier, de 1º de bachillerato del ciclo lectivo 2013-2014

Tras los resultados de la categorización de la ilustración 7-47, observamos que Javier:

- En general no ha tenido dificultad para concentrarse para ver los vídeos tutoriales.
- Ha visto solo una vez el vídeo, y que generalmente utiliza las funciones de “pausa” y “retroceso”.
- Excepto en un vídeo, expresa no tener dudas.
- Utiliza la plantilla de Cornell en todos los vídeos.
- En general expresa tener un nivel simbólico de comprensión de los vídeos tutoriales. Excepto en los vídeos sobre composición de funciones y función inversa, donde su nivel es de comprensión literal del contenido del vídeo. Expresa que en clase su nivel de comprensión es similar.
- En un vídeo ha tenido dificultades en el proceso de visualización de comprensión del contenido.

Respecto a las preguntas sobre la experiencia de visualización del vídeo en cuanto a su forma para los cuestionarios 7 y 8, los resultados de la categorización son:

Preguntas/Cuestionarios	C7	C8
1.- Respecto al formato del vídeo	Fo1	-
2.- Causas de la elección Fo1	Ca2	-
3.- Opinión sobre la posibilidad de visualizar a los profesores en el vídeo	Positivo	Positivo
4.- Argumentación de la elección de “positivo”	Arg4	Arg3

Ilustración 7-48: Categorización de las preguntas de forma de la visualización de los cuestionarios 7 y 8 de autoevaluación online

Fuente: Elaboración propia a partir de Cuestionarios online de Javier, de 1º de bachillerato del ciclo lectivo 2013-2014

Tras los resultados de la categorización de la ilustración 7-48, observamos que Javier:

- Prefiere el formato con dos profesores visibles porque se distrae menos.
- Expresa que se siente representado por uno de los profesores que hace preguntas como las que haría él, aunque expresa que cree que se concentra más con el vídeo en formato voz en *off*.

7.4.2.3. Actividades de clase

Observamos que a Javier, al igual que a muchos de sus compañeros, le cuesta mantener ordenado el material y no perder las actividades realizadas en clase. De las actividades

realizadas sólo tiene tres de siete, y el resto no las encuentra. De las tres que posee (la 4ª, 6ª y 8ª) observamos que en general no muestra tener dificultades en la resolución, excepto en el estudio analítico de la simetría de una función, donde observamos que los ejercicios de la Actividad 6 (Anexo 10) están incompletos. En el resto de actividades observamos que tiene todos los ejercicios resueltos correctamente.

En la actividad de refuerzo vemos dificultad para encontrar el dominio de una función fraccionaria, en la composición de funciones donde confunde qué función debe aplicar en primer lugar si se lo piden $(f \circ g)(x)$. También observamos que no resuelve los problemas de aplicación de conceptos. El resto de ejercicios están resueltos correctamente.

Como consecuencia a todo lo observado en las actividades desarrolladas en clase (dossier de trabajo y registro de material audiovisual), aplicando la categorización basada en la relación entre las dimensiones cognitivas y la taxonomía revisada de Bloom, presentada en el capítulo de metodología, los resultados obtenidos por Javier son los siguientes:

Categoría	Resultados del análisis de las actividades y material audiovisual
1.- Analizar (An): analizar si el alumno descompone el conocimiento en sus partes y piensa en cómo estas se relacionan con su estructura global.	An1
2.- Evaluar (Ev): analizar si el alumno hace juicios en base a criterios y estándares utilizando la comprobación y la crítica.	Ev1
3.- Crear (Cr): Analizar la habilidad que permite reorganizar los elementos para formar un todo coherente y funcional; generar, planear o producir para reorganizar elementos en un nuevo patrón o estructura.	Cr2
Puntuación	9

Ilustración 7-49: Categorización de las actividades de clase de Javier

Fuente: Elaboración propia a partir de las actividades de Javier y del material audiovisual de las clases registradas, de 1º de bachillerato del ciclo lectivo 2013-2014.

Es decir, que al haber observado que Javier:

- Comprende ciertos conceptos o principios y el porqué de ciertos procedimientos o demostraciones;
- Busca y descubre relaciones entre elementos de un problema;
- Resuelve problemas no rutinarios que no han sido estudiados antes;

- Participa en un grupo de redacción, y retroalimenta a los compañeros en cuanto a la organización y lógica de los argumentos;
- Anota las contradicciones que encuentra;
- Revisa el ejercicio para ver si se incluyeron todos los pasos necesarios;
- Critica una resolución si cree que no está bien;
- Prueba alternativas;
- Y necesita ayuda para poder plantear una nueva situación, o inventar, o diseñar una nueva propuesta;

La puntuación correspondiente, planteada para poder cuantificar estos resultados cualitativos y añadirla a la evolución del aprendizaje de Javier, es de 9.

7.4.3. Resultados de la prueba final de la unidad

En la prueba evaluativa final de la unidad (Anexo 12 – 1ª opción) Javier obtuvo una nota de 5,5 sobre un total de 10 puntos, de acuerdo a la codificación planteada en el capítulo de metodología (Ilustración 7-50).

Observamos que tuvo dificultades, al igual que vimos en las actividades de clase, en la simetría de funciones, y en estudiar la curvatura de la función del ejercicio 4. No obstante en general comprendió lo que se le pedía y supo resolverlo.

Nº ejercicio	Objetivos evaluados	Codificación del ejercicio	Puntuación del ítem	Puntuación de Javier
Ejercicio 1	<ul style="list-style-type: none"> Reconocer las funciones reales de variable real, su dominio e imagen. Operar con funciones. Conocer el concepto de función inversa de una función y aplicar un proceso para obtenerla. 	Encuentra la función resultante de dividir $f(x)$ entre $g(x)$.	0,5	0,5
		Encuentra analíticamente el dominio de la función.	0,75	0,25
		Obtiene la función inversa.	0,75	0
		Encuentra el dominio de la función inversa para hallar la imagen de la función.	0,5	0
Ejercicio 2	<ul style="list-style-type: none"> Saber reconocer las propiedades globales de una función: simetría (visual y analíticamente) 	Estudia la simetría (par e impar) analíticamente de la función $f(x)$.	1,25	0,75
		Estudia la simetría (par e impar) visualmente de la gráfica de la función $g(x)$.	1,25	1,25
Ejercicio 3	<ul style="list-style-type: none"> Realizar composición de funciones y comprobar las propiedades que verifica esta operación. 	Expresa el número de habitantes en función del tiempo.	1	1
		Encuentra el número de habitantes en ese instante.	0,75	0,25
		Encuentra el número de habitantes transcurrido un año y seis meses.	0,75	0
Ejercicio 4	<ul style="list-style-type: none"> Reconocer las funciones reales de variable real, su dominio e imagen. Saber reconocer las propiedades globales de una función 	Identifica el dominio e imagen de la función.	0,5	0
		Identifica la simetría, continuidad y periodicidad de la función.	0,5	0,5
		Identifica las asíntotas de la función.	0,5	0,5
		Identifica la monotonía, máximos y mínimos de la función.	0,5	0
		Identifica la curvatura y puntos de inflexión de la función.	0,5	0,5
Total de puntos de la prueba			10	5,5

Ilustración 7-50: Codificación de los ejercicios de la prueba final de la unidad de Javier

Fuente: Elaboración propia a partir de la prueba de Javier, de 1º de bachillerato del ciclo lectivo 2013-2014.

7.4.4. Evolución de los resultados

En resumen, las calificaciones/puntajes obtenidos por Javier con cada uno de los instrumentos y la del resultado global de cada trimestre, han sido:

Etapa	Instrumento	Puntuación (sobre 10)
Metodología tradicional de Enseñanza - Aprendizaje	Nota de matemáticas del 1r Trimestre	6
Pruebas diagnósticas iniciales	Prueba diagnóstica de álgebra	5,4
	Prueba diagnóstica de funciones	9,2
Modelo FC de enseñanza-aprendizaje	Apuntes de Cornell	7
	Cuestionarios de autoevaluación	6,625
	Actividades de clase	9
	Prueba final de contenidos	5,5
	Nota de matemáticas del 2n Trimestre	7,2
Metodología tradicional de Enseñanza - Aprendizaje	Nota de matemáticas del 3r Trimestre	7

Ilustración 7-51: Tabla con los puntajes obtenidos por Javier en cada instrumento y prueba
Fuente: Elaboración propia

Observamos que Javier, en su evolución del aprendizaje, ha aumentado casi un punto desde que comenzó el curso con una metodología tradicional hasta que finalizó el trimestre con el modelo FC. Aunque los resultados de las pruebas diagnósticas fueron un poco irregulares, sobre todo en el proceso de modelización, muestran que Javier tiene un nivel de razonamiento algebraico muy similar al de la media de la población, y que por ello, de acuerdo a la investigación realizada por Ruano y Socas, como comentamos en el marco referencial, se sitúa en la franja de la normalidad.

En cuanto a los errores observados, vemos que Javier aún está en el proceso de paso del “estadio formal temprano” al de “las operaciones formales”, según Piaget y Collin (Fidela Velázquez, 2003).

En la ilustración 7-52, que nos muestra la evolución del aprendizaje de Javier, observamos que la línea de tendencia aumenta. Durante las clases con el modelo FC, vemos que:

- La utilización del modelo de “*Flipped Classroom*” atiende a sus necesidades de orden y sistematización en el estudio, pues cada día debe preparar las clases con anticipación y tiene acceso a todo el material necesario para estudiar.
- El resultado de la prueba final, no es el esperado. Esto nos muestra que Javier a pesar de disponer de todo el material necesario y ser constante en el trabajo, no estudia de forma profunda para poder asimilar los contenidos completamente y así obtener mejores resultados.

- De acuerdo a las etapas del aprendizaje planteadas por la Taxonomía de Bloom, observamos que en las tres primeras Javier no presenta dificultades para recordar y comprender. No obstante, su desorden personal perjudica el desarrollo esperado en las etapas de “aplicar” y por consiguiente en la de “evaluar”, por este motivo su rendimiento esperado en las pruebas disminuye alrededor de un 40%.
- La evolución de Javier ha sido progresiva, y aunque no ha alcanzado a pasar al 4º cuartil, su potencial matemático ha aumentado en cuanto a calificación global, ya que pasa de tener “Bien” a “Notable”.

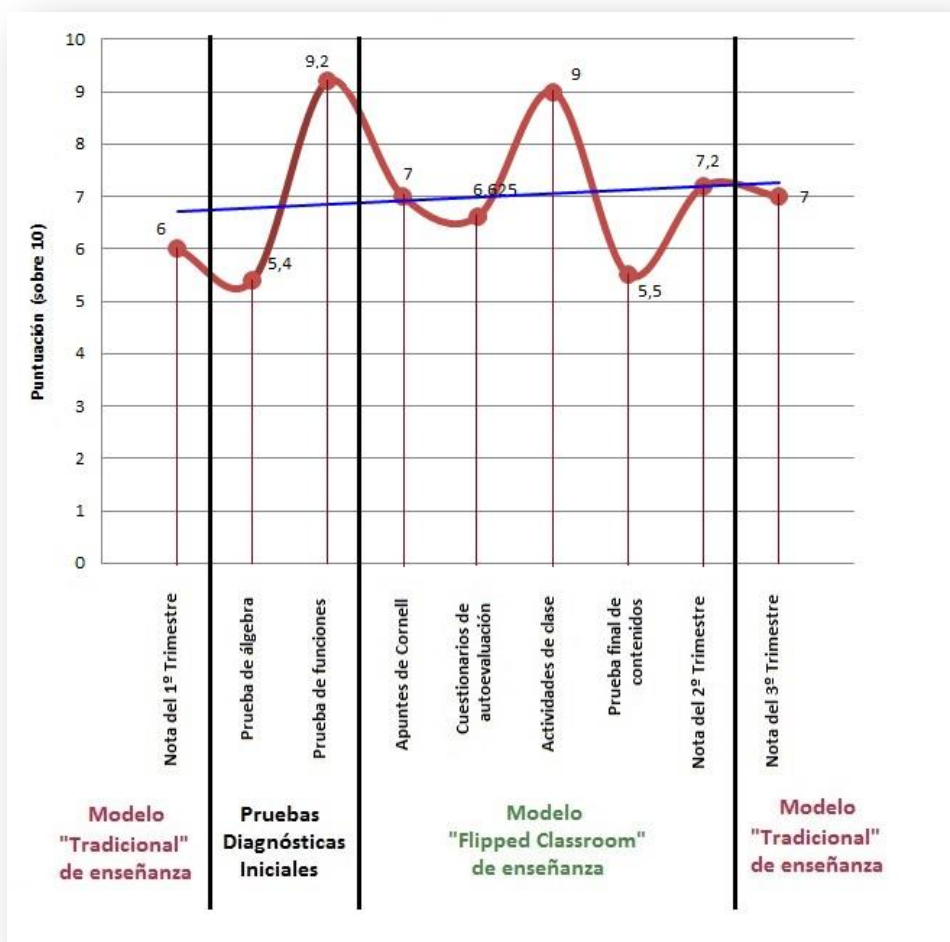


Ilustración 7-52: Evolución del proceso de aprendizaje de Javier con diferentes modelos de enseñanza

Fuente: Elaboración propia

7.4.5. Resultados del cuestionario final sobre el modelo FC

La percepción personal de Javier, expresada en el cuestionario de valoración final de la unidad de Funciones trabajada con el modelo FC es la siguiente:

- **Los vídeos tutoriales:** Expresa que los vídeos le parecieron entretenidos, de fácil comprensión e interactivos. Valora como muy bueno su nivel de comprensión a través de ellos. Los utilizó nuevamente para estudiar para la prueba de contenidos, para repasar. Este sistema le ayudó a ser más riguroso con el estudio. Expresa que la teoría vista en los vídeos le ha servido para hacer generalizaciones, y para encontrar qué hacer en casos particulares. Piensa que con los vídeos su potencial matemático ha mejorado. Observa que una limitación de los vídeos es que si tiene alguna duda debe esperar a la clase siguiente.
- **Los cuestionarios de autoevaluación:** Expresa que le han servido para comprobar que lo que había entendido con el vídeo estaba bien y que si fuesen voluntarios los haría igualmente.
- **El Web “trescomacatorze”:** expresa que el web le ha ayudado a organizar el estudio, que le ha sido más fácil acceder al material con el que debe estudiar y que ha utilizado las actividades resueltas para estudiar para la prueba final.
- **Las clases:** Expresa que la clase introductoria le sirvió para familiarizarse con el nuevo modelo, y que pensó que sería fácil trabajar con él. La guía que le entregaron le sirvió para ver lo que tenía que hacer en cada momento. Aunque las actividades que más le gustaron fueron las de trabajo en grupo donde corregían pruebas como si fuesen profesores (Actividad 5, Anexo 10), dice que aprende más cuando trabaja individualmente, porque cada uno tiene ritmos diferentes de aprendizaje.
- **El modelo FC de enseñanza-aprendizaje:** expresa que el modelo FC lo considera mejor que la metodología tradicional de clase porque le obliga a prepararse el tema para la siguiente clase, y porque la claridad de los vídeos le

ayudan a comprender mejor el tema. Piensa que el curso que viene cuando necesite utilizar este tema en 2º de bachillerato recordará mejor el contenido de la unidad. Expresa que además, el hecho de utilizar las TIC es una forma de progresar. Con este modelo de enseñanza, se ha sentido como el protagonista de la obra, y otorga al profesor el rol de director y/o escenógrafo. Expresa que le gustaría que durante el curso hubiesen actividades con una metodología y con otra, pero que habría que detectar que temas se trabajarían mejor con FC.

7.5. RESULTADOS DEL ESTUDIO DE CASOS: MARIA F

Presentamos ahora los resultados obtenidos por María F (perteneciente al 4º cuartil de estudio) en las tres etapas de la investigación: pruebas diagnósticas, material de desarrollo de las clases (apuntes de Cornell, dossier de las actividades y registro audiovisual de la clase) y prueba final de contenidos y competencias. Posteriormente realizaremos el análisis de la evolución de María F durante el curso, y por último, comentaremos su percepción sobre el modelo FC con el que realizó la unidad de funciones.

María F obtuvo un 9,6 en la nota del primer trimestre de matemáticas, como resultado de un examen parcial donde obtuvo (sobre un total de 10) un 9,85 en la unidad de inecuaciones (estuvo ausente en el primero) y del examen de evaluación trimestral con un 9,25.

7.5.1. Resultados de las pruebas diagnósticas

Como observamos en la ilustración 7-53, María F obtuvo notas muy por encima de la media en todas las pruebas diagnósticas.

Pruebas Casos	Notas de las pruebas diagnósticas					
	Sustitución	Generalización	Modelización	Total Álgebra	Funciones	Total Pruebas
María F	9,2	7,6	7,5	8,1	8,5	8,1
Media del Ciclo 2013-2014	6,2	6,0	3,4	5,8	7,61	6,1

*Ilustración 7-53: Notas de María F de las pruebas diagnósticas de Álgebra y Funciones
Fuente: Elaboración propia a partir de los Cuestionarios 1, 2 y 3.*

En el proceso algebraico de sustitución no observamos dificultades. En los ítems 13, 14 y 15 correspondientes al proceso algebraico de generalización solo observamos que confunde multiplicación con potencia en el cálculo de áreas, error con origen en la ausencia de sentido. El resto lo resuelve todo correctamente.

En el proceso algebraico de modelización (Cuestionario 2, Anexo 2), realiza correctamente el planteamiento de la expresión algebraica de los problemas de los ítems 36 y 37, pero no responde al 38, porque expresa que le faltan datos. Como vimos en el capítulo 5, esto se debe a un error de origen de ausencia de sentido, por no identificar que una cantidad se puede

expresar con letras que pueden tomar diferentes valores. No obstante en el ítem 28, cuando ya tiene el valor numérico, entonces resuelve correctamente el ejercicio.

En la prueba de funciones resuelve en general todo de forma correcta.

Podemos concluir que más allá de que María F ha tenido alguna dificultad en modelización, los resultados están por encima de lo esperado con respecto a la media de la población. Como muestra la ilustración 7-54, obtiene una nota total de las pruebas de 8,1 que está muy por encima de la media poblacional que es de 6,1.

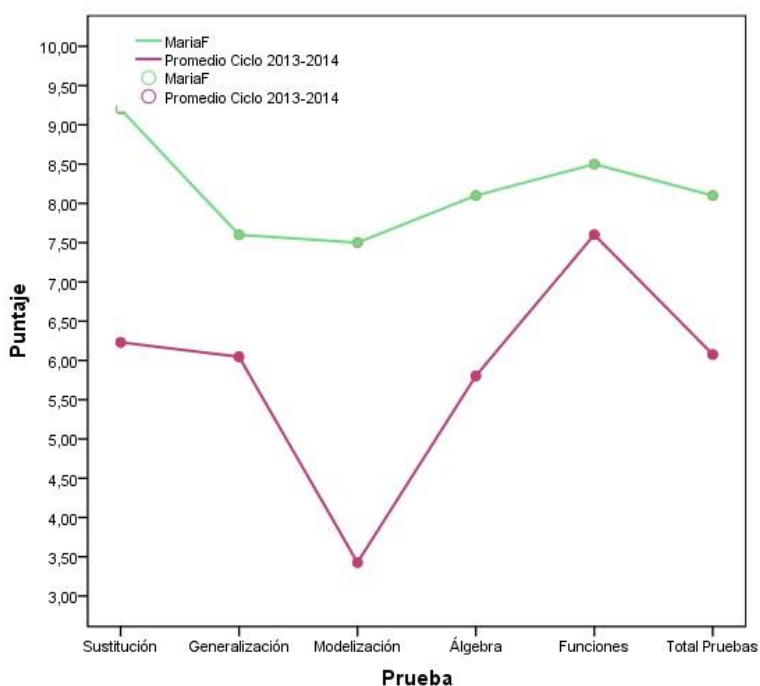


Ilustración 7-54: Diagrama de líneas de las notas resultantes de las pruebas diagnósticas de María F.

Fuente: Cuestionarios 1,2 y 3 de María F, de 1º de bachillerato del ciclo lectivo 2013-2014.

7.5.2. Resultados del proceso de aprendizaje con el modelo FC

Para analizar los resultados obtenidos del proceso de aprendizaje con el modelo FC de María F, tendremos en cuenta los siguientes instrumentos: los apuntes que realizó con la plantilla de Cornell (Anexo 6), los cuestionarios *online* (Anexo 7) y las actividades de clase (Anexo 10).

7.5.2.1. Apuntes de Cornell

Según la categorización que planteamos en el capítulo de metodología para los apuntes realizados con la plantilla de Cornell, observamos que los resultados obtenidos por María F son los siguientes:

1.- En la comprensión (C), analizar si los alumnos reconocen las ideas dominantes del vídeo:	
C1	Mantiene la fidelidad al original que se abrevia, sin subjetivismo ni deformaciones. Es claro y concreto.
2.- En la lectura (L): Analizar la legibilidad, claridad y referencia de las notas	
L1	Muy buena (explicita todas las ideas principales claramente y muestra las relaciones entre los temas, ejemplos, etc., mostrando jerarquías si es necesario).
3.- En la expresión (E): analizar el lenguaje propio, la brevedad y la precisión. Así como también el uso de signos convencionales, gráficas, formas geométricas con palabras claves o frases.	
E1	Mixta (Utiliza una combinación de texto con símbolos y gráficas para tomar nota).
4.- En la columna de idea clave o pregunta (P): analizar el nivel de comprensión y síntesis sobre el tema trabajado.	
P2	Buena (realiza una pregunta o palabra clave de síntesis del tema).
5.- En la columna de Síntesis o resumen (S): analizar la elaboración de una síntesis utilizando esquemas, cuadros sinópticos, tablas cronológicas (ayudan a recordar lo esencial).	
S2	Parcial (Sólo consigue una síntesis parcial).

Ilustración 7-55: Categorización de los apuntes de Cornell de María F.

Fuente: Apuntes de Cornell de María F, de 1º de bachillerato del ciclo lectivo 2013-2014.

Para poder añadir esta categorización analizada, a los resultados cuantitativos de la evolución del aprendizaje de María F, utilizamos la ilustración 3-39 del capítulo de metodología, donde obtenemos una nota de 8, ya que 3 categorías son de nivel 1, y dos de nivel 2.

7.5.2.2. Cuestionarios online

En cuanto a las tres primeras preguntas de los ocho cuestionarios *online* observamos que, de las categorías planteadas y su correspondiente puntuación descrita en el capítulo de metodología, los resultados de María F han sido (Ilustración 3-39):

Proceso/Cuestionarios	C1	C2	C3	C4	C5	C6	C7	C8
1.- Recordar (Re): analizar si el alumno recuerda y reconoce información e ideas además de principios aproximadamente en la misma forma en que los aprendió.	Re2	Re1	Re1	Re2	Re2	Re1	Re2	Re2
2.- Comprender (Co): analizar si el alumno comprende, esclarece o interpreta la información en base al conocimiento previo.	Co2	Co1	Co1	Co2	Co2	Co1	Co2	Co2
3.- Aplicar (Ap): analizar si el alumno selecciona, transfiere y utiliza datos y principios para elaborar una pregunta interesante sobre el tema visto en el vídeo, aplicando los conceptos aprendidos.	Ap1	Ap2	Ap3	Ap2	Ap2	Ap2	Ap2	Ap2
Puntuación Numérica	6	9	8	5	5	9	5	5

Ilustración 7-56: Categorización de los cuestionarios online de María F.

Fuente: Elaboración propia a partir de Cuestionarios online y del registro audiovisual de María F, de 1º de bachillerato del ciclo lectivo 2013-2014 (Anexo 14).

Calculando la media de las puntuaciones obtenidas según la categorización de las respuestas de los cuestionarios de autoevaluación *online*, María F obtiene una puntuación de 6,5.

En relación a las preguntas sobre la experiencia de visualización del vídeo en cuanto a contenido, los resultados de la categorización son:

Preguntas / Cuestionarios	C1	C2	C3	C4	C5	C6	C7	C8
1.- Se ha podido concentrar para ver el vídeo	Si	Si	Si	Si	Si	Si	Si	Si
2.- Causas de distracción								
3.- Número de veces que ha necesitado ver el vídeo para comprender el tema	1	1	1	1	1	1	1	1
4.- Utilización de las funciones de “pausa” y “retroceso”	No	No	Si	Si	Si	No	Si	No
5.- Dudas	Du3	Du3	Du3	Du1	Du1	Du2	Du3	Du3
6.- Tomar apuntes con la plantilla de Cornell	Si	Si	Si	Si	Si	Si	Si	Si
7.- Nivel de comprensión del tema con el vídeo tutorial	5	4	5	4	4	5	5	4
8.- Nivel de comprensión de un tema en clase	5							
9.- Dificultades en el proceso		No	No	No	No	Si	-	No
10.- Tipo de dificultad						Di1		
11.- Nota de matemáticas del primer trimestre	Exce-lente							

Ilustración 7-57: Categorización de las preguntas de contenido de la visualización de los cuestionarios de autoevaluación online

Fuente: Elaboración propia a partir de Cuestionarios online de María F, de 1º de bachillerato del ciclo lectivo 2013-2014

Tras los resultados de la categorización de la ilustración 7-57, observamos que María F:

- No ha tenido dificultad para concentrarse para ver los vídeos tutoriales.
- Ha visto solo una vez el vídeo, y que utiliza en ocasiones las funciones de “pausa” y “retroceso”.
- Expresa tener dudas en los vídeos con contenidos nuevos, como la composición de funciones y función inversa.
- Utiliza la plantilla de Cornell en todos los vídeos.
- En general expresa tener un nivel simbólico de comprensión de los vídeos tutoriales. Capta las ideas implícitas. Comprende todo con facilidad y en profundidad. Expresa que en clase su nivel de comprensión es similar.

Respecto a las preguntas sobre la experiencia de visualización del vídeo en cuanto a su forma para los cuestionarios 7 y 8, los resultados de la categorización son:

Preguntas/Cuestionarios	C7	C8
1.- Respecto al formato del vídeo	Fo2	-
2.- Causas de la elección Fo2	Ca3	-
3.- Opinión sobre la posibilidad de visualizar a los profesores en el vídeo	Positivo	Positivo
4.- Argumentación de la elección de “positivo”	Arg7	Arg7

Ilustración 7-58: Categorización de las preguntas de forma de la visualización de los cuestionarios 7 y 8 de autoevaluación online
Fuente: Elaboración propia a partir de Cuestionarios online de María F, de 1º de bachillerato del ciclo lectivo 2013-2014

De los resultados de la categorización de la ilustración 7-58, observamos que María F:

- Prefiere el formato con la voz en *off* del profesor porque entiende mejor el tema.
- Expresa que la posibilidad de visualizar a los profesores en el vídeo y que la interacción entre ellos simule el diálogo alumno-profesor, y las preguntas que realiza uno de ellos ayuda a resolver dudas con más facilidad.

7.5.2.3. Actividades de clase

María F tiene todo su material ordenado y al día. Observamos que en general todo está resuelto correctamente. En la actividad de refuerzo vemos que no tiene dificultades para resolverla individualmente.

Como conclusión de todo lo observado en las actividades desarrolladas en clase (dossier de trabajo y registro de material audiovisual), aplicando la categorización basada en la relación entre las dimensiones cognitivas y la taxonomía revisada de Bloom, presentada en el capítulo de metodología, los resultados obtenidos por María F son los siguientes:

Categoría	Resultados del análisis de las actividades y material audiovisual
1.- Analizar (An): analizar si el alumno descompone el conocimiento en sus partes y piensa en cómo estas se relacionan con su estructura global.	An1
2.- Evaluar (Ev): analizar si el alumno hace juicios en base a criterios y estándares utilizando la comprobación y la crítica.	Ev1
3.- Crear (Cr): Analizar la habilidad que permite reorganizar los elementos para formar un todo coherente y funcional; generar, planear o producir para reorganizar elementos en un nuevo patrón o estructura.	Cr1
Puntuación	10

Ilustración 7-59: Categorización de las actividades de clase de María F

Fuente: Elaboración propia a partir de las actividades de María F y del material audiovisual de las clases registradas, de 1º de bachillerato del ciclo lectivo 2013-2014.

De lo que se desprende del registro audiovisual vemos que participa en clase en el trabajo en grupo y que en muchas ocasiones resuelve el ejercicio individualmente y luego lo comparte con sus compañeros. Es un referente en el grupo.

En resumen, observamos que María F:

- Comprende ciertos conceptos o principios y el porqué de ciertos procedimientos o demostraciones.
- Busca y descubre relaciones entre elementos de un problema.
- Participa en un grupo de redacción, y retroalimenta a los compañeros en cuanto a la organización y lógica de los argumentos.
- Anota las contradicciones que encuentra.
- Revisa el ejercicio para ver si se incluyeron todos los pasos necesarios.
- Critica una resolución si cree que no está bien.
- Puede plantear una nueva situación, o inventar, o diseñar una nueva propuesta.

Por lo que la puntuación correspondiente planteada para poder cuantificar estos resultados cualitativos y añadirla a la evolución del aprendizaje de María F, es de 10.

7.5.3. Resultados de la prueba final de la unidad

En la prueba evaluativa final de la unidad (Anexo 12 – 1ª opción de prueba) María F obtuvo una nota de 9 sobre un total de 10 puntos, de acuerdo a la codificación planteada en el capítulo de metodología (Ilustración 7-60).

Observamos que las dificultades se debieron a errores con origen afectivo y/o emocional.

Nº ejercicio	Objetivos evaluados	Codificación del ejercicio	Puntuación del ítem	Puntuación de María F
Ejercicio 1	<ul style="list-style-type: none"> Reconocer las funciones reales de variable real, su dominio e imagen. Operar con funciones. Conocer el concepto de función inversa de una función y aplicar un proceso para obtenerla. 	Encuentra la función resultante de dividir $f(x)$ entre $g(x)$.	0,5	0,5
		Encuentra analíticamente el dominio de la función.	0,75	0,75
		Obtiene la función inversa.	0,75	0,75
		Encuentra el dominio de la función inversa para hallar la imagen de la función.	0,5	0,35
Ejercicio 2	<ul style="list-style-type: none"> Saber reconocer las propiedades globales de una función: simetría (visual y analíticamente) 	Estudia la simetría (par e impar) analíticamente de la función $f(x)$.	1,25	1,25
		Estudia la simetría (par e impar) visualmente de la gráfica de la función $g(x)$.	1,25	1,25
Ejercicio 3	<ul style="list-style-type: none"> Realizar composición de funciones y comprobar las propiedades que verifica esta operación. 	Expresa el número de habitantes en función del tiempo.	1	1
		Encuentra el número de habitantes en ese instante.	0,75	0,75
		Encuentra el número de habitantes transcurrido un año y seis meses.	0,75	0,75
Ejercicio 4	<ul style="list-style-type: none"> Reconocer las funciones reales de variable real, su dominio e imagen. Saber reconocer las propiedades globales de una función 	Identifica el dominio e imagen de la función.	0,5	0,4
		Identifica la simetría, continuidad y periodicidad de la función.	0,5	0,5
		Identifica las asíntotas de la función.	0,5	0
		Identifica la monotonía, máximos y mínimos de la función.	0,5	0,5
		Identifica la curvatura y puntos de inflexión de la función.	0,5	0,5
Total de puntos de la prueba			10	9

Ilustración 7-60: Codificación de los ejercicios de la prueba final de la unidad de María F

Fuente: Elaboración propia a partir de la prueba de María F, de 1º de bachillerato del ciclo lectivo 2013-2014.

7.5.4. Evolución de los resultados

En resumen, las calificaciones/puntuaciones obtenidas por María F con cada uno de los instrumentos y la del resultado global de cada trimestre, han sido:

Etapa	Instrumento	Puntuación (sobre 10)
Metodología tradicional de Enseñanza - Aprendizaje	Nota de matemáticas del 1r Trimestre	9,6
Pruebas diagnósticas iniciales	Prueba diagnóstica de álgebra	8,1
	Prueba diagnóstica de funciones	8,5
Modelo FC de enseñanza-aprendizaje	Apuntes de Cornell	8
	Cuestionarios de autoevaluación	6,5
	Actividades de clase	10
	Prueba final de contenidos	9
	Nota de matemáticas del 2n Trimestre	8,7
Metodología tradicional de Enseñanza - Aprendizaje	Nota de matemáticas del 3r Trimestre	7,7

*Ilustración 7-61: Tabla con los puntajes obtenidos por María F en cada instrumento y prueba
Fuente: Elaboración propia*

En la evolución del aprendizaje de María F podemos observar que ha mantenido su rendimiento desde que comenzó el curso con una metodología tradicional hasta la prueba final de contenidos del modelo FC. Aunque los resultados de las pruebas diagnósticas de generalización y modelización no están en los resultados esperados en su caso, observamos que tiene un nivel de razonamiento algebraico por encima de la media de la población en todo momento. En cuanto a los errores observados, vemos que son por ausencia de sentido debido a algún concepto mal aprendido en aritmética. No obstante, todo lo analizado nos muestra que María F se encuentra en el inicio del estadio de “las operaciones formales”, según Piaget y Collin (Fidela Velázquez, 2003).

La línea de tendencia nos muestra que la evolución de María F ha sido positiva durante todo el curso, excepto en el último trimestre donde presenta algún tipo de dificultad (ilustración 7-62):

- La utilización de la metodología de “*Flipped Classroom*” le ayuda a ponerse a prueba en clase. María F estaba acostumbrada a trabajar y estudiar mucho, pero en general lo hacía de memoria. Por lo que con este modelo de enseñanza, debe explicar al resto de sus compañeros cuando trabaja en grupo. Esto le obliga a asimilar los contenidos a un nivel más profundo, comprendiendo los conceptos y las relaciones entre ellos.
- De acuerdo a las etapas del aprendizaje planteadas por la Taxonomía de Bloom, observamos que María F no presenta dificultades. No obstante, observamos que en la metodología tradicional las carencias que quedaban de la etapa de “comprensión”, ella las remediaba memorizando. Con esta metodología como el propio “hacer” le obliga a realizar las etapas correctamente, los resultados de los exámenes globales disminuyen. Pero probablemente, María F recuerde los contenidos aprendidos en todas las etapas, en mayor medida que aquellos en los que se sirvió de la memoria para realizarlos.
- La evolución de María F ha sido buena, puesto que al final de la unidad de Funciones se ha mantenido en el mismo cuartil de notas, incluso ha mejorado su forma de asimilación de conceptos.

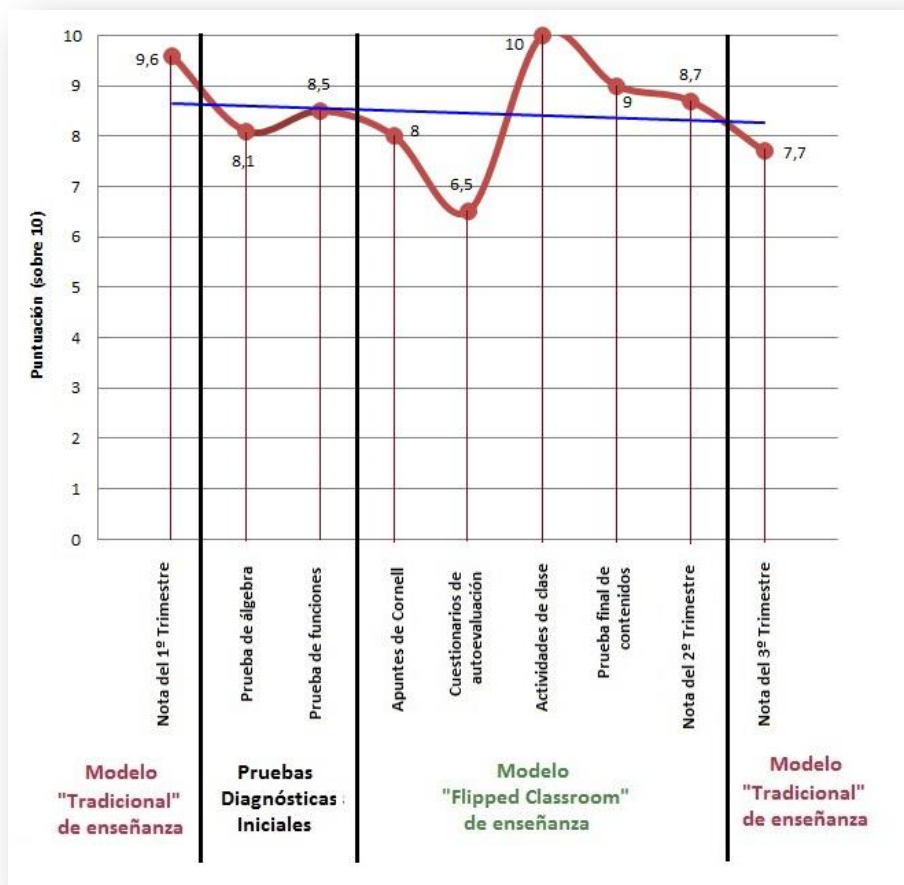


Ilustración 7-62: Evolución del proceso de aprendizaje de María F con diferentes modelos de enseñanza
Fuente: Elaboración propia

7.5.5. Resultados del cuestionario final sobre el modelo FC

La percepción personal de María F, expresada en el cuestionario de valoración final de la unidad de Funciones trabajada con el modelo FC, es la siguiente:

- Los vídeos tutoriales:** le resultaron entretenidos, de fácil comprensión y largos. Expresa que no le aportaron todo el contenido suficiente para aprender el tema de funciones, pero que su nivel de comprensión a través de los mismos fue bueno. Para la prueba final no necesitó volver a verlos. Expresa que los vídeos no le ayudaron a saber cómo aplicar la teoría en cada caso y que su potencial matemático ha empeorado

- **Los cuestionarios de autoevaluación:** si no hubiesen sido obligatorios los hubiese realizado igualmente. Piensa que le ayudan a tener la teoría ordenada y saber qué es lo prioritario.
- **El Web “trescomacatorze”:** califica al web como una herramienta buena para el aprendizaje de las matemáticas, no obstante expresa que la utilizó para lo imprescindible.
- **Las clases:** Expresa que la clase introductoria le sirvió para saber en qué consistía la nueva metodología de clase y que pensó que sería fácil. Las clases que más le gustaron fueron aquellas en las que trabajó en grupo porque se le hacían más cortas y entretenidas, y porque aprendía más, sobre todo en las que trabajaba en pareja.
- **El modelo FC de enseñanza-aprendizaje:** Prefiere la metodología tradicional de clase porque con los vídeos le parece que entiende menos los conceptos. Percibe el hecho de trabajar con las TIC como una complicación. Piensa que ha ocupado un rol secundario y que el profesor ha seguido teniendo el de director. Expresa que prefiere continuar trabajando con la metodología tradicional porque entiende mejor las cosas y puede preguntar al momento cuando le surge alguna duda.

7.6. RESUMEN

A continuación realizamos un resumen de los resultados observados en cada prueba e instrumento de los cuatro alumnos de la modalidad de Ciencias Sociales.

7.6.1. Resultados de las pruebas diagnósticas

De los cuatro casos de estudio analizados de la modalidad de Ciencias Sociales, observamos que los resultados de las pruebas se corresponden con el cuartil al que pertenece cada alumno seleccionados por la nota del 1º trimestre de matemáticas (Ilustración 7-63):

Pruebas Casos	Notas de las pruebas diagnósticas					
	Sustitución	Generalización	Modelización	Total Álgebra	Funciones	Total Pruebas
Karla	0,4	3	0	1,9	6,2	2,5
Santi	2,5	4,3	2,5	3,6	8,5	4,3
Javier	6,7	5,7	0	5,4	9,2	5,9
MariaF	9,2	7,6	7,5	8,1	8,5	8,1
Media del Ciclo 2013-2014	6,2	6,0	3,4	5,8	7,61	6,1

Ilustración 7-63: Notas de los alumnos de la muestra de la modalidad de Ciencias Sociales de las pruebas diagnósticas de Álgebra y Funciones.

Fuente: Elaboración propia a partir de los Cuestionarios 1, 2 y 3.

Los tipos de errores observados en los dos primeros casos de estudio (Karla y Santi) podemos concluir que el origen de los errores cometidos proviene de la necesidad de particularizar, de clausura y de dificultad para trabajar con expresiones con letras, cuya interpretación es la de su sentido literal y no el de variable. Ello nos permite concluir que la mayoría de errores cometidos tienen su origen en un obstáculo o en la ausencia de sentido.

Por otra parte, observamos menor cantidad de errores en los dos casos de estudio pertenecientes al 3º y 4º cuartil (Javier y MariaF). Y los que hay en general son de origen en la ausencia de sentido, por algún concepto aritmético aprendido erróneamente anteriormente, o por distracción u olvido debido a un origen afectivo y/o emocional.

7.6.2. Resultados del proceso de aprendizaje con el modelo FC

Presentamos a continuación un resumen de los resultados observados de los cuatro alumnos durante el proceso de enseñanza-aprendizaje con el modelo FC, medidos a partir de los apuntes de Cornell (Anexo 6), los cuestionarios *online* (Anexo 7) y las actividades de clase (Anexo 10).

7.6.2.1. Apuntes de Cornell

Los apuntes de Cornell ha resultado ser un gran instrumento para poder visualizar como los cuatro alumnos de la muestra organizan los conceptos en su cabeza, qué les parece importante y qué no, cómo jerarquizan los contenidos, si utilizan diagramas o gráficos para sintetizar información, si les han quedado dudas, si pueden dar un paso más allá y aplicar el contenido que acaban de ver a nuevas situaciones, y, por último, si saben resumir e identificar las ideas principales de cada tema. Además se muestra que les han servido para ordenar y sistematizar su forma de tomar notas.

Este instrumento nos ha mostrado que los dos alumnos correspondientes al 1r y al 2º cuartil (sobre todo la alumna del 1r cuartil) tienen grandes dificultades en cuanto a la extracción de las ideas principales y al reconocimiento de las relaciones entre los conceptos aprendidos. Un indicador de ello es que, en ambos casos, observamos en general una transcripción textual del contenido del vídeo tutorial, sin un orden específico. Como lo que observamos a nivel escrito, es un fiel reflejo de sus ideas a nivel mental, los apuntes de Cornell permiten que luego en clase, el profesor al revisarlos, pueda trabajar con ellos para reestructurar los apuntes y por ende las ideas conceptuales equivocadas.

En cuanto a los alumnos del 3r y 4º cuartil, observamos que sus apuntes mantienen la fidelidad del contenido explicado en el vídeo, sin subjetivismo ni deformaciones. Son claros y concretos. Explicitan todas las ideas principales claramente y muestran las relaciones entre los temas, ejemplos, etc., mostrando jerarquías si es necesario. Utilizan una combinación de texto con símbolos y gráficos para tomar nota. Donde observamos que aún queda espacio para trabajar es en el hecho de que en general realizan preguntas correspondientes a una duda que les ha quedado, pero en contadas ocasiones la pregunta es de aplicación del tema y no responde a dudas generadas por el mismo vídeo. Las síntesis suelen ser parciales.

7.6.2.2. Cuestionarios *online*

En cuanto a los cuestionarios *online*, observamos que los resultados son muy similares en los cuatro casos de estudio. En los temas fáciles las respuestas a las preguntas de aplicación de lo visto, han sido correctas. Pero en aquellos con mayor dificultad, como en el de composición de funciones, función inversa y simetría, ha habido más dudas y respuestas incorrectas.

Observamos que esta herramienta es muy potente para el profesor para detectar antes de entrar a clase si el tema presenta dificultad para los alumnos y dónde está esta posible dificultad, para poder luego trabajarla con ellos en clase.

En cuanto al nivel de comprensión a través de los vídeos, tres de ellos expresan entender los conceptos mejor a través de los mismos. Expresan tener un nivel simbólico de comprensión de los vídeos tutoriales. Captan las ideas implícitas. Comprenden todo con facilidad y en profundidad. Expresan que en clase su nivel de comprensión es más bajo. Excepto la alumna perteneciente al 4º cuartil, que expresa que comprende mejor en una clase tradicional. Es decir, que las tres primeras etapas de la Taxonomía de Bloom, en general se llegan a realizar, con algunas dificultades en ocasiones, pero que luego el profesor en clase puede trabajar sobre ellas.

La mayoría de ellos utiliza las funciones de “pausa” y “retroceso”, pero ven solo una vez el vídeo para prepararse para clase. Vuelven a verlo para prepararse para la prueba final.

Los alumnos de los dos primeros cuartiles expresan que les gusta más el formato de vídeo con los dos profesores visibles porque se sienten representados en el profesor que hace las mismas preguntas que harían ellos. En cambio los dos alumnos de los cuartiles 3º y 4º, expresan que prefieren el vídeo en formato “voz en *off*”, porque se concentran más.

7.6.2.3. Actividades de clase

En lo referente a las actividades, observamos que, excepto en el caso de María F, los tres alumnos restantes de la muestra tienen gran dificultad para tener el material ordenado e incluso no perderlo.

Según las últimas tres primeras etapas de la Taxonomía de Bloom, vemos que los dos primeros casos no saben cómo estructurar y organizar los conceptos, e integrarlos. Expresan que no saben por dónde empezar. En general resuelven las actividades con mucha dificultad y con ayuda de los compañeros del grupo o del profesor. En algunos ejercicios observamos que incluso no realizan los procesos correspondientes de resolución, sino que se limitan a copiar el resultado. Es decir, que su participación en el grupo es en general pasiva. Por lo que vemos que la mejor opción, aunque ellos expresan que las de trabajo en grupo son más entretenidas, son las actividades que se realizan individualmente o bien con tutoría de iguales, que tiene una parte previa individual.

Por otra parte, en el caso de los dos alumnos con mayor rendimiento académico, observamos que generalmente las tres últimas etapas de la Taxonomía de Bloom llegan a completarse: comprenden ciertos conceptos o principios y el porqué de ciertos procedimientos o demostraciones; buscan y descubren relaciones entre los elementos de un problema; resuelven problemas no rutinarios que no han sido estudiados antes; en el trabajo en grupo, participan en la redacción, y retroalimentan a los compañeros en cuanto a la organización y lógica de los argumentos; anotan las contradicciones que encuentran; revisan el ejercicio para ver si se incluyeron todos los pasos necesarios; critican una resolución si creen que no está bien; prueban alternativas; e incluso en ocasiones, son capaces de poder plantear una nueva situación, o inventar o diseñar una nueva propuesta. Por este motivo creemos que, para esta tipología de alumnos, el trabajo en grupo es la opción más correcta para trabajar en clase, puesto que ocupan naturalmente el rol de líderes, resolviendo dudas y llevando el ritmo del grupo; y por otra parte les sirve a título individual para asimilar los conceptos sin memorizar y encontrar la relación entre ellos en el momento en que deben explicarlos a sus compañeros.

7.6.3. Resultados de la prueba final de la unidad

En la prueba evaluativa final de la unidad (Anexo 12 – 1ª opción de prueba) observamos que los resultados reflejan fielmente los conceptos aprendidos y las dificultades que detectamos en las actividades: lo que no asimilaron en las actividades, en la prueba no logran resolverlo. No obstante, tres de los cuatro alumnos obtuvieron notas más elevadas que las que habían obtenido en el primer trimestre. En el caso de Javier, encontramos cierta dificultad en el paso de la etapa de “analizar” a la de “evaluar” según la Taxonomía de Bloom, debido a las deficiencias de trabajo y estudio antes de la prueba.

7.6.4. Evolución de los resultados

En resumen, observamos que los resultados obtenidos por una u otra razón son positivos en los cuatro casos:

- En el caso de Karla, porque le han ayudado a trabajar sus dificultades en clase, y al profesor a poder detectarlas con antelación al examen, y poder plantear un plan de trabajo con ella a nivel global.
- En el caso de Santi, porque le han ayudado a ordenarse y sistematizar su estudio, además de despertar su motivación por la asignatura.
- En el caso de Javi, porque le han ayudado tanto a él como al profesor a detectar cuál era su dificultad en el proceso de aprendizaje y plantear la forma de mejorar su rendimiento, para no desaprovechar las competencias y habilidades que posee en la materia.
- En el caso de María F, porque le han ayudado a estudiar de una manera más profunda, poniéndose a prueba en el trabajo en grupo, con sus compañeros, y a llegar hasta el fondo de las actividades planteadas y de los conceptos trabajados.

Es decir, que el modelo FC ha ayudado de distinta forma a que cada alumno aprendiese el contenido de la unidad, atendiendo sobre todo a las carencias que cada uno tenía. En general observamos que en el caso de los alumnos con mayor dificultad se mezclan carencias a nivel algebraico con hábitos de estudio. Por lo que este modelo de enseñanza-aprendizaje les ayuda en ambas áreas:

- En el nivel algebraico, detectando en primer lugar dónde residen las “lagunas” del aprendizaje, y en segundo lugar las del contenido de lo que se está aprendiendo, para que posteriormente, en clase, el profesor (o un compañero/a) pueda trabajar con el alumno en ello.
- En el nivel de hábitos de estudio, ayudándoles a ordenar el material de trabajo, sistematizando los tiempos, facilitándoles la preparación del tema en casa para poder trabajarlo más tarde en clase, de forma práctica.

7.6.5. Resultados del cuestionario final sobre el modelo FC

La percepción de los cuatro alumnos sobre el modelo es bastante variada, aunque encontramos algunas similitudes en sus respuestas respecto a:

- **Los vídeos tutoriales:** les resultaron entretenidos y de fácil comprensión. El nivel de comprensión a través de los mismos fue bueno. Los utilizaron para estudiar y repasar para la prueba final. Este sistema les ha ayudado a ser más rigurosos con el estudio. Y que una limitación que ven en los vídeos es que si tienen alguna duda deben esperar a la clase siguiente para resolverla.
- **Los cuestionarios de autoevaluación:** les han ayudado a comprobar que habían entendido el contenido del vídeo.
- **El Web “trescomacatorze”:** les ha servido como herramienta para acceder a los materiales.
- **Las clases:** Expresan que la clase introductoria les sirvió para saber en qué consistía la nueva metodología de clase y fue para ellos la guía para saber que debían hacer en cada momento. Las clases que más les gustaron fueron aquellas en las que trabajaron en grupo, porque se le hacían más cortas y entretenidas, y porque aprendían más.
- **El modelo FC de enseñanza-aprendizaje:** los alumnos con mayor dificultad expresan que prefieren el modelo FC porque comprenden mejor los conceptos a través del vídeo, trabajan y se organizan mejor, además de ser más entretenida. Proponen en general una combinación de ambas metodologías durante el curso, dependiendo del tema. En cambio, los alumnos con menos dificultades prefieren la metodología tradicional, básicamente porque con ella entienden mejor los conceptos y porque pueden resolver sus dudas en el mismo momento que el profesor explica el tema.

8. RESULTADOS DEL CUESTIONARIO FINAL SOBRE LA PERCEPCIÓN DEL MODELO FC

8. RESULTADOS DEL CUESTIONARIO FINAL SOBRE LA PERCEPCIÓN DEL MODELO FC	377
8.1. PRESENTACIÓN	381
8.2. RESULTADOS DEL CUESTIONARIO DE VALORACIÓN FINAL DE LOS ALUMNOS	382
8.2.1. Utilización de la tecnología para el aprendizaje de las matemáticas	382
8.2.1.1. Vídeos tutoriales	382
8.2.1.2. Los cuestionarios de autoevaluación	384
8.2.1.3. El web “trescomacatorze”	385
8.2.1.4. Sugerencias de cambios	386
8.2.2. Las clases	386
8.2.2.1. La Clase Introductoria	387
8.2.2.2. Las Clases en el Aula	388
8.2.3. El modelo de enseñanza-aprendizaje Flipped Classroom	392
8.2.4. Resumen	396
8.3. RESULTADOS DE LOS CUESTIONARIO DE VALORACIÓN DE LOS PROFESORES	399
8.3.1. Primera clase: Trabajo cooperativo	399
8.3.2. Segunda clase: Trabajo individual	399
8.3.3. Tercera clase: Tutoría de iguales	400
8.3.4. Cuarta clase: Trabajo individual	401
8.3.5. Quinta clase: Trabajo cooperativo	401
8.3.6. Sexta clase: Tutoría de iguales	402
8.3.7. Séptima clase: Trabajo individual	402
8.3.8. Octava clase: Trabajo cooperativo	403
8.3.9. Percepción final	403
8.4. RESUMEN	405

8.1. PRESENTACIÓN

Este capítulo lo dedicamos a presentar, en primer lugar, los resultados del cuestionario final que se utilizó para conocer la percepción y valoración de los alumnos del modelo de aprendizaje FC implementado y, en segundo lugar, los resultados cualitativos de los cuestionarios realizados al final de cada clase a los docentes que participaron en la investigación para conocer su percepción y opinión como profesores de las clases con el modelo de aprendizaje FC implementado.

8.2. RESULTADOS DEL CUESTIONARIO DE VALORACIÓN FINAL DE LOS ALUMNOS

Mostraremos ahora los resultados obtenidos en el cuestionario en línea (Anexo 8) que se pasó a los 149 alumnos de la población de 1º de bachillerato del curso lectivo 2013-2014, de los cuales respondieron 123. Algunos resultados ya fueron expuestos en los capítulos 6 y 8, donde mostramos las respuestas de los ocho alumnos de la muestra para el estudio de casos.

8.2.1. Utilización de la tecnología para el aprendizaje de las matemáticas

Para conocer la percepción de los alumnos respecto a la utilización de las TIC en el proceso de enseñanza-aprendizaje de la matemática en aulas heterogéneas en 1º de bachillerato, como medio de enseñanza, mostramos los resultados del cuestionario respecto a los vídeos tutoriales, los cuestionarios *online* y el web “Trescomacatorze”.

8.2.1.1. Vídeos tutoriales

Respecto a los diferentes aspectos evaluados de los vídeos tutoriales observamos, de acuerdo a las siguientes preguntas, los siguientes resultados:

- 1) Los vídeos aportaron el conocimiento suficiente para aprender el tema de funciones:
 - el 46,3% respondió que sí;
 - el 41,5% que en parte;
 - el 12,2% que no.
- 2) Respecto al nivel de comprensión del tema a través de los vídeos:
 - un 17,9% expresan que es muy bueno;
 - un 56,9% bueno;
 - un 15,4% regular;
 - un 5,7% malo;
 - y un 4,1% muy malo.
- 3) De las características escogidas que más destacan de los vídeos (pregunta de opción múltiple), las más escogidas son;
 - “de fácil comprensión” con un 79,7%;

- “interactivos” con un 55,3%;
 - “entretenidos” con un 47,2%
 - “largos” con un 39,8%.
- 4) Respecto a las dificultades o limitaciones que han tenido a la hora de ver los vídeos podemos distinguir dos clases, de contenido o de forma:
- De contenido:
 - No se pueden resolver las dudas en el momento.
 - Tener que varias veces el vídeo cuando no entendían el contenido.
 - El contenido del vídeo solo se limita a lo más importante, faltan las explicaciones secundarias que van más allá del temario, como las que hace el profesor en clase.
 - Ejemplos muy sencillos en el vídeo, y luego más complejos en clase.
 - De forma:
 - En los primeros 6 vídeos solo hay una versión de explicación del tema.
 - Si el vídeo es muy largo, se desconcentran fácilmente.
 - Distracciones externas: las ventanas de internet que rodean al vídeo, el sitio donde se ven, ruidos y molestias de familiares, el móvil, etc.
 - La conexión de internet
- 5) Respecto a si el uso sistemático de los vídeos les ayudó a ser más rigurosos con su estudio de las matemáticas:
- un 40,7% contestaron que sí;
 - un 35% que no;
 - un 24,4% no saben/no contestan.
- 6) Respecto a si volvieron a ver los vídeos para estudiar para la prueba final o el examen trimestral:
- un 12,2% expresó que volvieron a ver todos los vídeos;
 - un 8,9% más de 4;
 - un 37,4% volvieron a ver 3 o menos;
 - un 41,5% dijeron que no los volvieron a ver.

De entre las razones por las que los volvieron a ver las más escogidas han sido (pregunta de opción múltiple):

- Para repasar, un 88,9%;
- porque tenían dudas, un 58,3%;
- para estudiar, un 37,5%;
- por temor a dejarse algo importante para estudiar, un 34,7 %.

7) Respecto a si a partir de la teoría vista en los vídeos consideran que este instrumento les ha servido para hacer generalizaciones:

- un 52% de los alumnos expresa que sí;
- un 16,3% que no;
- un 30,9% no sabe/no contesta.

8) Respecto a si a partir de la teoría vista en los vídeos consideran que este instrumento les ha servido para saber qué hacer en cada caso:

- un 46,3% de los alumnos expresa que sí;
- un 35% que no;
- un 18,7% no sabe/no contesta.

9) Respecto a si piensan que su potencial matemático ha cambiado con los vídeos:

- Creen que ha mejorado, un 34,1%;
- que continua igual, un 46,3%;
- que ha empeorado, un 8,1%;
- y no sabe/no contesta, un 11,4%.

8.2.1.2. Los cuestionarios de autoevaluación

De los diferentes aspectos evaluados de los cuestionarios de autoevaluación (o formularios) observamos, de acuerdo a las siguientes preguntas, los siguientes resultados:

1) Respecto a si los formularios no hubiesen sido obligatorios los hubiesen contestado:

- un 35,8% respondieron que sí ;
- un 64,2% que no.

2) Ante la pregunta de que, además de que los cuestionarios contaran para la nota, para qué otra cosa les habían servido (pregunta de opción múltiple):

- un 72,7% respondió que para comprobar si entendieron bien el contenido del vídeo;

- un 43,2% para reforzar el contenido teórico que vieron en el vídeo;
- un 11,4% porque las preguntas de teoría y las respuestas eran la clave del tema visto
- un 11,4% otras razones.

8.2.1.3. El web “trescomacatorze”

De los diferentes aspectos evaluados del web de matemáticas “trescomacatorze” observamos, de acuerdo a las siguientes preguntas, los siguientes resultados:

- 1) A la pregunta de cómo califican el web como herramienta para el aprendizaje de las matemáticas:
 - un 23% respondió que muy buena;
 - un 49,6% la considera buena;
 - un 22% regular.
 - Sólo 1 alumno considera que es mala
 - 2 consideran que muy mala.
 - 3 alumnos no saben/no contestan.
- 1) Respecto a si les ha ayudado a organizar sus estudios:
 - un 55,3% expresan que sí ;
 - un 31,7% que no;
 - un 13% no saben/no contestan.
- 2) A la pregunta de si su rendimiento en la materia ha mejorado desde que lo utilizan:
 - un 38,2% expresan que sí;
 - un 36,6% expresan que no;
 - y un 25,2% no saben/no contestan.
- 3) A la pregunta de si desde que utilizan el web les ha sido más fácil adquirir los conocimientos de la asignatura:
 - un 48,8% expresan que sí;
 - un 35% que no;
 - y un 16,2% no saben/no contestan.
- 4) Respecto a las limitaciones y/o dificultades que han tenido al trabajar con el web las más mencionadas son las de:

- difícil acceso;
- poca utilización antes del trabajo en esta unidad;
- la distracción por otras aplicaciones que aparecen en la misma ventana de internet.

5) A la pregunta de si han utilizado las actividades resueltas colgadas en el web:

- un 66,7% expresan que sí;
- un 30,9% que no;
- y un 2,4% no saben/no contestan.

De los que expresaron que sí (pregunta de opción múltiple), las razones que expusieron fueron:

- Para estudiar para el examen, un 78%
- Para controlar si lo que hicieron en clase era correcto, un 39%
- Para estudiar lo que hicieron en clase porque faltaron ese día, un 14,6%
- Para ver que los ejercicios se pueden resolver por distintos métodos y llegar al mismo resultado, un 11%

8.2.1.4. Sugerencias de cambios

Respecto a las sugerencias de cambio, encontramos las siguientes propuestas:

- Respecto a los vídeos: les gustaría que fueran como los de “Unicoos”¹, o que en lugar de que el profesor vaya escribiendo con el cursor, pase diapositivas y vaya apareciendo lo que explica en cada momento.
- Respecto a los cuestionarios: que el profesor comente al día siguiente en los 10 minutos iniciales las soluciones para ver si los alumnos han acertado o deben repasar más el tema.
- Respecto al web: que hayan más exámenes de años anteriores

8.2.2. Las clases

A continuación presentamos los resultados referentes a la clase introductoria y a las clases realizadas en el aula.

¹Unicoos: academia online gratis de matemáticas, física, química y tecnología. Disponible en www.unicoos.com

8.2.2.1. La Clase Introductoria

- 1) Respecto a la asistencia a la clase introductoria, un 92,7% de la población estuvo presente.
- 2) Respecto a la pregunta de si la clase introductoria les sirvió para familiarizarse con la nueva metodología:
 - Un 42,1% expresó que sí.
 - Un 50,9% expresó que más y menos.
 - Un 5,3% que no,
 - un 1,8% no sabe/no contesta.
- 3) A la pregunta de si en la clase introductoria, en líneas generales, pensaron que esta metodología iba a ser:
 - Muy fácil, un 14,9%
 - Fácil, un 54,4%
 - Medianamente fácil, un 27,2%
 - Muy difícil, un 3,5%
- 4) Respecto a cómo vieron el hecho de tener que usar la tecnología expresaron que como:
 - Un desafío, un 8,8%
 - Una forma de progresar, un 44,7%
 - Una complicación, un 28,1%
 - Un obstáculo, un 11,4%
 - No sabe/no contesta, 7%
- 5) A la pregunta de, si después de ver el primer vídeo y hacer la actividad de la primera clase, cambió de opinión respecto a la nueva metodología, en función de lo que pensó tras la clase introductoria, los alumnos respondieron que:
 - En un 33,3%, que sí, era mejor de lo que pensaban.
 - En un 35,1%, que siguió pensando que es una buena metodología.
 - En un 31,6%, que se dio cuenta que prefiere la tradicional.
- 6) Respecto a si la opinión que tenían sobre la metodología FC al terminar la unidad había cambiado, expresaron:
 - En un 17,5%, que cambió en positivo.
 - En un 34,2%, que continuaba siendo buena.
 - En un 24,6%, que les era indistinto.

- En un 14,9%, que continuaba siendo negativa
 - En un 5,3%, que cambió a negativo
 - En un 3,5%, otros.
- 7) Respecto a si la clase introductoria le sirvió para entender la metodología y cómo tenía que utilizar la tecnología, los alumnos respondieron:
- En un 65,8% que sí
 - En un 17,5%, que no
 - En un 16,7%, no sabe/no contesta
- 8) Respecto a si el dossier de guía que el profesor le entregó le sirvió para entender lo que tenía que hacer, respondieron:
- En un 69,3%, que sí.
 - En un 16,7%, que no.
 - En un 14%, no sabe/no contesta.
- 9) En el caso de los 10 alumnos que no asistieron a la clase introductoria, les preguntamos si se habían puesto en contacto con el profesor para que les explicase la nueva metodología, y 8 de ellos respondieron, que no, que le preguntaron a un compañero, y los otros 2 no preguntaron.

8.2.2.2. Las Clases en el Aula

- 1) Respecto a la pregunta de si vieron antes de cada clase, el vídeo correspondiente, respondieron:
- En un 48,8%, que lo hicieron siempre.
 - En un 26,8%, que lo hicieron en 7 de las 8 veces.
 - En un 8,9%, que lo hicieron en 6 de las 8 veces.
 - En un 7,3%, que lo hicieron en 5 de las 8 veces.
 - En un 2,4%, que lo hicieron en 4 de las 8 veces.
 - En un 1,6% (2 alumnos), que lo hicieron 3 o menos veces de las 8.
 - En un 4,1% (5 alumnos), que no vieron ninguno.
- 2) Respecto a si las clases les resultaron fáciles, respondieron que:
- En un 77,6%, aquellas en las que habían visto el vídeo con anterioridad.
 - En un 8,6%, aquellas en las que cuando llegaban a clase su compañero/a le explicaba lo que se tenía que hacer.

- En un 8,6%, aquellas en las que en los 10 minutos de introducción el profesor explicaba de que se trataba el tema.
 - En un 5,2%, otras razones.
- 3) Respecto a las causas por las cuales no vieron uno o más vídeos, los alumnos respondieron que:
- por falta de tiempo;
 - porque prefieren la metodología tradicional y se lo explicaba su profesor particular en casa.
- 4) A la pregunta de si ver el vídeo antes de la clase les sirvió para el trabajo que realizaron en clase, los alumnos respondieron:
- En un 64,2%, que sí.
 - En un 29,3%, que a veces.
 - En un 6,5%, que no.
- 5) Respecto a los 10 minutos introductorios de cada clase, los alumnos respondieron que los utilizaron para:
- Resolver dudas, un 47,2%.
 - Aclarar ideas, un 61,8%
 - Sugerir nuevas preguntas, un 10,6%
 - Compartir y debatir con los compañeros sobre el tema, un 10,6%.
 - Otras cuestiones, un 2,4%
- 6) Respecto a cómo eran los 10 minutos de introducción, respondieron:
- Un 24,4%, escasos;
 - Un 69,9%, suficientes;
 - Un 5,7%, excesivos.
- 7) A la pregunta de con qué tipo de metodología (grupal, tutoría de iguales o individual) aprendieron mejor, expresaron que:
- En un 17,1%, con trabajo individual;
 - En un 30,1%, con el compañero/a de clase;
 - En un 30,9%, en grupo;
 - En un 22%, con las tres metodologías por igual.

Las razones que dieron en cada caso fueron:

- Trabajo individual: porque les cuesta trabajar con alguien más; porque se trabaja más rápido y con mayor concentración; porque es un indicador para

darse cuenta si el tema está entendido; porque en grupo siempre hay algún integrante que no desea trabajar y esto hace que el ritmo del grupo sea más lento; Porque cada uno tiene su propio ritmo de trabajo y aprendizaje.

- Tutoría de iguales: porque se comparten dudas y el compañero/a puede resolverlas; ayuda mutua; porque permite pensar primero solo y luego comprobar con el compañero/a de al lado;
- Grupal: porque se comparten opiniones y surgen dudas que a uno solo no se le hubiesen ocurrido, y luego se puede realizar una conclusión en conjunto; por competición; Porque era rápido y dinámico; Porque se ven los problemas de diferentes puntos de vista; porque alguno puede enseñar lo que otro no ha entendido; Porque se hace puesta en común de ideas; Porque la clase se hace más entretenida; porque se trabaja más que en un grupo y a la vez se pueden resolver dudas con el compañero/a que sería más difícil si fuese trabajo individual;
- Las tres por igual: Porque se aprende de todas las maneras; Porque trabajar con las tres maneras ayuda a mejorar el nivel y la capacidad de entender el tema.

8) Respecto a las actividades de clase, los alumnos expresaron que las que más les gustaron fueron (pregunta de opción múltiple):

- Clase 5 (grupal): Corregir controles con el grupo, 58.5%
- Clase 3 (tutoría de iguales): Operar con funciones y hacerlo con el compañero/a, 46.3%
- Clase 2 (individual): Analizar el dominio e Imagen de las gráficas propuestas, 41,5%
- Clase 1(grupal): Juego de tarjetas, 40.7%
- Clase 8 (grupal): corregir un control con el grupo, 36.6%
- Clase 6 (tutoría de iguales):: Analizar la simetría de funciones propuestas con el compañero/a, 34.1%
- Clase 7(individual): Analizar las propiedades de funciones, 22.8%
- Clase 4(individual): Completar espacios y problemas de aplicación de composición de funciones, 19.5%

- 9) Respecto a quién consultaban en clase cuando tenían dudas, respondieron:
- Al profesor, el 19,5%;
 - A un compañero, el 13,8%;
 - A los dos, el 68,3%.
- 10) Respecto a la pregunta de, si pensarán en la clase como una obra de teatro, expresaron que el rol que ocuparon en la clase con este método sería:
- El protagonista de la obra, un 16,3%;
 - El villano, un 6,5%;
 - El hada madrina, un 14,6%;
 - Un actor secundario, un 43,1%;
 - Un simple espectador, un 22%;
 - Otros, un 5,7%.
- 11) Respecto a la pregunta de, si pensarán en la clase como una obra de teatro, expresaron que el rol que ocupa el profesor en la clase con este método es:
- El protagonista de la obra, un 15,4%;
 - El villano, un 9,8%;
 - El hada madrina, un 26%;
 - Un actor secundario, un 4,1%;
 - Un simple espectador, un 3,3%;
 - El director, un 39,8%;
 - El escenógrafo, un 7,3%;
 - El encargado de luces o telón, 2,4%;
 - Otros, un 1,6%.
- 12) Respecto a si con esta metodología las clases se les hacían más cortas, expresaron que:
- Siempre, un 36,6%;
 - A veces, un 53,7%;
 - Nunca, un 9,8%.
- 13) Respecto a si la utilización del tiempo en las clases fue la adecuada, expresaron que:
- Sí, alcanzaba a terminar las actividades, un 43,9%;
 - No, sobraba tiempo, un 12,2%;
 - No, faltaba tiempo, un 30,1%;

- No sabe/no contesta, un 13,8%.

14) Respecto a las dificultades o limitaciones que tuvieron en las clases, expresaron:

- A nivel de contenido: no entender del todo los vídeos, y luego no saber qué hacer en clase;
- A nivel de forma: El profesor tarda en llegar para aclarar dudas porque está con otro alumno; faltaba tiempo para resolver dudas a medida que se resolvían los ejercicios; hubiese necesitado más ejercicios individuales para resolver.

15) A la respuesta de si faltó a alguna clase, respondieron:

- un 39% que sí;
- y un 61% que no.

De los que dijeron que si, les realizamos algunas preguntas al respecto y respondieron:

15.1) Respecto a cómo hicieron para ponerse al día (pregunta de opción múltiple):

- Utilizaron el sistema de vídeo y la actividad correspondiente resuelta que estaba colgada en la web para estudiar, un 77,1%;
- Se los explicó un compañero, un 31,3%;
- Se los explicó una persona externa al colegio (familiar, profesor particular, etc.), un 14,6%;
- Otras opciones, un 2,1%.

15.2) Respecto a las causas por las que lamentó haber faltado a clase, respondieron:

- Porque no pudo consultar las dudas, un 14,6%;
- Porque se perdió la parte de aplicación y ejercitación, un 66,7%;
- Que no le afectó, un 27,1%.

8.2.3. El modelo de enseñanza-aprendizaje Flipped Classroom

A continuación presentamos los resultados correspondientes a las opiniones de los alumnos respecto al modelo FC con el que aprendieron la unidad de Funciones.

- 1) Respecto a la pregunta de cómo considera que es el modelo FC respecto a la clase tradicional de aprender matemáticas, habiendo terminado la experiencia piloto del modelo FC, expresaron que:
 - Mejor, un 32,5%;
 - Igual, un 40,7%;
 - Peor, un 26,8%
- 2) Respecto a las causas de por qué consideran que es mejor, respondieron (pregunta de opción múltiple):
 - Porque les obligaba a prepararse el tema para la clase, un 72,5%;
 - Porque les ordenó el estudio, un 35%
 - Porque sistematizó su estudio y les ayudó a organizarse, un 30%;
 - Porque la clase es más divertida, un 30%
 - Porque les permitió elaborar el tema a él/ella, un 27,5%;
 - Porque si tenían dudas podían contar con el profesor para preguntarle en clase, un 22,5%;
 - Porque podían hacer los ejercicios a su ritmo, un 17,5%;
 - Porque si faltaban a clase tenían todo lo necesario para ponerse al día, un 17,5%;
 - Porque sabían lo que les iban a dar , un 15%;
 - Porque les permitía adelantarse a los posibles ejercicios que iban a tener que hacer, un 12,5%;
 - Otras razones, un 2,5% (la claridad de los vídeos ayudaba a comprender mejor el tema).
- 3) Respecto a las causas de por qué consideran que es peor, respondieron (pregunta de opción múltiple):
 - Porque prefiero que el profesor explique el tema en la pizarra, 84,8%;
 - Porque entendía menos los conceptos con los vídeos, 36,4%;
 - Porque si no veía un vídeo no podía seguir la clase siguiente, 21,2%;
 - Porque me obligaba a prepararme el tema para la clase, 15,2%;
 - Porque tenía que elaborar yo el tema, 9,1%;
 - Otras razones, 12,1%
- 4) Respecto a la pregunta de cómo han sido sus resultados académicos con esta metodología, expresaron que:

- Mejores, un 30,1%;
 - Iguales, un 43,1%;
 - Peores, un 17,9%;
 - No sabe/no contesta, un 8,9%.
- 5) A la pregunta de que aunque los resultados académicos no hayan sido los esperados, qué opinan respecto a cómo ha ido su aprendizaje, respondieron:
- Han aprendido más, un 4,5%;
 - Han aprendido lo mismo, un 40,9%;
 - Han aprendido menos, un 45,5%;
 - No saben/no contestan, un 9,1%.
- 6) A la pregunta de si en setiembre del siguiente curso en qué medida recordarán el contenido visto con el modelo FC, ya que lo necesitarán, respondieron:
- Más, un 28,5%;
 - Igual, un 58,5%;
 - Menos, un 13%
- 7) A la pregunta de cómo le gustaría que fuesen las clases de todo el curso en cuanto a modelo de enseñanza-aprendizaje, respondieron:
- Que se utilizara FC todo el curso, un 10,6%:
 - porque se quedan mejor grabados los conceptos;
 - porque se aprende más rápido;
 - porque es más entretenido y las clases más dinámicas; Es más sencillo, eficaz y divertido.
 - Porque según el tema, tener el vídeo para poder verlo las veces que haga falta, va muy bien; sirven para estudiar;
 - porque de esta forma la gente está más metida en el tema y les obliga a estar al día;
 - porque hay mayor interactividad con el profesor y con los compañeros;
 - porque “me parece un método más adaptado a mí personalmente. Es mucho menos estresante que el tradicional y además te permite avanzar la materia a tu ritmo (al poder pausar los vídeos, volver hacia tras,...)”;

- porque la relación profesor-alumno es más activa permitiendo que la corrección de malentendidos sea mucho más rápida y eficaz;
 - porque fuerza más a trabajar en casa;
 - porque “va bien practicar junto al profesor”;
 - porque los resultados han sido mejores;
 - “Creo que a quien le interesase obtener buenos resultados siempre tendría la posibilidad de llevar bien el temario (no habría las excusas de no haber podido escuchar debido al resto de la clase ni de no haber entendido bien algo, por ejemplo) por ver los vídeos regularmente (en cambio, no creo que siempre practicase ejercicios en casa). Creo que no habría distracciones, que no perdería nunca el tiempo, que las clases serían más entretenidas y que... así mejoraríamos las notas.”
- Que se utilizara un mix, algunas unidades con el modelo FC y otras con la tradicional, un 51,2%:
- para utilizar las NTIC en ocasiones;
 - para hacer las unidades más fáciles con FC y las más difíciles con el método tradicional;
 - Para combinar lo bueno de ambas metodologías;
 - Para variar métodos en el aula;
 - “Podríamos usar los dos métodos ya que por una parte los vídeos hacen que entiendas mejor las cosas (es más visual) pero por otra parte se nos acumulaban muchos vídeos para ver en casa y a veces no tenías tiempo suficiente. Por lo tanto lo que haría sería vídeo y después clase normal (y así repitiendo sucesivamente sin que coincidiera que tengamos que mirar tres vídeos, tres días seguidos)”
 - Para evitar la monotonía;
- Que se siguiese utilizando el método tradicional, un 38,2%:
- porque se puede preguntar dudas en el momento que el profesor explica el tema;
 - porque las notas han bajado con FC;
 - porque el FC requiere constancia y tiempo en casa;
 - porque aunque el FC es más entretenido, no se aprovecha tanto el tiempo;

- porque las tecnologías son un obstáculo en el aprendizaje de las matemáticas;
- “porque si las cosas han funcionado durante años, ¿por qué cambiarlas?”
- “No me gustan los ordenadores relacionados con el trabajo

8) Respecto a las sugerencias o comentarios que podían escribir, expresaron:

- “Creo que es una gran metodología de estudio, me ayudó a aclararme y a estar más organizado. ¡Gracias!”.
- “Nos ha ido muy bien con esta metodología pero también nos tenemos que dar cuenta que era un tema fácil, y por lo tanto lo podíamos comprender sin problemas.”
- “Considero que el recurso de introducir a otro profesor, compañero o invitado "sorpresa" ayuda en la comprensión, siempre y cuando los dos expliquen la materia y no sea solo uno el que lo haga. Creo que es un muy buen recurso”.

8.2.4. Resumen

De acuerdo a las finalidades que nos planteamos en nuestra investigación, podemos resumir los resultados de la percepción de los alumnos en función de dichos objetivos:

Objetivos de la investigación	Resultados globales del cuestionario
<p>O2. Trazar lineamientos perspectivas para la utilización de las TIC en el proceso de enseñanza-aprendizaje de la matemática en aulas heterogéneas, en primero de bachillerato, a partir de los diferentes tipos de recursos que permiten el uso de la computación como medio de enseñanza, en este proceso.</p> <p>O4. Confeccionar unidades de trabajo en formato video tutorial que potencien las habilidades y destrezas relacionadas con el contexto algebraico de los alumnos de primero de bachillerato.</p>	<ul style="list-style-type: none"> • Aproximadamente la mitad de la población considera que el conocimiento que adquieren a través de los vídeos es suficiente para aprender el tema de funciones. • El 75% del alumnado considera que el nivel de comprensión a través de los vídeos es bueno. • En general los vídeos les parecen de fácil comprensión, interactivos y entretenidos. • Las dificultades que ven en conocer la teoría a través de un vídeo es que no pueden consultar las dudas en el momento en que surgen y que los ejemplos son muy sencillos comparados con los de clase. En cuanto al formato del vídeo, expresan que en el vídeo sólo tienen una explicación del tema, y que cuando son muy largos se distraen fácilmente. • Un 40% de los alumnos reconocen que el uso de los vídeos les ayudó a ser más sistemáticos en el estudio. • La mitad de los alumnos volvieron a ver los vídeos para estudiar y repasar para el examen. • El 80% del alumnado expresa que con esta metodología su potencial matemático ha mejorado (35%) o se ha mantenido igual (46%). • Un 73% del alumnado considera que el web es una buena herramienta para el aprendizaje de las matemáticas. • La mitad de los alumnos considera que el web les ha ayudado a organizar sus estudios, y solo un 38% expresan que les ha ayudado a mejorar su rendimiento en la asignatura. • La mitad de la población expresa que les resulta más fácil adquirir los conocimientos utilizando el web. • Casi un 70% de los alumnos han utilizado las actividades resueltas colgadas en el web, para estudiar o para controlar que lo que hicieron en clase era correcto.
<p>O3. Diseñar entornos de evaluación sobre el razonamiento inductivo y deductivo del álgebra vía <i>online</i> con alumnos diversos que nos permitan conocer las dificultades que tienen en su aprendizaje.</p>	<ul style="list-style-type: none"> • La mitad de los alumnos considera que la teoría que han visto en los vídeos les ha servido para hacer generalizaciones y para saber qué deben hacer en casos particulares. • Un 65% de los alumnos expresan que si los cuestionarios no hubiesen sido obligatorios no los hubiesen realizado. • El 73% de los alumnos expresaron que utilizaron los cuestionarios para comprobar si habían entendido el contenido del vídeo tutorial, y un 43% para reforzar el contenido visto.
<p>O5. Programar la unidad de "Funciones" utilizando el método de "Flipped Classroom" en clase de matemáticas para trabajarlo con los alumnos.</p>	<p>Respecto a la Clase introductoria</p> <ul style="list-style-type: none"> • A la mitad del alumnado les sirvió para familiarizarse con la metodología de trabajo y pensaron que ésta sería fácil. Un 65% piensa que les sirvió para entender cómo debían utilizar la tecnología. A un 70% de los alumnos, les sirvió el dossier de guía para entender qué debían hacer en cada momento. De los 10 alumnos que no asistieron, 8 de ellos le preguntaron a un compañero cómo funcionaba todo.

	<p>Respecto a las Clases en el aula:</p> <ul style="list-style-type: none"> • El 70% de los alumnos en general vieron siempre el vídeo antes de llegar a clase; y expresaban que cuando lo hacían la clase les resultaba fácil. • Los 10 minutos introductorios de cada clase les sirvieron para resolver dudas o aclarar dudas y consideran que eran suficientes. • El 80% de los alumnos prefiere trabajar con un compañero/a o en grupo, porque se pueden compartir las dudas y buscar la solución correcta entre todos, y porque es más dinámico y entretenido. • Las clases que más les gustaron fueron aquellas donde trabajaron en grupo y teniendo ellos el rol de profesor tenían que corregir una simulación de examen, y en segundo lugar la que trabajaron con tutoría de iguales, donde primero resuelven el ejercicio individualmente y luego deben hacerlo con el compañero. • En las clases, casi un 70% de los alumnos expresa que consultan las dudas con compañeros o con el profesor. Expresan que faltaba tiempo para resolver dudas. • La mitad de los alumnos expresan que el tiempo de clase era adecuado para realizar toda la actividad. • Un 65% de los alumnos expresaron que creen ocupar un rol pasivo con este modelo de enseñanza, y aproximadamente un 60% piensan que es el profesor quien ocupa el rol activo. • De los que faltaron a alguna clase, aproximadamente un 80% expresó que utilizó el material (vídeos y actividad resuelta) que hay en el web para ponerse al día. Y que al faltar lamentaban no haber estado en clase porque se perdían la aplicación y ejercitación. <p>Respecto al Modelo FC</p> <ul style="list-style-type: none"> • Un 74% de los alumnos expresan que consideran el modelo FC mejor o igual que el método tradicional de clase, porque les obliga a prepararse el tema para casa, les ordena y sistematiza el estudio, la clase es más divertida, les permite elaborar el tema a ellos, les permite ir a su propio ritmo, y porque si faltan tienen todo lo necesario para ponerse al día. Del resto que consideran que es peor que el método tradicional, en general es debido a que prefieren que el tema lo explique el profesor en la pizarra. • Un 70% expresa que los resultados académicos que han obtenido son mejores o iguales que con el método tradicional. • Un 47% expresan haber aprendido más o igual con este modelo. No obstante un 80% expresan que recordaran el contenido de la unidad en Setiembre, igual o más que con el método tradicional. • La mitad de los alumnos expresan que les gustaría que durante el curso hubiesen algunas unidades con el modelo FC y otras con el método tradicional, en función de la complejidad del tema. Un 38% prefiere el método tradicional porque pueden preguntar las dudas en el momento que el profesor explica el tema, y un 10% prefieren el modelo FC porque hay mayor interacción con el profesor y los compañeros, porque entienden más, porque pueden ir a su propio ritmo, porque es más entretenido y porque se organizan mejor.
--	--

Ilustración 8-1: Resultados del cuestionario de valoración final del Modelo FC de los alumnos.

Fuente: Elaboración propia a partir del cuestionario.

8.3. RESULTADOS DE LOS CUESTIONARIO DE VALORACIÓN DE LOS PROFESORES

A continuación presentamos los resultados de los cuestionarios que rellenaban al finalizar cada clase los profesores que participaron en la implementación del modelo FC.

8.3.1. Primera clase: Trabajo cooperativo

En las respuestas referentes al cuestionario de la 1ª clase (Anexo 15) observamos que, respecto al trabajo en casa, han expresado:

- **Aspectos negativos o dificultades:** algunos alumnos no han podido ver el vídeo por temas de conexión o de tiempo.
- **Aspectos positivos:** el vídeo les ha gustado, ha sido claro y sobre todo las explicaciones gráficas y los muchos ejemplos.

Por otra parte, los profesores respecto al trabajo en clase han manifestado:

- **Aspectos negativos del desarrollo de la actividad:** ha costado mucho que los alumnos se pusiesen en grupo para trabajar, y han detectado que algunos alumnos dejan que sus compañeros de grupo resuelvan los ejercicios y no participan en la resolución.
- **Aspectos positivos del desarrollo de la actividad:** se han producido debates dentro del grupo para matizar conceptos. Han realizado pocas preguntas al profesor porque querían resolverlas ellos. Los alumnos han estado muy motivados y concentrados, intentando acabar las ocho tarjetas.

En cuanto a sugerencias para las próximas clases expresan que:

- La actividad al ser grupal y dinámica ha ido muy bien para trabajar con una clase donde son muy inquietos.
- Que los grupos estén formados por 3 alumnos, ya que cuando son 4, siempre hay algún alumno más pasivo.

8.3.2. Segunda clase: Trabajo individual

En las respuestas de los profesores al cuestionario de la 2ª clase (Anexo 15) observamos que, respecto al trabajo en casa, han expresado:

- **Aspectos negativos o dificultades:** una clase no pudo visualizar el vídeo por un problema técnico, el resto, expresan que lo han podido hacer pero han tenido dificultad con el concepto de “la imagen de una función”. Los alumnos expresan que prefieren que el vídeo sea más corto.
- **Aspectos positivos:** que los alumnos expresan que los gráficos y explicaciones con muchos colores les ha ayudado a comprender el tema.

Por otra parte, los profesores respecto al trabajo en clase han manifestado:

- **Aspectos negativos del desarrollo de la actividad:** que les ha faltado tiempo para resolver todos los ejercicios, o lo han hecho de manera desordenada. Expresan que algunos alumnos han tenido dificultad para comprender cómo encontrar el dominio de una función fraccionaria.
- **Aspectos positivos del desarrollo de la actividad:** que han tenido mucho tiempo para resolver dudas individualmente, que los alumnos tenían muchos y diversos ejercicios para resolver. Han podido recordar el tema de intervalos para trabajar con el “dominio de una función”.

En cuanto a sugerencias para las próximas clases, proponen dar las soluciones a los alumnos al inicio para que solos vayan comprobando si lo han resuelto bien o no.

8.3.3. Tercera clase: Tutoría de iguales

En las respuestas de los profesores al cuestionario de la 3ª clase (Anexo 15) observamos que, respecto al trabajo en casa, han expresado:

- **Aspectos negativos o dificultades:** los alumnos de la sección B expresaron que les costó mucho entender todo el tema en general, entendieron bien como se operan las funciones, pero no acabaron de entender como calcular el dominio de la resultante de cada operación. El concepto “intersección de conjuntos” no les es familiar.
- **Aspectos positivos:** a los alumnos de la sección A y F, en cambio, les ha resultado asequible y claro. Dicen no tener dificultades de comprensión.

Por otra parte, los profesores respecto al trabajo en clase han manifestado:

- **Aspectos negativos del desarrollo de la actividad:** que antes de corregir en la pizarra, contrastan resultados con el/la compañero/a y se dan cuenta de los errores mecánicos o más evidentes.

- **Aspectos positivos del desarrollo de la actividad:** necesitan más tiempo para hacer la actividad.

En cuanto a sugerencias para las próximas clases, proponen recordar los conceptos de intervalos, y operaciones con intervalos (intersección y unión).

8.3.4. Cuarta clase: Trabajo individual

En las respuestas de los profesores al cuestionario de la 4ª clase (Anexo 15) observamos que, respecto al trabajo en casa, han expresado:

- **Aspectos negativos o dificultades:** que los alumnos no han manifestado ninguna dificultad.
- **Aspectos positivos:** que a los alumnos les ha gustado la utilización de maquinitas en el vídeo para explicar el concepto de funciones.

Por otra parte, los profesores respecto al trabajo en clase han manifestado:

- **Aspectos negativos del desarrollo de la actividad:** que les ha costado a los alumnos resolver los problemas de enunciado.
- **Aspectos positivos del desarrollo de la actividad:** gran variedad de ejercicios; que les ha gustado mucho el primer ejercicio de ordenar resultados.

En cuanto a sugerencias para las próximas clases, proponen colocar más problemas de aplicación.

8.3.5. Quinta clase: Trabajo cooperativo

En las respuestas de los profesores al cuestionario de la 5ª clase (Anexo 15) observamos que, respecto al trabajo en casa, han expresado:

- **Aspectos negativos o dificultades:** que han tenido dificultades con el concepto de función inversa, porque aún tienen dudas de los de “dominio e imagen de una función”.
- **Aspectos positivos:** que a los alumnos les ha gustado la utilización de colores para explicar y que el proceso de encontrar la función inversa se realiza muchas veces con diferentes funciones.

Por otra parte, los profesores respecto al trabajo en clase han manifestado:

- **Aspectos negativos del desarrollo de la actividad:** que es fácil detectar problemas "grandes", pero difícil ayudarles a corregir los pequeños matices. Les ha faltado tiempo para terminar la actividad.
- **Aspectos positivos del desarrollo de la actividad:** que a los alumnos les gustó mucho cambiar de rol y corregir "la simulación de un examen de un alumno" y ponerle una nota. El hecho de trabajar en grupo ha permitido que consulten las dudas entre ellos.

En cuanto a sugerencias para las próximas clases, proponen realizar más actividades como esta.

8.3.6. Sexta clase: Tutoría de iguales

En las respuestas de los profesores al cuestionario de la 6ª clase (Anexo 15) observamos que, respecto al trabajo en casa, han expresado:

- **Aspectos negativos o dificultades:** que los alumnos expresan que los ejemplos del vídeo son más fáciles que los de la clase.
- **Aspectos positivos:** que la teoría está muy clara y explicada con mucha lentitud con lo cual se entiende todo muy bien.

Por otra parte, los profesores respecto al trabajo en clase han manifestado:

- **Aspectos negativos del desarrollo de la actividad:** que las respuestas eran muy similares en el ejercicio 1 y el 2, por lo que no han trabajado lo suficiente.
- **Aspectos positivos del desarrollo de la actividad:** que han tenido más tiempo para resolver dudas individualmente. La actividad tenía ejercicios variados.

En cuanto a sugerencias para las próximas clases, proponen colocar ejercicios con mayor dificultad.

8.3.7. Séptima clase: Trabajo individual

En las respuestas de los profesores al cuestionario de la 7ª clase (Anexo 15) observamos que, respecto al trabajo en casa, han expresado:

- **Aspectos negativos o dificultades:** que los alumnos expresan que como en el vídeo aparecían dos profesores les ha costado más y se han distraído. Les ha costado entender el concepto de asíntota de una función.

- **Aspectos positivos:** que a los alumnos les ha gustado ver la imagen del profesor en el vídeo, y que es más dialogado.

Por otra parte, los profesores respecto al trabajo en clase han manifestado:

- **Aspectos negativos del desarrollo de la actividad:** ha costado que trabajasen solos, la mayoría ha consultado con el compañero.
- **Aspectos positivos del desarrollo de la actividad:** que la actividad tenía muchos y variados ejercicios de preparación para el examen.

No proponen sugerencias para las próximas clases.

8.3.8. Octava clase: Trabajo cooperativo

En las respuestas de los profesores al cuestionario de la 8ª clase (Anexo 15) observamos que, respecto al trabajo en casa, han expresado:

- **Aspectos negativos o dificultades:** que a los alumnos no les ha quedado claro que todos los puntos de una función tienen curvatura, y han quedado dudas en el concepto de “máximo y mínimo de una función”. El vídeo era largo.
- **Aspectos positivos:** que los alumnos expresan que el vídeo es muy interactivo, valoran muy positivamente las preguntas que se hacen entre sí los dos profesores que salen en el vídeo.

Por otra parte, los profesores respecto al trabajo en clase han manifestado:

- **Aspectos negativos del desarrollo de la actividad:** que algunos gráficos no eran del todo claros y había disparidad de criterios al corregir el ejercicio. En cada grupo ha habido algún alumno que se distrae y no trabaja, y los demás lo cubren.
- **Aspectos positivos del desarrollo de la actividad:** que han tenido más tiempo para resolver dudas individualmente. Que los alumnos valoran muy positivamente el hecho de convertirse en profesores por unos minutos

8.3.9. Percepción final

En resumen, los profesores expresan que:

- **Aspectos negativos o dificultades:** a los alumnos no siempre les quedan claros los conceptos, a veces los vídeos son largos, y los ejemplos que se explican en el vídeo son más fáciles que los que han de resolver en clase. No están acostumbrados a ver más de

una vez el vídeo, por lo que si no lo entienden se quedan con la duda para resolverla en clase.

- **Aspectos positivos:** los alumnos expresan que los vídeos son interactivos, las gráficas y colores les facilitan la comprensión de los conceptos. Los alumnos pueden ver los vídeos tantas veces como necesiten.

Por otra parte, los profesores respecto al trabajo en clase han manifestado:

- **Aspectos negativos del desarrollo de la actividad:** que cuesta corregir pequeños errores de los alumnos, sin embargo se puede hacer de los grandes errores. En alguna actividad se necesita más tiempo para realizarla.
- **Aspectos positivos del desarrollo de la actividad:** que han tenido más tiempo para resolver dudas individualmente e intervenir, dado que los alumnos se consultan también entre ellos. Que los alumnos valoran muy positivamente las actividades donde ocupan el rol de profesor y corrigen simulaciones de exámenes.

En general, los profesores expresan que es una metodología muy innovadora que se habría de ir introduciendo muy lentamente en las aulas, ya que a los alumnos les ha costado sobre todo comenzar con la dinámica del modelo FC, porque no están acostumbrados a trabajar de esa manera. Piensan que es una buena metodología para trabajar con TIC, sobre todo porque no existen los inconvenientes que puede haber con la conexión a internet, ya que lo hacen en casa. Valoran muy positivamente el hecho de tener casi todo el tiempo de la clase para atender individualmente las dudas de los alumnos y detectar si hay dificultades antes de los exámenes, en lugar de dedicar tiempo y energías a explicar el tema en la pizarra en una hora, que con el modelo FC lo ven en 10 o 15 minutos.

En cuanto a los contenidos de la unidad de funciones observan que se puede reducir la cantidad de vídeos y hacerlos más cortos. Y que han observado que los alumnos prefieren que los profesores no aparezcan en el vídeo porque se distraen.

Por otra parte, plantean que para aplicar este modelo en otra unidad, necesitan mucha dedicación de tiempo para diseñar el entorno, el material y las actividades de clase. Y proponen para quitar carga laboral, en lugar de grabar vídeos, utilizar las plataformas MOOCs de Khan Academy² o Unicoos³.

²Disponible en www.khanacademy.org

8.4. RESUMEN

En este capítulo hemos mostrado los resultados obtenidos de los cuestionarios de valoración del modelo FC de los alumnos y de los profesores que participaron en la implantación.

Pudimos observar que aproximadamente un 70% de la población de los alumnos valora positivamente o igual el modelo FC versus el método tradicional. Consideran que es un modelo que promueve la interacción entre los alumnos y con el profesor. Que facilita que cada alumno vaya a su propio ritmo de aprendizaje. Y lo perciben como un modelo de aprendizaje más entretenido y dinámico. Estas ideas coinciden con la del profesorado en cuanto a que es un modelo innovador y a que como docentes pueden dedicar gran parte del tiempo de clase a trabajar sobre las dudas y dificultades de los alumnos.

Respecto a los alumnos que prefieren el método tradicional de enseñanza, en general expresan que se debe a que no pueden consultar las dudas en el momento que ven el vídeo de teoría, y que en temas más complejos que funciones prefieren que el profesor lo explique en directo porque temen no comprenderlos a través de vídeos.

De la utilización de vídeos tutoriales como recurso, observamos que aproximadamente un 70% de los alumnos consideran que es favorable para el aprendizaje de las funciones porque son de fácil comprensión, entretenidos y tienen gráficas y colores para optimizar la comprensión de los conceptos. Y que si faltaban a clase podían acceder al todo el material para ponerse al día. Los profesores por su parte, observan que los alumnos no están acostumbrados a trabajar con vídeos tutoriales en matemáticas, y esto perjudica la comprensión del tema, ya que se limitan en general a verlos solo una vez, pero consideran que es una herramienta potente para facilitar la comprensión de los conceptos algebraicos y para que justamente puedan acceder a los mismos tantas veces como necesiten. Sugieren realizar menos vídeos para este tema y juntar los contenidos de los dos últimos correspondientes a las propiedades globales de las funciones.

³Disponible en www.unicoos.com

Respecto a las clases, en general los alumnos miraban el vídeo tutorial para poder realizar las actividades posteriores en clase. De las clases prefieren aquellas en las que trabajan con otro/a compañero/a o bien en grupo, ya que de esa forma pueden consultar las dudas entre ellos y resolver el ejercicio correctamente entre todos. También expresan que pueden consultar al profesor mientras trabajan para resolver las dudas que tienen en los ejercicios, algo que no pueden hacer cuando los realizan en casa. En este punto coinciden con la opinión de los profesores que destacan como algo muy positivo tener tiempo en clase para acercarse a los alumnos y ver cómo están trabajando o intervenir si lo necesitan. No obstante, sugieren adecuar las actividades al tiempo de clase, o bien realizar la actividad en dos clases.

Finalmente los alumnos plantean la posibilidad de aprender algunas unidades con el modelo FC, sobre todo aquellas como la de funciones donde es más visual, y otras con el método tradicional. Los profesores se muestran a favor de esta opción pero sugieren buscar alternativas para no ampliar la carga laboral que conlleva generar el material necesario para implementar el modelo FC en otras unidades del programa.

9. CONCLUSIONES

9. CONCLUSIONES	407
9.1. <u>PRESENTACIÓN</u>	411
9.2. <u>CONCLUSIONES DE LAS ETAPAS DE LA INVESTIGACIÓN</u>	412
9.2.1. Primera etapa de la investigación	412
9.2.2. Segunda etapa de la investigación	415
9.2.3. Conclusiones de la tercera etapa de la investigación	416
9.3. <u>APORTES DIDÁCTICOS, LIMITACIONES Y PERSPECTIVAS DE FUTURAS INVESTIGACIONES</u>	426

9.1. PRESENTACIÓN

En este capítulo presentamos las conclusiones que derivan de los resultados que hemos ido obteniendo en cada etapa de nuestra investigación y las relacionamos con los objetivos planteados, el problema de estudio formulado al inicio, el marco referencial y los propósitos de nuestra investigación.

También realizamos algunas recomendaciones didácticas que se desprenden del estudio realizado, y por último, damos a conocer las limitaciones que hemos encontrado en nuestro trabajo y nuestras perspectivas para futuras investigaciones sobre el modelo estudiado.

9.2. CONCLUSIONES DE LAS ETAPAS DE LA INVESTIGACIÓN

En primer lugar presentaremos las conclusiones que hacen referencia a la **etapa inicial** de nuestro estudio, extraídas de los resultados de aplicar las pruebas de diagnóstico y formación para reconocer el nivel de habilidades y destrezas algebraicas de la población de estudio. Y realizaremos la valoración correspondiente a la hipótesis que nos planteamos al inicio de la investigación.

En segundo lugar, presentaremos las conclusiones que hacen referencia a la **etapa intermedia** de nuestra investigación, correspondientes al diseño, confección y programación de la unidad de funciones con el modelo “*Flipped Classroom*” de acuerdo a los objetivos que nos marcamos al iniciar el estudio.

Y por último, expondremos las conclusiones correspondientes a la **etapa de desarrollo y etapa final** de nuestra investigación, tras analizar los resultados de implementar el modelo FC en 1º de bachillerato en la unidad de Funciones, a través de los ocho estudios de caso, y de la percepción global del modelo FC de alumnos y profesores.

9.2.1. Primera etapa de la investigación

El primer objetivo que nos habíamos propuesto al iniciar nuestra investigación fue:

O1: Identificar indicadores de diagnóstico y formación que nos permitan reconocer niveles de habilidades y destrezas algebraicas de una población de alumnos de primero de bachillerato.

Y la hipótesis de partida de la investigación era:

H1: “Aplicar las pruebas diagnósticas de habilidades y destrezas algebraicas y la de funciones, favorece el conocimiento del nivel algebraico previo del alumnado y el origen de las dificultades en el aprendizaje de las matemáticas, permitiendo orientar la implementación del modelo de enseñanza-aprendizaje “Flipped Classroom” en la unidad de funciones en 1º de bachillerato”.

Para poder aceptar o rechazar la hipótesis, en lo que se refiere a los niveles algebraicos, recurrimos a la teoría de Collin y Piaget como punto de referencia sobre los niveles del

desarrollo de los aspectos numéricos – algebraicos (Fidela Velázquez, 2003) y hemos seguido la dificultad creciente de estos niveles.

Para poder diagnosticar el nivel en que se encontraban los alumnos de la población, recurrimos a dos pruebas diagnósticas: una de habilidades y destrezas algebraicas, basada en los cuestionarios realizados por Ruano y Socas (Ruano, R. y Socas, M., 2001), y otra de funciones, diseñada a partir de los ítems liberados de las pruebas PISA 2003-2009 (Consell Superior d’Avaluació del Sistema Educatiu. Generalitat de Catalunya, 2014).

Para detectar los tipos de errores más frecuentes que comete un alumno en los procesos de sustitución formal, generalización y modelización, tomamos como punto de referencia el estudio realizado sobre la clasificación de errores cometidos por los alumnos de secundaria en álgebra de Ruano, Socas y Palarea (Ruano, R. M., Socas, M. M. y Palarea, M. M., 2008).

Para conocer el nivel que poseen los alumnos de la población respecto a la modelización del cambio, a las relaciones con las funciones y ecuaciones pertinentes, y a la de crear, interpretar y traducir representaciones simbólicas y gráficas de las relaciones, tomamos como punto de referencia los resultados obtenidos en las pruebas PISA entre los años 2003-2009 y las dimensiones competenciales dadas por adaptadas a bachillerato.

De los resultados obtenidos en el capítulo 5 del estudio cuantitativo realizado, podemos concluir que, en el proceso algebraico de Sustitución, ambos ciclos lectivos se comportan de manera similar, con un alto índice de respuestas correctas. Por otra parte los errores observados con mayor frecuencia son aquellos de origen en un obstáculo, ya sea por la necesidad de clausura o por concatenación o yuxtaposición, y de origen en la ausencia de sentido, cuando el alumno tiene la necesidad de particularizar.

En cuanto al proceso algebraico de Generalización, podemos concluir que ambos ciclos lectivos se comportan de manera similar, con un índice de respuestas correctas del 75% en general. Los errores observados suelen ser de origen de ausencia de sentido, por la necesidad de particularizar, por utilización de las fórmulas de forma incorrecta, por características propias del lenguaje algebraico. El resto de errores observados corresponden a causas del tipo afectivas y/o emocionales.

Respecto al proceso algebraico de Modelización, podemos concluir que ambos ciclos lectivos se comportan de manera similar, pero en este proceso el índice de respuestas correctas no pasa el 40%. Observamos una gran cantidad de errores cometidos de origen en la ausencia de sentido, generalmente por la dificultad de tener que plantear la solución de una situación problemática con una expresión algebraica con variables en lugar de calcular cantidades con números directamente.

Constatamos que los resultados obtenidos en nuestro estudio se corresponden con los obtenidos por Ruano, Socas y Palarea (Ruano, R. M., Socas, M. M. y Palarea, M. M., 2008).

Respecto a la prueba de funciones, ambos ciclos se comportaron de manera similar, con un alto índice de respuestas correctas, por encima de la media de la OCDE, España y Cataluña en los ítems evaluados en PISA 2003-2009 (Consell Superior d'Avaluació del Sistema Educatiu.Generalitat de Catalunya, 2014).

En cuanto al estudio comparativo para ver si el nivel de conocimiento del álgebra y de funciones en particular cambia según la modalidad a la que pertenecen los alumnos (“ciencias y tecnología” o “ciencias sociales”), observamos que la Científico–tecnológica obtuvo en promedio mejores calificaciones en todas las pruebas. La mayor diferencia se observó en el proceso algebraico de generalización y la menor en la prueba de funciones. Por lo que podemos concluir que los alumnos de ambos ciclos que han optado por la modalidad aplicada a las ciencias sociales tienen mayores dificultades algebraicas que los de la modalidad de ciencias y tecnología.

Según los niveles de Collis y Piaget (Fidela Velázquez, 2003), podemos concluir que la mayor parte de los alumnos de ambos ciclos lectivos se encuentran en el paso del estadio de “generalización concreta o formal temprano” al de “operaciones formales”.

A modo de síntesis de todo lo expuesto y como conclusión del resultado de la prueba de *T-Student*, donde observamos que no existen diferencias significativas entre las medias globales de ambos ciclos, podemos decir, que las pruebas han servido como indicadores de diagnóstico y que ello nos ha permitido identificar en qué nivel de desarrollo algebraico se encuentra el alumnado de la población, que dificultades son las más frecuentes y desde qué nivel de conocimiento del tema de funciones podemos iniciar el trabajo en la nueva unidad con el modelo FC. Por lo que podemos aceptar la hipótesis de que aplicar las pruebas diagnósticas de

habilidades y destrezas algebraicas y la de funciones, ha favorecido el conocimiento del nivel algebraico previo del alumnado y el origen de las dificultades en el aprendizaje de las matemáticas, y nos ha permitido orientar la implementación del modelo de enseñanza-aprendizaje “*Flipped Classroom*” en la unidad de funciones en 1º de bachillerato.

9.2.2. Segunda etapa de la investigación

Para la segunda etapa de la investigación nos habíamos propuesto los siguientes objetivos:

O2. Trazar lineamientos perspectives para la utilización de las TIC en el proceso de enseñanza-aprendizaje de la matemática en aulas heterogéneas en primero de bachillerato, a partir de los diferentes tipos de recursos que permiten el uso de la computación como medio de enseñanza, en este proceso.

O3. Diseñar entornos de evaluación sobre el razonamiento inductivo y deductivo del álgebra vía online con alumnos diversos que nos permitan conocer las dificultades que tienen en su aprendizaje.

O4. Confeccionar unidades de trabajo en formato video tutorial que potencien las habilidades y destrezas relacionadas con el contexto algebraico de los alumnos de primero de bachillerato.

O5. Programar la unidad de “Funciones” donde utilicemos el método de “Flipped Classroom” en clase de matemáticas para trabajarlo con los alumnos.

En el capítulo 4 hemos recogido todo lo necesario para la ejecución de estos cuatro objetivos, tanto el material que se diseñó para realizar la implementación del modelo “*Flipped Classroom*” en la unidad de “Funciones” en el aula de primero de bachillerato como los lineamientos y pautas. El capítulo está redactado para que cualquier profesor que quiera implementarlo en su aula tenga a su disposición:

- El material para los profesores que participan de la experiencia: web, vídeo de presentación del modelo, guía para el docente, actividades de clase y cuestionarios de valoración del desarrollo de la clase).
- El material para los alumnos: web, guía de actuación, vídeos tutoriales, plantilla de Cornell para tomar apuntes, cuestionarios sobre la visualización de cada vídeo, actividades de clase, material de ayuda extra y la prueba final de contenidos.
- Los contenidos que se trabajan en la unidad de “Funciones”.

- Y por último, las pautas de cómo implementar el modelo FC en el aula, explicado paso a paso, para el profesor y para el alumno.

También se mencionan en ese capítulo a los diversos estudios que nos han servido como referencia para que el diseño de todo el material y lineamientos necesarios para implementar el modelo FC en el aula respondiese a los objetivos que nos habíamos planteado en nuestra investigación: los realizados por Bergmann y Sams (Bergmann, J.; Sams, A. , 2012) , la experiencia de elaboración de la plataforma MOOCs de aprendizaje de Salman Khan (Khan, 2012) y las pautas de análisis de incorporación de las TIC realizada por (Godino, J; Recio, A.;Roa, R; Ruiz, R y Pareja, J, 2005).

9.2.3. Conclusiones de la tercera etapa de la investigación

Los objetivos que nos habíamos propuesto al inicio de la investigación para esta etapa eran:

- O6. *Analizar los resultados del trabajo realizado por los alumnos en las unidades que se realizaron con “Flipped Classroom”.*
- O7. *Analizar logros de competencias fundamentales asociadas al trabajo algebraico realizado en el campo de las funciones.*
- O8. *Conocer la opinión de los alumnos y de los profesores que participan en la implantación del modelo de enseñanza “Flipped Classroom” en el aula de primero de bachillerato, sobre los recursos utilizados y el modelo en sí, como método de aprendizaje del álgebra.*

Y los supuestos e hipótesis eran:

S1: “El modelo de “Flipped Classroom” favorece la enseñanza y aprendizaje activo del álgebra, generando un ambiente de cooperación y diálogo en el aula.”

S2: “El modelo “Flipped Classroom” favorece:

- *La comunicación constructiva, tanto a nivel alumno-profesor, mejorando la relación entre ambos, como a nivel alumno-alumno al poder ayudarse unos a otros frente a una duda o dificultad.*
- *La personalización: Posibilita que el estudiante aprenda a su propio ritmo, tenga más control de su propio aprendizaje y estimula la comprensión de cada concepto antes de avanzar al siguiente.*

- *Atiende a la diversidad: Nivelada el aprendizaje respetando la heterogeneidad del alumnado.*
- *Accesibilidad, Recuperación y Revisión continua: Enfrenta el ausentismo y permite el acceso libre al alumno al material audiovisual tantas veces como le sea necesario.*
- *Sirve como herramienta de diagnóstico para identificar las dificultades del alumno.”*

H2: “Los alumnos que participan en la implantación del modelo “Flipped Classroom” consideran que utilizar los vídeos tutoriales como recurso para las clases de matemáticas favorece el aprendizaje del álgebra”

H3: “Los alumnos que participan en la implantación del modelo “Flipped Classroom” están a favor de realizar todas las unidades temáticas del curso con esta metodología de enseñanza-aprendizaje”.

S4: “Los profesores que participan en la implantación del modelo “Flipped Classroom” están a favor de realizar todas las unidades temáticas del curso con esta metodología de enseñanza-aprendizaje”.

En otras palabras, la intención de nuestro estudio ha sido analizar el proceso de la influencia del uso de videos tutoriales multimedia sobre el desarrollo de las habilidades y destrezas algebraicas del alumno y, más concretamente, analizar el proceso de enseñanza-aprendizaje del alumno utilizando el modelo “*Flipped Classroom*”.

Para el análisis de la implementación en el aula del modelo FC en el tema de funciones, hemos realizado un estudio cualitativo-cuantitativo en forma de “estudio de casos” de ocho alumnos de la población. Para contrastar los resultados hemos tomamos como referente el estudio de Kay y Kletschin (Kay, R.; Kletschin, I., 2012) y el estudio de caso de Pearson en Byron, Minnesota (Pearson Case Study, 2013). Los resultados de este estudio cualitativo se han expuesto en los capítulos 6 y 7.

Por otra parte, para conocer la opinión de alumnos y docentes que participaron en la investigación respecto al modelo FC implementado, realizamos una serie de cuestionarios cuyos resultados constan en el capítulo 8.

Del análisis de los resultados se desprenden las siguientes conclusiones:

- 1) El modelo “*Flipped Classroom*” favorece que el aprendizaje algebraico sea un proceso continuo, a través de la consulta de los materiales didácticos, de forma autónoma dentro y fuera del aula.**

Observamos que cuando un alumno de la muestra faltaba a clase, como por ejemplo Karla, María B o Nuria, recuperaban la clase perdida accediendo al web, viendo el vídeo tutorial y descargando y realizando la actividad correspondiente. Por otra parte, todos los alumnos tenían libre acceso al material cuando querían repasar o estudiar para los exámenes, y en los cuestionarios la gran mayoría expresaron haberlo hecho.

En el cuestionario de valoración final del modelo FC que respondieron 123 alumnos de los 149 que participaron en la implementación del mismo en las clases de matemáticas, más del 50% expresaron que volvieron a ver los vídeos tutoriales para repasar para el examen, o porque tenían dudas, o para estudiar, y aproximadamente un 70% utilizó las actividades resueltas colgadas en la web. Por lo que, tomando como referencia la experiencia de Bergmann y Sams (Bergmann, J.; Sams, A. , 2012), podemos constatar que el modelo FC favorece al alumno que tiene deficiencias en su proceso de aprendizaje, bien sea por ausencias a clase o por tener “lagunas” en los temas, por el hecho de tener libre acceso a los materiales, de forma permanente, para subsanarlas.

- 2) El modelo de “*Flipped Classroom*” favorece la enseñanza-aprendizaje del algebra del alumnado que presenta dificultades de aprendizaje matemático.**

En el estudio de casos hemos podido observar que la evolución del aprendizaje de las matemáticas de los cuatro alumnos que tenían notas por debajo del 5 antes de empezar a trabajar con el modelo FC, ha sido positiva en todos los casos. Eran alumnos con dificultades a nivel algebraico y en sus hábitos de estudio. El modelo FC les ha sido de ayuda para compensar estas dificultades, sistematizando su estudio, ordenando y exponiendo el material tanto teórico como práctico de forma continua y virtual, generando espacios de diálogo con el profesor y los compañeros para que pudiesen detectar dificultades, consultar dudas y construir conjuntamente los conceptos, y,

sobre todo, permitiéndoles que pudiesen ir a su propio ritmo. Podemos contrastar nuestra experiencia con la de Greg Green (Green, 2012), que aplicó el modelo FC durante 18 meses en la escuela secundaria donde era director y observó que el porcentaje de suspensos en matemáticas había disminuido de un 44% a un 13% después de aplicar el modelo FC durante este periodo.

3) No se puede atribuir al modelo FC una mejora significativa en los resultados académicos del alumnado de matemáticas de primero de bachillerato que no presenta dificultades en el aprendizaje del álgebra.

En el estudio de casos hemos podido observar en la evolución del aprendizaje de las matemáticas de los cuatro alumnos que tenían notas por encima de 5 antes de empezar a trabajar con el modelo FC, que la nota obtenida en la prueba de contenidos ha disminuido, en todos los casos .

En el caso de las dos alumnas con notas más altas, por ejemplo, hemos observado que están completamente adaptadas a la metodología de la clase tradicional. Son alumnas que realizan muy bien las primeras etapas de aprendizaje de la Taxonomía de Bloom en clase, escuchando y apuntando lo que el profesor explica y escribe en la pizarra, y preguntándole sobre las dudas que tienen en el momento. Al llegar a casa realizan en solitario las etapas restantes, y por último, vuelven a clase para rematar la tarea con la etapa de “evaluar”, con muy alto rendimiento y pocas dificultades. Al contrario, el trabajo con el modelo FC, que traslada la responsabilidad del aprendizaje al alumno, les parece entretenido, pero ven que no les favorece, porque las obliga a hacer un esfuerzo extra para construir los conceptos y sus relaciones, y deben compartir los resultados con los compañeros del grupo. En otras palabras, el modelo FC, por su propia forma de desarrollo, las obliga a realizar todas las etapas de la Taxonomía de Bloom a conciencia y de forma cooperativa.

El caso de los dos alumnos con notas entre el 5 y el 7,5, es ligeramente distinto; aunque no notamos una mejora en la prueba de contenidos, si pudimos apreciarla en lo que se refiere a sus hábitos de estudio. Hecho que ellos mismos destacan y que les hace pensar que puede ser un modelo de aprendizaje positivo en ocasiones.

No obstante, creemos que para este tipo de alumnos la mejora del trabajo con el modelo FC en una unidad no es del todo concluyente, puesto que probablemente necesitarían un tiempo de adaptación más largo y deberían convencerse de que les va a permitir obtener mejores notas y resultados, y aprender más en profundidad que con las clases de la forma tradicional.

4) El modelo FC ofrece mayor posibilidad al docente de detectar las dificultades de aprendizaje algebraico del alumnado, de forma previa a las pruebas de contenidos.

Basándonos en el modelo FC que proponen Bergmann y Sams (Bergmann, J.; Sams, A. , 2012), y que implementamos en nuestra población de estudio, podemos concluir que los apuntes de Cornell han resultado ser un gran recurso para poder visualizar cómo los alumnos organizan los conceptos en su mente, qué ideas les parecen las principales y cuáles las secundarias o si se limitan a realizar una transcripción textual del contenido del vídeo, cómo jerarquizan los contenidos, si utilizan diagramas o gráficos para sintetizar información, si les han quedado dudas, si pueden dar un paso más allá y aplicar el contenido que acaban de ver a nuevas situaciones, y, por último, si saben resumir e identificar aquello prioritario que deben saber de ese tema para la prueba final de contenidos. Los apuntes de Cornell permiten que el profesor pueda revisarlos en clase y que pueda trabajar con ellos para reestructurar las ideas y por ende los conceptos erróneos de sus alumnos. En conclusión, para el docente es un instrumento de gran ayuda para detectar las dificultades que puede tener el alumno, tanto a nivel globalizador como en lo particular, y, en consecuencia, trabajar en clase con posterioridad para ayudarle a superarlas.

Otra herramienta que hemos observado que puede ser de gran ayuda para el docente para poder detectar qué conceptos del vídeo tutorial no se han comprendido correctamente, son los cuestionarios en línea. Con solo tres preguntas, el profesor sabe si el alumno ha entendido o no el tema, además de poder medir la efectividad del vídeo realizado. Si cada alumno se equivoca en lo mismo o tienen una pregunta similar en clase, es evidente que el vídeo no es correcto, y se puede tomar nota para rehacerlo o modificarlo.

Por último destacamos el que quizás es el recurso más importante que introduce el modelo FC que hemos observado en nuestra investigación: la visión de los vídeos tutoriales en casa, de forma previa, permite dedicar toda la clase posterior a realizar actividades centradas en el estudiante; ello da pie a que el rol del profesor tome una nueva dimensión: además de guiar la actividad, puede detectar y solucionar las áreas de dificultad de los estudiantes, como ya observaron Toto y Nguyen en su estudio (Toto, R.; Nguyen, H., 2009). Para ello, el profesor puede utilizar el dossier de actividades del alumno como espacio de observación de su forma de resolución de los ejercicios, permitiéndole ver si plantea y desarrolla el problema correctamente, si identifica gráficos y diagramas y sabe extraer conclusiones de ellos, etc.

5) El modelo de “*Flipped Classroom*” favorece la comunicación constructiva, tanto a nivel alumnado-profesorado como entre alumnado.

Como observaron Lage, Platt y Treglia (Lage, M. J., Platt, G. J., & Treglia, M, 2000) en su estudio, constatamos en el nuestro que la interacción alumno-profesor es beneficiosa para incrementar el grado de comprensión del alumnado, bien sea porque el alumno consulta las dudas en clase al profesor o porque el profesor puede observar de forma previa y objetiva el desempeño y el grado de comprensión de sus alumnos.

De hecho, vemos que los alumnos de la muestra expresan en todo momento, sobre todo aquellos con mayor dificultad, que es en clase, cuando trabajan en grupo o con un compañero, cuando pueden darse cuenta fácilmente de sus errores o bien consultar las posibles dudas. Por otra parte, observamos en los cuestionarios finales realizados a toda la población que el 80% de los alumnos expresan que las actividades en grupo o las de tutoría de iguales favorecen la ayuda mutua, el compartir ideas y luego elaborar una conclusión entre todos, observar los ejercicios desde diferentes puntos de vista e incluso poder disponer de tiempo para ayudar a algún compañero que no ha comprendido del todo el contenido, tomando el rol del profesor.

6) La percepción del alumnado y los docentes respecto al modelo FC es que se debería aplicar en algunas unidades del programa de matemáticas de primero de bachillerato.

De igual manera que Toto y Nguyen (Toto, R.;Nguyen, H., 2009) estudiaron la percepción de los estudiantes respecto al modelo FC, entre los alumnos que han participado de la experiencia de realizar una unidad del temario de matemáticas con el modelo FC en nuestra investigación, un 74% considera que el modelo FC es mejor o igual que el método tradicional de enseñanza. Las causas que exponen como más importantes son:

- Porque les obligaba a prepararse el tema para la clase;
- Porque les ordenó el estudio;
- Porque les ayudó a sistematizar su estudio y a organizarse;
- Porque las clases eran más divertidas;
- Porque les permitió elaborar el tema a ellos mismos;
- Porque si tenían dudas podían contar con el profesor para preguntarle en clase;
- Porque podían hacer los ejercicios a su propio ritmo;
- Porque si faltaban a clase tenían todo lo necesario para ponerse al día.

Además, un 70% del alumnado expresó que sus resultados académicos con este modelo habían sido mejores o iguales, que con el método tradicional.

No obstante, cuando les preguntamos qué preferían para ver el temario completo de matemáticas del curso, solo un 10% expresó que querrían hacerlo con FC. Ahora bien, más de la mitad de la población encuestada, opina que la opción más interesante sería realizar una mezcla de los dos métodos, un “mix” como dicen ellos.

Las razones que exponen se deben sobre todo a las ventajas que observan en el modelo FC: una metodología innovadora que utiliza las TIC, sencilla y motivadora, que aporta clases más entretenidas y dinámicas, que pueden acceder a los vídeos las veces que necesiten, que les obliga a tener el temario estudiado al día, que ofrece mayor interactividad con el profesor y con los compañeros, que se adapta a las necesidades académicas de cada uno y les permite ir aprendiendo a su propio ritmo.

Sin embargo señalan que con el método tradicional pueden preguntar las dudas al profesor en el momento que explica el tema y que no a todos les gusta trabajar con ordenador y tener que ver cada día un vídeo en casa, elaborar el contenido que les

explican y tomar apuntes. Expresan que los vídeos permiten comprender mejor los conceptos de forma visual pero que las clases tradicionales permiten comprender mejor el desarrollo analítico. Por todo ello proponen realizar las unidades con mayor contenido visual con el modelo FC (trigonometría, rectas en el plano, funciones, modelos funcionales, etc.) y las que tienen mayor contenido analítico con el método tradicional (límite, continuidad, asíntotas y derivadas de una función, etc.).

En el apartado relativo a la opinión de los profesores teníamos la referencia de la investigación de Faulkner, un profesor de matemáticas de la escuela secundaria de Byron, Minnesota (Pearson Case Study, 2013) que estudió la percepción de los profesores de matemáticas sobre el modelo FC, y concluyó que preferían el aprendizaje con FC al formato de clase tradicional de las matemáticas.

En nuestra propia investigación los profesores reconocen que es una metodología muy innovadora, pero que se debería ir introduciendo muy lentamente en las aulas, sobre todo desde edades más tempranas.

Nos indican que a los alumnos les ha costado introducirse en la dinámica del modelo FC, porque no están acostumbrados a trabajar con este método. Piensan que es una buena metodología para trabajar con TIC, y que evita los inconvenientes de la conexión a internet en el aula, puesto que hacen este trabajo en casa. Valoran muy positivamente el hecho de disponer de la clase como espacio para atender individualmente las dudas de los alumnos y detectar si hay dificultades antes de los exámenes.

En cuanto al contenido curricular, expresan que debería haber menos vídeos y que deberían ser más cortos. De ellos resaltan que la parte visual y gráfica de los mismos ayuda a que los alumnos comprendan mejor los temas. Por otra parte, plantean que para aplicar este modelo en otra unidad, prefieren trabajar con plataformas MOOCs, como Khan Academy¹ o Unicoos², para evitar cargas laborales excesivas que requeriría la preparación de los propios videos tutoriales.

¹ Disponible en www.khanacademy.org

² Disponible en www.unicoos.com

Teniendo en cuenta las conclusiones extraídas del análisis de los resultados del estudio de casos y de los cuestionarios realizados a los alumnos de toda la población y a los profesores que participaron en la implantación del modelo FC en la clase de matemáticas en la unidad de “funciones”, podemos responder y reformular los supuestos e hipótesis que nos habíamos planteado inicialmente:

- Que el modelo “*Flipped Classroom*” favorece la enseñanza y aprendizaje activo del álgebra, generando un ambiente de cooperación y diálogo en el aula, dependiendo del tipo de alumnado con el que se trabaje.
- Que el modelo “*Flipped Classroom*” favorece:
 - La comunicación constructiva, tanto a nivel alumno-profesor, como a nivel alumno-alumno, al poder ayudarse unos a otros frente a una duda o dificultad.
 - La personalización: el estudiante puede aprender a su propio ritmo, tiene más control de su propio aprendizaje y estimula su comprensión de cada concepto antes de avanzar al siguiente.
 - Atiende a la diversidad: nivela el aprendizaje, respetando la heterogeneidad del alumnado, y se adapta a las necesidades académicas de cada uno y las mejora.
 - Accesibilidad, Recuperación y Revisión continua: enfrenta el absentismo y permite el acceso libre al material audiovisual por parte del alumno, tantas veces como sea necesario.
 - Sirve como herramienta de diagnóstico para identificar las dificultades del alumno.
- Que los alumnos que participaron en la implantación del modelo “*Flipped Classroom*” consideran que los vídeos tutoriales son un recurso para las clases de matemáticas y que favorecen el aprendizaje del álgebra en ocasiones, sobre todo cuando el contenido es más de tipo visual y no analítico. Y que por este motivo están a favor de realizar algunas de las unidades temáticas del curso con esta metodología de enseñanza-aprendizaje.

- Que los profesores que participaron en la implantación del modelo “*Flipped Classroom*” están a favor de realizar algunas de las unidades temáticas del curso con esta metodología de enseñanza-aprendizaje, pero que el proceso de incorporación del mismo debe ser paulatino, buscando recursos ya existentes para su realización, sin que sea necesario crearlos.

9.3. APORTES DIDÁCTICOS, LIMITACIONES Y PERSPECTIVAS DE FUTURAS INVESTIGACIONES

Durante las etapas de la investigación hemos aportado diferentes recursos para trabajar en clase con el modelo FC. Entre ellos podemos destacar:

- **Los vídeos tutoriales:** como preparar el tema que se quiere explicar, el *software* que se necesita para elaborarlos y cómo editarlos.
- **El web:** como realizar un web en la que los alumnos y profesores que participan de la experiencia puedan encontrar todo el material didáctico que necesitan.
- **Los cuestionarios en línea:** cómo elaborar formularios utilizando aplicaciones como el “*google drive*” para saber si el alumno ha comprendido el contenido del vídeo.
- **Las actividades de clase** diseñadas para trabajar las competencias de funciones en el aula, con diferentes tipos de metodologías (grupal, tutoría de iguales e individuales).
- **Las pruebas de contenidos,** diseñadas en función de las competencias y objetivos que se espera que un alumno de primero de bachillerato aprenda del tema de “Funciones”
- **Las guías para alumnos y profesores,** donde se detallan todas las cuestiones referentes a la implementación del modelo FC para que tanto el alumno como el docente sepan lo que deben hacer en cada momento.
- **Las pautas para el proceso de implantación,** una propuesta que surge de nuestra experiencia y que puede ayudar a que el profesor que desee utilizar este modelo en su clase pueda hacerlo teniendo presente todos los pasos necesarios para su correcto desarrollo.
- **Los criterios para valorar el nivel inicial algebraico del alumno y el nivel de aprendizaje algebraico,** basándonos en las pruebas propuestas de diagnóstico de Ruano y Socas (Ruano, R. y Socas, M., 2001), en los ítems PISA (Consell Superior d’Avaluació del Sistema Educatiu. Generalitat de Catalunya, 2014) que tienen relación directa con los niveles de pensamiento aritméticos-algebraicos planteados por Collin y Piaget (Fidela Velázquez, 2003), y en las etapas del desarrollo del aprendizaje de la Taxonomía de Bloom (Brame, 2013) y (Santiago, 2014).

Las futuras investigaciones deberían orientarse a mejorar y optimizar estos recursos diseñados. No debemos olvidar que hemos trabajado sólo en una unidad de matemáticas en primero de bachillerato, con alumnos de un solo colegio que en general estaban bastante

pautados, poco acostumbrados a trabajar con ordenador en la asignatura, y de los que sólo hemos podido estudiar a ocho en profundidad, en toda su evolución de aprendizaje. Es por todo ello que pensamos que futuras investigaciones podrían estudiar:

- El modelo FC aplicado a todo el programa de la asignatura, para ver si la propuesta de los alumnos de hacerlo de forma mixta es viable y favorable en el aprendizaje de las matemáticas.
- La aplicación del modelo FC a un grupo durante todo su paso por bachillerato para ver si la evolución muestra un aumento favorable en cuanto al aprendizaje de las matemáticas.
- Las limitaciones del modelo FC y posibles soluciones: por ejemplo la utilización de foros (*networking*) de los compañeros de clase, para que durante la visualización del vídeo se puedan preguntar dudas.
- El modelo FC para las clases de refuerzo para alumnos de educación secundaria obligatoria.
- Ampliar el campo de estudio a institutos públicos, con alumnado más heterogéneo.
- La evaluación de los estudiantes en el modelo FC.
- La evolución del trabajo cooperativo en las clases con el modelo FC, a través del análisis de filmaciones audiovisuales.

Yendo más allá y ante la realidad de refugiados e inmigrantes que llegan a nuestro país en la búsqueda de mejores condiciones de vida, cuestión que como docentes nos moviliza a buscar adaptaciones didácticas para atender y acompañar a cada alumno dentro de la diversidad del aula, creemos que una gran oportunidad de cooperación desde la investigación sería estudiar cómo se puede implementar el modelo FC para favorecer el aprendizaje de las matemáticas, la comunicación y la cooperación en aulas inclusivas donde los alumnos hablan diferentes idiomas.

BIBLIOGRAFIA

BIBLIOGRAFIA	429
<u>B1 - Bibliografía de la Contextualización y Problemática de la Investigación</u>	433
<u>B2 - Bibliografía del Marco Referencial</u>	435
<u>B3 - Bibliografía de la Metodología y el diseño de material FC</u>	441

B1 - Bibliografía de la Contextualización y problemática de la investigación

Alsina i Pastells, A. (2008). *Matemática Inclusiva*. España: Narcea.

Badia, A. y García, C. (2006). Incorporación de las TIC en la Enseñanza y el Aprendizaje basados en la elaboración colaborativa de proyectos. *Revista de Universidad y Sociedad del Conocimiento* .

Bergmann, J. y Sams, A. (2012). *Bergmann, J. y Sams, A. Flip Your Classroom, Reach Every Student in Every Class Every Day*. EEUU: ISTE.

Cobián, Nielsen y Solis. (1998). Contexto Socio-Cultural y aprendizaje Significativo. *Educar, Revista de educación, nueva época, núm. 5, Secretaría de Educación, Gobierno del estado de Jalisco* .

Cuban, L. (2008). *Frogs Into Princes. Writings on School Reform*. Nueva York. *Teachers' College Press* .

Dussel, I. y Quevedo, L. (2010). Educación y nuevas tecnologías: los desafíos pedagógicos ante el mundo digital. *IV FORO LATINOAMERICANO DE EDUCACIÓN*. Buenos Aires, Argentina: Santillana.

Echevarría, J. (2000). Educación y tecnologías telemáticas. *Revista Iberoamericana de Educación*. N°24. En <http://tecnologiaedu.us.es/cuestionario/bibliovir/317.pdf> .

Escobar, F. J. (2009). Las nuevas tecnologías como recursos didácticos: educación asistida por ordenador, soportes digitales e internet. *Innovación y Experiencias Educativas*, n° 16 .

García - Valcárcer, A. (2007). Desarrollo e innovación tecnológica en la educación. *Modelo Sistémico de Evaluación Institucional para el Mejoramiento de la Calidad Educativa* .

Generalitat de Catalunya, Departament d'Ensenyament. (s.f.). Currículum batxillerat – Decret 142/2008 - DOGC núm. 5183. En <http://www.xtec.cat/alfresco/d/d/workspace/SpacesStore/c5fe6a2e-9a69-4acc-b723-c5d4fe75e7a0/matematiques.pdf> .

Jenkins, H. (2006). Confronting the challenges of participatory culture: Media education for the 21st. *MacArthur Foundation*. En http://digitalllearning.macfound.org/atf/cf/%7B7E45C7E0-A3E0-4B89-AC9C-E807E1B0AE4E%7D/JENKINS_WHITE_PAPER.PDF .

Moreira, M. (2011). El proceso de integración y uso pedagógico de las TIC en los centros educativos. Un estudio de casos. *Revista de Educación*. N°352 .

NCTM. (2000). Executive Summary. Principles and Standards for School Mathematics. http://www.nctm.org/uploadedFiles/Math_Standards/12752_exec_pssm.pdf .

- Nieto, S, Bode, P. (2011). *Affirming Diversity: The Sociopolitical Context of Multicultural Education. 6th Edition*. Boston: Pearson Education, Inc.
- Prats, J. (2002). INTERNET EN LAS AULAS DE EDUCACIÓN SECUNDARIA. *IBER DIDÁCTICA DE LAS CIENCIAS SOCIALES, GEOGRAFIA E HISTORIA*. Número, 29 .
- Ríos Hernández, M. (2009). LA INCLUSIÓN EN EL ÁREA DE EDUCACIÓN FÍSICA EN ESPAÑA. *Ágora para la EF y el Deporte*, n.º 9 , 83-114.
- Sigalés, C.; Mominó, J. , Meneses, J. y Badia,A. . (2008). Integración de Internet en la Educación Escolar Española. *IN3 - Universitat Oberta de Catalunya* , 119.
- Sigalés, C.; Mominó, J. y Meneses, J. (2009). TIC e innovación en la educación escolar española. Estado y perspectivas. *TELOS, Cuadernos de Comunicación e Innovación*. En <http://telos.fundaciontelefonica.com/telos/articulocuaderno.asp?idarticulo=4&rev=78.htm> .

B2 - Bibliografía del Marco Referencial

Azcarate, C. y Camacho, M. (2003). Sobre la investigación en didáctica del Análisis Matemático. Boletín de la Asociación Matemática Venezolana, Vol. X, No. 2 (2003). *Boletín de la Asociación Matemática Venezolana, Vol. X, No. 2* , 134-149.

Azcarate, C. y Deulofeu J. . (1996). *Funciones y gráficas*. . Madrid: Síntesis.

Baker, J. (2000). The "classroom flip": Using web course management tools to become the guide by the side. *11th International Conference on College Teaching and Learning*. Jacksonville, FL.

Bennett, B., Bergmann, J., Cockrum, T., Fisch, K., Musallam, R., Overmyer, J., Sams, A., Spencer, D. (2012). *The flipped class manifest*. En <http://www.thedailyriff.com/articles/the-flipped-class-manifest-823.php>. The Daily Riff.

Bergmann, J.; Sams, A. . (2012). *Flip Your Classroom: Reach Every Student in Every Class Every Day*. International Society for Technology in Education.

Bishop, J. & Verleger, M. . (2013). The flipped classroom: a survey of the research. En www.asee.org/public/conferences/20/.../download. *120th ASEE Annual Conference & Exposition. American Society for Engineering Education*. . Atlanta.

Bloom, B. (1978). New views of the learner: Implications for instruction and curriculum. *Educational Leadership*, *Educational Leadership*, 35(7). En http://www.ascd.org/ASCD/pdf/journals/ed_lead/el_197804_bloom.pdf , 563-576.

Bolaños, S. et al. (2011). *Constructivismo Social*. En <http://constructivismo.webnode.es/autores-importantes/lev-vigotsky/>.

Booth, L. R. (1998). *Children's difficulties in beginning algebra. The ideas of algebra, K-12*. Reston, VA: National Council of Teachers of Mathematics. En <http://elementaryalgebra.cmswiki.wikispaces.net/file/view/Childrens+Difficulties+in+Beginning+Algebra.pdf>. In A. F. Coxford & A.P. Shulte.

Brame, C. (2013). *Flipping the classroom*. Vanderbilt University Center for Teaching. En <http://cft.vanderbilt.edu/guides-sub-pages/flipping-the-classroom/>.

Brandt, S. (1997). Constructivism: teaching for understanding of the Internet, Communications of the ACM, 40(10), 112–117. *Communications of the ACM, Volumen 40(10)*. En <http://dl.acm.org/citation.cfm?id=262814> , 112–117.

Brihuega Nieto, J. (1997). "Las Matemáticas en el Bachillerato". *Revista SUMA nº25* , 113-122.

Cerdán, F. (2008). *Estudios sobre diferentes aspectos de la enseñanza del álgebra*. Valencia: Universitat de València.

- Day, J.; Foley, J. (2006). Evaluating a Web Lecture Intervention in a Human–Computer Interaction Course. *IEEE Transactions on Education*, 49(4). , 420-431.
- Fidela Velázquez, M. (2003). Una propuesta de tránsito gradual de la aritmética al álgebra. X JAEM. Ponencia P74, (págs. 669-688).
- Fink, Z. (2011). Big thinkers: Salman Khan on liberating the classroom for creativity. *Edutopia: K-12 Education & Learning Innovations with Proven Strategies that Work*. En <http://www.edutopia.org/salman-khan-academy-flipped-classroom-video> .
- Font, V. (2011). Las funciones y la competencia disciplinar en la formación docente matemática. *UNO. Revista de Didáctica de las Matemáticas*, 56. , 86-94.
- Freudenthal, H. (2001). *Didactical Phenomenology of Mathematical Structures*. Traducción de Luis Puig, publicada en *Fenomenología didáctica de las estructuras matemáticas*. México: CINVESTAV.
- Fulton, K. (2012). Inside the flipped classroom. *The Journal*. En <http://thejournal.com/articles/2012/04/11/the-flipped-classroom.aspx> .
- García, E. (2011). *Fundamentos y métodos en la enseñanza y aprendizaje inicial del álgebra. Una propuesta concreta*. Madrid: Universidad Complutense de Madrid.
- García-Varcárcel, A. (2014). *Las nuevas tecnologías como herramientas didácticas*. Salamanca: En <http://es.scribd.com/doc/248107270/LAS-NUEVAS-TECNOLOGI-AS-COMO-HERRAMIENTAS-DIDA-CTICAS#scribd>.
- Godino, J; Font, V. (2003). *Razonamiento algebraico y su didáctica para maestros*. Proyecto Edumat-Maestros. matemáticas y su didáctica para maestros. En <http://www.ugr.es/local/jgodino/edumat-maestros/>.
- Godino, J; Recio, A.; Roa, R; Ruiz, R y Pareja, J. (2005). Criterios de diseño y evaluación de situaciones didácticas basadas en el uso de medios informáticos para el estudio de las matemáticas. En http://www.sinewton.org/numeros/numeros/64/investigacion_01.pdf .
- González, Z. (2013). *Los medios Educativos en el Proceso de Aprendizaje*. Panamá: En <http://zurianygonzalez.blogspot.com.es/2013/08/evaluacion-de-los-medios-educativos.html>.
- Goodyear, P. (2001). *Effective networked learning in higher education: Notes and guidelines (Deliverable 9)*. Bristol: Joint Information Systems Committee (JISC).: En http://csalt.lancs.ac.uk/jisc/docs/Guidelines_final.doc.
- Green, G. (2012). *My view: Flipped classrooms give every student a chance to succeed*. . Schools of Thought - CNN.com Blogs. En <http://schoolsofthought.blogs.cnn.com/2012/01/18/my-view-flipped-classrooms-give-every-student-a-chance-to-succeed/>.

- Hamden, N. et al. (2013). *A review of flipped learning*. Flipped Learning Network. En <http://fnds6952-jbyrom.wikispaces.com/file/view/LitReview+Flipped+Learning.pdf>. NJ: Pearson Education.
- Harper, E. (1981). Psychological changes attending a transition from arithmetical to algebraic thought. *Proceedings of the 5th PME Conference* .
- Higueras, L. (1998). *La noción de función: análisis epistemológico y didáctico*. Tesis doctoral. Universidad de Granada. Granada.
- Johnson, G. (2013). *Student perceptions of the flipped classroom*. Tesis de Master. . The University of British Columbia. En https://circle.ubc.ca/bitstream/handle/2429/44070/ubc_2013_spring_johnson_graham.pdf?sequence=1 .
- Kay, R.; Kletschin, I. (2012). Evaluating the use of problem-based video podcasts to teach mathematics in higher education. *Computers & Education*, 59(2) , 619–627.
- Khan, S. (2012). *How Can Videos "Flip The Classroom"?* En <http://www.npr.org/2012/06/22/155228627/how-can-videos-flip-the-classroom>.
- Kieran, C. (2006). *Research on the Learning and Teaching of Algebra*. Rotterdam, The Netherlands: Sense Publishers.: En A. Gutiérrez y P. Boero (Eds.), *Handbook of Research on the Psychology of Mathematics Education: Past, Present and Future*.
- Kieran, C., Filloy. (1989). El aprendizaje del álgebra escolar desde una perspectiva psicológica. *Enseñanza de las ciencias*. Traducción castellana de Luis Puig , 229-240.
- Kim, K.; Bonk, C. (2006). The Future of Online Teaching and Learning in Higher Education: The Survey Says. *Educause Quarterly*, 29 (4). En <http://www.educause.edu/ero/article/future-online-teaching-and-learning-higher-education-survey-says> , 22-30.
- Kirch, C. (2012). *Does the "Flipped Classroom" increase student understanding and proficiency?* En <http://flippingwithkirch.blogspot.com.es/2012/02/does-flipped-classroom-increase-student.html>.
- Lage, M. J., Platt, G. J., & Treglia, M. (2000). Inverting the classroom: A gateway to creating an inclusive learning environment. *Journal of Economic Education*, 31 , 30-43.
- Lage, M.; Platt, G. (2000). The internet and the inverted classroom. *The Journal of Economic Education*. Volume 31, Issue 1 , 11.
- Leinhardt, G.; Zaslavsky, O. y Stein M. (1990). Functions, Graphs, and graphing: Task, Learning, and Teaching. *Review of Educational Research*. En <http://www.math.ksu.edu/~bennett/onlinehw/qcenter/lzs.pdf> , 1-64.
- Mayer, R. (2005). *Cognitive theory of multimedia learning*. New York: R.E. Mayer (Ed.), *The Cambridge Handbook of Multimedia Learning*. New York: Cambridge University Press.

- Mazur, E. (1997). *Peer instruction: a user's manual*. . New Jersey: Prentice Hall Series in Educational Innovation.
- McFeeley, R.; Milner, J. (2009). *The kernel lecture and its effect on student engagement*. Winston-Salem, North Carolina, USA: Research presented at Wake Forest University, Department of Education Annual Research Forum.
- Musallam, R. (2010). *The effects of using screencasting as a multimedia pre-training tool to manage the intrinsic cognitive load of chemical equilibrium instruction for advanced high school chemistry students. (Tesis Doctoral)*. The University of San Francisco. Disponible en <http://www.ramseymusallam.com/resources/Dissertation.musallam.pdf>.
- Noschese, F. (2011). *Khan Academy: My final remarks. Action-Reaction: Reflections on the dynamics of teaching*. En <http://fnoschese.wordpress.com/2011/05/10/khan-academy-my-final-remarks/>.
- Overmyer, G. (2014). *The flipped classroom model for college algebra: effects on student achievement (Tesis doctoral)*. Colorado State University.
- Overmyer, J. (2015). *Teacher vodcasting and flipped classroom network - A professional learning community for teachers using vodcasting in the classroom. Teacher Vodcasting and Flipped Classroom Network*. Consultado el 16 de enero de 2015. the Mathematics and Science Teaching (MAST) Institute at the University of Northern Colorado. En <http://flippedclassroom.org/>.
- Pabon, C. (2013). *La globalización y las TIC*. Colombia: En <http://tic-globalizacion.blogspot.com.es/>.
- Pearson Case Study. (2013). *Flipped learning model increases student engagement and performance*. Foundations of Flipped Learning. Upper Saddle River, NJ: Pearson Education.
- Ramos, A. (2012). *Análisis comparativo: ventajas y desventajas para el modelo de Massive Online Open Courses - MOOC*. España: America, Learning & Media. En <http://www.americlearningmedia.com/component/content/article/195-analisis/2378-ventajas-y-desventajas-para-el-modelo-de-massive-online-open-courses-mooc>.
- Robledo, J. (2003). *Registros semióticos de representación y matemáticas universitarias. (Tesis de maestría)*. Cali, Colombia: Universidad del Valle.
- Romberg, T.; Fennema, E.; Carpenter, T. (Eds). (2009). *Integrating Research on the Graphical Representation of Functions*. New Jersey: Lawrence Erlbaum. Transferred to Digital Printing by Routledge.
- Ruano, R. M., Socas, M. M. y Palarea, M. M. (2008). Análisis y clasificación de errores cometidos por alumnos de secundaria en los procesos de sustitución formal, generalización y modelización en álgebra. <http://www.pna.es/Numeros2/pdf/Ruano2008PNA2%282%29Analisis.pdf> , 61-74.

- Ruiz Munzón, N. (2010). *La introducción del álgebra elemental y su desarrollo hacia la modelización funcional*. Barcelona.
- Ruiz-Higueras, L. (1993). *Tesis Doctoral: Concepciones de los alumnos de secundaria sobre la noción de función. Análisis epistemológico y didáctico*. Granada: Universidad de Granada. Departamento de Didáctica de la Matemática.
- Santiago, R. (2014). *Conectando las dimensiones cognitivas y la taxonomía revisada de Bloom*. En <http://www.theflippedclassroom.es/conectando-las-dimensiones-cognitivas-y-la-taxonomia-revisada-de-bloom/>.
- Schnotz, W. (2002). Aprendizaje Multimedia desde una perspectiva cognitiva. *Boletín de la Revista de Docencia Universitaria*. Vol 2, No 2. En <http://revistas.um.es/redu/article/view/20011/19381> , 31-40.
- Shyu, H. (2000). Using video-based anchored instruction to enhance learning: Taiwan'experience. *British Journal of Educational Technology*,31 (1) , 57-69.
- Socas, M. (2007). Dificultades y errores en el aprendizaje de las matemáticas. Análisis desde el enfoque lógico semiótico. En http://funes.uniandes.edu.co/1247/1/Socas2008Dificultades_SEIEM_19.pdf .
- Socas, M. (1997). Dificultades, obstáculos y errores en el aprendizaje de las Matemáticas en la Educación Secundaria. En *“La educación matemática en la enseñanza secundaria”*. En <http://cumbia.ath.cx:591/pna/Archivos/SocasM97-2532.PDF> , 125-154.
- Strayer, J. (2007). *The effects of the classroom flip on the learning environment: a comparison of learning activity in a traditional classroom and a flip classroom that used an intelligent tutoring system (Tesis Doctoral)*. Ohio: The Ohio State University. En https://etd.ohiolink.edu/!etd.send_file?accession=osu1189523914&disposition=inline.
- Toppo, G. (2011). *Flipped classrooms take advantage of technology*. USA: USA TODAY. En <http://usatoday30.usatoday.com/news/education/story/2011-10-06/flipped-classrooms-virtual-teaching/50681482/1>.
- Toto, R.;Nguyen, H. (2009). “Flipping the Work Design in an Industrial Engineering Course”. *Proceedings, 39th ASEE/IEEE Frontiers in Education Conference*. Disponible en www.asee.org/public/conferences/8/.../download, (págs. 1-4). San Antonio, Texas, USA.
- Touron, J. et al. (2015). *“ The Flipped Classroom” : Experiencias y recursos para "dar vuelta" a la clase*. España: En <http://www.theflippedclassroom.es/>.
- Wheeler, S. (2012). *What the flip?* En <http://steve-wheeler.blogspot.com.es/2012/03/what-flip.html>.
- Wright, S. (2012). *Flipping Bloom's Taxonomy*. Disponible en <https://shelleywright.wordpress.com/2012/05/29/flipping-blooms-taxonomy/>.

Wussing, H. (1998). *Lecciones de Historia de las Matemáticas*. Madrid: Siglo XXI de España Editores, S.A.

B3 - Bibliografía de la Metodología y el diseño de material FC

Abreu, G. (1998). Studying Social Representations of Mathematics Learning in Multiethnic Primary Schools: Work in Progress. *Papers on Social Representations*, 7(1-2) , 1-20.

Alsina i Pastells, A. (2008). *Matemática Inclusiva*. España: Narcea.

Azcarate, C. y Camacho, M. (2003). Sobre la investigación en didáctica del Análisis Matemático. Boletín de la Asociación Matemática Venezolana, Vol. X, No. 2 (2003). *Boletín de la Asociación Matemática Venezolana, Vol. X, No. 2* , 134-149.

Azcarate, C. y Deulofeu J. . (1996). *Funciones y gráficas*. . Madrid: Síntesis.

Badia, A. y García, C. (2006). Incorporación de las TIC en la Enseñanza y el Aprendizaje basados en la elaboración colaborativa de proyectos. *Revista de Universidad y Sociedad del Conocimiento* .

Baker, J. (2000). The "classroom flip": Using web course management tools to become the guide by the side. *11th International Conference on College Teaching and Learning*. Jacksonville, FL.

Bennett, B., Bergmann, J., Cockrum, T., Fisch, K., Musallam, R., Overmyer, J., Sams, A., Spencer, D. (2012). *The flipped class manifest*. En <http://www.thedailyriff.com/articles/the-flipped-class-manifest-823.php>. The Daily Riff.

Bergmann, J. y Sams, A. (2012). *Bergmann, J. y Sams, A. Flip Your Classroom, Reach Every Student in Every Class Every Day*. EEUU: ISTE.

Bergmann, J.; Sams, A. . (2012). *Flip Your Classroom: Reach Every Student in Every Class Every Day*. International Society for Technology in Education.

Bishop, J. & Verleger, M. . (2013). The flipped classroom: a survey of the research. En www.asee.org/public/conferences/20/.../download. *120th ASEE Annual Conference & Exposition*. American Society for Engineering Education. . Atlanta.

Bloom, B. (1978). New views of the learner: Implications for instruction and curriculum. Educational Leadership,. *Educational Leadership*, 35(7). En http://www.ascd.org/ASCD/pdf/journals/ed_lead/el_197804_bloom.pdf , 563-576.

Bolaños, S. et al. (2011). *Constructivismo Social*. En <http://constructivismo.webnode.es/autores-importantes/lev-vigotsky/>.

Booth, L. R. (1998). *Children's difficulties in beginning algebra. The ideas of algebra, K-12*. Reston, VA: National Council of Teachers of Mathematics. En <http://elementaryalgebra.cmswiki.wikispaces.net/file/view/Childrens+Difficulties+in+Beginnin+g+Algebra.pdf>. In A. F. Coxford & A.P. Shulte.

- Brame, C. (2013). *Flipping the classroom*. Vanderbilt University Center for Teaching. En <http://cft.vanderbilt.edu/guides-sub-pages/flipping-the-classroom/>.
- Brandt, S. (1997). Constructivism: teaching for understanding of the Internet, *Communications of the ACM*, 40(10), 112–117. *Communications of the ACM, Volumen 40(10)*. En <http://dl.acm.org/citation.cfm?id=262814> , 112–117.
- Brihuega Nieto, J. (1997). "Las Matemáticas en el Bachillerato". *Revista SUMA nº25* , 113-122.
- Burgués, C. ; Sarramona, J. . (2013). *Competències bàsiques de l'àmbit matemàtic*. Catalunya: Generalitat de Catalunya. Departament d'Ensenyament. En http://ensenyament.gencat.cat/web/.content/home/departament/publicacions/col_leccions/competencies_basiques/competencies_mates_eso.pdf.
- Casajús, A. (2005). *La resolución de problemas aritmético-verbales por alumnos con Déficit de Atención con Hiperactividad (TDAH)*. Tesis Doctoral. Universitat de Barcelona.
- Cerdán, F. (2008). *Estudios sobre diferentes aspectos de la enseñanza del álgebra*. Valencia: Universitat de València.
- Cobián, Nielsen y Solis. (1998). Contexto Socio-Cultural y aprendizaje Significativo. *Educar, Revista de educación, nueva época, núm. 5, Secretaría de Educación, Gobierno del estado de Jalisco* .
- Consell Superior d'Avaluació del Sistema Educatiu. Generalitat de Catalunya, D. d. (2014). 27 Documents. PISA, *Ítems alliberats de competència matemàtica*. En <http://www20.gencat.cat/docs/Educacio/Home/Consell%20superior%20d%27avalua/Pdf%20i%20altres/Static%20file/documents%2027.pdf>. Barcelona: Consell Superior d'Avaluació del Sistema Educatiu. Generalitat de Catalunya, Departament d'ensenyament.
- Cuban, L. (2008). *Frogs Into Princes. Writings on School Reform*. Nueva York. *Teachers' College Press* .
- Day, J.; Foley, J. (2006). Evaluating a Web Lecture Intervention in a Human–Computer Interaction Course. *IEEE Transactions on Education*, 49(4). , 420-431.
- División de Investigación, E. y.-P. (2009). En <http://190.64.69.75/archivos/matematica/Itemes%20publicos%20de%20Matematica%20en%20PISA.pdf>.
- Dussel, I. y Quevedo, L. (2010). Educación y nuevas tecnologías: los desafíos pedagógicos ante el mundo digital. *IV FORO LATINOAMERICANO DE EDUCACIÓN*. Buenos Aires, Argentina: Santillana.
- Echevarría, J. (2000). Educación y tecnologías telemáticas. *Revista Iberoamericana de Educación*. Nº24. En <http://tecnologiaedu.us.es/cuestionario/bibliovir/317.pdf> .

- Escobar, F. J. (2009). Las nuevas tecnologías como recursos didácticos: educación asistida por ordenador, soportes digitales e internet. *Innovación y Experiencias Educativas*, nº 16 .
- Fidela Velázquez, M. (2003). Una propuesta de tránsito gradual de la aritmética al álgebra. X JAEM. Ponencia P74, (págs. 669-688).
- Fink, Z. (2011). Big thinkers: Salman Khan on liberating the classroom for creativity. *Edutopia: K-12 Education & Learning Innovations with Proven Strategies that Work*. En <http://www.edutopia.org/salman-khan-academy-flipped-classroom-video> .
- Font, V. (2011). Las funciones y la competencia disciplinar en la formación docente matemática. *UNO. Revista de Didáctica de las Matemáticas*, 56. , 86-94.
- Freudenthal, H. (2001). *Didactical Phenomenology of Mathematical Structures*. Traducción de Luis Puig, publicada en *Fenomenología didáctica de las estructuras matemáticas*. México: CINVESTAV.
- Fulton, K. (2012). Inside the flipped classroom. *The Journal*. En <http://thejournal.com/articles/2012/04/11/the-flipped-classroom.aspx> .
- García - Valcárcer, A. (2007). Desarrollo e innovación tecnológica en la educación. *Modelo Sistémico de Evaluación Institucional para el Mejoramiento de la Calidad Educativa* .
- García, E. (2011). *Fundamentos y métodos en la enseñanza y aprendizaje inicial del álgebra. Una propuesta concreta*. Madrid: Universidad Complutense de Madrid.
- García-Varcárcel, A. (2014). *Las nuevas tecnologías como herramientas didácticas*. Salamanca: En <http://es.scribd.com/doc/248107270/LAS-NUEVAS-TECNOLOGI-AS-COMO-HERRAMIENTAS-DIDA-CTICAS#scribd>.
- Generalitat de Catalunya, Departament d'Ensenyament. (s.f.). Currículum batxillerat – Decret 142/2008 - DOGC núm. 5183. En <http://www.xtec.cat/alfresco/d/d/workspace/SpacesStore/c5fe6a2e-9a69-4acc-b723-c5d4fe75e7a0/matematiques.pdf> .
- Godino, J; Font, V. (2003). *Razonamiento algebraico y su didáctica para maestros*. Proyecto Edumat-Maestros. matemáticas y su didáctica para maestros. En <http://www.ugr.es/local/jgodino/edumat-maestros/>.
- Godino, J; Recio, A.; Roa, R; Ruiz, R y Pareja, J. (2005). Criterios de diseño y evaluación de situaciones didácticas basadas en el uso de medios informáticos para el estudio de las matemáticas. En http://www.sinewton.org/numeros/numeros/64/investigacion_01.pdf .
- Gonzalez, Z. (2013). *Los medios Educativos en el Proceso de Aprendizaje*. Panamá: En <http://zurianygonzalez.blogspot.com.es/2013/08/evaluacion-de-los-medios-educativos.html>.

- Goodyear, P. (2001). *Effective networked learning in higher education: Notes and guidelines (Deliverable 9)*. Bristol: Joint Information Systems Committee (JISC).: En http://csalt.lancs.ac.uk/jisc/docs/Guidelines_final.doc.
- Green, G. (2012). *My view: Flipped classrooms give every student a chance to succeed*. . Schools of Thought - CNN.com Blogs. En <http://schoolsofthought.blogs.cnn.com/2012/01/18/my-view-flipped-classrooms-give-every-student-a-chance-to-succeed/>.
- Hamden, N. et al. (2013). *A review of flipped learning. Flipped Learning Network*. En <http://fnds6952-jbyrom.wikispaces.com/file/view/LitReview+Flipped+Learning.pdf>. NJ: Pearson Education.
- Harper, E. (1981). Psychological changes attending a transition from arithmetical to algebraic thought. *Proceedings of the 5th PME Conference* .
- Higueras, L. (1998). *La noción de función: análisis epistemológico y didáctico. Tesis doctoral. Universidad de Granada*. Granada.
- Instituto Nacional de Evaluación Educativa. Ministerio de Educación, C. y. (2013). *Marcos y pruebas de evaluación de PISA 2012. Matemáticas, Lectura y Ciencias*. En <http://www.mecd.gob.es/dctm/inee/internacional/pisa2012/marcopisa2012.pdf?documentId=0901e72b8177328d>. Madrid.
- Jenkins, H. (2006). Confronting the challenges of participatory culture: Media education for the 21st. *MacArthur Foundation*. En http://digitallearning.macfound.org/atf/cf/%7B7E45C7E0-A3E0-4B89-AC9C-E807E1B0AE4E%7D/JENKINS_WHITE_PAPER.PDF .
- Johnson, G. (2013). *Student perceptions of the flipped classroom. Tesis de Master*. . The University of British Columbia. En https://circle.ubc.ca/bitstream/handle/2429/44070/ubc_2013_spring_johnson_graham.pdf?sequence=1 .
- Kay, R.; Kletskin, I. (2012). Evaluating the use of problem-based video podcasts to teach mathematics in higher education. *Computers & Education*, 59(2) , 619–627.
- Khan, S. (2012). *How Can Videos "Flip The Classroom"?* En <http://www.npr.org/2012/06/22/155228627/how-can-videos-flip-the-classroom>.
- Kieran, C. (2006). *Research on the Learning and Teaching of Algebra*. Rotterdam, The Netherlands: Sense Publishers.: En A. Gutiérrez y P. Boero (Eds.), *Handbook of Research on the Psychology of Mathematics Education: Past, Present and Future*.
- Kieran, C., Filloy. (1989). El aprendizaje del álgebra escolar desde una perspectiva psicológica. *Enseñanza de las ciencias. Traducción castellana de Luis Puig* , 229-240.

- Kim, K.; Bonk, C. (2006). The Future of Online Teaching and Learning in Higher Education: The Survey Says. *Educause Quarterly*, 29 (4). En <http://www.educause.edu/ero/article/future-online-teaching-and-learning-higher-education-survey-says> , 22-30.
- Kirch, C. (2012). *Does the "Flipped Classroom" increase student understanding and proficiency?* En <http://flippingwithkirch.blogspot.com.es/2012/02/does-flipped-classroom-increase-student.html>.
- Lage, M. J., Platt, G. J., & Treglia, M. (2000). Inverting the classroom: A gateway to creating an inclusive learning environment. *Journal of Economic Education*, 31 , 30-43.
- Lage, M.; Platt, G. (2000). The internet and the inverted classroom. *The Journal of Economic Education*. Volume 31, Issue 1 , 11.
- Leinhardt, G.; Zaslavsky, O. y Stein M. (1990). Functions, Graphs, and graphing: Task, Learning, and Teaching. *Review of Educational Research*. En <http://www.math.ksu.edu/~bennett/onlinehw/qcenter/lzs.pdf> , 1-64.
- Mayer, R. (2005). *Cognitive theory of multimedia learning*. New York: R.E. Mayer (Ed.), The Cambridge Handbook of Multimedia Learning. New York: Cambridge University Press.
- Mazur, E. (1997). *Peer instruction: a user's manual*. . New Jersey: Prentice Hall Series in Educational Innovation.
- McFeeley, R.; Milner, J. (2009). *The kernel lecture and its effect on student engagement*. Winston-Salem, North Carolina, USA: Research presented at Wake Forest University, Department of Education Annual Research Forum.
- Moreira, M. (2011). El proceso de integración y uso pedagógico de las TIC en los centros educativos. Un estudio de casos. *Revista de Educación*. Nº352 .
- Muria, S. (2005). *Indicadores de diagnóstico par al implementación de una web geométrica con alumnos deficientes auditivos en aulas inclusivas*. España: Universitat de Barcelona.
- Musallam, R. (2010). *The effects of using screencasting as a multimedia pre-training tool to manage the intrinsic cognitive load of chemical equilibrium instruction for advanced high school chemistry students. (Tesis Doctoral)*. The University of San Francisco. Disponible en <http://www.ramseymusallam.com/resources/Dissertation.musallam.pdf>.
- NCTM. (2000). Executive Summary. Principles and Standards for School Mathematics. http://www.nctm.org/uploadedFiles/Math_Standards/12752_exec_pssm.pdf .
- Nieto, S, Bode, P. (2011). *Affirming Diversity: The Sociopolitical Context of Multicultural Education*. 6th Edition. Boston: Pearson Education, Inc.
- Noschese, F. (2011). *Khan Academy: My final remarks*. *Action-Reaction: Reflections on the dynamics of teaching*. En <http://fnoschese.wordpress.com/2011/05/10/khan-academy-my-final-remarks/>.

- Overmyer, G. (2014). *The flipped classroom model for college algebra: effects on student achievement (Tesis doctoral)*. Colorado State University.
- Overmyer, J. (2015). *Teacher vodcasting and flipped classroom network - A professional learning community for teachers using vodcasting in the classroom. Teacher Vodcasting and Flipped Classroom Network*. Consultado el 16 de enero de 2015. the Mathematics and Science Teaching (MAST) Institute at the University of Northern Colorado. En <http://flippedclassroom.org/>.
- Pabon, C. (2013). *La globalización y las TIC*. Colombia: En <http://tic-globalizacion.blogspot.com.es/>.
- Pearson Case Study. (2013). *Flipped learning model increases student engagement and performance*. Foundations of Flipped Learning. Upper Saddle River, NJ: Pearson Education.
- PISA 2000, 2003, Items Liberados*. . En http://www.educantabria.es/docs/planes/evaluacion_educativa/competencia_matematica/pr eguntas_liberadas_matematicas_2000_2003.pdf.
- Prats, J. (2002). INTERNET EN LAS AULAS DE EDUCACIÓN SECUNDARIA. *IBER DIDÁCTICA DE LAS CIENCIAS SOCIALES, GEOGRAFIA E HISTORIA*. Número, 29 .
- Ramos, A. (2012). *Análisis comparativo: ventajas y desventajas para el modelo de Massive Online Open Courses - MOOC*. España: America, Learning & Media. En <http://www.americalearningmedia.com/component/content/article/195-analisis/2378-ventajas-y-desventajas-para-el-modelo-de-massive-online-open-courses-mooc>.
- Ríos Hernández, M. (2009). LA INCLUSIÓN EN EL ÁREA DE EDUCACIÓN FÍSICA EN ESPAÑA. *Ágora para la EF y el Deporte*, n.º 9 , 83-114.
- Robledo, J. (2003). *Registros semióticos de representación y matemáticas universitarias. (Tesis de maestría)*. Cali, Colombia: Universidad del Valle.
- Rodríguez, G; Gil, J, y Jiménez, E. (1996). *Metodología de la investigación cualitativa*. Málaga: Archidona: Ediciones Aljibe.
- Romberg, T.; Fennema, E.; Carpenter, T. (Eds). (2009). *Integrating Research on the Graphical Representation of Functions*. New Jersey: Lawrence Erlbaum. Transferred to Digital Printing by Routledge.
- Ruano, R. M., Socas, M. M. y Palarea, M. M. (2008). Análisis y clasificación de errores cometidos por alumnos de secundaria en los procesos de sustitución formal, generalización y modelización en álgebra. . <http://www.pna.es/Numeros2/pdf/Ruano2008PNA2%282%29Analisis.pdf> , 61-74.
- Ruano, R. y Socas, M. (2001). *Habilidades cognitivas en relación con la Sustitución Formal, la Generalización y la Modelización que presentan los alumnos de 4º de la ESO*. (C. L. Laguna, Ed.)

- En Socas, Camacho y Morales (Eds.). Formación del profesorado e investigación en Matemáticas III.P.
- Ruiz Munzón, N. (2010). *La introducción del álgebra elemental y su desarrollo hacia la modelización funcional*. Barcelona.
- Ruiz-Higueras, L. (1993). *Tesis Doctoral: Concepciones de los alumnos de secundaria sobre la noción de función. Análisis epistemológico y didáctico*. Granada: Universidad de Granada. Departamento de Didáctica de la Matemática.
- Santiago, R. (2014). *Conectando las dimensiones cognitivas y la taxonomía revisada de Bloom*. En <http://www.theflippedclassroom.es/conectando-las-dimensiones-cognitivas-y-la-taxonomia-revisada-de-bloom/>.
- Schnotz, W. (2002). Aprendizaje Multimedia desde una perspectiva cognitiva. *Boletín de la Revista de Docencia Universitaria. Vol 2, No 2*. En <http://revistas.um.es/redu/article/view/20011/19381> , 31-40.
- Shyu, H. (2000). Using video-based anchored instruction to enhance learning: Taiwan'experience. *British Journal of Educational Technology*,31 (1) , 57-69.
- Sigalés, C.; Mominó, J. , Meneses, J. y Badia,A. . (2008). Integración de Internet en la Educación Escolar Española. *IN3 - Universitat Oberta de Catalunya* , 119.
- Sigalés, C.; Mominó, J. y Meneses, J. (2009). TIC e innovación en la educación escolar española. Estado y perspectivas. *TELOS, Cuadernos de Comunicación e Innovación*. En <http://telos.fundaciontelefonica.com/telos/articulocuaderno.asp?idarticulo=4&rev=78.htm> .
- Socas, M. (2007). Dificultades y errores en el aprendizaje de las matemáticas. Análisis desde el enfoque lógico semiótico. En http://funes.uniandes.edu.co/1247/1/Socas2008Dificultades_SEIEM_19.pdf .
- Socas, M. (1997). Dificultades, obstáculos y errores en el aprendizaje de las Matemáticas en la Educación Secundaria. En *"La educación matemática en la enseñanza secundaria"*. En <http://cumbia.ath.cx:591/pna/Archivos/SocasM97-2532.PDF> , 125-154.
- Strayer, J. (2007). *The effects of the classroom flip on the learning environment: a comparison of learning activity in a traditional classroom and a flip classroom that used an intelligent tutoring system (Tesis Doctoral)*. Ohio: The Ohio State University. En https://etd.ohiolink.edu/!etd.send_file?accession=osu1189523914&disposition=inline.
- Toppo, G. (2011). *Flipped classrooms take advantage of technology*. USA: USA TODAY. En <http://usatoday30.usatoday.com/news/education/story/2011-10-06/flipped-classrooms-virtual-teaching/50681482/1>.

Toto, R.;Nguyen, H. (2009). "Flipping the Work Design in an Industrial Engineering Course". *Proceedings, 39th ASEE/IEEE Frontiers in Education Conference*. Disponible en www.asee.org/public/conferences/8/.../download, (págs. 1-4). San Antonio, Texas, USA.

Touron, J. et al. (2015). "*The Flipped Classroom*" : *Experiencias y recursos para "dar vuelta" a la clase*. España: En <http://www.theflippedclassroom.es/>.

Wheeler, S. (2012). *What the flip?* En <http://steve-wheeler.blogspot.com.es/2012/03/what-flip.html>.

Wright, S. (2012). *Flipping Bloom's Taxonomy*. Disponible en <https://shelleywright.wordpress.com/2012/05/29/flipping-blooms-taxonomy/>.

Wussing, H. (1998). *Lecciones de Historia de las Matemáticas*. Madrid: Siglo XXI de España Editores, S.A.

Yin, R. (2003). *Applications of case study research methods*. Thousand Oaks, Calif. : Sage Publications.

10. ANEXOS

ANEXO 1: NCTM DE FUNCIONES

A continuación describimos los temas y objetivos que plantea el NCTM respecto del tema de funciones:

1) Interpretación de Funciones

- a) Comprender el concepto de función y el uso de notación de función:
- i) Entender que una función de un conjunto (llamado dominio) a otro conjunto (llamado recorrido o imagen) asigna a cada elemento del dominio exactamente un elemento del recorrido. Si f es una función y x es un elemento de su dominio, entonces $f(x)$ denota la salida de f correspondiente a la entrada x . El gráfico de f es la gráfica de la ecuación $y = f(x)$.
 - ii) Utilizar la notación de función, evaluar el dominio de una función según los valores de entrada, e interpretar las instrucciones que utilizan la notación de función en términos de un contexto.
 - iii) Reconocer que las secuencias son funciones, a veces definidas recursivamente, cuyo dominio es un subconjunto de los enteros. Por ejemplo, la Sucesión de Fibonacci es recurrentemente definida por $f(0) = f(1) = 1, f(n + 1) = f(n) + f(n - 1)$ para $n \geq 1$.
- b) Interpretar las funciones que se plantean en aplicaciones en términos del contexto;
- i) Para una función que modela una relación entre dos cantidades, interpretar las características clave de gráficos y tablas en términos de cantidad, y dada una descripción verbal realizar gráficos que muestren características clave dadas de la relación. Las características clave incluyen: intersección; intervalos donde la función va en aumento, disminución, positivos o negativos; máximos relativos y mínimos; simetrías; comportamiento extremo; y periodicidad.

- ii) Relacionar el dominio de una función con su gráfico y, cuando proceda, la relación cuantitativa que describe.
 - iii) Calcular e interpretar la tasa media de cambio de una función (presentado simbólicamente o como una tabla) sobre un intervalo especificado. Estimar la tasa de cambio de un gráfico.
- c) Analizar funciones utilizando diferentes representaciones
- i) Hacer la gráfica de funciones expresadas simbólicamente y mostrar las características clave del gráfico a mano en casos sencillos y utilizando la tecnología en casos más complicados:
 - a. Hacer la gráfica de funciones lineales y cuadráticas y mostrar intersecciones, máximos y mínimos.
 - b. Hacer la gráfica de funciones raíz cuadrada, raíz cúbica y funciones definidas a trozos, incluyendo las funciones de parte entera y valor absoluto.
 - c. Hacer la gráfica de funciones polinómicas, identificar raíces cuando sea conveniente y disponer de la factorización definitiva.
 - d. Hacer la gráfica de funciones racionales, identificar las raíces y asíntotas, y disponer de la factorización definitiva.
 - e. Hacer la gráfica de funciones exponenciales y logarítmicas, mostrando las intersecciones y su comportamiento, y funciones trigonométricas, mostrando el período, línea media (eje horizontal que divide la gráfica en dos partes iguales) y amplitud.
 - ii) Escribir una función definida por una expresión en diferente pero equivalente forma para revelar y explicar las diferentes propiedades de la función.
 - a. Utilizar el proceso de factorización y completitud del cuadrado en una función cuadrática para mostrar raíces, valores extremos y simetría del gráfico e interpretar estos en términos de un contexto.

- b. Utilizar las propiedades de la potencia para interpretar expresiones de funciones exponenciales, y clasificarlas como representación de crecimiento exponencial o decrecimiento.
- iii) Comparar propiedades de dos funciones representadas cada una en diferente forma (algebraicamente, gráficamente, numéricamente en tablas o por descripción verbal).

2) Construcción de funciones

- a) Crear una función que modele una relación entre dos cantidades;
 - i) Escribir una función que describe una relación entre dos cantidades.
 - a. Determinar una expresión explícita, un proceso recursivo o pasos para el cálculo de un contexto.
 - b. Combinar tipos de función estándar mediante operaciones aritméticas.
 - c. Componer funciones
 - ii) Escribir secuencias aritméticas y geométricas, ambas recursivamente, y con una fórmula explícita, utilizarla para modelizar situaciones y traducciones entre las dos formas.
- b) Construir nuevas funciones a partir de las funciones existentes
 - i) Identificar el efecto sobre la gráfica de reemplazar $f(x)$ por $f(x) + k$, $k \cdot f(x)$, de $f(kx)$ y de $f(x + k)$ para valores específicos de k (ambos positivos y negativos); Encontrar el valor de k dada las gráfica de la función. Experimentar con casos e ilustrar una explicación de los efectos en el gráfico usando tecnología. Incluir el reconocimiento de las funciones pares e impares de sus gráficos y expresiones algebraicas.
 - ii) Encontrar funciones inversas.
 - a. Resolver una ecuación de la forma $f(x) = c$ para una función simple que tiene inversa y escribir una expresión para la función inversa.

- b. Verificar por la composición que una función es la inversa de otra.
 - c. Leer valores de una función inversa de un gráfico o una tabla, dado que la función tiene inversa.
 - d. Producir una función invertible en una función no invertible restringiendo el dominio.
- iii) Entender la relación inversa entre exponentes y logaritmos y usar esta relación para resolver problemas que involucran logaritmos y exponentes.

3) Modelos lineales, cuadráticos y exponenciales

- a) Construir y comparar modelos lineales, cuadráticos y exponenciales y resolver problemas
- i) Distinguir entre las situaciones que se pueden modelar con funciones lineales y con funciones exponenciales.
 - a. Probar que las funciones lineales crecen por diferencias iguales sobre intervalos iguales, y que las funciones exponenciales crecen por factores iguales sobre intervalos iguales.
 - b. Reconocer situaciones en las que una cantidad cambia en una tasa constante por intervalo unitario en relación a otro.
 - c. Reconocer situaciones en las que una cantidad crece o decrece con una tasa de porcentaje constante por intervalo unitario en relación a otro.
 - ii) Construir funciones lineales y exponenciales, incluyendo progresiones aritméticas y geométricas, dado un gráfico, una descripción de una relación, o dos pares de entrada / salida (incluye lectura de una tabla).
 - iii) Observar utilizando gráficos y tablas si el aumento exponencial de una cantidad finalmente supera a un aumento de cantidad lineal, cuadrática, o (más generalmente) como una función polinómica.

- iv) Para los modelos exponenciales, expresar como un logaritmo la solución $ab^{ct} = d$ donde a, c y d son números y la base b es 2, 10 o e; evaluar el logaritmo usando tecnología.
- b) Interpretar expresiones de funciones que modele una situación
 - i) Interpretar los parámetros en una función lineal o exponencial en términos de un contexto.

4) Funciones trigonométricas

- a) Ampliar el dominio de las funciones trigonométricas usando el círculo unitario.
 - i) Entender la medida del radián de un ángulo como la longitud del arco del círculo unitario descrito por el ángulo.
 - ii) Explicar cómo el círculo unitario en el plano de coordenadas permite la extensión de funciones trigonométricas para todos los números reales, interpretando como radián la medida de ángulos recorridos hacia la izquierda alrededor del círculo unitario.
 - iii) Utilizar triángulos especiales para determinar geoméricamente los valores del seno, coseno y tangente de $\pi/3, \pi/4, \pi/6$ y usar el círculo unitario para expresar los valores del seno, coseno y tangente para $\pi - x, \pi + x$ y $2\pi - x$ en términos de sus valores para x , donde x es cualquier número real.
 - iv) Utilizar el círculo unitario para explicar la simetría (par e impar) y periodicidad de funciones trigonométricas.
- b) Interpretar fenómenos periódicos con modelos de funciones trigonométricas.
 - i) Elegir funciones trigonométricas para modelar fenómenos periódicos con amplitud específica, línea media y frecuencia.
 - ii) Entender que restringiendo una función trigonométrica a un dominio el cual siempre es creciente o siempre es decreciente permite construir su inversa.

- iii) Usar funciones inversas para resolver ecuaciones trigonométricas que surgen de modelar contextos; evaluar las soluciones utilizando tecnología, e interpretarlas en términos del contexto.
- c) Demostrar y aplicar las identidades trigonométricas
- i) Demostrar la identidad pitagórica $\sin^2(\theta) + \cos^2(\theta) = 1$ y utilizarla para encontrar $\sin(\theta)$, $\cos(\theta)$ o $\tan(\theta)$ dado $\sin(\theta)$, $\cos(\theta)$ o $\tan(\theta)$ y el cuadrante del ángulo.
 - ii) Demostrar las fórmulas de suma y resta para el seno, coseno, y tangente y utilizarlas para resolver problemas.(Common Core State Standards, 2012)

ANEXO 2: PRUEBAS DIAGNÓSTICAS

CUESTIONARIO 1 DE ÁLGEBRA

Cuestionario perteneciente a Ruano, R y Socas, M

INSTRUCCIONES: Lee atentamente las siguientes preguntas y contesta lo que te pide.

1. Si $a = 2b$, ¿en qué se transforma $5a + 3$?

$$\boxed{1} \quad 5(2b) + 3 = 10b + 3$$

2. Si $a = b + 3$, ¿en qué se transforma $5a + 3b$?

$$\boxed{2} \quad 5(b + 3) + 3b = 5b + 15 + 3b = 8b + 15$$

3. Si $a = 2b$, ¿en qué se transforma $(a + 3) \cdot (3 - a)$?

$$\boxed{3} \quad (a + 3) \cdot (3 - a) = 3a - a^2 + 9 - 3a = -a^2 + 9 = -(2b)^2 + 9 = -4b^2 + 9$$

4. En cada uno de los casos siguientes halla las sustituciones que se hacen para pasar de las expresiones de la columna A a la B.

	A	B	
$\boxed{4}$	a) $5x - 17$	$5(y + 1) - 17$	$x = y + 1$
$\boxed{5}$	b) $2x \cdot 3y - z$	$6x p - z$	$y = p$
$\boxed{6}$	c) $e(j + 7)$	$(j + 7)(f - 2)$	$e = f - 2$
$\boxed{7}$	d) $v x$	$h r h v$	$x = hrh$
$\boxed{8}$	e) $2/p$	k/pq	$2 = \frac{k}{q}$

5. Si x es un número cualquiera:

9 a) Escribe el número que es 3 más x .

$$3 + x$$

10 b) Escribe el número que es 5 menos x .

$$5 - x$$

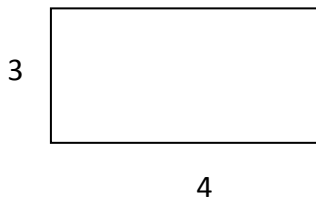
11 c) Escribe el número que es dos veces tan grande como x .

$$2x$$

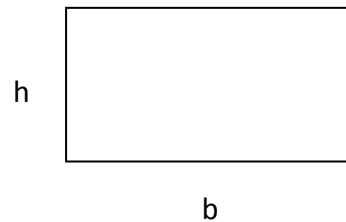
12 d) Escribe el número que es el 50% mayor que x .

$$1,5x$$

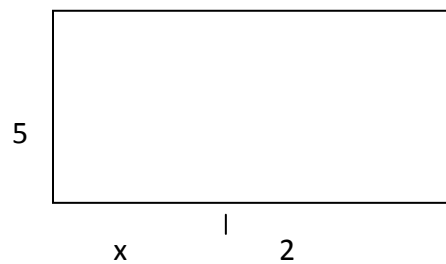
6. ¿Cómo expresarías el área de las siguientes figuras?



13 Área = $3 \times 4 = 12$

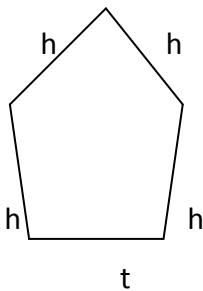


14 Área = $h \cdot b$

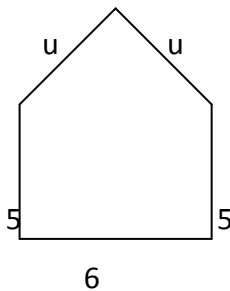


15 Área = $5 \cdot (x + 2)$

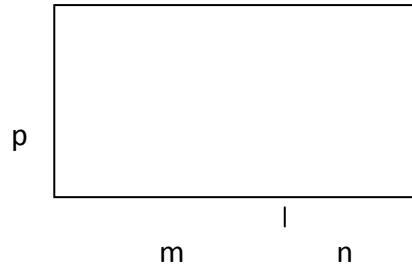
7. ¿Cómo expresarías el perímetro de cada una de las siguientes figuras?:



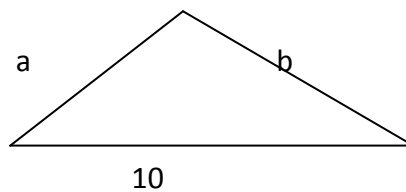
16) Perímetro = $4h + t$



17) Perímetro = $2u + 2 \cdot 5 + 6$
 $= 2u + 16$



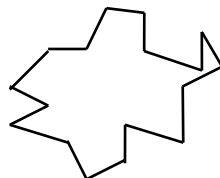
18) Perímetro = $2p + 2(m + n)$



19) Perímetro = $a + b + 10$

8. ¿Qué se podría escribir para el perímetro de estas figuras?:

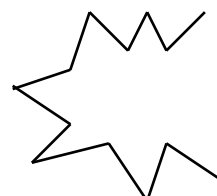
20) a)



Todos los lados miden 7.
 Hay en total 17 lados.
 $P = 7 \cdot 17 = 119$

21)

b) Parte de esta figura no está dibujada.
 Hay n lados en total, todos de longitud 2.
 Halla su perímetro. $P = 2 \cdot n$

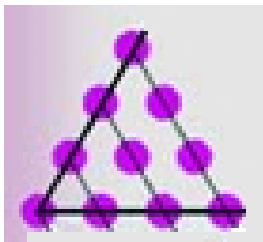


9. Los números $1, 3, 6, \dots, \frac{n(n+1)}{2}$, recibían el nombre de números triangulares, ya que podían ser dispuestos en forma de triángulos:



¿Podrías dibujar el siguiente triángulo?

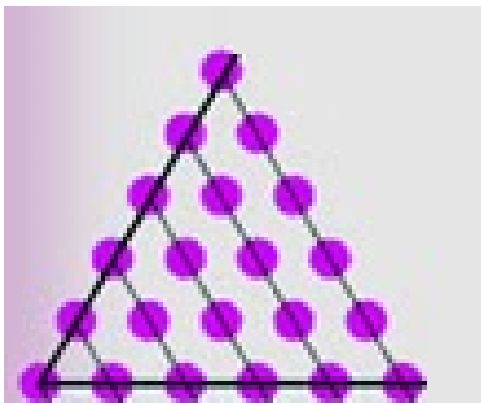
22



10

¿Podrías dibujar el triángulo que ocupa la posición 6?

23



21

¿A qué posición corresponde el triángulo que tiene por número triangular asociado el 45?

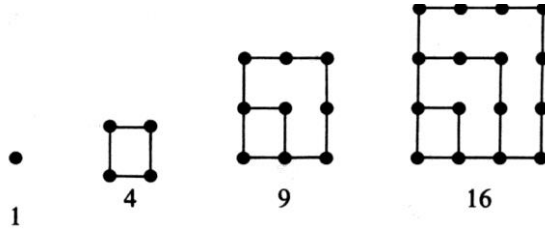
24

$$\frac{n(n+1)}{2} = 45 ; n(n+1) = 90; n^2 + n = 90; n^2 + n - 90 = 0$$

$$n = 9 \text{ o } n = -10$$

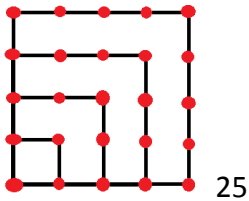
A la posición 9

a) Los números 1, 4, 9, 16,... recibían el nombre de números cuadrados, ya que podían ser dispuestos en forma de cuadrados:



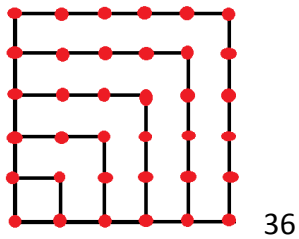
¿Podrías dibujar el cuadrado siguiente?

25



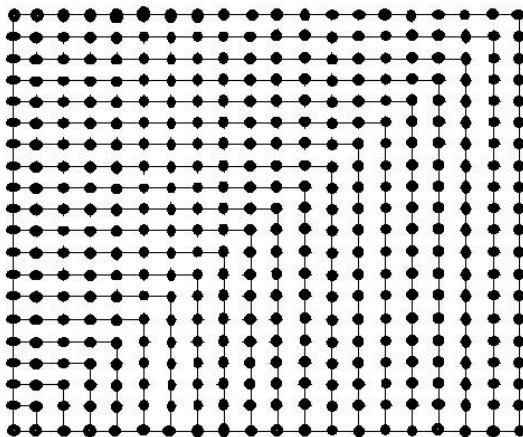
¿Podrías dibujar el cuadrado que ocupa la posición 6?

26



¿Podrías dibujar el cuadrado que ocupa la posición 20?

27



¿A qué número corresponde el cuadrado que ocupa la posición 6?

28

A 36

¿A qué número corresponde el cuadrado que ocupa la posición 20?

29

A 400

CUESTIONARIO 2 DE ÁLGEBRA

Cuestionario perteneciente a Ruano, R, Socas, M

10. Expresa si las siguientes expresiones son verdaderas: Siempre (S), Nunca (N) o algunas veces (A). En A explicar para qué valores de las letras.

- 30 a) $a + b = a + b$ (S),
- 31 b) $p + q = p + s$ (A) cuando $q=s$
- 32 c) $h + m = h + 2m$ (A) cuando $m=0$

11. Dadas las expresiones:

$$p \quad p + 7, \quad p - 2 \quad 2p$$

¿Puedes contestar?:

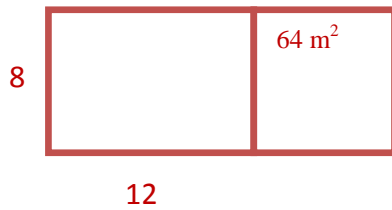
- 33 La menor de ellas es _____
- 34 La mayor de ellas es _____
- 35 o no se puede contestar porque _____ depende del valor de p ,

- la menor de ellas puede ser $2p$ o $p-2$, por lo tanto si $p < -2$ la menor será $2p$, si $p > -2$ la menor será $p-2$
- la mayor de ellas puede ser $p+7$ o $2p$, si $p < 7$ la mayor será $p+7$, si $p > 7$ la mayor será $2p$

12. Una persona tiene un terreno rectangular de dimensiones 12 metros de frente y 8 metros de fondo. Después, esa misma persona, compra un terreno contiguo

de 64 metros cuadrados. Una segunda persona le propone cambiar su terreno completo por otro rectangular, en la misma calle, con la misma área y el mismo fondo, pero en mejor sitio. ¿Cuánto debe medir el frente del nuevo terreno para que el trato sea justo?

36



$$A = 8 \cdot 12 + 64 = 160$$

$$A = 8 \cdot f = 160$$

$$f = 20 \text{ m}$$

- 13.** En el supermercado un kilo de peras cuesta 90 céntimos de euros; un kilo de plátanos 1,20 euros, el kilo de ciruelas 1,90 euros, el kilo de naranjas 1,80 euros y cada kiwi cuesta b céntimos de euro. La familia de Ana tiene los siguientes gastos en fruta: Compran a la semana 2 kg. de peras, p kilos de plátanos, 3 kilos más de ciruelas que de plátanos y 6 kiwis.

¿Podrías decir cuánto gasta la familia de Ana en fruta en una semana?

37

$$2 \times 0,9 + p \times 1,20 + (p + 3) \times 1,9 + 6b =$$

$$1,8 + 1,2p + 1,9p + 5,7 + 6b = 3,1p + 7,5 + 6b$$

¿Podrías decir cuánto gasta la familia de Ana en fruta al mes suponiendo que todas las semanas consume la misma cantidad de fruta y que un mes tiene 4 semanas?

38

$$4(2,1p + 7,5 + 6b) = 8,4p + 30 + 24b$$

Si el precio por Kiwi es de 0,12 céntimos de euro y compran a la semana 1 kilo de plátanos, ¿Podrías decir cuánto gasta la familia de Ana en fruta en una semana?

39

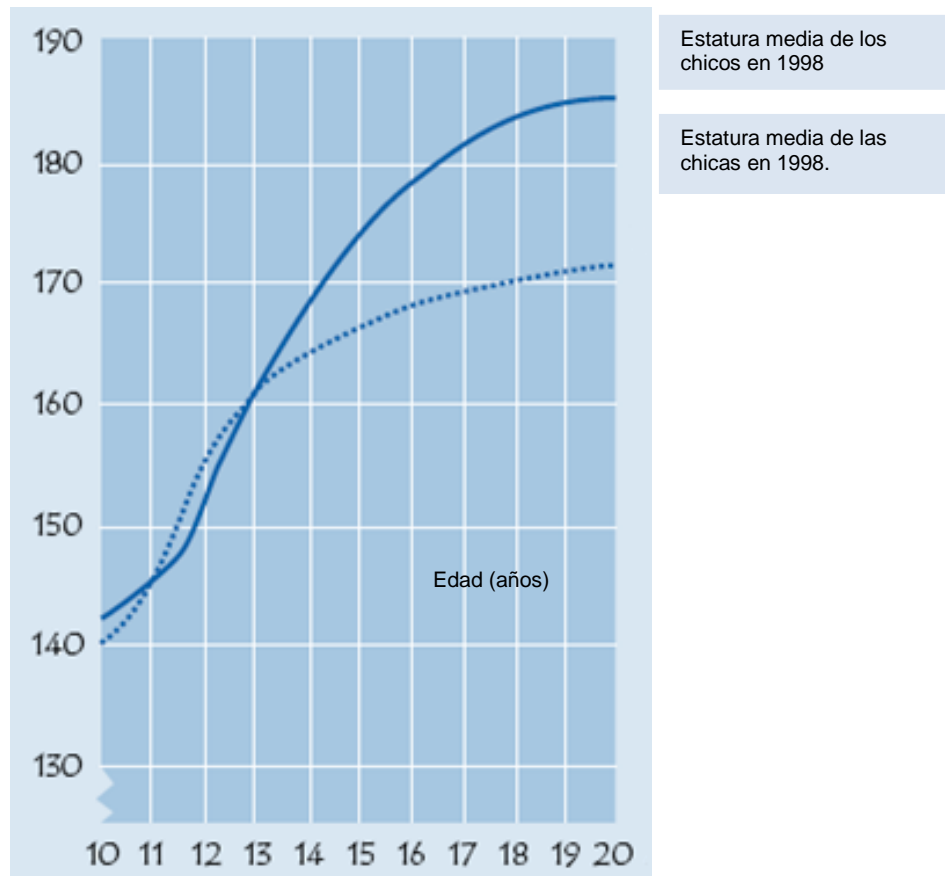
$$8,4 \cdot 1 + 30 + 24 \cdot 0,12 = 41,28$$

CUESTIONARIO 3

Ítems liberados de las pruebas PISA

LA JUVENTUD SE HACE MAS ALTA

La estatura media de los chicos y las chicas de Holanda en 1998 está representada en el siguiente gráfico.



Pregunta 1: CRECER

Desde 1980 la estatura media de las chicas de 20 años ha aumentado 2,3 cm, hasta alcanzar los 170,6 cm. ¿Cuál era la estatura media de las chicas de 20 años en 1980?

Respuesta: cm

Respuesta correcta: 168,3 cm (la unidad ya está dada).

Respuesta incorrecta: Otras respuestas

Creceer:				<i>Puntuaciones:</i>	
M150Q01		Aciertos	%	Máxima puntuación	
<i>Subescala</i>	Cambio y relaciones	OCDE	67,0	Código 1:	168,3 cm (unidades ya dadas).
<i>Situación</i>	Científica	España	66,5	Ninguna puntuación	
<i>Competencia</i>	Reproducción	Castilla y León	70,4	Código 0:	Otras respuestas.
<i>Dificultad</i>	477 (nivel 2)	Cataluña	68,7	Código 9:	Sin respuesta.
		País Vasco	69,7		

Figura A.1-1: Puntuación de la pregunta 1 del ítem de “Creceer” de las pruebas PISA

Fuente:

http://www.educantabria.es/docs/planes/evaluacion_educativa/competencia_matematica/preguntas_liberadas_matematicas_2000_2003.pdf?phpMyAdmin=DxoCAdbLc%2CANuNikvc-WZcMiFvc

Pregunta 2: CRECER

Explica cómo está reflejado en el gráfico que la tasa de crecimiento de la estatura media de las chicas disminuye a partir de los 12 años en adelante.

.....

Crecer:			
M150Q03		Aciertos	%
Subescala	Cambio y relaciones	OCDE	44,8
Situación	Científica	España	36,5
Competencia	Conexiones	Castilla y León	35,8
Dificultad	574 (nivel 4)	Cataluña	52,0
		País Vasco	35,5

Puntuaciones:

Máxima puntuación
 La clave es que la respuesta debe referirse al *cambio* del gradiente del gráfico para las chicas. Esto puede hacerse explícita o implícitamente. Los Códigos 11 y 12 son para la mención explícita de la fuerte pendiente de la curva del gráfico, mientras que el código 13 es para la comparación implícita utilizando la cantidad real de crecimiento antes y después de los 12 años de edad.

Código 11: Se refiere a la reducida pendiente de la curva a partir de los 12 años, utilizando lenguaje cotidiano, no lenguaje matemático.

- No sigue yendo hacia arriba, se endereza.
- La curva se nivela.
- Es más plana después de los 12.
- La curva de las chicas se hace uniforme y la de los chicos se hace más grande.
- Se endereza y el gráfico de los chicos sigue subiendo.

Código 12: Se refiere a la reducida pendiente de la curva a partir de los 12 años, utilizando lenguaje matemático.

- Se puede observar que el gradiente es menor.
- La tasa de cambio del gráfico disminuye a partir de los 12 años.
- [El alumno calcula los ángulos de la curva con respecto al eje x antes y después de los 12 años.]

En general, si se utilizan palabras como “gradiente”, “pendiente”, o “tasa de cambio”, considérese como utilización de lenguaje matemático.

Código 13: Comparación del crecimiento real (la comparación puede ser implícita).

- Desde los 10 a los 12 años el crecimiento es aproximadamente de 15 cm, aunque el crecimiento desde los 12 a los 20 es sólo de alrededor de 17 cm.
- La tasa media de crecimiento desde los 10 a los 12 años es de alrededor de 7.5 cm por año, y de alrededor de 2 cm por año desde los 12 a los 20 años.

Ninguna puntuación

Código 01: El alumno indica que la altura de las mujeres se sitúa debajo de la altura de los hombres, pero NO menciona la pendiente del gráfico de las mujeres o una comparación de la tasa de crecimiento de las mujeres antes y después de los 12 años.

- La línea de las mujeres está debajo de la línea de los hombres.

Si el estudiante menciona que el gráfico de las mujeres se vuelve menos empinado, ASÍ COMO el hecho de que el gráfico se sitúa por debajo del gráfico de los hombres, entonces debe asignarse la máxima puntuación (Códigos 11, 12 or 13). No se está buscando aquí una comparación entre los gráficos de los hombres y de las mujeres, de modo que debe ignorarse cualquier referencia a tal comparación, y juzgar en base al resto de la respuesta.

Código 02: Otras respuestas incorrectas. Por ejemplo, la respuesta no se refiere a las características del gráfico, a pesar de que se pregunta claramente cómo está reflejado en el GRÁFICO...

- Las chicas maduran antes.
- Porque las mujeres pasan la pubertad antes de los hombres y tienen antes el aceleramiento de su crecimiento.
- Las chicas no crecen mucho después de los 12. [Se da una afirmación de que las chicas crecen más lentamente después de los 12 años de edad y no se hace referencia al gráfico.]

Código 99: Sin respuesta.

Figura A.1-2: Puntuación de la pregunta 2 del ítem de “Crecer” de las pruebas PISA

Fuente:

http://www.educantabria.es/docs/planes/evaluacion_educativa/competencia_matematica/preguntas_liberadas_matematicas_2000_2003.pdf?phpMyAdmin=DxoCAdbIc%2CANuNIkvc-WZcMiFvc

Pregunta 3: CRECER

De acuerdo con el gráfico anterior, como promedio, durante qué periodo de su vida son las chicas más altas que los chicos de su misma edad.

.....

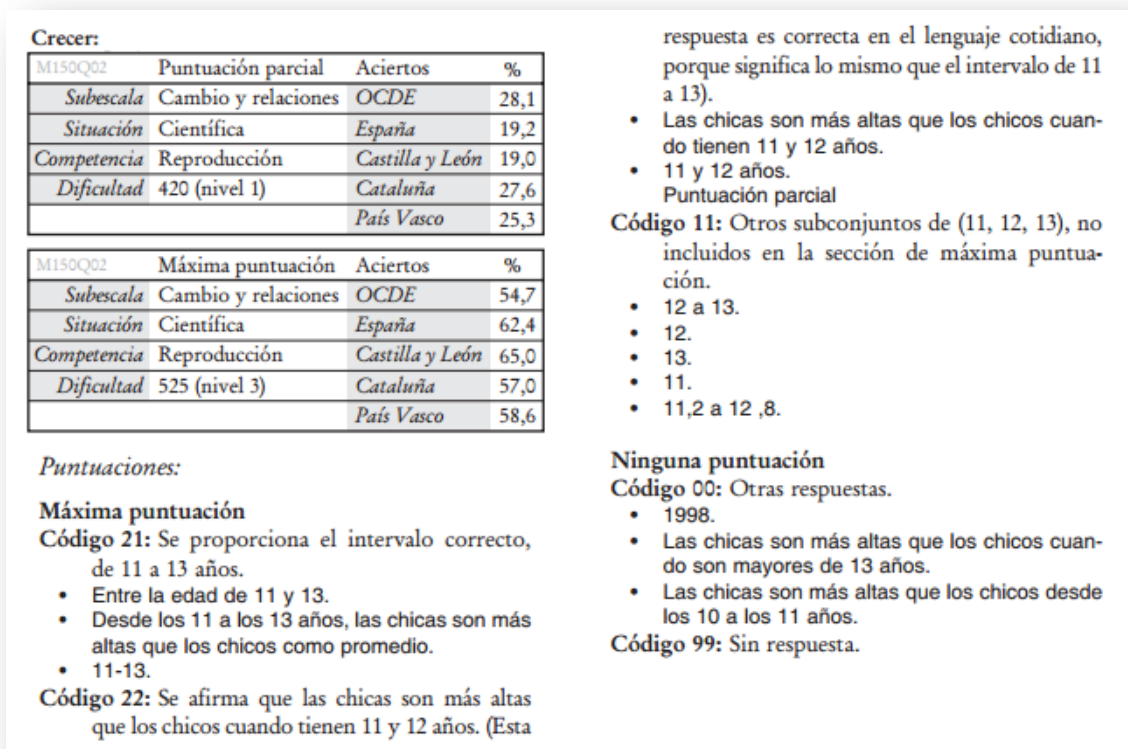


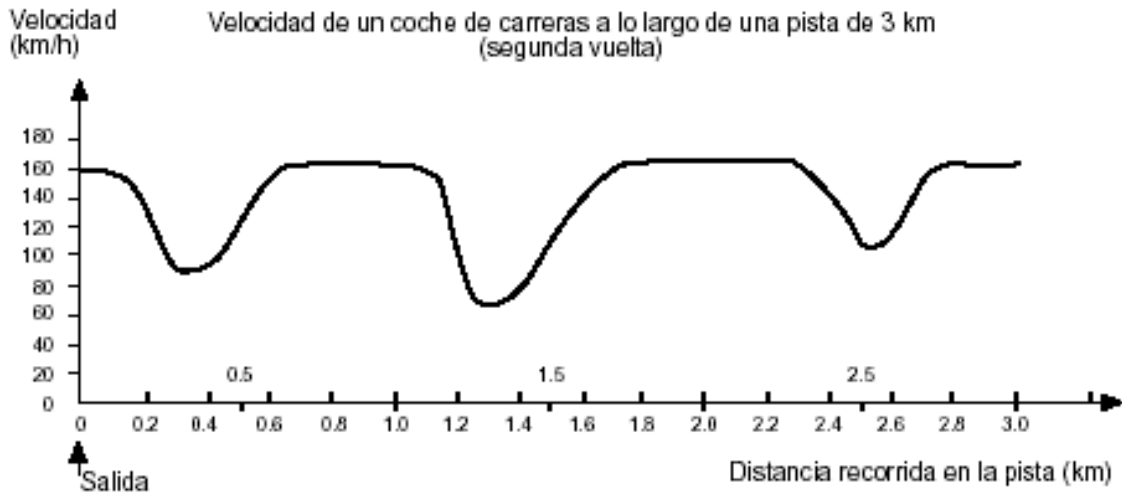
Figura A.1-3: Puntuación de la pregunta 2 del ítem de “Crecer” de las pruebas PISA

Fuente:

http://www.educantabria.es/docs/planes/evaluacion_educativa/competencia_matematica/preguntas_liberadas_matematicas_2000_2003.pdf?phpMyAdmin=DxoCAdbIc%2CANuNIkvc-WZcMiFvc

VELOCIDAD DE UN COCHE DE CARRERAS

Este gráfico muestra cómo varía la velocidad de un coche de carreras a lo largo de una pista llana de 3 Km durante su segunda vuelta.



Pregunta 1: VELOCIDAD

¿Cuál es la distancia aproximada desde la línea de salida hasta el comienzo del tramo recto más largo que hay en la pista?

- a) 0,5 Km
- b) 1,5 Km
- c) 2,3 Km
- d) 2,6 Km

Respuesta correcta: Opción B

Respuesta incorrecta: Otras respuestas o sin responder.

DATOS PARA VELOCIDAD DE UN AUTO DE CARRERA - PREGUNTA 1(M159Q01)

Agrupamiento de competencia	Conexiones
Objetivo	Interpretar representaciones gráficas de situaciones nuevas del mundo real
Contenido	Cambio y relaciones.
Contexto	Científico
Formato	Múltiple opción
Nivel	3
Resultado promedio en los países participantes	Crédito total.....67%

Figura A.1-4: Puntuación de la pregunta 1 del ítem de “Velocidad de un coche de carreras” de las pruebas PISA

Fuente:

<http://190.64.69.75/archivos/matematica/Items%20publicos%20de%20Matematica%20en%20PISA.pdf>

Pregunta 2: VELOCIDAD

¿Dónde alcanzó el coche la velocidad más baja durante la segunda vuelta?

- a) En la línea de salida.
- b) Aproximadamente en el Km 0,8
- c) Aproximadamente en el Km 1,3
- d) A mitad de recorrido

Respuesta correcta: Opción C

Respuesta incorrecta: Otras respuestas.

Dificultad: 403

Respuesta correcta: C

Aciertos: España 88,6%;
OCDE 83,3%

Figura A.1-5: Puntuación de la pregunta 2 del ítem de “Velocidad de un coche de carreras” de las pruebas PISA

Fuente:

www.educantabria.es/docs/planes/evaluacion_educativa/competencia_matematica/preguntas_liberadas_matematicas_2000_2003.

Pregunta 3: VELOCIDAD

¿Qué se puede decir sobre la velocidad del coche entre el Km 2,6 y el 2,8?

- a) La velocidad del coche permanece constante.
- b) La velocidad del coche es creciente.
- c) La velocidad del coche es decreciente
- d) La velocidad del coche no se puede hallar basándose en este gráfico.

Respuesta correcta: Opción B

Respuesta incorrecta: Otras respuestas

DATOS PARA VELOCIDAD DE UN AUTO DE CARRERA - PREGUNTAS 2, 3 (M159Q02- Q03)

Agrupamiento de competencia	Reproducción
Objetivo	Conectar un texto simple a una característica específica de un gráfico y leer un valor en él.
Contenido	Cambio y relaciones.
Contexto	Científico
Formato	Múltiple opción
Nivel	1
Resultado promedio en los países participantes	Q02 Crédito completo.....83% Q03 Crédito completo.....83%

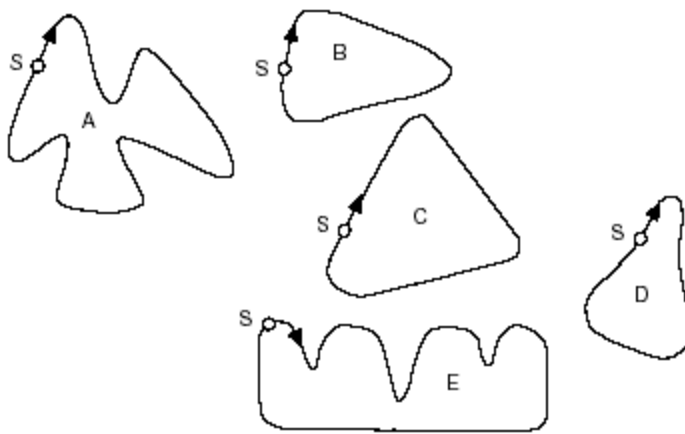
Figura A.1-6: Puntuación de la pregunta 3 del ítem de “Velocidad de un coche de carreras” de las pruebas PISA

Fuente:

<http://190.64.69.75/archivos/matematica/Itemes%20publicos%20de%20Matematica%20en%20PISA.pdf>

Pregunta 4: VELOCIDAD

Aquí están dibujadas cinco pistas. ¿En cuál de estas pistas se condujo el coche para producir el gráfico de velocidad mostrado anteriormente?



S: Línea de salida

Respuesta correcta: Opción B

Respuesta incorrecta: Otras respuestas

DATOS PARA VELOCIDAD DE UN AUTO DE CARRERA – PREGUNTA 4 (M159Q04)

Agrupamiento de competencia	Conexiones
Objetivo	Conectar representaciones matemáticas formales a situaciones complejas del mundo real.
Contenido	Cambio y relaciones.
Contexto	Científico
Formato	Múltiple opción
Nivel	5
Resultado promedio en los países participantes	Crédito completo.....28%

Figura A.1-7: Puntuación de la pregunta 4 del ítem de “Velocidad de un coche de carreras” de las pruebas PISA

Fuente:

<http://190.64.69.75/archivos/matematica/Items%20publicos%20de%20Matematica%20en%20PISA.pdf>

EL MEJOR COCHE

Una revista de coches utiliza un sistema de puntuaciones para evaluar los nuevos coches y concede el premio de Mejor coche del año al coche con la puntuación total más alta. Se están evaluando cinco coches nuevos. Sus puntuaciones se muestran en la tabla:

Coche	Ahorro de seguridad (S)	Diseño combustible (C)	Habitáculo exterior (D)	Interior (H)
Ca	3	1	2	3
M2	2	2	2	2
Sp	3	1	3	2
N1	1	3	3	3
KK	3	2	3	2

Las puntuaciones se interpretan de la siguiente manera:

- 3 puntos = Excelente
- 2 puntos = Bueno
- 1 punto = Aceptable

Pregunta 1: EL MEJOR COCHE

Para calcular la puntuación total de un coche, la revista utiliza la siguiente regla, que da una suma ponderada de las puntuaciones individuales:

$$\text{Puntuación total} = (3 \times S) + C + D + H$$

Calcula la puntuación total del coche Ca. Escribe tu contestación en el espacio siguiente.

Puntuación total de Ca.....

M704Q01T				
Sub-escala:	Cambio y relaciones	Aciertos (%):	72,9	OCDE
Situación:	Pública		71,4	España
Competencia:	Reproducción		77,3	Castilla y León
Dificultad:	447 (nivel 2)		70,9	Cataluña
			75,1	País Vasco

EL MEJOR COCHE. PUNTUACIÓN DE LA PREGUNTA 37

Máxima puntuación

Código 1: 15 puntos.

Ninguna puntuación

Código 0: Otras respuestas.

Código 9: Sin respuesta.

Figura A.1-8: Puntuación de la pregunta 1 del ítem de “El mejor coche” de las pruebas PISA

Fuente:

www.educantabria.es/docs/planes/evaluacion_educativa/competencia_matematica/preguntas_liberadas_matematicas_2000_2003.

Pregunta 2: EL MEJOR COCHE

“El fabricante del coche Ca pensó que la regla para obtener la puntuación total no era justa.

Escribe una regla para calcular la puntuación total de modo que el coche Ca sea el ganador.

Tu regla debe incluir las cuatro variables y debes escribir la regla rellenando con números positivos los cuatro espacios de la ecuación siguiente.

Puntuación total = S + C + D + H.

M704Q02T				
Sub-escala:	Cambio y relaciones	Aciertos (%):	25,4	OCDE
Situación:	Pública		22,2	España
Competencia:	Reflexión		27,7	Castilla y León
Dificultad:	657 (nivel 5)		22,5	Cataluña
			25,8	País Vasco

EL MEJOR COCHE. PUNTUACIÓN DE LA PREGUNTA 38

Máxima puntuación

Código 1: Regla correcta que convierta a Ca en ganador.

Ninguna puntuación

Código 0: Otras respuestas.

Código 9: Sin respuesta.

Figura A.1-9: Puntuación de la pregunta 1 del ítem de “El mejor coche” de las pruebas PISA

Fuente:

www.educantabria.es/docs/planes/evaluacion_educativa/competencia_matematica/preguntas_liberadas_matematicas_2000_2003.

En esta pregunta existen una infinidad de respuestas, basta con proponer un coeficiente mayor o igual que 3 en las variables S y T, y dejar con coeficiente 1 a las variables F y E.

ANEXO 3: CARTAS

Barcelona, novembre del 2013

Benvolguts pares,

La professora de Matemàtiques del col·legi, Maria Fernanda Massut Bocklet, es troba realitzant la tesi doctoral en Didàctica de les Matemàtiques en la Universitat de Barcelona, sobre **el valor de l'ús de la tecnologia en les classes de matemàtiques de primer de batxillerat**. Per desenvolupar aquest treball és necessari realitzar amb els alumnes diferents tipus d'activitats en el tema de "Funcions" corresponent al segon trimestre.

És per aquest motiu que us sol·licitem la vostra autorització per treballar amb el/la vostre/a fill/a en aquesta tesi doctoral. La professora passarà unes proves experimentals i en farà l'avaluació per analitzar tota la informació. També en alguns moments es farà un vídeo del desenvolupament de la classe. Les dades són totalment anònimes, és a dir, els noms dels alumnes no apareixeran en cap dels treballs.

Cordialment,

Helena Labarta
Coordinadora de 1r de batxillerat

En/na

.....
Mare/pare/tutor/a de l'alumne/a :

.....
De la seccióde primer curs de batxillerat autoritzo que el/la meu/va fill/a participi en el treball de recerca, les dades del qual seran totalment anònimes.

Barcelona,de novembre de 2013

Signatura del pare/mare/tutor/a

ANEXO 4: INDICACIONES PARA LA REALIZACIÓN DE LES PRUEBAS DIAGNÓSTICAS DE ÁLGEBRA Y FUNCIONES

A continuación se detallan algunas recomendaciones para la correcta realización de las pruebas diagnósticas:

- 1) Se ha de recordar a los alumnos que son **pruebas**, por tanto no han de copiar y si no entienden lo que se les pide han de explicitarlo en la hoja.
- 2) Han de ser conscientes que cualquier ayuda puede variar los resultados del diagnóstico, y por lo tanto de los datos de punto de partida de la investigación.
- 3) NO pueden preguntar al profesor o a un compañero si tienen alguna duda.
- 4) El alumno ha de leer los enunciados, en ningún caso lo ha de hacer el profesor.
- 5) El profesor puede explicar el significado de alguna palabra sólo en el caso de que el alumno lo pidiese explícitamente.

Se han de pasar 3 cuestionarios, cada uno dura aproximadamente media hora de clase. Si algún alumno necesita más tiempo podéis dejarlo acabar.

1) Prueba diagnóstica de álgebra

Los alumnos han de realizar en primer lugar la prueba de habilidades y destrezas algebraicas, diseñada por el Dr. Martín M. Socas, que consta de dos cuestionarios:

- **1º Cuestionario:** formado por 7 preguntas con 29 ítems. Tienen **media hora de clase** per hacerlo. No obstante si algún alumno tarda más, puede continuar hasta que acabe. Han de responder todo **en la hoja**, cálculos auxiliares inclusive. Pueden responder con lápiz.
- **2º Cuestionario:** formado por 4 preguntas con 9 ítems. Tienen **media hora de clase** per hacerlo. No obstante si algún alumno tarda más, puede continuar hasta que acabe. Han de responder todo **en la hoja**, cálculos auxiliares inclusive. Pueden responder con lápiz.

2) Prueba diagnóstica de funciones

El 3º cuestionario está compuesto de tres ejercicios de las pruebas PISA del área de funciones. Tienen **media hora de clase** per hacerlo. No obstante, si algún alumno tarda más, puede continuar hasta que acabe. Han de responder todo **en la hoja**, cálculos auxiliares inclusive. Pueden responder con lápiz.

¡Muchas gracias!

ANEXO 5: CUESTIONARIO DE IDENTIFICACIÓN

1. DATOS PERSONALES:

Nombre y Apellido:

Fecha de nacimiento:

País de origen:

Lugar de origen:

2. DATOS FAMILIARES:

2.1. Estudios de los padres:

	Estudios Primarios	Estudios Secundarios	Bachillerato	Universitarios
Padre				
Madre				

2.2. Situación laboral de los padres:

Profesión de los padres	Sí (a qué se dedica)	NO
Padre		
Madre		
Otro miembro de la familia		

2.3. Número de hermanos/as:

0 1 2 3 4 5

En caso afirmativo:

Qué lugar ocupas ?.....

Centro educativo donde estudia/n tu/s hermano/s

4. LAS MATEMÁTICAS

4.1. Lo que más me cuesta entender de las matemáticas es:

- Los enunciados de los problemas
- Las operaciones matemáticas
-
-

4.2. Cuando me dijeron si quería participar como parte de la muestra de la investigación me sentí:

- Contento / a No contento / a
- Preocupado / a No preocupado / a
- Seguro / a Inseguro / a

4.3. Cuando vi lo que tenía que hacer (vídeos tutoriales, cuestionarios y apuntes) pensé:

- Que era fácil
- Que sería difícil
- Que sería todo más pautado
- Que sería menos pautado

Que sería más largo

Que sería más corto

Lo que más me costó fue:

Lo que menos me costó fue:

Lo que más me gusto fue:

Lo que menos me gusto fue:

4.5. Marca con una cruz la casilla que mejor se ajuste a ti teniendo en cuenta que un 1 es muy poco de acuerdo y un 5 es muy de acuerdo

1 2 3 4 5

a) Me gustan las matemáticas

1 2 3 4 5

b) Me gusta trabajar con ordenador

1 2 3 4 5

c) Prefiero hacer matemáticas con ordenador

1 2 3 4 5

d) Si no tengo ayuda me cuestan mucho las matemáticas

1 2 3 4 5

e) Prefiero trabajar en grupo que solo.

f) Cuando trabajo con las matemáticas me siento más inseguro que en otras materias

1 2 3 4 5

¡Muchas gracias por tu colaboración!

ANEXO 6: PLANTILLA DE CORNELL

Nombre y apellido:

Fecha:

1r Bat _____

PREGUNTAS, PUNTOS E IDEAS IMPORTANTES O DIAGRAMAS SIMPLES	NOTAS DEL VIDEO
RESUMEN	

ANEXO 7: CUESTIONARIOS DE AUTOEVALUACIÓN Y VALORACIÓN DE LOS VÍDEOS TUTORIALES

Formulario 1 – Concepto de Función

Formulario 1 de funciones - 1r Batx

El nom d'usuari (ferchu.massut@fje.edu) quedarà registrat quan envieu aquest formulari. No sou [ferchu.massut](#)? [Tanqueu la sessió](#)

* **Necessari**

Nombre y Apellido *

Las matemáticas que estudias son: *

RESPECTO DE LAS FUNCIONES:

Una función es: *

- Una correspondencia entre elementos de dos conjuntos.
- Una relación donde a cada elemento del primer conjunto le corresponde uno o más elementos del segundo conjunto.
- Ninguna de las dos opciones anteriores es correcta.

La función $f(x)=x - 4$ se puede expresar de forma *

- gráfica
- con un enunciado verbal
- con una tabla de valores
- de las tres formas mencionadas anteriormente

¿Qué pregunta interesante se te ocurre sobre el tema visto? *

RESPECTO DE LA EXPERIENCIA DE LA VISUALIZACIÓN DEL VIDEO:

¿Has podido concentrarte para ver el video? *

- SI
- NO

En caso negativo enumera las causas de distracción

¿Cuántas veces has necesitado ver el video para comprender el tema? *

▼

¿Has utilizado las funciones de "Pausa" y "Retroceso"? *

- SI
- NO

¿Te han quedado dudas? ¿Si o no y cuales? *

¿Has podido tomar nota con la plantilla de Cornell?

- SI
- NO

Tu nivel de comprensión del tema a través de este video ha sido: *

1 2 3 4 5

Superficial Profunda

Normalmente en las clases de matemáticas: *

1 2 3 4 5

Me cuesta mucho seguir la clase y entender Entiendo todo con facilidad

Tu nota de matemáticas del primer trimestre ha sido: *

- Suspenso
- Suficiente
- Bien
- Notable
- Excelente

Sección *

▼

Continúa »



33% completat

COMO ALUMNO DE FERCHU:

¿El hecho de que la voz en off del video sea de tu profesora de clase ha influido en el nivel de comprensión del tema? *

¿Por qué? *

Sugerencias para los próximos videos

Envíam una còpia de les meves respostes.

No envieu mai contrasenyes a través de Formularis de Google.

Ho heu aconseguit, heu emplenat el 100%.

COMO ALUMNO DE MONTSE, FRANCESC, PAU O HELENA:

¿El hecho de que la voz en off del video NO sea de tu profesor/a de clase ha influido en el nivel de comprensión del tema? *

Negativamente
 No ha influido
 Positivamente

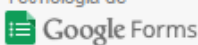
¿Por qué? *

Sugerencias para los próximos videos

Envia'm una còpia de les meves respostes.

No envieu mai contrasenyes a través de Formularis de Google.

Ho heu aconseguit, heu emplenat el 100%.

Tecnologia de  Google Forms

Aquest formulari s'ha creat dins del domini Jesuïtes Educació.
[Informe dels abusos](#) - [Condicions del Servei](#) - [Termes addicionals](#)

Il·lustració 10-1: Formulari 1 de autoevaluació i valoració del vídeo tutorial
 Fuente: De elaboración propia

Formulario 2 – Dominio de una Función**Formulario 2 de funciones - 1r Batx**

El nom d'usuari (**ferchu.massut@fje.edu**) quedarà registrat quan envieu aquest formulari. No sou **ferchu.massut**? [Tanqueu la sessió](#)

* Necessari

Nombre y Apellido *

Las matemáticas que estudias son: *

Sección *

RESPECTO DE LAS FUNCIONES REALES DE VARIABLE REAL:

El dominio de una función real de variable real está formado por: *

- El conjunto de los números reales
- Un subconjunto de los números reales
- Las dos opciones son correctas

La función $f(x)=(x-4)/(x+2)$ *

- Tiene $\text{Dom}(f)=\mathbb{R}-\{2\}$
- Tiene $\text{Im}(f)=\mathbb{R}$
- Tiene $\text{Dom}(f)=\mathbb{R}-\{-2\}$
- Ninguna de las tres opciones anteriores es correcta

¿Qué pregunta interesante se te ocurre sobre el tema visto? *

RESPECTO DE LA EXPERIENCIA DE LA VISUALIZACIÓN DEL VIDEO:

¿Has podido concentrarte para ver el video? *

- SI
 NO

En caso negativo enumera las causas de distracción

¿Cuántas veces has necesitado ver el video para comprender el tema? *

¿Has utilizado las funciones de "Pausa" y "Retroceso"? *

- SI
 NO

¿Te han quedado dudas? ¿Si o no y cuales? *

¿Has podido tomar nota con la plantilla de Cornell?

- SI
 NO

¿Has tenido alguna dificultad en el proceso? Si/no, cual? *

Tu nivel de comprensión del TEMA 2 a través de este video ha sido: *

1 2 3 4 5

Superficial Profunda

Sugerencias para los próximos videos

Envíam una còpia de les meves respostes.

No envieu mai contrasenyes a través de Formularis de Google.

Ho heu aconseguit, heu emplenat el 100%.

Tecnologia de  Google Forms

Aquest formulari s'ha creat dins del domini Jesuïtes Educació.
[Informe dels abusos](#) - [Condicions del Servei](#) - [Termes addicionals](#)

Il·lustración 10-2: Formulario 2 de autoevaluación y valoración del vídeo tutorial

Fuente: De elaboración propia

Formulario 3 – Operación con funciones

Formulario 3 de funciones - 1r Batx

El nom d'usuari (**ferchu.massut@fje.edu**) quedarà registrat quan envieu aquest formulari. No sou **ferchu.massut**? [Tanqueu la sessió](#)

* **Necessari**

Nombre y Apellido *

Las matemáticas que estudias son: *

Sección *

RESPECTO DE LAS OPERACIONES CON FUNCIONES

La suma de las funciones $f(x)= x+5$ y $g(x)=x-10$ *

- Tiene Dom(f)= $\mathbb{R}-\{10\}$
- Tiene Im(f)= $\mathbb{R}-\{5\}$
- Tiene Dom(f)= \mathbb{R}
- Ninguna de las tres opciones anteriores es correcta

El dominio de la división de las funciones $f(x)=x+5$ y $g(x)=x-10$ es: *

- El conjunto de los números reales
- El conjunto de los números reales excepto cuando $x=-5$
- El conjunto de los números reales excepto cuando $x=10$

¿Qué pregunta interesante se te ocurre sobre el tema visto? *

RESPECTO DE LA EXPERIENCIA DE LA VISUALIZACIÓN DEL VIDEO:

¿Has podido concentrarte para ver el video? *

- SI
- NO

En caso negativo enumera las causas de distracción

¿Cuántas veces has necesitado ver el video para comprender el tema? *

¿Has utilizado las funciones de "Pausa" y "Retroceso"? *

- SI
- NO

¿Te han quedado dudas? ¿Si o no y cuales? *

¿Has podido tomar nota con la plantilla de Cornell?

SI
 NO

¿Has tenido alguna dificultad en el proceso? Si/no, cual? *

Tu nivel de comprensión del TEMA 3 a través de este video ha sido: *

1 2 3 4 5


Superficial Profunda

Sugerencias para los próximos videos

Envíam una còpia de les meves respostes.

No envieu mai contrasenyes a través de Formularis de Google.

Ho heu aconseguit, heu emplenat el 100%.

Tecnologia de  Aquest formulari s'ha creat dins del domini Jesuïtes Educació.

[Informe dels abusos](#) - [Condicions del Servei](#) - [Termes addicionals](#)

Ilustración 10-3: Formulario 3 de autoevaluación y valoración del vídeo tutorial

Fuente: De elaboración propia

Formulario 4 – Composición de funciones**Formulario 4 de funciones - 1r Batx**

El nom d'usuari (ferchu.massut@fje.edu) quedarà registrat quan envieu aquest formulari. No sou [ferchu.massut](#)? [Tanqueu la sessió](#)

* Necessari

Nombre y Apellido *

Las matemáticas que estudias son: *

Sección *

RESPECTO DE LA COMPOSICIÓN DE FUNCIONES

Si realizamos la composición $f \circ g(x)$, donde $f(x) = x+4$ y $g(x) = \sqrt{x}$, ($\sqrt{}$ (square root) es igual a raíz cuadrada) *

- El resultado será diferente a si componemos $g \circ f(x)$
- El resultado será el mismo a si realizamos $g \circ f(x)$

El dominio de la $f \circ g(x)$, si $f(x) = 6-x$ y $g(x) = \sqrt{x}$ es: *

- El conjunto de los números reales
- El conjunto de los números reales excepto cuando $x=6$
- El conjunto de los números reales más grandes o iguales que -6
- Ninguna de las opciones anteriores es correcta

¿Qué pregunta interesante se te ocurre sobre el tema visto? *

RESPECTO DE LA EXPERIENCIA DE LA VISUALIZACIÓN DEL VIDEO:

¿Has podido concentrarte para ver el video? *

- SI
- NO

¿Has podido concentrarte para ver el video? *

- SI
 NO

En caso negativo enumera las causas de distracción

¿Cuántas veces has necesitado ver el video para comprender el tema? *

¿Has utilizado las funciones de "Pausa" y "Retroceso"? *

- SI
 NO

¿Te han quedado dudas? ¿Si o no y cuales? *

¿Has podido tomar nota con la plantilla de Cornell?

- SI
 NO

¿Has tenido alguna dificultad en el proceso? Si/no, cual? *

Tu nivel de comprensión del TEMA 4 a través de este video ha sido: *

1 2 3 4 5

Superficial Profunda

Sugerencias para los próximos videos

Envia'm una còpia de les meves respostes.

No envieu mai contrasenyes a través de Formularis de Google. Ho heu aconseguit, heu emplenat el **100%**.

Tecnologia de  Google Forms Aquest formulari s'ha creat dins del domini Jesuïtes Educació.
[Informe dels abusos](#) - [Condicions del Servei](#) - [Termes addicionals](#)

Il·lustració 10-4: Formulario 4 de autoevaluación y valoración del vídeo tutorial
Fuente: De elaboración propia

Formulario 5 – Función inversa

Formulario 5 de funciones - 1r Batx

El nom d'usuari (**ferchu.massut@fje.edu**) quedarà registrat quan envieu aquest formulari. No sou **ferchu.massut**? [Tanqueu la sessió](#)
* Necessari

Nombre y Apellido *

Las matemáticas que estudias son: *

Sección *

RESPECTO DE LA FUNCIÓN INVERSA

Dada la función $f(x) = x - 4$: *

- Su función inversa es $g(x) = 1/x - 4$
- Su función inversa es $g(x) = 1/(x - 4)$
- Su función inversa es $g(x) = (1 + 4x)/x$
- Ninguna de las respuestas anteriores es correcta

La imagen de la función $f(x)=(x-3)/(x+2)$ es: *

- El conjunto de los números reales
- El conjunto de los números reales excepto cuando $x=1$
- El conjunto de los números reales más grandes o iguales que 3
- Ninguna de las opciones anteriores es correcta

¿Qué pregunta interesante se te ocurre sobre el tema visto? *

RESPECTO DE LA EXPERIENCIA DE LA VISUALIZACIÓN DEL VIDEO:

¿Has podido concentrarte para ver el video? *

- SI
- NO

En caso negativo enumera las causas de distracción

¿Cuántas veces has necesitado ver el video para comprender el tema? *

¿Has utilizado las funciones de "Pausa" y "Retroceso"? *

- SI
- NO

¿Te han quedado dudas? ¿Si o no y cuales? *

¿Has podido tomar nota con la plantilla de Cornell?

SI
 NO

¿Has tenido alguna dificultad en el proceso? Si/no, cual? *

Tu nivel de comprensión del TEMA 5 a través de este video ha sido: *

1 2 3 4 5


Superficial Profunda

Sugerencias para los próximos videos

Envíam una còpia de les meves respostes.

No envieu mai contrasenyes a través de Formularis de Google.

Ho heu aconseguit, heu emplenat el 100%.

Tecnologia de  Google Forms

Aquest formulari s'ha creat dins del domini Jesuïtes Educació.
[Informe dels abusos](#) - [Condicions del Servei](#) - [Termes addicionals](#)

Il·lustració 10-5: Formulario 5 de autoevaluación y valoración del vídeo tutorial
 Fuente: De elaboración propia

Formulario 6 – Simetría de funciones**Formulario 6 de funciones - 1r Batx**

El nom d'usuari (ferchu.massut@fje.edu) quedarà registrat quan envieu aquest formulari. No sou [ferchu.massut](#)? [Tanqueu la sessió](#)

* Necessari

Nombre y Apellido *

Las matemáticas que estudias son: *

Sección *

RESPECTO DE LA SIMETRIA DE FUNCIONES

Todas las funciones son simétricas, algunas pares y el resto impares *

- Si
 No

La función $f(x)=(x-3)/(x+2)$ es: *

- Simétrica par
 Simétrica impar
 No tiene simetria

¿Qué pregunta interesante se te ocurre sobre el tema visto? *

RESPECTO DE LA EXPERIENCIA DE LA VISUALIZACIÓN DEL VIDEO:

¿Has podido concentrarte para ver el video? *

- SI
 NO

En caso negativo enumera las causas de distracción

¿Cuántas veces has necesitado ver el video para comprender el tema? *

¿Has utilizado las funciones de "Pausa" y "Retroceso"? *

- SI
 NO

¿Te han quedado dudas? ¿Si o no y cuales? *

¿Has podido tomar nota con la plantilla de Cornell?

- SI
 NO

¿Has tenido alguna dificultad en el proceso? Si/no, cual? *

Tu nivel de comprensión del TEMA 6 a través de este video ha sido: *

1 2 3 4 5

Superficial Profunda

Sugerencias para los próximos videos

Envia'm una còpia de les meves respostes.

No envieu mai contrasenyes a través de Formularis de Google.

Ho heu aconseguit, heu emplenat el 100%.

Il·lustración 10-6: Formulario 6 de autoevaluación y valoración del vídeo tutorial
 Fuente: De elaboración propia

Formulario 7 – Propiedades globales de las funciones: periodicidad, continuidad y asíntotas

Formulario 7 de funciones - 1r Batx

El nom d'usuari (ferchu.massut@fje.edu) quedarà registrat quan envieu aquest formulari. No sou [ferchu.massut](#)? [Tanqueu la sessió](#)

* Necessari

Nombre y Apellido *

Las matemáticas que estudias son: *

Sección *

RESPECTO DE PERIODICIDAD, CONTINUIDAD Y ASÍNTOTAS DE UNA FUNCIÓN

¿Una función continua puede tener asíntota/s vertical/es? *

Si

No

Una función polinómica de grado 2 puede ser periódica *

Si

No

¿Qué pregunta interesante se te ocurre sobre el tema visto? *

RESPECTO DE LA EXPERIENCIA DE LA VISUALIZACIÓN DEL VIDEO:

El formato del vídeo ha cambiado. Consideras que *

- es mejor este formato que el anterior
 es mejor el formato anterior

Explica el por qué de tu elección. *

En el video aparecen 2 profesores explicando. ¿Piensas que es positivo o negativo? ¿Por qué? *

¿Has podido concentrarte para ver el video? *

- SI
 NO

En caso negativo enumera las causas de distracción

¿Cuántas veces has necesitado ver el video para comprender el tema? *

¿Cuántas veces has necesitado ver el video para comprender el tema? *

¿Has utilizado las funciones de "Pausa" y "Retroceso"? *

SI

NO

¿Te han quedado dudas? ¿Si o no y cuales? *

¿Has podido tomar nota con la plantilla de Cornell?

SI

NO

¿Has tenido alguna dificultad en el proceso? Si/no, cual? *

Tu nivel de comprensión del TEMA 7 a través de este video ha sido: *


1 2 3 4 5

Superficial Profunda

Sugerencias para los próximos videos

Envíam una còpia de les meves respostes.

No envieu mai contrasenyes a través de Formularis de Google. Ho heu aconseguit, heu emplenat el 100%.

Tecnologia de  Aquest formulari s'ha creat dins del domini Jesuïtes Educació.

[Informe dels abusos](#) - [Condicions del Servei](#) - [Termes addicionals](#)

Il·lustración 10-7: Formulario 7 de autoevaluación y valoración del vídeo tutorial
 Fuente: De elaboración propia

Formulario 8 – Propiedades globales de las funciones: continuidad, monotonía y curvatura

Formulario 8 de funciones - 1r Batx

El nom d'usuari (ferchu.massut@fje.edu) quedarà registrat quan envieu aquest formulari. No sou ferchu.massut? [Tanqueu la sessió](#)

* Necessari

Nombre y Apellido *

Las matemáticas que estudias son: *

Sección *

RESPECTO DE LA MONOTONIA Y LA CURVATURA DE UNA FUNCIÓN

Dada una función continua, el punto donde la función pasa de ser creciente a decreciente, se denomina *

- Punto de inflexión
- Máximo relativo
- Mínimo absoluto

Una función polinómica de grado 2: *

- Es cóncava si el coeficiente del término de segundo grado es negativo
- Nunca tiene punto de inflexión
- Siempre es convexa
- Ninguna de las opciones anteriores es correcta

¿Qué pregunta interesante se te ocurre sobre el tema visto? *

RESPECTO DE LA EXPERIENCIA DE LA VISUALIZACIÓN DEL VIDEO:

En el vídeo aparecen 2 profesores diferentes al anterior vídeo explicando. ¿Piensas que es positivo o negativo? ¿Por qué? *

¿Has podido concentrarte para ver el video? *

SI
 NO

En caso negativo enumera las causas de distracción

¿Cuántas veces has necesitado ver el video para comprender el tema? *

▼

¿Has utilizado las funciones de "Pausa" y "Retroceso"? *

SI
 NO

¿Te han quedado dudas? ¿Si o no y cuales? *

¿Has podido tomar nota con la plantilla de Cornell?

SI
 NO

¿Has tenido alguna dificultad en el proceso? Si/no, cual? *

Tu nivel de comprensión del TEMA 8 a través de este video ha sido: *

1 2 3 4 5


Superficial Profunda

Sugerencias

Envíam una còpia de les meves respostes.

Envia

No envieu mai contrasenyes a través de Formularis de Google. Ho heu aconseguit, heu emplenat el 100%.

Tecnologia de  Google Forms Aquest formulari s'ha creat dins del domini Jesuïtes Educació.

[Informe dels abusos](#) - [Condicions del Servei](#) - [Termes addicionals](#)

Il·lustración 10-8: Formulario 8 de autoevaluación y valoración del vídeo tutorial
 Fuente: De elaboración propia

ANEXO 8: CUESTIONARIO FINAL DE VALORACIÓN DEL MODELO “FLIPPED CLASSROOM”

Cuestionario de valoración final de la unidad de funciones con FLIPPED CLASSROOM

El nom d'usuari (ferchu.massut@fje.edu) quedarà registrat quan envieu aquest formulari. No sou [ferchu.massut](#)? [Tanqueu la sessió](#)

* Necessari

Nombre y Apellido *

Sexo *
Las matemáticas que estudias son: *
Sección *

1 - UTILIZACIÓN DE LA TECNOLOGÍA PARA EL APRENDIZAJE DE LAS MATEMÁTICAS

1.1 - LOS VIDEOS

1- ¿Los vídeos te aportaron el conocimiento suficiente para aprender el tema de funciones? *

Si

En parte

No

2 - Valora tu nivel de comprensión del tema a través de los vídeos *

Muy bueno

Bueno

Regular

Malo

Muy malo

3 - Escoge 3 características que más destacan de los vídeos *

- Entretenidos
- Aburridos
- Largos
- Cortos
- De fácil comprensión
- De difícil comprensión
- Interactivos
- Magistrales
- Altres:

4 - ¿Qué dificultades o limitaciones has tenido a la hora de ver los vídeos? *


5 - ¿El uso sistemático de los vídeos te ayudó a ser más riguroso/a con tu estudio de las matemáticas? *

- Sí
- No
- No sabe, no contesta

6- Para estudiar para el control/examen volviste a ver *

- Todos los videos
- Más de 4
- 3 o menos
- Ninguno

4% completat

Tecnologia de  Google Forms

Aquest formulari s'ha creat dins del domini Jesuïtes Educació.
[Informe dels abusos](#) - [Condicions del Servei](#) - [Termes addicionals](#)

Escoge como máximo 3 razones por las que has vuelto a ver los vídeos *

- Para repasar
- Por temor a dejarte algo importante para estudiar
- Para memorizar los conceptos
- Porque tenías dudas
- Como una forma de estudiar
- Altres:

9% completat

7 - ¿A partir de la teoría vista en los vídeos consideras que este instrumento te ha servido para hacer generalizaciones? *

- Si
- No
- No sabe, no contesta

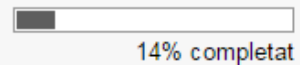
8 - ¿A partir de la teoría vista en los vídeos consideras que este instrumento te ha servido para saber qué hacer en cada caso? *

- Si
- No
- No sabe, no contesta

9 - Con los vídeos tu potencial matemático: *

- Ha mejorado
- Continúa igual
- Ha empeorado
- No sabe, no contesta

« Enrere Continua »

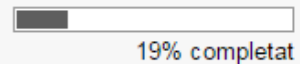


1.2 - LOS FORMULARIOS

10 - ¿Si los formularios no hubiesen sido obligatorios los hubieses contestado? *

- Si
- No

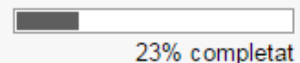
« Enrere Continua »



11 - ¿Además de que los formularios contarán para la nota para qué más te han servido? *
(Como máximo, 2 opciones)

- Para reforzar el contenido teórico que viste en el vídeo
- Para comprobar si entendiste el contenido del vídeo
- Porque las preguntas de teoría y las respuestas son las claves del tema
- Altres:

« Enrere Continua »



1.3 - LA WEB TRESCOMACATORZE

12 - ¿Cómo te resultó la web como herramienta para el aprendizaje de las matemáticas? *

- Muy buena
- Buena
- Regular
- Mala
- Muy mala
- No sabe, no contesta

13 - ¿Te ha ayudado la web a organizar tus estudios? *

- Si
- No
- No sabe, no contesta

14 - ¿Desde que utilizas la web tu rendimiento en la materia ha mejorado? *

- Si
- No
- No sabe, no contesta

15 - ¿Desde que utilizas la web te ha sido más fácil adquirir los conocimientos de la asignatura? *

- Si
- No
- No sabe, no contesta

16- ¿Qué dificultades o limitaciones has tenido a la hora de utilizar la web? *

17 - ¿Has utilizado las actividades resueltas colgadas en la web? *

- Si
- No
- No sabe, no contesta

Sugerències de canvi

(opcional)

« Enrere

Continua »




28% completat

En caso afirmativo**¿Para qué? ***

- Para controlar si lo que hiciste en clase estaba correcto
- Para estudiar lo que hicieron en clase porque faltaste ese día
- Para estudiar para el examen
- Para ver que los ejercicios se pueden resolver por distintos métodos y llegar al mismo resultado
- Altres:

« Enrere

Continua »

 33% completat**2 - LAS CLASES****2.1 - La Clase Introdutoria**


La clase introductoría fue aquella donde el profesor explicó la metodología que se utilizaría en la unidad con la guía y la página web

18 - ¿Estuviste en la clase introductoría? *

- Si
- No

« Enrere

Continua »

 38% completat**En caso afirmativo****19 - ¿La clase introductoría te sirvió para familiarizarte con la nueva metodología? ***

- Si
- Más o menos
- No
- No sabe, no contesta

20 - En la clase introductoría, en líneas generales, creíste que utilizar esta metodología iba a ser: *

- Muy fácil
- Fácil
- Medianamente difícil
- Muy difícil

21 - El hecho de tener que utilizar la tecnología, lo viste como *

- Un desafío
- Una forma de progresar
- Una complicación
- Un obstáculo
- Altres:

22 - ¿Cuando viste el primer video e hiciste en clase la primera actividad, cambiaste de opinión respecto de la que tenías en la clase introductoria? *

- Si, era mejor de lo que pensaba
- Continué pensando que es una buena metodología
- Me di cuenta que prefiero la tradicional

23 - Cuando terminaste la unidad tu opinión respecto a la metodología *

- Cambió en positivo
- Continuaba siendo buena
- Te era indistinto
- Continuaba siendo negativa
- Cambió a negativo
- Altres:

24 - ¿La clase introductoria te sirvió para entender la metodología y cómo tenías que utilizar la tecnología? *

- Si
- No
- No sabe, no contesta

25 - ¿El dossier de guía que el profesor te entregó te sirvió para entender lo que tenías que hacer? *


- Si
- No
- No sabe, no contesta

26 - Sugerencias de cambio de la clase introductoria

(Opcional)

« Enrere

Continua »

 42% completat


En caso negativo

¿Te pusiste en contacto con el profesor para que te explicara la metodología?

- Si
- No, le pregunté a un compañero
- Altres:

« Enrere

Continua »

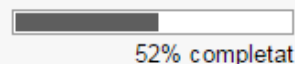
 47% completat

2.2. LAS CLASES EN EL AULA

27 - ¿De las 8 clases, llegaste a cada una habiendo visto el vídeo correspondiente con anterioridad? *

- Lo hice siempre
- Lo hice 7 de 8
- Lo hice 6 de 8
- Lo hice 5 de 8
- Lo hice 4 de 8
- Lo hice 3 o menos de 8
- No vi ningún vídeo antes de la clase correspondiente

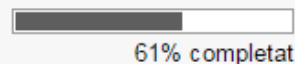
« Enrere Continua »



En caso negativo

¿Cual fue la causa por la que no viste los vídeos antes de cada clase? *

« Enrere Continua »



En caso afirmativo

¿Qué clases te resultaron más fáciles?

- Aquellas en las que habías visto el vídeo con anterioridad
- Aquellas en las que cuando llegabas a clase tu compañero/a te explicaba lo que se tenía que hacer
- Aquellas en las que cuando en los 10 minutos de introducción el profesor te explicaba de que se trataba el tema
- Altres:

28 - ¿Consideras que haber visto el vídeo con anterioridad te sirvió para trabajar en clase? *

- Si
- A veces
- No

29 - Los 10 minutos introductorios de cada clase los utilizaste para *

- Resolver dudas
- Aclarar tus ideas
- Sugerir nuevas preguntas
- Compartir y debatir con los compañeros sobre el tema
- Altres:

30 - Los 10 minutos de introducción en cada clase para resolver dudas eran *

- Escasos
- Suficientes
- Excesivos

31 - ¿Con qué tipo de actividad aprendiste mejor? *

- Trabajo individual
- Con tu compañero/a de clase
- Con un grupo
- Con las 3 igual

¿Por qué? *

32 - ¿Qué 3 dinámicas fueron las que más te gustaron de las clases? *

- Clase 1: Juego de tarjetas
- Clase 2: Analizar el dominio e Imagen de las gráficas propuestas
- Clase 3: Operar con funciones y hacerlo con el compañero/a
- Clase 4: Completar espacios y problemas de aplicación de composición de funciones
- Clase 5: Corregir controles con el grupo
- Clase 6: Analizar la simetría de funciones propuestas con el compañero/a
- Clase 7: Analizar las propiedades de funciones individualmente
- Clase 8: corregir un control con el grupo

33 - Mientras realizabas la actividad de clase, si tenías una duda se la consultabas: *

- Al profesor
- A un compañero/a
- A los dos

34 - Si pensaras en la clase como una "obra de teatro", consideras que el rol que ocupaste en las clases con este método fue de: *

- El protagonista de la obra
- El villano
- El ada madrina
- Un actor secundario de la obra
- Un simple espectador
- Altres:

35 - ¿Qué rol ocupaba el profesor en la "obra de teatro" de la clase con este método? *

- El protagonista de la obra
- El villano
- El ada madrina
- Un actor secundario de la obra
- Un simple espectador
- El director
- El escenógrafo
- El encargado de las luces o el telón
- Altres:

36 -Con esta metodología las clases se te hacían más cortas. *

- Siempre
 A veces
 Nunca

37 - ¿Crees que la utilización del tiempo en las clases fue la adecuada? *

- Si, me alcanzaba para terminar las actividades
 No, me sobraba tiempo
 No, me faltaba tiempo
 No sabe, no contesta

38 - ¿Qué dificultades o limitaciones has tenido en las clases? *

39 - ¿Faltaste a alguna clase? *

- Si
 No

En caso afirmativo

40 - Para ponerte al día de lo que hicieron en la clase que estuviste ausente: *

- Utilizaste el sistema del video y la actividad correspondiente resuelta que estaba colgada en la web para estudiar
 Te lo explicó todo un compañero
 Te lo explicó una persona externa al colegio (familiar, profesor particular, etc)
 Otros:

41 - Lamentaste haber faltado a clase porque *

- No pudiste consultar las dudas
 Te perdiste la parte de aplicación y ejercitación
 No te afectó haber faltado a clase
 Otros:

3 - METODOLOGIA : FLIPPED CLASSROOM

En casa vemos los "vídeos de teoría" y en clase realizamos "actividades"

42 - Habiendo terminado la experiencia piloto de la metodología de FLIPPED CLASSROOM, consideras que el método utilizado respecto de la forma tradicional de aprender matemáticas es: *

- Mejor
 Igual
 Peor

« Enrere Continua »



76% completat

Si has escogido la primera opción:**43 - ¿Por qué consideras que es mejor? ***

(Máximo 3 opciones)

- Porque me permitió elaborar el tema a mi
- Porque me obligaba a prepararme el tema para la clase
- Porque me sistematizó, me ayudó a organizarme.
- Porque me ordenaba el estudio
- Porque sabía lo que me iban a dar
- Porque me permitía adelantarme a los posibles ejercicios que iba a tener que hacer
- Porque la clase era más divertida
- Porque podía hacer los ejercicios a mi ritmo
- Porque si tenía dudas podría contar con el profesor para preguntarle en clase
- Porque si faltaba a clase tenía todo lo necesario para ponerme al día
- Altres:

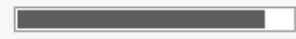
Si has escogido la tercera opción :**44 - ¿Por qué consideras que es peor? ***

(Máximo 3 opciones)

- Porque tenía que elaborar yo el tema
- Porque me obligaba a prepararme el tema para la clase
- Porque si no veía un vídeo no podía seguir la clase siguiente
- Porque prefiero que el profesor explique el tema en la pizarra
- Porque entendía menos con los vídeos
- Altres:

Si has escogido la segunda opción:**45 - Tus resultados académicos obtenidos con esta metodología respecto de la tradicional fueron: ***

- Mejores
- Iguales
- Peores
- No sabe, no contesta

90% completat

46 - Aunque los resultados académicos no hayan sido los esperados consideras que: *

- Has aprendido más
- Has aprendido lo mismo
- Has aprendido menos
- No sabe, no contesta

47 - En Setiembre del curso que viene necesitarás utilizar el contenido de este tema. ¿Piensas que te acordarás más, igual o menos que si hubieses visto el tema con la metodología tradicional? *

Más

Igual

Menos

48 - Ahora que has terminado de ver la unidad con esta nueva metodología *

Te gustaría que fuese así todo el curso

Te gustaría un mix, algunas unidades con la nueva metodología y otras con la tradicional

Prefieres continuar con la tradicional

Altres:

49 - ¿Por qué razón? *

50 - Si quieres puedes dejarnos algún comentario sobre algún aspecto o cuestión que no se haya tenido presente en el cuestionario (Opcional)

¡Gracias por tu colaboración!

Envia'm una còpia de les meves respostes.

No envieu mai contrasenyes a través de Formularis de Google.

Ho heu aconseguit, heu emplenat el 100%.

Ilustración 10-9: Formulario final de valoración del modelo Flipped Classroom

Fuente: De elaboración propia

ANEXO 9: CUESTIONARIOS PARA LOS PROFESORES PARA EVALUAR CADA CLASE

Los cuestionarios para los profesores de cada clase son los ocho iguales excepto en el tipo de método ocupado en clase: trabajo cooperativo, tutoría de iguales y trabajo individual.

Formulario 1a Clase : trabajo cooperativo

A continuación encontraréis algunas preguntas sobre el funcionamiento de la primera clase con la metodología "Flipped Classroom"

Sección *

Aspectos negativos o dificultades que han surgido respecto del trabajo en casa (vídeos, cuestionarios o apuntes) *

Aspectos positivos que hayan expresado los alumnos del trabajo en casa (vídeos, cuestionarios o apuntes) *

Aspectos negativos del desarrollo de la actividad de trabajo cooperativo *

Aspectos positivos del desarrollo de la actividad de trabajo cooperativo *

Sugerencias *

Envíam una còpia de les meves respostes.

*Ilustración 10-10: Formulario valoración diaria de la clase para los profesores
Fuente: De elaboración propia*

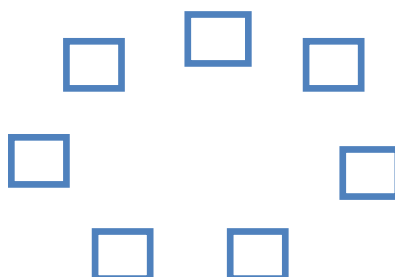
ANEXO 10: ACTIVIDADES DE CLASE

ACTIVIDAD DE CLASE 1: CONCEPTO DE FUNCIÓN

(Trabajo cooperativo)

1. **Actividad de calentamiento (5 min)** : plantear un acertijo, adivinanza matemática, etc (5 min)
2. **Preguntas sobre el video (10 min)**: Poner en común las preguntas interesantes o dudas que hayan surgido de mirar el video
3. **Actividad (40-45 min)**

- 1) Formar grupos de 4 alumnos con mesas incluidas. Intentar que los equipos en el aula queden distribuidos uno seguido del otro como muestra la figura.



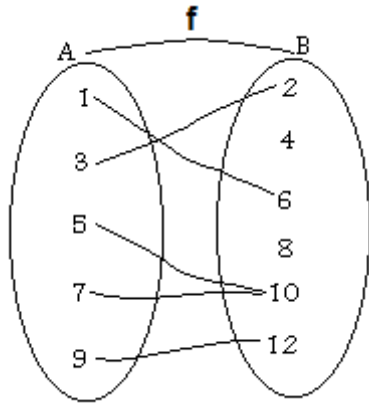
- 2) Cada integrante del grupo ha de tener una hoja (o su libreta) y un lápiz (o bolígrafo) para apuntar.
- 3) Repartir a cada grupo una tarjeta boca abajo (adjuntas al final de la actividad).
- 4) Con la indicación del profesor, los alumnos han de dar vuelta a la tarjeta y resolver el ejercicio que se les plantea. Todos los integrantes del grupo han de anotar el ejercicio y el resultado en su libreta. Se les da un minuto (o minuto y medio) para resolverlo.
- 5) Al terminar cada equipo pasa boca abajo la tarjeta al grupo siguiente en sentido de las agujas del reloj, hasta que el profesor vuelva a dar la señal para comenzar.
- 6) Realizar la actividad hasta que todos los grupos hayan resuelto todas las tarjetas (Tantas como grupos hay)
- 7) Para corregir los resultados se puede optar por dos formas diferentes dependiendo del tiempo de clase que quede:

Opción A: Un integrante de cada grupo pasa a la pizarra a colocar el resultado del ejercicio. El profesor revisa la respuesta de cada grupo y otorga 1 punto al que esté correcto. Se repite esta acción tantas veces como tarjetas haya. El equipo ganador se gana un positivo de actitud.

Opción B: Cada equipo entrega sus hojas o libretas al siguiente equipo para que estos los corrijan a la par que el profesor corrige en la pizarra todos los ejercicios realizados. El corrector otorga un punto si el ejercicio está correctamente resuelto. El equipo ganador se gana un positivo de actitud.

Tarjeta 1

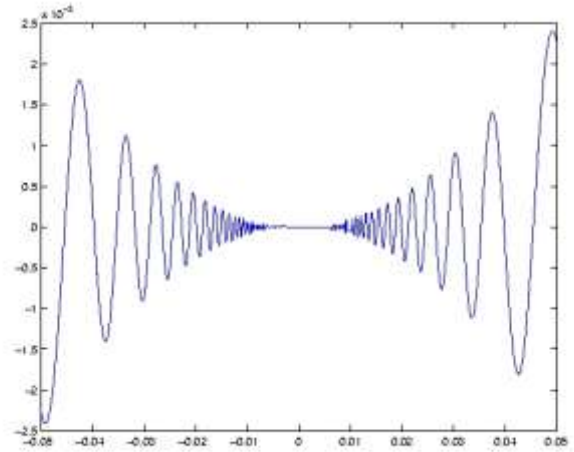
¿La siguiente correspondencia es función? ¿Por qué?



Solución: Si, porque a cada elemento del conjunto A le corresponde un elemento del conjunto B

Tarjeta 5

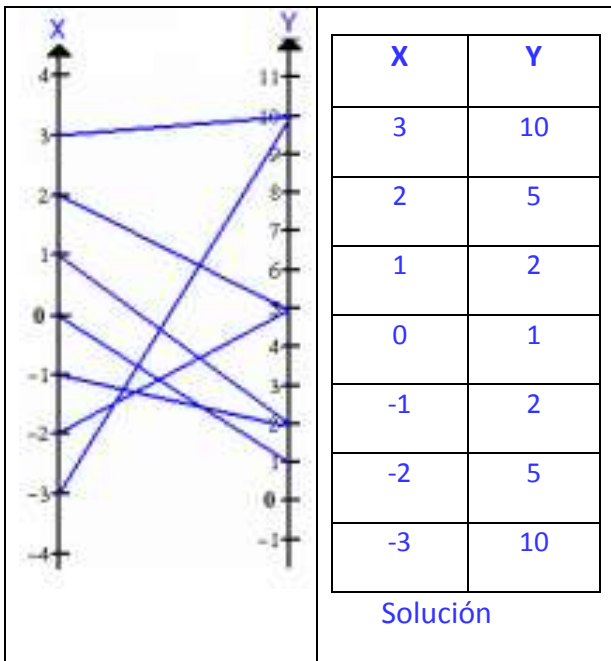
¿La siguiente figura representa una función? ¿Por qué?



Solución: Si, porque a cada elemento del eje X le corresponde un elemento del eje Y, aunque hayan dos elementos de X que tengan como imagen el mismo valor en Y

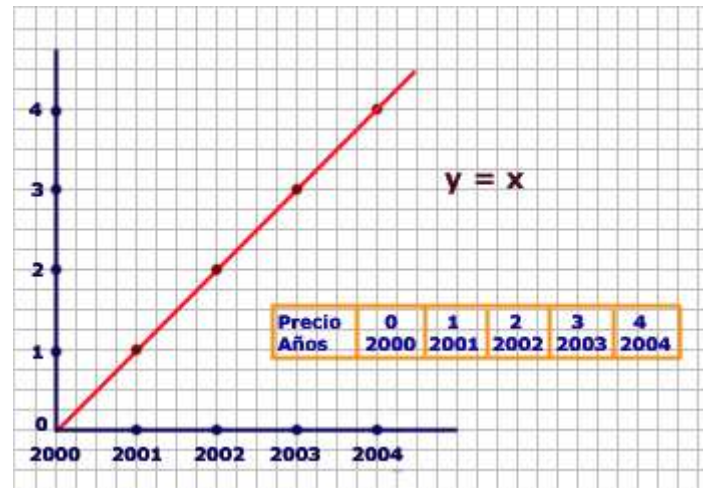
Tarjeta 2

Expresa la siguiente función mediante una tabla de valores



Tarjeta 6

Expresa la siguiente función mediante un enunciado verbal



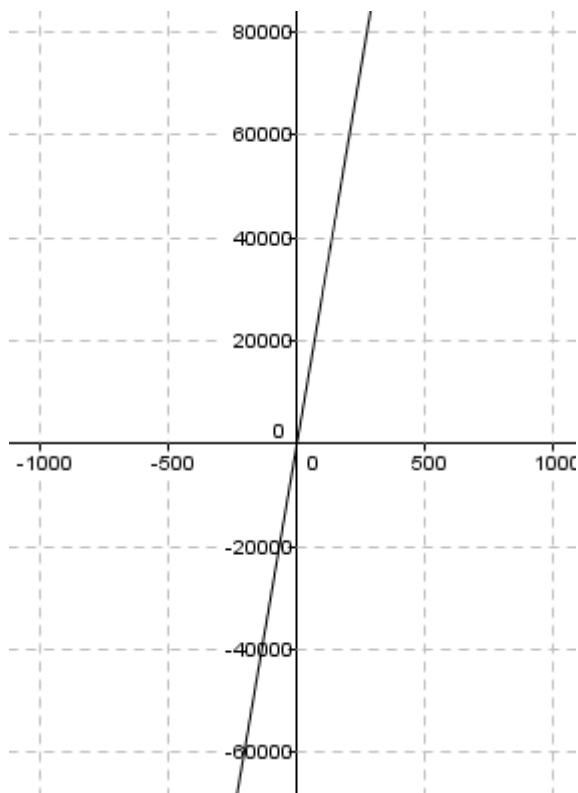
Solución: El precio de un producto aumenta una unidad monetaria (desde cero) por año desde el año 2000

Tarjeta 3

Expresar gráficamente el siguiente enunciado:

“Los impulsos en las fibras nerviosas viajan a una velocidad de 293 pies/segundo. La distancia recorrida en t segundos está dada por la función: $d(t) = 293t$ ”

Solución:



Tarjeta 7

Analizar si la siguiente afirmación es verdadera o falsa y por qué:

“Toda correspondencia es función pero no toda función es una correspondencia”

Solución:

Falsa. Toda correspondencia no es función, ya que puede haber correspondencias entre conjuntos donde a cada elemento del conjunto A le correspondan 3 elementos del conjunto B, y no sería función.

Por otro lado toda función es siempre una correspondencia entre dos conjuntos donde a cada elemento de A le corresponde un elemento de B.

Tarjeta 4

Analizar si la siguiente fórmula algebraica representa una función:

$$x^2 + y^2 = 16$$

Solución:

No es función porque si aislamos y , obtenemos dos valores posibles de y para una misma x :

$$y = \pm\sqrt{16 - x^2}$$

Por ejemplo para $x=0$, tenemos que y puede ser -4 o 4

Tarjeta 8

Definir con vuestras palabras qué es una función y poner un ejemplo de la vida cotidiana.

Solución:

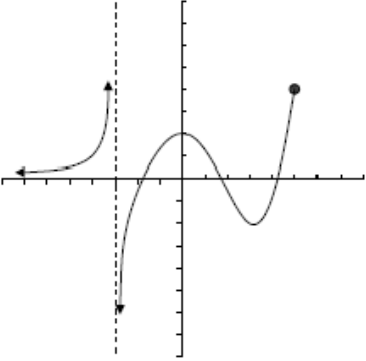
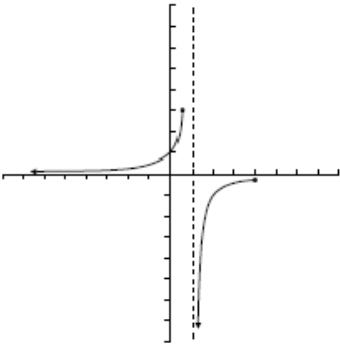
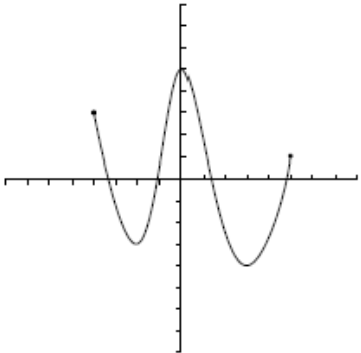
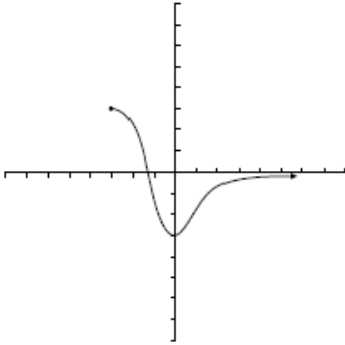
Una función es una relación entre dos grupos de elementos donde a un elemento del primer grupo le corresponde uno solo del otro grupo. Como por ejemplo a cada persona le corresponde un único número de DNI

ACTIVIDAD DE CLASE 2: DOMINIO E IMAGEN DE UNA FUNCIÓN

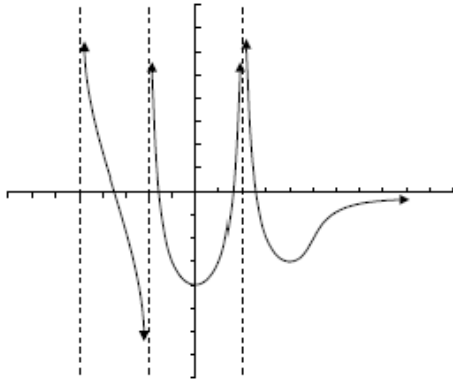
(TRABAJO INDIVIDUAL)

Resolver de forma individual los siguientes ejercicios:

1 - Encuentra el dominio y la imagen de las siguientes funciones:

<p>1)</p>  <p>Solución: 1 - Dominio (en x) $Dom(f) = (-\infty, 5) - \{-3\}$ 2 - Imagen (en y) $Im(f) = \mathbb{R}$</p>	<p>2)</p>  <p>Solución: 1 - Dominio (en x) $Dom(f) = (-\infty, 4) - \{1\}$ 2 - Imagen (en y) $Im(f) = (-\infty, 3)$</p>
<p>3)</p>  <p>Solución: 1 - Dominio (en x) $Dom(f) = (-4, 5)$ 2 - Imagen (en y) $Im(f) = (-4, 5)$</p>	<p>4)</p>  <p>Solución: 1 - Dominio (en x) $Dom(f) = (-3, +\infty)$ 2 - Imagen (en y) $Im(f) = (-3, 3)$</p>

5)

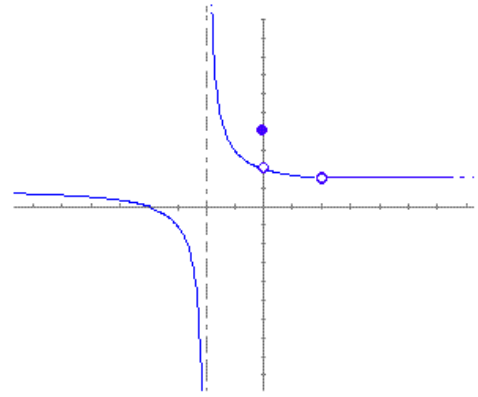


Solución:

1 - Dominio (en x) $Dom(f) = (-5, -2) \cup (-2, 2) \cup (2, +\infty)$

2 - Imagen (en y) $Im(f) = \mathbb{R}$

6)



Solución:

1 - Dominio (en x) $Dom(f) = (-\infty, -2) \cup (2, +\infty) - \{2\}$

2 - Imagen (en y) $Im(f) = \mathbb{R} - \{1; 1,5; 2\}$

2 - Calcular el dominio de las funciones polinómicas:

1 $f(x) = x^2 - 5x + 6$ $Dom(f) = \mathbb{R}$

2 $f(x) = 2x^5 - 6x^3 + 8x^2 - 5$ $Dom(f) = \mathbb{R}$

3 $f(x) = \frac{2x^2 - 3}{5}$ $Dom(f) = \mathbb{R}$

3 - Calcular el dominio de las funciones racionales:

1 $f(x) = \frac{2x^2 - 3}{x + 2}$ $Dom(f) = \mathbb{R} - \{-2\}$

2 $f(x) = \frac{2x^2 - 3}{x^2 - 1}$ $Dom(f) = \mathbb{R} - \{-1, 1\}$

3 $f(x) = \frac{2x^2 - 3}{x^2 + 1}$ $Dom(f) = \mathbb{R}$, porque no existe ningún valor de x donde $x^2 + 1 = 0$

4 $f(x) = \frac{2x^2 - 3}{x^2 + 2x + 1}$ $Dom(f) = \mathbb{R} - \{-1\}$

$$5 \quad f(x) = \frac{2x-5}{x^2-5x+6}$$

$$\text{Dom}(f) = \mathbb{R} - \{2; 3\}$$

4 - Calcular el dominio de las funciones radicales:

$$1 \quad f(x) = \sqrt[3]{\frac{3x+2}{x+1}}$$

$$\text{Dom}(f) = \mathbb{R}$$

$$2 \quad f(x) = \sqrt[3]{\frac{x}{x^2-5x+6}}$$

$$\text{Dom}(f) = \mathbb{R}$$

$$3 \quad f(x) = \sqrt{x-2}$$

$$\text{Dom}(f) = [2, +\infty)$$

$$4 \quad f(x) = \sqrt{x^2-6x+8}$$

$$\text{Dom}(f) = (-\infty, 2] \cup [4, +\infty)$$

$$5 \quad f(x) = \sqrt{-x^2+6x-8}$$

$$\text{Dom}(f) = [2, 4]$$

ACTIVIDAD DE CLASE 3: OPERACIONES CON FUNCIONES
(TUTORIA DE IGUALES)

1) Los alumnos resuelven el siguiente ejercicio de manera individual :

“Dadas las funciones $f(x) = x^2 - 9$ y $g(x) = 16 - x^2$, resuelven individualmente las siguientes operaciones de funciones y encuentra su dominio. Escribe la respuesta en la columna de “Respuesta inicial”.”

Operación	Respuesta inicial (Individualmente)	Respuesta final (Con el compañero/a)
$(f + g)(x)$	$Dom(f + g) =$	
$(f - g)(x)$	$Dom(f - g) =$	
$(f \cdot g)(x)$	$Dom(f \cdot g) =$	
$\left(\frac{f}{g}\right)(x)$	$Dom\left(\frac{f}{g}\right) =$	
$\left(\sqrt{\frac{f}{g}}\right)(x)$	$Dom\left(\sqrt{\frac{f}{g}}\right) =$	

2) Se colocan en parejas. Comparan los resultados y colocan la respuesta acordada entre los dos, en la columna de “respuesta final”.

3) Posteriormente 5 voluntarios colocan los resultados en la pizarra.

4) En parejas resuelven el siguiente ejercicio:

“Dadas las funciones $f(x) = \sqrt{x^2 - 9}$ y $g(x) = \sqrt{16 - x^2}$, resuelve con tu compañero/a de trabajo las siguientes operaciones de funciones y encontrad su dominio”

$(f + g)(x)$	$Dom(f + g) =$
$(f - g)(x)$	$Dom(f - g) =$
$(f \cdot g)(x)$	$Dom(f \cdot g) =$
$\left(\frac{f}{g}\right)(x)$	$Dom\left(\frac{f}{g}\right) =$
$\left(\sqrt{\frac{f}{g}}\right)(x)$	$Dom\left(\sqrt{\frac{f}{g}}\right) =$

ACTIVIDAD DE CLASE 4: COMPOSICIÓN DE FUNCIONES

(TRABAJO INDIVIDUAL)

1- Escribe en el paréntesis **la letra** de la columna de la derecha que corresponda al resultado de la composición indicada en la columna de la izquierda, siendo:

$$f(x) = x^4, \quad g(x) = \frac{3}{x-4}, \quad h(x) = \sqrt{x}$$

- | | |
|---|--|
| 1. $(f \circ g)(x) \rightarrow (\dots c \dots)$ | a) $\left(\frac{3}{\sqrt{x}-4}\right)^4$ |
| 2. $(h \circ g)(x) \rightarrow (\dots b \dots)$ | b) $\sqrt{\frac{3}{x-4}}$ |
| 3. $(g \circ g)(x) \rightarrow (\dots f \dots)$ | c) $\left(\frac{3}{x-4}\right)^4$ |
| 4. $(h \circ f)(x) \rightarrow (\dots g \dots)$ | d) $\frac{3}{x^2-4}$ |
| 5. $(f \circ g \circ h)(x) \rightarrow (\dots a \dots)$ | e) $\sqrt{\frac{3}{x^4-4}}$ |
| 6. $(g \circ f \circ h)(x) \rightarrow (\dots d \dots)$ | f) $\frac{3x-12}{19-4x}$ |
| 7. $(h \circ g \circ f)(x) \rightarrow (\dots e \dots)$ | g) x^2 |

2 – Resuelve los siguientes problemas:

1º) En un cierto lago, el pez róbalo se alimenta del pez pequeño gobio, y el gobio se alimenta de plancton. Supongamos que el tamaño de la población del róbalo es una función $f(n)$ del número n de gobios presentes en el lago, y el número de gobios es una función $g(x)$ de la cantidad x de plancton en el lago. Expresa el tamaño de la población del róbalo como una función de la cantidad de plancton, si

$$f(n) = 50 + \sqrt{\frac{n}{150}} \quad \text{y} \quad g(x) = 4x + 3$$

Solución: Tenemos que $n = g(x)$. Sustituyendo $g(x)$ por n en $f(n)$, encontramos que el tamaño de la población de róbalos está dado por

$$f(g(x)) = 50 + \sqrt{\frac{4x + 3}{150}}$$

2º) Los defensores del medio ambiente han estimado que el nivel promedio de monóxido de carbono en el aire es $M(m) = (1 + 0.6m)$ partes por millón cuando el número de personas es m -miles. Si la población en miles en el momento t es $P(t) = 400 + 30t + 0.5t^2$,

- (a) exprese el nivel de monóxido de carbono en el aire como una función del tiempo
(b) calcule el nivel de monóxido de carbono en $t = 5$

Solución: (a) Para expresar el monóxido de carbono en función del tiempo se requiere establecer la función compuesta $(MoP)(t) = M[P(t)]$

Sustituyendo $P(t)$ en $M(m)$, tenemos:

$$M[P(t)] = M[400 + 30t + 0.5t^2] = 1 + 0.6(400 + 30t + 0.5t^2) = 241 + 18t + 0.09t^2$$

(b) Se nos pide evaluar la función compuesta en $t = 5$.

$$M[P(5)] = 241 + 18(5) + 0.09(5)^2 = 333.25 \text{ ppm.}$$

3 – Resuelve:

1º) Sea $F(x) = (x + 3)^5$. Encuentra dos funciones, f y g , tal que $F(x) = fog(x)$

Solución:

$$f(x) = x^5 \quad \text{y} \quad g(x) = x + 3$$

$$\text{Entonces } F(x) = fog(x) = f(g(x)) = (x + 3)^5$$

2º) Sea $F(x) = \sqrt{5x + 4}$. Encuentra tres funciones, $f(x)$, $g(x)$ y $h(x)$, tal que $F(x) = fogoh(x)$

Solución:

$$f(x) = \sqrt{x} \quad , \quad g(x) = x + 4 \quad \text{y} \quad h(x) = 5x$$

$$\text{Entonces } F(x) = fogoh(x) = f(g(h(x))) = \sqrt{5x + 4}$$

ACTIVIDAD DE CLASE 5: FUNCION INVERSA

(Trabajo cooperativo)

1- Formar grupos de 4 alumnos.

2- Presentar a los alumnos el siguiente estudio de casos :

Se ha realizado un examen del tema de “función inversa” a una clase. Se han adquirido 4 copias del examen de 4 alumnos de la clase.

3- Cada integrante del grupo ha de corregir un examen, poniéndose de acuerdo previamente con sus compañeros de equipo, cuales son las **respuestas correctas**, y completando la **hoja de respuestas**.

4- Han de colocar el puntaje correspondiente en cada ejercicio (0 si la respuesta es incorrecta y 2 si es correcta).

5- Posteriormente un voluntario por grupo pueden anotar en la pizarra las respuestas correctas.

SOLUCIONES CORRECTAS PARA EL PROFESOR:

Departamento de Matemàtiques CONTROL de Funci3n Inversa Evaluaci3n : 1ª Fecha: Febrero 2014	Curso y etapa: 1º Bachillerato Any acadèmic: 2013-14	Calificaci3n
---	---	--------------

Apellidos:

Nombre:

Secci3n:

Coloca "Verdadero" o "Falso" segùn corresponda. Justifica tu respuesta. Cada respuesta correcta vale 2 puntos.

- 1) La funci3n inversa de $f(x) = 2x + 3$ es la funci3n $f^{-1}(x) = \frac{1}{2x+3}$. F

Sol: La funci3n inversa es tal que $f^{-1}(f(x)) = x$ y si hacemos la composici3n con las funciones dadas

$$f^{-1}(f(x)) = \frac{1}{2(2x+3)+3} = \frac{1}{4x+6+3} = \frac{1}{4x+9} \neq x$$

Entonces es falso

- 2) Las funciones $f(x) = x^3 + 2$ y la funci3n $g(x) = \sqrt[3]{x-2}$ son funciones inversas. V

Sol: La funci3n inversa es tal que $g(f(x)) = f(g(x)) = x$ y si hacemos la composici3n con las funciones dadas

$$g(f(x)) = \sqrt[3]{(x^3+2)-2} = \sqrt[3]{x^3} = x$$

Y

$$f(g(x)) = (\sqrt[3]{x-2})^3 + 2 = x - 2 + 2 = x$$

Entonces es verdadero.

- 3) La imagen de $f(x) = \frac{x-5}{x-3}$ es $Im(f) = \mathbb{R} - \{-1\}$. F

Soluci3n: Buscamos la funci3n inversa de $f(x)$

$$y = \frac{x-5}{x-3} \rightarrow x = \frac{y-5}{y-3}$$

$$\rightarrow x(y-3) = y-5 \rightarrow xy - 3x = y-5 \rightarrow xy - y = 3x-5 \rightarrow (x-1)y = 3x-5$$

$$f^{-1}(x) = \frac{3x-5}{x-1}, \text{ entonces el } Dom(f^{-1}) = Im(f) = \mathbb{R} - \{1\}$$

Entonces es Falso.

- 4) El dominio de la función inversa de $f(x) = \frac{x^2+4}{x}$ es $Dom(f^{-1}) = (-\infty, 4] \cup [4, +\infty)$

V

Solución: Buscamos la función inversa de $f(x)$

$$y = \frac{x^2 + 4}{x} \rightarrow x = \frac{y^2 + 4}{y}$$

$$\rightarrow xy = y^2 + 4 \rightarrow y^2 - xy + 4 = 0$$

Resolvemos la ecuación cuadrática

$$y = \frac{x \pm \sqrt{x^2 - 16}}{2} = f^{-1}(x)$$

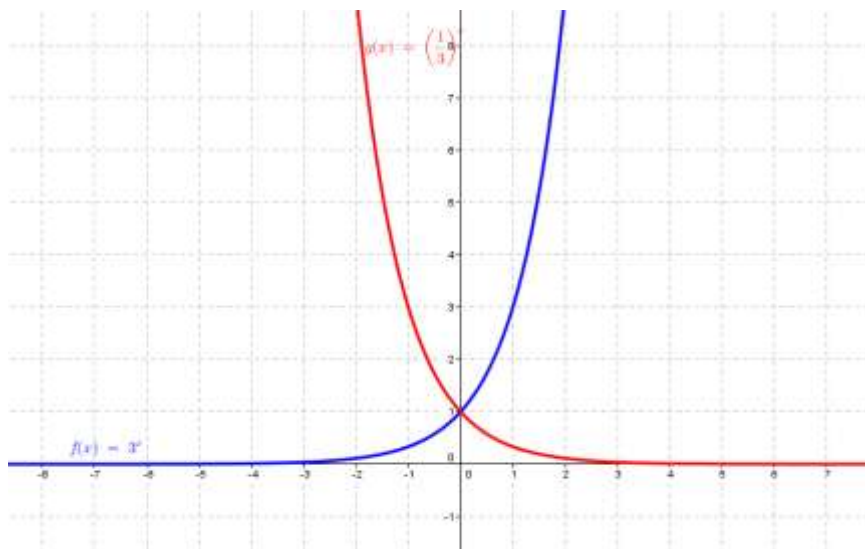
Para calcular el $Dom(f^{-1})$ tenemos que ver en qué intervalos se verifica que $x^2 - 16 \geq 0$

	$(-\infty, -4]$	$[-4, 4]$	$[4, +\infty)$
$x^2 - 16 \geq 0$	Per $x=-5$ $(-5)^2 - 16 \geq 0$	Per $x=0$ $(0)^2 - 16 \geq 0$	Per $x=5$ $(5)^2 - 16 \geq 0$
	SI	NO	SI

Entonces el $Dom(f^{-1}) = (-\infty, -4] \cup [4, +\infty)$, por lo tanto es verdadera

- 5) Las dos funciones representadas en la siguiente gráfica son funciones inversas.

F



Solución: Es falsa porque las gráficas de las funciones inversas son simétricas respecto de la bisectriz del primer y el tercer cuadrante, estas funciones en cambio son simétricas respecto del eje Y

HOJA DE RESPUESTAS

Completar con el grupo, la hoja de respuestas correctas a medida que vais corrigiendo los exámenes

Coloca “Verdadero” o “Falso” según corresponda. Justifica tu respuesta. Cada respuesta correcta vale 2 puntos.

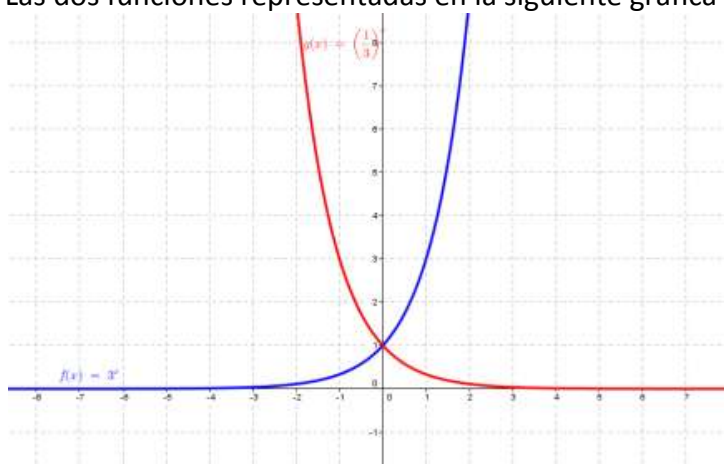
1) La función inversa de $f(x) = 2x + 3$ es la función $f^{-1}(x) = \frac{1}{2x+3}$.

2) Las funciones $f(x) = x^3 + 2$ y la función $g(x) = \sqrt[3]{x-2}$ son funciones inversas.

3) La imagen de $f(x) = \frac{x-5}{x-3}$ es $Im(f) = \mathbb{R} - \{-1\}$.

4) El dominio de la función inversa de $f(x) = \frac{x^2+4}{x}$ es $Dom(f^{-1}) = (-\infty, 4] \cup [4, +\infty)$

5) Las dos funciones representadas en la siguiente gráfica son funciones inversas.



Departamento de Matemàtiques

CONTROL de Función Inversa

Evaluación : 1ª

Fecha: Febrero 2014

Curso y etapa: 1º Bachillerato

Any acadèmic: 2013-14

Calificación

Apellidos: **Puig Fernández**Nombre: **Pablo**Sección: **G**

Coloca "Verdadero" o "Falso" según corresponda. Justifica tu respuesta. Cada respuesta correcta vale 2 puntos.

- 1) La función inversa de $f(x) = 2x + 3$ es la función $f^{-1}(x) = \frac{1}{2x+3}$.

V

Porque hacemos 1 entre la función para encontrar la inversa.

- 2) Las funciones $f(x) = x^3 + 2$ y la función $g(x) = \sqrt[3]{x-2}$ son funciones inversas.

V

Porque sí hacemos la composición de las dos funciones

$$g(f(x)) = \sqrt[3]{(x^3 + 2) - 2} = \sqrt[3]{x^3} = x$$

Y

$$f(g(x)) = (\sqrt[3]{x-2})^3 + 2 = x - 2 + 2 = x$$

Nos da x.

- 3) La imagen de $f(x) = \frac{x-5}{x-3}$ es $Im(f) = \mathbb{R} - \{-1\}$.

F

Buscamos la función inversa de f(x)

$$y = \frac{1}{\left(\frac{x-5}{x-3}\right)} = \frac{x-3}{x-5}$$

$$f^{-1}(x) = \frac{x-3}{x-5} , \text{ entonces el } Dom(f^{-1}) = Img(f) = \mathbb{R} - \{5\}$$

Entonces es Falso.

- 4) El dominio de la función inversa de $f(x) = \frac{x^2+4}{x}$ es $Dom(f^{-1}) = (-\infty, 4] \cup [4, +\infty)$

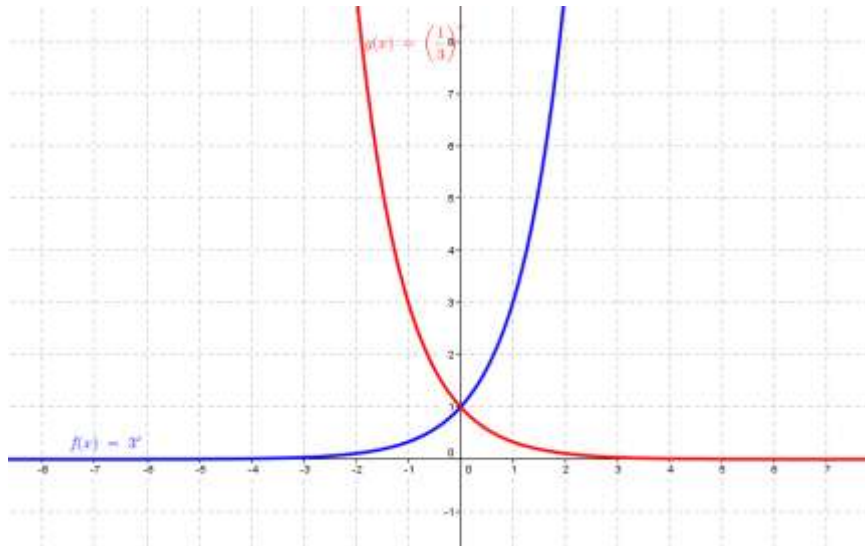
F

$$f^{-1}(x) = \frac{1}{\left(\frac{x^2+4}{x}\right)} = \frac{x}{x^2+4}$$

Entonces el $Dom(f^{-1}) = \mathbb{R}$ porque $x^2 + 4 \neq 0$ para todos los números reales.

- 5) Las dos funciones representadas en la siguiente gráfica son funciones inversas.

F



Es falsa porque las gráficas son simétricas respecto del eje γ

Apellidos: *Anguier Baltes*

Nombre: *Ariel*

Secci3n: **G**

Coloca "Verdadero" o "Falso" segùn corresponda. Justifica tu respuesta. Cada respuesta correcta vale 2 puntos.

- 1) La funci3n inversa de $f(x) = 2x + 3$ es la funci3n $f^{-1}(x) = \frac{1}{2x+3}$.

F

Porque hacemos

$$(f^{-1} \circ f)(x) = \frac{1}{2(2x+3)+3} = \frac{1}{4x+6+3} = \frac{1}{4x+9} \neq x$$

Entonces las dos funciones no son inversas

- 2) Las funciones $f(x) = x^3 + 2$ y la funci3n $g(x) = \sqrt[3]{x-2}$ son funciones inversas.

F

Porque si hacemos la composici3n de las dos funciones

$$(g \circ f)(x) = \sqrt[3]{(x^3+2)-2} = \sqrt[3]{x^3-4} \neq x$$

- 3) La imagen de $f(x) = \frac{x-5}{x-3}$ es $Im(f) = \mathbb{R} - \{-1\}$.

F

Porque

$$y = \frac{x-5}{x-3} \rightarrow x = \frac{y-5}{y-3}$$

$$\rightarrow x \cdot (y-3) = y-5 \rightarrow xy - 3x = y-5 \rightarrow xy - y = 3x-5 \rightarrow (x-1)y = 3x-5$$

$$f^{-1}(x) = \frac{3x-5}{x-1}, \text{ entonces el } Dom(f^{-1}) = Im(f) = \mathbb{R} - \{1\}$$

Entonces es Falso.

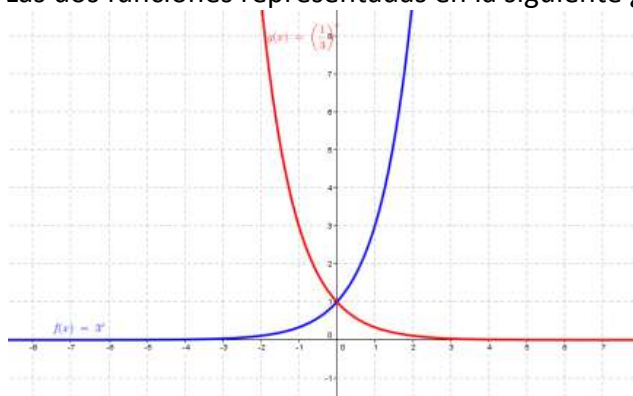
- 4) El dominio de la funci3n inversa de $f(x) = \frac{x^2+4}{x}$ es $Dom(f^{-1}) = (-\infty, 4] \cup [4, +\infty)$

F

Porque el $Dom(f^{-1}) = Dom(f) = \mathbb{R} - \{0\}$

- 5) Las dos funciones representadas en la siguiente gràfica son funciones inversas.

V



Es verdadera porque las gràficas son simètricas

Apellidos: *Camarià*

Nombre: *María*

Secci3n: **G**

Coloca "Verdadero" o "Falso" segùn corresponda. Justifica tu respuesta. Cada respuesta correcta vale 2 puntos.

- 1) La funci3n inversa de $f(x) = 2x + 3$ es la funci3n $f^{-1}(x) = \frac{1}{2x+3}$. F

Porque

$$y = 2x + 3 \rightarrow x = \frac{y-3}{2} \rightarrow x-3 = \frac{y-3}{2} - 3 \rightarrow y = \frac{x-3}{2}$$

$f^{-1}(x) = \frac{x-3}{2}$ es diferente a $f^{-1}(x) = \frac{1}{2x+3}$. Entonces las dos funciones no son inversas

- 2) Las funciones $f(x) = x^3 + 2$ y la funci3n $g(x) = \sqrt[3]{x-2}$ son funciones inversas. V

Porque

$$y = x^3 + 2 \rightarrow x = \sqrt[3]{y-2} \rightarrow x-2 = \sqrt[3]{y-2} - 2 \rightarrow y = \sqrt[3]{x-2} = f^{-1}(x)$$

- 3) La imagen de $f(x) = \frac{x-5}{x-3}$ es $Im(f) = \mathbb{R} - \{-1\}$. V

Porque

$$y = \frac{x-5}{x-3} \rightarrow x = \frac{y-5}{y-3}$$

$$\rightarrow x \cdot (y-3) = y-5 \rightarrow xy - 3x = y-5 \rightarrow xy - y = 3x-5 \rightarrow (x-1)y = 3x-5$$

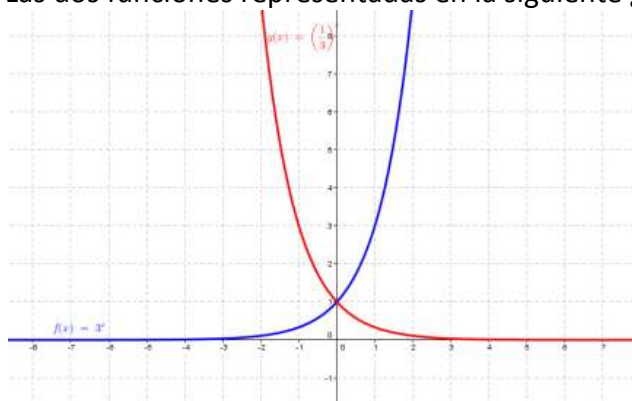
$$f^{-1}(x) = \frac{3x-5}{x-1}, \text{ entonces el } Dom(f^{-1}) = Im(f) = \mathbb{R} - \{-1\}$$

Entonces es Verdadero.

- 4) El dominio de la funci3n inversa de $f(x) = \frac{x^2+4}{x}$ es $Dom(f^{-1}) = (-\infty, 4] \cup [4, +\infty)$ V

Porque $x^2 + 4 = 0 \rightarrow x = \pm 4$

- 5) Las dos funciones representadas en la siguiente gràfica son funciones inversas. F



Es falsa porque las gràficas son simètricas respecto de y, y no de la recta y=x

Coloca "Verdadero" o "Falso" segùn corresponda. Justifica tu respuesta. Cada respuesta correcta vale 2 puntos.

- 1) La funci3n inversa de $f(x) = 2x + 3$ es la funci3n $f^{-1}(x) = \frac{1}{2x+3}$.

F

Porque

$f^{-1}(x) = \frac{1}{2}x - 3$ es la funci3n inversa de $f(x) = 2x + 3$. Entonces las dos funciones no son inversas

- 2) Las funciones $f(x) = x^3 + 2$ y la funci3n $g(x) = \sqrt[3]{x-2}$ son funciones inversas.

V

Y

$$(g \circ f)(x) = \sqrt[3]{(x^3 + 2) - 2} = \sqrt[3]{x^3} = x$$

$$(f \circ g)(x) = (\sqrt[3]{x-2})^3 + 2 = x - 2 + 2 = x$$

- 3) La imagen de $f(x) = \frac{x-5}{x-3}$ es $Im(f) = \mathbb{R} - \{-1\}$.

F

Porque $Img(f) = \mathbb{R} - \{3\}$. Entonces es Falso.

- 4) El dominio de la funci3n inversa de $f(x) = \frac{x^2+4}{x}$ es $Dom(f^{-1}) = (-\infty, 4] \cup [4, +\infty)$

V

La funci3n inversa de f(x)

$$y = \frac{x^2 + 4}{x} \rightarrow x = \frac{y^2 + 4}{y}$$

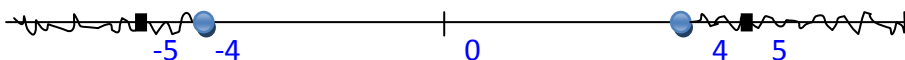
$$\rightarrow xy = y^2 + 4 \rightarrow y^2 - xy + 4 = 0 ; y = \frac{x \pm \sqrt{x^2 - 16}}{2} = f^{-1}(x)$$

Para calcular el $Dom(f^{-1})$ tenemos que ver en qu3 intervalos se verifica que $x^2 - 16 \geq 0$

$$(-5)^2 - 16 \geq 0$$

$$(0)^2 - 16 \geq 0$$

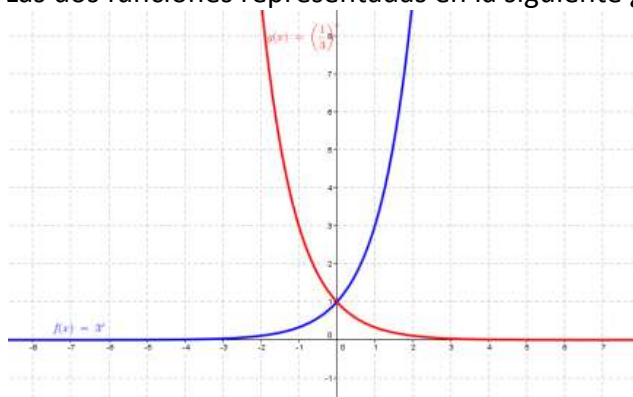
$$(-5)^2 - 16 \geq 0$$



Entonces el $Dom(f^{-1}) = (-\infty, -4] \cup [4, +\infty)$, por lo tanto es verdadera

- 5) Las dos funciones representadas en la siguiente gràfica son funciones inversas.

F

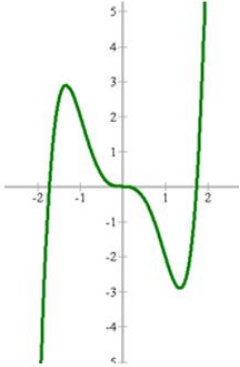
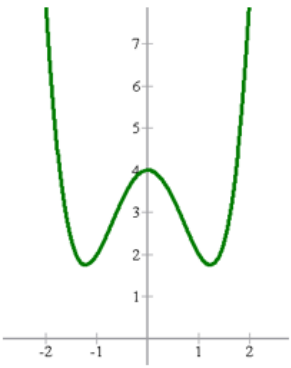


Es falsa porque las gràficas son sim3tricas respecto de y, y no de la recta y=x

ACTIVIDAD DE CLASE 6: SIMETRÍA DE FUNCIONES

Los alumnos resuelven el siguiente ejercicio de manera individual :

- 1) Dadas las siguientes fórmulas o gráficas de funciones analiza y escribe en la columna de “Respuesta inicial” si son simétricas pares, impares o no tienen simetría

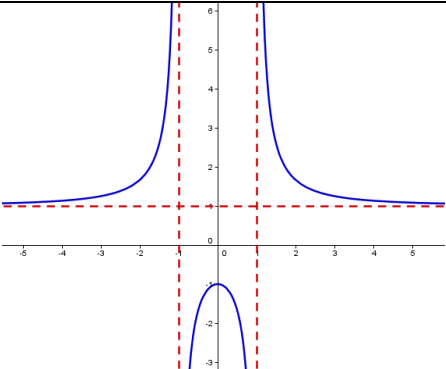
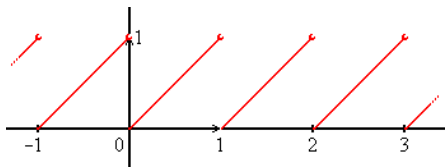
FUNCIÓN	RESPUESTA INICIAL	RESPUESTA FINAL
		SIMÉTRICA IMPAR
$f(x) = x^5 - 3x^3$		SIMÉTRICA IMPAR
		SIMÉTRICA PAR
$g(x) = x^4 - 3x^2 + 4$		SIMÉTRICA PAR
$h(x) = \frac{x^2 - 1}{x + 5}$		NO TIENE SIMETRIA

2) Se colocan en parejas. Comparan los resultados y colocan la respuesta acordada entre los dos, en la columna de "respuesta final".

3) Posteriormente 5 voluntarios colocan los resultados en la pizarra.

4) En parejas resuelven el siguiente ejercicio:

"Dadas las siguientes fórmulas o gráficas de funciones analiza y escribe si son simétricas pares, impares o no tienen simetría con tu compañero/a de trabajo"

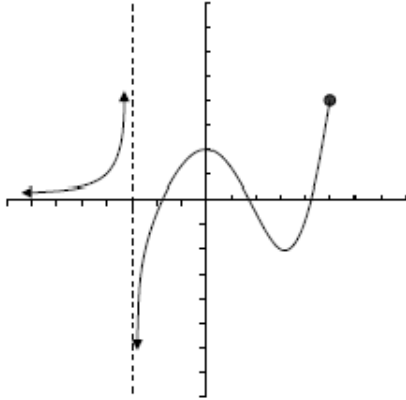
FUNCIÓN	RESPUESTA
$f(x) = \frac{x^5 - 3x^3}{(x - 3)^2}$	NO TIENE SIMETRIA
	SIMÉTRICA PAR
$g(x) = \frac{x^3}{x^3 - 1}$	NO TIENE SIMETRIA
	NO TIENE SIMETRIA
$h(x) = \frac{x^2 - 9}{x^4 + 10}$	SIMÉTRICA PAR

ACTIVIDAD DE CLASE 7: PROPIEDADES GLOBALES DE FUNCIONES

(TRABAJO INDIVIDUAL)

Individualmente los alumnos analizan las propiedades globales (simetría, periodicidad, continuidad y asíntotas) de las siguientes funciones y a continuación el profesor o alumnos voluntarios pueden corregir los ejercicios en la pizarra, o bien proyectar las soluciones en la pantalla de la clase.

1)



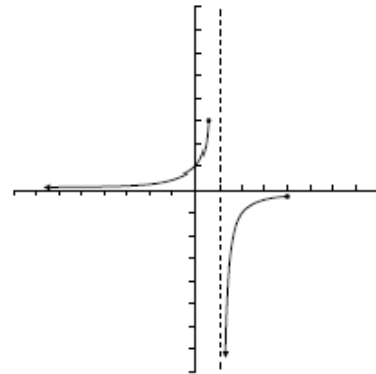
1 – Continuitat(en x): $f(x)$ és contínua en tot $\mathbb{R} - \{3\}$, $f(x)$ té una discontinuïtat de salt infinit en $x=3$

2 - Simetries, no té simetria parella ni senar perquè només hi ha una asímptota vertical a $x=-3$

3 – Asímtotes: hi ha una ASÍMPTOTA VERTICAL a $x=-3$ i una ASÍMPTOTA HORIZONTAL a $y=0$ quan x tendeix a $-\infty$

4 - Periodicitat, no és periòdica

2)



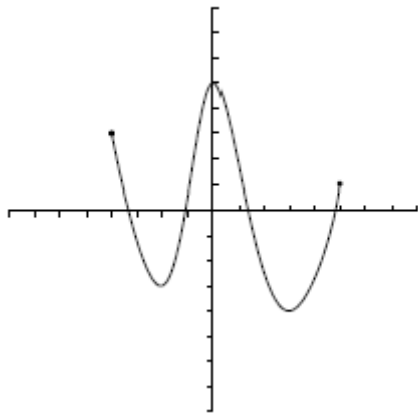
1 – Continuitat(en x): $g(x)$ és contínua en tot $\mathbb{R} - \{1\}$, $g(x)$ té una discontinuïtat de salt infinit en $x=1$

2 - Simetries, no té simetria parella ni senar perquè només hi ha una asímptota vertical a $x=1$

3 - Asímtotes, hi ha una ASÍMPTOTA VERTICAL a $x=1$ i una ASÍMPTOTA HORIZONTAL a $y=0$

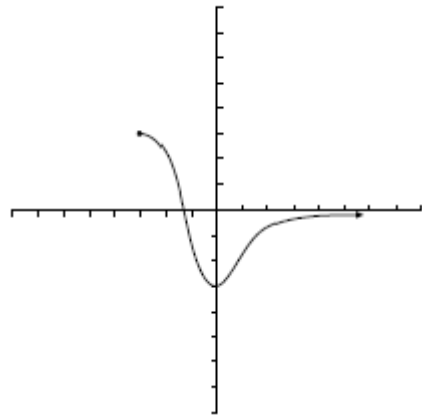
4 - Periodicitat, no és periòdica

3)



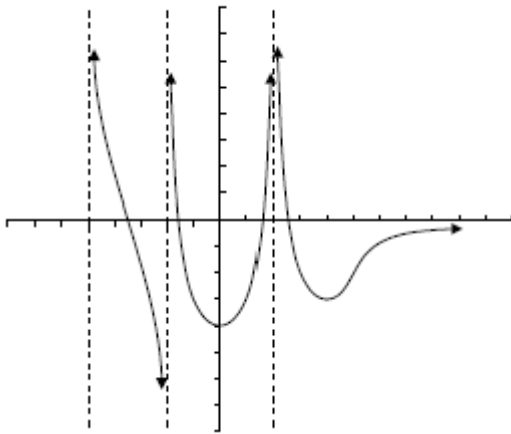
- 1 – Continuitat(en x): $f(x)$ és contínua en $(-4,5)$
- 2 - Simetries, no té simetria parella perquè per exemple $f(3)=-4$ i $f(-3)=-1 \Rightarrow$ NO SÓN IGUALS
No té simetria senar perquè $-f(3)=-(-4)=4$ i $f(-3)=-1 \Rightarrow$ NO SÓN IGUALS
- 3 – Asímptotes: $f(x)$ no té asímptotes
- 4 - Periodicitat, no és periòdica

4)



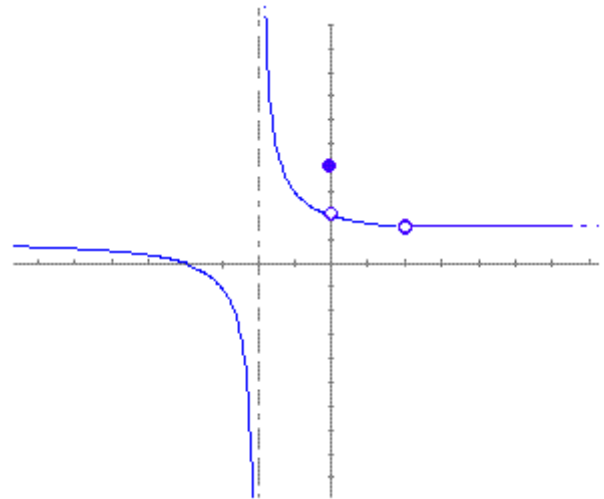
- 1 – Continuitat(en x): $g(x)$ és contínua en $(-3,3)$
- 2 - Simetries, no té simetria parella perquè per exemple $g(2)=-0,7$ i $g(-2)=2 \Rightarrow$ NO SÓN IGUALS
No té simetria senar perquè $-g(2)=-(-0,7)=0,7$ i $g(-2)=2 \Rightarrow$ NO SÓN IGUALS
- 3 – Asímptotes: $g(x)$ no té asímptotes
- 4 - Periodicitat, no és periòdica

5)



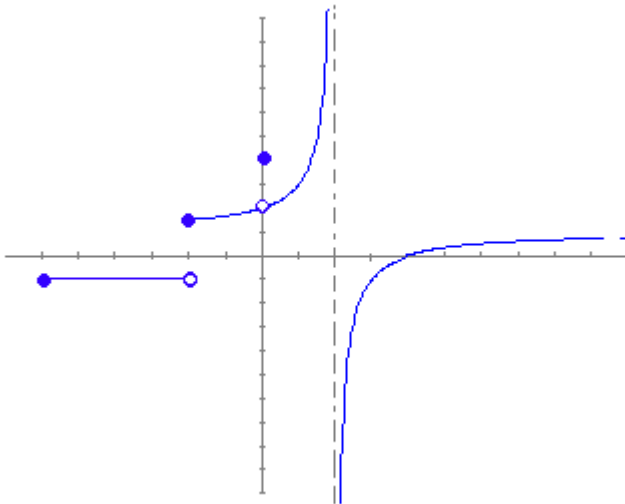
- 1 – Continuitat(en x): $f(x)$ és contínua en tot $\mathbb{R} - \{-5, -2, 2\}$, $f(x)$ té una discontinuïtat de salt infinit en $x=-5$, $x=-2$ i $x=2$
- 2 - Simetries, no té simetria parella ni senar perquè hi ha una asímptota vertical a $x=-5$ però no a $x=5$
- 3 – Asímptotes: hi ha una ASÍMPTOTA VERTICAL a $x=-5$, a $x=-2$ i a $x=2$ i una ASÍMPTOTA HORIZONTAL a $y=0$ quan x tendeix a $+\infty$
- 4 - Periodicitat, no és periòdica

6)



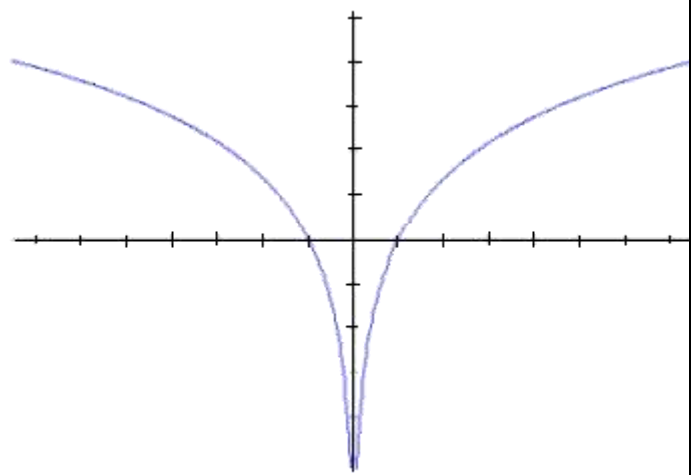
- 1 – Continuitat(en x): $g(x)$ és contínua en tot $\mathbb{R} - \{-2, 0, 2\}$, $g(x)$ té una discontinuïtat de salt infinit en $x=-2$, una discontinuïtat evitable en $x=0$ i $x=2$
- 2 - Simetries, no té simetria parella ni senar perquè només hi ha una asímptota vertical a $x=-2$ però no hi ha a $x=2$
- 3 - Asímptotes, hi ha una ASÍMPTOTA VERTICAL a $x=-2$ i una ASÍMPTOTA HORIZONTAL a $y=1$
- 4 - Periodicitat, no és periòdica

7)



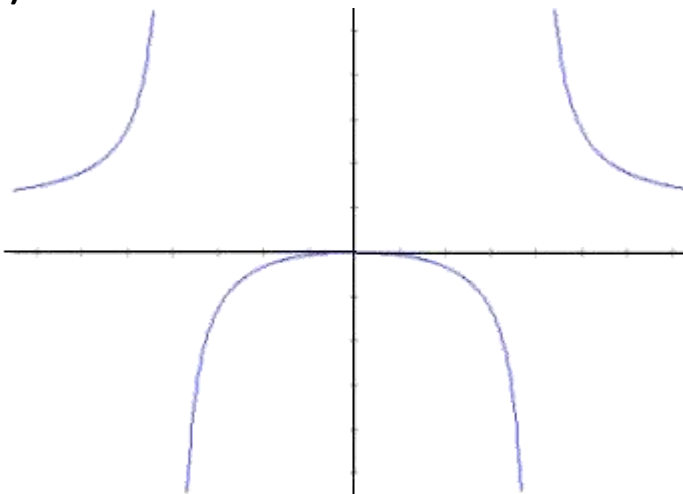
- 1 – Continuitat(en x): $f(x)$ és contínua en $(-6,-2) \cup (-2,0) \cup (0,2) \cup (2,+\infty)$, $f(x)$ té una discontinuïtat de salt infinit en $x=2$, una discontinuïtat de salt finit en $x=-2$ i una discontinuïtat evitable en $x=0$
- 2 - Simetries, no té simetria parella ni senar perquè només hi ha una asymptota vertical a $x=2$ però no a $x=-2$
- 3 – Asímptotes: hi ha una ASIMPTOTA VERTICAL a $x=2$ i una ASÍMPTOTA HORIZZONTAL a $y=1$ quan x tendeix a $+\infty$
- 4 - Periodicitat, no és periòdica

8)



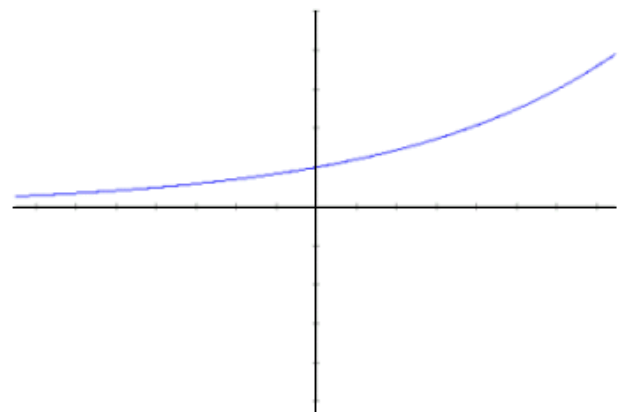
- 1 – Continuitat(en x): $g(x)$ és contínua en tot $\mathbb{R} - \{0\}$, $g(x)$ té una discontinuïtat de salt infinit en $x=0$
- 2 - Simetries, té simetria parella, perquè la gràfica és simètrica respecte del l'eix Y
- 3 - Asímptotes, hi ha una ASIMPTOTA VERTICAL a $x=0$ i no hi ha asymptota horitzontal
- 4 - Periodicitat, no és periòdica

9)



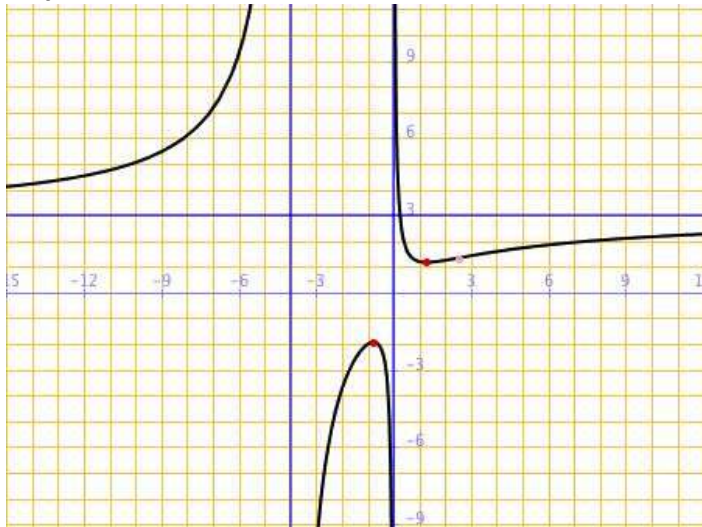
- 1 – Continuitat(en x): $f(x)$ és contínua en tot $\mathbb{R} - \{-4,4\}$, $f(x)$ té una discontinuïtat de salt infinit en $x=-4$ i $x=4$
- 2 - Simetries, , té simetria parella, perquè la gràfica és simètrica respecte del l'eix Y
- 3 – Asímptotes: hi ha una ASIMPTOTA VERTICAL a $x=-4$ i altra a $x=4$ i una ASÍMPTOTA HORIZZONTAL a $y=1$
- 4 - Periodicitat, no és periòdica

10)



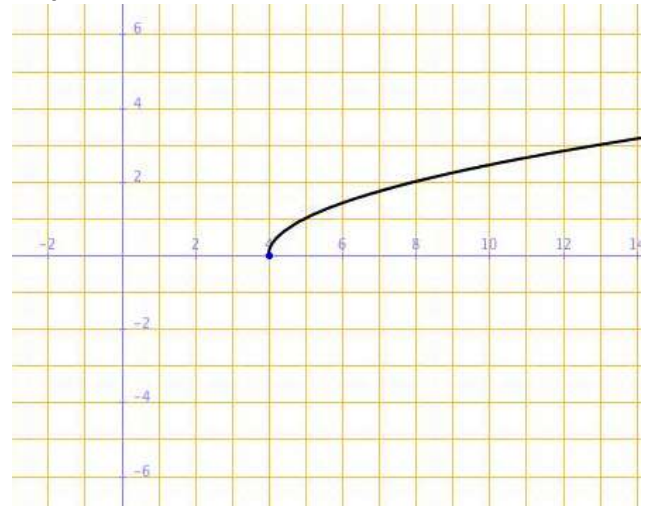
- 1 – Continuitat(en x): $g(x)$ és contínua en tot \mathbb{R}
- 2 - Simetries, no té simetria parella perquè per exemple $f(4)=2$ i $f(-4)=0,7 \Rightarrow$ NO SÓN IGUALS
No té simetria senar perquè $-f(4)=-2$ i $f(-4)=0,7 \Rightarrow$ NO SÓN IGUALS
- 3 - Asímptotes, $g(x)$ té asymptota horitzontal a $y=0$ quan x tendeix a $-\infty$
- 4 - Periodicitat, no és periòdica

11)



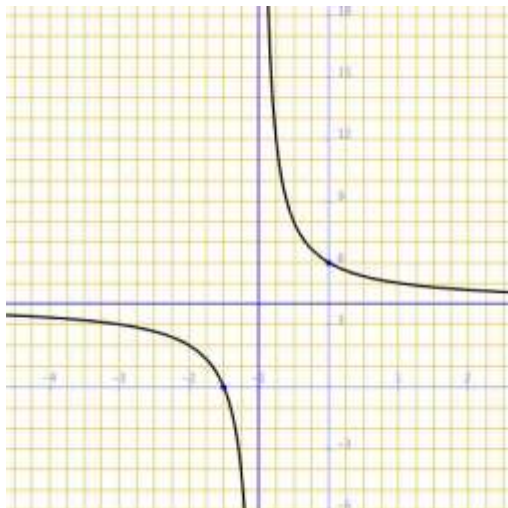
- 1 – Continuitat(en x): $f(x)$ és contínua en tot $\mathbb{R} - \{-4, 0\}$, $f(x)$ té una discontinuïtat de salt infinit en $x = -4$ i en $x = 0$
- 2 - Simetries, no té simetria parella ni senar perquè hi ha una asímptota vertical a $x = -4$ però no a $x = 4$
- 3 – Asímtotes: hi ha una ASÍMPTOTA VERTICAL a $x = -4$ i a $x = 0$ i una ASÍMPTOTA HORIZZONTAL a $y = 3$
- 4 - Periodicitat, no és periòdica

12)



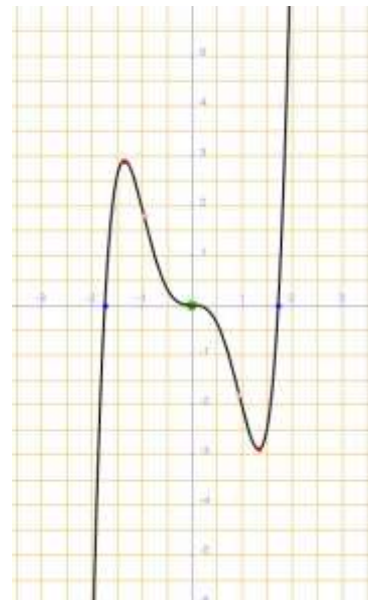
- 1 – Continuitat(en x): $g(x)$ és contínua en $(4, +\infty)$
- 2 - Simetries, no té simetria parella ni senar perquè només existeix valor de la funció pels x més grans o iguals a 4 (no existeix la funció pels valors negatius)
- 3 - Asímtotes, no té asímtotes
- 4 - Periodicitat, no és periòdica

13)



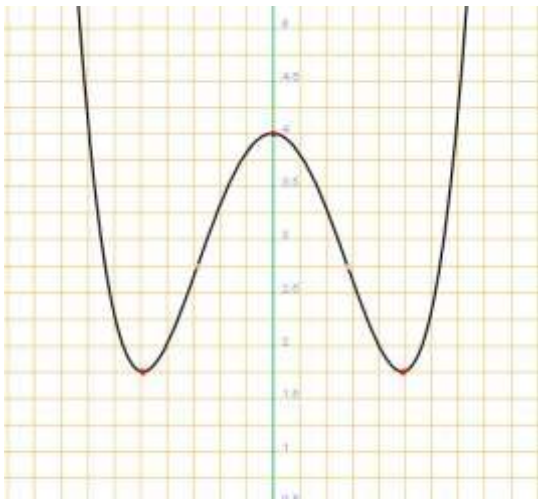
- 1 – Continuitat(en x): $f(x)$ és contínua en tot $\mathbb{R} - \{0\}$, $f(x)$ té una discontinuïtat de salt infinit en $x = 0$
- 2 - Simetries, té simetria imparella perquè la funció és simètrica respecte de l'origen de coordenades
- 3 – Asímtotes: hi ha una ASÍMPTOTA VERTICAL a $x = 0$ i una ASÍMPTOTA HORIZZONTAL a $y = 0$
- 4 - Periodicitat, no és periòdica

14)



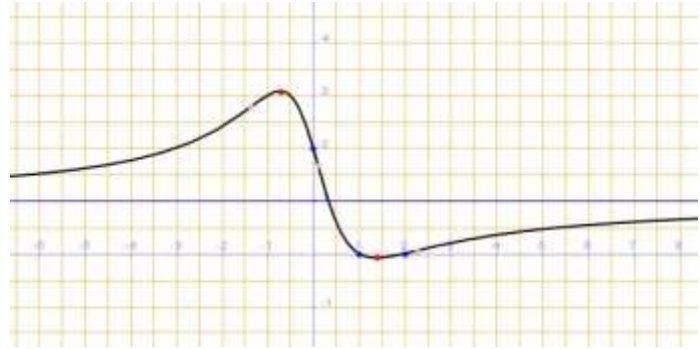
- 1 – Continuitat(en x): $g(x)$ és contínua en tot
- 2 - Simetries, té simetria imparella perquè la funció és simètrica respecte de l'origen de coordenades
- 3 - Asímtotes, no té asímtotes
- 4 - Periodicitat, no és periòdica

15)



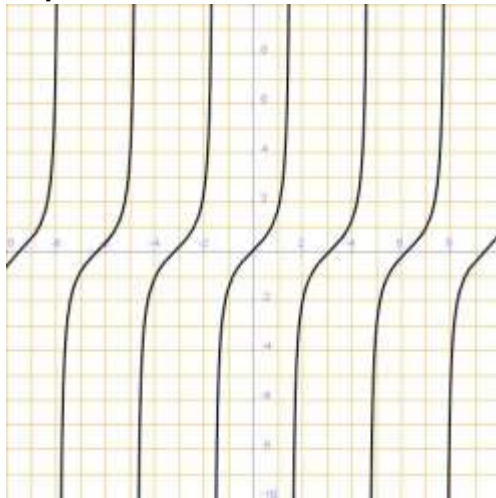
- 1 – Continuitat(en x): $f(x)$ és contínua en tot
- 2 - Simetries té simetria parella, perquè la gràfica és simètrica respecte del l'eix Y
- 3 – Asímptotes: no té asímptotes
- 4 - Periodicitat, no és periòdica

16)



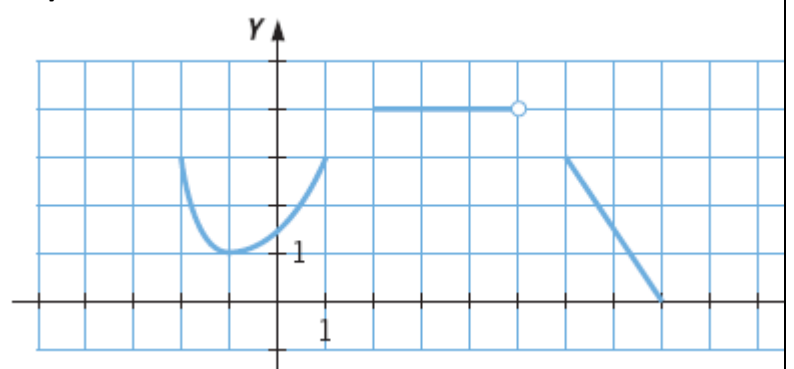
- 1 – Continuitat(en x): $g(x)$ és contínua en tot
- 2 - Simetries, no té simetria parella perquè per exemple $g(2)=0$ i $g(-2)=2,5 \Rightarrow$ NO SÓN IGUALS
No té simetria senar perquè $-g(2)=-(-0)=0$ i $g(-2)=2,5 \Rightarrow$ NO SÓN IGUALS
- 3 - Asímptotes, hi ha una ASIMPTOTA HORIZTONTAL a $y=1$
- 4 - Periodicitat, no és periòdica

17)



- 1 – Continuitat(en x): $f(x)$ és contínua en tot $\mathbb{R} - \{3\}$, $f(x)$ té una discontinuïtat de salt infinit en $x=3$
- 2 - Simetries, no té simetria parella ni senar perquè només hi ha una asímptota vertical a $x=-3$
- 3 – Asímptotes: hi ha una ASIMPTOTA VERTICAL a $x=-3$ i una ASÍMPTOTA HORIZTONTAL a $y=0$ quan x tendeix a $-\infty$
- 4 - Periodicitat, no és periòdica

18)



- 1 – Continuitat(en x): $g(x)$ és contínua en tot $\mathbb{R} - \{1\}$, $g(x)$ té una discontinuïtat de salt infinit en $x=1$
- 2 - Simetries, no té simetria parella ni senar perquè només hi ha una asímptota vertical a $x=1$
- 3 - Asímptotes, hi ha una ASIMPTOTA VERTICAL a $x=1$ i una ASÍMPTOTA HORIZTONTAL a $y=0$
- 4 - Periodicitat, no és periòdica

ACTIVIDAD DE CLASE 8: MONOTONIA Y CURVATURA

(Trabajo cooperativo)

1- Formar grupos de 4 alumnos.

2- Presentar a los alumnos el siguiente estudio de casos :

Cuatro amigos, profesores de matemáticas de diferentes colegios, se han puesto de acuerdo para pasar el mismo control del tema de “Monotonía y curvatura” a sus alumnos.

Cada uno lo resolvió por su cuenta y antes de pasar el control a su clase, se reunieron para ver si las respuestas coincidían y se dieron cuenta que habían pequeños errores en sus resoluciones.

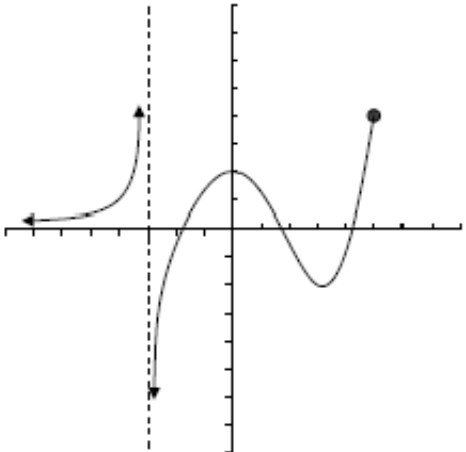
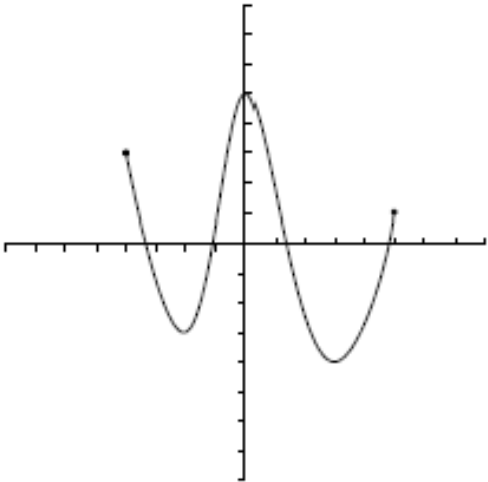
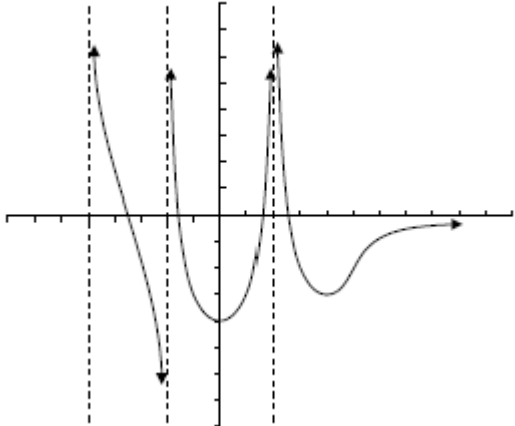
3- Cada integrante del grupo ha de revisar las resoluciones de un profesor.

4- Posteriormente han de ponerse de acuerdo todos los integrantes del equipo en cómo estaría bien resuelto cada ejercicio del examen y completar la hoja de respuestas con las soluciones correctas

5- Al terminar, un voluntario por grupo pueden anotar en la pizarra las respuestas correctas.

SOLUCIONES CORRECTAS PARA EL PROFESOR:

- 1) Analiza la monotonía, puntos máximos y mínimos de las siguientes gráficas de funciones:

	<p>Monotonía (en x) :</p> <p>$f(x)$ es creciente en $(-\infty, -3) \cup (-3, 0) \cup (3, +\infty)$</p> <p>$f(x)$ es decreciente en $(0, 3)$</p> <p>Máximos i mínimos :</p> <p>$f(x)$ tiene un máximo relativo en el punto $(0, 2)$</p> <p>$f(x)$ tiene un mínimo relativo en el punto $(3, -2)$</p>
	<p>Monotonía(en x) :</p> <p>$f(x)$ es creciente en $(-2, 0) \cup (3, 5)$</p> <p>$f(x)$ es decreciente en $(-4, -2) \cup (0, 3)$</p> <p>Máximos i mínimos :</p> <p>$f(x)$ tiene un máximo absoluto en el punto $(0, 5)$</p> <p>$f(x)$ tiene un mínimo absoluto en el punto $(3, -4)$</p> <p>$f(x)$ tiene un mínimo relativo en el punto $(-2, -3)$</p>
	<p>Monotonía(en x) :</p> <p>$f(x)$ es creciente en $(0, 2) \cup (4, +\infty)$</p> <p>$f(x)$ es decreciente en $(-5, -2) \cup (-2, 0) \cup (2, 4)$</p> <p>Máximos i mínimos :</p> <p>$f(x)$ no tiene máximos</p> <p>$f(x)$ tiene un mínimo relativo en punto $(0, -4)$ y un mínimo relativo en el punto $(4, -3)$</p>

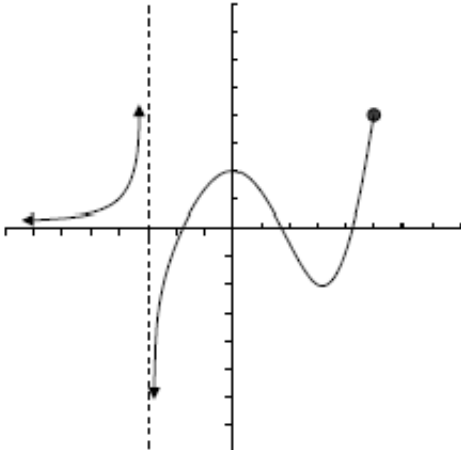
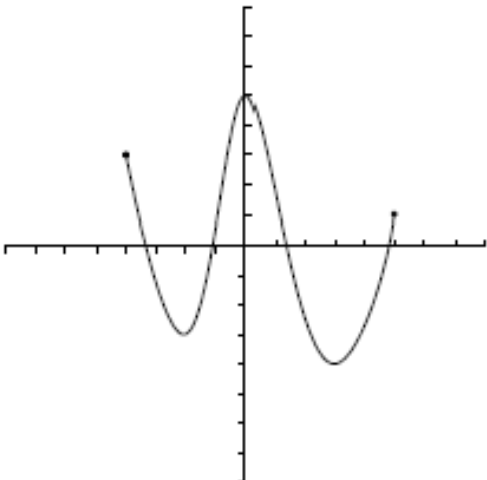
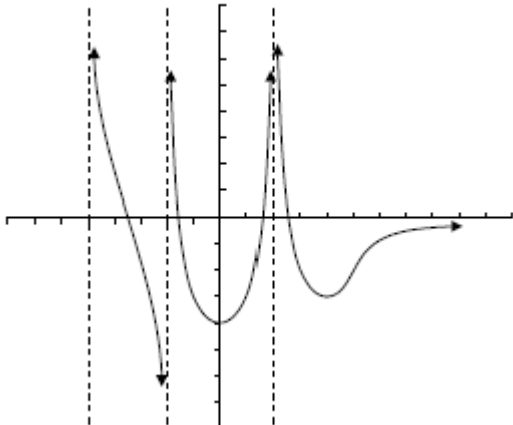
2) Analiza la curvatura y puntos de inflexión de las siguientes gráficas de funciones:

	<p>Curvatura (en x): $g(x)$ es cóncava en $(-1, 2; 0, 7)$ $g(x)$ es convexa en $(-3; -1, 2) \cup (0, 7; +\infty)$</p> <p>Puntos de inflexión: $g(x)$ tiene puntos de inflexión en el punto $(-1, 2; 0)$ y en el punto $(0, 7; -1, 5)$</p>
	<p>Curvatura (en x): $f(x)$ es cóncava en $(-2, 2)$ $f(x)$ es convexa en $(2; +\infty)$</p> <p>Puntos de inflexión: $f(x)$ no tiene punto de inflexión</p>
	<p>Curvatura (en x): $f(x)$ es cóncava en $(-\infty, -4) \cup (0, 2, 5)$ $f(x)$ es convexa en $(-4; 0) \cup (2, 5; +\infty)$</p> <p>Puntos de inflexión: $f(x)$ tiene un punto de inflexión en el punto $(2, 5; 1, 5)$</p>
	<p>Curvatura (en x): $g(x)$ es cóncava en $(-\infty; -1, 4) \cup (0, 2; 2, 2)$ $g(x)$ es convexa en $(-1, 4; 0, 1) \cup (2, 2; +\infty)$</p> <p>Puntos de inflexión: $g(x)$ tiene puntos de inflexión en el punto $(-1, 4; 2, 75)$, en el punto $(0, 1; 0, 7)$ y en el punto $(2, 2; 0, 1)$</p>

HOJA DE RESPUESTAS

Completar con el grupo, la hoja de respuestas correctas a medida que vais corrigiendo los exámenes

- 3) Analiza la monotonía, puntos máximos y mínimos de las siguientes gráficas de funciones:

	<p>Monotonía (en x) :</p> <p>Máximos i mínimos :</p>
	<p>Monotonía(en x) :</p> <p>Máximos i mínimos :</p>
	<p>Monotonía(en x) :</p> <p>Máximos i mínimos :</p>

4) Analiza la curvatura y puntos de inflexión de las siguientes gráficas de funciones:

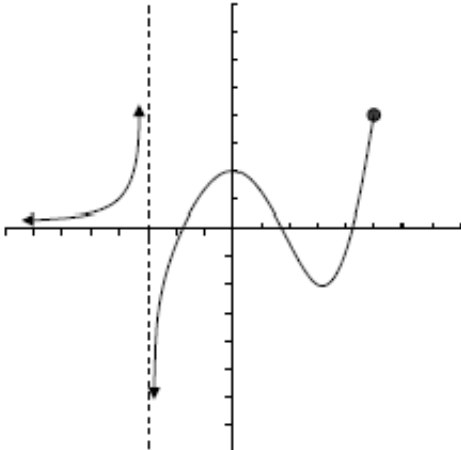
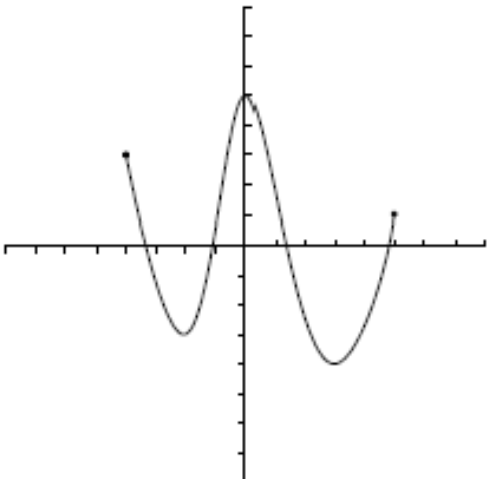
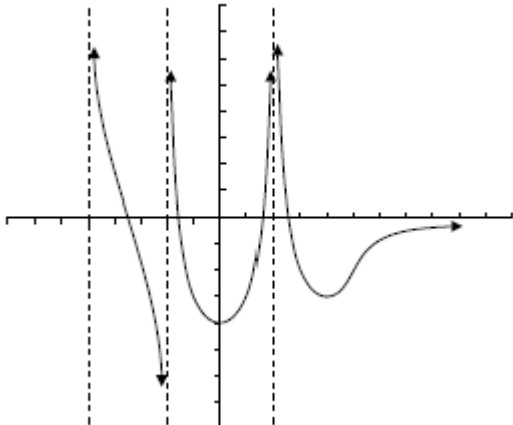
	<p>Curvatura (en x):</p> <p>Puntos de inflexión:</p>
	<p>Curvatura (en x):</p> <p>Puntos de inflexión:</p>
	<p>Curvatura (en x):</p> <p>Puntos de inflexión:</p>
	<p>Curvatura (en x):</p> <p>Puntos de inflexión:</p>

Apellidos:

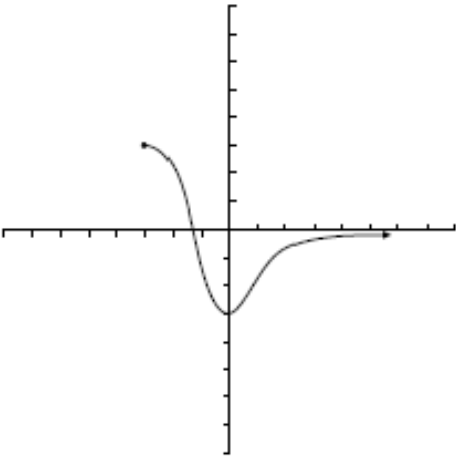
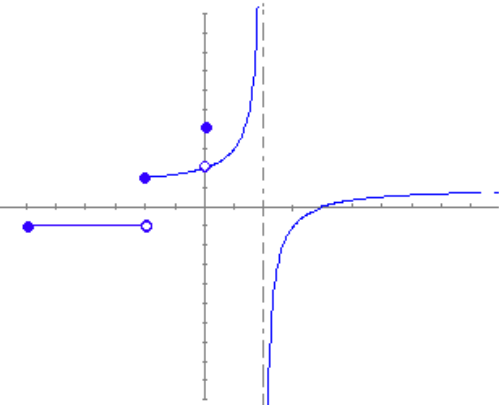
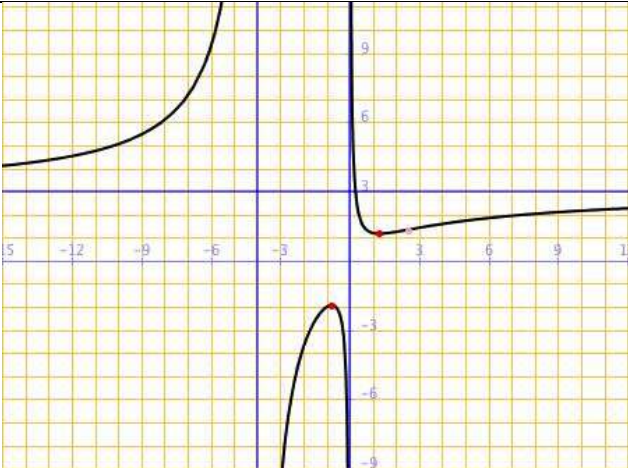
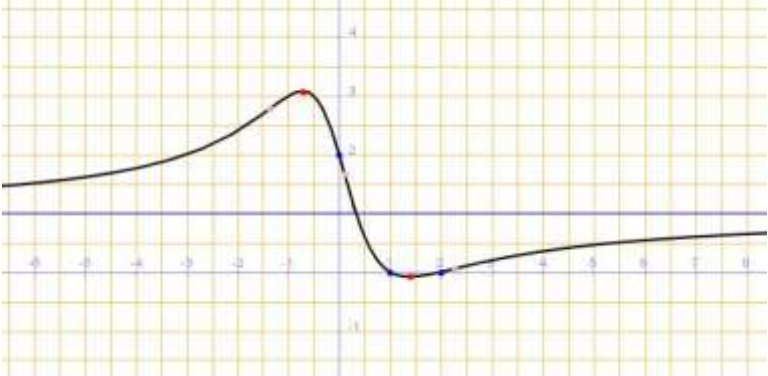
Nombre:

Sección:

1) Analiza la monotonía, puntos máximos y mínimos de las siguientes gráficas de funciones:

	<p>Monotonía (en x) :</p> <p>$f(x)$ es creciente en $(-3,0) \cup (3, +\infty)$</p> <p>$f(x)$ es decreciente en $(0,3)$</p> <p>Máximos i mínimos :</p> <p>$f(x)$ tiene un máximo absoluto en el punto $(0,2)$</p> <p>$f(x)$ tiene un mínimo absoluto en el punto $(3, -2)$</p>
	<p>Monotonía (en x) :</p> <p>$f(x)$ es decreciente en $(-2,0) \cup (3,5)$</p> <p>$f(x)$ es creciente en $(-4,-2) \cup (0,3)$</p> <p>Máximos i mínimos :</p> <p>$f(x)$ tiene un máximo absoluto en el punto $(0,5)$</p> <p>$f(x)$ tiene un mínimo relativo en el punto $(3, -4)$</p> <p>$f(x)$ tiene un mínimo absoluto en el punto $(-2, -3)$</p>
	<p>Monotonía (en x) :</p> <p>$f(x)$ es creciente en $(0,2) \cup (4,+\infty)$</p> <p>$f(x)$ es decreciente en $(-5,-2) \cup (-2,0) \cup (2,4)$</p> <p>Máximos i mínimos :</p> <p>$f(x)$ no tiene máximos</p> <p>$f(x)$ tiene un mínimo absoluto al punto $(0, -4)$ y un mínimo relativo en el punto $(4, -3)$</p>

2) Analiza la curvatura y puntos de inflexión de las siguientes gráficas de funciones:

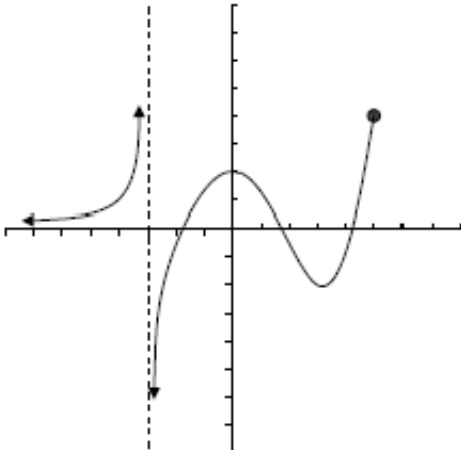
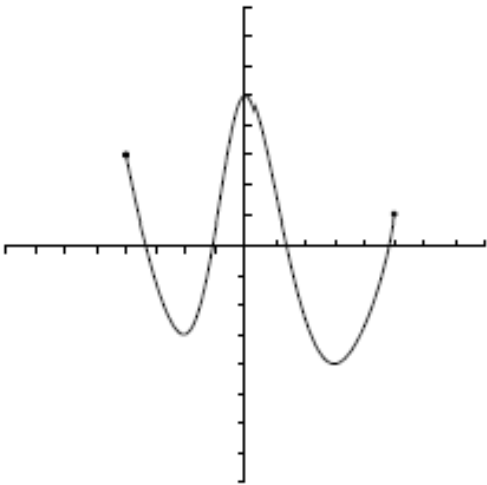
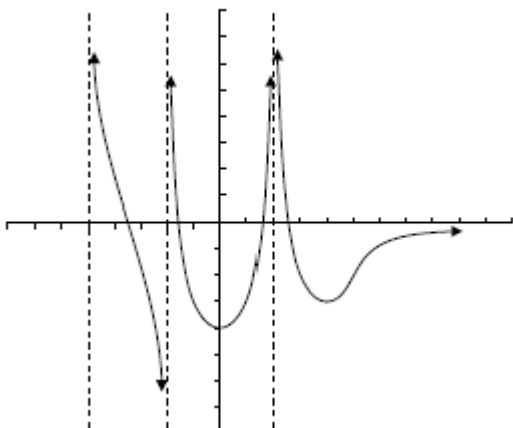
	<p>Curvatura (en x): $g(x)$ es convexa en $(-1,2;0,7)$ $g(x)$ es cóncava en $(-3;-1,2) \cup (0,7;+\infty)$</p> <p>Puntos de inflexión: $g(x)$ tiene puntos de inflexión en el punto $(-1,2; 0)$ y en el punto $(0,7; -5)$</p>
	<p>Curvatura (en x): $f(x)$ es cóncava en $(-2,2)$ $f(x)$ es convexa en $(2;+\infty)$</p> <p>Puntos de inflexión: $f(x)$ tiene un punto de inflexión en $x=2$</p>
	<p>Curvatura (en x): $f(x)$ es cóncava en $(-\infty,-4) \cup (0,2,5)$ $f(x)$ es convexa en $(-4;0) \cup (2,5;+\infty)$</p> <p>Puntos de inflexión: $f(x)$ no tiene puntos de inflexión</p>
	<p>Curvatura (en x): $g(x)$ es cóncava en $(-\infty;-1,4) \cup (0,2;2,2)$ $g(x)$ es convexa en $(-1,4;0,1) \cup (2,2;+\infty)$</p> <p>Puntos de inflexión: $g(x)$ tiene puntos de inflexión en el punto $-1,4$, en el punto $(0,1;0,7)$ y en el punto $(2,2;0,1)$</p>

Apellidos:

Nombre:

Sección:

1) Analiza la monotonía, puntos máximos y mínimos de las siguientes gráficas de funciones:

	<p><i>Monotonía (en x) :</i> $f(x)$ es creciente en $(-\infty, -3) \cup (-3, 0) \cup (3, +\infty)$ $f(x)$ es decreciente en $(0, 3)$</p> <p><i>Máximos i mínimos :</i> $f(x)$ tiene un máximo absoluto en $x=4$ $f(x)$ tiene un mínimo absoluto en $x=3$</p>
	<p><i>Monotonía(en x) :</i> $f(x)$ es decreciente en $(-2, 0) \cup (3, 5)$ $f(x)$ es creciente en $(-4, -2) \cup (0, 3)$</p> <p><i>Máximos i mínimos :</i> $f(x)$ tiene un máximo relativo en $x=0$ $f(x)$ tiene un mínimo absoluto en $x=3$ $f(x)$ tiene un mínimo relativo en $x=-2$</p>
	<p><i>Monotonía(en x) :</i> $f(x)$ es creciente en $(0, 2) \cup (4, +\infty)$ $f(x)$ es decreciente en $(-5, -2) \cup (-2, 0) \cup (2, 4)$</p> <p><i>Máximos i mínimos :</i> $f(x)$ tiene máximos infinitos $f(x)$ tiene un mínimo relativo en $x=0$ y un mínimo relativo en $x=4$</p>

2) Analiza la curvatura y puntos de inflexión de las siguientes gráficas de funciones:

	<p><i>Curvatura (en x):</i> $g(x)$ es cóncava en $(-1, 2; 0, 7)$ $g(x)$ es convexa en $(-3; -1, 2) \cup (0, 7; +\infty)$</p> <p><i>Puntos de inflexión:</i> $g(x)$ tiene puntos de inflexión en el punto $(-1, 2; 0)$ y en el punto $(0, 7; -1, 5)$</p>
	<p><i>Curvatura (en x):</i> $f(x)$ es convexa en $(-2, 2)$ $f(x)$ es cóncava en $(2; +\infty)$</p> <p><i>Puntos de inflexión:</i> $f(x)$ no tiene punto de inflexión</p>
	<p><i>Curvatura (en x):</i> $f(x)$ es cóncava en $(-\infty, -4) \cup (0; 2, 5)$ $f(x)$ es convexa en $(-4; 0) \cup (2, 5; +\infty)$</p> <p><i>Puntos de inflexión:</i> $f(x)$ tiene un punto de inflexión en el punto $(2; 1)$</p>
	<p><i>Curvatura (en x):</i> $g(x)$ es cóncava en $(-\infty; -1, 4) \cup (0, 2; 2, 2)$ $g(x)$ es convexa en $(-1, 4; 0, 1) \cup (2, 2; +\infty)$</p> <p><i>Puntos de inflexión:</i> $g(x)$ tiene puntos de inflexión en el punto $(-1, 4; 2, 75)$, en el punto $(0, 1; 0, 7)$ y en el punto $(2, 2; 0, 1)$</p>

Apellidos:

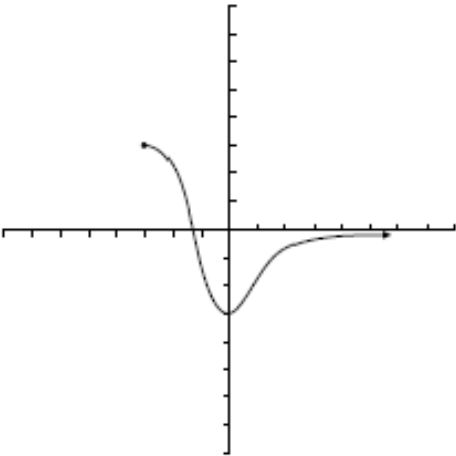
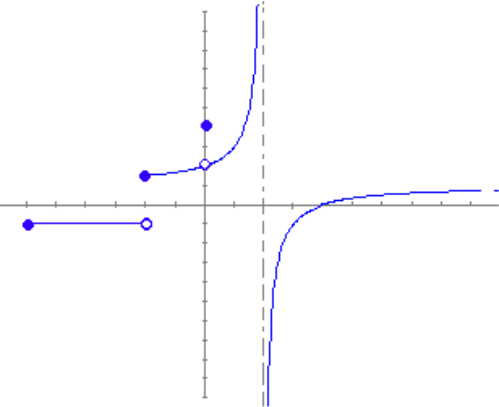
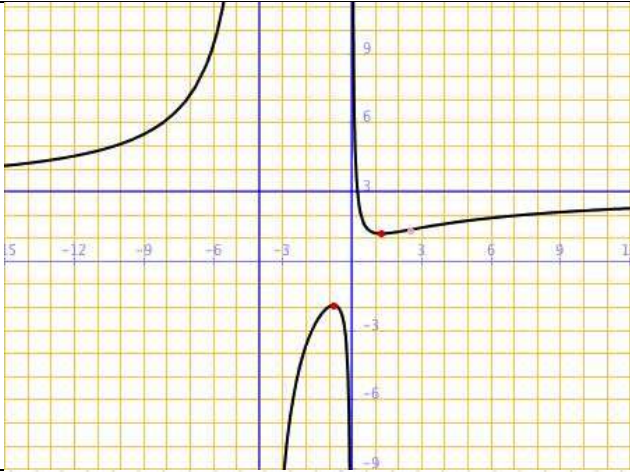
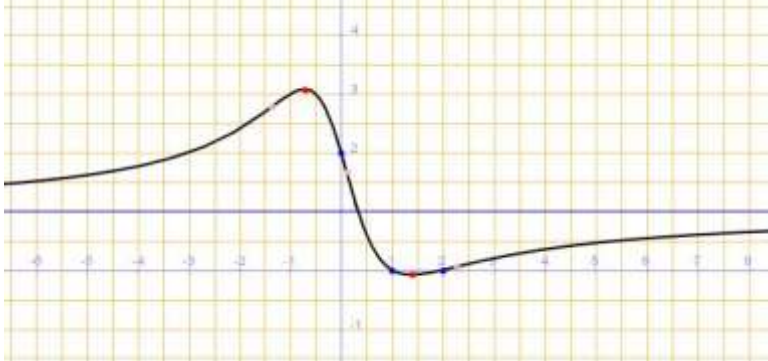
Nombre:

Sección:

1) Analiza la monotonía, puntos máximos y mínimos de las siguientes gráficas de funciones:

	<p><i>Monotonía (en x) :</i> <i>$f(x)$ es creciente en $(-\infty, -3) \cup (-3, 0) \cup (3, +\infty)$</i> <i>$f(x)$ es decreciente en $(0, 3)$</i></p> <p><i>Máximos i mínimos :</i> <i>$f(x)$ té un máximo absoluto en el punto $(5, 4)$</i> <i>$f(x)$ té un máximo relativo en el punto $(0, 2)$</i> <i>$f(x)$ té un mínimo absoluto en el punto $(3, -2)$</i></p>
	<p><i>Monotonía(en x) :</i> <i>$f(x)$ es creciente en $(-2, 0) \cup (3, 5)$</i> <i>$f(x)$ es decreciente en $(-4, -2) \cup (0, 3)$</i></p> <p><i>Máximos i mínimos :</i> <i>$f(x)$ té un mínimo absoluto en el punto $(0, 5)$</i> <i>$f(x)$ té un máximo absoluto en el punto $(3, -4)$</i> <i>$f(x)$ té un mínimo relativo en el punto $(-2, -3)$</i></p>
	<p><i>Monotonía(en x) :</i> <i>$f(x)$ es creciente en $(0, 2) \cup (5, +\infty)$</i> <i>$f(x)$ es decreciente en $(-5, -2) \cup (-2, 0) \cup (2, 4)$</i></p> <p><i>Máximos i mínimos :</i> <i>$f(x)$ no tiene máximos</i> <i>$f(x)$ tiene un mínimo absoluto al punto $(0, -4)$ y un mínimo relativo en el punto $(4, -3)$</i></p>

2) Analiza la curvatura y puntos de inflexión de las siguientes gráficas de funciones:

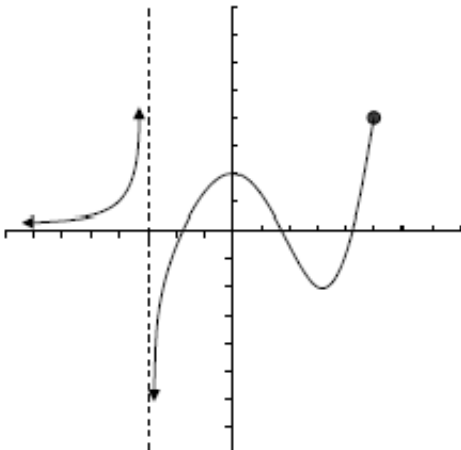
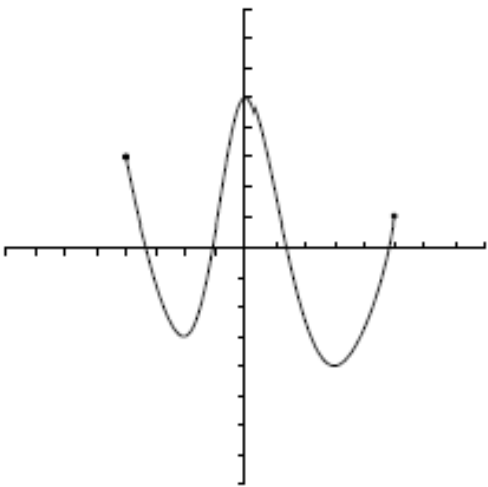
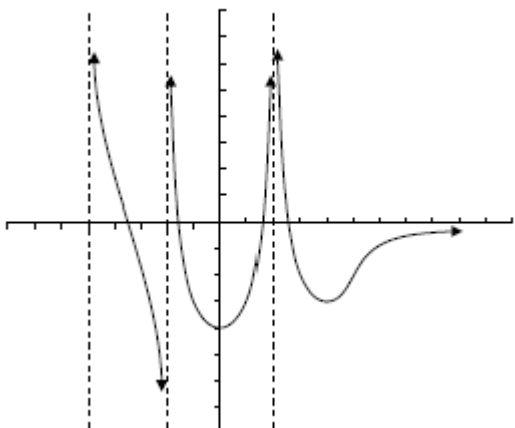
	<p>Curvatura (en x): $g(x)$ es cóncava en $(-1,2;0,7)$ $g(x)$ es convexa en $(-3;-1,2) \cup (0,7;+\infty)$</p> <p>Puntos de inflexión: $g(x)$ tiene puntos de inflexión en $x=-1,2$ y en $x=0,7$</p>
	<p>Curvatura (en x): $f(x)$ es cóncava en $(-2,2)$ $f(x)$ es convexa en $(2;+\infty)$</p> <p>Puntos de inflexión: $f(x)$ no tiene punto de inflexión</p>
	<p>Curvatura (en x): $f(x)$ es cóncava en $(-\infty,-4) \cup (0,2,5)$ $f(x)$ es convexa en $(-4;0) \cup (2,5;+\infty)$</p> <p>Puntos de inflexión: $f(x)$ tiene un punto de inflexión en el punto $(-2,5; -1,5)$</p>
	<p>Curvatura (en x): $g(x)$ es cóncava en $(-\infty;-1,4) \cup (0,2;2,2)$ $g(x)$ es convexa en $(-1,4;0,1) \cup (2,2;+\infty)$</p> <p>Puntos de inflexión: $g(x)$ no tiene puntos de inflexión</p>

Apellidos:

Nombre:

Sección:

1) Analiza la monotonía, puntos máximos y mínimos de las siguientes gráficas de funciones:

	<p><i>Monotonía (en x) :</i> $f(x)$ es creciente en $(-\infty, -3) \cup (-3, 0) \cup (3, +\infty)$ $f(x)$ es decreciente en $(0, 3)$</p> <p><i>Máximos i mínimos :</i> $f(x)$ tiene un máximo relativo en el punto $(0, 2)$ $f(x)$ tiene un mínimo relativo en el punto $(3, -2)$</p>
	<p><i>Monotonía(en x) :</i> $f(x)$ es creciente en $(-2, 0) \cup (3, 5)$ $f(x)$ es decreciente en $(-4, -2) \cup (0, 3)$</p> <p><i>Máximos i mínimos :</i> $f(x)$ té un máximo absoluto en el punto $(0, 6)$ $f(x)$ té un mínimo absoluto en el punto $(3, -4)$ $f(x)$ té un mínimo relativo en el punto $(-2, -3)$</p>
	<p><i>Monotonía(en x) :</i> $f(x)$ es creciente en $(0, 2) \cup (4, +\infty)$ $f(x)$ es decreciente en $(-5, -2) \cup (-2, 0) \cup (2, 4)$</p> <p><i>Máximos i mínimos :</i> $f(x)$ no tiene máximos $f(x)$ tiene un mínimo absoluto al punto $(0, 4)$ y un mínimo relativo en el punto $(4, 3)$</p>

2) Analiza la curvatura y puntos de inflexión de las siguientes gráficas de funciones:

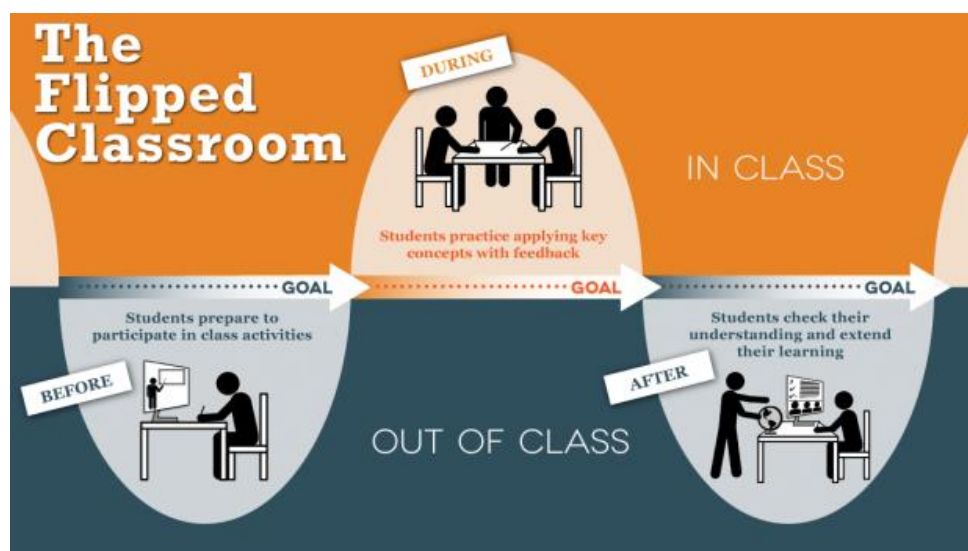
	<p><i>Curvatura (en x):</i> $g(x)$ es convexa en $(-1, 2; 0, 7)$ $g(x)$ es cóncava en $(-3; -1, 2) \cup (0, 7; +\infty)$</p> <p><i>Puntos de inflexión:</i> $g(x)$ tiene puntos de inflexión en el punto $(-1, 2; 0)$ y en el punto $(0, 7; -1, 5)$</p>
	<p><i>Curvatura (en x):</i> $f(x)$ es cóncava en $(-6, 2)$ $f(x)$ es convexa en $(2; +\infty)$</p> <p><i>Puntos de inflexión:</i> $f(x)$ no tiene punto de inflexión</p>
	<p><i>Curvatura (en x):</i> $f(x)$ es cóncava en $(-\infty, -4) \cup (0, 2, 5)$ $f(x)$ es convexa en $(-4, 0) \cup (2, 5; +\infty)$</p> <p><i>Puntos de inflexión:</i> $f(x)$ tiene un punto de inflexión en el punto $(-1; 1, 5)$</p>
	<p><i>Curvatura (en x):</i> $g(x)$ es cóncava en $(-\infty; -1, 4) \cup (0, 2; 2, 2)$ $g(x)$ es convexa en $(-1, 4; 0, 1) \cup (2, 2; +\infty)$</p> <p><i>Puntos de inflexión:</i> $g(x)$ tiene puntos de inflexión en $x = -1, 4$, en $x = 0, 1$ y en $x = 2, 2$</p>

ANEXO 11: GUIA DE ACTUACIÓN PARA LOS ALUMNOS

Unidad de Funciones con “Flipped Classroom”

Bajo la estructura tradicional, el tiempo que estáis en el aula, especialmente en los niveles superiores de secundaria y en enseñanza superior, los profesores nos dedicamos a explicar la materia y a acercaros a las ideas fundamentales de cada unidad didáctica, mientras que las tareas se hacen en casa.

Bajo la estructura que propone “**flipped classroom**” (girar el aula, o la clase de revés), es precisamente al contrario: **en casa vosotros accedéis a los contenidos a través de videos tutoriales mientras que las tareas se desarrollan en el aula.**



Fuente: <http://ctl.utexas.edu/teaching/flipping-a-class>

Probablemente el cambio más importante que conlleva esta metodología, consiste en una repartición novedosa de las responsabilidades del aprendizaje, que recaen más claramente en quien aprende. Vosotros sois el agente más activo, no solo en lo que toca a obligaciones, sino también a derechos. Elegís el ritmo, el momento y el modo en el que realizar el aprendizaje. Eso nos deja a los profesores con un papel de guías o asistentes de ese proceso que estaréis llevando a cabo.

Para que esto sea posible, os facilitaremos materiales audiovisuales (vídeos), de una duración no superior a doce minutos a través de los cuales presentamos la unidad, las

principales ideas o los conceptos fundamentales.

Bajo el modelo de la '**clase del revés**' no enviaremos problemas a la casa, sino **conocimiento**, y dejaremos libre el tiempo del aula para que cada uno de vosotros, con nuestra ayuda y la del resto de vuestros compañeros, podáis trabajar sobre las tareas de la unidad.

De este modo los profesores tendremos más tiempo en el aula para trabajar con cada uno, conocer mejor vuestras necesidades y vuestros avances. Por vuestra parte tendréis la oportunidad de hacer preguntas y resolver los problemas con nuestra guía, la de vuestros padres y la del resto de compañeros, de modo que se favorece la creación de un ambiente de aprendizaje colaborativo.

Los materiales son recursos producidos por la profesora de Matemática, Ferchu Massut. Los encontraréis en la web:

"trescomacatorze" → 1r BatxilleratCS → 8-Flipped Classroom

(Si haces Matemáticas aplicadas a las ciencias sociales)

"trescomacatorze" → 1r BatxilleratCiT → 8-Flipped Classroom

(Si haces Matemáticas del científico-tecnológico)

El desarrollo de la unidad será:

ORGANIZACIÓN DE LA UNIDAD

1) **PRUEBAS DIAGNÓSTICAS:** se realizarán 2 pruebas diagnósticas para conocer el nivel de habilidades algebraicas, lenguaje y razonamiento de los alumnos.

2) **TRABAJO EN CASA Y CLASES:**

Tema 1: Concepto de Función

- **Contenidos:** Correspondencia y función; Formas de expresar una función: enunciado verbal, tabla de valores, gráfica y fórmula matemática.
- **Objetivo:** Conocer el concepto de función y expresarla de diferentes formas.
- **Referencias:** Video 1; Libro: 7.1; Hoja de trabajo: Funciones 1.
- **Actividades requeridas:**
 - 1- **EN CASA:**
 - 1) Ver el VIDEO 1,
 - 2) pensar y apuntar en la libreta una pregunta acerca del video para comentar en clase
 - 3) y responder el formulario 1

2- **EN CLASE:** Realizar la actividad “funciones 1” en clase.

Tema 2: Funciones reales de variable real

- **Contenidos:** Variable independiente y dependiente; Dominio e Imagen de una función.
- **Objetivo:** Reconocer las funciones reales de variable real, su dominio e imagen.
- **Referencias:** Video 2; Libro: 7.2; Hoja de trabajo: Funciones 2.
- **Actividades requeridas:**
 - 1- **EN CASA:**
 - 1) Ver el VIDEO 2,
 - 2) pensar y apuntar en la libreta una pregunta acerca del video para comentar en clase
 - 3) y responder el formulario 2
 - 2- **EN CLASE:** Realizar la actividad “funciones 2” en clase

Tema 3: Operaciones con funciones

- **Contenidos:** Suma, resta, producto y división de funciones.
- **Objetivo:** Operar con funciones.
- **Referencias:** Video 3; Libro: 7.3; Hoja de trabajo: Funciones 3.
- **Actividades requeridas:**
 - 1- **EN CASA:**
 - 1) Ver el VIDEO 3,
 - 2) pensar y apuntar en la libreta una pregunta acerca del video para comentar en clase
 - 3) y responder el formulario 3
 - 2- **EN CLASE:** Realizar la actividad “funciones 3” en clase

Tema 4: Función compuesta

- **Contenidos:** Definición; Dominio de una función compuesta.
- **Objetivo:** Realizar composición de funciones y comprobar las propiedades que verifica esta operación.
- **Referencias:** Video 4; Libro: 7.4; Hoja de trabajo: Funciones 4.
- **Actividades requeridas:**
 - 1- **EN CASA:**
 - 1) Ver el VIDEO 4,
 - 2) pensar y apuntar en la libreta una pregunta acerca del video para comentar en clase
 - 3) y responder el formulario 4
 - 2- **EN CLASE:** Realizar la actividad “funciones 4” en clase

Tema 5: Función inversa de una función

- **Contenidos:** Concepto de función inversa; Obtención de la función inversa.
- **Objetivo:** Conocer el concepto de función inversa de una función y aplicar un proceso para obtenerla.
- **Referencias:** Video 5; Libro: 7.5; Hoja de trabajo: Funciones 5.
- **Actividades requeridas:**
 - 1- **EN CASA:**
 - 1) Ver el VIDEO 5,
 - 2) pensar y apuntar en la libreta una pregunta acerca del video para comentar en clase

- 3) y responder el formulario 5
 2- **EN CLASE:** Realizar la actividad “funciones 5” en clase

Tema 6: Propiedades globales de una función

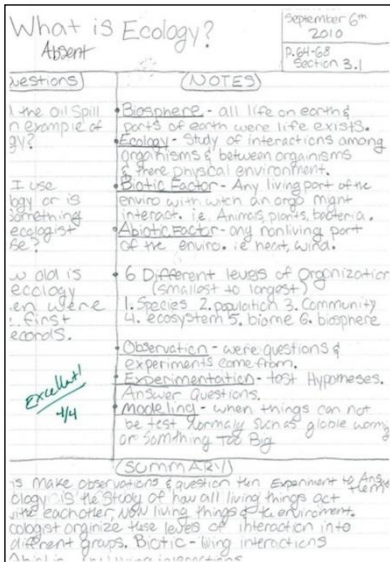
- **Contenidos:** Simetría; Periodicidad; Continuidad; Asíntotas; Monotonía y Máximos y mínimos relativos; Curvatura y puntos de inflexión.
 - **Objetivos:**
 - Diferenciar los dos tipos de simetría que pueden presentar las funciones diferenciando entre las funciones pares e impares algebraica y gráficamente.
 - Definir función periódica reconociendo el significado de periodo e identificar la representación gráfica de este tipo de funciones.
 - Reconocer la existencia de continuidad o de discontinuidades en la representación gráfica de una función.
 - Estudiar la presencia de asíntotas en la representación gráfica de una función aplicando la definición.
 - Analizar la monotonía de una función diferenciando entre funciones crecientes, decrecientes y constantes en un intervalo.
 - Deducir la existencia de máximos y mínimos relativos analizando la representación gráfica de una función.
 - Diferenciar entre intervalos en los que la función es cóncava e intervalos en los que la función es convexa.
 - Localizar los posibles puntos de inflexión de una función analizando su representación gráfica.
 - **Referencias:** Video 6, 7 y 8; Libro: 7.6; Hoja de trabajo: Funciones 6, Funciones 7 y Funciones 8.
 - **Actividades requeridas:**
 - 1- **EN CASA:**
 - 1) Ver el VIDEO 6,
 - 2) pensar y apuntar en la libreta una pregunta acerca del video para comentar en clase
 - 3) y responder el formulario 6
 - 2- **EN CLASE:** Realizar la actividad “funciones 6” en clase.
 - 3- **EN CASA:**
 - 1) Ver el VIDEO 7,
 - 2) pensar y apuntar en la libreta una pregunta acerca del video para comentar en clase
 - 3) y responder el formulario 7.
 - 4- **EN CLASE:** Realizar la actividad “funciones 7” en clase
 - 5- **EN CASA:**
 - 1º - Ver el VIDEO 8,
 - 2º- pensar y apuntar en la libreta una pregunta acerca del video para comentar en clase
 - 3º - y responder el formulario 8
 - 6- **EN CLASE:** Realizar la actividad “funciones 8” en clase
- 3) **Realización de los ejercicios de autoevaluación del libro en casa**
 4) **Clase de repaso y dudas**
 5) **Prueba de contenidos**

GUIA PARA VER LOS VIDEOS

Mirar un video educativo no es como mirar una película de entretenimiento o un programa de TV.

Ten presente:

- 1) Estos videos instructivos necesitan ser vistos más en el sentido en el que leerías un libro **FORMATIVO** y no un libro de ficción.
- 2) Elimina las **distracciones**: busca un sitio donde puedas concentrarte y no seas interrumpido durante esos minutos.
- 3) Cierra las páginas web que no sean necesarias (facebook, Hotmail, etc)
- 4) No tengas encendido el iPod en la oreja y **utiliza los auriculares para conectarlos al ordenador** y escuchar el video. Esto facilitará la concentración!
- 5) No tengas el móvil cerca de tal forma que los mensajes te puedan interrumpir y desconcentrarte
- 6) Tienes total libertad para utilizar los botones de Pausa y Retroceso para que puedas tomar nota de los puntos clave de cada lección.
- 7) Hay muchas maneras grandiosas de tomar notas, pero utilizaremos el **método Cornell**. La plantilla para Notas de Cornell consiste en dividir la hoja en tres áreas como muestra la imagen. Esta plantilla para Notas de Cornell utiliza un sistema donde no sólo sirve para escribir puntos claves sino también para hacer preguntas y resumir lo que han aprendido.

<p style="text-align: center; font-size: 1.2em;">Ideas</p> <ul style="list-style-type: none"> * Preguntas sobre el texto * Puntos e ideas importantes * Diagramas simples <p style="text-align: center; font-size: 0.8em; margin-top: 20px;">CUANDO Después de la visualización del video</p>	<p style="text-align: center; font-size: 1.2em;">Notas de clase</p> <p style="font-size: 0.8em;">Aquí se toma nota de todo lo que se dice durante el video. Puede incluir</p> <ul style="list-style-type: none"> * Transcripciones * Diagramas * Listas * Apuntes de todo tipo <p style="text-align: center; font-size: 0.8em; margin-top: 20px;">CUANDO Durante la visualización del video</p>	<p>Por ejemplo</p>  <p style="font-size: 0.8em; margin-top: 10px;">Fuente: http://canasto.es/2011/10/tomar-notas-con-el-metodo-cornell/</p>
<p style="text-align: center; font-size: 1.2em;">Resumen</p> <p style="font-size: 0.8em;">Un breve resumen del texto escrito arriba, útil como referencia rápida</p> <p style="text-align: center; font-size: 0.8em; margin-top: 5px;">CUANDO durante un repaso</p>		

Fuente: <http://www.como-estudiar.com/2012/07/como-estudiar-mejor-rapido-metodo-cornell.html>

- 8) **Apunta preguntas interesantes:** Debes pensar al menos una pregunta interesante que esté relacionada con el video y que no conozcas la respuesta para hacer al profesor en la clase siguiente.

FORMATO DE LAS CLASES

1º) Actividad de calentamiento o motivación (problema de pensamiento lateral, acertijo, etc)

2º) Luego dedicamos **algunos minutos (10 o 15) de discusión sobre el video que vieron la noche anterior**. Esto nos permite aclarar conceptos entendidos erróneamente antes de que practiquen y los apliquen incorrectamente

3º) Después de que las preguntas iniciales son respondidas, os entregaremos la **actividad del día** de manos a la obra y/o para directamente resolver problemas (ver Tabla)

Tabla: Comparación del Tiempo en la Clase Tradicional versus la Clase Girada.

Clase Tradicional		Clase Girada	
Actividad	Tiempo	Actividad	Tiempo
Actividad de motivación	5 min.	Actividad de motivación	5 min.
Ver las tareas de la noche anterior	15-20 min.	Preguntas sobre los videos	10 min.
Lectura del nuevo contenido	15 min.	Práctica guiada e independiente y/o actividad	40 min.
Práctica guiada e independiente y/o actividad	15-20 min		

Fuente: Bergmann, J.; Sams, A. . (2012). Flip Your Classroom: Reach Every Student in Every Class Every Day. International Society for Technology in Education.

4º) Una vez **finalizados los 6 temas** de la unidad con sus correspondientes actividades, habrán de realizar la actividad de **AUTOEVALUACIÓN del libro en casa**.

5º) **En la clase siguiente** se hace una **puesta en común de dudas y repaso**. De esta forma proporcionamos información oportuna para que los conceptos erróneos sean reaprendidos.

6º) Se realiza un **examen** basado en los objetivos de la unidad para todos los alumnos de la clase al mismo tiempo.

NOTAS

Para valorar el proceso de cada alumno el profesor tiene a disposición:

- 1- La nota de las **8 plantillas de Cornell** realizadas por cada uno que se entregan el día del control y se puede valorar con un positivo a aquellos alumnos que realicen **preguntas interesantes** a principio de cada clase.
- 2- Los **formularios** enviados al acabar de ver cada vídeo (8 en total)
- 3- La nota de la **prueba de contenidos**

ANEXO 12: PRUEBA FINAL DE CONTENIDOS Y COMPETENCIAS ADQUIRIDAS

Prueba final de contenidos – 1ª Opción

<p>Departament de Matemàtiques CONTROL de Matemàtiques Avaluació: 2ª Data: 18/02/14</p>	<p>Curs i etapa: 1r Batx Any acadèmic: 2013-14</p>
<p>Qualificació</p>	

Objectius de la unitat: Conèixer el concepte de funció i expressar-la de diferents formes. Reconèixer les funcions reals de variable real, el seu domini i imatge. Operar amb funcions. Realitzar composició de funcions i comprovar les propietats que verifica aquesta operació. Conèixer el concepte de funció inversa d'una funció i aplicar un procés per obtenir-la. Saber reconèixer les propietats globals d'una funció.

Cada qüestió val 2,5 punts.

Podeu utilitzar calculadora, però no es poden fer servir calculadores o altres aparells que portin informació emmagatzemada o que puguin transmetre o rebre informació. **Poseu el vostre nom en tots els fulls que entregueu**

Cognoms: _____ **Nom:** _____ **Secció:** _____

1. Trobeu analíticament el domini i la imatge de la funció $\left(\frac{f}{g}\right)(x)$ si $f(x) = x - 7$ i $g(x) = x^2 - 4$
2. Estudieu, analítica o gràficament segon correspongui, la simetria de les següents funcions:

$f(x) = \frac{x^3 - 2}{x^2 - 5}$	
----------------------------------	--

--	--

3. El nombre d'habitatges construïts per any, N , depèn de la taxa d'interès hipotecària r d'acord amb la fórmula

$$N(r) = \frac{50}{100+r^2},$$

on N està en milions d'habitatges. La taxa d'interès actualment està en 12% i es prediu que disminuirà a 8% en els dos següents anys d'acord amb la fórmula

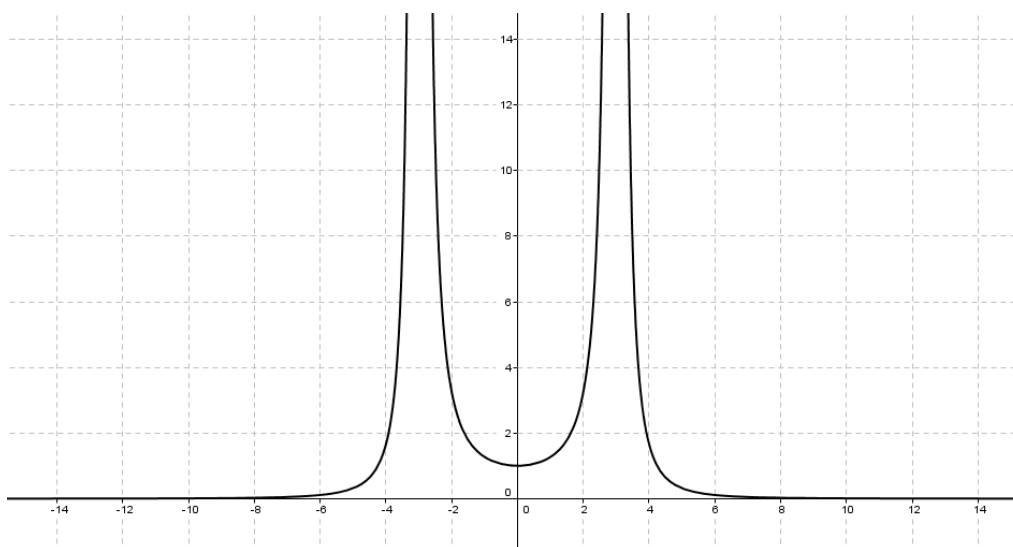
$$r(t) = 12 - \frac{8t}{t + 24}$$

On t és el temps mesurat en mesos, a partir d'ara.

- a) Expressiu el nombre d'habitatges en funció del temps.
- b) Quin és el nombre d'habitatges en aquest instant?
- c) Quin és el nombre d'habitatges transcorregut un any i 6 mesos?

4. **Triu una de les dues opcions** següents de funció i estudieu les seves propietats globals :

OPCIÓ A



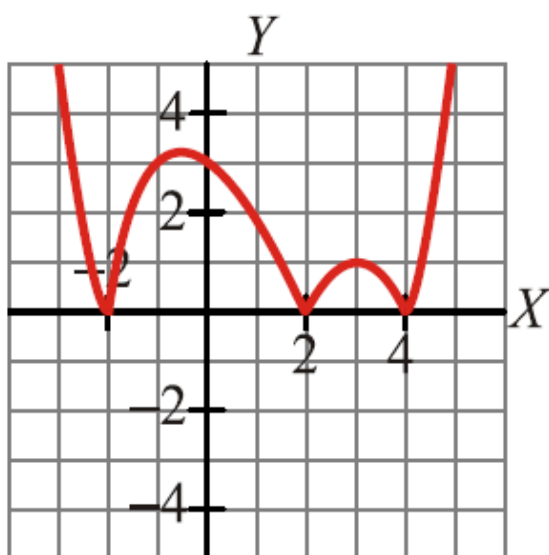
- 1 – Domini:
- 2 – Imatge:
- 3 – Simetria:
- 4 – Continuitat:
- 5 – Periodicitat:
- 6 – Asímptotes:
- 7 – Monotonia:

8 - Màxims i mínims :

9 – Curvatura :

10 - Punts d'inflexió:

OPCIÓ B



Fuente: <http://www.legiodis.es/Derivadas.htm>

1 – Domini:

2 – Imatge:

3 – Simetria:

4 – Continuitat:

5 – Periodicitat:

6 – Asímptotes:

7 – Monotonia:

8 - Màxims i mínims :

9 – Curvatura :

10 - Punts d'inflexió:

Prueba final de contenidos – 2ª Opción

<p>Departament de Matemàtiques CONTROL de Matemàtiques Avaluació: 2ª Data: 18/02/14</p> <p style="text-align: right;">Curs i etapa: 1r Batx Any acadèmic: 2013-14</p>	Qualificació
--	--------------

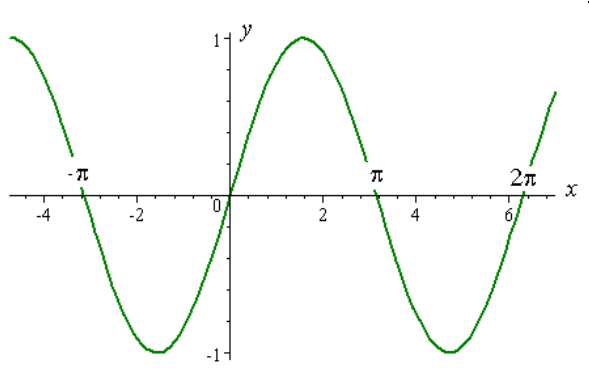
Objectius de la unitat: Conèixer el concepte de funció i expressar-la de diferents formes. Reconèixer les funcions reals de variable real, el seu domini i imatge. Operar amb funcions. Realitzar composició de funcions i comprovar les propietats que verifica aquesta operació. Conèixer el concepte de funció inversa d'una funció i aplicar un procés per obtenir-la. Saber reconèixer les propietats globals d'una funció.

Cada qüestió val 2,5 punts.

Podeu utilitzar calculadora, però no es poden fer servir calculadores o altres aparells que portin informació emmagatzemada o que puguin transmetre o rebre informació. **Poseu el vostre nom en tots els fulls que entregueu**

Cognoms: _____ **Nom:** _____ **Secció:** _____

- Trobeu analíticament el domini i la imatge de la funció $\left(\frac{f}{g}\right)(x)$ si $f(x) = x + 5$ i $g(x) = x - 2$
- Estudieu, analítica o gràficament segon correspongui, la simetria de les següents funcions:

$f(x) = \frac{x^3 - x}{x^5 + x^7}$	
------------------------------------	--

- El nombre d'habitatges construïts per any, N, depèn de la taxa d'interès hipotecària r d'acord amb la fórmula

$$N(r) = \frac{50}{100+r^2},$$

on N està en milions d'habitatges. La taxa d'interès actualment està en 12% i es preveu que disminuirà a 8% en els dos següents anys d'acord amb la fórmula

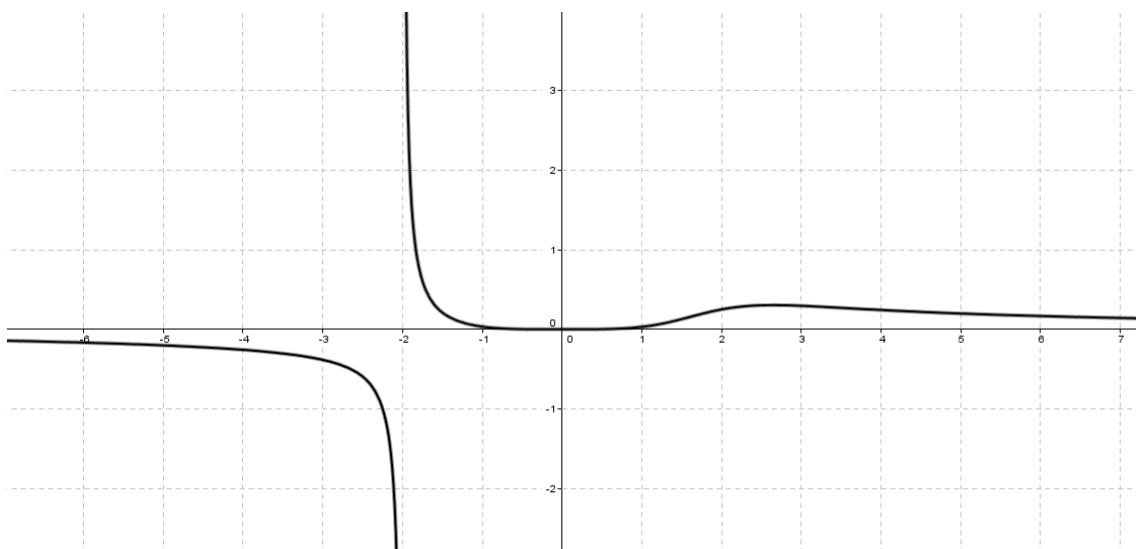
$$r(t) = 12 - \frac{8t}{t + 24}$$

On t és el temps mesurat en mesos, a partir d'ara.

- Expresseu el nombre d'habitats en funció del temps.
- Quin és el nombre d'habitats en aquest instant?
- Quin és el nombre d'habitats transcorregut un any i 6 mesos?

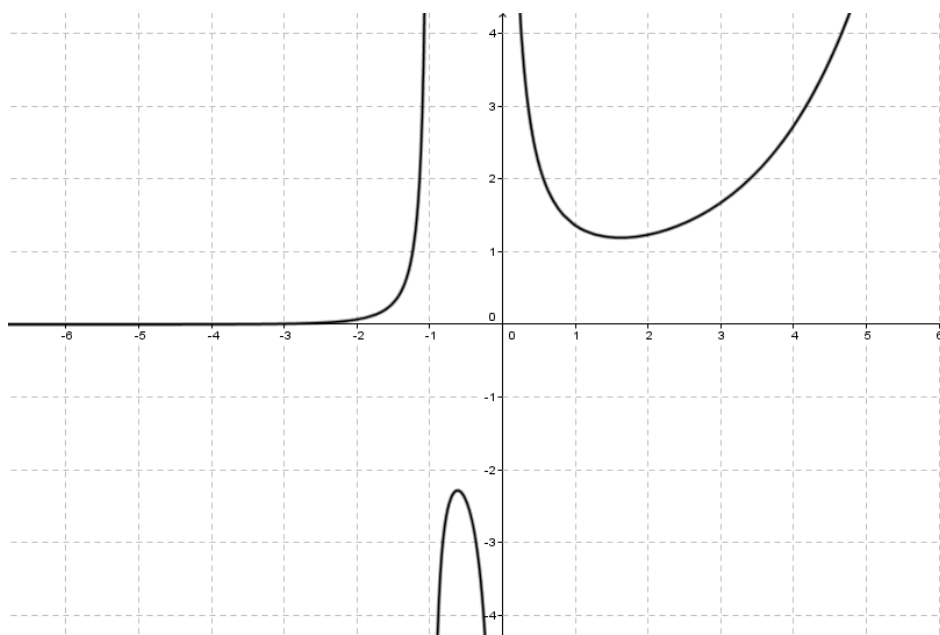
8. Trieu una de les dues opcions següents de funció i estudeu les seves propietats globals :

OPCIÓ A



- 1 – Domini:
- 2 – Imatge:
- 3 – Simetria:
- 4 – Continuitat:
- 5 – Periodicitat:
- 6 – Asímptotes:
- 7 – Monotonia:
- 8 – Màxims i mínims :
- 9 – Curvatura :
- 10 - Punts d'inflexió:

OPCIÓ B



1 – Domini:

2 – Imatge:

3 – Simetria:

4 – Continuïtat:

5 – Asímptotes:

6 – Periodicitat:

7 – Monotonia:

8 - Màxims i mínims :

9 – Curvatura :

10 - Punts d'inflexió:

ANEXO 13: ILUSTRACIONES DE LOS RESULTADOS DE LAS PRUEBAS DIAGNÓSTICAS

13.1. Resultados de la prueba diagnóstica de álgebra

Los resultados que exponemos a continuación muestran dos aspectos de análisis de los ítems del cuestionario:

- Por un lado en una tabla por cada ítem se explicita la cantidad de alumnos que respondieron correctamente a la pregunta, los que lo hicieron parcialmente correcto, los que respondieron mal y los que no lo hicieron.
- Por otro lado, por cada ítem se muestra en otra tabla, el número de alumnos que respondieron incorrectamente y el origen del error.

Cada tabla se compone de siete columnas:

- ✓ 1ª columna – Ciclo Lectivo: corresponde al ciclo lectivo analizado.
- ✓ 2ª columna: corresponde a la clasificación entre alumnos que respondieron a la pregunta (valores válidos) y los que no lo hicieron (valores perdidos).
- ✓ 3ª columna: corresponde al tipo de respuesta o bien al tipo de error dependiendo de la tabla.
- ✓ 4ª columna - Frecuencia: la frecuencia corresponde a la cantidad de alumnos por cada tipo de respuesta o error.
- ✓ 5ª columna - Porcentaje: corresponde a la frecuencia expresada en porcentaje.
- ✓ 6ª columna – Porcentaje válido: corresponde a la frecuencia expresada en porcentaje tomando como el 100% a la cantidad de alumnos que si resolvieron el ítem, es decir, excluye los valores perdidos.
- ✓ 7ª columna – Porcentaje acumulado: corresponde al porcentaje acumulado del porcentaje válido calculado en la 6ª columna.

10.13.1.1. Resultados del proceso algebraico de sustitución

A continuación presentamos los resultados de los ítems del proceso algebraico de sustitución:

Ilustración 10.13-1: Tabla Ítem 1

Ciclo Lectivo			Frecuencia	Porcentaje	Porcentaje válido	Porcentaje acumulado
2013-2014	Válidos	error	18	12,1	12,75	12,7
		respuesta parcial	13	8,7	9,2	21,8
		respuesta totalmente correcta	111	74,5	78,2	100,0
		Total	142	95,3	100,0	
		Perdidos	NS/NC	7	4,7	
	Total		149	100,0		
2014-2015	Válidos	error	25	15,2	15,9	15,9
		respuesta parcial	19	11,6	12,1	28,0
		respuesta totalmente correcta	113	68,9	72,0	100,0
		Total	157	95,7	100,0	
		Perdidos	NS/NC	7	4,3	
	Total		164	100,0		

Fuente: elaboración propia. Base cuestionario 1

Ilustración 10.13-2: Tipo de error en ítem 1

Ciclo Lectivo			Frecuencia	Porcentaje	Porcentaje válido	Porcentaje acumulado
2013-2014	Válidos	origen en un obstáculo	12	8,1	66,7	66,7
		origen en la ausencia de sentido	6	4,0	33,3	100,0
		Total	18	12,1	100,0	
	Perdidos	No procede	131	87,9		
Total		149	100,0			
2014-2015	Válidos	origen en un obstáculo	21	12,8	84,0	84,0
		origen en la ausencia de sentido	2	1,2	8,0	92,0
		origen afectivo y/o emocional	2	1,2	8,0	100,0
		Total	25	15,2	100,0	
		Perdidos	No procede	139	84,8	
	Total		164	100,0		

Fuente: elaboración propia. Base cuestionario 1

Ilustración 10.13-3: Tabla Ítem 2

Ciclo Lectivo			Frecuencia	Porcentaje	Porcentaje válido	Porcentaje acumulado
2013-2014	Válidos	Error	33	22,1	23,6	23,6
		respuesta parcial	13	8,7	9,3	32,9
		respuesta totalmente correcta	94	63,1	67,1	100,0
		Total	140	94,0	100,0	
	Perdidos	NS/NC	9	6,0		
Total			149	100,0		
2014-2015	Válidos	Error	37	22,6	24,0	24,0
		respuesta parcial	30	18,3	19,5	43,5
		respuesta totalmente correcta	87	53,0	56,5	100,0
		Total	154	93,9	100,0	
	Perdidos	NS/NC	10	6,1		
Total			164	100,0		

Fuente: elaboración propia. Base cuestionario 1

Ilustración 10.13-4: Tipo de error en ítem 2

Ciclo Lectivo			Frecuencia	Porcentaje	Porcentaje válido	Porcentaje acumulado
2013-2014	Válidos	origen en un obstáculo	21	14,1	63,6	63,6
		origen en la ausencia de sentido	12	8,1	36,4	100,0
		Total	33	22,1	100,0	
Perdidos			116	77,9		
Total			149	100,0		
2014-2015	Válidos	origen en un obstáculo	20	12,2	54,1	54,1
		origen en la ausencia de sentido	14	8,5	37,8	91,9
		origen afectivo y/o emocional	3	1,8	8,1	100,0
	Total	37	22,6	100,0		
Perdidos			127	77,4		
Total			164	100,0		

Fuente: elaboración propia. Base cuestionario 1

Ilustración 10.13-5: Tabla Ítem 3

Ciclo Lectivo			Frecuencia	Porcentaje	Porcentaje válido	Porcentaje acumulado
2013-2014	Válidos	Error	60	40,3	42,6	42,6
		respuesta parcial	19	12,8	13,5	56,0
		respuesta totalmente correcta	62	41,6	44,0	100,0
		Total	141	94,6	100,0	
	Perdidos	NS/NC	8	5,4		
Total			149	100,0		
2014-2015	Válidos	Error	41	25,0	26,8	26,8
		respuesta parcial	33	20,1	21,6	48,4
		respuesta totalmente correcta	79	48,2	51,6	100,0
		Total	153	93,3	100,0	
	Perdidos	NS/NC	11	6,7		
Total			164	100,0		

Fuente: elaboración propia. Base cuestionario 1

Ilustración 10.13-6: Tipo de error en ítem 3

Ciclo Lectivo			Frecuencia	Porcentaje	Porcentaje válido	Porcentaje acumulado
2013-2014	Válidos	origen en un obstáculo	7	4,7	11,7	11,7
		origen en la ausencia de sentido	46	30,9	76,7	88,3
		origen afectivo y/o emocional	7	4,7	11,7	100,0
		Total	60	40,3	100,0	
	Perdidos	No procede	89	59,7		
Total			149	100,0		
2014-2015	Válidos	origen en un obstáculo	15	9,1	36,6	36,6
		origen en la ausencia de sentido	23	14,0	56,1	92,7
		origen afectivo y/o emocional	3	1,8	7,3	100,0
		Total	41	25,0	100,0	
	Perdidos	No procede	123	75,0		

Ciclo Lectivo			Frecuencia	Porcentaje	Porcentaje válido	Porcentaje acumulado
2013-2014	Válidos	origen en un obstáculo	7	4,7	11,7	11,7
		origen en la ausencia de sentido	46	30,9	76,7	88,3
		origen afectivo y/o emocional	7	4,7	11,7	100,0
		Total	60	40,3	100,0	
Perdidos	No procede	89	59,7			
Total			149	100,0		
2014-2015	Válidos	origen en un obstáculo	15	9,1	36,6	36,6
		origen en la ausencia de sentido	23	14,0	56,1	92,7
		origen afectivo y/o emocional	3	1,8	7,3	100,0
		Total	41	25,0	100,0	
Perdidos	No procede	123	75,0			
Total			164	100,0		

Fuente: elaboración propia. Base cuestionario 1

Ilustración 10.13-7: Tabla Ítem 4

Ciclo Lectivo			Frecuencia	Porcentaje	Porcentaje válido	Porcentaje acumulado
2013-2014	Válidos	Error	8	5,4	5,9	5,9
		respuesta parcial	2	1,3	1,5	7,4
		respuesta totalmente correcta	125	83,9	92,6	100,0
		Total	135	90,6	100,0	
		Perdidos	NS/NC	14	9,4	
Total			149	100,0		
2014-2015	Válidos	Error	3	1,8	2,0	2,0
		respuesta totalmente correcta	150	91,5	98,0	100,0
		Total	153	93,3	100,0	
		Perdidos	NS/NC	11	6,7	
Total			164	100,0		

Fuente: elaboración propia. Base cuestionario 1

Ilustración 10.13-8: Tipo de error en ítem 4

Ciclo Lectivo			Frecuencia	Porcentaje	Porcentaje válido	Porcentaje acumulado
2013- 2014	Válidos	origen en un obstáculo	3	2,0	37,5	37,5
		origen en la ausencia de sentido	2	1,3	25,0	62,5
		origen afectivo y/o emocional	3	2,0	37,5	100,0
		Total	8	5,4	100,0	
	Perdidos	No procede	141	94,6		
	Total		149	100,0		
2014- 2015	Válidos	origen en un obstáculo	1	,6	33,3	33,3
		origen afectivo y/o emocional	2	1,2	66,7	100,0
		Total	3	1,8	100,0	
		Perdidos	No procede	161	98,2	
	Total		164	100,0		

Fuente: elaboración propia. Base cuestionario 1

Ilustración 10.13-9: Tabla Ítem 5

Ciclo Lectivo			Frecuencia	Porcentaje	Porcentaje válido	Porcentaje acumulado
2013-2014	Válidos	Error	40	26,8	38,1	38,1
		respuesta parcial	9	6,0	8,6	46,7
		respuesta totalmente correcta	56	37,6	53,3	100,0
		Total	105	70,5	100,0	
	Perdidos	NS/NC	44	29,5		
Total			149	100,0		
2014-2015	Válidos	Error	43	26,2	35,0	35,0
		respuesta parcial	6	3,7	4,9	39,8
		respuesta totalmente correcta	74	45,1	60,2	100,0
		Total	123	75,0	100,0	
	Perdidos	NS/NC	41	25,0		
Total			164	100,0		

Fuente: elaboración propia. Base cuestionario 1

Ilustración 10.13-10: Tipo de error en ítem 5

Ciclo Lectivo			Frecuencia	Porcentaje	Porcentaje válido	Porcentaje acumulado
2013-2014	Válidos	origen en un obstáculo	29	19,5	72,5	72,5
		origen en la ausencia de sentido	5	3,4	12,5	85,0
		origen afectivo y/o emocional	6	4,0	15,0	100,0
		Total	40	26,8	100,0	
	Perdidos	No procede	109	73,2		
Total			149	100,0		
2014-2015	Válidos	origen en un obstáculo	31	18,9	72,1	72,1
		origen en la ausencia de sentido	8	4,9	18,6	90,7
		origen afectivo y/o emocional	4	2,4	9,3	100,0
		Total	43	26,2	100,0	
	Perdidos	No procede	121	73,8		
Total			164	100,0		

Fuente: elaboración propia. Base cuestionario 1

Ilustración 10.13-11: Tabla Ítem 6

Ciclo Lectivo			Frecuencia	Porcentaje	Porcentaje válido	Porcentaje acumulado
2013-2014	Válidos	Error	6	4,0	5,1	5,1
		respuesta totalmente correcta	111	74,5	94,9	100,0
		Total	117	78,5	100,0	
	Perdidos	NS/NC	32	21,5		
	Total		149	100,0		
2014-2015	Válidos	Error	2	1,2	1,5	1,5
		respuesta totalmente correcta	135	82,3	98,5	100,0
		Total	137	83,5	100,0	
	Perdidos	NS/NC	27	16,5		
	Total		164	100,0		

Fuente: elaboración propia. Base cuestionario 1

Ilustración 10.13-12: Tipo de error en ítem 6

Ciclo Lectivo			Frecuencia	Porcentaje	Porcentaje válido	Porcentaje acumulado
2013-2014	Válidos	origen en un obstáculo	4	2,7	66,7	66,7
		origen afectivo y/o emocional	2	1,3	33,3	100,0
		Total	6	4,0	100,0	
	Perdidos	No procede	143	96,0		
Total		149	100,0			
2014-2015	Válidos	origen afectivo y/o emocional	2	1,2	100,0	100,0
		Perdidos	No procede	162	98,8	
	Total		164	100,0		

Fuente: elaboración propia. Base cuestionario 1

Ilustración 10.13-13: Tabla Ítem 7

Ciclo Lectivo			Frecuencia	Porcentaje	Porcentaje válido	Porcentaje acumulado
2013-2014	Válidos	Error	30	20,1	27,0	27,0
		respuesta totalmente correcta	81	54,4	73,0	100,0
		Total	111	74,5	100,0	
		Perdidos	NS/NC	38	25,5	
	Total		149	100,0		
2014-2015	Válidos	Error	45	27,4	34,6	34,6
		respuesta totalmente correcta	85	51,8	65,4	100,0
		Total	130	79,3	100,0	
		Perdidos	NS/NC	34	20,7	
	Total		164	100,0		

Fuente: elaboración propia. Base cuestionario 1

Ilustración 10.13-14: Tipo de error en ítem 7

Ciclo Lectivo			Frecuencia	Porcentaje	Porcentaje válido	Porcentaje acumulado
2013-2014	Válidos	origen en un obstáculo	19	12,8	63,3	63,3
		origen en la ausencia de sentido	9	6,0	30,0	93,3
		origen afectivo y/o emocional	2	1,3	6,7	100,0
		Total	30	20,1	100,0	
	Perdidos	No procede	119	79,9		
Total		149	100,0			
2014-2015	Válidos	origen en un obstáculo	24	14,6	53,3	53,3
		origen en la ausencia de sentido	16	9,8	35,6	88,9
		origen afectivo y/o emocional	5	3,0	11,1	100,0
		Total	45	27,4	100,0	
	Perdidos	No procede	119	72,6		

Ciclo Lectivo			Frecuencia	Porcentaje	Porcentaje válido	Porcentaje acumulado
2013-2014	Válidos	origen en un obstáculo	19	12,8	63,3	63,3
		origen en la ausencia de sentido	9	6,0	30,0	93,3
		origen afectivo y/o emocional	2	1,3	6,7	100,0
		Total	30	20,1	100,0	
Perdidos	No procede	119	79,9			
Total			149	100,0		
2014-2015	Válidos	origen en un obstáculo	24	14,6	53,3	53,3
		origen en la ausencia de sentido	16	9,8	35,6	88,9
		origen afectivo y/o emocional	5	3,0	11,1	100,0
		Total	45	27,4	100,0	
Perdidos	No procede	119	72,6			
Total			164	100,0		

Fuente: elaboración propia. Base cuestionario 1

Ilustración 10.13-15: Tabla Ítem 8

Ciclo Lectivo			Frecuencia	Porcentaje	Porcentaje válido	Porcentaje acumulado
2013-2014	Válidos	Error	28	18,8	29,8	29,8
		respuesta parcial	5	3,4	5,3	35,1
		respuesta totalmente correcta	61	40,9	64,9	100,0
		Total	94	63,1	100,0	
		Perdidos	NS/NC	55	36,9	
Total			149	100,0		
2014-2015	Válidos	Error	47	28,7	44,8	44,8
		respuesta parcial	4	2,4	3,8	48,6
		respuesta totalmente correcta	54	32,9	51,4	100,0
		Total	105	64,0	100,0	
		Perdidos	NS/NC	59	36,0	
Total			164	100,0		

Fuente: elaboración propia. Base cuestionario 1

Ilustración 10.13-16: Tipo de error en ítem 8

Ciclo Lectivo			Frecuencia	Porcentaje	Porcentaje válido	Porcentaje acumulado
2013-2014	Válidos	origen en un obstáculo	13	8,7	46,4	46,4
		origen en la ausencia de sentido	5	3,4	17,9	64,3
		origen afectivo y/o emocional	10	6,7	35,7	100,0
		Total	28	18,8	100,0	
Perdidos		No procede	121	81,2		
Total			149	100,0		
2014-2015	Válidos	origen en un obstáculo	20	12,2	42,6	42,6
		origen en la ausencia de sentido	15	9,1	31,9	74,5
		origen afectivo y/o emocional	12	7,3	25,5	100,0
		Total	47	28,7	100,0	
Perdidos		No procede	117	71,3		
Total			164	100,0		

Fuente: elaboración propia. Base cuestionario 1

Ilustración 10.13-17: Tabla Ítem 9

Ciclo Lectivo			Frecuencia	Porcentaje	Porcentaje válido	Porcentaje acumulado
2013-2014	Válidos	Error	34	22,8	23,3	23,3
		respuesta totalmente correcta	112	75,2	76,7	100,0
		Total	146	98,0	100,0	
		Perdidos	NS/NC	3	2,0	
Total			149	100,0		
2014-2015	Válidos	Error	20	12,2	12,7	12,7
		respuesta parcial	1	,6	,6	13,4
		respuesta totalmente correcta	136	82,9	86,6	100,0
		Total	157	95,7	100,0	
Perdidos		NS/NC	7	4,3		
Total			164	100,0		

Fuente: elaboración propia. Base cuestionario 1

Ilustración 10.13-18: Tipo de error en ítem 9

Ciclo Lectivo			Frecuencia	Porcentaje	Porcentaje válido	Porcentaje acumulado
2013-2014	Válidos	origen en un obstáculo	1	,7	2,9	2,9
		origen en la ausencia de sentido	32	21,5	94,1	97,1
		origen afectivo y/o emocional	1	,7	2,9	100,0
		Total	34	22,8	100,0	
Perdidos	No procede	115	77,2			
Total			149	100,0		
2014-2015	Válidos	origen en un obstáculo	3	1,8	15,0	15,0
		origen en la ausencia de sentido	16	9,8	80,0	95,0
		origen afectivo y/o emocional	1	,6	5,0	100,0
		Total	20	12,2	100,0	
Perdidos	No procede	144	87,8			
Total			164	100,0		

Fuente: elaboración propia. Base cuestionario 1

Ilustración 10.13-19: Tabla ítem 10

Ciclo Lectivo			Frecuencia	Porcentaje	Porcentaje válido	Porcentaje acumulado
2013-2014	Válidos	Error	42	28,2	28,8	28,8
		respuesta totalmente correcta	104	69,8	71,2	100,0
		Total	146	98,0	100,0	
		Perdidos	NS/NC	3	2,0	
Total			149	100,0		
2014-2015	Válidos	Error	37	22,6	23,6	23,6
		respuesta parcial	1	,6	,6	24,2
		respuesta totalmente correcta	119	72,6	75,8	100,0
		Total	157	95,7	100,0	
Perdidos	NS/NC	7	4,3			
Total			164	100,0		

Fuente: elaboración propia. Base cuestionario 1

Ilustración 10.13-20: Tipo de error en ítem 10

Ciclo Lectivo			Frecuencia	Porcentaje	Porcentaje válido	Porcentaje acumulado
2013-2014	Válidos	origen en un obstáculo	1	,7	2,4	2,4
		origen en la ausencia de sentido	39	26,2	92,9	95,2
		origen afectivo y/o emocional	2	1,3	4,8	100,0
		Total	42	28,2	100,0	
	Perdidos	No procede	107	71,8		
Total			149	100,0		
2014-2015	Válidos	origen en un obstáculo	3	1,8	8,1	8,1
		origen en la ausencia de sentido	32	19,5	86,5	94,6
		origen afectivo y/o emocional	2	1,2	5,4	100,0
		Total	37	22,6	100,0	
	Perdidos	No procede	127	77,4		
Total			164	100,0		

Fuente: elaboración propia. Base cuestionario 1

Ilustración 10.13-21: Tabla Ítem 11

Ciclo Lectivo			Frecuencia	Porcentaje	Porcentaje válido	Porcentaje acumulado
2013-2014	Válidos	error	46	30,9	32,4	32,4
		respuesta totalmente correcta	96	64,4	67,6	100,0
		Total	142	95,3	100,0	
		Perdidos	NS/NC	7	4,7	
	Total			149	100,0	
2014-2015	Válidos	error	35	21,3	22,6	22,6
		respuesta totalmente correcta	120	73,2	77,4	100,0
		Total	155	94,5	100,0	
		Perdidos	NS/NC	9	5,5	
	Total			164	100,0	

Fuente: elaboración propia. Base cuestionario 1

Ilustración 10.13-22: Tipo de error en ítem 11

Ciclo Lectivo			Frecuencia	Porcentaje	Porcentaje válido	Porcentaje acumulado
2013-2014	Válidos	origen en un obstáculo	2	1,3	4,3	4,3
		origen en la ausencia de sentido	43	28,9	93,5	97,8
		origen afectivo y/o emocional	1	,7	2,2	100,0
		Total	46	30,9	100,0	
	Perdidos	No procede	103	69,1		
Total			149	100,0		
2014-2015	Válidos	origen en un obstáculo	3	1,8	8,6	8,6
		origen en la ausencia de sentido	29	17,7	82,9	91,4
		origen afectivo y/o emocional	3	1,8	8,6	100,0
		Total	35	21,3	100,0	
	Perdidos	No procede	129	78,7		
Total			164	100,0		

Fuente: elaboración propia. Base cuestionario 1

Ilustración 10.13-23: Tabla Ítem 12

Ciclo Lectivo			Frecuencia	Porcentaje	Porcentaje válido	Porcentaje acumulado
2013-2014	Válidos	error	88	59,1	61,5	61,5
		respuesta parcial	2	1,3	1,4	62,9
		respuesta totalmente correcta	53	35,6	37,1	100,0
		Total	143	96,0	100,0	
	Perdidos	NS/NC	6	4,0		
Total			149	100,0		
2014-2015	Válidos	error	83	50,6	55,7	55,7
		respuesta parcial	30	18,3	20,1	75,8
		respuesta totalmente correcta	36	22,0	24,2	100,0
		Total	149	90,9	100,0	
	Total			149	90,9	100,0

Perdidos	NS/NC	15	9,1		
Total		164	100,0		

Fuente: elaboración propia. Base cuestionario 1

Ilustración 10.13-24: Tipo de error en ítem 12

Ciclo Lectivo			Frecuencia	Porcentaje	Porcentaje válido	Porcentaje acumulado
2013- 2014	Válidos	origen en un obstáculo	1	,7	1,1	1,1
		origen en la ausencia de sentido	83	55,7	94,3	95,5
		origen afectivo y/o emocional	4	2,7	4,5	100,0
	Total		88	59,1	100,0	
Perdidos		No procede	61	40,9		
Total			149	100,0		
2014- 2015	Válidos	origen en un obstáculo	3	1,8	3,7	3,7
		origen en la ausencia de sentido	76	46,3	92,7	96,3
		origen afectivo y/o emocional	3	1,8	3,7	100,0
	Total		82	50,0	100,0	
Perdidos		No procede	82	50,0		
Total			164	100,0		

Fuente: elaboración propia. Base cuestionario 1

10.13.1.2. Resultados del proceso algebraico de generalización

A continuación presentamos los resultados de los ítems del proceso algebraico de generalización:

Ilustración 10.13-25: Tabla Ítem 13

Ciclo Lectivo			Frecuencia	Porcentaje	Porcentaje válido	Porcentaje acumulado
2013- 2014	Válidos	error	19	12,8	13,0	13,0
		respuesta totalmente correcta	127	85,2	87,0	100,0
	Total		146	98,0	100,0	
Perdidos		NS/NC	3	2,0		
Total			149	100,0		
2014-	Válidos	Error	10	6,1	6,3	6,3

2015	respuesta totalmente correcta	148	90,2	93,7	100,0
	Total	158	96,3	100,0	
Perdidos	NS/NC	6	3,7		
Total		164	100,0		

Fuente: elaboración propia. Base cuestionario 1

Ilustración 10.13-26: Tipo de error en ítem 13

Ciclo Lectivo			Frecuencia	Porcentaje	Porcentaje válido	Porcentaje acumulado
2013-2014	Válidos	origen en la ausencia de sentido	17	11,4	89,5	89,5
		origen afectivo y/o emocional	2	1,3	10,5	100,0
	Total		19	12,8	100,0	
	Perdidos	No procede	130	87,2		
	Total		149	100,0		
2014-2015	Válidos	origen en la ausencia de sentido	10	6,1	100,0	100,0
	Perdidos	No procede	154	93,9		
	Total		164	100,0		

Fuente: elaboración propia. Base cuestionario 1

Ilustración 10.13-27: Tabla Ítem 14

Ciclo Lectivo			Frecuencia	Porcentaje	Porcentaje válido	Porcentaje acumulado
2013-2014	Válidos	Error	17	11,4	11,7	11,7
		respuesta	128	85,9	88,3	100,0
		totalmente correcta				
		Total	145	97,3	100,0	
	Perdidos	NS/NC	4	2,7		
Total			149	100,0		
2014-2015	Válidos	Error	12	7,3	7,6	7,6
		respuesta	146	89,0	92,4	100,0
		totalmente correcta				
		Total	158	96,3	100,0	
	Perdidos	NS/NC	6	3,7		
Total			164	100,0		

Fuente: elaboración propia. Base cuestionario 1

Ilustración 10.13-28: Tipo de error en ítem 14

Ciclo Lectivo			Frecuencia	Porcentaje	Porcentaje válido	Porcentaje acumulado
2013-2014	Válidos	origen en la ausencia de sentido	16	10,7	94,1	94,1
		origen afectivo y/o emocional	1	,7	5,9	100,0
		Total	17	11,4	100,0	
	Perdidos	No procede	132	88,6		
	Total			149	100,0	
2014-2015	Válidos	origen en la ausencia de sentido	11	6,7	91,7	91,7
		origen afectivo y/o emocional	1	,6	8,3	100,0
		Total	12	7,3	100,0	
	Perdidos	No procede	152	92,7		
	Total			164	100,0	

Fuente: elaboración propia. Base cuestionario 1

Ilustración 10.13-29: Tabla Ítem 15

Ciclo Lectivo			Frecuencia	Porcentaje	Porcentaje válido	Porcentaje acumulado
2013-2014	Válidos	error	29	19,5	19,9	19,9
		respuesta	117	78,5	80,1	100,0
		totalmente correcta				
		Total	146	98,0	100,0	
	Perdidos	NS/NC	3	2,0		
Total			149	100,0		
2014-2015	Válidos	error	34	20,7	21,8	21,8
		respuesta	122	74,4	78,2	100,0
		totalmente correcta				
		Total	156	95,1	100,0	
	Perdidos	NS/NC	8	4,9		
Total			164	100,0		

Fuente: elaboración propia. Base cuestionario 1

Ilustración 10.13-30: Tipo de error en ítem 15

Ciclo Lectivo			Frecuencia	Porcentaje	Porcentaje válido	Porcentaje acumulado
2013-2014	Válidos	origen en un obstáculo	3	2,0	10,3	10,3
		origen en la ausencia de sentido	24	16,1	82,8	93,1
		origen afectivo y/o emocional	2	1,3	6,9	100,0
		Total	29	19,5	100,0	
	Perdidos	No procede	120	80,5		
Total			149	100,0		
2014-2015	Válidos	origen en un obstáculo	6	3,7	17,6	17,6
		origen en la ausencia de sentido	25	15,2	73,5	91,2
		origen afectivo y/o emocional	3	1,8	8,8	100,0
		Total	34	20,7	100,0	
	Perdidos	No procede	130	79,3		
Total			164	100,0		

Fuente: elaboración propia. Base cuestionario 1

Ilustración 10.13-31: Tabla Ítem 16

Ciclo Lectivo			Frecuencia	Porcentaje	Porcentaje válido	Porcentaje acumulado
2013-2014	Válidos	Error	8	5,4	5,6	5,6
		respuesta parcial	7	4,7	4,9	10,4
		respuesta totalmente correcta	129	86,6	89,6	100,0
		Total	144	96,6	100,0	
	Perdidos	NS/NC	5	3,4		
Total			149	100,0		
2014-2015	Válidos	Error	11	6,7	7,1	7,1
		respuesta parcial	2	1,2	1,3	8,4
		respuesta totalmente correcta	142	86,6	91,6	100,0
		Total	155	94,5	100,0	
	Perdidos	NS/NC	9	5,5		
Total			164	100,0		

Fuente: elaboración propia. Base cuestionario 1

Ilustración 10.13-32: Tipo de error en ítem 16

Ciclo Lectivo			Frecuencia	Porcentaje	Porcentaje válido	Porcentaje acumulado
2013-2014	Válidos	origen en la ausencia de sentido	6	4,0	75,0	75,0
		origen afectivo y/o emocional	2	1,3	25,0	100,0
		Total	8	5,4	100,0	
	Perdidos	No procede	141	94,6		
Total			149	100,0		
2014-2015	Válidos	origen en la ausencia de sentido	5	3,0	45,5	45,5
		origen afectivo y/o emocional	6	3,7	54,5	100,0
		Total	11	6,7	100,0	
	Perdidos	No procede	153	93,3		
Total			164	100		

Fuente: elaboración propia. Base cuestionario 1

Ilustración 10.13-33: Tabla Ítem 17

Ciclo Lectivo			Frecuencia	Porcentaje	Porcentaje válido	Porcentaje acumulado
2013-2014	Válidos	error	11	7,4	7,6	7,6
		respuesta parcial	64	43,0	44,4	52,1
		respuesta totalmente correcta	69	46,3	47,9	100,0
		Total	144	96,6	100,0	
	Perdidos	NS/NC	5	3,4		
Total			149	100,0		
2014-2015	Válidos	error	12	7,3	7,7	7,7
		respuesta parcial	60	36,6	38,7	46,5
		respuesta totalmente correcta	83	50,6	53,5	100,0
		Total	155	94,5	100,0	
	Perdidos	NS/NC	9	5,5		
Total			164	100,0		

Fuente: elaboración propia. Base cuestionario 1

Ilustración 10.13-34: Tipo de error en ítem 17

Ciclo Lectivo			Frecuencia	Porcentaje	Porcentaje válido	Porcentaje acumulado
2013-2014	Válidos	origen en la ausencia de sentido	8	5,4	72,7	72,7
		origen afectivo y/o emocional	3	2,0	27,3	100,0
		Total	11	7,4	100,0	
	Perdidos	No procede	138	92,6		
Total			149	100,0		
2014-2015	Válidos	origen en la ausencia de sentido	9	5,5	75,0	75,0
		origen afectivo y/o emocional	3	1,8	25,0	100,0
		Total	12	7,3	100,0	
	Perdidos	No procede	152	92,7		
Total			164	100,0		

Fuente: elaboración propia. Base cuestionario 1

Ilustración 10.13-35: Tabla Ítem 18

Ciclo Lectivo			Frecuencia	Porcentaje	Porcentaje válido	Porcentaje acumulado
2013-2014	Válidos	Error	37	24,8	25,5	25,5
		respuesta parcial	7	4,7	4,8	30,3
		respuesta totalmente correcta	101	67,8	69,7	100,0
		Total	145	97,3	100,0	
	Perdidos	NS/NC	4	2,7		
Total			149	100,0		
2014-2015	Válidos	Error	34	20,7	21,8	21,8
		respuesta parcial	64	39,0	41,0	62,8
		respuesta totalmente correcta	58	35,4	37,2	100,0
		Total	156	95,1	100,0	
	Perdidos	NS/NC	8	4,9		
Total			164	100,0		

Fuente: elaboración propia. Base cuestionario 1

Ilustración 10.13-36: Tipo de error en ítem 18

Ciclo Lectivo			Frecuencia	Porcentaje	Porcentaje válido	Porcentaje acumulado
2013-2014	Válidos	origen en un obstáculo	2	1,3	5,4	5,4
		origen en la ausencia de sentido	18	12,1	48,6	54,1
		origen afectivo y/o emocional	17	11,4	45,9	100,0
		Total	37	24,8	100,0	
	Perdidos	No procede	112	75,2		
Total			149	100,0		
2014-2015	Válidos	origen en la ausencia de sentido	11	6,7	32,4	32,4
		origen afectivo y/o emocional	23	14,0	67,6	100,0
		Total	34	20,7	100,0	
		Perdidos	No procede	130	79,3	
	Total			164	100,0	

Fuente: elaboración propia. Base cuestionario 1

Ilustración 10.13-37: Tabla Ítem 19

Ciclo Lectivo			Frecuencia	Porcentaje	Porcentaje válido	Porcentaje acumulado
2013-2014	Válidos	Error	10	6,7	7,1	7,1
		respuesta totalmente correcta	131	87,9	92,9	100,0
		Total	141	94,6	100,0	
	Perdidos	NS/NC	8	5,4		
	Total		149	100,0		
2014-2015	Válidos	Error	4	2,4	2,6	2,6
		respuesta totalmente correcta	152	92,7	97,4	100,0
		Total	156	95,1	100,0	
	Perdidos	NS/NC	8	4,9		
	Total		164	100,0		

Fuente: elaboración propia. Base cuestionario 1

Ilustración 10.13-38: Tipo de error en ítem 19

Ciclo Lectivo			Frecuencia	Porcentaje	Porcentaje válido	Porcentaje acumulado
2013-2014	Válidos	origen en la ausencia de sentido	5	3,4	50,0	50,0
		origen afectivo y/o emocional	5	3,4	50,0	100,0
		Total	10	6,7	100,0	
	Perdidos	No procede	139	93,3		
Total		149	100,0			
2014-2015	Válidos	origen en la ausencia de sentido	1	,6	25,0	25,0
		origen afectivo y/o emocional	3	1,8	75,0	100,0
		Total	4	2,4	100,0	
	Perdidos	No procede	160	97,6		
	Total		164	100,0		

Fuente: elaboración propia. Base cuestionario 1

Ilustración 10.13-39: Tabla Ítem 20

Ciclo Lectivo			Frecuencia	Porcentaje	Porcentaje válido	Porcentaje acumulado
2013-2014	Válidos	Error	17	11,4	12,0	12,0
		respuesta parcial	55	36,9	38,7	50,7
		respuesta totalmente correcta	70	47,0	49,3	100,0
		Total	142	95,3	100,0	
	Perdidos	NS/NC	7	4,7		
Total			149	100,0		
2014-2015	Válidos	Error	3	1,8	1,9	1,9
		respuesta parcial	61	37,2	39,6	41,6
		respuesta totalmente correcta	90	54,9	58,4	100,0
		Total	154	93,9	100,0	
	Perdidos	NS/NC	10	6,1		
Total			164	100,0		

Fuente: elaboración propia. Base cuestionario 1

Ilustración 10.13-40: Tipo de error en ítem 20

Ciclo Lectivo			Frecuencia	Porcentaje	Porcentaje válido	Porcentaje acumulado
2013-2014	Válidos	origen en la ausencia de sentido	5	3,4	29,4	29,4
		origen afectivo y/o emocional	12	8,1	70,6	100,0
		Total	17	11,4	100,0	
	Perdidos	No procede	132	88,6		
Total			149	100,0		
2014-2015	Válidos	origen en la ausencia de sentido	1	,6	33,3	33,3
		origen afectivo y/o emocional	2	1,2	66,7	100,0
		Total	3	1,8	100,0	
	Perdidos	No procede	161	98,2		
Total			164	100,0		

Fuente: elaboración propia. Base cuestionario 1

Ilustración 10.13-41: Tabla Ítem 21

Ciclo Lectivo			Frecuencia	Porcentaje	Porcentaje válido	Porcentaje acumulado
2013-2014	Válidos	Error	24	16,1	17,1	17,1
		respuesta	116	77,9	82,9	100,0
		totalmente correcta				
		Total	140	94,0	100,0	
	Perdidos	NS/NC	9	6,0		
Total			149	100,0		
2014-2015	Válidos	Error	21	12,8	14,2	14,2
		respuesta	127	77,4	85,8	100,0
		totalmente correcta				
		Total	148	90,2	100,0	
	Perdidos	NS/NC	16	9,8		
Total			164	100,0		

Fuente: elaboración propia. Base cuestionario 1

Ilustración 10.13-42: Tipo de error en ítem 21

Ciclo Lectivo			Frecuencia	Porcentaje	Porcentaje válido	Porcentaje acumulado
2013-2014	Válidos	origen en un obstáculo	6	4,0	25,0	25,0
		origen en la ausencia de sentido	16	10,7	66,7	91,7
		origen afectivo y/o emocional	2	1,3	8,3	100,0
		Total	24	16,1	100,0	
	Perdidos	No procede	125	83,9		
Total			149	100,0		
2014-2015	Válidos	origen en la ausencia de sentido	18	11,0	85,7	85,7
		origen afectivo y/o emocional	3	1,8	14,3	100,0
		Total	21	12,8	100,0	
		Perdidos	No procede	143	87,2	
	Total			164	100,0	

Fuente: elaboración propia. Base cuestionario 1

Ilustración 10.13-43: Tabla Ítem 22

Ciclo Lectivo			Frecuencia	Porcentaje	Porcentaje válido	Porcentaje acumulado
2013-2014	Válidos	Error	49	32,9	34,3	34,3
		respuesta parcial	1	,7	,7	35,0
		respuesta totalmente correcta	93	62,4	65,0	100,0
		Total	143	96,0	100,0	
	Perdidos	NS/NC	6	4,0		
Total			149	100,0		
2014-2015	Válidos	Error	70	42,7	44,0	44,0
		respuesta totalmente correcta	89	54,3	56,0	100,0
		Total	159	97,0	100,0	
		Perdidos	NS/NC	5	3,0	
	Total			164	100,0	

Fuente: elaboración propia. Base cuestionario 1

Ilustración 10.13-44: Tipo de error en ítem 22

Ciclo Lectivo			Frecuencia	Porcentaje	Porcentaje válido	Porcentaje acumulado
2013-2014	Válidos	origen en la ausencia de sentido	41	27,5	83,7	83,7
		origen afectivo y/o emocional	8	5,4	16,3	100,0
		Total	49	32,9	100,0	
	Perdidos	No procede	100	67,1		
Total			149	100,0		
2014-2015	Válidos	origen en la ausencia de sentido	65	39,6	92,9	92,9
		origen afectivo y/o emocional	5	3,0	7,1	100,0
		Total	70	42,7	100,0	
	Perdidos	No procede	94	57,3		
Total			164	100,0		

Fuente: elaboración propia. Base cuestionario 1

Ilustración 10.13-45: Tabla Ítem 23

Ciclo Lectivo			Frecuencia	Porcentaje	Porcentaje válido	Porcentaje acumulado
2013-2014	Válidos	Error	68	45,6	50,4	50,4
		respuesta parcial	1	,7	,7	51,1
		respuesta totalmente correcta	66	44,3	48,9	100,0
		Total	135	90,6	100,0	
	Perdidos	NS/NC	14	9,4		
Total			149	100,0		
2014-2015	Válidos	error	81	49,4	52,9	52,9
		respuesta totalmente correcta	72	43,9	47,1	100,0
		Total	153	93,3	100,0	
		Perdidos	NS/NC	11	6,7	
	Total			164	100,0	

Fuente: elaboración propia. Base cuestionario 1

Ilustración 10.13-46: Tipo de error en ítem 23

Ciclo Lectivo			Frecuencia	Porcentaje	Porcentaje válido	Porcentaje acumulado
2013-2014	Válidos	origen en la ausencia de sentido	59	39,6	86,8	86,8
		origen afectivo y/o emocional	9	6,0	13,2	100,0
		Total	68	45,6	100,0	
	Perdidos	No procede	81	54,4		
Total			149	100,0		
2014-2015	Válidos	origen en la ausencia de sentido	65	39,6	80,2	80,2
		origen afectivo y/o emocional	16	9,8	19,8	100,0
		Total	81	49,4	100,0	
	Perdidos	No procede	83	50,6		
Total			164	100,0		

Fuente: elaboración propia. Base cuestionario 1

Ilustración 10.13-47: Tabla Ítem 24

Ciclo Lectivo			Frecuencia	Porcentaje	Porcentaje válido	Porcentaje acumulado
2013-2014	Válidos	error	73	49,0	62,9	62,9
		respuesta parcial	2	1,3	1,7	64,7
		respuesta totalmente correcta	41	27,5	35,3	100,0
		Total	116	77,9	100,0	
	Perdidos	NS/NC	33	22,1		
Total			149	100,0		
2014-2015	Válidos	Error	70	42,7	55,1	55,1
		respuesta parcial	2	1,2	1,6	56,7
		respuesta totalmente correcta	55	33,5	43,3	100,0
		Total	127	77,4	100,0	
	Perdidos	NS/NC	37	22,6		
Total			164	100,0		

Fuente: elaboración propia. Base cuestionario 1

Ilustración 10.13-48: Tipo de error en ítem 24

Ciclo Lectivo			Frecuencia	Porcentaje	Porcentaje válido	Porcentaje acumulado
2013-2014	Válidos	origen en la ausencia de sentido	57	38,3	78,1	78,1
		origen afectivo y/o emocional	16	10,7	21,9	100,0
		Total	73	49,0	100,0	
	Perdidos	No procede	76	51,0		
Total			149	100,0		
2014-2015	Válidos	origen en la ausencia de sentido	57	34,8	81,4	81,4
		origen afectivo y/o emocional	13	7,9	18,6	100,0
		Total	70	42,7	100,0	
	Perdidos	No procede	94	57,3		
Total			164	100,0		

Fuente: elaboración propia. Base cuestionario 1

Ilustración 10.13-49: Tabla Ítem 25

Ciclo Lectivo			Frecuencia	Porcentaje	Porcentaje válido	Porcentaje acumulado
2013-2014	Válidos	Error	35	23,5	24,3	24,3
		respuesta parcial	1	,7	,7	25,0
		respuesta totalmente correcta	108	72,5	75,0	100,0
		Total	144	96,6	100,0	
	Perdidos	NS/NC	5	3,4		
Total			149	100,0		
2014-2015	Válidos	Error	37	22,6	23,6	23,6
		respuesta totalmente correcta	120	73,2	76,4	100,0
		Total	157	95,7	100,0	
		Perdidos	NS/NC	7	4,3	
	Total			164	100,0	

Fuente: elaboración propia. Base cuestionario 1

Ilustración 10.13-50: Tipo de error en ítem 25

Ciclo Lectivo			Frecuencia	Porcentaje	Porcentaje válido	Porcentaje acumulado
2013-2014	Válidos	origen en la ausencia de sentido	24	16,1	68,6	68,6
		origen afectivo y/o emocional	11	7,4	31,4	100,0
		Total	35	23,5	100,0	
	Perdidos	No procede	114	76,5		
Total			149	100,0		
2014-2015	Válidos	origen en la ausencia de sentido	26	15,9	70,3	70,3
		origen afectivo y/o emocional	11	6,7	29,7	100,0
		Total	37	22,6	100,0	
	Perdidos	No procede	127	77,4		
Total			164	100,0		

Fuente: elaboración propia. Base cuestionario 1

Ilustración 10.13-51: Tabla Ítem 26

Ciclo Lectivo			Frecuencia	Porcentaje	Porcentaje válido	Porcentaje acumulado
2013-2014	Válidos	error	60	40,3	43,5	43,5
		respuesta parcial	2	1,3	1,4	44,9
		respuesta totalmente correcta	76	51,0	55,1	100,0
		Total	138	92,6	100,0	
	Perdidos	NS/NC	11	7,4		
Total			149	100,0		
2014-2015	Válidos	error	57	34,8	37,0	37,0
		respuesta parcial	2	1,2	1,3	38,3
		respuesta totalmente correcta	95	57,9	61,7	100,0
		Total	154	93,9	100,0	
	Perdidos	NS/NC	10	6,1		
Total			164	100,0		

Fuente: elaboración propia. Base cuestionario 1

Ilustración 10.13-52: Tipo de error en ítem 26

Ciclo Lectivo			Frecuencia	Porcentaje	Porcentaje válido	Porcentaje acumulado
2013-2014	Válidos	origen en la ausencia de sentido	39	26,2	65,0	65,0
		origen afectivo y/o emocional	21	14,1	35,0	100,0
		Total	60	40,3	100,0	
	Perdidos	No procede	89	59,7		
Total			149	100,0		
2014-2015	Válidos	origen en un obstáculo	2	1,2	3,5	3,5
		origen en la ausencia de sentido	24	14,6	42,1	45,6
		origen afectivo y/o emocional	31	18,9	54,4	100,0
		Total	57	34,8	100,0	
	Perdidos	No procede	107	65,2		
Total			164	100,0		

Fuente: elaboración propia. Base cuestionario 1

Ilustración 10.13-53: Tabla Ítem 27

Ciclo Lectivo			Frecuencia	Porcentaje	Porcentaje válido	Porcentaje acumulado
2013-2014	Válidos	error	78	52,3	66,1	66,1
		respuesta parcial	3	2,0	2,5	68,6
		respuesta totalmente correcta	37	24,8	31,4	100,0
		Total	118	79,2	100,0	
	Perdidos	NS/NC	31	20,8		
Total			149	100,0		
2014-2015	Válidos	error	77	47,0	58,8	58,8
		respuesta parcial	7	4,3	5,3	64,1
		respuesta totalmente correcta	47	28,7	35,9	100,0
		Total	131	79,9	100,0	
	Perdidos	NS/NC	33	20,1		
Total			164	100,0		

Fuente: elaboración propia. Base cuestionario 1

Ilustración 10.13-54: Tipo de error en ítem 27

Ciclo Lectivo			Frecuencia	Porcentaje	Porcentaje válido	Porcentaje acumulado
2013-2014	Válidos	origen en la ausencia de sentido	32	21,5	41,0	41,0
		origen afectivo y/o emocional	46	30,9	59,0	100,0
		Total	78	52,3	100,0	
	Perdidos	No procede	71	47,7		
Total			149	100,0		
2014-2015	Válidos	origen en un obstáculo	2	1,2	2,6	2,6
		origen en la ausencia de sentido	29	17,7	37,7	40,3
		origen afectivo y/o emocional	46	28,0	59,7	100,0
		Total	77	47,0	100,0	
	Perdidos	No procede	87	53,0		
Total			164	100,0		

Fuente: elaboración propia. Base cuestionario 1

Ilustración 10.13-55: Tabla Ítem 28

Ciclo Lectivo			Frecuencia	Porcentaje	Porcentaje válido	Porcentaje acumulado
2013-2014	Válidos	error	41	27,5	32,3	32,3
		respuesta	86	57,7	67,7	100,0
		totalmente correcta				
		Total	127	85,2	100,0	
	Perdidos	NS/NC	22	14,8		
Total			149	100,0		
2014-2015	Válidos	error	35	21,3	23,8	23,8
		respuesta parcial	1	,6	,7	24,5
		respuesta	111	67,7	75,5	100,0
		totalmente correcta				
	Total	147	89,6	100,0		
Perdidos	NS/NC	17	10,4			
Total			164	100,0		

Fuente: elaboración propia. Base cuestionario 1

Ilustración 10.13-56: Tipo de error en ítem 28

Ciclo Lectivo			Frecuencia	Porcentaje	Porcentaje válido	Porcentaje acumulado
2013-2014	Válidos	origen en un obstáculo	4	2,7	9,8	9,8
		origen en la ausencia de sentido	31	20,8	75,6	85,4
		origen afectivo y/o emocional	6	4,0	14,6	100,0
		Total	41	27,5	100,0	
	Perdidos	No procede	108	72,5		
Total			149	100,0		
2014-2015	Válidos	origen en un obstáculo	1	,6	2,9	2,9
		origen en la ausencia de sentido	23	14,0	65,7	68,6
		origen afectivo y/o emocional	11	6,7	31,4	100,0
		Total	35	21,3	100,0	
	Perdidos	No procede	129	78,7		
Total			164	100,0		

Fuente: elaboración propia. Base cuestionario 1

Ilustración 10.13-57: Tabla Ítem 29

Ciclo Lectivo			Frecuencia	Porcentaje	Porcentaje válido	Porcentaje acumulado
2013-2014	Válidos	error	44	29,5	36,7	36,7
		respuesta	76	51,0	63,3	100,0
		totalmente correcta				
		Total	120	80,5	100,0	
	Perdidos	NS/NC	29	19,5		
Total			149	100,0		
2014-2015	Válidos	error	39	23,8	30,2	30,2
		respuesta parcial	2	1,2	1,6	31,8
		respuesta	88	53,7	68,2	100,0
		totalmente correcta				
	Total	129	78,7	100,0		
Perdidos	NS/NC	35	21,3			
Total			164	100,0		

Fuente: elaboración propia. Base cuestionario 1

Ilustración 10.13-58: Tipo de error en ítem 29

Ciclo Lectivo			Frecuencia	Porcentaje	Porcentaje válido	Porcentaje acumulado
2013-2014	Válidos	origen en un obstáculo	4	2,7	9,1	9,1
		origen en la ausencia de sentido	34	22,8	77,3	86,4
		origen afectivo y/o emocional	6	4,0	13,6	100,0
		Total	44	29,5	100,0	
	Perdidos	No procede	105	70,5		
Total			149	100,0		
2014-2015	Válidos	origen en un obstáculo	1	,6	2,6	2,6
		origen en la ausencia de sentido	30	18,3	76,9	79,5
		origen afectivo y/o emocional	8	4,9	20,5	100,0
		Total	39	23,8	100,0	
	Perdidos	No procede	125	76,2		
Total			164	100,0		

Fuente: elaboración propia. Base cuestionario 1

Ilustración 10.13-59: Tabla Ítem 30

Ciclo Lectivo			Frecuencia	Porcentaje	Porcentaje válido	Porcentaje acumulado
2013-2014	Válidos	Error	2	1,3	1,4	1,4
		respuesta parcial	1	,7	,7	2,1
		respuesta totalmente correcta	138	92,6	97,9	100,0
		Total	141	94,6	100,0	
	Perdidos	NS/NC	8	5,4		
Total			149	100,0		
2014-2015	Válidos	Error	5	3,0	3,2	3,2
		respuesta totalmente correcta	151	92,1	96,8	100,0
		Total	156	95,1	100,0	
		Perdidos	NS/NC	8	4,9	
	Total			164	100,0	

Fuente: elaboración propia. Base cuestionario 2

Ilustración 10.13-60: Tipo de error en ítem 30

Ciclo Lectivo			Frecuencia	Porcentaje	Porcentaje válido	Porcentaje acumulado
2013-2014	Válidos	origen en la ausencia de sentido	1	,7	50,0	50,0
		origen afectivo y/o emocional	1	,7	50,0	100,0
		Total	2	1,3	100,0	
	Perdidos	No procede	147	98,7		
Total			149	100,0		
2014-2015	Válidos	origen en la ausencia de sentido	5	3,0	100,0	100,0
	Perdidos	No procede	159	97,0		
	Total			164	100,0	

Fuente: elaboración propia. Base cuestionario 2

Ilustración 10.13-61: Tabla Ítem 31

Ciclo Lectivo			Frecuencia	Porcentaje	Porcentaje válido	Porcentaje acumulado
2013-2014	Válidos	Error	72	48,3	51,1	51,1
		respuesta parcial	35	23,5	24,8	75,9
		respuesta totalmente correcta	34	22,8	24,1	100,0
		Total	141	94,6	100,0	
	Perdidos	NS/NC	8	5,4		
Total			149	100,0		
2014-2015	Válidos	Error	69	42,1	45,1	45,1
		respuesta parcial	38	23,2	24,8	69,9
		respuesta totalmente correcta	46	28,0	30,1	100,0
		Total	153	93,3	100,0	
	Perdidos	NS/NC	11	6,7		
Total			164	100,0		

Fuente: elaboración propia. Base cuestionario 2

Ilustración 10.13-62: Tipo de error en ítem 31

Ciclo Lectivo			Frecuencia	Porcentaje	Porcentaje válido	Porcentaje acumulado
2013-2014	Válidos	origen en la ausencia de sentido	69	46,3	97,2	97,2
		origen afectivo y/o emocional	2	1,3	2,8	100,0
		Total	71	47,7	100,0	
	Perdidos	No procede	78	52,3		
Total			149	100,0		
2014-2015	Válidos	origen en la ausencia de sentido	69	42,1	100,0	100,0
	Perdidos	No procede	95	57,9		
	Total			164	100,0	

Fuente: elaboración propia. Base cuestionario 2

Ilustración 10.13-63: Tabla Ítem 32

Ciclo Lectivo			Frecuencia	Porcentaje	Porcentaje válido	Porcentaje acumulado
2013-2014	Válidos	Error	111	74,5	78,7	78,7
		respuesta parcial	13	8,7	9,2	87,9
		respuesta totalmente correcta	17	11,4	12,1	100,0
		Total	141	94,6	100,0	
	Perdidos	NS/NC	8	5,4		
Total			149	100,0		
2014-2015	Válidos	Error	115	70,1	76,7	76,7
		respuesta parcial	17	10,4	11,3	88,0
		respuesta totalmente correcta	18	11,0	12,0	100,0
		Total	150	91,5	100,0	
	Perdidos	NS/NC	14	8,5		
Total			164	100,0		

Fuente: elaboración propia. Base cuestionario 2

Ilustración 10.13-64: Tipo de error en ítem 32

Ciclo Lectivo			Frecuencia	Porcentaje	Porcentaje válido	Porcentaje acumulado
2013-2014	Válidos	origen en la ausencia de sentido	110	73,8	99,1	99,1
		origen afectivo y/o emocional	1	,7	,9	100,0
		Total	111	74,5	100,0	
	Perdidos	No procede	38	25,5		
Total			149	100,0		
2014-2015	Válidos	origen en la ausencia de sentido	114	69,5	100,0	100,0
	Perdidos	No procede	50	30,5		
	Total			164	100,0	

Fuente: elaboración propia. Base cuestionario 2

Ilustración 10.13-65: Tabla Ítem 33

Ciclo Lectivo			Frecuencia	Porcentaje	Porcentaje válido	Porcentaje acumulado
2013-2014	Válidos	Error	112	75,2	78,3	78,3
		respuesta totalmente correcta	31	20,8	21,7	100,0
		Total	143	96,0	100,0	
	Perdidos	NS/NC	6	4,0		
	Total		149	100,0		
2014-2015	Válidos	Error	123	75,0	79,9	79,9
		respuesta totalmente correcta	31	18,9	20,1	100,0
		Total	154	93,9	100,0	
	Perdidos	NS/NC	10	6,1		
	Total		164	100,0		

Fuente: elaboración propia. Base cuestionario 2

Ilustración 10.13-66: Tipo de error en ítem 33

Ciclo Lectivo			Frecuencia	Porcentaje	Porcentaje válido	Porcentaje acumulado
2013-2014	Válidos	origen en la ausencia de sentido	111	74,5	99,1	99,1
		origen afectivo y/o emocional	1	,7	,9	100,0
	Total	112	75,2	100,0		
	Perdidos	No procede	37	24,8		
Total		149	100,0			
2014-2015	Válidos	origen en la ausencia de sentido	122	74,4	100,0	100,0
	Perdidos	No procede	42	25,6		
	Total		164	100,0		

Fuente: elaboración propia. Base cuestionario 2

Ilustración 10.13-67: Tabla Ítem 34

Ciclo Lectivo			Frecuencia	Porcentaje	Porcentaje válido	Porcentaje acumulado
2013-2014	Válidos	Error	38	25,5	26,6	26,6
		respuesta totalmente correcta	105	70,5	73,4	100,0
		Total	143	96,0	100,0	
	Perdidos	NS/NC	6	4,0		
	Total		149	100,0		
2014-2015	Válidos	Error	42	25,6	27,8	27,8
		respuesta totalmente correcta	109	66,5	72,2	100,0
		Total	151	92,1	100,0	
	Perdidos	NS/NC	13	7,9		
	Total		164	100,0		

Fuente: elaboración propia. Base cuestionario 2

Ilustración 10.13-68: Tipo de error en ítem 34

Ciclo Lectivo			Frecuencia	Porcentaje	Porcentaje válido	Porcentaje acumulado
2013-2014	Válidos	origen en la ausencia de sentido	36	24,2	94,7	94,7
		origen afectivo y/o emocional	2	1,3	5,3	100,0
	Total	38	25,5	100,0		
	Perdidos	No procede	111	74,5		
Total		149	100,0			
2014-2015	Válidos	origen en la ausencia de sentido	42	25,6	100,0	100,0
	Perdidos	No procede	122	74,4		
	Total		164	100,0		

Fuente: elaboración propia. Base cuestionario 2

Ilustración 10.13-69: Tabla Ítem 35

Ciclo Lectivo			Frecuencia	Porcentaje	Porcentaje válido	Porcentaje acumulado
2013-2014	Válidos	Error	53	35,6	40,2	40,2
		respuesta parcial	58	38,9	43,9	84,1
		respuesta totalmente correcta	21	14,1	15,9	100,0
		Total	132	88,6	100,0	
	Perdidos	NS/NC	17	11,4		
Total			149	100,0		
2014-2015	Válidos	Error	64	39,0	43,0	43,0
		respuesta parcial	25	15,2	16,8	59,7
		respuesta totalmente correcta	60	36,6	40,3	100,0
		Total	149	90,9	100,0	
	Perdidos	NS/NC	15	9,1		
Total			164	100,0		

Fuente: elaboración propia. Base cuestionario 2

Ilustración 10.13-70: Tipo de error en ítem 35

Ciclo Lectivo			Frecuencia	Porcentaje	Porcentaje válido	Porcentaje acumulado
2013-2014	Válidos	origen en la ausencia de sentido	51	34,2	96,2	96,2
		origen afectivo y/o emocional	2	1,3	3,8	100,0
		Total	53	35,6	100,0	
Perdidos		No procede	96	64,4		
Total			149	100,0		
2014-2015	Válidos	origen en la ausencia de sentido	63	38,4	98,4	98,4
		origen afectivo y/o emocional	1	,6	1,6	100,0
		Total	64	39,0	100,0	
Perdidos		No procede	100	61,0		
Total			164	100,0		

Fuente: elaboración propia. Base cuestionario 2

10.13.1.3. Resultados del proceso algebraico de modelización

A continuación presentamos los resultados de los ítems del proceso algebraico de modelización:

Ilustración 10.13-71: Tabla Ítem 36

Ciclo Lectivo			Frecuencia	Porcentaje	Porcentaje válido	Porcentaje acumulado
2013-2014	Válidos	Error	72	48,3	54,1	54,1
		respuesta parcial	1	,7	,8	54,9
		respuesta totalmente correcta	60	40,3	45,1	100,0
		Total	133	89,3	100,0	
	Perdidos	NS/NC	16	10,7		
Total			149	100,0		
2014-2015	Válidos	Error	64	39,0	44,4	44,4
		respuesta totalmente correcta	80	48,8	55,6	100,0
		Total	144	87,8	100,0	
		Perdidos	NS/NC	20	12,2	
	Total			164	100,0	

Fuente: elaboración propia. Base cuestionario 2

Ilustración 10.13-72: Tipo de error en ítem 36

Ciclo Lectivo			Frecuencia	Porcentaje	Porcentaje válido	Porcentaje acumulado
2013-2014	Válidos	origen en la ausencia de sentido	71	47,7	98,6	98,6
		origen afectivo y/o emocional	1	,7	1,4	100,0
		Total	72	48,3	100,0	
	Perdidos	No procede	77	51,7		
Total			149	100,0		
2014-2015	Válidos	origen en la ausencia de sentido	57	34,8	89,1	89,1
		origen afectivo y/o emocional	7	4,3	10,9	100,0
		Total	64	39,0	100,0	
	Perdidos	No procede	100	61,0		

Ciclo Lectivo			Frecuencia	Porcentaje	Porcentaje válido	Porcentaje acumulado
2013-2014	Válidos	origen en la ausencia de sentido	71	47,7	98,6	98,6
		origen afectivo y/o emocional	1	,7	1,4	100,0
		Total	72	48,3	100,0	
Perdidos	No procede	77	51,7			
Total			149	100,0		
2014-2015	Válidos	origen en la ausencia de sentido	57	34,8	89,1	89,1
		origen afectivo y/o emocional	7	4,3	10,9	100,0
		Total	64	39,0	100,0	
Perdidos	No procede	100	61,0			
Total			164	100,0		

Fuente: elaboración propia. Base cuestionario 2

Ilustración 10.13-73: Tabla Ítem 37

Ciclo Lectivo			Frecuencia	Porcentaje	Porcentaje válido	Porcentaje acumulado
2013-2014	Válidos	Error	93	62,4	66,4	66,4
		respuesta totalmente correcta	47	31,5	33,6	100,0
		Total	140	94,0	100,0	
Perdidos	NS/NC	9	6,0			
Total			149	100,0		
2014-2015	Válidos	Error	107	65,2	70,4	70,4
		respuesta parcial	1	,6	,7	71,1
		respuesta totalmente correcta	44	26,8	28,9	100,0
Total		152	92,7	100,0		
Perdidos	NS/NC	12	7,3			
Total			164	100,0		

Fuente: elaboración propia. Base cuestionario 2

Ilustración 10.13-74: Tipo de error en ítem 37

Ciclo Lectivo			Frecuencia	Porcentaje	Porcentaje válido	Porcentaje acumulado
---------------	--	--	------------	------------	-------------------	----------------------

2013- 2014	Válidos	origen en la ausencia de sentido	90	60,4	96,8	96,8
		origen afectivo y/o emocional	3	2,0	3,2	100,0
		Total	93	62,4	100,0	
	Perdidos	No procede	56	37,6		
	Total		149	100,0		
2014- 2015	Válidos	origen en la ausencia de sentido	101	61,6	94,4	94,4
		origen afectivo y/o emocional	6	3,7	5,6	100,0
		Total	107	65,2	100,0	
	Perdidos	No procede	57	34,8		
	Total		164	100,0		

Fuente: elaboración propia. Base cuestionario 2

Ilustración 10.13-75: Tabla Ítem 38

Ciclo Lectivo			Frecuencia	Porcentaje	Porcentaje válido	Porcentaje acumulado
2013-2014	Válidos	Error	81	54,4	71,1	71,1
		respuesta totalmente correcta	33	22,1	28,9	100,0
		Total	114	76,5	100,0	
	Perdidos	NS/NC	35	23,5		
	Total		149	100,0		
2014-2015	Válidos	Error	95	57,9	71,4	71,4
		respuesta totalmente correcta	38	23,2	28,6	100,0
		Total	133	81,1	100,0	
	Perdidos	NS/NC	31	18,9		
	Total		164	100,0		

Fuente: elaboración propia. Base cuestionario 2

Ilustración 10.13-76: Tipo de error en ítem 38

Ciclo Lectivo			Frecuencia	Porcentaje	Porcentaje válido	Porcentaje acumulado
2013-2014	Válidos	origen en la ausencia de sentido	76	51,0	93,8	93,8
		origen afectivo y/o emocional	5	3,4	6,2	100,0
		Total	81	54,4	100,0	
	Perdidos	No procede	68	45,6		
Total		149	100,0			
2014-2015	Válidos	origen en la ausencia de sentido	90	54,9	94,7	94,7
		origen afectivo y/o emocional	5	3,0	5,3	100,0
		Total	95	57,9	100,0	
	Perdidos	No procede	69	42,1		
Total		164	100,0			

Fuente: elaboración propia. Base cuestionario 2

Ilustración 10.13-77: Tabla Ítem 39

Ciclo Lectivo			Frecuencia	Porcentaje	Porcentaje válido	Porcentaje acumulado
2013-2014	Válidos	Error	74	49,7	57,8	57,8
		respuesta parcial	1	,7	,8	58,6
		respuesta totalmente correcta	53	35,6	41,4	100,0
		Total	128	85,9	100,0	
	Perdidos	NS/NC	21	14,1		
Total			149	100,0		
2014-2015	Válidos	Error	88	53,7	62,9	62,9
		respuesta totalmente correcta	52	31,7	37,1	100,0
		Total	140	85,4	100,0	
		Perdidos	NS/NC	24	14,6	
	Total			164	100,0	

Fuente: elaboración propia. Base cuestionario 2

Ilustración 10.13-78: Tipo de error en ítem 39

Ciclo Lectivo			Frecuencia	Porcentaje	Porcentaje válido	Porcentaje acumulado
2013-2014	Válidos	origen en la ausencia de sentido	70	47,0	94,6	94,6
		origen afectivo y/o emocional	4	2,7	5,4	100,0
		Total	74	49,7	100,0	
	Perdidos	No procede	75	50,3		
	Total			149	100,0	
2014-2015	Válidos	origen en la ausencia de sentido	78	47,6	87,6	87,6
		origen afectivo y/o emocional	11	6,7	12,4	100,0
		Total	89	54,3	100,0	
	Perdidos	No procede	75	45,7		
	Total			164	100,0	

Fuente: elaboración propia. Base cuestionario 2

13.2. Resultados de la prueba diagnóstica de funciones

Ilustración 10.13-79: Tabla ítem Crecer – Pregunta 1

Ciclo Lectivo			Frecuencia	Porcentaje	Porcentaje válido	Porcentaje acumulado
2013- 2014	Válidos	respuesta incorrecta	12	8,1	8,3	8,3
		respuesta correcta	133	89,3	91,7	100,0
	Total		145	97,3	100,0	
	Perdidos	NS/NC	4	2,7		
Total			149	100,0		
2014- 2015	Válidos	respuesta incorrecta	21	12,8	13,9	13,9
		respuesta correcta	130	79,3	86,1	100,0
	Total		151	92,1	100,0	
	Perdidos	NS/NC	13	7,9		
Total			164	100,0		

Fuente: elaboración propia. Base cuestionario 3

Ilustración 10.13-80: Tabla ítem Crecer – Pregunta 2

Ciclo Lectivo			Frecuencia	Porcentaje	Porcentaje válido	Porcentaje acumulado
2013- 2014	Válidos	respuesta incorrecta	34	22,8	23,9	23,9
		respuesta correcta de comparación de crecimiento	25	16,8	17,6	41,5
		respuesta correcta con lenguaje cotidiano	51	34,2	35,9	77,5
		respuesta correcta con lenguaje matemático	32	21,5	22,5	100,0
		Total	142	95,3	100,0	
Perdidos	NS/NC	7	4,7			
Total			149	100,0		
2014- 2015	Válidos	respuesta incorrecta	28	17,1	20,0	20,0
		respuesta correcta de comparación de crecimiento	10	6,1	7,1	27,1
		respuesta correcta con lenguaje cotidiano	57	34,8	40,7	67,9
		respuesta correcta con lenguaje matemático	45	27,4	32,1	100,0
		Total	140	85,4	100,0	
Perdidos	NS/NC	24	14,6			
Total			164	100,0		

Fuente: elaboración propia. Base cuestionario 3

Ilustración 10.13-81: Tabla ítem Crecer – Pregunta 3

Ciclo Lectivo			Frecuencia	Porcentaje	Porcentaje válido	Porcentaje acumulado
2013	Válidos	respuesta incorrecta	4	2,7	2,8	2,8
2014		respuesta correcta parcial (con subconjuntos de edades)	24	16,1	16,6	19,3
		respuesta correcta total con edades	3	2,0	2,1	21,4
		respuesta correcta total con intervalo de "11 a 13 años"	114	76,5	78,6	100,0
		Total	145	97,3	100,0	
	Perdidos	NS/NC	4	2,7		
		Total	149	100,0		
2014	Válidos	respuesta incorrecta	6	3,7	3,9	3,9
2015		respuesta correcta parcial (con subconjuntos de edades)	19	11,6	12,5	16,4
		respuesta correcta total con edades	5	3,0	3,3	19,7
		respuesta correcta total con intervalo de "11 a 13 años"	122	74,4	80,3	100,0
		Total	152	92,7	100,0	
	Perdidos	NS/NC	12	7,3		
		Total	164	100,0		

Fuente: elaboración propia. Base cuestionario 3

Ilustración 10.13-82: Tabla ítem Velocidad – Pregunta 1

Ciclo Lectivo			Frecuencia	Porcentaje	Porcentaje válido	Porcentaje acumulado
2013-	Válidos	respuesta incorrecta	17	11,4	11,6	11,6
2014		respuesta correcta	129	86,6	88,4	100,0
		Total	146	98,0	100,0	
	Perdidos	NS/NC	3	2,0		
		Total	149	100,0		
2014-	Válidos	respuesta incorrecta	22	13,4	14,9	14,9
2015		respuesta correcta	126	76,8	85,1	100,0
		Total	148	90,2	100,0	
	Perdidos	NS/NC	16	9,8		
		Total	164	100,0		

Fuente: elaboración propia. Base cuestionario 3

Ilustración 10.13-83: Tabla ítem Velocidad – Pregunta 2

Ciclo Lectivo			Frecuencia	Porcentaje	Porcentaje válido	Porcentaje acumulado
2013- 2014	Válidos	respuesta incorrecta	4	2,7	2,7	2,7
		respuesta correcta	142	95,3	97,3	100,0
		Total	146	98,0	100,0	
	Perdidos	NS/NC	3	2,0		
	Total		149	100,0		
2014- 2015	Válidos	respuesta incorrecta	1	,6	,7	,7
		respuesta correcta	146	89,0	99,3	100,0
		Total	147	89,6	100,0	
	Perdidos	NS/NC	17	10,4		
	Total		164	100,0		

Fuente: elaboración propia. Base cuestionario 3

Ilustración 10.13-84: Tabla ítem Velocidad – Pregunta 3

Ciclo Lectivo			Frecuencia	Porcentaje	Porcentaje válido	Porcentaje acumulado
2013- 2014	Válidos	respuesta incorrecta	6	4,0	4,1	4,1
		respuesta correcta	140	94,0	95,9	100,0
		Total	146	98,0	100,0	
	Perdidos	NS/NC	3	2,0		
	Total		149	100,0		
2014- 2015	Válidos	respuesta incorrecta	7	4,3	4,8	4,8
		respuesta correcta	140	85,4	95,2	100,0
		Total	147	89,6	100,0	
	Perdidos	NS/NC	17	10,4		
	Total		164	100,0		

Fuente: elaboración propia. Base cuestionario 3

Ilustración 10.13-85: Tabla ítem Velocidad – Pregunta 4

Ciclo Lectivo			Frecuencia	Porcentaje	Porcentaje válido	Porcentaje acumulado
2013- 2014	Válidos	respuesta incorrecta	73	49,0	50,0	50,0
		respuesta correcta	73	49,0	50,0	100,0
		Total	146	98,0	100,0	
	Perdidos	NS/NC	3	2,0		
	Total		149	100,0		
2014- 2015	Válidos	respuesta incorrecta	71	43,3	47,7	47,7
		respuesta correcta	78	47,6	52,3	100,0
		Total	149	90,9	100,0	
	Perdidos	NS/NC	15	9,1		
	Total		164	100,0		

Fuente: elaboración propia. Base cuestionario 3

Ilustración 10.13-86: Tabla ítem Coche – Pregunta 1

Ciclo Lectivo			Frecuencia	Porcentaje	Porcentaje válido	Porcentaje acumulado
2013- 2014	Válidos	respuesta incorrecta	7	4,7	4,8	4,8
		respuesta correcta	139	93,3	95,2	100,0
		Total	146	98,0	100,0	
	Perdidos	NS/NC	3	2,0		
	Total		149	100,0		
2014- 2015	Válidos	respuesta incorrecta	7	4,3	4,8	4,8
		respuesta correcta	139	84,8	95,2	100,0
		Total	146	89,0	100,0	
	Perdidos	NS/NC	18	11,0		
	Total		164	100,0		

Fuente: elaboración propia. Base cuestionario 3

Ilustración 10.13-87: Tabla ítem Coche – Pregunta 2

Ciclo Lectivo			Frecuencia	Porcentaje	Porcentaje válido	Porcentaje acumulado
2013- 2014	Válidos	respuesta incorrecta	53	35,6	37,1	37,1
		respuesta correcta	90	60,4	62,9	100,0
		Total	143	96,0	100,0	
	Perdidos	NS/NC	6	4,0		
	Total		149	100,0		
2014- 2015	Válidos	respuesta incorrecta	52	31,7	36,1	36,1
		respuesta correcta	92	56,1	63,9	100,0
		Total	144	87,8	100,0	
	Perdidos	NS/NC	20	12,2		
	Total		164	100,0		

Fuente: elaboración propia. Base cuestionario 3

Prueba de muestras independientes

		Prueba de Levene para la igualdad de varianzas		Prueba T para la igualdad de medias						
								95% Intervalo de confianza para la diferencia		
		F	Sig.	t	gl	Sig. (bilateral)	Diferencia de medias	Error típ. de la diferencia	Inferior	Superior
Notas Sustitución	Se han asumido varianzas iguales	1,560	,213	-1,339	304	,181	-,3291	,2457	-,8126	,1544
	No se han asumido varianzas iguales			-1,335	296,736	,183	-,3291	,2465	-,8141	,1559
Notas Generalización	Se han asumido varianzas iguales	,102	,750	-1,268	305	,206	-,2439	,1924	-,6226	,1347
	No se han asumido varianzas iguales			-1,265	300,572	,207	-,2439	,1928	-,6233	,1354
Notas Modelización	Se han asumido varianzas iguales	,562	,454	,028	298	,978	,0106	,3777	-,7327	,7540
	No se han asumido varianzas iguales			,028	297,886	,977	,0106	,3764	-,7301	,7514
Notas Total de Álgebra	Se han asumido varianzas iguales	1,344	,247	-1,621	305	,106	-,2834	,1749	-,6275	,0607
	No se han asumido varianzas iguales			-1,614	295,305	,108	-,2834	,1756	-,6289	,0621
Notas Funciones	Se han asumido varianzas iguales	7,757	,006	,398	298	,691	,0793	,1994	-,3131	,4717
	No se han asumido varianzas iguales			,401	275,825	,689	,0793	,1976	-,3098	,4684
Notas Total de las Pruebas	Se han asumido varianzas iguales	,059	,808	-,992	307	,322	-,1654	,1667	-,4935	,1627
	No se han asumido varianzas iguales			-,992	304,968	,322	-,1654	,1668	-,4937	,1628

ANEXO 14: ILUSTRACIONES DE LOS RESULTADOS DE LOS CUESTIONARIOS DE AUTOEVALUACIÓN ONLINE

10.14.1. Resultados de las tres primeras preguntas de los cuestionarios online de los alumnos de la muestra

Los resultados que exponemos a continuación muestran las respuestas de los ocho alumnos de la muestra de las tres primeras preguntas de cada cuestionario. Se ha resaltado con verde las que están correctamente respondidas y con rojo, las que no.

Ilustración 10.14-1: Resultados de las primeras tres preguntas del Cuestionario 1 de autoevaluación de los 8 alumnos de la muestra.

Nombre	Una función es:	La función $f(x)=x - 4$ se puede expresar de forma	¿Qué pregunta interesante se ocurre sobre el tema visto?
Marc	Una correspondencia entre elementos de dos conjuntos.	de las tres formas mencionadas anteriormente	¿Puede haber más de una función en una misma gráfica? ¿Una función puede empezar recta y acabar curvada? ¿Qué diferencia hay entre una función mirando hacia arriba y otra hacia abajo?
Karla	Una relación donde a cada elemento del primer conjunto le corresponde uno o más elementos del segundo conjunto.	de las tres formas mencionadas anteriormente	no tinc cap pregunta
MariaB	Ninguna de las dos opciones anteriores es correcta.	de las tres formas mencionadas anteriormente	Ninguna, en principio queda todo claro.
Santi	Ninguna de las dos opciones anteriores es correcta.	de las tres formas mencionadas anteriormente	¿Podríamos obtener la fórmula numérica de una función a partir de la tabla de valores? En el caso de que el corazón que aparece en el vídeo solo apareciera la parte de arriba, se podría decir que es una función?
Alejandro	Una correspondencia entre elementos de dos conjuntos.	de las tres formas mencionadas anteriormente	¿En una función de polinomios, es posible que dos elementos del conjunto X por ejemplo, correspondan al conjunto Y?
Javier	Una relación donde a cada elemento del primer conjunto le corresponde uno o más elementos del segundo conjunto.	de las tres formas mencionadas anteriormente	¿Qué tipo de variables son las que influyen en una función que expresa una operación económica y/o empresarial? ¿Son siempre las mismas?
Núria	Una correspondencia entre elementos de dos conjuntos.	de las tres formas mencionadas anteriormente	No tengo ninguna pregunta, lo he entendido todo.

MariaF	Ninguna de las dos opciones anteriores es correcta.	de las tres formas mencionadas anteriormente	¿Por qué el conjunto B puede tener más de un elemento del conjunto A y no al revés? Es decir, que a A solo le puede corresponder uno y a B no.
---------------	---	--	--

Fuente: De elaboración propia a partir del Cuestionario 1 de autoevaluación de los 8 alumnos de la muestra

Ilustración 10.14-2: Resultados de las primeras tres preguntas del Cuestionario 2 de autoevaluación de los 8 alumnos de la muestra.

Nombre	El dominio de una función real de variable real está formado por:	La función $f(x) = \frac{(x - 4)}{(x + 2)}$	¿Qué pregunta interesante se te ocurre sobre el tema visto?
Marc	El conjunto de los números reales	Tiene Dom(f)=R-{-2}	¿Hay más tipos de funciones a parte de estas?
Karla	El conjunto de los números reales	Ninguna de las tres opciones anteriores es correcta	ninguna
MariaB	El conjunto de los números reales	Tiene Dom(f)=R-{-2}	que pasa con los conjuntos a los que no puedo aplicar la función?
Santi	El conjunto de los números reales	Tiene Dom(f)=R-{-2}	¿Se podría saber mediante la imagen y el dominio cual ha sido la fórmula de la función utilizada? Una función podría tener diferentes números que no formen parte del dominio como por ejemplo 2 y 3?
Alejandro	Las dos opciones son correctas	Tiene Dom(f)=R-{-2}	¿Cuál sería el dominio de una función irracional cuyos valores de x o y o ambas sean negativos?
Javier	El conjunto de los números reales	Tiene Dom(f)=R-{-2}	-
Núria	Las dos opciones son correctas	Tiene Dom(f)=R-{-2}	Tengo una duda. ¿Al hacer el dominio de la función fraccionaria, si el numerador da 0 también entra en el dominio? Sí, verdad? Por ejemplo $f(x) = \frac{(3-x)}{(x-1)}$ El uno no está en el dominio, y el 3 lo estaría?
MariaF	El conjunto de los números reales	Tiene Dom(f)=R-{-2}	¿Por qué cuando hemos hablado de las funciones con raíces al principio del vídeo no hemos tenido en cuenta las respuestas de números negativos?

Fuente: De elaboración propia a partir del Cuestionario 2 de autoevaluación de los 8 alumnos de la muestra

Ilustración 10.14-3: Resultados de las primeras tres preguntas del Cuestionario 3 de autoevaluación de los 8 alumnos de la muestra.

Nombre	La suma de las funciones $f(x) = x + 5$ y $g(x) = x - 10$	El dominio de la división de las funciones $f(x) = x + 5$ y $g(x) = x - 10$ es:	¿Qué pregunta interesante se te ocurre sobre el tema visto?
Marc	Tiene Dom(f)=R	El conjunto de los números reales excepto cuando $x=10$	¿Estos procedimientos se aplican de la misma manera con raíces?
Karla	Tiene Dom(f)=R	El conjunto de los números reales excepto cuando $x=10$	Cuando la división está elevada al cuadrado también se ha de hacer una operación cuadrática para encontrar el valor donde sea 0?
MariaB	Tiene Dom(f)=R	El conjunto de los números reales excepto cuando $x=10$	Ninguna, queda todo muy claro
Santi	Tiene Dom(f)=R	El conjunto de los números reales excepto cuando $x=10$	¿Hay algún caso en que el dominio del resultado sea diferente al dominio de alguna de las funciones que componen la operación?
Alejandro	Tiene Dom(f)=R	El conjunto de los números reales excepto cuando $x=10$	¿Cómo calculamos la intersección de una función polinómica y una irracional?
Javier	Tiene Dom(f)=R	El conjunto de los números reales excepto cuando $x=10$	-
Núria	Tiene Dom(f)=R	El conjunto de los números reales excepto cuando $x=10$	No, ninguna, me ha quedado todo claro.
MariaF	Tiene Dom(f)=R	El conjunto de los números reales excepto cuando $x=10$	No se me ocurre ninguna

Fuente: De elaboración propia a partir del Cuestionario 3 de autoevaluación de los 8 alumnos de la muestra

Ilustración 10.14-4: Resultados de las primeras tres preguntas del Cuestionario 4 de autoevaluación de los 8 alumnos de la muestra.

Nombre	Si realizamos la composición $f \circ g(x)$, donde $f(x) = x + 4$ y $g(x) = \text{sqrt}(x)$, (sqrt (square root) es igual a raíz cuadrada)	El dominio de la $f \circ g(x)$, si $f(x) = 6 - x$ y $g(x) = \text{sqrt}(x)$ es:	¿Qué pregunta interesante se te ocurre sobre el tema visto?
Marc	El resultado será diferente a si componemos $\text{gof}(x)$	El conjunto de los números reales excepto cuando $x=6$	¿Si tenemos una función que tiene una raíz cúbica, se sigue el mismo procedimiento?
Karla	El resultado será diferente a si componemos $\text{gof}(x)$	El conjunto de los números reales excepto cuando $x=6$	Podemos llegar a tener una operación donde no haya resultado?
MariaB	El resultado será diferente a si componemos $\text{gof}(x)$	Ninguna de las opciones anteriores es correcta	en el caso que el dominio de la segunda no estuviese incluido en la primera, que pasaría
Santi	El resultado será diferente a si componemos $\text{gof}(x)$	El conjunto de los números reales excepto cuando $x=6$	¿Se podría hacer una composición de 4 funciones pero separadas de dos en dos y luego unir las?
Alejandro	El resultado será diferente a si componemos $\text{gof}(x)$	Ninguna de las opciones anteriores es correcta	Cuando aplicamos 3 funciones, si por ejemplo tenemos x^3 , y luego le aplicamos $x+1$, nos queda $x^3 + 1$, entonces ¿por qué cuando le aplicamos la última función, (que sería raíz de x), le aplicamos la raíz a todo el conjunto ($x^3 + 1$) y no solo a x^3 ?
Javier	El resultado será diferente a si componemos $\text{gof}(x)$	El conjunto de los números reales excepto cuando $x=6$	¿Puedes hacer una composición de funciones tan grande como quieras? Ej: $f \cdot g \cdot h \cdot k \dots(x)$
Núria	El resultado será diferente a si componemos $\text{gof}(x)$	Ninguna de las opciones anteriores es correcta	Ninguna, me ha quedado todo claro.
MariaF	El resultado será diferente a si componemos $\text{gof}(x)$	Ninguna de las opciones anteriores es correcta	¿Hay algún máximo de funciones compuestas que se pueda hacer?

Fuente: De elaboración propia a partir del Cuestionario 4 de autoevaluación de los 8 alumnos de la muestra

Ilustración 10.14-5: Resultados de las primeras tres preguntas del Cuestionario 5 de autoevaluación de los 8 alumnos de la muestra.

Nombre	Dada la función $f(x) = x - 4$:	La imagen de la función $f(x) = \frac{(x-3)}{(x+2)}$ es:	¿Qué pregunta interesante se te ocurre sobre el tema visto?
Marc	Su función inversa es $g(x) = 1/x-4$	Ninguna de las opciones anteriores es correcta	¿Hay más de un procedimiento de hacer la función inversa?
Karla	Su función inversa es $g(x) = 1/x-4$	El conjunto de los números reales más grandes o iguales que 3	¿El resultado para comprobar si una función es inversa a otro tiene que dar el mismo a la primera o diferente?
MariaB	Ninguna de las respuestas anteriores es correcta	Ninguna de las opciones anteriores es correcta	ninguno
Santi	Su función inversa es $g(x) = 1/(x-4)$	Ninguna de las opciones anteriores es correcta	¿Porque la función identidad es siempre una línea recta donde $x=y$?
Alejandro	Ninguna de las respuestas anteriores es correcta	El conjunto de los números reales excepto cuando $x=1$	¿si la imagen de $(f) =$ al dominio de $(f-1)$, entonces el dominio de $(f) = a$ la imagen de $(f-1)$?
Javier	Ninguna de las respuestas anteriores es correcta	El conjunto de los números reales	-
Núria	Ninguna de las respuestas anteriores es correcta	El conjunto de los números reales excepto cuando $x=1$	Ninguna.
MariaF	Su función inversa es $g(x) = 1/(x-4)$	Ninguna de las opciones anteriores es correcta	¿Siempre que se representen gráficamente la bisectriz va a ser por el mismo cuadrante?

Fuente: De elaboración propia a partir del Cuestionario 5 de autoevaluación de los 8 alumnos de la muestra.

Ilustración 10.14-6: Resultados de las primeras tres preguntas del Cuestionario 6 de autoevaluación de los 8 alumnos de la muestra.

Nombre	Todas las funciones son simétricas, algunas pares y el resto impares	La función $f(x) = \frac{(x-3)}{(x+2)}$ es:	¿Qué pregunta interesante se te ocurre sobre el tema visto?
Marc	No	No tiene simetría	¿La simetría se puede ver con el eje x?
Karla	No	No tiene simetría	.
MariaB	No	No tiene simetría	¿Para ser simétrica tiene que serlo toda la gráfica? ¿En el caso que tuviésemos una de las partes de la gráfica simétricas, podemos considerar que parte de la función es simétrica? ¿O por lo contrario para ser simétrica tiene que serlo toda la función?
Santi	No	No tiene simetría	¿Existe alguna función con dos simetrías diferentes?
Alejandro	No	No tiene simetría	No me queda del todo claro cómo saber si una función impar, dado que con x elevado a la 2 es fácil pero con funciones más complejas no sabría cómo seguir el criterio de los signos negativos.
Javier	No	No tiene simetría	¿Con qué frecuencia nos encontramos con funciones simétricas en el día a día? ¿Las encontramos en algún caso muy específico?
Núria	No	No tiene simetría	ninguna
MariaF	No	No tiene simetría	¿Las fracciones fraccionarias también siguen la norma de que las pares tienen la x elevada a números pares y las impares elevadas a números impares?

Fuente: De elaboración propia a partir del Cuestionario 6 de autoevaluación de los 8 alumnos de la muestra

Ilustración 10.14-7: Resultados de las primeras tres preguntas del Cuestionario 7 de autoevaluación de los 8 alumnos de la muestra.

Nombre	¿Una función continua puede tener asíntota/s vertical/es?	Una función polinómica de grado 2 puede ser periódica	¿Qué pregunta interesante se te ocurre sobre el tema visto?
Marc	No	Si	¿Da igual donde se empieza cuando se levanta el lápiz de las discontinuas?
Karla	Si	Si	nada
MariaB	-	-	-
Santi	No	No	¿Una función puede contener periodicidad alternante, es decir que contiene dos tipos de periodicidad que se van alternando?
Alejandro	No	Si	¿Podríamos encontrar más de tres asíntotas en una misma función?
Javier	Si	Si	-
Núria	-	-	-
MariaF	No	Si	¿Puede haber a la vez una asíntota oblicua con una horizontal o vertical?

Fuente: De elaboración propia a partir del Cuestionario 7 de autoevaluación de los 8 alumnos de la muestra.

Ilustración 10.14-8: Resultados de las primeras tres preguntas del Cuestionario 8 de autoevaluación de los 8 alumnos de la muestra.

Nombre	Dada una función continua, el punto donde la función pasa de ser creciente a decreciente, se denomina	Una función polinómica de grado 2:	¿Qué pregunta interesante se te ocurre sobre el tema visto?
Marc	Punto de inflexión	Ninguna de las opciones anteriores es correcta	¿Puede haber más de un máximo absoluto?
Karla	Máximo relativo	Es cóncava si el coeficiente del término de segundo grado es negativo	Siempre el punto de inflexión tiene que estar en la recta "y"?
MariaB	Máximo relativo	Nunca tiene punto de inflexión	ninguna
Santi	Máximo relativo	Nunca tiene punto de inflexión	¿Si una función tiene dos mínimos que son iguales, cual es el máximo y cuál es el mínimo absoluto?
Alejandro	Punto de inflexión	Ninguna de las opciones anteriores es correcta	¿Una función continua puede ser vertical, no solo horizontal?
Javier	Máximo relativo	Ninguna de las opciones anteriores es correcta	-
Núria	Máximo relativo	Ninguna de las opciones anteriores es correcta	Ninguna
MariaF	Máximo relativo	Ninguna de las opciones anteriores es correcta	¿En las funciones que tienden al infinito como podemos decir cuál es el máximo o mínimo absoluto?

Fuente: De elaboración propia a partir del Cuestionario 8 de autoevaluación de los 8 alumnos de la muestra

