UNIVERSITAT POLITÈCNICA
DE CATALUNYA
BARCELONATECH

Contribució a l'estudi dels conjunts extensionals de les relacions d'indistingibilitat i la seva aplicació a la representació d'imatges de ressonància magnètica

una dissertació presentada per

Gabriel Mattioli Aramburu

i dirigida per

Dr. J. Recasens & Dr. F.X. Aymerich

pel títol de Doctor
en el programa de doctorat de
Enginyeria Biomèdica

Universitat Politècnica de Catalunya
Barcelona, Gener 2016

Para ti papá, por estar siempre ahí.

Agraïments

Aquesta tesi doctoral mai hauria pogut ser finalitzada sense l'ajut de moltes persones que han acompanyat l'autor en aquest camí. A totes elles vull mostrar el meu agraïment per la paciència, el suport, la companyia, el lideratge i l'empenta que han mostrat.

A tots els meus amics, familiars i gent propera en general que s'han interessat en l'esdevenir d'aquesta tesi. En especial a tots aquells que han mostrat un interès explícit en entendre els resultats i conclusions que proposo en aquest treball. Einstein deia que si una cosa no la saps explicar a un familiar no expert aleshores no l'entens prou bé. Gràcies a la gent que ha volgut entendre les idees d'aquesta recerca he pogut entendre jo també millor la selva en la que m'he endinsat.

M'agradaria fer menció personal a una sèrie de persones i institucions que han tingut una especial rellevància i paper en aquest treball.

Al Dr. Dionís Boixader, que va ser un far quan jo era un jove titulat en Matemàtiques que em va convidar a acostar-me a una terra nova. I avui ja no només segueix sent per a mi un referent sinó també un company i amic.

Al Dr. Jordi Recasens, que em va agafar de la ma quan el meu vaixell va atracar i em va mostrar les meravelles que hi havia amagades a la nova illa. El seu ajut i suport ha estat inestimable en totes les fases de la realització d'aquesta tesi.

Al Dr. Eduard Montseny, que només ha aportat coses bones a aquest treball. Des de les dificultats ha estat sempre interessat en entendre les idees darrera dels resultats i en un número molt petit de reunions m'ha entès com a persona i com a treballador amb molta profunditat.

A la Dra. Maria Congost. La qualitat del treball d'un investigador depèn en gran mesura del seu entorn de treball. Malgrat no fer recerca activa, la Maria ha estat tot aquest temps l'ànima del meu despatx, que ha il·luminat amb la seva natural alegria. La docència també és un aprenentatge que s'ha de fer com a doctorand, i en aquesta faceta la Maria m'ha aportat moltíssimes taules. I quasi sempre era ella qui tenia bé els exercicis quan els comparàvem, però no sempre.

Al Dr. Didier Dubois i al Dr. Radko Mesiar, per acollir-me en les meves estades de Toulouse i Bratislava respectivament i ensenyar-me tantes altres coses diferents. Merci beaucoup Didier. Ďakujem Radko.

A la Dra. Maria Zmidalova i al Dr. Tomas Bacigal per tractar-me com un amic i fer-me sentir com a casa en les llunyanes, plujoses i precioses terres eslovaques. Va ser durant aquesta estada i amb el seu acompanyament que es va realitzar més de la meitat de la memòria escrita d'aquesta tesi.

Al meu pare, per tantes coses que no sé ni per on començar. Gràcies especialment per mostrar-me tantes portes i ajudar-me a creuar-ne tantes altres quan m'ha costat.

Al Dr. Marçal Capdevila, el meu amic. Per ser el meu doctorand referent i ajudar-me en totes les fases de l'etapa de becari i professor des de la seva recent experiència.

Al Pol Camps i a la Marta Arbolí, per ajudar-me a aconseguir imatges i aconsellar-me en la vessant mèdica del treball.

M'agradaria també fer un agraïment específic a algunes institucions que m'han finançat i ajudat en la meva formació i treball.

A la Universitat Politècnica de Catalunya, per finançar-me a través del seu programa de beques i donar l'oportunitat a joves investigadors, com jo, d'explorar els límits de l'inexplorat i trepitjar terres que ningú ha trepitjat abans.

I acknowledge the SAIA institution, funded by the National Scholarship Programme of the Slovak Government for funding my stay there, and for investing in the international Exchange of Young researchers. It is crucial in the growing of young researchers to travel abroad and learn other cultures, ideas and methodologies.

A la Universitat de Barcelona, per la formació rebuda.

Al diari El País, per la seva aposta en editar la col·lecció "Grandes Ideas de la Ciencia". La ciència ha de servir per a que tothom entengui més el món on vivim. El País, fent aquesta lloable aposta, també m'ha servit per aprendre, qüestionar-me coses i complementar les meves idees.

I segur que resta gent a qui injustament no estic fent menció explícita en aquests agraïments. Tot treball científic té un autor principal, però una gran quantitat de gent que l'ha fet possible amb la seva participació en tots els sentits. A tots els que heu estat allà, amb mi, gràcies.

Índex de continguts

Índex de figures

0. Introducció

D'acord amb Freeman Dyson [35] en el món hi ha dos tipus de matemàtics: Ocells i Granotes (birds and frogs en la versió anglesa original i on les granotes no pateixen la imatge pejorativa que se'ls dóna en la nostra llengua).

Els ocells viuen a l'aire i volen alt, on veuen molts paisatges i com el bosc i el riu i la muntanya i el desert formen un continu malgrat la seva diferència. Els ocells entenen la connexió entre diverses estructures, donen idees que uneixen paradigmes i aporten solucions per a problemes d'un camp basades en conceptes d'un altre. Els ocells veuen lluny.

Les granotes viuen a la terra i es submergeixen en el fang i el riu. Les granotes coneixen els insectes, les flors i l'herba prop de la seva bassa i formen un tot amb ells. Les granotes aprofundeixen en els problemes del seu propi camp, entenen la riquesa més amagada de les estructures amb què treballen i s'entretenen en els detalls i propietats dels objectes que els són propers. Les granotes veuen profund.

D'acord amb Freeman Dyson, és un absurd afirmar que els ocells són superiors a les granotes o viceversa, les Matemàtiques són alhora vastes i profundes i calen les dues visions per explorar aquest estrany, sorprenent i ric món.

En l'opinió de l'autor d'aquesta tesi, Freeman Dyson té raó en la seva anàlisi i conclusions i continua tenint-la si es canvia la paraula Matemàtiques per Ciència, i es considera aquest món encara més estrany, sorprenent i ric.

La tesi que aquí s'introdueix és un estudi d'ocell fonamentat en resultats de granotes. En cap cas es pretén amb aquesta afirmació donar a entendre que és un estudi superior al d'ocells o granotes per ser més complet i veure alhora lluny i profund. Això seria pretensiós i fals. El que sí que pretén mostrar aquesta representació visual és el caràcter interdisciplinari d'aquesta tesi, que recollirà resultats de granotes d'una bassa per a il·lustrar com aquests poden ajudar les granotes d'una altra d'acord amb la interpretació d'un ocell.

0.1 Motivació

Aquesta tesi neix en una reunió entre els principals membres de dos grups de recerca:

En un costat de la taula es trobaven els Drs Jordi Recasens i Dionís Boixader, líders d'un grup de recerca amb despatx a l'ETSAV de Sant Cugat i amb una llarga trajectòria en l'estudi teòric de relacions difuses, i en concret de relacions d'equivalència difuses o indistingibilitats. Aquest grup de recerca ha estat íntimament lligat (tant en l'àmbit personal com professional) amb investigadors locals de reputació internacional en l'àmbit com Joan Jacas, Claudi Alsina, Francesc Esteva, Lluís Godo o Enric Trillas.

A l'altre costat de la taula s'asseien els principals investigadors del Grup de recerca en Intel·ligència Computacional per l'Anàlisi d'Imatges Biomèdiques (ICAIB) de la UPC, liderat pel Drs Eduard Montseny. Aquest grup destaca per la seva experiència en l'aplicació de la lògica difusa a aplicacions mèdiques [6] [7], havent treballat i publicat amb investigadors de reconegut prestigi, com Jim Bezdek o James Keller i havent realitzat projectes en institucions mèdiques de prestigi internacional.

El primer grup venia preocupat per la dificultat de reflectir els darrers avenços teòrics en aplicacions pràctiques útils. Un debat intern recurrent era sobre la mancança de sortida aplicada dels resultats i les esperances que la lògica difusa teòrica de avantvanguarda semblava suggerir. El segon, tot i la seva trajectòria en aplicacions d'algoritmes i mètodos difusos a problemes biomèdics, no aconseguia trobar el camí per aprofitar la profunditat d'alguns dels conceptes teòrics recentment desenvolupats i en els que veia potencial per a possibles aplicacions interessants.

En aquella reunió van veure que les seves inquietuds eren complementàries i van decidir col·laborar en un repte comú: Obrir una tesi doctoral que servís de pont entre les dues disciplines, desenvolupar un marc teòric al voltant de les relacions d'indistingibilitat amb potencial aplicatiu en problemes pràctics d'imatge mèdica.

Aquest repte del 2010 és el que ha acabat esdevenint la tesi doctoral que aquí es presenta. Però per arribar a aquest punt encara hi havia molt camí a recórrer; mentre aquesta reunió succeïa el que n'ha acabat sent l'autor encara no havia completat els seus estudis superiors de la Llicenciatura de Matemàtiques.

La gènesi d'aquesta tesi n'explica diverses coses:

Per començar, la codirecció entre el Dr Jordi Recasens i els Drs Eduard Montseny en primer lloc i Xavier Aymerich més endavant (i codirector final). L'ajut del primer ha estat inestimable per a desenvolupar el marc teòric que es presenta, l'ajut dels darrers ha estat importantíssim per a bolcar els resultats trobats en una proposta d'aplicació biomèdica pràctica.

Per altra banda explica la transdisciplinarietat d'aquest treball. Una metàfora recorrent de l'autor per a entendre el treball a realitzar és que hi havia un riu que separava dues terres. L'objectiu de la tesi era construir un pont que les unís. Per a construir un pont sobre un riu cal tenir un pilar fort a banda i banda del riu per a suportar el pes de l'estructura, però el pont en sí no pertany ni a una terra ni a l'altra. Aquesta tesi ha necessitat un pilar fort en el terreny de la lògica difusa i un altre en el camp de la neuroimatge, però difícilment pot ser catalogada com a tesi eminentment matemàtica o biomèdica. Cal fer un esforç de generalització per a entendre que les dues vores d'un riu són, en una escala més amplia, una mateixa terra per a poder construir un pont harmònic.

Fruit de la reunió es va obrir un projecte de tesi doctoral que eventualment va ser concedit el novembre de 2010 al que finalment n'ha estat l'autor.

Durant els dos primers anys, la principal ocupació del doctorand va ser completar els seus estudis de Màster en Intel·ligència Artificial, a la UPC, UB i URV. Aquests estudis, malgrat no tenir una incidència directa en la concreció d'aquesta tesi, van ser molt importants ja que van permetre l'autor fer una transició suau i generalista d'una disciplina purament teòrica i especulativa com les matemàtiques a un context més ample on la teoria és important però també ho és la metodologia, l'aplicabilitat, la implementació, el testeig, ... És durant aquests dos primers anys quan va es va desenvolupar el nucli del marc teòric d'aquesta tesi i que es concreta en els capítols 2 i 3 d'aquesta memòria escrita.

Els darrers dos anys, ja sense càrrega acadèmica més enllà de la lectiva, han servit per a projectar aquest marc teòric en contextos aplicats. És important assenyalar que gran part de les idees que sustenten algunes de les bigues transversals d'aquest pont han estat gestades i desenvolupades a les estades a l'IRIT de Toulouse (maig

- juny 2013) amb el Dr Didier Dubois i a la STU de Bratislava (abril - juliol 2014) amb el Dr Radko Mesiar.

Específicament, el capítol 1 (Why fuzzy?) deu gran part de les seves reflexions i referències a les discussions mantingudes amb el Dr Dubois a l'estada a l'IRIT. Va ser en aquests debats (que transcendien l'àmbit de recerca d'aquest treball, variant des de l'essència de l'home en un context capitalista a què és real i què és artificial: el discret o el continu?) on l'autor va començar a entendre que qualsevol investigació transdisciplinar ha de començar per qüestionar-se la validesa de les pròpies hipòtesis, i que és precisament en aquest detall epistèmic on resideix la major aportació de la lògica difusa i els fuzzy sets. Aquestes idees es reflecteixen especialment al subcapítol 1.4.1.

L'estada a la STU a Bratislava ha tingut un triple impacte en aquesta tesi. Per una banda ha introduït l'autor en camps de la lògica difusa on, tot i portar tres anys realitzant la tesi doctoral, encara no hi havia pensat mai. Per una altra, gairebé la meitat d'aquesta memòria escrita va ser completada, en la seva versió inicial, allà. Per últim, i més rellevant des d'un punt de vista científic, tot el capítol 4 d'aquesta tesi, on s'explica com es pot interpretar en termes borrosos qualsevol model científic va ser plenament desenvolupat durant aquesta estada. Aquesta (re)interpretació és la clau de volta que articula el pont, és el que permet utilitzar objectes de la teoria d'indistingibilitats en problemes de neuroimatge, com a cas particular de la categoria de models científics.

Finalment, durant el darrer any de realització de la tesi s'ha completat la proposta d'aplicació del marc teòric en imatge mèdica. Quan es va orientar aquesta part cap al tractament de neuroimatge, a principis del 2014, va incorporar-se al projecte el Dr Xavier Aymerich, primer com a assessor expert en aquest camp i posteriorment com a codirector oficial de la tesi substituint el Dr Eduard Montseny. La seva expertesa en la matèria ha estat molt important en primer lloc per a introduir l'autor en una disciplina on no tenia cap experiència ni coneixement i en segon lloc per aportar rigor al treball realitzat des de la posició de director.

On acaba la història comença el present, que és el treball que el lector té a les seves mans. En ell s'ha intentat completar el pont que va ser encarregat el 2010 i construir un marc on la lògica difusa teòrica avançada sigui aplicable a problemes d'imatge biomèdica.

Els maons per a fer-ho han estat els conjunts extensionals, que representen allò observable per un sistema perceptiu (ja sigui un ull, un sensor, una càmera...). Raonada en sentit invers, l'argumentació que estructura aquesta tesi és:

Si volem inferir de forma automatitzada sobre una imatge mèdica de la que disposem un model, cal que l'agent que desenvolupem sigui capaç de veure el resultat desitjat. És a dir, la solució bona ha de ser observable. La lògica difusa ens permet identificar aquesta condició discursiva i lleugerament etèria d'observabilitat d'un agent amb una condició fàctica i imposable d'extensionalitat de conjunts, sota la hipòtesi raonable que la percepció de la realitat introdueix una relació d'indistingibilitat a l'univers de discurs. Demanar l'observabilitat de la solució bona no és ni trivial ni irrellevant, ja que qualsevol agent projecta la realitat externa a través de la percepció en algun sistema de representació intern que, per la pròpia naturalesa de la representació, és reduccionista i inexacte.

Com s'explica al final del capítol 5, en un sentit aplicat, el treball realitzat constitueix tan sols una proposta. El marc que s'ha desenvolupat planta les bases per a eventuals aplicacions futures on conceptes com les indistingibilitats, els conjunts extensionals, les aproximacions extensionals i d'altres puguin ser objectes tan naturals i útils per a la inferència amb neuroimatge com els atles, els histogrames i els p-valors.

0.2 Objectius

Aquesta tesi té un objectiu principal:

- **Desenvolupar un marc teòric que representi una aportació a la representació i tractament de la vaguetat en imatge mèdica**

  L'objectiu és desenvolupar una proposta d'aplicació en el si de la teoria d'indistingibilitats que aporti noves idees, interpretacions i/o mètodes a problemes actuals del camp de la neuroimatge. Construir un marc on a través de les indistingibilitats i objectes teòrics associats la incertesa pugui ser més efectivament controlada, reduïda o compresa.

Aquest objectiu principal es concreta en els següents objectius secundaris:

1. **Estudi de les fonts d'incertesa en un context general i en un context mèdic**

   Anàlisi de quina pot ser l'aportació de la lògica difusa al tractament de la incertesa, en particular en un context biomèdic. Estudi de les diferents fonts d'incertesa i vaguetat en el procés epistèmic i cognitiu i dels avantatges i limitacions que té un enfoc difús per a representar-les.

2. **Aprofundiment en l'estudi de la relació entre les relacions d'indistingibilitats, els conjunts difusos extensionals i altres objectes associats**

   Estudi de l'estructura i la interrelació estructural dels conjunts d'indistingibilitats, famílies de conjunts extensionals i altres objectes relacionats, tant en un univers de discurs finit com infinit i considerant diferents operadors d'agregació.

3. **Desenvolupament de nous mètodes d'aproximació de conjunts difusos arbitraris per extensionals**

   Un problema obert a la literatura és el de trobar el conjunt difús extensional que millor aproxima un conjunt qualsevol. En aquesta tesi es desenvolupen diversos mètodes d'aproximació, que milloren els de la literatura, per a t-normes arquimedianes i no arquimedianes tant en un univers de discurs finit com infinit.

4. **Desenvolupament i justificació d'una reinterpretació sòlida de models científics en termes de conjunts extensionals**

   Estudi, disseny i justificació d'un marc de reinterpretació de models científics en termes de conjunts difusos extensionals, relacions d'indistingibilitat i altres conceptes associats.

5. **Aplicació del camp desenvolupat a la representació de la incertesa i la**

informació en neuroimatge MRI

Aplicació del marc construït al cas particular de models anatòmics cerebrals en imatges de ressonància magnètica. Desenvolupament d'una proposta d'aplicació de la reinterpretació proposada en un problema del camp.

0.3 Estructura de la tesi

La tesi està estructurada en cinc capítols que es corresponen seqüencialment amb els objectius secundaris prèviament exposats d'aquesta tesi.

Al capítol 1, titulat "Why Fuzzy?" es planteja la qüestió de la incertesa inherent al procés d'adquisició de coneixement o epistèmic. Es distingeixen diferents fonts d'incertesa i vaguetat i com aquestes poden ser de naturalesa molt diferent. En la mateixa línia es valora què aporta la lògica difusa al tractament d'aquestes diverses incerteses i quines limitacions té, i es compara amb altres teories de la incertesa com la probabilitat el la línia d'un intens debat sostingut a la comunitat científica en les dècades dels 80 i 90. S'estudien en darrer terme les característiques pròpies del raonament mèdic i la conveniència o no d'introduir-hi mètodes difusos.

El capítol 2 té per títol "Operadors d'indistingibilitat i isomorfismes fonamentals". En aquest capítol es donen els preliminars bàsics en lògica difusa necessaris per a la construcció del marc teòric subseqüent i s'estudia l'estructura d'alguns dels objectes fonamentals pel treball. S'aprofundeix en la interrelació dels conjunts de T-indistingibilitats, conjunts de subconjunts difusos extensionals i conjunts d'operadors d'aproximació per extensionals superior i inferior, tant sobre un univers de discurs finit com infinit. S'estudia en darrer lloc la robustesa d'aquests resultats sota isomorfismes de t-normes.

El capítol 3 es titula ”Aproximació per extensionals”, i en ell es desenvolupen diversos mètodes d’aproximació de conjunts difusos arbitraris per conjunts difusos extensionals. Es presenten tres mètodes per t-normes arquimedianes (que s’exemplifiquen amb les t-normes Łukasiewicz i Producte) i un per la t-norma del mínim. Tots els mètodes es comparen en un parell d’exemples finals que permeten valorar el seu rendiment, i comprovar que tots ells són superiors als existents a la literatura.

El capítol 4 es titula ”Reinterpretació extensional de models” i, com s’ha comentat abans, dóna la clau de volta que permet traslladar els objectes teòrics al camp dels problemes pràctics. En primer lloc s’estudia què és un model científic en la seva accepció més general i s’utilitzarà la teoria figurativa de Wittgenstein per entendre les diferències entre models i teories científiques. A continuació s’introdueix la noció d’espectre d’un fenomen i es raona com aquest pot ser codificat en el model en termes de conjunts borrosos extensionals. En darrer terme, a través d’aquesta reinterpretació es mostra com tot model científic defineix, *per se*, una mètrica. Al llarg de tot el capítol es donen diversos exemples de models científics (de disciplines completament diferents) per a il·lustrar el discurs.

Al darrer capítol: ”Reinterpretació extensional en neuroimatge MRI”, es mostra com tot el marc teòric de reinterpretació de models en termes de conjunts borrosos es pot aplicar, com a cas particular, en el camp dels models estructurals cerebrals de neuroimatge en ressonància magnètica. Es mostra com els atles cerebrals poden interpretar-se com una relació d’indistingibilitat operant sobre l’espai de totes les imatges, es dóna un exemple i algunes possibles vies d'aplicació futura d'aquesta relectura.

Gabriel Mattioli

Gener 2016

Pròleg

Hi havia a la cort d'Al Motacén un visir anomenat Nahun Ibn-Nahum, home envejós i dolent. Veient créixer davant del Califa el prestigi de Beremiz com una onada de pols aixecada pel simun, empès pel despit va decidir posar en problemes al meu amic i col·locar-lo en una situació ridícula i falsa. Així, s'acostà al rei i, pronunciant lentament les paraules, va dir:

L'ingeni humà, emparat per la ciència, ha de consagrar-se a la resolució dels grans problemes de la Vida. Els savis -inspirats per Allah, l'Exaltat- no van alçar l'enlluernador edifici de la Matemàtica per a que aquesta noble ciència vingui a tenir l'aplicació que li vol atribuir aquest calculador persa. Em sembla, doncs, un crim reduir la ciència d'Euclides, d'Arquímedes o del meravellós Omar Khayyam -Allah el tingui en la seva glòria!- a aquesta mísera condició d'avaluadora numèrica de coses i éssers

Crítica del visir Nahun Ibn—Nahun al calculador Beremiz Samir

1 Why fuzzy?

L'objectiu principal d'aquesta tesi és, a grans trets, desenvolupar un marc que permeti sinergitzar la teoria d'indistingibilitats de lògica borrosa i l'anàlisi de neuroimatge MRI. Per a fer-ho, com s'ha comentat prèviament, es desenvoluparà un marc més general d'estudi i interpretació difusa de models científics i posteriorment es proposarà com es pot especificar en el camp de l'estudi anatòmic del cervell. Abans d'entrar en el cos d'aquest treball, però, cal plantejar-se dues preguntes. És això possible? I més enllà de la pregunta merament possibilista, quina pot ésser l'aportació d'introduir nocions borroses a un context mèdic?

La resposta immediata fa referència a la incertesa. Per exemple la diagnosi mèdica està fortament esbiaixada pels coneixements previs del metge (no pot diagnosticar una malaltia que desconeix), la dificultat en quantificar els símptomes del pacient (com es pot quantificar acuradament un símptoma tan simple com el dolor?) o les limitacions de les proves realitzades entre d'altres fonts d'incertesa.

Ara bé, com es pot veure a l'exemple, no és gaire precís parlar d'incertesa en general ja que se'n poden diferenciar diferents nivells, dimensions i fonts. En aquest capítol s'intentarà fer una aportació a la comprensió de la incertesa reconeixent la seva diversitat. Es començarà per la qüestió més general (de l'àmbit de l'epistemologia) sobre la validesa de qualsevol acte perceptiu i cognitiu, passant pel sentit de la incertesa en el raonament científic i acabant en la pregunta específica referent a la incertesa en el raonament mèdic. S'estudiarà quina és l'aportació de la lògica difusa al tractament de la incertesa i els límits d'aquesta aportació. Es detallaran alguns aspectes especialment rellevants on, a opinió de l'autor, la lògica difusa té un paper principal en la seva comprensió (com el llenguatge o la granularitat del coneixement) i també es contrastarà sintèticament els punts forts i febles de diferents aproximacions a la incertesa, com la lògica difusa i la probabilitat o estadística.

En aquest capítol també es vol fer una contribució a un debat latent en la comunitat científica al voltant de la lògica borrosa.

El 1965 Lofti A. Zadeh va publicar a la revista Information and Control l'article "Fuzzy Sets" [123]. Com ja s'ha comentat anteriorment, aquest article va donar el tret de sortida a una nova disciplina que seria anomenada lògica difusa.

50 anys després les pioneres idees de Zadeh s'han desenvolupat i han fructificat arreu obrint noves i innovadores línies de recerca. Una cerca ràpida a WebOfKnowledge ens dóna que d'acord amb la seva base de dades 53,643 articles han estat publicats des de 1965 amb la paraula "fuzzy" en el títol i hi ha 160 revistes que han publicat 50 o més d'aquests articles. La Figura 1.0.1 mostra la distribució d'aquestes publicacions per any. Donada la multitud de conferències científiques que es celebren arreu del món anualment és difícil afinar quantes d'aquestes tenen la lògica difusa entre els seus camps d'interès, però una estimació pessimista ens donaria que aquest número no és inferior a 100. Podem afirmar doncs, que 50 anys després la lògica difusa és una teoria ben establerta en el panorama científic actual.

Tanmateix la realitat sempre és més complexa que la seva descripció numèrica

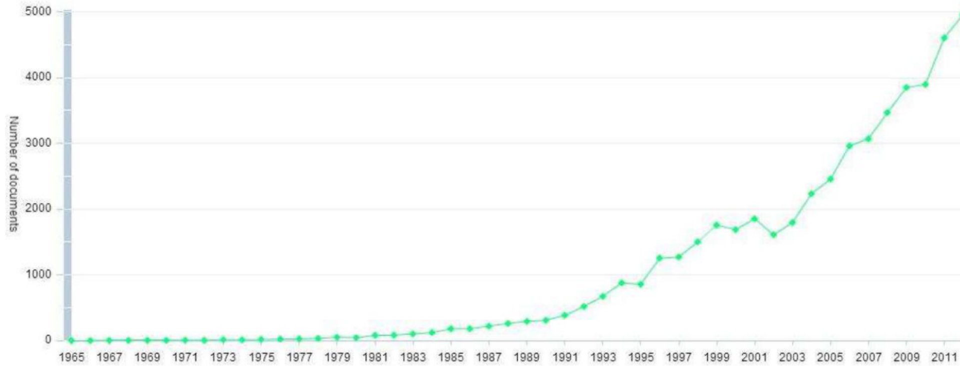

Figura 1.0.1: Quantitat d'articles anuals amb el terme "fuzzy" al títol. Font: Google Scholar

i, com tota llum té ombres, la lògica difusa també té objeccions a les que respondre. Il·lustrem-les amb un exemple personal viscut per l'autor.

En una de les assignatures del màster en Intel·ligència Artificial que vaig cursar l'avaluació final consistia en la presentació d'un article. L'article triat va ser "Upper and Lower Approximations of Fuzzy Sets" [14]. En acabar la presentació, l'única pregunta que em va plantejar el professor de l'assignatura va ser: "Jo vaig treballar durant un temps en lògica difusa perquè em semblava una teoria interessant. Però vaig deixar de fer-ho ja fa uns anys perquè malgrat que és una teoria bonica i elegant no em servia per a resoldre els problemes que tenia. La meva pregunta és: Tu creus que la lògica difusa pot ser utilitzada de forma efectiva per a resoldre problemes reals?".

Aquesta pregunta (malgrat l'acidesa del plantejament) està motivada per la sensació que la lògica difusa aparenta i discursivament promet molt més del que dóna, especialment en la dimensió de comprensió científica més que en la de solucions a problemes aplicats.

Malgrat no compartir el pessimisme del professor que va plantejar la pregunta, el sentiment que la motiva és compartit per l'autor d'aquesta tesi i per nombrosos investigadors dels que han estat consultats al respecte com es detallarà més endavant.

Per tot això, en aquest capítol també s'intentarà construir el discurs intermedi (pràcticament inexistent a la literatura actual) que inclogui quines són les fortaleses d'aquesta teoria i les mancances i limitacions que té i que susciten crítiques en part de la comunitat científica, com en l'esmentat professor.

1.1 Metodologia

Per a la realització d'aquest capítol s'ha comptat amb la col·laboració de 45 investigadors de reconegut prestigi i experiència en el camp. A tots ells se'ls va enviar un correu electrònic mostrant la preocupació per aquest tema i les següents 5 preguntes:

- Why do you work on Fuzzy Logic? What sense do you find on it?
- What are the main advantages of Fuzzy Logic compared with other fields dealing with uncertainty? And the main problems you find?
- What are the challenges Fuzzy Logic must face in the future?

Dels 45 investigadors consultats es va rebre la resposta directa de 21 d'ells i alguns més van respondre a les preguntes plantejades en xerrades informals amb l'autor de la tesi en congressos posteriors al correu. Les seves aportacions seran citades al llarg del discurs d'aquest capítol.

A tots ells, tant els que van respondre com als que no, l'autor vol agrair de nou el seu interès en la reflexió conjunta de "Why Fuzzy?".

1.2 Realitat i coneixement

Segurament el denominador comú que tots els investigadors acceptaran sobre quin és el sentit de la Lògica Difusa és que és una eina per a modelitzar la incertesa. Però a què ens referim quan parlem d'incertesa? Per a respondre a aquesta pregunta cal fer un pas enrere i contemplar el marc epistemològic des d'una pregunta més general:

Què puc conèixer de la realitat externa?

Aquesta impertinent i extremadament pertinent pregunta ha motivat la recerca de moltes de les ments més brillants de la història de la humanitat des del naixement de la filosofia. Des de Parmènides a Hegel, passant per Plató, Aristòtil, Sant Tomàs, Descartes, Spinoza, Hume, etc. han aportat les seves interpretacions a la pregunta que ens ocupa.

Tanmateix, la qüestió epistemològica troba un punt d'inflexió i consens en les tesis d'Immanuel Kant en la seva obra Crítica a la Raó Pura [64]; en la posició que posteriorment s'ha anomenat idealisme epistemològic.

> *Wenn aber gleich alle unsere Erkenntnis mit der Erfahrung anhebt, so entspringt sie darum doch nicht eben alle aus der Erfahrung. Denn es könnte wohl sein, daß selbst unsere Erfahrungserkenntnis ein Zusammengesetztes aus dem sei, was wir durch Eindrücke empfangen, und dem, was unser eigenes Erkenntnisvermögen (durch sinnliche Eindrücke bloß veranlaßt) aus sich selbst hergibt, welchen Zusatz wir von jenem Grundstoffe nicht eher unterscheiden, als bis lange Übung uns darauf aufmerksam und zur Absonderung desselben geschickt gemacht hat.* [1]

La distinció essencial que l'idealisme epistemològic proposa és la separació entre el que Kant anomena das Ding an sich (la cosa en sí mateixa) i das Ding für mich (la cosa per a mi). Tot i que aquesta separació efectiva entre la realitat externa i la seva representació interna ja estava contemplada tant per racionalistes (Descartes, Spinoza, ...) com per empiristes (Locke, Hume, ...) aquests discernien en quina era la font del coneixement, raó o sentits. Kant tanca aquest debat (amb una argumentació que divergeix del discurs d'aquesta tesi i per tant no serà reproduïda aquí) i assenta al voltant d'aquesta separació les bases de l'epistemologia moderna amb l'anomenat consens kantià.

[1] Però, tot i que tot el nostre coneixement comenci per l'experiència, no per això procedeix tot ell de l'experiència... Podria succeir que el nostre coneixement empíric fos una composició del que rebem mitjançant les impressions de tot el que la nostra facultat de conèixer (simplement motivada per les impressions) a partir de sí mateixa. Si fos així, no distingiríem aquesta adició de la matèria fonamental... en tant amb la llarga pràctica de parar atenció a la separació donada.

Inmanuel Kant. *Crítica de la Raó pura* [64]

Aquesta visió de la realitat com una cosa inabastable més enllà de la pròpia representació constitueix el que anomenarem incertesa essencial. La representació interna i subjectiva que el subjecte faci de la realitat externa és una projecció en un espai intern a través de la percepció. La nostra interpretació d'aquesta ens fa suposar que no només la nostra representació és acurada; sinó que per la pròpia inabastabilitat de la realitat externa identifiquem das Ding an sich amb das Ding für mich. Que ambdues Dinge siguin efectivament similars, properes, consistents o absolutament no-relacionades és la pròpia incertesa essencial.

La incertesa essencial és extremadament incòmoda. Ens porta a un escenari on veiem la realitat com una projecció en una dimensió visible d'un objecte globalment invisible. Aquesta projecció es fa a través de l'acte concatenat de percepció i representació. És en aquest pas on divergeixen les interpretacions empiristes i racionalistes. Sigui quina sigui la posició que es prengui, tot sistema perceptiu introdueix un error en el propi acte de percepció, donat per les pròpies limitacions del sistema; i tot sistema representatiu introdueix un biaix en l'acte de representació a l'encabir un objecte en un altre. La incertesa essencial sobre la proximitat entre objecte extern i representació interna fa que aquests errors introduïts siguin essencialment no mesurables i no controlables.

És interessant remarcar la pròpia paradoxa i fal·làcia circular que aquesta dualitat, si transcendim dels discursos merament solipsistes [30] [72], genera. Tenim una realitat externa incognoscible però perceptible. Construïm una representació interna a partir d'aquestes percepcions i per últim identifiquem la realitat externa inicial amb la nostra representació subjectiva.

Un altre punt de conflicte que es deriva d'aquesta situació està en la coneguda i estudiada dialèctica subjecte-objecte [11] [99] i en la que no aprofundirem en aquesta tesi.

Un punt de vista interessant del problema de la cognició de la realitat externa, complementari però independent de l'exposat, és el proposat per l'interaccionisme simbòlic [29], corrent psicològic i sociològic del s. XX. D'acord amb aquest paradigma, la realitat no és més que una construcció social. Aquesta es realitza a través del pacte entre diversos agents mitjançant un codi simbòlic comú: el llenguatge.

Un dels components essencials del llenguatge per a acomplir aquesta vehicularitat és el concepte de ”significat” que és alhora una construcció dominada pel codi cultural comú entre els agents.

No entrarem més a fons en les línies argumentatives i les conseqüències epistemològiques d'aquest corrent de pensament, però ens serveix per introduir el llenguatge com a element propi d'aquesta construcció. Sobre la borrositat intrínseca del llenguatge i les aportacions de la la lògica difusa a la construcció i comprensió del significat en parlarem més a fons més endavant.

1.3 Realitat i ciència

Transcendint el debat purament epistemològic, el sentit i objectiu de la ciència (del llatí scientia que significa coneixement) és el de construir models i teories per a comprendre els patrons dels fenòmens observats a la realitat externa i poder realitzar prediccions de què passarà en el futur. Al capítol 4 d'aquesta tesi es definiran i analitzaran en profunditat aquests conceptes, per ara n'hi ha prou per a la línia discursiva amb aquesta interpretació intuïtiva.

Hom pot preguntar-se quin és l'interès d'una activitat tal en un coneixement afectat per l'esmentada incertesa inicial. I a una pregunta tal es pot respondre de moltes maneres. A posteriori es podria afirmar que aquesta activitat permet una anàlisi més acurada de l'entorn del subjecte i de la interrelació de fenòmens subjacents al mateix. També permet una millor predicció de l'evolució dinàmica d'aquest entorn que, entre altres coses, és important per a reduir la complexitat de la representació; millorar la jerarquització, estructuració i priorització de les tasques i accions a realitzar i, entenent l'entorn en un sentit darwinista [27], augmentar la supervibilitat del subjecte.

Tot i que tant les respostes donades com altres que es podrien argumentar són correctes, la vertadera resposta és molt més elemental i tan senzilla com humana: per a satisfer la pròpia curiositat, que no només vol saber coses sinó entendre-les.

L'enfrontament entre les tesis sol·lpsistes, que neguen la possibilitat d'entendre la realitat més enllà del propi jo, i les cientifistes, que justifiquen no només la possibilitat de tal activitat sinó la necessitat d'inferir-ne metalleis, ha estat en el cor de nombroses dicotomies entre grans ments de la història. Si el lector té interès en l'aprofundiment en aquest debat es recomana l'estudi i anàlisi de l'enfrontament sostingut a principis del s.XX entre el filòsof Ernst Mach i el físic Max Planck [118].

Les teories construïdes no només no pertanyen a la realitat externa (das Ding an sich) sinó que tampoc pertanyen a la representació interna (das Ding für mich). Degut a la pretensió d'universalitat de les lleis científiques, aquestes pertanyen a una dimensió formal que transcendeix al subjecte individual i que està regida per regles fixes i immutables (generalment numèriques).

Alguns autors com Carnap [20] o Sneed [106] esquematitzen aquest procés en el diagrama de les 3 capes que s'il·lustra a la Figura 1.3.1. És interessant assenyalar que a la literatura es troben algunes prometedores fuzzificacions d'aquest model aplicat a l'anàlisi metaestructuralista (difusa) de les pròpies teories científiques [104].

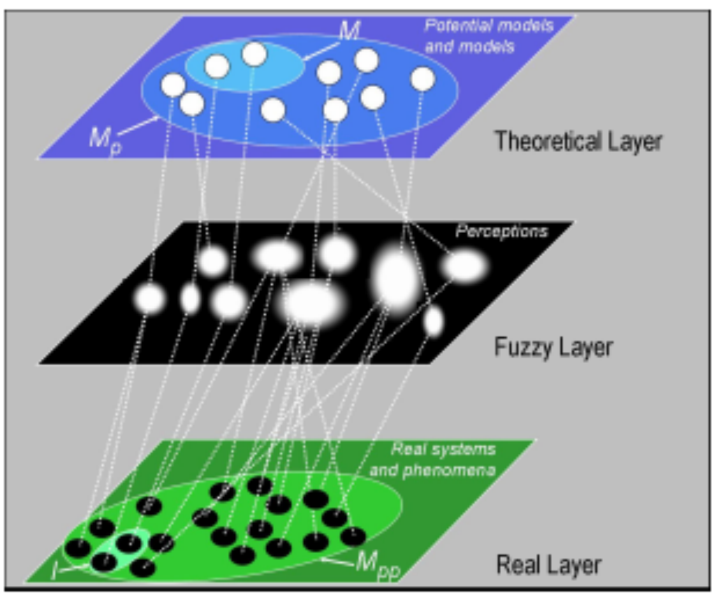

Figura 1.3.1: Diagrama de les 3 capes de Seising. La capa intermèdia "fuzzy layer" pot ser interpretada com a capa interna de percepcions, sense estrictament estar conformada per conjunts difusos

Un dels punts de conflicte entre les posicions essencialment empiristes i les racionalistes és si la inferència d'aquestes lleis teòriques que modelen les "lleis naturals" es fa per inducció a partir de les observacions o si les lleis teòriques es validen/verifiquen/refuten amb experiments empírics. Sobre la Figura 1.3.1 aquesta dicotomia és si el camí de construcció d'aquestes teories és de baix a dalt o de dalt a baix respectivament. Aquesta dialèctica va ser precisament la que va enfrontar les posicions de l'empirisme lògic [41] i el racionalisme crític [94] a mitjans del s.XX. Actualment es considera com a més encertada aquesta darrera posició que serà explicada amb més profunditat en el capítol 4 d'aquesta tesi.

En el model de les capes (Figura 1.3.1) la validesa de la relació entre la capa real i la empírica constitueix el que hem anomenat incertesa essencial. Algun autors de la segona meitat del s.XX com Feyerband [42], Fleck [45] o Kuhn [70] han qüestionat (de major a menor radicalitat) la validesa de la transcendència de lleis en una capa teòrica sense tenir en compte el factor humà i subjectiu.

Per altra banda, el propi mètode científic, des de Descartes [30] i Newton [54] a Popper [94] i el seu mètode de falsabilitat de teories, s'ha dotat de mecanismes per a validar o refutar les teories desenvolupades. Aquestes han estat útils no tan sols per a dotar de rigor les seves conclusions i prediccions sinó fins i tot per a poder delimitar els límits entre el que s'anomena Ciència i el que no ho és. Tanmateix en cap moment es pot perdre de vista que les teories científiques, els models i la ciència en general no deixen de ser elucubracions teòriques en una dimensió formal inexistent (o almenys no existent en la mateixa capa que la realitat externa). En paraules planeres, i en cap cas amb cap motivació pejorativa, no són més que castells a l'aire. Castells construïts amb prou astúcia com per a que sobrevisquin a l'autoavaluació que imposa el propi mètode i aparentment tinguin un comportament anàleg als castells reals. L'observació incòmoda a tot això recau en l'ineludible fet que, al cap i a la fi, que tot això sigui possible i es pugui fer de forma efectiva és un acte de fe. La pròpia existència de lleis naturals és indemostrable i la suposició que aquestes es poden modelar a través de relacions entre conjunts de magnituds quantificables és pura fe.

És remarcable que aquest acte de fe és idèntic al que suposa la identificació dels dos objectes que assenyala Kant i que hem anomenat incertesa essencial. Ara que hem introduït l'analogia de les capes, queda palès que aquesta incertesa apareix quan pretenem identificar objectes entre capes diferents.

Per altra banda, igual que quan consideràvem la qüestió epistemològica distingíem entre aquesta incertesa essencial i la introduïda per l'acte de percepció i representació, en introduir una nova capa formal (o científica) també tenim un error per simplificació. Quan elaborem teories científiques sobre fenòmens naturals reduïm les variables implicades. Un clar exemple d'això és l'anomenat efecte papallona, pel qual el vol d'una papallona a Rio de Janeiro pot provocar un huracà a les Antilles. Tanmateix, cap model climàtic té en compte com a input la dinàmica generada pel vol de totes les papallones del món. En l'acte d'inferència o construcció de lleis formals s'introdueix un biaix per simplificació.

1.4 Aportacions de l'enfoc difús

Els subcapítols anteriors han estat centrats en remarcar la incertesa inevitable del procés de cognició i d'extrapolació de lleis científiques. És remarcable, però, l'abús (intencionat) que s'ha realitzat del terme incertesa. Sota aquest mot hem agrupat múltiples fonts que sintetitzem a continuació:

Existeix una incertesa essencial en la identificació, aproximació o similitud entre els objectes de diferents capes (objecte extern vs objecte intern, fenomen percebut vs teoria formal...)

- En el procés de percepció de l'objecte s'incorpora un error fruit de les limitacions del sistema perceptiu.

- En el procés de representació interna de l'objecte s'incorpora un error fruit de la transmutació de l'objecte. Aquest és diferent de l'incorporat en el procés de percepció. Il·lustrem aquesta diferència amb un exemple: En una càmera fotogràfica són diferents els errors introduïts per la limitació de la lent (de percepció) i els donats per la limitació de capacitat i resolució de la càmera (de representació).

- En la inferència de lleis que governen els fenòmens externs s'introdueix un error per simplificació.

1.4.1 La incertesa com a element intrínsec

L'aportació més interessant i important en essència de la lògica difusa és que incorpora la incertesa com a element propi i intrínsec de la definició d'objecte. Precisament va ser aquesta la objecció que Zadeh féu a les teories clàssiques i que va motivar que introduís els conjunts difusos i tota la teoria que es va desenvolupar a continuació. És subtil però important remarcar que, en l'enfoc difús, la incertesa forma part de l'objecte ja que això la diferencia d'altres teories com la probabilitat, on la incertesa forma part de la desconeixença del futur (en la interpretació freqüentista o objectivista) o de la cognició de l'objecte (en la interpretació bayesiana o subjectivista). Al subcapítol 1.5 aprofundirem en les diferències entre aquestes disciplines.

La millor il·lustració de la necessitat de considerar la borrositat és la ja esmentada paradoxa de Sorites [19]. Quants grans de sorra fan un piló? Aquesta paradoxa, que ha preocupat a nombrosos filòsofs i lògics [43] [108] durant segles, es resol de forma immediata en entendre que la noció de piló és borrosa; i que és la no-consideració d'aquesta borrositat pròpia la que porta a situacions paradoxals.

Una pregunta pertinent que es pot plantejar al respecte és que aquesta difusitat sigui equivalent o es pugui considerar com un problema de graduació en un model numèric ([0,1]). Aquesta pregunta pot estendre's a tota la ciència en general i la resposta és purament utilitarista: els models numèrics són la millor eina que la humanitat ha desenvolupat a dia d'avui per a governar el comportament de les teories construïdes en la capa teòrica. Per altra banda, una de les línies de recerca actives en el camp de la lògica difusa és com transcendir de [0,1] [31] [51] i de la difusitat com a graduació [33] [65] [114].

La pròpia semàntica de les funcions de pertinença ha estat fruit d'un intens debat i anàlisi per part de la comunitat científica preocupades per la modelització de la incertesa. Un article interessant que resumeix aquesta qüestió és [33]. En aquest article es proposa que les funcions de pertinença tenen 3 interpretacions: 1) Com a grau de similitud d'un objecte a un prototip. 2) Com a grau de preferència. 3) Com a grau d'incertesa. A [33] es mostra com aquestes diferents interpretacions porten a teories difuses diferents. En general, aquesta polivalència i polisèmia que ofereixen les funcions de pertinença (que constitueixen la base de la teoria difusa) és una riquesa de la lògica difusa, tot i que hagi estat també una font de crítiques i malinterpretacions [37].

1.4.2 Granularitat

Més enllà de les consideracions eminentment epistemològiques, hi ha altres aspectes del modelament de la realitat pels quals la lògica difusa ofereix una sòlida base interpretativa. Un dels més interessants és la granularitat dels objectes.

> *Informally, granulation of an object A results in a collection of granules of A, with a granule being a clump of objects (or points) which are drawn together by indistinguishability, similarity, proximity or functionality. In this sense the granules of a human body are the head, neck, arms, chest, etc...*[2]

La granularitat és deguda a un, inevitable, problema d'escala. Aquesta inevitabilitat és deguda a que cap (almenys de facto) sistema intel·ligent és capaç de considerar una situació o fenomen en tota la seva complexitat i a totes les escales alhora. Això es projecta en la multiplicitat de teories científiques que expliquen fenòmens a un nivell d'escala però que són disjuntes d'altres que l'analitzen a un altre nivell. Exemples d'això són la física (que té teories molt diferents pel molt gran i el molt petit) o la psicologia (que estudia de forma radicalment diferent el comportament humà a nivell neuronal, individual o social).

Tot aquest raonament ens porta que la granulació és un fenomen necessari i inevitable.

[2] Lofti A. Zadeh [126]

Among the basic concepts which underlie human cognition there are three that stand out in importance. The three are: granulation, organization and causation.[3]

Per tot això és natural que la granulació sigui un dels temes recurrents en nombroses disciplines científiques.

L'aportació de l'enfoc difús a aquest fenomen és precisament el fet fonamental que en la majoria de situacions aquest grànuls són en essència difusos, bàsicament per la pròpia difusitat dels conceptes de similitud, indistingibilitat o proximitat del procés cognitiu humà. Hi ha a la literatura un gran nombre de mètodes de clustering que afronten el problema des d'una perspectiva crisp (no difusa). Afrontar el problema de forma crisp porta a situacions com la de la paradoxa de Sorites. Es poden trobar fronteres precises (que minimitzin una certa funció error o maximitzin alguna mesura de dissimilitud, etc), però la pròpia precisió d'aquestes fronteres és paradoxal en sí. I malgrat que existeixin situacions en que la consideració de grànuls crisp tingui sentit, no es pot oblidar que al cap i a la fi el cas crisp és un cas particular del paradigma difús.

La lògica difusa ofereix, doncs, un paradigma consistent pel tractament d'aquest fenomen. Hi ha diverses aproximacions suggerides a la literatura al mateix com poden ser els rough sets [69] [90], els fuzzy points [85] o els conjunts extensionals [59] [60]. En aquesta tesi utilitzarem aquests darrers per la interessant semàntica subjacent que tenen com a conjunts observables.

1.4.3 El llenguatge com a sistema lògic difús

Un altre àmbit en el qual la lògica difusa aporta una interessant perspectiva és el llenguatge. Abans, però, d'entrar a analitzar la difusitat pròpia del llenguatge i la seva relació amb el raonament humà cal fer una petita incursió en un argument lateral.

És una opinió molt estesa que el pensament és verbal o verbalitzable. És a dir, des del moment que l'ésser humà domina el llenguatge, aquest passa a ser el prin-

[3] Lofti A. Zadeh [126]

cipal mecanisme de processament i raonament de la informació i fins i tot filtre de les percepcions i sensacions que són associades a paraules.

Aquesta posició ha estat explorada i explotada en diverses obres literàries [47] [88] i es recolza en l'anomenat determinisme lingüístic [16] [28].

Lamentablement (o no) aquesta afirmació no només no és certa sinó que es rotundament falsa. Una refutació rigorosa i completa d'aquesta posició es pot trobar a [93].

> *(Lingüistic determinism) can be called a conventional absurdity: a statement that goes against all common sense but that everyone believes because they dimly recall having heard it somewhere and because it is so pregnant with implications. (...) Like that we use only a five percent of our brains (...) or that we can be coerced into buying by subliminal messages.*[4]

Remarquem aquesta fal·làcia, tot i ser disjunta amb la línia discursiva de la tesi, perquè, com s'explicarà a continuació, el modelatge de la vaguetat del llenguatge és un dels punts més forts de la lògica difusa. Si "pensable" fos equivalent a "expressable" aquesta fortalesa s'extrapolaria globalment al raonament humà. Però això és el que defensa el determinisme lingüístic i és fals. Tanmateix, és indiscutible que el llenguatge és un dels mecanismes centrals en la representació de la realitat, el processament de la informació i la comunicació inter-subjectes.

Hi ha dos aspectes del llenguatge que són especialment susceptibles de ser representats a través d'un enfoc difús: el significat i l'estructura lògica.

Tornant la representació del procés epistèmic com a diferents capes, el significat pot entendre's com un operador que relaciona paraules (elements d'una capa lingüística) amb la representació subjectiva d'objectes (en la capa interna). És ben sabut i estudiat que els límits sobre els quals està definida una paraula en general no són absoluts (pensem en la paradoxa de Sorites o en termes com "alt", "vermell", "bonic", ... la llista d'exemples és inesgotable). Aquest fenomen s'anomena vaguetat, i d'acord amb múltiples experts és un dels punts on la lògica difusa aporta més a la comprensió del problema.

[4]Steven Pinker [93]

The linguistic term uncertainty is not only imprecise, but has a very broad applicative spectrum in both ordinary life and Science. To scientifically approach what it could mean, it seems necessary to previously capture how their, also imprecise, mother-predicate U = uncertain , the opposite of certain, is used in different contexts and with different purposes, and where can consequently be represented by a fuzzy set.[5]

L'altra aportació d'estudiar el llenguatge a través de la lògica difusa correspon a la seva estructura lògica. El llenguatge és un sistema lògic (té fórmules ben construïdes, estructura sintàctica definida...) que opera amb conceptes vagues.

La lògica, des de la seva pròpia concepció aristotèlica ha pretès entendre i capturar les oracions lingüístiques (ja siguin opinions, raonaments, argumentacions, sentències, diàlegs...) en un context proposicional i predicatiu. Tanmateix, el llenguatge natural ha resistit fermament quasi totes les temptatives de ser encapsulat en un sistema tal. El problema principal amb el qual s'han topat totes les teories que han intentat completar aquesta tasca és precisament la facilitat amb que el llenguatge natural permet de raonar incorporant objectes vagues, i que tan difícil és d'incorporar en un sistema lògic representatiu.

La lògica difusa sembla doncs el paradigma ideal per a tractar aquest problema, ja que ofereix un marc teòric lògic precisament construït al voltant de l'assumpció inicial que la naturalesa dels objectes és vaga o difusa.

Existeixen actualment camps de recerca en el marc de la lògica difusa que treballen emprant eines borroses a la comprensió i representació del llenguatge. Un d'ells, assenyalat per pares de la disciplina com Zadeh [122] [121] o Trillas [112]és l'anomenat Computing With Words (CWW).

Per a aprofundir en la connexió entre lògica borrosa i llenguatge, tant en la seva vessant semàntica com estructural, es recomana al lector aprofundir en la obra de Trillas.

[5] Enric Trillas [113]

1.5 Dialèctica amb altres teories de la incertesa

La lògica difusa no és en absolut l'única disciplina científica que considera i estudia la incertesa en les dades i el coneixement. Diverses altres teories han emergit (especialment al llarg del s.XX) que pretenen modelar-la, controlar-la, mesurar-la... com per exemple:

- Belief theory
- Game theory
- Risk management
- Estadística
- Probabilitat
- ...

Aquesta llista no és en absolut exhaustiva i simplement pretén il·lustrar com el problema de la gestió de la incertesa ha estat un dels principals problemes científics que han motivat la recerca i obertura de noves vies d'investigació al s. XX. Quin llarg camí s'ha recorregut des de que Hilbert proclamà el 1930 [116]:

Statt des törichten Ignorabimus heiße im Gegenteil unsere Losung: Wir müssen wissen, Wir werden wissen! [6]

En aquesta secció dissertarem sobre la dialèctica entre la lògica difusa i la teoria de la probabilitat. Precisament la similitud, equivalència o diferència entre aquestes dues disciplines va motivar un intens debat al respecte entre la comunitat científica especialitzada a la dècada de 1980 i principis de la de 1990.

Les altres teories esmentades a la llista, són interessants i complementàries a la lògica difusa però el seu punt de vista i enfoc és clarament diferent. Per això,

[6] En contra del neci ignorabimus el nostre eslògan deu ser: Devem saber, sabrem!

malgrat que seria interessant, no parlarem sobre la dialèctica entre elles. La probabilitat, per contra (com prova el sostingut debat que hi va haver i que sintetitzarem en aquest subcapítol), presenta una aparent semblança nuclear amb la lògica difusa. Per això l'anàlisi comparativa d'ambdues disciplines obliga a un estudi més profund que revela que les seves diferències estan en l'essència de la seva concepció.

En la teoria de la probabilitat hi ha, simplificant, dues corrents de pensament: la freqüentista i la bayesiana. La visió freqüentista afirma que la probabilitat que succeeixi un esdeveniment es correspon amb la raó entre situacions favorables i possibles si poguéssim repetir l'experiment infinites vegades. D'aquesta manera, la probabilitat és una propietat intrínseca de l'esdeveniment. En aquest punt difereix l'escola bayesiana, que afirma que la probabilitat representa la certesa que l'esdeveniment succeirà d'acord amb el coneixement actual. Per això la visió freqüentista també s'anomena objectivista i la bayesiana subjectivista.

Posem un exemple d'aquestes dues interpretacions de la probabilitat. Consideris el clàssic exemple de tirar una moneda i que surti cara. La visió freqüentista afirma que la probabilitat és $1/2$ perquè si es repetís l'experiment infinites vegades s'esperaria obtenir tantes cares com creus. D'acord amb els bayesians aquesta probabilitat és $1/2$ perquè d'acord amb el nostre coneixement actual tant podria sortir cara com creu en el proper experiment.

Es prengui la visió que es prengui, eventualment la moneda serà llençada i sortirà cara o creu. És a dir, no hi ha res difús en el resultat de l'experiment. La probabilitat bàsicament està capturant el coneixement parcial que podem tenir sobre un esdeveniment.

Observem que això és radicalment diferent dels exemples donats al punt anterior sobre la naturalesa difusa d'algunes entitats. Allà remarcàvem que la difusitat ens captura la veritat parcial dels objectes, en cap cas es considera la pertinença graduada com a una quantificació de nostre coneixement.

La diferència entre ambdues disciplines es pot exemplificar en l'estudi de la incertesa a la següent frase: "Demà plourà força".

La probabilitat (freqüentista o bayesiana) ens serveix per a estudiar i quantificar el grau de certesa que tenim que demà plogui. Finalment demà arribarà i pot ser que plogui o que no ho faci. La probabilitat ens serveix per a predir el demà d'acord amb el nostre coneixement de les característiques climatològiques de l'avui i les nostres teories de com es comporta el clima.

Però tant si demà plou com si no, la frase diu que plourà força. Això no és un esdeveniment crisp sobre el qual demà podrem discernir la seva validesa. El "força" és una quantificació de la pluja essencialment difusa, i com a tal ha de ser tractada.

Novák [86], assenyala que un dels problemes pels quals aquestes disciplines es confonen és fruit d'una confusió verbal per l'abús de la paraula "incertesa". D'acord amb les seves tesis, la paraula general hauria de ser "indeterminació", i aquesta és pot manifestar com a "imprecisió" (probabilitat) o "vaguetat" (lògica difusa).

Here you use the unhappy word in English uncertainty. This is often misunderstood and so, the better word is indeterminacy. [7]

A la literatura, i fruit del debat sorgit al voltant d'aquesta polèmica a finals del 80 i principis dels 90, s'han proposat algunes línies que sinergitzen aquestes dues perspectives. Segurament la més desenvolupada i prometedora en aquest sentit és la Teoria de la Possibilitat (possibility theory). Per a saber més al respecte es recomana la lectura de [32] [34].

Per acabar l'anàlisi d'aquesta dialèctica: què hem d'esperar doncs d'una teoria i l'altra?

La probabilitat, juntament amb la seva cosina inversa l'estadística, modelitza les entitats incertes a través de funcions de distribució i densitat, que caracteritzen el seu comportament general sota la hipòtesi de que aquest està regit per un principi d'aleatorietat. La probabilitat, doncs, és el llenguatge de la imprecisió estadística i per tant hem d'esperar que ens aporti precisió. Disciplines com la mecànica quàntica han demostrat com l'ús del llenguatge de la imprecisió ens serveix per a donar les prediccions més precises donades mai en la història de la física.

[7] Vilém Novák

La lògica difusa modela les entitats incertes a través de conjunts difusos que no caracteritzen ni representen una propietat de l'entitat sinó la pròpia entitat. La lògica difusa és el llenguatge de la imprecisió semàntica i la seva aportació és la claredat. Això queda palès en camps com l'extracció de regles difuses o d'etiquetes lingüístiques, on es mostra com es poden inferir models semànticament simples i comprensibles de conjunts de dades grans.

Surely, there is no universally best approach to uncertainty modelling, fuzzy approach can be seen as one attempt how to capture vagueness, but of course suffering as many other theoretical fields from the reliability and fittingness of applied input data, rule models, etc... I think it should be considered as one possible approach, nothing more, nothing less. [8]

1.6 La incertesa en el raonament mèdic

Fins ara hem analitzat la incertesa en general associada a la cognició humana i la seva representació mitjançant sistemes formals. Aquesta tesi, però, té també un component específicament biomèdic; i el raonament mèdic presenta alguns trets característics en aquest aspecte. L'anàlisi del raonament mèdic està considerada una disciplina científica pròpia: la "iatrofilosofia" [17]. Recollirem aquí les opinions més significatives i il·lustratives de l'interès de considerar la difusitat en aquest context.

En general, el diagnòstic mèdic es realitza en un context de gran incertesa fruit de la incompletesa, imprecisió i possible contradictorietat de la informació disponible [97]. A més, on el raonament científic cerca l'abstracció de les dades per a trobar els elements més rellevants d'un marc general, el raonament de la diagnosi mèdica està interessat en els elements atípics, singulars i mòrbids del subjecte particular [45]. La incertesa i la necessitat del seu tractament pròpia d'aquest context ha estat assenyalada per nombrosos metges com el polonès Ludwick Fleck,

[8] Radko Mesiar

l'argentí Mario Bunge o l'iranià-alemany Kazem Sadegh-Zadeh (sense relació parental amb Lofti A. Zadeh).

Ja al 1927, 40 anys abans de l'emergència dels fuzzy sets, Fleck [45] assenyalava la necessitat d'un nou paradigma formal pel raonament mèdic en diagnosi. La seva necessitat l'exemplifica en múltiples situacions bàsiques del procés de diagnosi, segurament la més il·lustrativa de les quals és la pròpia manca de distinció clara entre sà i malalt.

L'interès de considerar els conjunts difusos en l'estudi d'aquest tipus de raonament va ser molt ràpidament considerat després de la seva introducció el 1965. Ja el 1969 Zadeh assenyalava el seu possible ús en un context mèdic [120], i remarcava com el problema que Fleck proposa sobre la distinció entre sa i malalt es pot representar mitjançant fuzzy sets. Un altre treball específic interessant sobre el tema és la tesi doctoral d'Albin [4] el 1975. Aquests estudis van contribuir a considerar tècniques basades en funcions de pertinença i etiquetes lingüístiques quan es van desenvolupar els sistemes de diagnosi automatitzada als 70s i 80s com CADIAG-I [3], CADIAG-II [2] o MYCIN [105].

Filòsofs i metges com Sadegh-Zadeh [102] estudien i desenvolupen actualment les tècniques d'estudi del raonament mèdic mitjançant lògica difusa. D'acord amb Sadegh-Zadeh les malalties han de ser estudiades com a conjunts difusos sobre els seus símptomes (més enllà dels purament biològics) i qualsevol consideració en altres termes és intrínsecament inconsistent.

Per a aprofundir en l'estudi i història de la incertesa i els conjunts difusos en el raonament mèdic es recomana al lector la lectura de [103].

No deixa de semblar-me fins a cert punt assenyada, va respondre el rei, la censura que acaba de fer-te el visir Nahun Ibn-Nahun. Crec que és indispensable una aclariment sobre el cas. Parla, doncs: la teva paraula podrà orientar l'opinió dels aquí presents...

Mediació del califa Al Motacén a la crítica del visir

2

Operadors d'indistingibilitat i isomorfismes fonamentals

En aquest capítol s'introduirà i desenvoluparà el marc teòric d'aquesta tesi.

L'objecte matemàtic principal són els subconjunts difusos extensionals associats a una relació d'indistingibilitat. Les indistingibilitats són la fuzzificació de les relacions d'equivalència bivalents clàssiques i modelitzen l'intuïtiu concepte de similitud entre elements. Els conjunts difusos extensionals representen les classes d'elements "essencialment diferents" d'acord amb aquesta relació de similitud. Poden entendre's com els conjunts observables per un sistema perceptiu que identifica objectes d'acord amb una indisitingibilitat.

A la literatura s'han estudiat també dos operadors, que es denotaran ϕ_E i ψ_E, que aplicats sobre conjunts difusos (arbitraris) μ donen l'extensional més petit que conté μ i el més gran que hi està contingut respectivament. Tots aquests conceptes seran definits i explicats amb rigor més endavant.

És ben sabut que aquests quatre objectes matemàtics estaven en bijecció entre ells. El principal resultat d'aquest capítol és que aquesta relació és molt més forta, ja que es tracta d'un isomorfisme de reticles.

Per a donar aquest isomorfisme cal estudiar prèviament l'estructura dels conjunts d'aquests objectes. Es mostrarà com aquests es poden dotar d'una estructura reticular considerant les principals operacions lògiques d'unió i intersecció, així com l'ordre puntual natural. S'estudiarà com opera l'isomorfisme sobre aquestes operacions, i així es tindrà el mapa complet de la relació.

S'estudiarà també com aquest isomorfisme es trenca en considerar operadors d'agregació més complexes que els propis del reticle, com les mitjanes quasi-aritmètiques, tant en el cas finit com en l'infinit.

Per últim es mostrarà com tots els resultats trobats són invariants respecte isomorfismes de t-normes.

2.1 Conceptes preliminars

En aquest subcapítol es definiran els conceptes bàsics necessaris per a desenvolupar tots els resultats posteriors.

Es donarà la definició de, per aquest ordre, les t-normes, les relacions d'indistingibilitat, els conjunts difusos extensionals i els operadors d'aproximació superior i inferior per extensionals. S'explicarà detalladament la interpretació semàntica de tots aquests objectes així com les propietats bàsiques i necessàries per als resultats que es demostraran en aquest treball.

En primer lloc recordem la definició de t-norma [68]. Les t-normes són la versió borrosa de la connectiva de lògica bivalent "i" (conjunció).

Definició 2.1.1. *Una t-norma T és una aplicació de $[0,1] \times [0,1]$ en $[0,1]$ que verifica*

- $T(a,b) = T(b,a)$
- $T(a,b) \leq T(c,d)$ *si* $a \leq c$ *i* $b \leq d$

- $T(a, T(b, c)) = T(T(a, b), c)$
- $T(1, a) = a$

Donem ara el ben conegut Teorema de Ling, que permet definir el concepte de generador additiu d'una t-norma arquimediana.

Teorema 2.1.2. *[68] Una t-norma contínua T és arquimediana si i només si existeix una funció contínua i estrictament decreixent $t : [0, 1] \to [0, \infty]$ amb $t(1) = 0$ tal que:*

$$T(x, y) = t^{[-1]}(t(x) + t(y))$$

on $t^{[-1]}$ és la pseudo inversa de t definida com:

$$t^{[-1]}(x) = \begin{cases} 1 & \text{si } x \leq 0 \\ t^{-1}(x) & \text{si } 0 \leq x \leq t(0) \\ 0 & \text{si } t(0) \leq x \end{cases}$$

La funció t serà anomenada un generador additiu de la t-norma, i és únic llevat de constants multiplicatives positives.

Donada una t-norma, que representa la conjunció lògica, hi ha diverses maneres de definir les operacions d'implicació i biimplicació. Per a més detalls en com aquestes poden ser definides es recomana [8]. En aquest treball, utilitzarem per a tal la residuació i birresiduació de la t-norma que es defineixen a continuació.

Definició 2.1.3. *Sigui T una t-norma contínua per l'esquerra.*

- *La residuació $\overrightarrow{T}$ de T es defineix per tot $x, y \in [0, 1]$ com:*

$$\overrightarrow{T}(x|y) = \sup\{\alpha \in [0, 1] | T(\alpha, x) \leq y\}.$$

- *La birresiduació $\overleftrightarrow{T}$ de T es defineix per tot $x, y \in [0, 1]$ com:*

$$\overleftrightarrow{T}(x, y) = \min\{\overrightarrow{T}(x|y), \overrightarrow{T}(y|x)\} = T(\overrightarrow{T}(x|y), \overrightarrow{T}(y|x)).$$

Els generadors additius seran molt utilitzats a nivell operacional en aquest treball, ja que les connectives lògiques associades a la t-norma (arquimediana) poden ser reescrits en termes seus.

Proposició 2.1.4. *Sigui T una t-norma contínua i arquimediana amb generador additiu t. Aleshores:*

- $T(x, y) = t^{[-1]}(t(x) + t(y))$
- $\overrightarrow{T}(x|y) = t^{[-1]}(t(y) - t(x))$
- $\overleftrightarrow{T}(x, y) = t^{[-1]}(|t(x) - t(y)|)$.

A continuació es defineixen les relacions d'indistingibilitat. Com s'ha comentant prèviament aquestes fuzzifiquen les relacions d'equivalència clàssiques i formalitzen la noció intuïtiva de similitud. Cal remarcar que la definició d'una indistingibilitat depèn de la tria prèvia d'una t-norma. A la literatura s'ha investigat si tenir una t-norma és condició necessària per a mantenir algunes de les propietats clàssiques que és desitjable mantenir en el cas difús, com la bijecció entre relacions d'equivalència (difuses) i particions (difuses) [63]. Això permet definir aquestes relacions relaxant algunes de les condicions de les t-normes. En aquest treball, però, ens centrarem en T-indistingibilitats, sent T una t-norma.

Definició 2.1.5. *Sigui T una t-norma. Una relació difusa E en un conjunt X és una relació de T-indistingibilitat si i només si per tot $x, y, z \in X$*

a) $E(x, x) = 1$ *(Reflexivitat)*

b) $E(x, y) = E(y, x)$ *(Simetria)*

c) $T(E(x, y), E(y, z)) \leq E(x, z)$ *(T-transitivitat).*

Fixat un univers de discurs X i una t-norma T, denotarem $\mathcal{E}$ el conjunt de totes les T-indistingibilitats en X.

Hi ha moltes maneres de generar relacions d'indistingibilitat. Una de les més senzilles i naturals és considerar la relació d'indisitingibilitat E_μ associada a un conjunt difús μ.

Proposició 2.1.6. *Sigui X un conjunt, T una t-norma i μ un conjunt difús en X. La relació difusa E_μ en X definida per tot $x, y \in X$ com*

$$E_\mu(x, y) = \overleftrightarrow{T}(\mu(x), \mu(y))$$

és una relació de T-indistingibilitat.

El Teorema de Representació, que enunciem a continuació, és un dels resultats més importants en el camp de les relacions d'indistingibilitats. Aquest teorema diu que qualsevol família de conjunts difusos en X genera una relació de T-indistingibilitat i, recíprocament, que tota T-indistingibilitat és generada per una família de conjunts difusos.

Teorema 2.1.7. *[115] Teorema de Representació. Sigui R una relació difusa en un conjunt X i T una t-norma contínua. R és una relació de T-indistingibilitat si i només si existeix una família $(\mu_i)_{i\in I}$ de conjunts difusos en X tal que per tot $x, y \in X$*

$$R(x, y) = \inf_{i \in I} E_{\mu_i}(x, y).$$

En les condicions del teorema anterior direm que la família de conjunts $(\mu_i)_{i\in I}$ és un conjunt de generadors de R. A més direm que són una base de generadors si el cardinal de I és mínim. És a dir, si existeix una altra família $(\nu_j)_{j\in J}$ que genera la mateixa relació R llavors la cardinalitat de I serà menor o igual que la de J.

Aquest teorema tindrà una gran importància en aquest treball ja que assegura que qualsevol família de conjunts genera una relació de T-indistingibilitat. Observem que diferents famílies de conjunts poden generar la mateixa relació, de fet el problema de trobar de forma efectiva una base de conjunts generadors donada una indistingibilitat és un problema obert en el camp.

A continuació definim els conjunts difusos associats a una indistingibilitat. A nivell formal és corresponen amb la fuzzificació de les classes d'equivalència clàssiques, junt amb les seves possibles combinacions (d'unions, interseccions i connectives lògiques). Observis que en el cas clàssic aquestes combinacions són trivials, ja que la intersecció de dues classes d'equivalència diferents sempre és buida.

Això no és cert en el cas difús, fet que afegeix flexibilitat i riquesa a l'estudi d'aquests objectes. A nivell semàntic, si una indistingibilitat és la representació formal de com un sistema perceptiu identifica els objectes d'acord amb algun criteri de similitud, els conjunts extensionals són aquells que són essencialment diferents d'acord amb aquesta similitud. En altres paraules, els conjunts extensionals són exactament els conjunts observables o grànuls, recuperant alguns dels conceptes del capítol anterior. Aquesta interpretació dels mateixos serà molt il·lustrativa per a la construcció que es farà en capítols posteriors d'aquesta tesi, ja que quan parlem de discriminar diferents teixits cerebrals els recollirem com a diferents conjunts extensionals.

Definició 2.1.8. *Sigui X un conjunt i E una relació de T-indistingibilitat en X. Un subconjunt difús μ de X s'anomenarà extensional si i només si:*

$$\forall x, y \in X \;\; T(E(x,y), \mu(y)) \leq \mu(x).$$

Denotarem H_E el conjunt de tots els subconjunts difusos extensionals respecte E.

Els conjunts extensionals han estat molt estudiats a la literatura i caracteritzats de múltiples maneres. A continuació enunciem aquelles caracteritzacions importants per a aquest treball.

En primer lloc i més important a nivell semàntic, els extensionals corresponen amb els generadors de la indistingibilitat.

Proposició 2.1.9. *Un subconjunt difús μ és extensional amb respecte una T-indistingibilitat E si i només si és un generador de E en el sentit del Teorema de Representació.*

La següent caracterització serà operacionalment útil en algunes demostracions posteriors.

Corol·lari 2.1.10. *Un subconjunt difús μ és extensional amb respecte una T-indistingibilitat E si i només si $E_\mu \geq E$.*

Per últim, a [84] és dóna la següent caracterització dels mateixos en termes d'equacions funcionals.

Proposició 2.1.11. *[84] Sigui E una relació de T-indistingibilitat en un conjunt X i H_E el conjunt de subconjunts difusos extensionals associats a E. Aleshores, per tot $\mu \in H_E$, tota família $(\mu_i)_{i \in I}$ de conjunts extensionals i $\forall \alpha \in [0, 1]$ es verifiquen les propietats següents.*

1. $\bigvee_{i \in I} \mu_i \in H_E$
2. $\bigwedge_{i \in I} \mu_i \in H_E$
3. $T(\alpha, \mu) \in H_E$
4. $\overrightarrow{T}(\mu|\alpha) \in H_E$
5. $\overrightarrow{T}(\alpha|\mu) \in H_E$

L'interès de la proposició anterior és que caracteritza completament els conjunts de conjunts difusos que són els extensionals d'una certa indistingibilitat, com es prova a [84] i enunciem a continuació. Com a corol·lari es té la bijecció entre conjunts d'extensionals i indistingibilitats.

Teorema 2.1.12. *Sigui H una família de subconjunts difusos en X satisfent les propietats de la proposició 2.1.11. Aleshores existeix una única T-indistingibilitat tal que $H = H_E$*

Denotarem d'ara en endavant $\mathcal{H}$ al conjunt de les famílies de conjunts verificant la proposició 2.1.11; és a dir que són el conjunt d'extensionals d'una certa indistingibilitat.

Per últim, introduïm a continuació els operadors ϕ_E i ψ_E. Donat un subconjunt difús μ en X aquests donen el conjunt difús extensional més petit que conté μ i el més gran contingut en μ respectivament. És interessant assenyalar que, com passa amb els conjunts extensionals, aquests operadors han estat proposats també en altres camps: com a operadors de clausura i interior en un sentit topològic [59], com operadors de possibilitat i necessitat en lògica modal difusa [15], en fuzzy rough sets [84], en morfologia matemàtica difusa [38], en anàlisi formal de contexts [9]...

Per a totes les definicions anteriors no calia fer cap suposició sobre la t-norma T emprada. Per a definir ψ_E cal fer la suposició addicional que la t-norma és contínua per l'esquerra, ja que sinó la residuació no està ben definida. D'ara endavant suposarem sempre que la t-norma és contínua per l'esquerra.

Definició 2.1.13. *Sigui X un conjunt i E una T-indistingibilitat. Per tot $x, y \in X$ es defineix l'operador d'aproximació per extensionals superior ϕ_E: $[0,1]^X \to [0,1]^X$ i l'operador d'aproximació per extensionals inferior ψ_E: $[0,1]^X \to [0,1]^X$ com:*

$$\phi_E(\mu)(x) = \sup_{y \in X} T(E(x,y), \mu(y)).$$

$$\psi_E(\mu)(x) = \inf_{y \in X} \overrightarrow{T}(E(x,y)|\mu(y)).$$

A [96] es dóna una caracterització com a operadors que verifiquen les següents famílies d'equacions funcionals.

Teorema 2.1.14. *Sigui X un conjunt i $\phi : [0,1]^X \to [0,1]^X$. ϕ és l'aproximació per extensionals superior ϕ_E d'una certa T-indistingibilitat E si i només si ϕ verifica les següents propietats $\forall \mu, \mu'$ subconjunts difusos de X i $\forall x, y \in X$:*

1. $\mu \leq \mu' \Rightarrow \phi(\mu) \leq \phi(\mu')$
2. $\mu \leq \phi(\mu)$
3. $\phi(\bigvee_{i \in I} \mu_i) = \bigvee_{i \in I} \phi(\mu_i)$
4. $\phi(\phi(\mu)) = \phi(\mu)$
5. $\phi(\{x\})(y) = \phi(\{y\})(x)$
6. $\phi(T(\alpha, \mu)) = T(\alpha, \phi(\mu))$

Teorema 2.1.15. *Sigui X un conjunt i $\psi : [0,1]^X \to [0,1]^X$. ψ és l'aproximació per extensionals inferior ϕ_E d'una certa T-indistingibilitat E si i només si ψ verifica les següents propietats $\forall \mu, \mu'$ subconjunts difusos de X i $\forall x, y \in X$:*

1. $\mu \leq \mu' \Rightarrow \psi(\mu) \leq \psi(\mu')$
2. $\psi(\mu) \leq \mu$
3. $\psi(\bigwedge_{i\in I} \mu_i) = \bigwedge_{i\in I} \psi(\mu_i)$
4. $\psi(\psi(\mu)) = \psi(\mu)$
5. $\psi(\overrightarrow{T}(x|a)(y) = \psi(\overrightarrow{T}(y|a)(x)$
6. $\psi(\overrightarrow{T}(a|\mu)) = \overrightarrow{T}(a|\psi(\mu))$

Els conjunts d'operadors verificant les condicions de les proposicions 2.1.14 i 2.1.15; és a dir, que són els operadors d'aproximació superior i inferior per extensionals d'alguna certa indistingibilitat, els denotarem $\mathcal{U}$ i $\mathcal{L}$ respectivament.

2.2 Estructures reticulars

En el subcapítol anterior hem definit els conjunts $\mathcal{E}, \mathcal{H}, \mathcal{U}$ i $\mathcal{L}$. En aquest subcapítol mostrarem com aquests tenen una estructura interna de reticle complet.

Com es veurà, la construcció d'aquesta estructura reticular és absolutament anàloga en els quatre casos. Aquest fet és indicatiu de la profunda connexió que hi ha entre ells i que es concretarà en la demostració, en el següent subcapítol, de la seva isomòrfia.

2.2.1 Reticle de T-indistingibilitats

Per a provar l'estructura reticular de $\mathcal{E}$ cal primer donar la definició de clausura transitiva.

Definició 2.2.1. *Sigui T una t-norma i R una relació reflexiva i simètrica en X. La clausura transitiva $\overline{R}$ de R es defineix com*

$$\overline{R} = \bigcap_{E\in\mathcal{E},\mathcal{R}\leq\mathcal{E}} E$$

La clausura transitiva d'una relació reflexiva i simètrica R dóna la indistingibilitat més petita que conté R.

La intersecció $E \cap F$ de T-indistingibilitats és una indistingibilitat, però la unió $E \cup F$ no ho és en general ja que no preserva la propietat de T-transitivitat. Per tal que la unió sigui una operació binària interna en $\mathcal{E}$ cal considerar doncs la unió "tancada" $\overline{E \cup F}$.

L'ordre en $\mathcal{E}$ ve donat per l'ordre natural $E \leq F$.

Amb tot això, $(\mathcal{E}, \leq, \cap, \overline{\cup})$ té estructura de reticle.

2.2.2 Reticle de conjunts de subconjunts difusos extensionals

De forma similar al cas de les indistingibilitats, és ben sabut que la intersecció de conjunts d'extensionals H_E i H_F és alhora el conjunt d'extensionals d'una certa indistingibilitat, però no la seva unió. Per tal que la unió sigui una operació interna de $\mathcal{H}$ cal definir la clausura extensional d'una família de conjunts.

Definició 2.2.2. *Sigui $J \subseteq [0,1]^X$. La clausura extensional $\bar{J}$ de J es defineix com:*

$$\bar{J} = \bigcap_{J \subseteq H, H \in \mathcal{H}} H$$

L'ordre en $\mathcal{H}$ ve donat per la inclusió conjuntista $H_E \subseteq H_F$.

Així $(\mathcal{H}, \subseteq, \cap, \overline{\cup})$ té estructura de reticle.

2.2.3 Reticle d'operadors d'aproximació superior per conjunts difusos extensionals

La construcció del reticle en $\mathcal{U}$ és anàloga a la realitzada en els dos casos anteriors.

Definim primer la ϕ-clausura d'un operador.

Definició 2.2.3. *Sigui f un operador $f : [0,1]^X \to [0,1]^X$. La ϕ-clausura $\bar{f}$ de f es defineix com:*

$$\bar{f} = \bigwedge_{f \leq \phi, \phi \in \mathcal{U}} \phi$$

La conjunció (definida com el mínim) $\phi_E \wedge \phi_F$ d'operadors d'aproximació superior és l'operador d'aproximació superior d'una certa indistingibilitat però la disjunció (màxim) no. Cal, com abans, considerar la clausura de la disjunció.

Proposició 2.2.4. *Sigui f un operador* $f : [0,1]^X \to [0,1]^X$. *Aleshores* $\bar{f} \in \mathcal{U}$

Demostració. Trivial. □

Així $(\mathcal{U}, \leq, \vee, \overline{\wedge})$ té estructura de reticle.

2.2.4 Reticle d'operadors d'aproximació inferior per conjunts difusos extensionals

De nou, la construcció del en $\mathcal{L}$ és com la realitzada anteriorment. L'única diferència és que s'inverteix el paper de conjuncions i disjuncions respecte el cas dels operadors d'aproximació superior. Com es veurà amb més detall posteriorment, ϕ_E i ψ_E mostren un comportament dual.

Definició 2.2.5. *Sigui f un operador* $f : [0,1]^X \to [0,1]^X$. *La* ψ*-clausura* $\underline{f}$ *de f es defineix com:*

$$\underline{f} = \bigvee_{psi \leq f, \psi \in \mathcal{L}} \psi$$

Proposició 2.2.6. *Sigui f un operador* $f : [0,1]^X \to [0,1]^X$. *Aleshores* $\underline{f} \in \mathcal{L}$

Demostració. Trivial. □

Finalment, $(\mathcal{L}, \leq, \wedge, \underline{\vee},)$ és un reticle.

2.3 Teorema d'isomòrfia

Un cop es tenen les estructures ben definides demostrarem la seva isomòrfia algebraica. Aquest resultat tindrà una extrema importància semàntica i donarà consistència al treball aplicat que es desenvoluparà en capítols posteriors d'aquesta tesi.

El Teorema de Representació (Teorema 2.1.7) prova que els reticles $\mathcal{E}$ i $\mathcal{H}$ estan en bijecció. A continuació enunciem les bijeccions amb $\mathcal{U}$ i $\mathcal{L}$.

Proposició 2.3.1. *[84] Sigui $\phi : [0,1]^X \to [0,1]^X$ un operador satisfent les propietats de la Proposició 2.1.14. Aleshores la relació difusa E_ϕ definida com:*

$$E_\phi(x,y) = \phi(\{x\})(y)$$

és una relació de T-indistingibilitat en X.

Proposició 2.3.2. *[84] Sigui $\psi : [0,1]^X \to [0,1]^X$ un operador satisfent les propietats de la Proposició 2.1.15. Aleshores la relació difusa E_ψ definida com:*

$$E_\psi(x,y) = \inf_{\alpha\in[0,1]} \overrightarrow{T}(\psi(\overrightarrow{T}(\{x\}|\alpha)(y))|\alpha).$$

és una relació de T-indistingibilitat en X.

A [84] és demostra que les transformacions $E \to \phi_E$ i $\phi \to E_\phi$ són inverses una de l'altra. En conseqüència $\mathcal{E}$ i $\mathcal{U}$ estan en bijecció. El mateix resultat es té en $\mathcal{L}$.

El proper resultat prova que l'ordre està completament correlacionat entre aquests reticles.

Proposició 2.3.3. *Siguin E, F dues T-indistingibilitats en X. Aleshores:*

1. $E \leq F \Leftrightarrow H_F \subseteq H_E$
2. $E \leq F \Leftrightarrow \phi_E \leq \phi_F$
3. $E \leq F \Leftrightarrow \psi_F \leq \psi_E$

Demostració.

1. $\mu \in H_F$. $\forall x, y \ \mu(x) \geq T(F(x,y), \mu(y)) \ \geq T(E(x,y), \mu(y))$. Per tant $\mu \in H_E$.
2. Trivial, ja que T és creixent respecte la primera variable
3. Trivial, ja que $\overrightarrow{T}$ és decreixent respecte la primera variable.

□

Finalment, el proper teorema mostra com l'estructura donada per les operacions internes dels reticles són preservades per les bijeccions. Com a corol·lari d'aquest teorema es té la isomòrfia entre els reticles $\mathcal{E}, \mathcal{H}, \mathcal{U}$ i $\mathcal{L}$.

Teorema 2.3.4. *Siguin E i F dues T-indistingibilitats en un conjunt X. Aleshores:*

1. $H_{\overline{E \cup F}} = H_E \cap H_F$

2. $H_{E \cap F} = \overline{H_E \cup H_F}$

3. $\phi_{\overline{E \cup F}} = \overline{\phi_E \vee \phi_F}$

4. $\phi_{E \cap F} = \phi_E \wedge \phi_F$

5. $\psi_{\overline{E \cup F}} = \underline{\psi_E \wedge \psi_F}$

6. $\psi_{E \cap F} = \psi_E \vee \psi_F$

Demostració.

1. $\mu \in H_E \cap H_F \Leftrightarrow \mu \in H_E$ i $\mu \in H_F$. Equivalentment, $E_\mu \geq E$ i $E_\mu \geq F$ o $E_\mu \geq E \cup F$ i per la definició de clausura extensional això és equivalent a $E_\mu \geq \overline{E \cup F} \Leftrightarrow \mu \in H_{\overline{E \cup F}}$

2. $\supseteq)$

   $E \cap F \leq E \Rightarrow H_E \subseteq H_{E \cap F}$.
   $E \cap F \leq F \Rightarrow H_F \subseteq H_{E \cap F}$.
   Per tant $H_E \cup H_F \subseteq H_{E \cap F} \Rightarrow \overline{H_E \cup H_F} \subseteq H_{E \cap F}$.

   $\subseteq)$

   Sigui $\mu \in H_{E \cap F}$. Suposem que $\mu \notin \overline{H_E \cup H_F}$. Aleshores existeix un conjunt d'extensionals H_G, amb relació d'indistingibilitat G tal que $H_G \supseteq H_E \cup H_F$ i $\mu \notin H_G \Rightarrow \exists (x, y)$ tal que $E_\mu(x, y) < G(x, y)$. Sense pèrdua de generalitat podem suposar que $E(x,y) \leq F(x,y)$. Com $H_G \supseteq H_E \cup H_F$, $H_E \subseteq H_G$ i $H_F \subseteq H_G \Rightarrow G \leq E$ i $G \leq F$. Per tant:

$E_\mu(x,y) < G(x,y) \leq E(x,y) \leq F(x,y)$. Aleshores

$E_\mu(x,y) < (E \cap F)(x,y)$.

En conclusió, $\mu \notin H_{E\cap F}$, contràriament a la nostra hipòtesi inicial.
Per tant $\mu \in \overline{H_E \cup H_F}$.

3. Denotem $\overline{\phi_E \vee \phi_F} = \phi_G$. Hem de provar que $\phi_G = \phi_{\overline{E\cup F}}$.

$\leq)$
$E \leq \overline{E \cup F} \Rightarrow \phi_E \leq \phi_{\overline{E\cup F}}$
$F \leq \overline{E \cup F} \Rightarrow \phi_F \leq \phi_{\overline{E\cup F}}$
Aleshores, $\overline{\phi_E \vee \phi_F} = \phi_G \leq \phi_{\overline{E\cup F}}$.

$\geq)$
$\phi_G \geq \phi_E \Rightarrow G \geq E$
$\phi_G \geq \phi_F \Rightarrow G \geq F$
Aleshores, $G \geq \overline{E \cup F} \Rightarrow \phi_G \geq \psi_{\overline{E\cup F}}$.

4. Denotem $\phi_E \wedge \phi_F = \phi_G$. Hem de provar que $\phi_G = \phi_{\overline{E\cup F}}$.

$\geq)$
$E \cap F \leq E \Rightarrow \phi_{E\cap F} \leq \phi_E$
$E \cap F \leq F \Rightarrow \phi_{E\cap F} \leq \phi_F$
Aleshores, $\phi_E \wedge \phi_F = \phi_G \geq \phi_{E\cap F}$.

$\leq)$
$\phi_G \leq \phi_E \Rightarrow G \leq E$
$\phi_G \leq \phi_F \Rightarrow G \leq F$
Aleshores, $G \leq E \cap F \Rightarrow \phi_G \leq \phi_{E\cap F}$.

5. Denotem $\underline{\psi_E \wedge \psi_F} = \psi_G$. Hem de provar que $\psi_G = \psi_{\overline{E \cup F}}$.

   $\geq$)
   $E \leq \overline{E \cup F} \Rightarrow \psi_E \geq \psi_{\overline{E \cup F}}$
   $F \leq \overline{E \cup F} \Rightarrow \psi_F \geq \psi_{\overline{E \cup F}}$
   Aleshores, $\underline{\psi_E \wedge \psi_F} \geq \psi_{\overline{E \cup F}} \Rightarrow \psi_G \geq \psi_{\overline{E \cup F}}$.

   $\leq$)
   $\psi_G \leq \psi_E \Rightarrow G \geq E$
   $\psi_G \leq \psi_F \Rightarrow G \geq F$
   Aleshores, $G \geq \overline{E \cup F} \Rightarrow \psi_G \leq \psi_{\overline{E \cup F}}$.

6. Denotem $\psi_E \vee \psi_F = \psi_G$. Hem de veure que $\psi_G = \psi_{\overline{E \cup F}}$.

   $\leq$)
   $E \cap F \leq E \Rightarrow \psi_{E \cap F} \geq \psi_E$
   $E \cap F \leq F \Rightarrow \psi_{E \cap F} \geq \psi_F$
   Aleshores, $\psi_E \vee \psi_F = \psi_G \leq \psi_{E \cap F}$.

   $\geq$)
   $\psi_G \geq \psi_E \Rightarrow G \leq E$
   $\psi_G \geq \psi_F \Rightarrow G \leq F$
   Aleshores, $G \leq E \cap F \Rightarrow \psi_G \geq \psi_{E \cap F}$.

$\square$

Corol·lari 2.3.5. $\mathcal{E} \cong \mathcal{H} \cong \mathcal{U} \cong \mathcal{L}$

Aquest resultat té una importància tant teòrica com pràctica.

En una dimensió teòrica, es prova que els reticles $\mathcal{E}, \mathcal{H}, \mathcal{U}$ i $\mathcal{U}$ són isomorfs i per tant, tot i la seva diferent aproximació i definició semàntica, des d'un punt de vista estructural són idèntics. Per tant la seva diferència no és formal sinó purament interpretativa i de notació. Aquest isomorfisme unifica els múltiples resultats similars trobats a la literatura en la recerca local d'un dels quatre objectes matemàtics considerats.

Des d'un punt de vista pràctic aquests isomorfismes constructius donen un diccionari per a traduir la informació codificada en diferents reticles. Això permet, per exemple, agregar informació diversa que per motius operacionals s'ha recollit de diferent manera ja que es pot reduir a un marc comú.

Il·lustrem aquest punt amb un exemple. Suposem que es vol estudiar la diferència entre diferents perfums. Per una banda es pot considerar la seva fórmula química i, ja que es té la seva composició, és fàcil codificar aquesta informació en format numèric i construir una relació de proximitat i, en general, una indistingibilitat entre les diferents mostres estudiades. Per altra banda, ja que parlem de perfums, també és important considerar l'opinió del públic al respecte. Donat que la opinió que ens donaran serà eminentment qualitativa és més senzill recollir la seva valoració en diferents classes o conjunts, que podem prendre com una base d'extensionals. Tenir explicitat l'isomorfisme entre conjunts d'extensionals i relacions d'indistingibilitat ens permet agregar aquests dos atributs de naturalesa tan diversa però complementària.

Els resultats del Teorema 2.3.4 es poden resumir en el següent diagrama:

$$\begin{array}{ccccccc}
\mathcal{L} & \approx & \mathcal{U} & \approx & \mathcal{E} & \approx & \mathcal{H} \\[2ex]
\psi_E \vee \psi_F & \leftrightarrow & \phi_E \wedge \phi_F & \leftrightarrow & E \cap F & \leftrightarrow & \overline{H_E \cup H_F} \\[2ex]
\underline{\psi_E \wedge \psi_F} & \leftrightarrow & \overline{\phi_E \vee \phi_F} & \leftrightarrow & \overline{E \cup F} & \leftrightarrow & H_E \cap H_F
\end{array}$$

2.4 Extensió utilitzant mitjanes quasi-aritmètiques

El Teorema 2.3.4 prova l'equivalència entre $\mathcal{E}, \mathcal{H}, \mathcal{U}$ i $\mathcal{L}$ considerant les operacions bàsiques dels reticles.

En aquest subcapítol s'estudiarà si l'equivalència demostrada es manté quan considerem operadors d'agregació més complexos com les mitjanes quasi-aritmètiques ponderades, que anomenarem mitjanes naturals. Per a poder-les definir suposarem que la t-norma T és contínua i arquimediana. El resultat principal serà que l'equivalència es preserva entre $\mathcal{E}$ i $\mathcal{H}$, però no amb $\mathcal{U}$ ni $\mathcal{L}$. Donarem tots els detalls de les proves en el cas finit, que ocuparà el primer subsubcapítol i només els principals enunciats en el cas infinit que presentarem després, ja que són anàlogues.

2.4.1 Cas finit

Per a simplificar les fórmules, ens restringirem a les mitjanes de dues T-indistingibilitats. La generalització a l'agregació de n T-indistingibilitats és directa.

En primer lloc recordem la definició de mitjana quasi aritmètica.

Definició 2.4.1. *[1] Sigui $t : [0,1] \to [-\infty, \infty]$ una funció estrictament monòtona $x, y \in [0,1]$. La mitjana quasi-aritmètica m_t de x i y es defineix com:*

$$m_t(x,y) = t^{-1}\left(\frac{t(x) + t(y)}{2}\right)$$

m_t és contínua si i només si $\{-\infty, \infty\} \nsubseteq Ran(t)$.

En presència d'una t-norma arquimediana podem prendre com a funció estrictament monòtona t de la mitjana un dels generadors additius de la t-norma T. Anomenarem a aquesta mitjana la mitjana natural de T. El terme natural ve del fet que fixada la t-norma, la manera numèrica d'entendre la conjunció lògica, queda fixada de forma directa una mitjana associada.

Proposició 2.4.2. *[62] La funció que assigna a cada t-norma T amb generador additiu t la mitjana quasi-aritmètica m_t és una bijecció entre els conjunts corresponents.*

A continuació definim les mitjanes quasi-aritmètiques ponderades. Quan utilitzem el generador additiu d'una t-norma les anomenarem mitjanes naturals ponderades.

Definició 2.4.3. *Sigui $t : [0,1] \to [-\infty, \infty]$ una funció estrictament monòtona, $x, y \in [0,1]$ i $r \in [0,1]$. La mitjana quasi-aritmètica ponderada (amb peso r i $1-r$) m_t^r de x i y es defineix com:*

$$m_t^r(x,y) = t^{-1}(r \cdot t(x) + (1-r) \cdot t(y)).$$

El paràmetre de pes r defineix una homotopia entre x i y, que per $r = \frac{1}{2}$ recupera la definició de mitjana quasi-aritmètica.

Es directe comprovar que la mitjana natural ponderada d'indistingibilitats és una indistingibilitat.

Proposició 2.4.4. *[62] Sigui T una t-norma contínua i arquimediana i t un generador additiu, E, F dues T-indistingibilitats en un conjunt X i $r \in [0,1]$. La mitjana ponderada natural de E i F es defineix com:*

$$m_t^r(E,F)(x,y) = t^{[-1]}(r \cdot t(E(x,y)) + (1-r) \cdot t(F(x,y)))$$

i és una relació de T-indistingibilitat

Podem definir també les mitjanes naturals en els reticles $\mathcal{H}$, $\mathcal{U}$ i $\mathcal{L}$ com segueix:

Definició 2.4.5. *Sigui T una t-norma contínua i arquimediana t, E, F dues T-indistingibilitats en un conjunt X i $r \in [0,1]$. Aleshores $m_t^r(H_E, H_F)$, $m_t^r(\phi_E, \phi_F)$ i $m_t^r(\psi_E, \psi_F)$ es defineixen com:*

- $\mu \in m_t^r(H_E, H_F) \Leftrightarrow \exists \nu \in H_E, \rho \in H_F$ *tals que* $\mu(x) = t^{[-1]}(r \cdot t(\nu(x)) + (1-r) \cdot t(\rho(x)))$
- $m_t^r(\phi_E, \phi_F)(\mu)(x) = t^{-1}(r \cdot t(\phi_E(\mu)(x)) + (1-r) \cdot t(\phi_F(\mu)(x)))$
- $m_t^r(\psi_E, \psi_F)(\mu)(x) = t^{-1}(r \cdot t(\psi_E(\mu)(x)) + (1-r) \cdot t(\psi_F(\mu)(x)))$

Al Teorema 2.4.9 es demostra que $\overline{m_t^r(H_E, H_F)} = H_{m_t^r(E,F)}$. Això respondrà afirmativament a la pregunta de si podem estendre els resultats del subcapítol anterior entre $\mathcal{E}$ i $\mathcal{H}$ quan considerem mitjanes quasi-aritmètiques. Per a fer-ho necessitem alguns lemes previs.

Definició 2.4.6. *Sigui E una relació d'indistingibilitat en un conjunt X. Per a cada $x \in X$ la columna μ_x és el subconjunt difús de X definit com:*

$$\mu_x = E(x, y) \forall x, y \quad \in X$$

Lema 2.4.7. *Sigui μ_x una columna de $m_t^r(E, F)$. Aleshores $\mu_x \in m_t^r(H_E, H_F)$*

Demostració. μ_x és a columna de $m_t^r(E, F)$ si i només si $\mu_x(y) = m_t^r(E, F)(x, y)$

Aleshores $\mu_x = m_t^r(\sigma_x, \rho_x)$, sent σ_x i ρ_x les corresponents columnes de E i F respectivament.

En efecte, $\mu_x(y) = m_t^r(E, F)(x, y) = \mu_x(y) = m_t^r(E(x, y), F(x, y) =$
$= m_t^r(\sigma_x(y), \rho_x(y))$ □

Lema 2.4.8. *Siguin A i B dues famílies de subconjunts difusos en X. Aleshores*

$$E_A = E_B \Leftrightarrow \overline{A} = \overline{B}$$

essent E_A i E_B les T-indistingibilitats generades per A i B respectivament segons el Teorema de Representació.

Demostració. Trivial. □

Teorema 2.4.9. *Sigui T una t-norma contínua i arquimediana i t un generador additiu, E i F dues T-indistingibilitats en un conjunt X amb conjunts d'extensionals H_E i H_F respectivament i $r \in [0, 1]$. Aleshores:*

$$\overline{m_t^r(H_E, H_F)} = H_{m_t^r(E,F)}$$

Demostració. $\leq$)

Provarem $m_t^r(H_E, H_F) \leq H_{m_t^r(E,F)}$. Això provarà la desigualtat, ja que $\overline{m_t^r(H_E, H_F)}$ és el conjunt d'extensionals més petit major o igual que $m_t^r(H_E, H_F)$.

Sigui $\mu \in H_E$ i $\nu \in H_F$. Hem de veure que

$$E_{m_t^r(\mu,\nu)} \geq m_t^r(E, F)$$

que és equivalent a demostrar:

$$T(m_t^r(E,F)(x,y), m_t^r(\mu(y), \nu(y))) \leq m_t^r(\mu(x), \nu(x)).$$

Expandint, això és anàleg a demostrar:

$$t^{[-1]}(t(t^{-1}(r\cdot t(E(x,y))+(1-r)\cdot t(F(x,y))))+t(t^{-1}(r\cdot t(\mu(y))+(1-r)\cdot t(\nu(y)))))$$

$$\leq t^{-1}(r \cdot t(\mu(x)) + (1-r) \cdot t(\nu(x))).$$

Simplificant,

$$t^{-1}(r \cdot t(E(x,y)) + (1-r) \cdot t(F(x,y))) + r \cdot t(\mu(y)) + (1-r) \cdot t(\nu(y))))$$

$$\leq t^{-1}(r \cdot t(\mu(x)) + (1-r) \cdot t(\nu(x))).$$

Que és equivalent a:

$$r \cdot t(E(x,y)) + (1-r) \cdot t(F(x,y)) + r \cdot t(\mu(y)) + (1-r) \cdot t(\nu(y))$$

$$\geq r \cdot t(\mu(x)) + (1-r) \cdot t(\nu(x))$$

I això és cert, ja que $\mu \in H_E$ i $\nu \in H_F$.

$\geq$)

$\overline{m_t^r(H_E, H_F)} \geq H_{m_t^r(E,F)} \Leftrightarrow E_{m_t^r(H_E,H_F)} \leq m_t^r(E,F)$. Demostrarem aquesta darrera desigualtat.

Sigui μ_x una columna de $m_t^r(E,F)$. Pel Lema 2.4.7 $\mu \in m_t^r(H_E, H_F)$ i

$$E_{m_t^r(H_E,H_F)}(y,z) \leq E_{\mu_x}(y,z) = \overleftrightarrow{T}(m_t^r(E,F)(x,y), m_t^r(E,F)(x,z))$$

$$\leq m_t^r(E,F)(y,z)$$

ja que $\overleftrightarrow{T}$ és T-transitiva.

Per tant, $E_{m_t^r(H_E,H_F)} \leq m_t^r(E,F)$ o, equivalentment, $\overline{m_t^r(H_E, H_F)} \geq H_{m_t^r(E,F)}$.

$\square$

Aquest teorema respon afirmativament a la pregunta que motiva aquest capítol respecte $\mathcal{E}$ i $\mathcal{H}$. Acabem de provar, constructivament, que és possible estendre l'isomorfisme demostrat al Teorema 2.3.4 quan considerem mitjanes naturals ponderades. Donada la simetria que han mostrat fins ara els reticles $\mathcal{E}, \mathcal{H}, \mathcal{U}$ i $\mathcal{L}$ seria esperable que aquesta extensió de l'equivalència també s'estengués sobre aquests dos darrers reticles. Contraintuïtivament, això és fals i la simetria es trenca.

A continuació provarem que quan considerem mitjanes naturals d'operadors d'aproximació per extensionals superior i inferior una desigualtat es manté mentre que l'altra no es verifica. Més endavant donarem un contraexemple per provar que aquesta ruptura de la simetria és inevitable i raonarem per què succeeix aquest fenomen.

Proposició 2.4.10. *Sigui T una t-norma contínua i arquimediana i t un generador additiu, E i F dues T-indistingibilitats en un conjunt X amb operadors d'aproximació superior ϕ_E i ϕ_F respectivament i $r \in [0,1]$. Aleshores:*

$$m_t^r(\phi_E, \phi_F) \geq \phi_{m_t^r(E,F)}.$$

Demostració. Sigui $\mu \in [0,1]^X$ un subconjunt difús i $x \in X$. Hem de veure que

$$m_t^r(\phi_E, \phi_F)(\mu(x)) \geq \phi_{m_t^r(E,F)}(\mu(x)).$$

Expandint aquesta expressió, cal veure:

$$t^{-1}(r \cdot t(\sup_{y\in X} t^{[-1]}(t(E(x,y)) + t(\mu(y))) + (1-r) \cdot t(\sup_{y\in X} t^{[-1]}(t(F(x,y)) + t((\mu(y))))$$
$$\geq \sup_{y\in X} t^{[-1]}(t(t^{-1}(r \cdot t(E(x,y)) + (1-r) \cdot t(F(x,y)) + t(\mu(y))).$$

Que és equivalent a:

$$t^{-1}(r \cdot \inf_{y\in X}(t(E(x,y)) + t(\mu(y))) + (1-r) \cdot \inf_{y\in X}(t(F(x,y)) + t(\mu(y))))$$
$$\geq t^{-1}(\inf_{y\in X}(r \cdot t(E(x,y)) + (1-r) \cdot t(F(x,y)) + t(\mu(y))))$$

o, equivalentment

$$
\begin{aligned}
r \cdot \inf_{y\in X}(t(E(x,y)) + t(\mu(y))) + (1-r)\cdot \inf_{y\in X}(t(F(x,y)) + t(\mu(y))) \\
\leq \inf_{y\in X}(r\cdot t(E(x,y)) + (1-r)\cdot t(F(x,y)) + t(\mu(y))),
\end{aligned}
$$

que és cert perquè la suma d'ínfims és menor o igual que l'ínfim de la suma. □

Proposició 2.4.11. *Sigui T una t-norma contínua i arquimediana amb generador additiu t, E i F dues T-indistingibilitats en un conjunt X amb operadors d'aproximació inferior ψ_E i ψ_F respectivament i $r \in [0,1]$. Aleshores:*

$$
m_t^r(\psi_E, \psi_F) \leq \psi_{m_t^r(E,F)}
$$

Demostració. Sigui $\mu \in [0,1]^X$ un conjunt difús i $x \in X$.
Reescrivint la desigualtat en termes de t, cal veure que

$$
\begin{aligned}
t^{-1}(r\cdot t(\inf_{y\in X}(t^{[-1]}(t(\mu(y))-t(E(x,y)))+(1-r)\cdot t(\inf_{y\in X}(t^{[-1]}(t(\mu(y))-t(F(x,y)))) \\
\leq \inf_{y\in X} t^{[-1]}(t(\mu(y)) - t(t^{-1}(r\cdot t(E(x,y)) + (1-r)\cdot t(F(x,y)))))
\end{aligned}
$$

Simplificant, tenim l'expressió equivalent:

$$
\begin{aligned}
t^{-1}(r\cdot \sup_{y\in X}(t(\mu(y)) - t((E(x,y))) + (1-r)\cdot \sup_{y\in X}(t(\mu(y)) - t((F(x,y)))) \\
\leq \inf_{y\in X} t^{-1}(t(\mu(y)) - r\cdot t(E(x,y)) - (1-r)\cdot t(F(x,y))),
\end{aligned}
$$

que és equivalent a:

$$
\begin{aligned}
r\cdot \sup_{y\in X}(t(\mu(y)) - t(E(x,y))) + (1-r)\cdot \sup_{y\in X}(t(\mu(y)) - t(F(x,y))) \\
\geq \sup_{y\in X}(t(\mu(y)) - r\cdot t(E(x,y)) - (1-r)\cdot t(F(x,y))).
\end{aligned}
$$

Que és cert perquè la suma de suprems és major o igual que el suprem de la suma. □

Com s'ha comentat anteriorment, l'esperada desigualtat contrària (prenent les clausures corresponents) no es compleix. El següent contraexemple mostra que aquest fet és insalvable:

Exemple 2.4.12. *Sigui X un conjunt finit amb cardinalitat 3. Considerem les següents relacions d'indistingibilitat E i F respecte de la t-norma de Łukasiewicz.*

$$E = \begin{pmatrix} 1 & 0.6 & 0.7 \\ 0.6 & 1 & 0.8 \\ 0.7 & 0.8 & 1 \end{pmatrix} \quad F = \begin{pmatrix} 1 & 0.8 & 0.7 \\ 0.8 & 1 & 0.6 \\ 0.7 & 0.6 & 1 \end{pmatrix}$$

La mitjana natural $m_t(E, F)$ de E i F és:

$$m_t(E, F) = \begin{pmatrix} 1 & 0.7 & 0.7 \\ 0.7 & 1 & 0.7 \\ 0.7 & 0.7 & 1 \end{pmatrix}$$

Considerem el conjunt difús següent $\mu = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0.7 \end{pmatrix}$

$\mu \in H_{m_t(E,F)}$ *ja que* $E_\mu \geq m_t(E, F)$ *(Proposició 2.1.10).*

$\mu \in H_{m_t(E,F)}$ *i* $\mu \in H_F$ *però* $\mu \notin H_E$*.*

Els conjunts difusos extensionals són punts fixos dels operadors d'aproximació superior i inferior, així que:

$\phi_{m_t(E,F)}(\mu) = \phi_F(\mu) = \mu$, $\psi_{m_t(E,F)}(\mu) = \psi_F(\mu) = \mu$.

Però $\mu \notin H_E \Rightarrow \phi_E(\mu) > \mu$ *i* $\psi_E(\mu) < \mu$*.*

Per tant $\phi_{m_t(E,F)}(\mu) < m_t(\phi_E, \phi_F)$ *i* $\psi_{m_t(E,F)}(\mu) > m_t(\psi_E, \psi_F)$*, i la igualtat no s'abasta.*

El factor diferencial que trenca la simetria entre $\mathcal{H}, \mathcal{U}$ i $\mathcal{L}$ és el següent:

Sense considerar clausures hem demostrat que:

- $m_t^r(H_E, H_F) \leq H_{m_t^r(E,F)}$
- $m_t^r(\phi_E, \phi_F) \geq \phi_{m_t^r(E,F)}$
- $m_t^r(\psi_E, \psi_F) \leq \psi_{m_t^r(E,F)}$

I prenent les clausures segons les hem definit al subcapítol 2.2 a les expressions anteriors es té:

- $m_t^r(H_E, H_F) \leq \overline{m_t^r(H_E, H_F)} \leq H_{m_t^r(E,F)}$
- $\overline{m_t^r(\phi_E, \phi_F)} \geq m_t^r(\phi_E, \phi_F) \geq \phi_{m_t^r(E,F)}$
- $\underline{m_t^r(\psi_E, \psi_F)} \leq m_t^r(\psi_E, \psi_F) \leq \psi_{m_t^r(E,F)}$

Com es pot veure a la demostració del Teorema 2.4.9, prendre la clausura extensional és necessari per a abastar la desigualtat contrària que prova la igualtat. Per contra, prendre clausures dels operadors d'aproximació superior i inferior no aporta res per la desigualtat contrària sinó que reforça la ja demostrada. I, com el contraexemple anterior prova, aquest fet és insalvable.

En conclusió, podem resumir els resultats demostrats en aquest subcapítol i l'anterior en el següent diagrama:

$$\begin{array}{ccccccc}
\mathcal{L} & \approx & \mathcal{U} & \approx & \mathcal{E} & \approx & \mathcal{H} \\
\\
\psi_E \vee \psi_F & \leftrightarrow & \phi_E \wedge \phi_F & \leftrightarrow & E \cap F & \leftrightarrow & \overline{H_E \cup H_F} \\
\\
\underline{\psi_E \wedge \psi_F} & \leftrightarrow & \overline{\phi_E \vee \phi_F} & \leftrightarrow & \overline{E \cup F} & \leftrightarrow & H_E \cap H_F \\
\\
\geq \underline{m_t^r(\psi_E, \psi_F)} & \leftrightarrow & \leq \overline{m_t^r(\phi_E, \phi_F)} & \leftrightarrow & m_t^r(E, F) & \leftrightarrow & \overline{m_t^r(H_E, H_F)}
\end{array}$$

Per acabar el subcapítol demostrem alguns resultats finals sobre mitjanes naturals en $\mathcal{U}$ i $\mathcal{L}$.

Teorema 2.4.13. *Siguin F i G dues T-indistingibilitats en un conjunt X amb operadors d'aproximació superior i inferior ϕ_F, ϕ_G, ψ_F i ψ_G respectivament i $r \in [0, 1]$. Aleshores:*

- $\phi_{E_{m_t^r(H_F,H_G)}} = \phi_{m_t^r(F,G)}$
- $\psi_{E_{m_t^r(H_F,H_G)}} = \psi_{m_t^r(F,G)}$

Demostració. Pel lema 2.4.8 $E_{m_t^r(H_F,H_G)} = E_{\overline{m_t^r(H_F,H_G)}}$.

Pel Teorema 2.4.9 $m_t^r(H_F, H_G) = H_{m_t^r(F,G)}$.

Unificant resultats, $E_{m_t^r(H_F,H_G)} = E_{H_{m_t^r(F,G)}} = m_t^r(F, G) \Rightarrow \phi_{E_{m_t^r(H_F,H_G)}} = \phi_{m_t^r(F,G)}$ i $\psi_{E_{m_t^r(H_F,H_G)}} = \psi_{m_t^r(F,G)}$.

□

2.4.2 Cas infinit

Al subcapítol anterior ens hem centrat en estendre els resultats del subcapítol 2.3 considerant mitjanes naturals ponderades de dues indistingibilitats. Per un nombre finit n de relacions a agregar la construcció, resultats i demostracions són idèntics que en el cas $n = 2$.

En aquest subcapítol mostrarem (sense entrar en els detalls de les demostracions ja que són anàlogues al cas finit) com tots els resultats es preserven quan considerem mitjanes naturals d'un nombre infinit de relacions d'indistingibilitat.

Definició 2.4.14. *[71] Sigui X un conjunt, T una t-norma contínua i arquimediana amb generador t i $(E_i)_{i\in[a,b]}$ una família de T indistingibilitats en X. La mitjana natural de $(E_i)_{i\in I}$ es defineix com:*

$$E(x, y) = t^{-1}\left(\frac{1}{b - a}\int_a^b t(E_i(x, y))di\right).$$

Considerarem mitjanes naturals i no mitjanes naturals ponderades per simplificar la notació. Els resultats amb aquestes darreres són els mateixos i només cal imposar que la suma de pesos normalitzi l'agregació, és a dir $\sum_{i\in[a,b]} r_i = b - a$.

Proposició 2.4.15. *La mitjana natural d'infinites indistingibilitats és una indistingibilitat i no depèn de la tria del generador de la t-norma.*

Demostració. Trivial, comprovació de les propietats. □

Definim a continuació la mitjana natural de conjunts d'extensionals. Com es demostra, es verifica el mateix resultat que al teorema 2.4.9

Teorema 2.4.16. *Sigui T una t-norma contínua i arquimediana i t un generador additiu, $(E_i)_{i\in[a,b]}$ una família de T-indistingibilitats en un conjunt X, $(\mu_i)_{i\in[a,b]}$ una família de conjunts difusos en X amb $\mu_i \in H_{E_i}$ per tot $i \in [a,b]$ i μ el conjunt difús en X definit com:*

$$\mu(x) = t^{-1}\left(\frac{1}{b-a}\int_a^b t(\mu_i(x))di\right).$$

Aleshores $\mu \in H_E$, on E és la T-indistingibilitat mitjana natural de la família $(E_i)_{i\in[a,b]}$.

Demostració. μ_i és extensional respecte E_i,

$$\mu_i(x) \le t^{[-1]}(t(E_i(x,y)) + t(\mu_i(y)))$$

i

$$t(\mu_i(x)) \ge t(E_i(x,y)) + t(\mu_i(y)).$$

$$\begin{aligned} t(\mu(x) &= \frac{1}{b-a}\int_a^b t(\mu_i(x))di \\ &\ge \frac{1}{b-a}\int_a^b t(E_i(x,y))di + \frac{1}{b-a}\int_a^b t(\mu_i(y))di \\ &= t(E(x,y) + t(\mu(y))). \end{aligned}$$

□

Com en el subcapítol 2.4, quan considerem mitjanes naturals d'operadors d'aproximació superior i inferior per extensionals només s'abasta una desigualtat, i pel mateix raonament que es detalla al final del subcapítol anterior considerar clausures no aporta la desigualtat contrària.

Teorema 2.4.17. *Sigui T una t-norma contínua i arquimediana amb generador additiu t, $(E_i)_{i\in[a,b]}$ una família de T-indistingibilitats en un conjunt X i $(\phi_{E_i})_{i\in[a,b]}$ la família d'operadors d'aproximació superior corresponent. Aleshores l'operador d'aproximació superior ϕ_E de la mitjana natural E de $(E_i)_{i\in[a,b]}$ verifica.*

$$\phi_E(\mu(x)) \le t^{-1}\left(\frac{1}{b-a}\int_a^b t(\phi_i(\mu(x)))di\right)$$

per tot subconjunt difús μ de X i $x \in X$.

Demostració.

$$\begin{aligned}\phi_E(\mu(x)) &= \sup_{y\in X} T(E(x,y),\mu(y)) = \sup_{y\in X} t^{[-1]}(t(E(x,y)) + t(\mu(y))) \\ &= \sup_{y\in X} t^{[-1]}(\frac{1}{b-a}\int_a^b t(E_i(x,y))di + t(\mu(y))) \\ &\leq t^{-1}(\frac{1}{b-a}\int_a^b t(\phi_i(\mu(x)))di).\end{aligned}$$

□

De forma idèntica es demostra la desigualtat corresponent a $\mathcal{L}$.

Teorema 2.4.18. *Sigui T una t-norma contínua i arquimediana i t un generador additiu, $(E_i)_{i\in[a,b]}$ una família de T-indistingibilitats en un conjunt X i $(\psi_{E_i})_{i\in[a,b]}$ la família d'operadors d'aproximació inferior corresponent. Aleshores l'operador d'aproximació superior ψ_E de la mitjana natural E de $(E_i)_{i\in[a,b]}$ verifica.*

$$\psi_E(\mu(x)) \geq t^{-1}(\frac{1}{b-a}\int_a^b t(\psi_i(\mu(x)))di)$$

per tot subconjunt difús μ de X i $x \in X$.

2.5 Robustesa de resultats respecte isomorfismes de t-normes

En els subcapítols anteriors hem estudiat la relació estructural entre els reticles $\mathcal{E}$, $\mathcal{H}$, $\mathcal{U}$ i $\mathcal{L}$ i ha quedat demostrat que la seva relació es molt més profunda que la coneguda a la literatura.

Tanmateix, tots aquests conjunts depenen de la tria anterior d'una t-norma de referència. L'interès de tots els resultats provats quedaria fortament diluït si aquests no es mantinguessin respecte isomorfismes de t-normes. En aquest subcapítol es comprova que, en efecte, tot el que s'ha demostrat es preserva sota isomorfismes de t-normes i, en conclusió, tots aquests resultats són robustos.

Recordem la definició d'isomorfisme de t-normes.

Definició 2.5.1. *[68] Dues t-normes contínues T, T' són isomorfes si i només si existeix una aplicació bijectiva $f : [0, 1] \to [0, 1]$ tal que $f \circ T = T' \circ (f \times f)$.*

Definició 2.5.2. *[61] Donades dues t-normes T, T', una relació de T-indistingibilitat E en un conjunt X i una altra relació de T'-indistingibilitat E' en X', un morfisme ϕ entre E i E' és un parell d'aplicacions $\phi = (h, f)$ que fa commutatiu el següent diagrama:*

$$\begin{array}{ccc} X \times X & \xrightarrow{E} & [0,1] \\ \Big\downarrow{\scriptstyle h\times h} & & \Big\downarrow{\scriptstyle f} \\ X' \times X' & \xrightarrow{E'} & [0,1] \end{array}$$

(i.e. $f(E(x, y)) = E'(h(x), h(y))$ per tot $x, y \in X$).

Quan h i f són bijeccions direm que ϕ és un isomorfisme.

Per a simplificar, prendrem $h = Id_X$ i $X' = X$. Així, els isomorfismes queden completament caracteritzats per f.

El resultat principal que assegura la robustesa de tots els resultats demostrats respecte isomorfismes de t-normes és que aquests impliquen necessàriament isomorfismes de T-indistingibilitats.

Proposició 2.5.3. *Sigui $f : [0, 1] \to [0, 1]$ un isomorfisme entre dues t-normes T i T' i E una relació de T-indistingibilitat en un conjunt X. Aleshores E i $f \circ E$ són indistingibilitats isomorfes*

Demostració. Trivial. □

Lema 2.5.4. *[61] Siguin T i T' t-normes isomorfes. Aleshores $\overrightarrow{T}$ i $\overrightarrow{T'}$ són isomorfes.*

El proper resultat, trivial a partir de la proposició i el lema anteriors, garanteix que isomorfismes de t-normes impliquen isomorfismes en $\mathcal{H}, \mathcal{U}$ i $\mathcal{L}$. Això prova la robustesa respecte isomorfismes de t-normes enunciada.

Proposició 2.5.5. *Sigui $f : [0, 1] \to [0, 1]$ una aplicació que defineix un isomorfisme entre dues t-normes T i T'. Sigui E una relació de T-indistingibilitat en un conjunt X i $f \circ E$ una T'-indistingibilitat en X isomorfa a E. Aleshores:*

- $\mu \in H_E \Leftrightarrow f \circ \mu \in H_{f \circ E}$
- $f \circ \phi_E = \phi_{f \circ E}$
- $f \circ \psi_E = \psi_{f \circ E}$

Demostració. Trivial. $\square$

La teoria estudiada avui, i que ens sembla inútil, tindrà potser projeccions inimaginades en el futur. Qui podrà imaginar aquest enigma en la seva projecció, a través dels segles? Qui podrà resoldre la gran incògnita dels temps que vindran des de l'equació del present? Només Allah sap la veritat! I és possible que les investigacions teòriques de l'avui proporcionin en mil o dos mil anys recursos preciosos per a la pràctica.

Al·legació de Beremiz en defensa de la ciència creativa

3

Aproximació per extensionals

En aquest capítol es tractarà un problema fonamental del camp de les indistingibilitats. Donat un conjunt difús (qualsevol) en un univers de discurs X dotat d'una relació d'indistingibilitat E, quin és el conjunt extensional que millor l'aproxima?

Al capítol anterior s'han definit amb rigor els conceptes necessaris pel plantejament d'aquest problema així com per la seva resolució. En primer lloc s'han definit les relacions d'indistingibilitat, que modelen la noció de similitud entre objectes en el marc de la lògica difusa. Els conjunts extensionals associats a la indistingibilitat es corresponen amb els conjunts observables quan aquesta es té en compte. Per últim s'han introduït dos operadors ϕ_E i ψ_E que aplicats a un conjunt difús μ donen l'extensional més petit que conté μ i el més gran contingut en μ respectivament.

Més enllà del problema en un sentit purament matemàtic aquest té alhora un profund interès científic, que justifiquem a continuació.

Com ja s'ha comentat al capítol 1, tot sistema perceptiu (ja sigui un sensor antifum, una càmera fotogràfica o un ésser humà) té limitacions i per tant és imperfecte. Un sistema perceptiu perfecte hauria de ser capaç de distingir tots els objectes diferents. Però tot sistema és imperfecte i això no es compleix. En altres paraules tot sistema perceptiu realitza una identificació. Matemàticament això es pot entendre com un operador de similitud operant sobre l'univers de discurs. És a dir, el sistema, en l'acte de percepció, introdueix una relació de similitud sobre la realitat (interna) que percep.

Al capítol 1 s'ha dissertat llargament i argumentat com la versatilitat i semàntica de la lògica difusa ofereix un marc ideal per a estudiar aquests fenòmens, ergo pren sentit representar aquesta relació de similitud introduïda pel perceptor com una indistingibilitat.

Trobar el conjunt extensional que millor aproxima un conjunt arbitrari és, per tant, anàleg al problema de com un perceptor veu un objecte no representable en el seu espai mental.

A la literatura aquest problema no ha estat tractat de forma directa. De fet els millors mètodes proposats són els operadors ϕ_E i ψ_E ja definits en aquesta tesi. Aquests donen el millor extensional per sobre o per sota d'un subconjunt difús μ respectivament, però no s'assegura que no hi hagi extensionals "intermedis" (per sobre de μ per a alguns elements de l'univers X i per sota de μ per a d'altres) més propers al conjunt original.

En aquest capítol es proposaran tres mètodes nous d'aproximació per extensionals per a t-normes arquimedianes (es donaran fórmules explícites per les t-normes de Łukasiewicz i el Producte) i un per a la t-norma Mínim.

En primer lloc és donarà un mètode basat en mitjanes naturals ponderades de ϕ_E i ψ_E. A continuació se'n donarà un considerant potències (homotècies) de la t-norma. Aquests dos mètodes seran donats tant en un cas finit com infinit. Per últim es donarà un mètode basat en resoldre un problema de Programació Quadràtica.

Els tres mètodes proposats seran il·lustrats en un exemple comú que servirà per a mostrar les diferències entre ells i els avantatges i inconvenients de cadascun.

Com es mostrarà, tots tres milloren amb escreix els resultats donats pels operadors ϕ_E i ψ_E.

Per acabar es donarà un mètode per a la t-norma del mínim que millora les aproximacions trobades a la literatura.

3.1 Mètode basat en mitjanes ponderades

El primer mètode d'aproximació per extensionals està basat en considerar l'òptima ponderació de la mitjana natural ponderada entre $\phi_E(\mu)$ i $\psi_E(\mu)$. Donat que $\phi_E(\mu)$ dóna una aproximació per sobre i $\psi_E(\mu)$ en dóna una per sota, pren sentit considerar mitjanes d'aquests operadors per a trobar extensionals intermedis.

D'ara endavant en aquest capítol denotarem X l'univers de discurs, E la relació d'indistingibilitat i μ el subconjunt difús que es vol aproximar. A més, llevat del darrer subcapítol, considerarem la t-norma contínua, arquimediana i amb t un generador additiu.

Una conseqüència de l'estudi realitzat al capítol 2 és que en efecte la mitjana de dos extensionals (i en particular de $\phi_E(\mu)$ i $\psi_E(\mu)$) és un extensional.

Proposició 3.1.1. *Siguin μ, ν conjunts difusos extensionals en X respecte la indistingibilitat E. Aleshores:*

$$m_t^r(\mu, \nu) \in H_E.$$

Demostració. Hem de provar que

$$T(E(x,y), m_t^r(\mu,\nu)(y)) \leq m_t^r(\mu,\nu)(x).$$

Expandint T mitjançant t això és equivalent a

$$t(E(x,y)) + r \cdot t(\mu)(y)) + (1-r) \cdot t(\nu)(y))$$

$$\leq r \cdot t((\mu)(x)) + (1-r) \cdot t((\nu)(x))$$

que podem reescriure com

$$
\begin{aligned}
& r \cdot t(E(x,y)) + r \cdot t(\phi_E(\mu)(y)) \\
& \quad + (1-r) \cdot t(E(x,y)) + (1-r) \cdot t(\psi_E(\mu)(y)) \\
& \quad \geq r \cdot t(\phi_E(\mu)(x)) + (1-r) \cdot t(\psi_E(\mu)(x))
\end{aligned}
$$

que és cert ja que μ i ν són extensionals. $\square$

Corol·lari 3.1.2. $m_t^r(\phi_E(\mu), \psi_E(\mu)) \in H_E \ \forall r \in [0,1]$.

S'observa directament que prenent la mitjana natural ponderada $m_t^r(\phi_E(\mu), \psi_E(\mu))$ en els casos límit $r = 0, 1$ és té $\phi_E(\mu)$ i $\phi_E(\mu)$ respectivament. La qüestió doncs és per quin valor de r l'error comès en l'aproximació és menor. Matemàticament el problema doncs es redueix a trobar el valor de r que minimitza la següent funció (per a alguna norma $||||$).

$$F(r) = ||\mu - m_t^r(\phi_E, \psi_E)||$$

Considerant la distància euclidiana, minimitzar aquesta funció és equivalent a minimitzar el quadrat de la mateixa així que podem prendre com a funció:

$$F(r) = ||\mu - m_t^r(\phi_E, \psi_E)||^2$$

Per la t-norma de Łukasiewicz l'expressió anterior dóna una fórmula explícita per a trobar el valor òptim de r. Per a fer menys feixugues les fórmules denotarem d'ara en endavant μ_i enlloc de $\mu(x_i)$, ϕ_i enlloc de $\phi_E(\mu)(x_i))$ i ψ_i enlloc de $\psi_E(\mu)(x_i))$

Teorema 3.1.3. *Sigui μ un conjunt difús en un conjunt finit $X = \{x_1, \ldots, x_n\}$ i $T =$Ł la t-norma de Łukasiewicz. El valor de r que minimitza l'expressió $F(r) = ||\mu - m_t^r(\phi_E, \psi_E)||^2$ és:*

$$r = \frac{\sum \mu_i \phi_i - \sum \mu_i \psi_i - \sum \phi_i \psi_i + \sum (\psi_i)^2}{\sum (\phi_i)^2 + \sum (\psi_i)^2 - 2 \sum \phi_i \psi_i}$$

Demostració. Com $T =$Ł podem prendre com a generador additiu $t(x) = 1 - x$. Expandint $F(r)$ tenim:

$$F(r) = (\mu_1 - r \cdot \phi_1 + r \cdot \psi_1 - \psi_1)^2 + \cdots + (\mu_n - r \cdot \phi_n + r \cdot \psi_n - \psi_n)^2.$$

La derivada de $F(r)$ és:

$$F'(r) =$$

$$\begin{aligned} 2(\mu_1 \cdot \psi_1 - \mu_1 \cdot \phi_1 + r \cdot \phi_1^2 + r \cdot \psi_1^2 - 2r \cdot \phi_1 \cdot \psi_1 - \psi_1^2) + \cdots \\ +2(\mu_n \cdot \psi_n - \mu_n \cdot \phi_n + r \cdot \phi_n^2 + r \cdot \psi_n^2 - 2r \cdot \phi_n \cdot \psi_n - \psi_n^2) \end{aligned}$$

i l'únic valor de r que fa $F'(r) = 0$ és:

$$r = \frac{\sum \mu_i \cdot \phi_i - \sum \mu_i \cdot \psi_i - \sum \phi_i \cdot \psi_i + \sum \psi_i^2}{\sum \phi_i^2 + \sum \psi_i^2 - 2 \sum \phi_i \cdot \psi_i}.$$

Per la natura del problema és trivial que aquest valor és un mínim. Tanmateix és pot comprovar que $F'(0) < 0$ i $F'(1) > 0$. En conseqüència aquest valor és un mínim global. $\square$

Si considerem la t-norma producte $T = \Pi$, l'expressió expandida de $F(r)$ és:

$$\begin{aligned} F(r) \quad =& (\mu_1 - e^{r \cdot log\phi_1 + (1-r) \cdot log\psi_1})^2 + \cdots \\ &+ (\mu_n - e^{r \cdot log\phi_n + (1-r) \cdot log\psi_n})^2 \end{aligned}$$

i la derivada $F'(r)$ és

$$\begin{aligned} F'(r) \quad =& -2(\mu_1 - e^{r \cdot log\phi_1 + (1-r) \cdot log\psi_1}) \\ & \times (-e^{r \cdot log\phi_1 + (1-r) \cdot log\psi_1})(log\phi_1 - log\psi_1) + \cdots. \end{aligned}$$

Tot i tenir un mínim absolut, ja que F' és contínua, $F'(0) < 0$ i $F'(1) > 0$, aquesta expressió no té zeros algebraics quan $n > 1$. Per tant la solució ha de ser trobada utilitzant mètodes numèrics. Al subcapítol 3.4 mostrarem en un exemple com es pot trobar.

Si l'univers de discurs és infinit, el valor de r òptim verifica la mateixa fórmula canviant els sumatoris per integrals. La prova és anàloga i es suporta en alguns lemes previs.

Proposició 3.1.4. *Sigui X un conjunt infinit mesurable i E una relació d'indistingibilitat mesurable en X. Llavors E, ϕ_E i ψ_E són Lebesgue-integrable*

Demostració. Una funció acotada i mesurable és Lebesgue-integrable i l'ínfim, suprem i composició de funcions Lebesgue-integrables és Lebesgue-integrable. $\square$

Així, sota hipòtesis necessàries de mesurabilitat, en el cas infinit podem realitzar la mateixa construcció per a reduir el problema d'òptima aproximació per extensionals a un problema d'optimització en una variable.

Per a provar la fórmula en el cas infinit cal el següent lema, conegut com a regla de Leibniz [44].

Lema 3.1.5. *[44] Sigui $f(x, r)$ una funció integrable i derivable respecte la segona variable. Aleshores:*

$$\frac{\partial}{\partial r}\int f(x, r)dx = \int \frac{\partial f}{\partial r}(x, r)dx.$$

El següent teorema prova que per la t-norma de Łukasiewicz en el cas infinit s'obté una fórmula anàloga a la del Teorema 3.1.3.

Teorema 3.1.6. *Sigui μ un conjunt difús mesurable en un conjunt infinit X amb mesura $m(X)$ i $T =$Łla t-norma de Łukasiewicz. Aleshores l'expressió $F(r) = ||\mu - m_t^r(\phi, \psi)||^2$ és minimitza quan:*

$$r = \frac{\int_X \mu_i\phi_i dx - \int_X \mu_i\psi_i dx - \int_X \phi_i\psi_i dx + \int_X (\psi_i)^2 dx}{\int_X (\phi_i)^2 dx + \int_X (\psi_i))^2 dx - 2\int_X \phi_i\psi_i dx}$$

.

Demostració. Sigui σ un subconjunt difús extensional. La funció a minimitzar és

$$F(r) = ||\mu - \sigma||^2 = \int_X (\mu(x) - \sigma(r)(x))^2 dx$$

Aleshores:

$$F'(r) = (\int_X (\mu(x) - \sigma(r)(x))^2 dx)'$$

Que pel Lema 3.1.5, és equivalent a:

$$F'(r) = \int_X \frac{\partial}{\partial r} (\mu(x) - \sigma(r)(x))^2 dx$$

I la resta de la prova és idèntica a la del Teorema 3.1.3 □

3.2 Mètode basat en potències de la t-norma

En aquest subcapítol donarem un altre mètode per a aproximar un conjunt difús per un extensional adequat. Aquest mètode estarà basat en considerar una potència ”òptima” de la conjunció (t-norma) dels operadors ϕ_E i ψ_E sobre μ.

Definim primer què és la potència d'una t-norma [117].

Definició 3.2.1. *Sigui T una t-norma i n un número natural. Definim la n-èsima potència de x respecte T com:*

$$T^n(x) = T(\overbrace{x, x, \ldots, x}^{n}).$$

Per simplificar notació denotarem $T^n(x) = x^n$.

És possible estendre aquesta definició a tots els racionals positius com segueix:

Definició 3.2.2. *Sigui T una t-norma i n un número natural. Definim x a la $1/n$ potència com:*

$$x^{1/n} = \sup_{z \in [0,1]} T^n(z) \leq x$$

i per p, q números naturals,

$$x^{p/q}(x) = (x^{1/q})^p.$$

Passant al límit es poden definir potències amb qualsevol exponent real. Una construcció rigorosa es pot trobar a [117].

Quan la t-norma és arquimediana, com les considerarem en aquest subcapítol, les potències de T es poden escriure en termes del generador additiu t.

Proposició 3.2.3. *Sigui T una t-norma arquimediana amb generador additiu t i $r \in \mathbb{R}^+$. Aleshores:*

$$x^r = t^{[-1]}(r \cdot t(x))$$

Una observació important de la proposició anterior és que $r \leq s \Rightarrow x^r \geq x^s$. A més la continuïtat de t assegura la continuïtat de les potències quan deixem variar l'exponent. Així, T dóna una homotopia entre $x^\infty = 0$ i $x^0 = 1$, amb la identitat quan l'exponent és 1.

La clau del mètode proposat és conseqüència del proper corol·lari.

Proposició 3.2.4. *Sigui E una indistingibilitat en un conjunt X, μ un conjunt difús extensional de E i $r \leq 1$. Aleshores*

$$\mu^r \in H_E.$$

Demostració. μ és extensional, per tant $t(E(x,y)) \geq t(\mu(x)) - t(\mu(y))$.

Hem de veure que $T(E(x,y), \mu(y)^r) \leq \mu(x)^r$.

Expandint,

$$t(E(x,y) + r \cdot t(\mu(x)) \geq r \cdot t(\mu(y)).$$

o, equivalentment,

$$t(E(x,y) \geq r \cdot (t(\mu(x)) - t(\mu(y)))$$

que és cert perquè $r \leq 1$. □

Corol·lari 3.2.5. *$\psi(\mu)^r$ és extensional quan $r \leq 1$.*

Així, el problema d'aproximar de forma adequada un conjunt difús μ arbitrari per un d'extensional de la forma $\psi^r(\mu)$ es redueix a calcular el valor de r que minimitza la funció següent.

$$F(r) = ||\mu - \psi_E(\mu)^r||^2$$

Per a la t-norma de Łukasiewicz, com en el cas del mètode basat en mitjanes, podem trobar fórmules explícites per a calcular aquest valor. Com abans, per simplificar notació denotarem $\mu_i = \mu(x_i)$ i $\psi_i = \psi(\mu)(x_i)$.

Teorema 3.2.6. *Sigui μ un conjunt difús en un conjunt finit $X = \{x_1, \ldots, x_n\}$ i $T =$Łla t-norma de Ł ukasiewicz. Aleshores $F(r) = ||\mu - \psi_E(\mu)^r||^2$ es minimitza quan*

$$r = \frac{\sum \mu(x_i) + \sum \psi_E(\mu)(x_i) - \sum \mu(x_i) \cdot \psi_E(\mu)(x_i) - n}{2 \sum \psi_E(\mu)(x_i) - \sum \psi_E^2(\mu)(x_i) - n}.$$

Demostració. Podem prendre com a generador additiu $t(x) = 1 - x$.

$$F(r) = (\mu_1 - 1 + r - r \cdot \psi_1)^2 + \cdots + (\mu_n - 1 + r - r \cdot \psi_n)^2.$$

La derivada és

$$\begin{aligned} F'(r) = & 2(\mu_1 + \psi_1 - \mu_1 \cdot \psi_1 + \cdots \mu_n + \psi_n - \mu_n \cdot \psi_n - n) \\ & -2r(2\psi_1 - \psi_1^2 + \cdots + 2\psi_n - \psi_n^2 - n) \end{aligned}$$

i l'únic valor de r pel qual $F'(r) = 0$ és

$$r = \frac{\sum \mu_i + \sum \psi_i - \sum \mu_i \cdot \psi_i - n}{2 \sum \psi_i - \sum \psi_i^2 - n}.$$

que per la naturalesa del problema és un mínim global. □

Com en el subcapítol anterior, en el cas infinit (sota adequades hipòtesis de mesurabilitat) tenim un resultat anàleg.

Teorema 3.2.7. *Sigui μ un conjunt difús mesurable en un conjunt infinit X amb mesura $m(X) < \infty$ i $T =$Łla t-norma de Łukasiewicz. Aleshores l'expressió $F(r) = ||\mu - \psi_E(\mu)^r||^2$ és minimitza quan:*

$$r = \frac{\int \mu(x_i)dx + \int \psi_E(\mu)(x_i)dx - \int \mu(x_i)\cdot\psi_E(\mu)(x_i)dx - m(X)}{2\int \psi_E(\mu)(x_i)dx - \sum \psi_E^2(\mu)(x_i)dx - m(X)}.$$

Demostració. Anàloga a la del Teorema 3.1.6 □

Si considerem la t-norma producte $T = \Pi$ i un conjunt finit, l'expressió expandida de $F(r)$ és:

$$F(r) = ||\mu - \psi_E^r(\mu)||^2 = (\mu_1 - e^{r\cdot log(\psi_1)})^2 + \cdots + (\mu_n - e^{r\cdot log(\psi_n)})^2.$$

La derivada de $F(r)$ és:

$$F'(r) = -2\sum log(\psi_i)\cdot(\mu_i - e^{r\cdot log(\psi_i)})$$

que no té zeros algebraics quan $n > 2$. Així que el valor òptim s'ha de trobar emprant mètodes numèrics.

Donada la dualitat existent entre els operadors d'aproximació superior ϕ_E i inferior ψ_E seria esperable tenir un mètode per ϕ_E involucrant exponents superiors a la unitat. Això no és possible, ja que per exponents tals la condició d'extensionalitat no es pot assegurar. El proper contraexemple ho mostra:

Exemple 3.2.8. *Sigui $T =$Ł i E la Ł-indistingibilitat en $X = \{x_1, \ldots, x_5\}$ amb matriu*

$$E = \begin{pmatrix} 1 & 0.8 & 0.7 & 0.3 & 0.2 \\ 0.8 & 1 & 0.7 & 0.3 & 0.2 \\ 0.7 & 0.7 & 1 & 0.3 & 0.2 \\ 0.3 & 0.3 & 0.3 & 1 & 0.2 \\ 0.2 & 0.2 & 0.2 & 0.2 & 1 \end{pmatrix}$$

ν el conjunt extensional definit com

$$\nu(x) = \begin{pmatrix} 0.9 \\ 0.7 \\ 0.6 \\ 0.8 \\ 0.3 \end{pmatrix}$$

i $r = 2$. Aleshores:

$$\nu^2(x) = \begin{pmatrix} 0.8 \\ 0.4 \\ 0.2 \\ 0.6 \\ 0 \end{pmatrix}$$

ν^2 no és extensional:

$$T(E(x_1, x_2), \nu^2(x_1)) = 0.8 + 0.8 - 1 = 0.6 > 0.4 = \nu^2(x_2).$$

Per tant, ν^r $(r > 1)$ no és extensional en general

3.3 Mètode basat en Programació Quadràtica

En aquest subcapítol es donarà un tercer mètode per aproximar òptimament un conjunt difús arbitrari per un extensional. En els subcapítols anteriors s'han cercat extensionals adequats considerant operacions de ϕ_E i ψ_E. En aquest darrer cas, considerarem que el conjunt és finit i cercarem l'extensional aproximant resolent el sistema d'equacions definit per la pròpia equació funcional d'extensionalitat. Això convertirà el problema en un de Programació Quadràtica.

Denotem μ el conjunt difús que es vol aproximar i σ l'extensional que l'aproxima. La funció objectiu a minimitzar és:

$$F = ||\mu - \sigma||^2$$

La regió de l'espai en la qual s'ha de trobar la solució és $[0,1]^n$ que és tancat i acotat. Assumint que T és contínua i arquimediana la condició d'extensionalitat de σ es pot reescriure com:

$$t(E(x_i,x_j) + t(\sigma(x_j)) \geq t(\sigma(x_i)) \quad \forall i,j = 1,\ldots,n.$$

que en el cas de $T = Ł$ es pot reescriure com:

$$\sigma(x_i) - \sigma(x_j) \geq E(x_i,x_j) - 1 \quad \forall i,j = 1,\ldots,n$$

i en el cas de $T = \Pi$ com:

$$\sigma(x_i) \geq E(x_i,x_j) \cdot \sigma(x_j) \quad \forall i,j = 1,\ldots,n.$$

En ambdós casos això porta a un sistema de n incògnites i $\binom{n}{2}$ equacions (excloent el cas trivial $i = j$).

Per a que els mètodes numèrics de resolució de sistemes com aquests convergeixin cal que l'espai de cerca sigui tancat i acotat, fet que ja hem justificat que es dóna.

Aquest mètode, que per simplificar denotarem mètode QP (Quadratic Programming), només funciona si l'univers X és finit. En el cas infinit el sistema tindria infinites equacions i seria, en general, irresoluble.

3.4 Exemples

En els darrers subcapítols s'han donat 3 mètodes diferents d'aproximació per extensionals. El primer estava basat en mitjanes ponderades de ϕ_E i ψ_E, el segon en potències de ψ_E i el tercer en resoldre un sistema de Programació Quadràtica. En aquest subcapítol donarem dos exemples, un sobre un conjunt finit i un infinit, per a il·lustrar el comportament d'aquests mètodes. Això ens permetrà comparar el seu rendiment així com comprovar que en efecte aquests milloren els resultats de la literatura (que com ja s'ha indicat es restringeixen a l'aplicació de ϕ_E i ψ_E).

3.4.1 Exemple 1: Cas finit

Considerem un conjunt X amb cardinalitat 5 i l'indistingibilitat E amb matriu:

$$E = \begin{pmatrix} 1 & 0.8 & 0.7 & 0.3 & 0.2 \\ 0.8 & 1 & 0.7 & 0.3 & 0.2 \\ 0.7 & 0.7 & 1 & 0.3 & 0.2 \\ 0.3 & 0.3 & 0.3 & 1 & 0.2 \\ 0.2 & 0.2 & 0.2 & 0.2 & 1 \end{pmatrix}$$

que és una min-indistingibilitat i per tant també ho és respecte Łi Π i el conjunt μ següent:

$$\mu(x) = \begin{pmatrix} 0.9 \\ 0.5 \\ 0.1 \\ 0.8 \\ 0.3 \end{pmatrix}.$$

μ no és extensional respecte Ł, ja que $T(E(x_1, x_2), \mu(x_1) = 0.8 + 0.9 - 1 = 0.7 > 0.5 = \mu(x_2)$.

Com que $T =$Ł$\leq \Pi \leq \min$, μ tampoc és extensional per Π i min.

Estudiem primer el cas $T =$ Ł. Els operadors d'aproximació superior i inferior de μ són:

$$\phi_E(\mu)(x) = \begin{pmatrix} 0.9 \\ 0.7 \\ 0.6 \\ 0.8 \\ 0.3 \end{pmatrix} \quad \psi_E(\mu)(x) = \begin{pmatrix} 0.4 \\ 0.4 \\ 0.1 \\ 0.8 \\ 0.3 \end{pmatrix}.$$

El mètode basat en mitjanes proposat en aquesta tesi es basa en trobar una ponderació adequada per a la mitjana dels dos conjunts anteriors que minimitzi l'error comès en l'aproximació de μ. Sigui σ_m aquest conjunt extensional.

$$\sigma_m = m_t^r(\phi_E(\mu), \psi_E(\mu))$$

D'acord amb la fórmula donada al Teorema 3.1.3, el valor òptim és $r = 0.116463$. Així,

$$\sigma_m(x) = \begin{pmatrix} 0.637288 \\ 0.542373 \\ 0.337288 \\ 0.8 \\ 0.3 \end{pmatrix}$$

El segon mètode donat estava basat en trobar la potència adequada de ψ_E que minimitza la funció error. Denotem σ_p el conjunt extensional aproximant.

$$\sigma_p = \psi_E^r(\mu)$$

D'acord amb la fórmula donada al Teorema 3.2.6, el valor òptim és $r = 0.825243$. Així,

$$\sigma_p(x) = \begin{pmatrix} 0.504854 \\ 0.504854 \\ 0.257282 \\ 0.834951 \\ 0.422330 \end{pmatrix}$$

Per últim el darrer mètode proposat es basa en resoldre un sistema QP. Aplicat a l'exemple particular, l'extensional solució del sistema és:

$$\sigma_{QP}(x) = \begin{pmatrix} 0.65 \\ 0.5 \\ 0.35 \\ 0.8 \\ 0.3 \end{pmatrix}$$

Comparem ara l'error comès per cadascun d'aquests mètodes d'aproximació per extensionals. Considerant la distància euclidiana aquest error és:

$$d(\sigma_m, \mu) = 0.341208$$

$$d(\sigma_p, \mu) = 0.475746$$

$$d(\sigma_{QP}, \mu) = 0.328105$$

mentre que

$$d(\phi_E(\mu), \mu) = 0.538516$$

$$d(\psi_E(\mu), \mu) = 0.509902.$$

Estudiem ara el cas $T = \Pi$. Els operadors d'aproximació de μ són:

$$\phi_E(\mu)(x) = \begin{pmatrix} 0.9 \\ 0.72 \\ 0.63 \\ 0.8 \\ 0.3 \end{pmatrix} \quad \psi_E(\mu)(x) = \begin{pmatrix} 0.142857 \\ 0.142857 \\ 0.1 \\ 0.333333 \\ 0.3 \end{pmatrix}.$$

Calculant per mètodes numèrics el valor òptim pel mètode basat en mitjanes obtenim $r = 0.834000$, per tant:

$$\sigma_m(x) = \begin{pmatrix} 0.774314 \\ 0.624194 \\ 0.54202 \\ 0.722533 \\ 0.3 \end{pmatrix}$$

Pel mètode basat en potències el mínim s'assoleix per $r = 0.394625$.

$$\sigma_p(x) = \begin{pmatrix} 0.463984 \\ 0.463984 \\ 0.403065 \\ 0.64821 \\ 0.621812 \end{pmatrix}$$

Per últim, el mètode QP ens dóna:

$$\sigma_{QP}(x) = \begin{pmatrix} 0.643192 \\ 0.514554 \\ 0.450235 \\ 0.8 \\ 0.3 \end{pmatrix}$$

L'error comés en aquestes aproximacions és:

$$d(\sigma_m, \mu) = 0.482290$$

$$d(\sigma_p, \mu) = 0.640202$$

$$d(\sigma_{QP}, \mu) = 0.434542$$

mentre que

$$d(\phi_E(\mu), \mu) = 0.553671$$

$$d(\psi_E(\mu), \mu) = 0.959012$$

.

Tots aquests resultats queden resumits en la Taula 3.4.1.

	$T =$Ł		$T = \Pi$	
Mètode	Extensional	Error	Extensional	Error
ϕ_E	$\begin{pmatrix} 0.9 \\ 0.7 \\ 0.6 \\ 0.8 \\ 0.3 \end{pmatrix}$	0.538516	$\begin{pmatrix} 0.9 \\ 0.72 \\ 0.63 \\ 0.8 \\ 0.3 \end{pmatrix}$	0.553671
ψ_E	$\begin{pmatrix} 0.4 \\ 0.4 \\ 0.1 \\ 0.8 \\ 0.3 \end{pmatrix}$	0.509902	$\begin{pmatrix} 0.142857 \\ 0.142857 \\ 0.1 \\ 0.333333 \\ 0.3 \end{pmatrix}$	0.959012
σ_m	$\begin{pmatrix} 0.637288 \\ 0.542373 \\ 0.337288 \\ 0.8 \\ 0.3 \end{pmatrix}$	0.341208	$\begin{pmatrix} 0.774314 \\ 0.624194 \\ 0.54202 \\ 0.722533 \\ 0.3 \end{pmatrix}$	0.482290
σ_p	$\begin{pmatrix} 0.504854 \\ 0.504854 \\ 0.257282 \\ 0.834951 \\ 0.422330 \end{pmatrix}$	0.475746	$\begin{pmatrix} 0.463984 \\ 0.463984 \\ 0.403065 \\ 0.64821 \\ 0.621812 \end{pmatrix}$	0.640202
σ_{QP}	$\begin{pmatrix} 0.65 \\ 0.5 \\ 0.35 \\ 0.8 \\ 0.3 \end{pmatrix}$	0.328105	$\begin{pmatrix} 0.643192 \\ 0.514554 \\ 0.450235 \\ 0.8 \\ 0.3 \end{pmatrix}$	0.434542

Taula 3.4.1: Taula comparant els diferents mètodes d'aproximació de μ proposats i l'error comés a l'Exemple 1.

3.4.2 Exemple 2: Cas infinit

Considerem $T = Ł$, $X = [0, 1]$ i l'indistingibilitat E definida per $E(x, y) = 1 - |x - y|$. Sigui $\mu(x) = \sqrt{x}$. Aleshores:

$$\phi_E(\mu)(x) = \begin{cases} x + 0.25 & \textit{if} \quad 0 \leq x \leq 0.25 \\ \sqrt{x} & \textit{if} \quad 0.25 \leq x \leq 1 \end{cases}$$

i

$$\psi_E(\mu)(x) = x.$$

A la Figura 3.4.1 es mostra la gràfica de $\mu(x)$, $\phi_E(\mu(x))$ i $\psi_E(\mu)(x)$

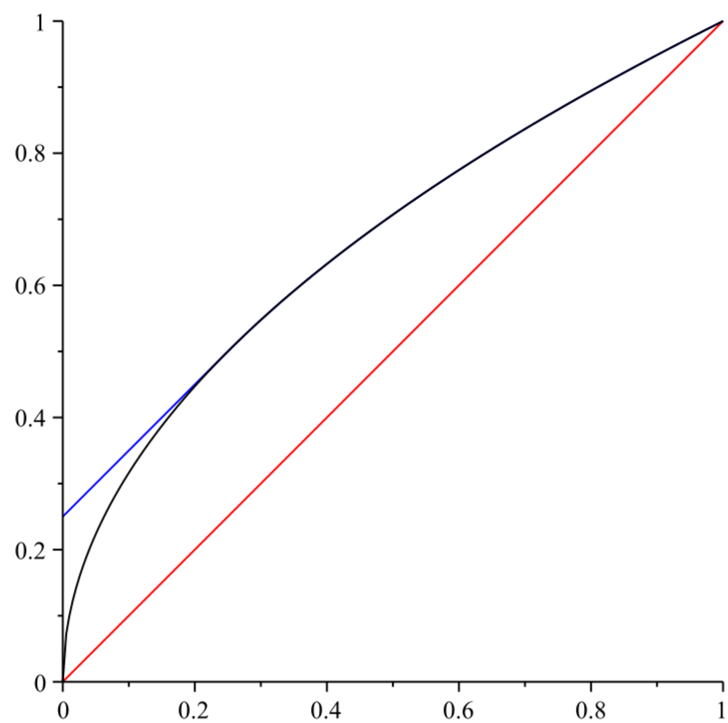

Figura 3.4.1: Gràfica dels conjunts μ (negre), $\phi_E(\mu)$ (blau) i $\psi_E(\mu)$ (vermell) de l'Exemple 2.

D'acord amb la fórmula desenvolupada al subcapítol 3.1, el millor pes pel mètode basat en mitjanes és $r = 0.538271$. Amb aquesta ponderació l'extensional σ_m aproximant és

$$\sigma_m(x) = \begin{cases} x + 0.134568 & si \quad 0 \leq x \leq 0.25 \\ 0.461729x + 0.538271\sqrt{x} & si \quad 0.25 \leq x \leq 1. \end{cases}$$

Mitjançant el mètode basat en potències, la millor solució σ_p s'assoleix quan $r = 0.7$.

$$\sigma_p(x) = 0.7x + 0.3$$

L'error comés en aquestes aproximacions és

$$d(\phi_E(\mu), \mu) = 0.010417$$

$$d(\psi_E(\mu), \mu) = 0.033333$$

$$d(\sigma_m, \mu) = 0.006632$$

$$d(\sigma_p, \mu) = 0.003333.$$

3.5 Mètode pel mínim

Els mètodes presentats en els darrers subcapítols han depès de l'arquimedianitat de la t-norma. Aquesta propietat permetia considerar generadors additius i així facilitar molt els càlculs fins el punt de donar fórmules explícites en el cas de $T =$ Ł. Però si la t-norma inicial no és arquimediana, cap dels mètodes anteriors és directament aplicable. En aquest subcapítol donarem un mètode d'aproximació per extensionals per a la t-norma del mínim.

La clau del mètode que s'explicarà a continuació resideix en el següent resultat.

Proposició 3.5.1. *Sigui $X = \{x_1, \ldots, x_n\}$ un conjunt finit, E una min-indistingibilitat en X i σ un conjunt difús extensional respecte E. Sigui $A_\sigma \subseteq [0, 1]$ el subconjunt que consisteix en totes les imatges de E i de σ. Aleshores els subconjunts difusos σ' tals que* *existeix una funció creixent $f : A_\sigma \to A'_\sigma$ amb $f(a) = a\, \forall a \in Im(E)$ són extensionals respecte E.*

Demostració. Quan la t-norma és el mínim, l'extensionalitat només depèn de l'ordre dels valors de σ i les entrades de E. Per tant,

$$\min(E(x_i, x_j), \sigma(x_j)) \leq \sigma(x_i)$$

implica

$$\min(E(x_i, x_j), \sigma'(x_j)) \leq \sigma'(x_i).$$

□

Com que mantenir la condició d'extensionalitat només depèn de l'ordre en A_σ, el mètode que en aquest subcapítol es proposa es basa en partir d'un extensional σ aproximant (prendrem $\phi_E(\mu)$ i $\psi_E(\mu)$ per a aquest efecte) i ajustar d'acord amb el Lema 3.5.1 els seus valors respectant l'ordenació en A_σ. D'aquesta forma convertim el problema en un sistema QP, la solució del qual millorarà l'aproximació donada per σ inicialment.

Algoritme 3.5.2. *Sigui E una* min-*indistingibilitat en un conjunt finit $X = \{x_1, \dots, x_n\}$ i μ un conjunt difús.*

1. *Calcular $\phi_E(\mu)$ (o $\psi_E(\mu)$) i trobar $A_{\phi_E(\mu)}$ (o $A_{\psi_E(\mu)}$).*
2. *Considerar les restriccions per a un conjunt difús $\sigma(x) = (\sigma_1, \dots, \sigma_n)$ d'acord amb el Lema 3.5.1.*
3. *Minimitzar $F = ||\mu - \sigma||$ segons aquestes restriccions.*

Il·lustrem aquest mètode en un exemple.

Exemple 3.5.3. *Considerem la relació de min-indistingibilitat següent*

$$E = \begin{pmatrix} 1 & 0.7 & 0.4 & 0.1 \\ 0.7 & 1 & 0.4 & 0.1 \\ 0.4 & 0.4 & 1 & 0.1 \\ 0.1 & 0.1 & 0.1 & 1 \end{pmatrix}$$

i el conjunt difús

$$\mu(x) = \begin{pmatrix} 0.3 \\ 0.5 \\ 0.9 \\ 0.2 \end{pmatrix}.$$

que no és extensional: $\min\{E(x_1, x_2), \mu(x_2)\} = 0.5 > 0.3 = \mu(x_1)$.

Aleshores

$$\phi_E(\mu)(x) = \begin{pmatrix} 0.5 \\ 0.5 \\ 0.9 \\ 0.2 \end{pmatrix} \quad \psi_E(\mu)(x) = \begin{pmatrix} 0.3 \\ 0.3 \\ 0.3 \\ 0.3 \end{pmatrix}.$$

Els conjunts $A_{\phi_E(\mu)}$ *and* $A_{\psi_E(\mu)}$ *són*

$$A_{\phi_E(\mu)} = \{1, 0.9, 0.7, 0.5, 0.4, 0.2, 0.1\}$$
$$A_{\psi_E(\mu)} = \{1, 0.7, 0.4, 0.3, 0.1\}$$

Emprant com a input de l'Algoritme 3.5.2 el conjunt difús extensional $\phi_E(\mu)$*, el problema QP a resoldre és:*

$$F = (0.3 - \sigma_1)^2 + (0.5 - \sigma_2)^2 + (0.9 - \sigma_3)^2 + (0.2 - \sigma_4)^2$$

restringit a

$$0.4 \leq \sigma_1 = \sigma_2 \leq 0.7$$

$$0.7 \leq \sigma_3 \leq 1$$

$$0.1 \leq \sigma_4 \leq 0.4$$

La solució és:

$$\sigma_\phi(x) = \begin{pmatrix} 0.4 \\ 0.4 \\ 0.9 \\ 0.2 \end{pmatrix}.$$

Usant $\psi_E(\mu)$ les restriccions són

$$0.1 \leq \sigma_1 = \sigma_2 = \sigma_3 = \sigma_4 \leq 0.4$$

I la solució és

$$\sigma_\psi(x) = \begin{pmatrix} 0.35 \\ 0.35 \\ 0.35 \\ 0.35 \end{pmatrix}.$$

Per acabar, l'error comès per aquestes aproximacions és

$$d(\sigma_\phi, \mu) = 0.141421$$

$$d(\sigma_\psi, \mu) = 0.591608$$

mentre que

$$d(\phi_E(\mu), \mu) = 0.2$$

$$d(\psi_E(\mu), \mu) = 0.640312.$$

Hi ha doncs, oh il·lustre visir Nahun Ibn-Nahun, com he dit, un petit error per part vostra. Compto els versos d'un poema, calculo l'alçada d'una estrella, (...), aplico en fi les fórmules algebraiques i els principis geomètrics sense ocupar-me del lucre que pugui resultar dels meus càlculs i estudis. Sense el somni i la fantasia la ciència s'envileix. És ciència morta.

Conclusió de la defensa de Beremiz

4

Reinterpretació extensional de models

En el proper capítol d'aquesta tesi s'explicarà la proposta de com utilitzar el marc teòric de conjunts difusos extensionals i relacions d'indistingibilitats a la representació de la informació en neuroimatge MRI i a problemes propis del camp. Com es mostrarà, la clau per a sinergitzar aquestes dues disciplines radicarà en una reinterpretació del model del cervell (l'atles estructural) donat.

En aquest capítol explicarem aquesta reinterpretació en un marc més general, el de tots els models científics. Tot i que l'orientació d'aquesta tesi té una vocació més específica i orientada a proposar un nou mètode per a la identificació dels diferents teixits cerebrals, en aquest capítol s'estudiarà com aquest treball es pot abstraure i, eventualment, aplicar a qualsevol camp científic on s'empri un model.

El resultat principal, sintetitzat en una frase és: *Tot model científic es pot reinterpretar en termes de conjunts difusos extensionals*

En referència a la primera part de la darrera oració, al subcapítol 1.2 d'aquesta tesi s'ha afirmat "el sentit i objectiu de la ciència (...) és el de construir models i teories per a comprendre els patrons dels fenòmens observats a la realitat externa". Els models i les teories són, doncs, objectes formals que actuen com a representants de fenòmens; en aquest capítol seran estudiats amb cert detall i això permetrà entendre en profunditat el funcionament d'aquest procés de representació.

La segona part de l'oració cita els conjunts difusos extensionals. Aquests han estat introduïts i estudiats en els capítols 2 i 3 d'aquesta tesi junt amb altres objectes teòrics associats com les indistingibilitats i els operadors φ_E i ψ_E.

En aquest capítol s'estudiarà com tot model científic genera (o és generat, depèn des de quina banda es vulgui mirar) per se uns conjunts observables en el que s'anomenarà l'espectre del model.

En primer lloc s'abordarà la qüestió de què és un model científic. Es convida al lector a fer una pausa en aquest punt i reflexionar quina podria ser una definició satisfactòria del concepte que inclogui els múltiples usos que es fan d'aquesta paraula en diferents disciplines científiques. També s'estudiarà la no trivial distinció entre model i teoria.

A continuació s'estudiarà quines són les parts constituents d'un model científic. Un atribut important que serà analitzat és l'espectre del model. Aquest serà la clau que permetrà introduir els conjunts extensionals i tots els objectes formals de la teoria d'indistingibilitats.

Aquesta reinterpretació permet incorporar tota la càrrega semàntica, formalisme, rigor i eines d'aquesta teoria a l'estudi de models científics. Una interessant aplicació que sorgeix immediatament és que tot model permet definir una distància pròpia de forma natural. Aquesta construcció serà estudiada també en aquest capítol.

Al llarg del capítol es donaran diversos exemples per a il·lustrar les idees exposades.

Cal fer una darrera però important observació respecte el que es proposa en aquest capítol. Per a mostrar la generalitat de la reinterpretació proposada es parla de models científics en general i en el sentit més ampli possible. Qualsevol especificació del mètode en un camp i model particular requereix tenir en compte les particularitats del camp i del model en qüestió.

4.1 Models i teories

Model és una de les paraules més transversals i multidisciplinars de la ciència, la ciència està plena de models. Els trobem en ciències naturals i en ciències de la salut. En ciències socials i en ciències de la terra. Els trobem, en fi, en totes les disciplines i camps.

Però també trobem que no vol dir el mateix en cada camp. Què és un model científic? Quin és el substrat comú que tenen tots els models particulars que existeixen?

És immediat veure la dificultat que suposa donar una definició general que inclogui els múltiples usos del terme. Recollint algunes de les idees principals de les definicions trobades a la literatura, en aquesta tesi definirem model científic com:

Definició 4.1.1. *Un model científic és una representació d'un fenomen real en un espai teorico-simbòlic reglat*

Una pregunta interessant que sorgeix un cop donada aquesta definició és quina és, doncs, la diferència entre model i teoria científica. Com s'ha comentat a la introducció, és objectiu de la ciència construir tots dos.

Com en el cas de la definició pròpia de model, la distinció entre ambdós conceptes no està aclarida a la literatura. Fins i tot, des d'un punt de vista de filosofia de la ciència realista [36], no hi ha diferència significativa entre un i l'altre. Tot es basa en dissenyar ontologies, atributs i relacions d'extensionalitat (concepte diferent en filosofia de la ciència a l'extensionalitat que s'ha tractat en aquesta tesi) que es comportin com la realitat tractada. Tanmateix, una aproximació més intuïtiva a la dicotomia suggereix que les teories són quelcom més global que els models. A grans trets, això es degut a tres diferències.

La primera és vocacional. La vocació d'un model es merament representativa, mentre que la d'una teoria és explicativa. Els models, tal com s'han definit, representen un fenomen observat en un espai teòric en el qual tenim unes regles de manipulació simbòlica. És a dir, codifiquen el fenomen en un espai on podem emprar una sintaxi; però no aporten en sí mateixos comprensió de les causes o funcionament del fenomen. Una teoria científica, per contra, compren una codificació similar però amb una pretensió explicativa del què passa i perquè passa.

La segona diferència, molt relacionada amb la primera, està en la creació de metaconceptes. Qualsevol teoria científica madura (entenguis amb aquest terme una teoria ben establerta i contrastada, no en fase experimental o especulativa) inventa conceptes (meta) no directament observables en el fenomen i postula que una sèrie de lleis sobre el metaconcepte expliquen el comportament observat. Els models no defineixen metaentitats més enllà de les directament percebudes.

Per últim, les teories són més demostrables que els models. Un model és millor o pitjor si la representació s'escau més o menys al representat. Però demostrabilitat implica una lògica subjacent que l'espai teòric/sintàctic del model no té en, en general, ben definida. Contràriament, les teories sí que tenen una consistència lògica superior. En la ciència actual, està establert que la demostrabilitat de les teories està sustentat en el principi de falsabilitat del racionalisme crític de Popper [94].

Utilitzant la teoria figurativa de Wittgenstein [119] es pot caracteritzar clarament aquesta distinció. Segons Wittgenstein el Món són els fets, dels quals ens fem figures que estan composades (entre altres coses) de símbols i signes.

Els símbols són entitats conceptuals de les figures, que representen (en la figura) entitats reals dels fets en qüestió.

Els signes són la concreció dels símbols en la figura.

Així, la relació entre fets del Món, que el constitueixen, es projecta (de fet segons Wittgenstein és en el sentit invers) en la relació o estructura lògica dels símbols. En la proposició de la figura, aquests són concretats mitjançant una relació sintàctica entre els signes.

Entès en aquest llenguatge, la dicotomia entre model i teoria és fàcilment resolta. Un model té a veure amb una adequada elecció de signes i relacions sintàctiques. Un model, per se, no és ni bo ni dolent, ni cert ni fals; es considera millor o pitjor segons si la figura que il·lustra s'escau millor o pitjor als fets.

Una teoria, per contra, es refereix a la relació entre símbols, a l'estructura lògica subjacent a la figura i de la qual és l'esquelet. Per tant aquesta pot ser refutada, o no, segons la seva concordança amb els fets.

Per tancar aquest subcapítol sobre l'essència del concepte model cal fer un darrer comentari. Els models no només apareixen en ciència, sinó en altres espais humans com l'art.

Hi ha, però, una interessant diferència en com s'utilitza aquest concepte. En ciència un model és una representació d'una realitat, en art s'utilitza com a realitat que es vol representar. Pensis en un model humà per a una pintura: el model és la realitat i la pintura la representació, contràriament a com és en el cas científic.

Aquest diferent us de la paraula no és preocupant per a tota l'exposició prèvia i és deguda simplement a un fenomen de polisèmia. En tota aquesta tesi ens restringirem a models en el sentit científic.

4.2 Modelització de models

Dissertats els límits del concepte i de la definició proposada, entrem a analitzar quines en són les parts constituents. Podem esquematitzar la definició donada en el següent diagrama:

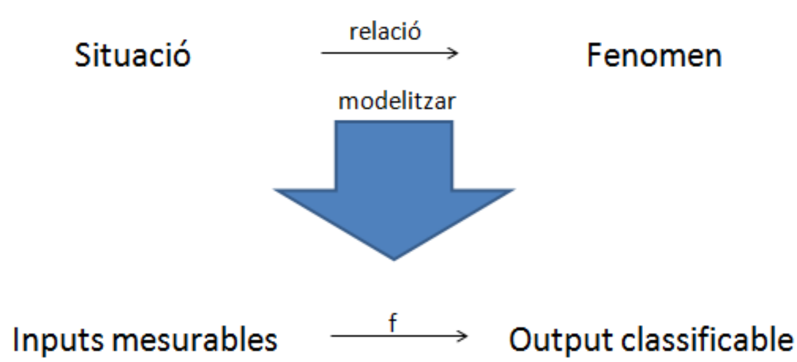

Figura 4.2.1: Diagrama del procés de modelització

Comentem alguns aspectes d'aquest diagrama.

En primer lloc cal remarcar que model i fenomen real són objectes essencialment diferents i que viuen en diferents plans de realitat . El fenomen que s'està modelant pertany al que entenem com a realitat externa, mentre que el model construït pertany a un espai simbòlic. És important remarcar que el fet de ser un espai simbòlic permet que aquest estigui regulat per un conjunt de normes, lleis o regles finites i controlades pel modelador.

Els "inputs mesurables" del diagrama són mesures d'entitats reals. Aquests inputs són essencialment diferents de les entitats reals en el sentit de l'apuntat al paràgraf anterior, i es corresponen amb aquelles que el modelador entén que estan relacionades amb el fenomen.

La funció f del diagrama és una funció o relació entre espais simbòlics que es construeix per a que tingui un comportament anàleg a la relació real.

L'"output classificable" és l'espai d'arribada de f i es construeix a imatge de l'espai de fenòmens que es vol modelitzar.

Hi ha un aspecte dels models crucial que encara no ha estat recollit en el diagrama: el que en aquesta tesi anomenarem espectre del fenomen i que s'explica a continuació.

Consideris la situació en que es pretén modelar la intensitat de senyal d'un encefalograma pla, o la difusió interna de la calor en una màquina inactiva i apagada, o l'activitat sexual de l'os bru pirinenc durant l'època d'hivernació. Tot i que aquests tres exemples podrien ésser modelats, és immediat tenir la sensació de que tal activitat és absurda o sense sentit. Això és així perquè l'espectre d'aquests fenòmens consta d'un sol element.

Quan es modela un fenomen és perquè aquest pot prendre diferents estats essencialment diferents. No es modelen situacions estàtiques o estables (com les proposades abans) perquè el model resultant no aportaria res interessant. Es modelen situacions dinàmiques.

Aquesta variabilitat de l'espai d'estats que pot prendre el fenomen és el que anomenarem espectre. Com es mostrarà en el subcapítol següent, aquest serà el concepte clau que permetrà transportar la teoria d'indistingibilitats a l'anàlisi de models científics.

4.2.1 Model de desenvolupament urbà d'una ciutat

Il•lustrem què és l'espectre amb un exemple pràctic.

El 1933 Le Corbusier proposà [25] el seu model de desenvolupament urbà (Figura 4.2.2). D'acord amb Le Corbusier, tot i que l'evolució urbana d'una ciutat és contínua i dinàmica, es poden distingir 3 etapes diferents.

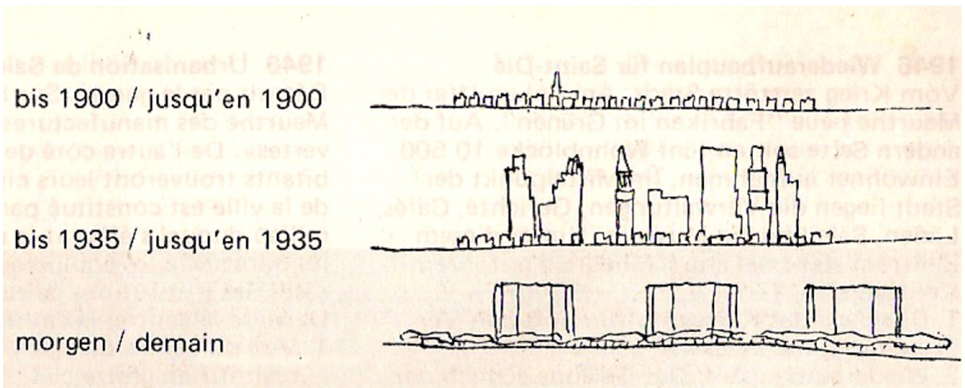

Figura 4.2.2: Model de desenvolupament urbà segons Le Corbusier [25]

1. Edificis baixos i baixa densitat.
2. Es construeixen gratacels i la densitat de la ciutat augmenta considerablement.
3. La urbs es discretitza i es concentra al voltant de certs nuclis interns.

Aquests tres estats de desenvolupament urbà són l'espectre que Le Corbusier detecta en el fenomen de l'evolució urbana i plasma en el seu model gràfic de la Figura 4.2.2

4.3 Reinterpretació extensional

Tenint en compte l'espectre del fenomen, podem actualitzar el Diagrama 4.2.1 com:

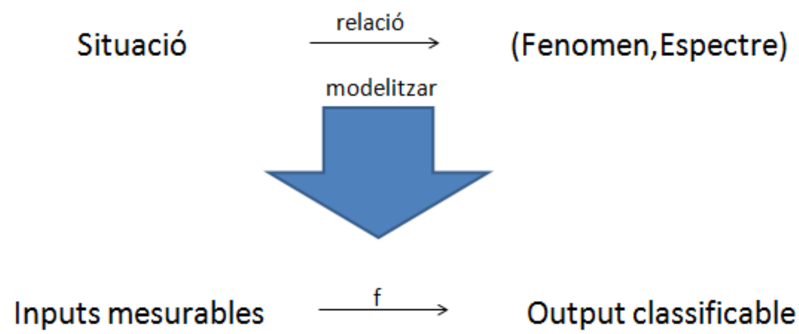

Figura 4.3.1: Diagrama del procés de modelització tenint en compte l'espectre del fenomen

Sense pèrdua de generalitat podem suposar que la modelització de l'espectre del fenomen és una família de conjunts difusos. La representació conjuntista és actualment un estàndard en totes les disciplines científiques. Aquests conjunts es poden prendre com a difusos per dos motius. Per una banda, en la línia de l'exposat al capítol primer d'aquesta tesi, per la versatilitat que ofereix el marc difús per a representar les incerteses pròpies del procés epistèmic i representatiu. Per l'altra, tot i que l'espectre consta d'estats essencialment diferents que pot prendre el fenomen, en general no són fàcilment discernibles les frontisses entre estats, situació que els conjunts difusos reflecteixen de forma intrínseca. Fins i tot si els diferents estats de l'espectre fossin clarament disjunts (i per tant una representació amb conjunts clàssics seria suficient), cal recordar que el cas crisp no deixa de ser un cas particular del cas fuzzy.

D'acord amb aquesta interpretació, l'espectre indueix una família de conjunts difusos σ_i difusos en l'espai de sortida del fenomen.

$$\sigma_i : \text{Output classificable} \longrightarrow [0,1]$$

I per composició amb f queden definits també una família de conjunts sobre l'espai de sortida del model

$$\sigma_i \circ f : \text{Inputs mesurables} \longrightarrow [0,1]$$

El darrer i crucial punt d'aquesta reinterpretació del model, i que justifica el títol del subcapítol, és que aquests conjunts els podem considerar com una base de conjunts difusos extensionals d'una certa indistingibilitat. Aquest pas es justifica en la següent observació:

La motivació subjacent a la modelització d'un fenomen és trobar una adequada representació teòrica que permeti, donades mesures d'algunes entitats, predir-ne el comportament. Tanmateix, en l'espai real, el que representa el fenomen i de fet l'únic realment observable, és l'espectre del mateix; és a dir els diferents estats que pot prendre. És natural, doncs, imposar que els conjunts que representen aquests estats siguin els observables en l'espai teòric del model. I com s'ha justificat a l'introduir els conjunts difusos extensionals al capítol segon d'aquesta tesi, hi ha una forta relació entre observabilitat i extensionalitat respecte una indistingibilitat. És a través d'aquesta relació que podem relacionar la teoria d'indistingibilitats amb l'estudi de models científics particulars.

El Teorema de Representació 2.1.7 permet construir una indistingibilitat (única) a partir d'una família de difusos que tingui precisament aquesta família com a generadors del conjunt H_E d'extensionals subjacent. Podem construir, doncs, indistingibilitats E i F sobre l'espai de sortida i d'arribada del model prenent per base els conjunts $f \circ \sigma_i$ i σ_i respectivament.

Una indistingibilitat en un conjunt X dóna una estructura a X. Una línia de recerca interessant que sorgeix aquí es la de com es relaciona l'estructura de l'espai de sortida i arribada del model donades E i F. Aquesta pregunta ha estat parcialment estudiada a [12] i donades algunes condicions sobre com és aquesta relació en funció de les propietats de f.

Així, la reinterpretació completa de la modelització es concreta en el Diagrama 4.3.2.

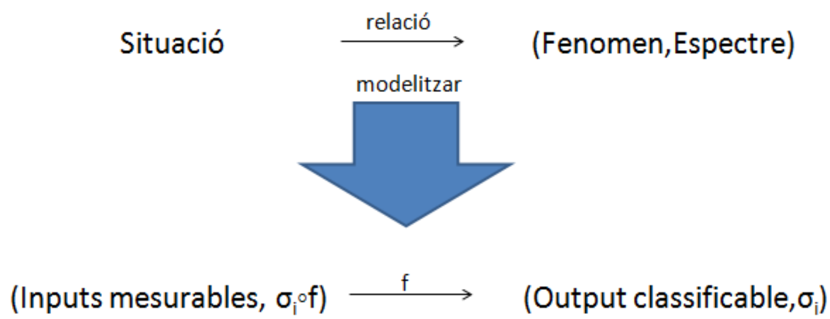

Figura 4.3.2: Diagrama final del procés de modelització amb la reinterpretació proposada

4.3.1 Model d'aprenentatge conductista

Il•lustrem tota la reinterpretació proposada en un exemple d'aprenentatge conductista. Prenem com a model base el clàssic exemple de l'experiment de Pavlov [89].

El fenomen en qüestió és l'existència d'un aprenentatge del tipus estímul-resposta (so d'una campana-salivació del gos) i es vol construir un model per representar l'aprenentatge d'aquesta relació donat un cert nombre de repeticions de l'experiment.

Clarament l'espectre del fenomen està composat per dos elements: aprenentatge, no aprenentatge. En el model aquests dos estats es representarien amb conjunts difusos que, per exemple, es poden denotar A_{si} i A_{no}.

El model del fenomen serà doncs la següent funció:

$$\begin{array}{rccc} f: & \{0, \ldots, 1000\} & \longrightarrow & [0,1] \times [0,1] \\ & n & \longrightarrow & (A_{si}(n), A_{no}(n)) \end{array}$$

L'espai de sortida d'aquest model ($\{0, .., 1000\}$) representa el número de repeticions de l'experiment. Així, aquest model avalua la quantitat d'aprenentatge adquirida pel gos per cada número de repeticions entre cap i 1000.

Els conjunts de subconjunts difusos extensionals H_E i H_F sobre els espais de sortida i d'arribada del model respectivament són els generats per $\{A_{si}, A_{no}\}$ i $\{A_{si} \circ f, A_{no} \circ f\}$ d'acord amb la Proposició 2.1.11.

$$H_E =< A_{si}, A_{no} >$$

$$H_F =< A_{si} \circ f, A_{no} \circ f >$$

Aquests conjunts H_E i H_F defineixen les relacions d'indistingibilitat E i F que completen la reinterpretació d'aquest model d'aprenentatge conductista d'acord amb el Teorema 2.1.7.

4.4 Models i distàncies

Una aportació interessant d'aquesta reinterpretació en termes de conjunts extensionals és que permet definir funcions distància associades al model tant a l'espai de sortida com el d'arribada. A continuació s'explica com aquestes es poden construir de forma natural.

Recordem la definició de funció distància.

Definició 4.4.1. *Sigui X un conjunt. Una distància o mètrica d sobre X és una funció $d : X \times X \to \mathbb{R}^+$ verificant*

- $d(x,x) = 0 \ \forall x \in X$
- $d(x,y) = d(y,x) \ \forall x, y \in X$
- $d(x,y) + d(y,z) \geq d(x,z) \ \forall x, y, z \in X$

A vegades es diferencia entre pseudodistàncies i distàncies imposant la condició addicional $d(x,y) = 0 \Leftrightarrow x = y$. En aquesta tesi parlarem de distàncies sense considerar aquesta darrera condició.

Una funció $d : X \times X \longrightarrow [0,1]$ verificant les propietats anteriors s'anomena distància normalitzada. Considerant una t-conorma S [68], la noció de distància es pot generalitzar a S-distància [58] [115] com:

Definició 4.4.2. *Sigui X un conjunt i S una t-conorma. Una S-distància o S-mètrica d sobre X és una funció* $d : X \times X \to \mathbb{R}^+$ *verificant*

- $d(x, x) = 0 \ \forall x \in X$
- $d(x, y) = d(y, x) \ \forall x, y \in X$
- $S(d(x, y), d(y, z)) \geq d(x, z) \ \forall x, y, z \in X$

El següent teorema mostra la coneguda equivalència entre indistingibilitats i distàncies

Teorema 4.4.3. *E és una T-indistingibilitat amb* $T \geq Ł$*, sent Ł la t-norma de Łukasiewicz. si i només si* $d_E(x, y) = 1 - E(x, y)$ *és una distància normalitzada.*

La condició T =Ł no és en general gaire forta, notis que les 3 t-normes contínues bàsiques (Lukasiewicz, Producte i Mínim) la compleixen. Tanmateix, si el model tingues una t-norma pròpia que no verifiqués aquesta condició el següent resultat garanteix que es poden construir S-distàncies igualment.

Teorema 4.4.4. *[58] Sigui* φ *una negació involutiva (forta). E és una T-indistingibilitat si i només si* $d_E(x, y) = \varphi(E(x, y))$ *és una S-distància normalitzada, sent S la t-conorma dual de E i* φ *per la relació de De Morgan* $S(x, y) = \varphi(T(\varphi(x), \varphi(y)))$*.*

Utilitzant els resultats anteriors podem doncs donar una estructura d'espai mètric (o S-mètric) a l'espai d'inputs i al d'output del model.

$$(Inputsmesurables, d_E) \xrightarrow{f} (Outputclassificable, d_F)$$

Sintetitzant, la distància associada a un model es concreta en el següent enunciat.

Definició 4.4.5. *Sigui* $T \geq Ł$ *una t-norma, M un model amb espectre* $\{\sigma_i\}_{i \in I}$*. Siguin E i F les T-indistingibilitats generades en l'espai de sortida i d'arribada de M respectivament. Es defineixen les distàncies associades al model* d_E *i* d_F *com:*

$$d_E(x,y) = 1 - E(x,y)$$

$$d_F(x,y) = 1 - F(x,y)$$

Considerant t-normes arbitràries i S-distàncies, l'anterior definició és:

Definició 4.4.6. *Sigui T una t-norma, φ una negació involutiva (forta), M un model amb espectre $\{\sigma_i\}_{i\in I}$. Siguin E i F les T-indistingibilitats generades en l'espai de sortida i d'arribada de M respectivament. Es defineixen les S-distàncies associades al model d_E i d_F com:*

$$d_E(x,y) = \varphi(E(x,y))$$

$$d_F(x,y) = \varphi(F(x,y))$$

Aquestes distàncies són úniques, llevat de la tria de la t-norma, i han estat generades a partir del propi model i dels diferents estats essencialment diferents que pot prendre la sortida del mateix.

Quan en algun camp científic s'empra un model i es necessita mesurar la distància entre diverses entitats es sol emprar en la immensa majoria de casos la distància euclidiana o la de Manhattan. És cert que en els darrers anys hi ha hagut un aprofundiment en la recerca i construcció de noves funcions distància (algunes propostes interessants són [40] [92] [98]) però segueix sent una pràctica generalitzada l'ús de les dues distàncies prèviament esmentades.

El motiu d'aquest fet és que el seu rendiment és en general prou bo. Tanmateix, aquesta tria és arbitrària en el sentit de que no es té en compte ni les característiques topològiques ni fenomenològiques ni, en general, les característiques pròpies del model en qüestió.

A través de la reinterpretació del model en termes del seu espectre, representat com una família de conjunts observables que defineixen una indistingibilitat, es pot construir una distància que no pateix aquest problema d'arbitrarietat.

4.4.1 Model meteorològic

Considerem un model meteorològic qualsevol i suposem que es realitza tota la reinterpretació tal com s'ha proposat en aquest capítol (l'espectre està composat pels diferents estats climàtics).

La distància associada al model pot ser molt útil per la seva sensibilitat en condicions climatològiques límit. Per exemple, una diferència tèrmica de $-1 \circ C$ a $+1 \circ C$ i una de $+23 \circ C$ a $+25 \circ C$ són equivalents (dues unitats) considerant la distància euclidiana la de Manhattan. Tanmateix, és clar que a nivell fenomenològic el primer cas pot portar a estats climàtics molt diferents mentre que el segon cas en general no. La distància associada al model, que tal com s'ha definit ha estat construïda precisament a través de l'anàlisi fenomenològic, serà més sensible a aquestes situacions i ambdós intervals tèrmics no seran mesurats amb igual distància.

Les paraules eloqüents de Beremiz van impressionar profundament als nobles i ulemes que rodejaven el tro. El rei es va acostar al Calculador, li alçà la ma dreta i exclamà amb decidida autoritat:
- La teoria del científic somiador ha vençut i vencerà sempre l'oportunisme vulgar de l'ambiciós sense ideal filosòfic. ¡Ke1imet—Quallah!

Resolució final del califa Al Motacén

5
Reinterpretació extensional en neuroimatge MRI

En aquest capítol es mostrarà com es pot aplicar la reinterpretació de models proposada en el capítol anterior a la representació de la informació en neuroimatge i concretament en imatge MRI.

Donada una imatge MRI del cervell d'un subjecte és mèdicament important poder discriminar les diferents regions anatòmiques i teixits que hi son representats. Per a realitzar aquesta tasca de forma automatitzada en diversos mètodes ressenyats a la literatura [91] s'utilitzen atles estructurals del cervell. Si entenem un atles com un model del cervell (que, enllaçant amb els comentaris del capítol 4, modela el fenomen de l'existència de diferents regions anatòmiques) estem en condicions d'aplicar les idees desenvolupades al capítol 4 d'aquesta tesi. Podem per tant, emprar la teoria difusa d'indistingibilitats i generar una sinèrgia entre les seves aportacions amb els problemes i mètodes propis del camp de la neuroimatge.

Si s'apliquen les idees del capítol anterior, un atles cerebral defineix una relació d'indistingibilitat sobre l'espai d'imatges MRI. Donada per tant la MRI d'un pacient en un context clínic s'està en condició d'utilitzar tots els resultats desenvolupats i demostrats en els capítols 1, 2, 3 i 4 d'aquest treball.

Aquesta reinterpretació extensional d'atles estructurals i imatges MRI cerebrals s'explicarà en el cas més general i posteriorment s'il·lustrarà en un exemple específic amb un atles i una MRI concrets.

S'aprofitarà aquest exemple per mostrar algunes possible vies d'aplicació de la teoria proposada. Concretament es detallarà com els Tissue Probability Maps (TPMs) de l'atles poden particularitzar-se sobre la MRI concreta per incorporar la informació singular i del subjecte, informació que per definició el model no pot tenir.

L'autor també ha esbossat algunes línies de possible aplicació futura d'aquest marc desenvolupat que s'explicaran en el capítol corresponent de les conclusions.

El capítol s'estructura de la següent manera:

En primer lloc es donaran alguns conceptes bàsics de neurociència en general i de neuroimatge en particular. Es donarà també una breu explicació dels diferents teixits que es poden trobar en un estudi anatòmic del cervell. A continuació s'explicarà com un atles estructural de neuroimatge MRI defineix un operador d'indistingibilitat sobre l'espai d'imatges MRI. Posteriorment es mostrarà com aquesta indistingibilitat permet particularitzar alguns elements generals del model (els Tissue Probability Maps) sobre imatges MRI clíniques. Per acabar s'exemplificarà tot el treball proposat en un cas pràctic. Es donaran els detalls tècnics de les dades emprades en primer lloc i es mostrarà pas per pas com es realitza la reinterpretació i la particularització dels TPMs en aquest cas particular.

5.1 Preliminars de neurociència

La neurociència és quasi tan antiga com la pròpia ciència. Els primers documents dels que es té constància que estudien la relació i funció del cervell a l'organisme humà són d'Aristòtil. De fet, en el seu llibre ”Història dels animals” [5] el gran filòsof arriba a aquesta conclusió (sorprenent i curiosa amb el coneixement actual).

> *El cervell és un òrgan tou, calent, de textura semblant als excrements. És impossible que sigui el substrat d'una funció tan noble com el pensament humà, per tant ha de ser el cor qui està a càrrec d'aquesta funció.* [1]

Són molt destacables pel seu impacte en els segles posteriors els treballs mèdics d'estudi anatòmic i funcional del cervell de Hipòcrates [56] i Galeno [52].

Tot i que entre la Grècia clàssica i la ciència de finals del segle XIX hi van haver alguns científics i filòsofs que van fer aportacions a la qüestió de com funciona el cervell, el tret de sortida de la neurociència actual i de la comprensió real (no només fenomenològica) del cervell són els treballs de Golgi i Cajal.

Camillo Golgi va idear una tècnica de tintatge amb cromat de plata que va permetre per primer cop veure neurones al microscopi [53]. Aquest avenç va permetre Santiago Ramón y Cajal desenvolupar la seva teoria neuronal [95], que planteja les neurones com la unitat bàsica estructural del sistema nerviós i la connexió sinàptica entre elles el principal canal de transmissió d'informació. És sorprenent i prova de la potència d'aquesta teoria la seva vigència encara avui.

5.1.1 Preliminars de neuroimatge

La neuroimatge, entesa com el conjunt de tècniques per visualitzar anatòmica o funcionalment el cervell (o altres parts del sistema nerviós) de forma directa o indirecta és molt més recent.

Dins del conjunt de mètodes de neuroimatge no invasives, una de les principals famílies de mètodes és les Emission computed tomographies (ECT), entre les que ocupa un lloc especial la Positron emission tomography (PET) proposada el 1983 [111]. Aquests mètodes es basen en el monitoratge de la radiació de certes partícules ingerides, inhalades o introduïdes d'alguna altra manera en l'organisme del pacient.

[1]Aristoteles. *Historia dels animals* [5]

Una altra tècnica molt emprada actualment és la Tomografia Axial Computeritzada (TAC). Està basada en la irradiació amb raigs X de la zona anatòmica en qüestió i la reconstrucció de la imatge en diferents profunditats o talls. La TAC es fa servir no sols en estudis neurològics sinó també en l'estudi d' altres parts del cos humà.

A dia d'avui una de les tècniques de neuroimatge més utilitzades, i que serà la que s'utilitzarà en aquesta tesi, és la visualització per ressonància magnètica (MRI). Aquests consisteixen en aplicar un intens (no nociu) camp magnètic a la zona d'anàlisi que sincronitza algunes propietats dels nuclis atòmics i excitar-los mitjançant una senyal de radiofreqüència. La imatge es construeix registrant el temps de recuperació de l'estat d'equilibri que defineix els diferents teixits. Les MRIs són molt emprades avui com element de diagnosi i s'utilitzen especialment per a l'estudi anatòmic del cervell. [2]

Un altre mètode menys utilitzat avui en dia són els electroencefalogrames i magnetoencefalogrames (EEG i MEG). Van ser proposats l'any 1924 per a l'estudi mèdic de l'ésser humà [110] i consisteixen en mesurar el potencial elèctric i magnètic respectivament al pericrani. El resultat no és pròpiament una imatge sinó una intensitat de senyal.

Com que la proposta realitzada en aquesta tesi és de caire anatòmic és treballarà amb imatges MRI.

5.1.2 Teixits anatòmics del cervell

El cervell es pot discriminar anatòmicament a molts nivells. En el nivell més general, sense entrar en les funcionalitats específiques de diferents zones, es diferencien dos teixits anatòmics. [3]

- Substància Gris (Gray Matter o GM): Formada principalment pel soma de les neurones i porcions dels axons neuronals no mielinitzats. La seva funció principal és la computació i processament de la informació.

[2] http://www.nlm.nih.gov/medlineplus

[3] http://www.nlm.nih.gov/medlineplus

- Substància Blanca (White Matter o WM): Format principalment per axons neuronals mielinitzats. La mielina dóna la substància blanca el seu color. Té un rol important en la velocitat i transmissió del senyal nerviós.

A més es reconeix un tercer teixit no neuronal al cervell:

- Líquid cefalorraquídic (CerebroSpinal Fluid o CSF): És incolor tot i que a les MRIs es veu negre. Té diverses funcions d'estabilització i protecció del cervell. No té cap activitat específica reconeguda pel que fa al tractament de la informació.

Com s'ha comentat abans, es pot estudiar diferents regions anatòmiques del cervell amb més especificitat tenint en compte les funcions de cadascuna. Com que aquesta tesi es restringeix a l'estudi dels teixits GM, WM i CSF no aprofundirem en aquestes altres classificacions.

La identificació dels diferents teixits en el cervell és un important problema mèdic, ja que moltes malalties neurològiques afecten només un d'aquests teixits, o són diagnosticables a partir de les anomalies en la visualització d'un d'ells.

5.2 Representació extensional d'atles estructurals i imatges MRI

Per aplicar la reinterpretació proposada en aquesta tesi s'ha de llegir l'atles en termes de conjunts extensionals. Per a fer-ho, i enllaçant amb la línia discursiva més abstracte i general del Capítol 4, cal abans retrotraure el problema de l'anàlisi de neuroimatge al llenguatge dels models i els fenòmens.

5.2.1 Model

Un atles és un model del cervell. Quan el model fa referència a les components anatòmiques del cervell es parla d'atles estructural. A més d'una imatge MRI model els atles estructurals solen portar incorporats altres imatges com la MRI model en diferents potenciacions (el treball d'aquesta tesi es restringirà només a imatges T1), un mapa de les diferents regions anatòmiques i d'altres imatges. Entre aquestes altres es consideren els anomenats Tissue probability maps (en endavant TPMs) atesa la proposta que presentem en el subcapítol 5.4 .

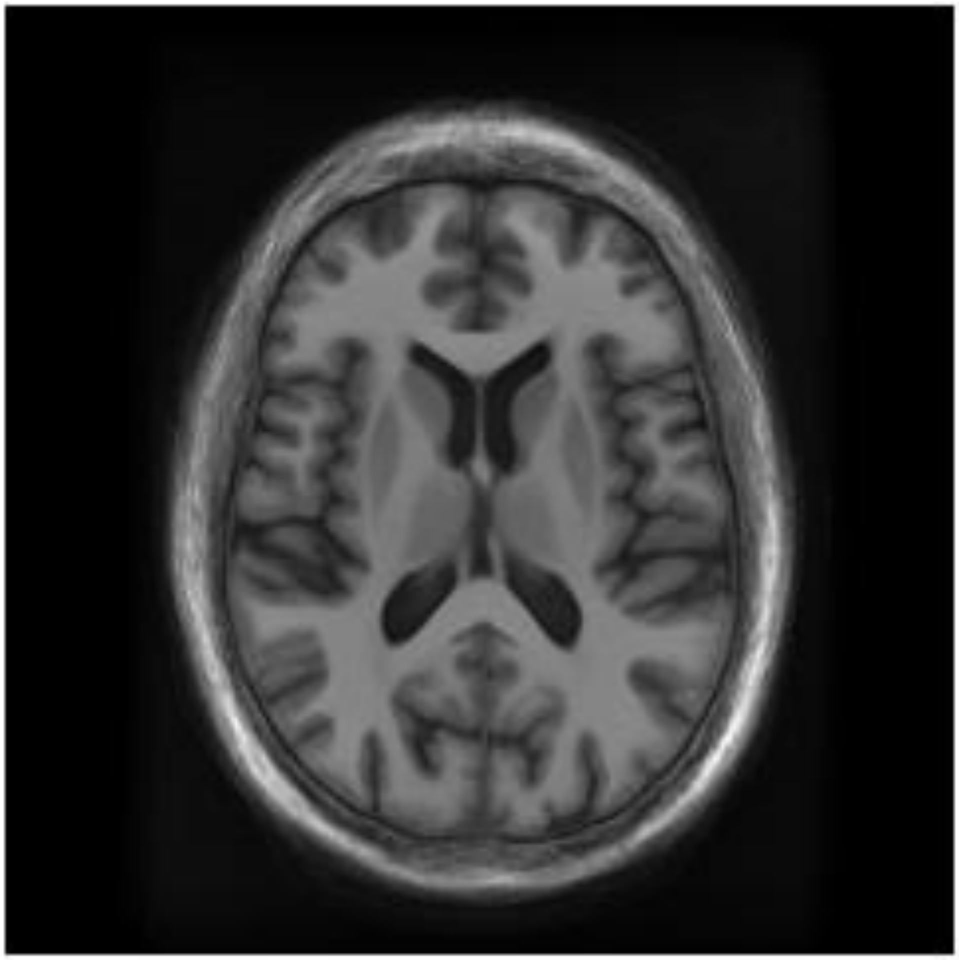

Figura 5.2.1: Tall axial 80 de l'atles cerebral SRI24 potenciat en T1 que s'utilitzarà en aquest treball.

Els TPMs donen una funció de distribució espacial de la probabilitat de cada vòxel de pertànyer a cadascun dels tres teixits: CSF, GM i WM, i són utilitzats per molts mètodes de tractament de neuroimatge MRI, per exemple en alguns mètodes de segmentació [91].

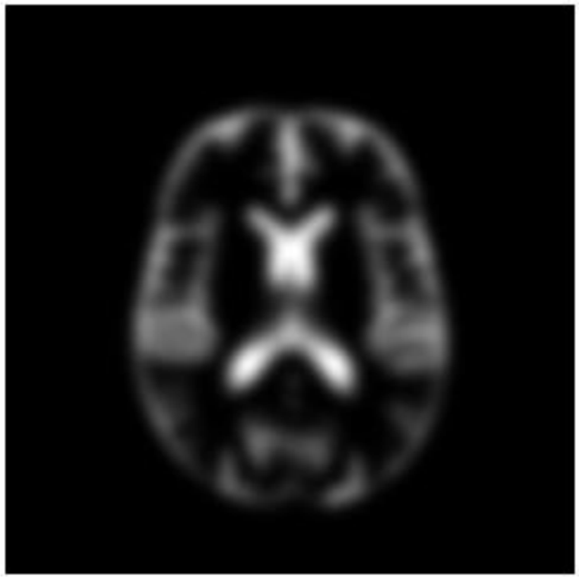

Figura 5.2.2: TPM del teixit csf

En l'exemple pràctic del subcapítol 5.4 s'utilitzarà l'atles SRI24 [100]. A la Figura 5.2.1 es mostra el tall axial 80è d'aquest model, i a les Figures 5.2.2 - 5.2.4 els corresponents TPMs.

Hi ha dues assumpcions addicionals que fem a l'hora de considerar un atles com un model del cervell. La primera és que tots els cervells tenen una distribució espacial dels teixits aproximadament idèntica. És a dir, tothom té les mateixes regions més o menys al mateix lloc. Per això té sentit utilitzar atles estadístics que donen funcions de distribució i densitat d'aquestes localitzacions. La segona és que aquests teixits són discriminables pel seu nivell de gris o d'altres propietats que queden recollides en la imatge MRI. Aquest fet justifica que els metges i els programes automatitzats les utilitzin per distingir i discriminar els teixits. És a dir, les MRIs són representants vàlides del cervell.

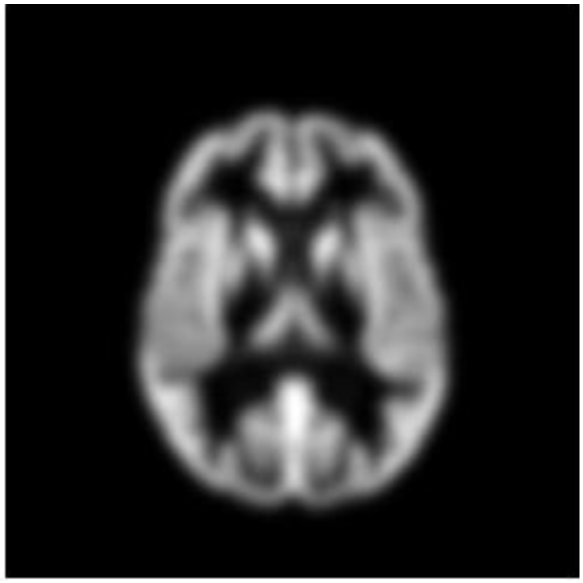

Figura 5.2.3: TPM del teixit GM

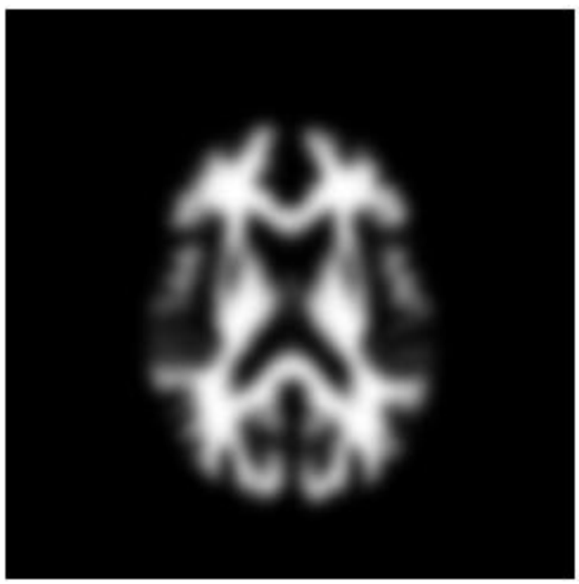

Figura 5.2.4: TPM del teixit WM

Cal assenyalar que es poden estendre tots aquests resultats tant a altres fonts de neuroimatge com a d'altres components de l'atles mateix. L'única condició necessària per a realitzar tot el treball que a continuació es detalla es disposar d'un model considerat vàlid i d'una família de conjunts que modeli l'espectre del fenomen en qüestió.

5.2.2 Reinterpretació

Una MRI és una aplicació que a cada vòxel li atorga un nivell de gris.

$$MRI : \{1, .., Dim_x\} \times \{1, \ldots, Dim_y\} \times \{1, \ldots, n\ talls\} \longrightarrow \{0, \ldots, NG - 1\}$$

on Dim_x i Dim_y denoten, respectivament, la resolució en els eixos x i y de la imatge plana i NG el nombre màxim de nivells de gris que s'empren per representar la informació de la imatge.

Com que el treball que es proposa es restringeix a imatges MRI prendrem com a univers de discurs l'espai de totes les possibles imatges MRI.

Definició 5.2.1. *L'espai de totes les imatges MRI amb nivell de gris discret entre* 0 *i NG, que prendrem com a univers de discurs X en aquest treball, és*

$$X = \{1, .., Dim_x\} \times \{1, \ldots, Dim_y\} \times \{1, \ldots, n\ talls\} \times \{0, \ldots, NG - 1\}$$

Cal remarcar que tot el treball que es proposa es realitza sobre aquest univers X de totes les possibles imatges. Evidentment l'objectiu es refereix i circumscriu a aquelles imatges que són MRIs d'un cervell.

Una altra observació important és que en X les imatges corresponents a cada tall es poden entendre geomètricament com una superfície amb discontinuïtats en els contorns dels objectes. Aquesta interpretació geomètrica és utilitzada per alguns mètodes de segmentació com [10] [83].

Fixada la notació, en X hi ha dues MRIs que rebran un nom especial. La primera és la de l'atles (Figura 5.2.1) i la segona la del subjecte (Figura 5.4.1). Les anomenarem "model" i "pacient" respectivament.

Amb aquesta notació els TPMs defineixen els següents tres conjunts en X.

$$\sigma_{csf}, \sigma_{gris}, \sigma_{blanc} : X \longrightarrow [0, 1]$$

$$\sigma_{csf}(x, y, z, ng) = \begin{cases} csf(x, y, z) & si \quad ng = model(x, y, z) \\ 0 & altrament \end{cases}$$

$$\sigma_{gris}(x, y, z, ng) = \begin{cases} gris(x, y, z) & si \quad ng = model(x, y, z) \\ 0 & altrament \end{cases}$$

$$\sigma_{blanc}(x, y, z, ng) = \begin{cases} blanc(x, y, z) & si \quad ng = model(x, y, z) \\ 0 & altrament \end{cases}$$

Prendre σ_{csf}, σ_{gris} i σ_{blanc}, tal com s'han definit, com els extensionals del model seria massa dràstic, ja que la MRI model s'ha de entendre com una bona aproximació de la posició i nivell de gris de cada punt però no en un sentit absolut.

Il·lustrem els problemes que això comportaria amb un exemple.

Suposem que $model(50, 50) = 500$, $subjecte(50, 50) = 505$ i $gris(50, 50) = 0, 7$. Tal com hem definit σ_{gris} es tindria $\sigma_{gris}(50, 50, 505) = 0$ i per tant tot i tenir un nivell de gris proper al del model, no podríem inferir res en la MRI del pacient. Seria desitjable que els nivells de gris propers als del model donessin pertinences (a priori) semblants als dels TPMs. És a dir, és esperable algun tipus de continuïtat o consistència entre les dades i el model.

Una anàlisi heurística de les dades permet estimar que el nivell de gris d'un píxel d'un teixit pot variar en l'interval $(model(x, y, z) - NG/5, model(x, y, z) + NG/5)$ entre diferents MRIs.

Per tant, redefinim els conjunts σ_{csf}, σ_{gris} i σ_{blanc} com segueix.

Definició 5.2.2. *Es defineixen els conjunts σ_{csf}, σ_{gris} i σ_{blanc} com:*

$$\sigma_{csf}, \sigma_{gris}, \sigma_{blanc} : X \longrightarrow [0, 1]$$

$$\sigma_{csf}(x,y,z,ng) = \begin{cases} csf(x,y,z)\cdot(1-\frac{|ng-model(x,y,z)|}{NG/5}) & si\ |ng-model(x,y,z)| < NG/5 \\ 0 & altrament \end{cases}$$

$$\sigma_{gris}(x,y,z,ng) = \begin{cases} gris(x,y,z)\cdot(1-\frac{|ng-model(x,y,z)|}{NG/5}) & si\ |ng-model(x,y)| < NG/5 \\ 0 & altrament \end{cases}$$

$$\sigma_{blanc}(x,y,z,ng) = \begin{cases} blanc(x,y,z)\cdot(1-\frac{|ng-model(x,y,z)|}{NG/5}) & si\ |ng-model(x,y,z)| < NG/5 \\ 0 & altrament \end{cases}$$

Es comenten a continuació algunes propietats importats de la definició donada. Consideris per exemple el teixit CSF (els altres verifiquen les mateixes propietats).

- El factor $(1-\frac{|ng-model(x,y,z)|}{NG/5})$ que multiplica $csf(x,y,z)$ és el que dóna la continuïtat i consistència entre la similitud en gris al model i la distància a la pertinença donada pel TPM.

- $\sigma_{csf}(x,y,z,model(x,y,z)) = csf(x,y,z)$, i per cada dues unitats en gris de diferència entre cada píxel del subjecte respecte del model la pertinença donada pel TPM baixa un 1%.

- Contràriament, si $|ng-model(x,y,z)| > NG/5$ llavors s'entén que el píxel del model i del subjecte són clarament diferents i per tant la informació donada pel TPM és zero.

- Si fixem les coordenades espacials $x = x_0, y = y_0, z = z_0$ i considerem el nivell de gris ng com a variable, σ_{csf}, σ_{gris} i σ_{blanc} tenen una forma piramidal com es pot veure a les Figures 5.2.5 - 5.2.7. També podrien ser considerades altres formes geomètriques (com per exemple les gaussianes) per construir aquests difusos.

Per completar la reinterpretació cal prendre σ_{csf}, σ_{gris} i σ_{blanc} com a base d'un conjunt d'extensionals d'acord amb la Definició 5.2.2

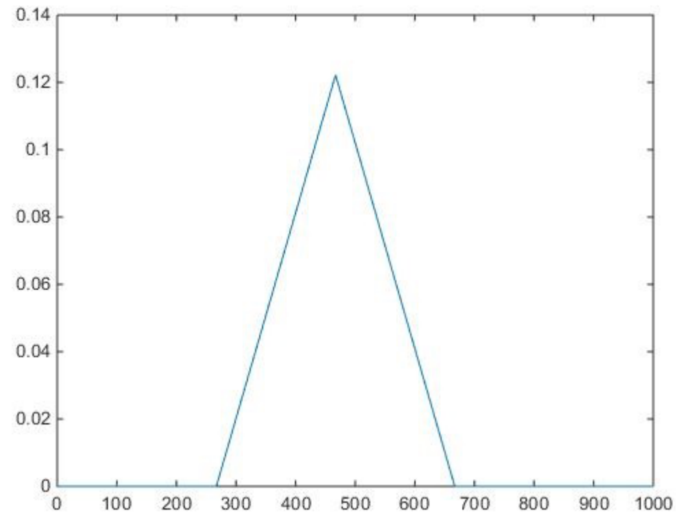

Figura 5.2.5: Conjunt σ_{csf} en el píxel (100,100) deixant variar el nivell de gris

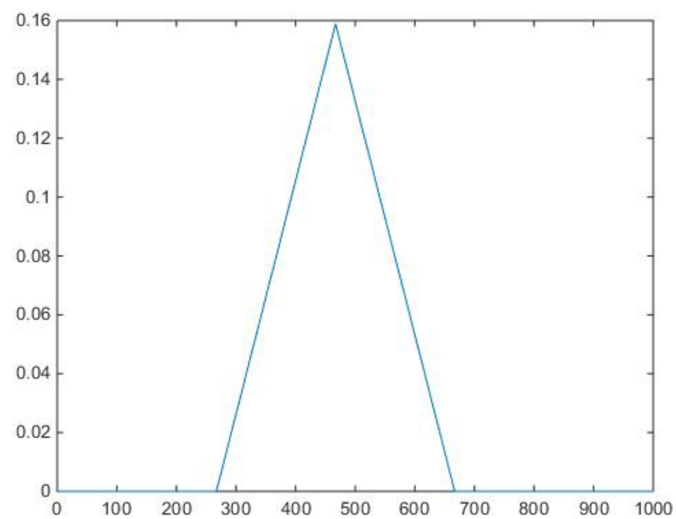

Figura 5.2.6: Conjunt σ_{gris} en el píxel (100,100) deixant variar el nivell de gris

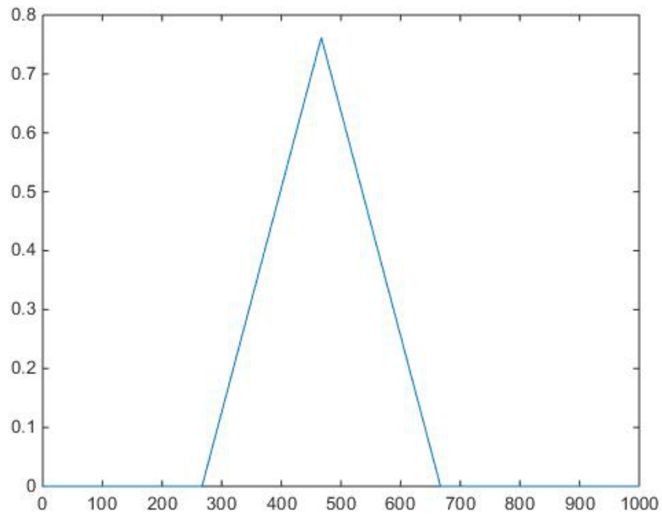

Figura 5.2.7: Conjunt σ_{blanc} en el píxel (100,100) deixant variar el nivell de gris

Definició 5.2.3. *Donats σ_{csf}, σ_{gris} i σ_{blanc} tal com s'han definit a 5.2.2, definim la indistingibilitat associada al model E_{model} com*

$$E_{model} = \inf_{i \in \{csf, gris, blanc\}} E_{\sigma_i}(x, y).$$

$$H_{E_{model}} = < \sigma_{csf}, \sigma_{gris}, \sigma_{blanc} >$$

Recapitulant, donat un atles estructural amb l'espectre donat pels TPMs s'ha construït una relació d'indistingibilitat E_{model} amb un conjunt de subconjunts difusos extensionals $H_{E_{model}}$ i base σ_{csf}, σ_{gris} i σ_{blanc}.

En aquestes estructures borroses s'ha projectat tota la informació i dades de l'atles. En resum, s'ha realitzat una completa reinterpretació de l'atles en termes de conjunts extensionals i relacions borroses. En els propers subcapítols es mostraran algunes propostes d'aplicació d'aquests resultats que poden ser útils per tal de millorar els mètodes automatitzats que es fan servir actualment pel tractament de neuroimatges i la identificació de teixits.

Una altra aportació d'aquesta relectura d'un atles en termes d'operadors d'indistingibilitat està constituïda per la possibilitat d'introduir una càrrega semàntica al camp. La mateixa prové del fet de que, tal com s'ha justificat als capítols 1 i 2 d'aquesta tesi, parlar d'indistingibilitats permet introduir nocions com similitud, proximitat, observabilitat, etc.

Disposar d' una semàntica és important per diverses raons. En primer lloc permet verbalitzar i entendre millor el problema i les seves característiques. Al capítol 1 d'aquesta tesi s'ha afirmat que la precisió numèrica és el principal punt fort de l'estadística, mentre que la comprensibilitat ho és de la lògica difusa. Per això és interessant poder donar una semàntica difusa en un context tan ric en mètodes estadístics com és el de l'anàlisi automatitzada de neuroimatges. Tenir una semàntica és, doncs, útil per a poder emprar tècniques de caire diferent a l'estadístic. Aquests mètodes estadístics són d'una precisió sense igual en el món científic a canvi de patir de l'efecte *black box*. Aquesta és la causa de que sigui difícil en general generar sinèrgies entre mètodes estadístics i no-estadístics i sovint la possessió d' una semàntica subjacent es la clau per a sortir del atzucac. És a dir, poder tractar el problema en termes de similitud, observabilitat i distància permet utilitzar tècniques no-estadístiques (com, per exemple, sistemes de regles difuses o d'altres) per a tractar problemes del camp. A través de la semàntica proposada es dóna un camí per a confluir l'estadística que s'utilitza extensament en el camp amb altres tècniques diferents.

5.3 Particularització dels TPMs

Una interessant via d'aplicació de la reinterpretació proposada és la particularització dels TPMs. Com s'ha comentat prèviament, els TPMs venen donats per l'atles i són funcions de la distribució espacial a priori dels teixits en una MRI. Aquest coneixement a priori donat pel model és utilitzat per diversos mètodes de la literatura, per exemple SPM [91], per a diverses funcions d'anàlisi de la imatge.

Donat que els TPMs defineixen una noció d'observabilitat i una estructura a l'espai X de totes les possibles MRIs, una interessant qüestió és com aquesta es concreta en una MRI clínica. És a dir, com s'especifica la distribució de cada teixit que és té a priori quan aquesta es contrasta sobre una MRI clínica d'un subjecte o pacient.

En aquest subcapítol s'explicarà com es pot realitzar una particularització extensional dels TPMs en una MRI subjecte d'acord amb la reinterpretació proposada. En el proper subcapítol s'exemplificarà en un cas particular.

El primer pas necessari per a poder injectar la informació de l'atles en la MRI particular és transformar geomètricament la MRI subjecte a l'espai normalitzat en el que està definit l'atles. Aquesta transformació s'anomena normalització i a la literatura s'han proposat múltiples algoritmes per a realitzar-la [67]. En l'exemple que es dona en el subcapítol següent s'ha utilitzat l'algoritme de normalització donat pel paradigma Statistic Parametrical Mapping.

Es defineix a continuació que s'entén per una particularització dels TPMs.

Definició 5.3.1. *Donada una MRI subjecte, i els TPMs d'un atles tal com han estat definits (Definició 5.2.2), definim la particularització dels TPMs en la imatge MRI particular com:*

- $\mu_{csf}(x, y, z) = \sigma_{csf}(x, y, z, subjecte(x, y, z))$
- $\mu_{gris}(x, y, z) = \sigma_{gris}(x, y, z, subjecte(x, y, z))$
- $\mu_{blanc}(x, y, z) = \sigma_{blanc}(x, y, z, subjecte(x, y, z))$

Hi ha un problema de caire semàntic en els TPMs particularitzats. Tal com s'ha definit la indistingibilitat de l'atles, els TPMs són conjunts observables. Si volem, per exemple, desenvolupar o utilitzar algun mètode que discerneixi els teixits d'una MRI (segmentació) cal que la solució sigui observable.

Però tal com s'han definit $\mu_{csf}, \mu_{gris}, \mu_{blanc}$, aquests no són en general subconjunts difusos extensionals. El subcapítol 5.4 es en dóna un contraexemple, ja que per exemple, considerant la t-norma Producte μ_{csf} (Figura 5.4.2) no coincideix amb $\phi_E(\mu_{csf})$ (Figura 5.4.14) ni $\psi_E(\mu_{csf})$ (Figura 5.4.17)

Per tal de preservar l'observabilitat cal cercar els conjunts difusos extensionals que millor aproximen la particularització dels TPMs. Com es pot veure, aquest problema és idèntic al tractat en el capítol 3 d'aquesta tesi. Podem per tant utilitzar els diversos mètodes d'aproximació per extensionals, considerant diferents t-normes, con les que s'han proposat en aquesta tesi per a resoldre el problema.

5.4 Exemple

A continuació es dóna un exemple de la particularització extensional dels TPMs.

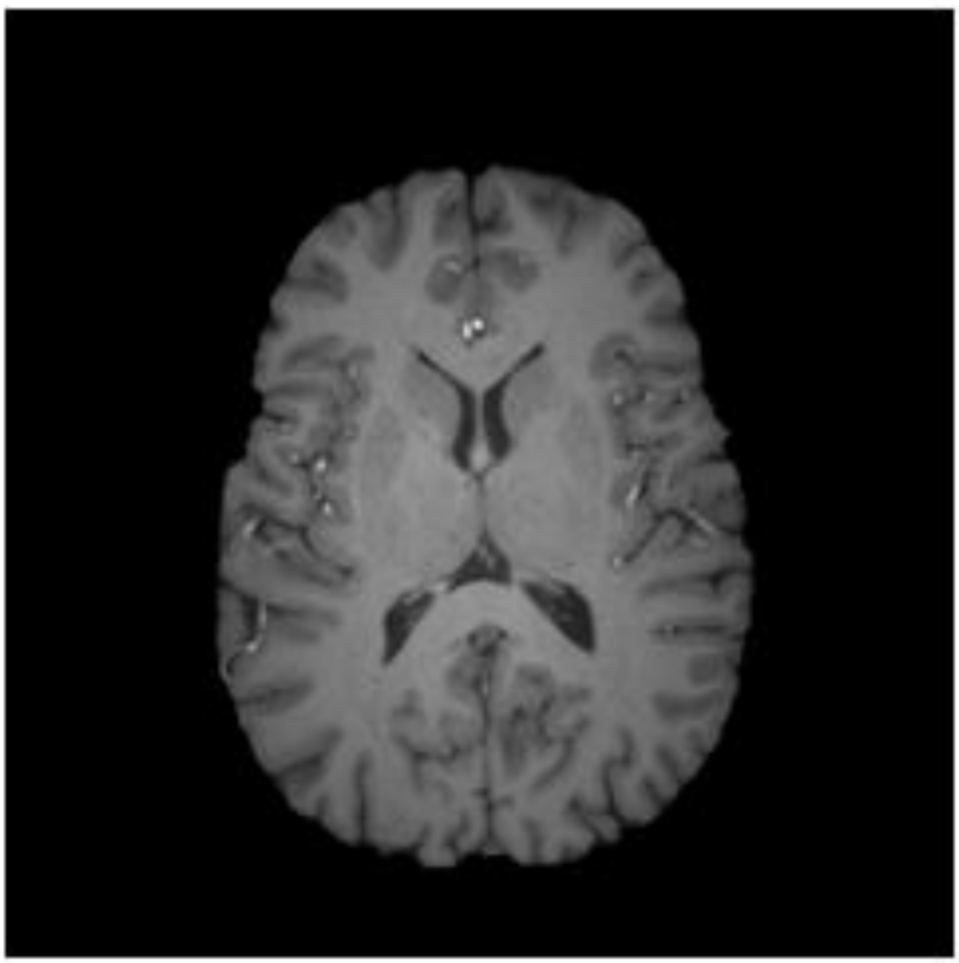

Figura 5.4.1: MRI (normalitzada) que s'utilitzarà en aquest treball.

S'utilitzarà la MRI (Figura 5.4.1), obtinguda d'un subjecte sa que ha cedit lliurement l'ús de la seva imatge per a aquesta recerca.

Les dimensions de la MRI són $256 \times 256 \times 160$ i la informació es representa amb 12 bits.

Per a il·lustrar en imatges aquest exemple s'utilitzarà la imatge potenciada en T1 i el tall axial 80 de la MRI normalitzada.

Figura 5.4.2: Particularització del TPM del teixit CSF

L'atles (Figura 5.2.1) utilitzat ha estat el SRI [100] on es disposa d' un model del cervell en diferents potenciacions (T1, T2 i PD) de 12 bits, amb mapes de les diferents regions anatómiques i TPMs dels diferents teixits (Figures 5.2.2 - 5.2.4).

Les computacions s'han realitzat en un ordinador i7 de 3.40 GHz, 8 GB de memòria RAM i un sistema operatiu Windows 7 de 64 bits. La programació i tractament de les dades s'ha fet en la versió R2014b de Matlab.

Com a pre-processament de les dades s'ha normalitzat l'atles i la MRI a l'espai normalitzat en el que està definit l'atles. Per a fer-ho s'ha utilitzat la toolbox SPM8 [91] de Matlab, on es disposa d'una funció de normalització.

Figura 5.4.3: Particularització dels TPM del teixit GM

Posteriorment s'ha igualat l'escala de gris d'ambdues MRI escalant-les de forma lineal entre 0 (negre) i 1000 (blanc). En aquesta escala de gris el valor de $NG/5$ és 200.

Les Figures 5.4.2 - 5.4.4 mostren la particularització dels TPMs en aquesta MRI, tal com s'ha definit al subcapítol anterior.

Per tal de cercar els subconjunts difusos extensionals que millor aproximen aquestes particularitzacions s'ha utilitzat el mètode basat en mitjanes (subcapítol 3.1), el mètode basat en potències (subcapítol 3.2) i el mètode proposat pel Mínim. En aquest exemple però, només es mostren les imatges del primer mètode ja que són visualment més acurades que els altres dos esmentats.

Considerant la t-norma de Łukasiewicz i aplicant els operadors d'aproximació per extensionals superior i inferior s'obtenen els següents conjunts extensionals de les figures 5.4.5 - 5.4.10.

Mitjançant el mètode basat en mitjanes ponderades (subcapítol 3.1) la millor aproximació dóna els conjunts extensionals de les Figures 5.4.11 - 5.4.13.

Considerant la t-norma producte, les aproximacions superiors i inferiors dels

TPMs particularitzats es mostren a les Figures 5.4.14 - 5.4.19 i els conjunts resultants del mètode a les Figures 5.4.20 - 5.4.22.

En conclusió, aquestes figures il·lustren el mètode proposat d'utilitzar la teoria d'indistingibilitats i subconjunts difusos extensionals per a la representació de la informació d'un atles MRI en una imatge particular. Com es pot veure, especialment amb les imatges obtingudes amb la t-norma Producte (Figures 5.4.20 - 5.4.22), es pot veure una millora visual en la nitidesa de les diferents regions anatòmiques.

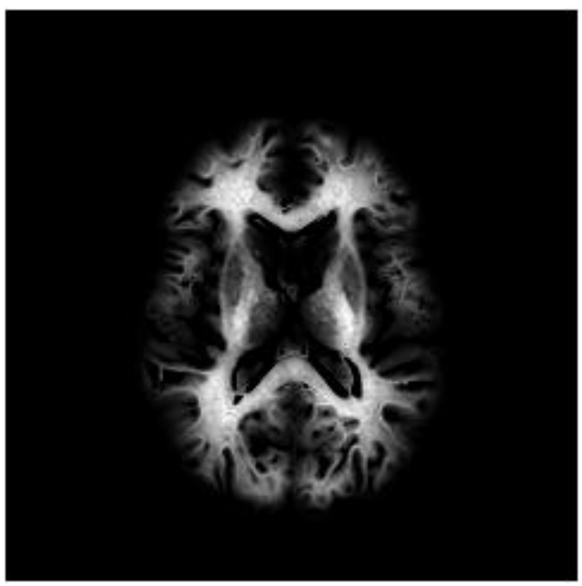

Figura 5.4.4: Particularització dels TPM del teixit WM

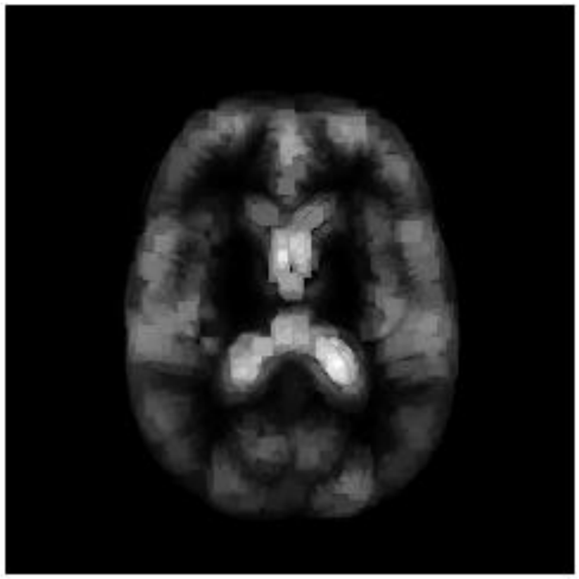

Figura 5.4.5: $\phi_E(\mu_{csf})$ per $T =$ Ł

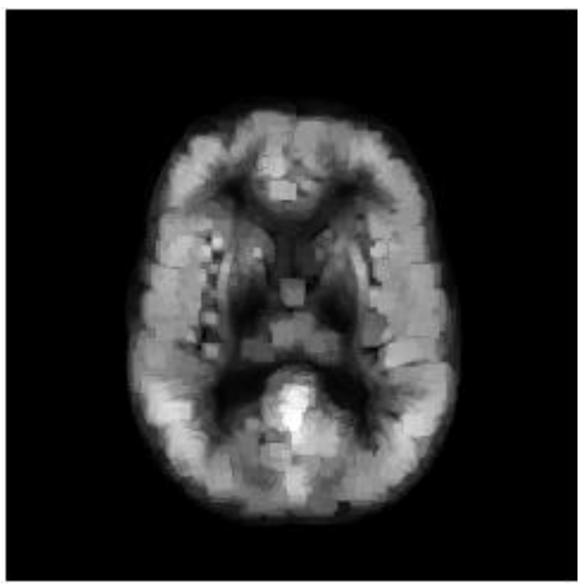

Figura 5.4.6: $\phi_E(\mu_{gris})$ per $T =$ Ł

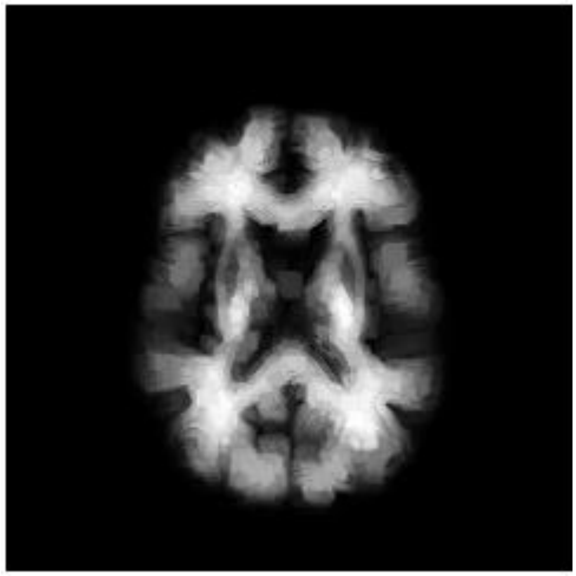

Figura 5.4.7: $\phi_E(\mu_{blanc})$ per $T =$ Ł

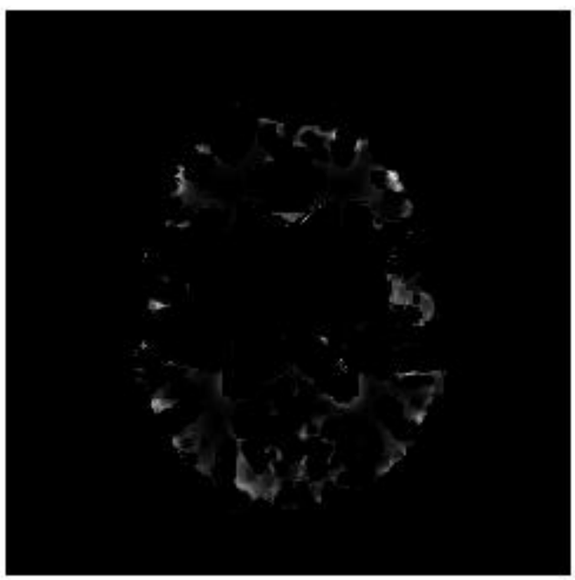

Figura 5.4.8: $\psi_E(\mu_{csf})$ per $T =$ Ł

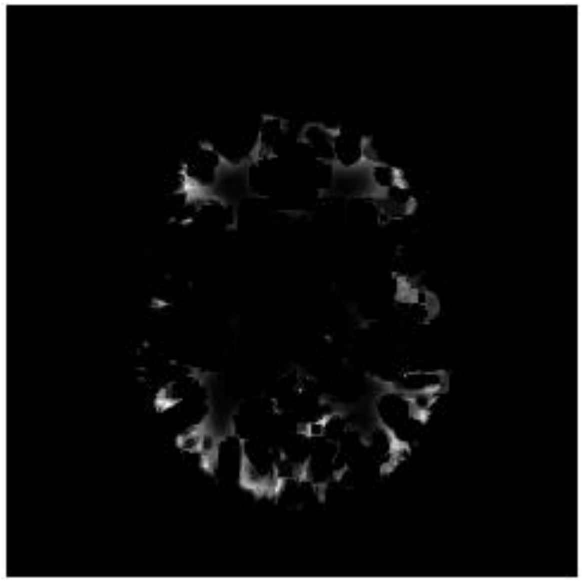

Figura 5.4.9: $\psi_E(\mu_{gris})$ per $T =$ Ł

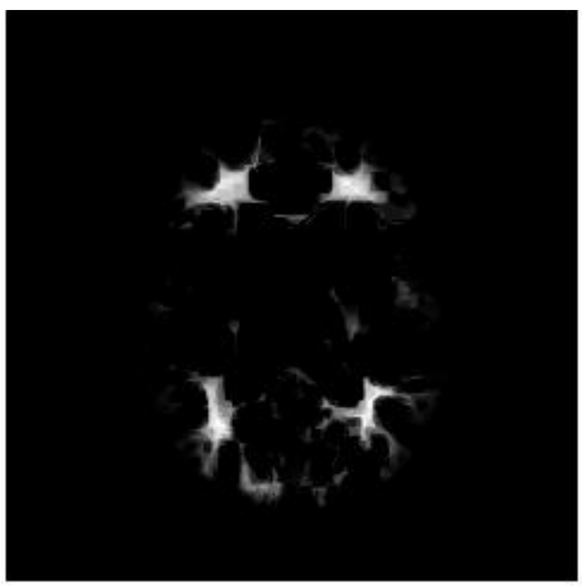

Figura 5.4.10: $\psi_E(\mu_{blanc})$ per $T =$ Ł

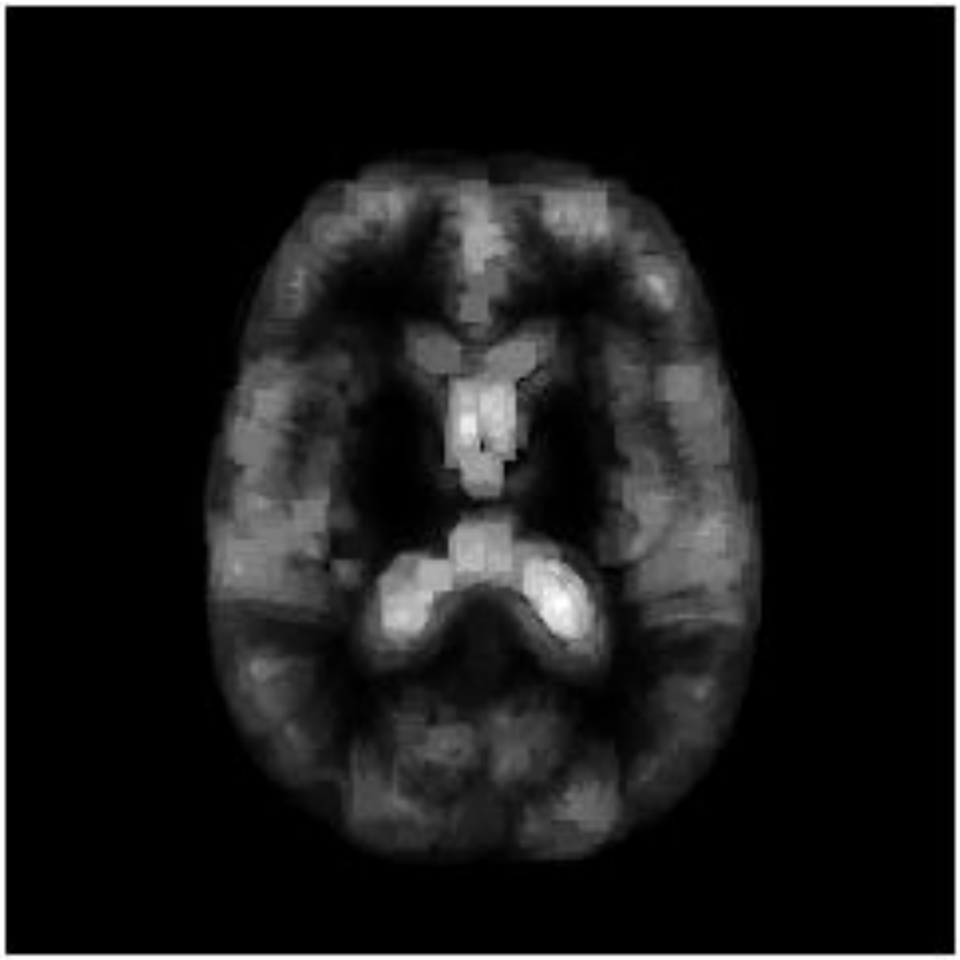

Figura 5.4.11: Particularització extensional del TPM CSF amb el mètode basat en mitjanes amb la t-norma Łukasiewicz

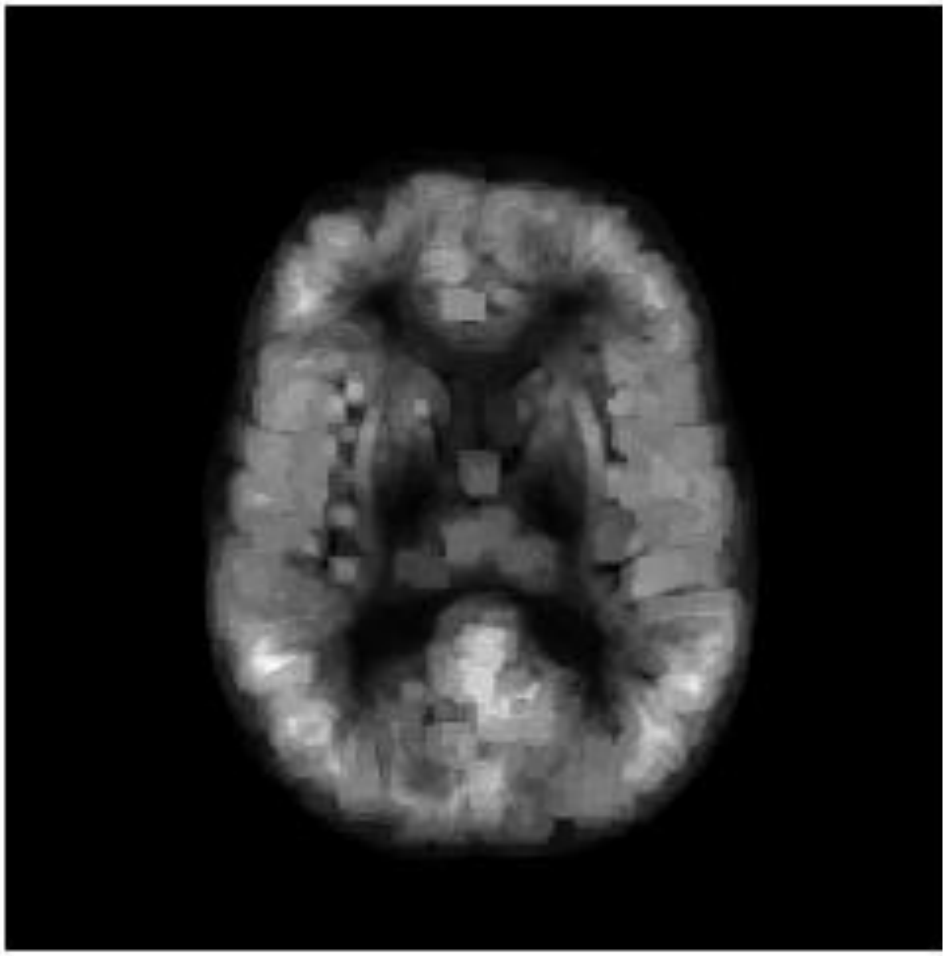

Figura 5.4.12: Particularització extensional del TPM GM amb el mètode basat en mitjanes amb la t-norma Łukasiewicz

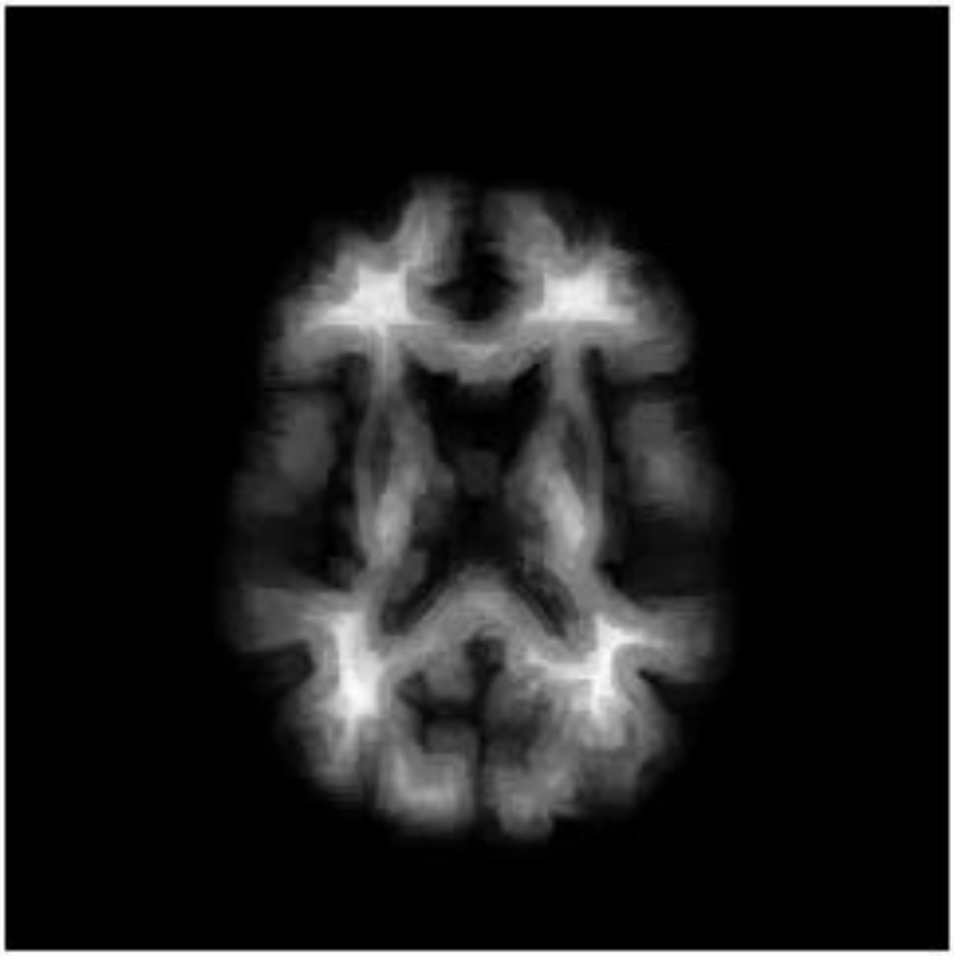

Figura 5.4.13: Particularització extensional del TPM WM amb el mètode basat en mitjanes amb la t-norma Łukasiewicz

Figura 5.4.14: $\phi_E(\mu_{csf})$ per $T = \Pi$

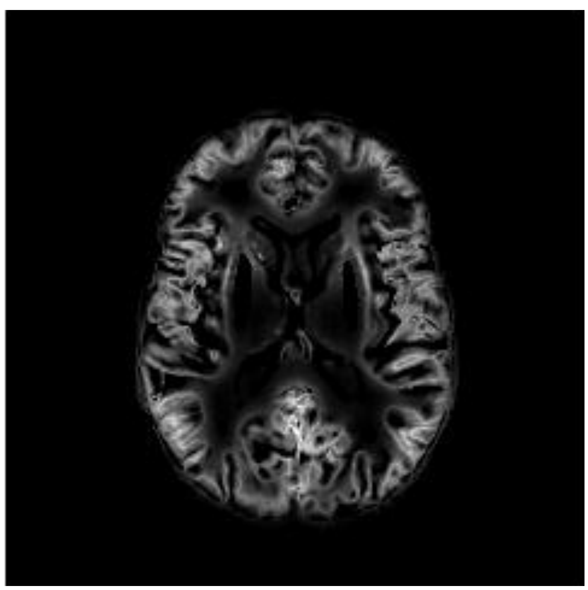

Figura 5.4.15: $\phi_E(\mu_{gris})$ per $T = \Pi$

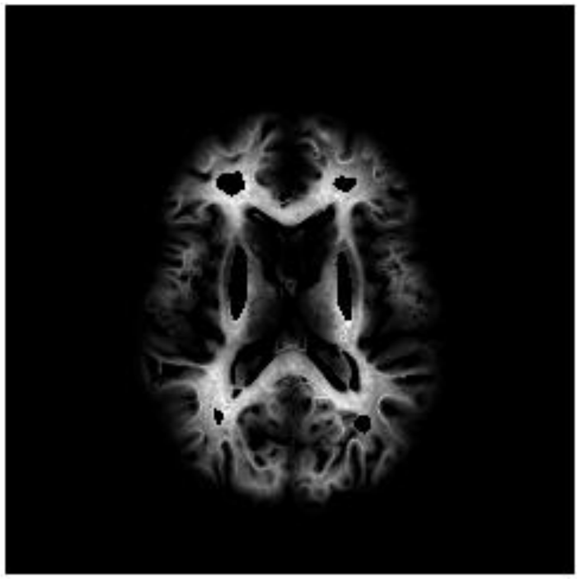

Figura 5.4.16: $\phi_E(\mu_{blanc})$ per $T = \Pi$

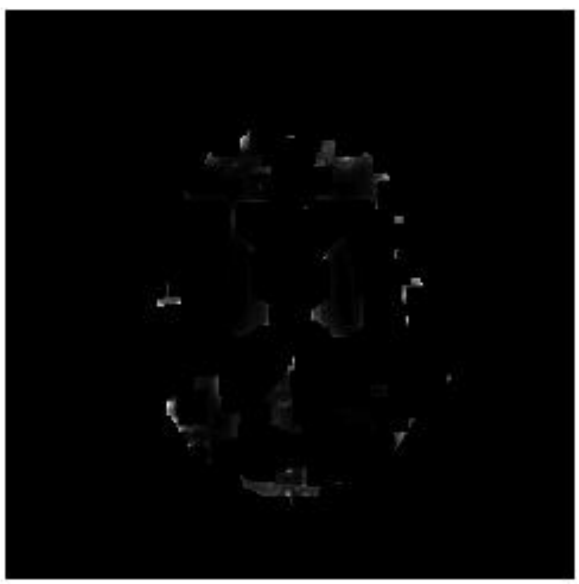

Figura 5.4.17: $\psi_E(\mu_{csf})$ per $T = \Pi$

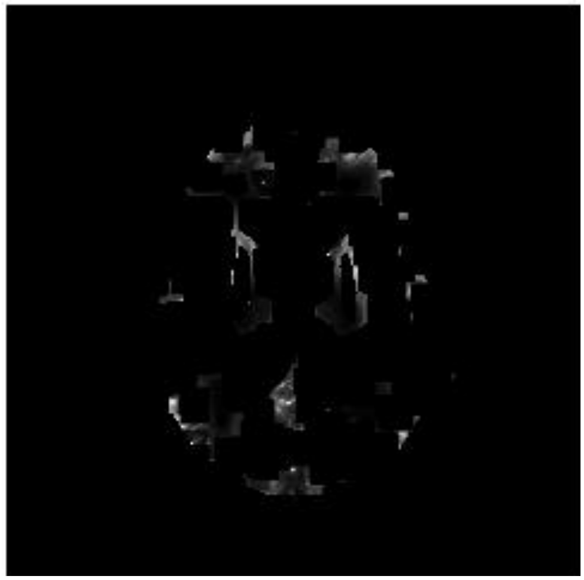

Figura 5.4.18: $\psi_E(\mu_{gris})$ per $T = \Pi$

Figura 5.4.19: $\psi_E(\mu_{blanc})$ per $T = \Pi$

Figura 5.4.20: Particularització extensional del TPM CSF amb el mètode basat en mitjanes amb la t-norma Producte

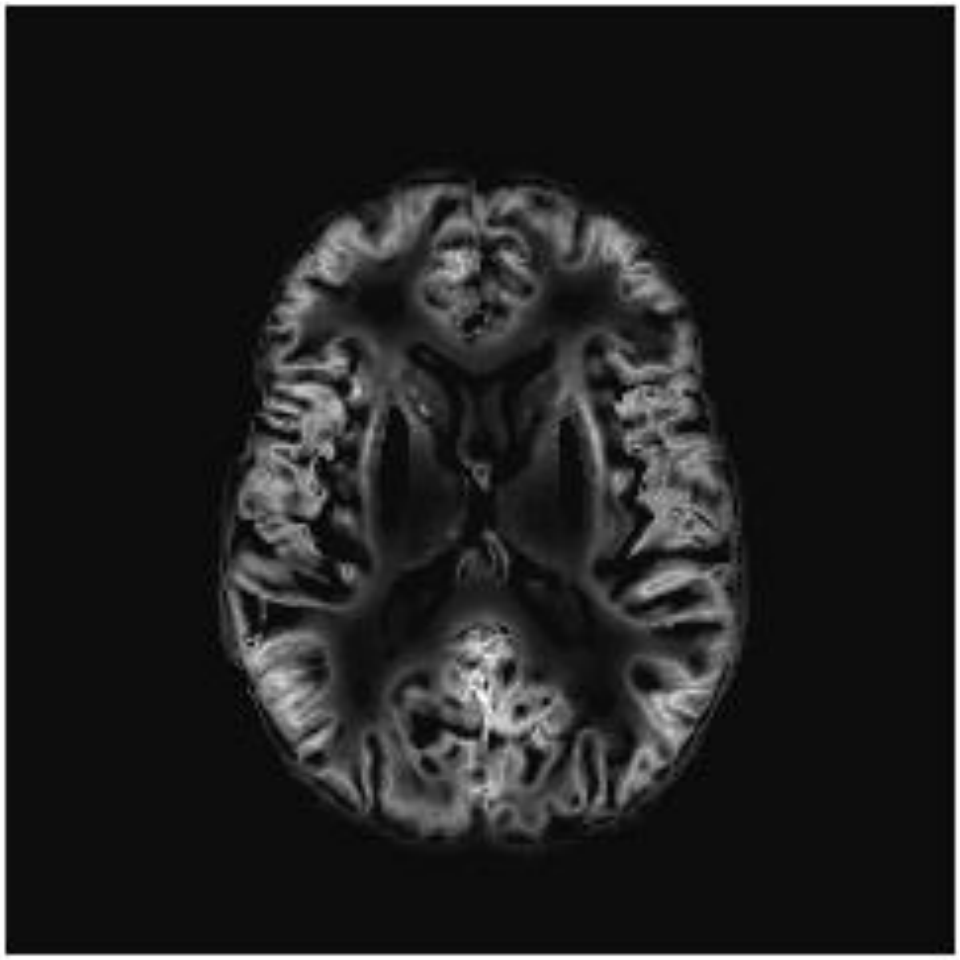

Figura 5.4.21: Particularització extensional del TPM GM amb el mètode basat en mitjanes amb la t-norma Producte

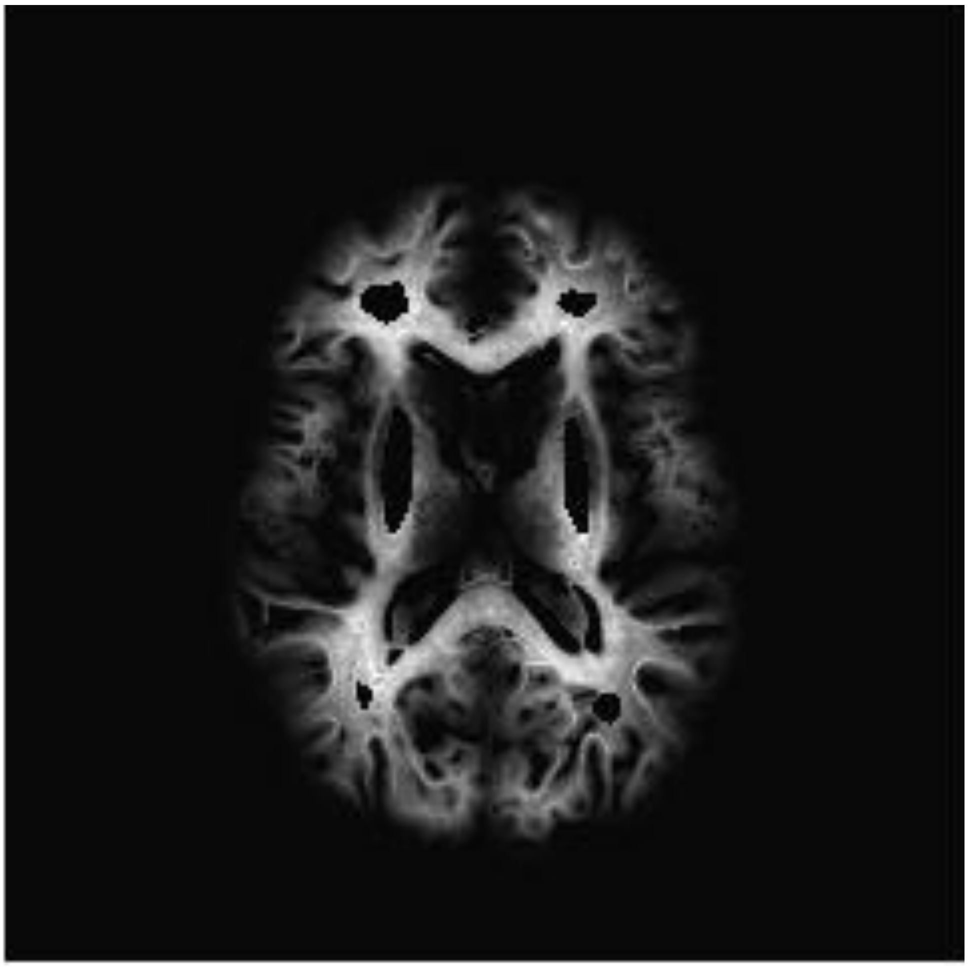

Figura 5.4.22: Particularització extensional del TPM WM amb el mètode basat en mitjanes amb la t-norma Producte

6. Conclusions

L'objectiu inicial d'aquesta tesi doctoral era proposar un nou marc teòric de recerca en el si de la teoria d'indistingibilitats amb potencials aplicacions en problemes d'inferència automatitzada i anàlisi d'imatge biomèdica. Això s'ha realitzat enfocant el problema en un marc molt general de tractament i representació de la incertesa i proposant una reinterpretació en termes difusos de qualsevol model científic„ en particular de models estructurals cerebrals en imatge MRI. A continuació es sumaritzen les principals contribucions de cada capítol i s'expliciten algunes línies de futura recerca que s'obren en aquest treball.

6.1 Sumari dels principals resultats

Per a realitzar aquest objectiu principal s'ha estudiat en primer lloc la incertesa en el marc més general del procés epistemològic i afitat al sentit que pot tenir incorporar nocions borroses a la representació del coneixement i de la imatge mèdica.

Posteriorment s'ha estudiat el marc de la teoria difusa d'indistingibilitats i s'ha aprofundit en la teoria dels conjunts borrosos extensionals, justificant la seva utilització per a representar els conceptes granulars i els conjunts observables.

En darrer lloc s'ha desenvolupat una interpretació borrosa de models científics en general que permet acostar i utilitzar totes les eines difuses en l'anàlisi de les particularitats i l'observabilitat dels models. Com a cas particular s'ha utilitzat tot això en el camp de la neuroimatge mèdica MRI i els atles estructurals cerebrals.

Podem concloure que l'objectiu plantejat a l'inici de la tesi ha estat satisfactòriament assolit en un pla teòric i il·lustrat com aquest es pot utilitzar en aplicacions pràctiques concretes, quedant com a futures línies de recerca el ple desenvolupament i implementació d'aquestes tècniques per a l'eventual millora de problemes propis del camp.

L'objectiu principal ha estat dividit en cinc objectius secundaris que han estat treballats respectivament en els cinc capítols d'aquesta tesi, els principals resultats dels quals es sumaritzen a continuació.

1. **Why Fuzzy?**

    - Identificació de diferents fonts d'incertesa i la seva relació amb l'esquema de les 3 capes de la cognició de Carnap-Sneed-Seising.
    - Especificació d'algunes aportacions destacades de l'enfoc difús a la representació del coneixement en el context de múltiples fonts d'incertesa.
    - Recull de la dialèctica entre la lògica difusa i la probabilitat en la línia del debat sostingut en la comunitat científica especialitzada els anys 80 i 90. Especificació de què ha de ser esperable d'una teoria i d'una altra.
    - Concreció dels punts anteriors en un context d'incertesa mèdica.

2. **Operadors d'indistingibilitat i isomorfismes fonamentals**

    - Dotació d'una estructura de reticle complet als conjunts de T-indistingibilitats $\mathcal{E}$, conjunts de subconjunts difusos extensionals $\mathcal{H}$, oper-

ადors d'aproximació superior per extensionals $\mathcal{U}$ i operadors d'aproximació inferior per extensionals $\mathcal{L}$.

- Demostració de l'isomorfisme entre els reticles $\mathcal{E}, \mathcal{H}, \mathcal{U}$ i $\mathcal{L}$ (Teorema 2.3.4).
- Estudi de l'extensió dels resultats del Teorema 2.3.4 considerant mitjanes quasi-aritmètiques o naturals en un cas finit i infinit.

3. **El problema de l'aproximació per extensionals**

- Desenvolupament de tres nous mètodes superiors als de la literatura per t-normes arquimedianes i d'un nou mètode per la t-norma del mínim pel problema d'aproximar un subconjunt difús per un subconjunt difús extensional de forma òptima, en un cas finit i infinit.
- Comparació dels mètodes desenvolupats.

4. **Reinterpretació extensional de models**

- Estudi exhaustiu de les parts constituents d'un model científic en la seva definició més general.
- Definició de l'espectre d'un model.
- Reinterpretació de l'espectre d'un model en termes de subconjunts difusos extensionals.
- Definició de la distància associada a un model (Definicions 4.4.5 i 4.4.6).

5. **Reinterpretació extensional en neuroimatge MRI**

    - Relectura d'un atles estructural cerebral en imatge MRI en termes de conjunts difusos extensionals i relacions d'indistingibilitat.
    - Representació novedosa de la informació d'una MRI a través del marc teòric proposat.
    - Proposta d'aplicació a la particularització dels Tissue Probability Maps donats per un atles en la MRI d'un subjecte singular.

6.2 Publicacions

La recerca realitzada en aquesta tesi doctoral s'ha concretat en les següents publicacions:

6.2.1 Publicacions en revistes

A la revista *Information Sciences*, amb Impact Factor de 3,893 el 2014. 8ª de 135 (Decil 1) a l'àrea de Computer Science & Information Systems [4]:

- **Mattioli, G.** & Recasens, J. (2013): Structural analysis of indistinguishability operators and related concepts. *Information Sciences*, 241, 85-100.

A la revista *IEEE Transactions on Fuzzy Systems*, amb Impact Factor de 6,306 el 2014.2ª de 121 a l'àrea de Computer Science &AI i 3ª de 248 a l'àrea de Electrical & Electronic Engineering (Decil 1 en ambdóscasos) [5]:

[4] http://www.scimagojr.com/journalsearch.php?q=24242&tip=sid
[5] http://www.scimagojr.com/journalsearch.php?q=24242&tip=sid

- **Mattioli, G.** & Recasens, J. (2014): Approximating Arbitrary Fuzzy Subsets by Extensional Ones. *IEEE Transactions on Fuzzy Systems*, 99, 25-38.

6.2.2 Publicacions en congressos

Al congrés FUZZ-IEEE (CORE A) celebrat a Taipei (Taiwan), el 2011:

- Mattioli, G. & Recasens, J. (2011, June). Dualities and isomorphisms between indistinguishabilities and related concepts. *Fuzzy Systems (FUZZ), 2011 IEEE International Conference on.*

Al congrés ESTYLF celebrat a Valladolid, el 2012:

- Mattioli, G. & Recasens, J. (2012). Isomorfismos entre Indistinguibilidades, Conjuntos de Extensionales y Aproximaciones Superiores e Inferiores. *ESTYLF-2012.*

Al congrés IPMU (CORE C) celebrat a Catània (Itàlia), el 2012:

- Mattioli, G. & Recasens, J. (2012). Natural Means of Indistinguishability Operators. *IPMU-2012.*

Al congrés NAFIPS celebrat a Berkeley (Estats Units), el 2012:

- Mattioli, G. & Recasens, J. (2012). Powers of Indistinguishability Operators. *NAFIPS-2012.*

Al congrés ISCAMI celebrat a Malenovice (República Txeca), el 2013:

- Mattioli, G. (2013). Seeing woods and trees. A new algorithm based on unfocusing. *ISCAMI-2013*.

Al congrés AGOP celebrat a Pamplona, el 2013:

- Mattioli, G. & Recasens, J. (2013). Comparison of Different Algorithms of Approximation by Extensional Fuzzy Subsets. *AGOP-2013*.

Al congrés CEDI celebrat a Madrid, el 2013:

- Mattioli, G. (2013). The WAT Algorithm, an Algorithm to see both Woods and Trees. *CEDI-2013*

Al congrés ESTYLF celebrat a Zaragoza, el 2014:

- Mattioli, G. (2014). ¿Cuántos clústers hay? El algoritmo WAT. *ESTYLF-2014*

Al congrés FSTA celebrat a Liptovsky Jan (Eslovàquia), el 2014:

- Mattioli, G. (2014). Why Fuzzy? *FSTA-2014*.

Al congrés CCIA celebrat a Barcelona, el 2014:

- Mattioli, G. (2014). Sobre distàncies associades a models. *CCIA-2014*

Al congrés JIPI celebrat a Barcelona, el 2015:

- Mattioli, G. (2014). Fuzzy Interpretation of Scientific Models. *JIPI-2015*

6.2.3 Altres

S'han realitzat també els següents seminaris:

- A la Universitat de Barcelona, el 2012: *Aplicació dels operadors d'indistingibilitat a la diagnosi en imatges mèdiques*
- Al Centro de Investigación Médica Aplicada (CIMA) de Pamplona, el 2014: *Discusión sobre los conjuntos extensionales. Aplicación a la modelización de un atlas MRI*
- A la Slovak Techical University (STU) de Bratislava (Eslovàquia), el 2014: *Extensional sets and their usage to model MRI brain atlases and problems related*

Per l'article "¿Cuántos clúster hay? El Algoritmo WAT" presentat al congrés ESTYLF-2014, va ser atorgat a l'autor d'aquesta tesi el:

> **Premio Granada Excellence Network of Innovation Laboratories (GENIL)** al mejor artículo de un joven investigador otorgado por el Campus de Excelencia Internacional BioTIC de la Universidad de Granada.

6.3 Futures línies de recerca i camps d'aplicació

El treball realitzat en aquesta tesi obre un nou espai on la lògica difusa i la teoria d'indistingibilitats són objectes utilitzables per a l'estudi i l'anàlisi de problemes on es disposa d'un model. Concretament en el camp de la neuroimatge s'ha mostrat com aquestes relacions, operadors i conjunts difusos poden ser emprats per a l'eventual resolució de problemes del camp.

Aquest nou espai que es proposa i s'obre no marca una direcció específica de recerca, sinó que serveix de plataforma de llançament per a futures línies de treball en problemes diversos del camp. Es pot entendre que aquesta tesi no soluciona un "què" fer, suggerint en conseqüència "quès" ulteriors; sinó un "com" fer a partir del qual la creativitat dels futurs investigadors pot donar valor a la reinterpretació proposada en aquest nou marc.

Tanmateix, arrel del treball realitzat sí que es poden identificar algunes línies de treball específiques, que es detallen a continuació:

- **Estudi de la interrelació dels conjunts $\mathcal{E}, \mathcal{H}, \mathcal{U}$ i $\mathcal{L}$ tenint en compte altres operadors d'agregació.**

  Aquest treball, de caire purament matemàtic, pot donar una comprensió major (i eventualment una completa caracterització) d'aquest objectes formals tan íntimament relacionats.

- **Desenvolupament de millors mètodes d'aproximació d'un subconjunt difús per un subconjunt difús extensional.**

  En aquesta tesi s'han proposat mètodes millors que els existents a la literatura per a t-normes arquimedianes però poden haver extensionals més adequats que els que es troben mitjançant el mètode basat en mitjanes (subcapítol 3.1) o el basat en potències (subcapítol 3.2). EL mètode QP sí garanteix que l'extensional trobat és òptim, però només és utilitzable en conjunts finits i amb un alt cost computacional, ja que es basa en trobar la solució per força bruta. Per la t-norma del mínim el mètode que s'ha proposat és superior als de la literatura però, en opinió de l'autor, d'altres mètodes amb resultats molt millors poden ser desenvolupats

- **Implementació i testeig sistemàtic de la proposta de particularització extensional dels TPMs d'un atles cerebral**.

  Una de les possibles vies d'aplicació futura de la reinterpretació extensional d'un atles estructural és la particularització dels TPMs, tal com s'ha exposat al subcapítol 5.3 i il·lustrat al subcapítol 5.4. Per a poder valorar l'aportació que pot suposar incorporar conceptes difusos a aquests objectes probabilístics cal implementar i testejar rigorosament aquesta relectura sobre tots els talls d'una mostra de MRIs. Una possible via de valoració d'aquesta proposta és aplicar els TPMs particularitzats en mètodes de la literatura que actualment utilitzen els TPMS "raw" (per exemple la segmentació dels teixits amb el paquets SPM [91]) i comprovar si els resultats obtinguts milloren en algun sentit algun problema o limitació d'aquestes tècniques.

- **Construcció d'una distància associada a l'atles**.

  Al subcapítol 4.4 s'ha mostrat com tot model genera una distància associada pròpia. Per tant, una altra via d'aplicació possible de la relectura proposada és la construcció d'una distància pròpia de l'atles. A l'annex A s'explora superficialment aquesta via i es justifica la seva possible utilitat.

- **Construcció d'un atles estructural propi**.

La clau de la reinterpretació radica en l'equivalència entre model i relació d'indistingibilitat. Totes les vies d'aplicació proposades es basen en considerar un cert model (atles) a priori i utilitzar aquesta equivalència per a incorporar tècniques difoses. L'equivalència, però, es pot explotar en sentit invers: utilitzar les tècniques de la teoria d'indistingibilitats per a la construcció del model subjacent a les dades. Aquesta línia de recerca s'esboça a l'annex B.

- **Estudi de quina és la millor t-norma per a problemes de neuroimatge**

  Els resultats obtinguts en el subcapítol 5.4 on s'ha aplicat la particularització dels TPMs proposada a una MRI particular mostren una clara dependència de la tria de la t-norma. Una interessant línia de recerca futura és avaluar quina és la t-norma que millor s'escau per aquest tipus de problemes, tenint en compte tant la consistència teòrica amb alguna interpretació de la conjunció lògica com la qualitat dels resultats obtinguts en contextos i problemes pràctics.

Epíleg

Al sentir tal sentència, dictada per la justícia i la raó, el rancuniós Nahun Ibn-Nahun s'inclinà, dirigí un Salam al rei i, sense dir paraula, es retirà capcot de la Sala d'Audiències.

Quanta raó tenia el poeta a l'escriure:

Deixa volar ben alt la Fantasia

Sense il·lusió, la vida què seria?

A

Distància associada a l'atles

Al subcapítol 4.4 s'ha demostrat que tota T-indistingibilitat defineix una S-distància, i que sota certes condicions bastant generals sobre la t-norma T aquesta S-distància és una distància clàssica.

D'acord amb l'argumentació del subcapítol 5.3.2, un atles estructural pot entendre's com una relació d'indistingibilitat E_{model}, amb un conjunt $H_{E_{model}}$ (Definició

5.2.3) de subconjunts difusos extensionals que es corresponen amb la distribució espacial probabilística dels diferents teixits cerebrals..

En conseqüència d'aquests dos fets es té que l'atles defineix una funció distància d_{model}, tal com es defineix a continuació.

Definició A.0.1. *Sigui M un atles cerebral. Fixada una t-norma T sigui E_M la T-indistingibilitat associada (Definició 5.2.3). Es defineix la distància associada al model d_M com:*

$$d_M(x, y) = 1 - E_M(x, y)$$

Com s'ha comentat al subcapítol 4.4, cal imposar certes condicions sobre la t-norma per a assegurar que aquesta definició efectivament és una mètrica. En qualsevol cas, per qualsevol t-norma és pot trobar una negació adequada per a poder construïr mètriques o S-mètriques.

Igual que s'ha raonat al subcapítol 4.4, tenir una funció distància donada pel propi model que assumim com a coneixement a priori pot ser útil per diverses raons.

Posi's per exemple que es vol segmentar una MRI utilitzant un algoritme general de segmentació (no un algoritme específic per a neuroimatge com SPM). La gran majoria de mètodes es basen (a grans trets) en maximitzar alguna distància interclústers i/o en minimitzar alguna distància intraclústers. Per exemple l'algoritme k-Means, que és un dels algoritmes de segmentació més populars, o la seva versió borrosa Fuzzy c-Means computen exactament això.

Si s'utilitza per a aquesta fi una funció distància estàndar (euclídia, Manhattan...) en cap etapa del procés s'utilitza el coneixement a priori que es té (l'atles) sobre la distribució espacial dels teixits. Utilitzar la distància associada al model, a part de ser més sensible als casos límit i als vòxels dels contorns tal com s'ha raonat al subcapítol 4.4, permet incorporar aquest coneixement al nostre mètode de segmentació i adaptar la informació donada per un model a un algoritme (pensi's en k-Means) no adaptat per a aquest tipus de millores.

B

Construcció d'un atles estructural

Una altra possible via d'aplicació de la reinterpretació proposada és la construcció *"de facto"* d'un atles cerebral propi.

És ben sabut per la comunitat especialitzada que a més de les diferències específiques de cada persona, es poden detectar diferències entre cervells de diferents persones degudes a diferències més generals com poden ser el sexe biològic

[66], la procedència racial o ètnica [24] o la dominància de la dreta o l'esquerra [50].

Té sentit doncs dubtar de la validesa d'utilitzar un model o un altre en una situació particular. L'atles utilitzat en aquesta tesi (SRI24) està construït a partir de 24 subjectes (homes i dones, no s'especifica la proporció) sans: 12 joves ($25,5 \pm 4,34$, rang entre 19 i 33 anys) i 12 vells (77.67 ± 4.94, rang entre 67 i 84 anys), tots ells dretans i no fumadors. Tots els detalls tècnics de la mostra i construcció de l'atles es poden consultar a [101].

Tanmateix en un context aplicat es pot tenir una MRI d'un subjecte esquerrà, o d'un subjecte fumador, o d'una dona i no es vol treballar amb un atles que inclogui també homes en la construcció. En tots aquests casos l'atles utilitzat no és de plena utilitat.

La solució en aquest cas podria ser cercar un altre atles disponible a la literatura i que s'escaigui a la mostra particular en qüestió. Tanmateix és una il·lusió esperar que hi hagi models disponibles per a totes les casuístiques possibles. Amb la reinterpretació proposada és senzill resoldre aquest atzucac ja que permet construir un atles propi si es disposa d'una mostra suficient de MRIs etiquetades.

Això es pot realitzar emprant el marc teòric desenvolupat en aquesta tesi. Cal remarcar, però, que la construcció real d'un atles és quelcom més complicada ja que cal tenir en compte diversos detalls de caire tècnic i estadístic a més de tenir una mostra de MRIs etiquetades per experts.

Considerem donada una mostra de n MRIs de subjectes amb els diferents teixits etiquetats. És a dir, es disposa de les famílies de conjunts

$$subjecte_i : \{0, ..., 256\} \times \{0, ..., 256\} \times \{0, ..., 160\} \longrightarrow \{0, ..., 1000\}$$

$$\mu_{ij} : \{0, ..., 256\} \times \{0, ..., 256\} \times \{0, ..., 160\} \times \{0, ..., 1000\} \longrightarrow [0, 1]$$

on $i \in \{1, .., n\}$ denota a quin subjecte pertany la MRI i $j \in \{1 = csf, 2 = gris, 3 = blanc\}$ denota el teixit. L'espai sobre el qual es defineixen els conjunts és l'utilitzat anteriorment en aquesta tesi amb l'afegit de la tercera dimensió espacial.

En cada punt $p = (x, y, z, ng)$, $\mu_{ij}(p)$ dóna pertinença de p al teixit j en el subjecte i. Si les MRIs que es consideren donades han estat etiquetades per diversos experts, llavors l'agregació dels criteris dels experts serà, en general, borrosa ja que és esperable que no coincideixin en tot punt.

Aquests conjunts μ_{ij} defineixen uns conjunts σ_{ij} tal com s'han definit a la Definició 5.2.2.

La construcció a partir d'aquí és idèntica a l'explicada al subcapítol 5.4. Es prenen els conjunts σ_{ij} com a base de conjunts extensionals i l'agregació de tots aquests conjunts donarà l'atles final cercat. Hi ha dos camins per a fer-ho, com s'il·lustra en la Figura B.0.1

Definició B.0.2. *Considerem donades n MRIs subjecte$_i$ amb els diferents teixits cerebrals etiquetats μ_{ij} que, segons les especificacions d'aquesta tesi, defineixen uns conjunts borrosos σ_{ij}. Definim els conjunts d'extensionals segons el subjecte H_E^i i segons el teixit*

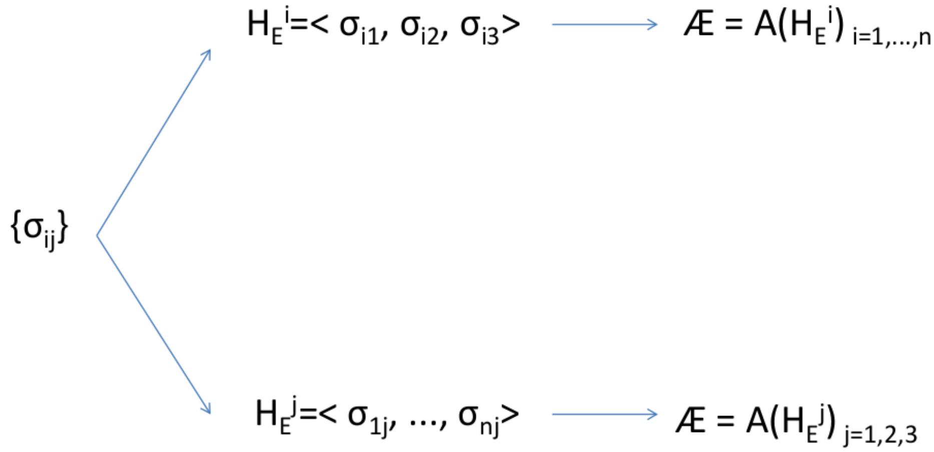

Figura B.0.1: Diagrama de la construcció d'un atles propi

H_E^j *com segueix:*

$$H_E^i =< \sigma_{i1}, \sigma_{i2}, \sigma_{i3} > \quad H_E^j =< \sigma_{1,j}, \dots, \sigma_{nj} >$$

És interessant remarcar la diferència entre H_E^i i H_E^j. El primer conjunt d'extensionals agrupa els conjunts observables tenint en compte els diferents teixits en la MRI d'un sol subjecte. El model obtingut, per tant, modela les diferents regions d'un cervell específic. El segon, per contra, considera tan sols un teixit en les MRIs de tots els subjectes. Noti's que en la primera opció s'agrupen els conjunts σ_{ij}segons l'índex i i en la segona segons l'índex j. Per acabar de construir l'atles estructural propi cal agregar segons l'altre índex en cada cas

Definició B.0.3. *Donats* H_E^i *i* H_E^j *tal com s'han definit a la Definició B.0.2 i una funció d'agregació A, és defineixen els atles estructurals següents:*

$$\mathcal{A}_1 = A(H_E^i)_{i=1,\dots,n} \quad \mathcal{A}_2 = A(H_E^j)_{j=1,2,3}$$

La funció d'agregació emprada A dependrà en cada cas d'aquella que millor s'escaigui i doni millors resultats. Si la t-norma triada és arquimediana i s'utilitza com a funció d'agregació la mitjana natural m_t associada a la t-norma, s'està en les condicions d'utilitzar tots els resultats desenvolupats en el capítol 2 d'aquesta tesi. Si el lector està interessat en aprofundir en el camp de les funcions d'agregació es recomana la lectura de [18].

Una interessant pregunta que suscita aquesta construcció i que convida a aprofundir-hi en futura recerca és quina és la relació entre els atles $\mathcal{A}_1$ i $\mathcal{A}_2$ i quin és més adient en contextos pràctics.

Bibliografia

[1] J. Aczel. Lectures on functional equations and their applications. *Academic Press*, 1966.

[2] K. P. Adlassnig and G. Kolarz. Cadiag-2: Computer-assisted medical diagnosis using fuzzy subsets. *Approximate reasoning in decision analysis*, 1:219–247, 1982.

[3] K. P. Adlassnig, G. Kolarz, F. Lipomersky, I. Gröger, and G. Grabner. Cadiag 1: A computer-assisted diagnostic system on the basis of symbolic logic and its application in internal medicine. *Medical Informatics Europe*, 82:495–505, 1982.

[4] M. A. Albin. Fuzzy sets and their application to medical diagnosis and pattern recognition. *Doctoral dissertation, University of California, Berkeley*, 1975.

[5] Aristoteles. Historiae animalivm. 343 a.C.

[6] F. X. Aymerich, J. Alonso, M. E. Cabanas, Sobrevilla P. Comabella, M., and A. Rovira. Decision tree based fuzzy classifier of magnetic resonance spectra from cerebrospinal fluid samples. *Fuzzy Sets and Systems*, 170(1):43–63, 2011.

[7] F. X. Aymerich, E. Montseny, P. Sobrevilla, and A.. Rovira. Flcsfd-a fuzzy local-based approach for detecting cerebrospinal fluid regions in presence of ms lesions. *ICME International Conference on Complex Medical Engineering, CME-2009*, 1.

[8] M. Baczyński and B. Jayaram. An introduction to fuzzy implications. 2008.

[9] R. Belohlavek. Fuzzy relational systems: Foundations and principles. 2002.

[10] J. C. Bezdek, R. Ehrlich, and W. Full. Fcm: The fuzzy c-means clustering algorithm. *Computers and Geosciences*, 10(2):191–203, 1984.

[11] E. Bloch. Sujeto-objeto: el pensamiento de hegel. 1983.

[12] D. Boixader. Contribució a l'estudi dels morfismes entre operadors d'indistingibilitat. aplicació al raonament aproximat. *Doctoral dissertation, Universitat Politècnica de Catalunya*, 1997.

[13] D. Boixader, J. Jacas, and J. Recasens. Fuzzy equivalence relations: advanced material. *Fundamentals of Fuzzy Sets*, 1:261–290, 2000.

[14] D. Boixader, J. Jacas, and J. Recasens. Upper and lower approximation of fuzzy sets. *Int. J. of General Systems*, 29:555–568, 2000.

[15] F. Bou, F. Esteva, L. Godo, and R. Rodríguez. On the minimum many-valued modal logic over a finite residuated lattice. *Journal of Logic and computation*, 1:1–53, 2010.

[16] R. W. Brown. Linguistic determinism and the part of speech. *The Journal of Abnormal and Social Psychology*, 55(1):1–5, 1957.

[17] M. Bunge. Epistemología: curso de actualización. siglo XXI. 1997.

[18] T. Calvo, G. Mayor, and R. Mesiar. Aggregation operators: new trends and applications. 2002.

[19] R. Campbell. The sorites paradox. *Philosophical Studies*, 26(3):175–191, 1974.

[20] R Carnap. Der Logische aufbau der Welt (La estructura lógica del mundo). 1928.

[21] J.L. Castro and F. Klawonn. Similarity in Fuzzy Reasoning. *Mathware and Soft Computing*, 2:197–228, 1996.

[22] J. H. Challis. A procedure for determining rigid body transformation parameters. *Journal of biomechanic*, 28(6):733–737, 1995.

[23] W. Chau and A. R. McIntosh. The talairach coordinate of a point in the MNI space: how to interpret it. *Neuroimage*, 25(2):408–416, 2005.

[24] C. S Coon. The story of man. 1954.

[25] L. Corbusier. La ville radieuse: éléments d'une doctrine d'urbanisme pour l'équipement de la civilisation machiniste. 1933.

[26] F. Crivello, T. Schormann, N. Tzourio-Mazoyer, P. E. Roland, and Mazoyer B. M. Zilles, K. Comparison of spatial normalization procedures and their impact on functional maps. *Human brain mapping*, 16(4):228–250, 2002.

[27] C. Darwin. The origin of species by means of natural selection: or, the preservation of favored races in the struggle for life. 1859.

[28] J. G. De Villiers and P. A. De Villiers. Linguistic determinism and the understanding of false. *Children's reasoning and the mind*, 191:191–228, 2000.

[29] N. K. Denzin. Symbolic interactionism and cultural studies: The politics of interpretation. 2008.

[30] R. Descartes. Discurso del método. 2004.

[31] A. Di Nola, A. Lettieri, I. Perfilieva, and V. Novák. Algebraic analysis of fuzzy systems. *Fuzzy sets and systems*, 158(1):1–22, 2007.

[32] D. Dubois and H. Prade. Possibility theory. 1988.

[33] D. Dubois and H. Prade. The three semantics of fuzzy sets. *Fuzzy Sets and Systems*, 90(2):141–150, 1997.

[34] D. Dubois, H. Prade, and S. Sandri. On possibility/probability transformationss. *Fuzzy logic*, 1:103–112, 1993.

[35] F. Dyson. Birds and frogs. *Notices of the American Mathematics Society*, 56(2):212–223, 2009.

[36] J. Echeverría. Filosofía de la ciencia. 7, 1995.

[37] C. Elkan, H. R. Berenji, B. Chandrasekaran, C. J. S. De Silva, Y. Attikiouzel, D. Dubois, and L. A. Zadeh. The paradoxical success of fuzzy logic. *IEEE expert*, 9(4):3–49, 1994.

[38] J. Elorza, R. Fuentes-González, J. Bragard, and P. Burillo. On the relation between fuzzy preorders, fuzzy closing morphological operators and fuzzy consequence operators. *Proc. of ESTYLF 2010 Conference. Huelva*, pages 133–138, 2010.

[39] A.C. Evans, T.M. Peters, R.L. Kelly, E.D. Brown, S.R. Mills, and D.L.Evans A.C. Collins. 3D statistical neuroanatomical models from 305 MRI volumes. *Proc. of Nuclear Science Symposium and Medical Imaging Conference*, pages 1813–1817, 1993.

[40] Z. Falomir, L. Museros, L. Gonzalez-Abril, and I. Sanz. A model for qualitative colour comparison using interval distances. *Displays*, 34(4):250–257, 2013.

[41] L. S. Feuer. The development of logical empiricism. *Science and Society*, 1:222–233, 1941.

[42] P. Feyerabend. Against method. 1993.

[43] P. Fisher. Sorites paradox and vague geographies. *Fuzzy Sets and Systems*, 113(1):7–18, 2000.

[44] H Flanders. Differentiation under the integral sign. *American Mathematical Monthly*, 1:615–627, 1973.

[45] L. Fleck. Genesis and development of a scientific fact. 2012.

[46] J. C. Fodor. On fuzzy implication operators. *Fuzzy Sets and Systems*, 42(3):293–300, 1991.

[47] C. Frabetti. El libro infierno. 2002.

[48] K. J. Friston, C. D. Frith, P. F. Liddle, and R. S. J. Frackowiak. Comparing functional (PET) images: the assessment of significant change. *Cerebral Blood Flow and Metabolism*, 1(4):690–699, 1991.

[49] K. J. Friston, A. P. Holmes, K. J. Worsley, J. P. Poline, C. D. Frith, and R. S. Frackowiak. Statistical parametric maps in functional imaging: a general linear approach. *Human brain mapping*, 2(4):189–210, 1994.

[50] A. M. Galaburda, G. D. Rosen, and G. F. Sherman. Individual variability in cortical organization: its relationship to brain laterality and implications to function. *Neuropsychologia*, 28(6):529–546, 1990.

[51] N. Galatos and C. Tsinakis. Generalized MV-algebras. *Journal of Algebra*, 283(1):254–291, 2005.

[52] Galenus. Methodo Medendi. 129.

[53] C. Golgi. Sulla struttura della sostanza grigia del cervello. *Gazzetta Medica Italiana. Lombardia*, 33:244–246, 1873.

[54] N. Guicciardini. Isaac Newton on mathematical certainty and method. *MIT Press*, 1(4):465–523, 2009.

[55] L. Held and H. Rue. Gaussian markov random fields: theory and applications. 2005.

[56] Hipocrates. Corpus Hippocraticum. s. IV a.C.

[57] A. P. Holmes and S. Kiebel. The general linear model. *Human brain function*, 2(1):725–760, 2003.

[58] Jacas J. On the generators of t-indistinguishability operators. *Stochastica*, 12:173–191, 1988.

[59] Jacas J. and Recasens J. Fixed points and generators of fuzzy relations. *J. Math. Anal. Appl*, 186:21–29, 1994.

[60] Jacas J. and Recasens J. Fuzzy T-transitive relations: eigenvectors and generators. *Fuzzy Sets and Systems*, 72:147–154, 1995.

[61] Jacas J. and Recasens J. Maps and isometries between indistinguishability operators. *Soft Computing*, 6:14–20, 2002.

[62] Jacas J. and Recasens J. Aggregation of t-transitive relations. *Int J. of Intelligent Systems*, 18:1193–1214, 2003.

[63] B. Jayaram and R. Mesiar. I-fuzzy equivalence relations and I-fuzzy partitions. *Information Sciences*, 179(9):1278–1297, 2009.

[64] I. Kant. Crítica de la razón pura. 1781.

[65] N. N. Karnik, J. M. Mendel, and Q. Liang. Type-2 fuzzy logic systems. *IEEE Transactions on Fuzzy Systems*, 7(6):643–658, 1999.

[66] D. Kimura. Sex differences in the brain. *Human brain function*, 1:118–125, 1993.

[67] A. Klein, J. Andersson, B. A. Ardekani, J. Ashburner, B. Avants, M. C. Chiang, and R. V. Parsey. Evaluation of 14 nonlinear deformation algorithms applied to human brain MRI registration. *Neuroimage*, 46(3):786–802, 2009.

[68] E.P. Klement, R. Mesiar, and Pap E. Triangular norms. 2000.

[69] M. Kryszkiewicz. Rough set approach to incomplete information systems. *Information sciences*, 112(1):39–49, 1998.

[70] T. S. Kuhn. The structure of Scientific revolutions. 2012.

[71] X. W. Liu. An orness measure for quasi-arithmetic means. *IEEE Transactions on Fuzzy Systems*, 14:837–848, 2006.

[72] R. López. Los sofistas y el consensualismo. *Cinta de Moebio*, 1, 2013.

[73] G. Mattioli. About model based distances. *Proc. of CCIA-2014*, pages 281–285, 2011.

[74] G. Mattioli. The WAT algorithm, an algorithm to see both woods and trees. *Proc. of CAEPIA-2013*, pages 1048–1057, 2013.

[75] G. Mattioli. ¿cuántos clústers hay? el algoritmo WAT. *Proc. of ESTYLF-2014*, pages 39–44, 2014.

[76] G. Mattioli and J. Recasens. Dualities and isomorphisms between indistinguishabilities and related concepts. *Proc. of IEEE International Conference on Fuzzy Systems*, pages 2369–2374, 2011.

[77] G. Mattioli and J. Recasens. Isomorfismos entre indistinguibilidades, conjuntos de extensionales y aproximaciones superiores e inferiore. *Proc. of ESTYLF-2012*, pages 2369–2374, 2012.

[78] G. Mattioli and J. Recasens. Natural means of indistinguishability operators. *Advances in Computational Intelligence*, 1:261–270, 2012.

[79] G. Mattioli and J. Recasens. Powers of indistinguishability operators. *Proc. of Fuzzy Information Processing Society (NAFIPS), Annual Meeting of the North American IEEE society*, pages 1–6, 2012.

[80] G. Mattioli and J. Recasens. Comparison of different algorithms of approximation by extensional fuzzy subsets. *Aggregation Functions in Theory and in Practise*, 1:307–317, 2013.

[81] G. Mattioli and J. Recasens. Structural analysis of indistinguishability operators and related concepts. *Information Sciences*, 241:85–100, 2013.

[82] J. C. Mazziotta, A. W. Toga, A. Evans, P. Fox, and J. Lancaster. A probabilistic atlas of the human brain: theory and rationale for its development the international consortium for brain mapping (ICBM). *Neuroimage*, 2(2):89–101, 1995.

[83] J. M. Morel and S. Solimini. Variational methods in image segmentation. 1995.

[84] N.N. Morsi and M.M. Yakout. xiomatics for fuzzy rough sets. *Fuzzy Sets and Systems*, 100:327–342, 1998.

[85] V. Murali. Fuzzy points of equivalent fuzzy subsets. *Information Sciences*, 158:277–288, 2004.

[86] V. Novák. Are fuzzy sets a reasonable tool for modeling vague phenomena? *Fuzzy Sets and Systems*, 156(3):341–348, 2005.

[87] J. L. Ojeda and J. M. Icardo. Neuroanatomía humana, aspectos funcionales y clínicos. *Editorial Masson*, 2004.

[88] G. Orwell. Nineteen eighty-four. 1949.

[89] I. P. Pavlov. Conditioned reflexes. an investigation of the physiological activity of the cerebral cortex. 1927.

[90] Z. Pawlak, J. Grzymala-Busse, R. Slowinski, and W. Ziarko. Rough sets. *Communications of the ACM*, 38(11):88–95, 1995.

[91] W. D. Penny, K. J. Friston, J. T. Ashburner, S. J. Kiebel, and T. E. Nichols. Statistical parametric mapping: the analysis of functional brain images. 2011.

[92] J. M. Phillips and S. Venkatasubramanian. A gentle introduction to the kernel distance. *arXiv preprint arXiv:1103.1625*, 2011.

[93] S. Pinker. The language instinct: The new science of language and mind. 1994.

[94] K. Popper. The logic of scientific discovery. 2014.

[95] S. Ramon y Cajal. Textura del sistema nervioso del Hombre y de los vertebrados. 1904.

[96] J. Recasens. Indistinguishability operators. modelling fuzzy equalities and fuzzy equivalence relations. 2011.

[97] V. F. Reyna, W. L. Nelson, P. K. Han, and N. F. Dieckmann. How numeracy influences risk comprehension and medical decision making. *Psychological bulletin*, 135(6):943–973, 2009.

[98] L. J. Rips, E. J. Shoben, and E. E. Smith. Semantic distance and the verification of semantic relations. *Journal of verbal learning and verbal behavior*, 12(1):1–20, 1973.

[99] E. P. Rivière and F. Taragano. Teoría del vínculo. 1986.

[100] T. Rohlfing, N.M. Zahr, E.V. Sullivan, and A. Pfefferbaum. The sri24 multichannel atlas of normal adult human brain structure. *Human Brain Mapping*, 31(5):798–819, 2000.

[101] T. Rohlfing, N.M. Zahr, E.V. Sullivan, and A. Pfefferbaum. The sri24 multichannel atlas. construction and applications. *Proc. - Society of Photo-Optical Instrumentation Engineers*, 2008.

[102] K. Sadegh-Zadeh. Fuzzy health, illness, and disease. journal of medicine and philosophy. *Journal of Medicine and Philosophy*, 25(5):605–638, 2000.

[103] R. Seising. From vagueness in medical thought to the foundations of fuzzy reasoning in medical diagnosis. *Artificial Intelligence in Medicine*, 38(3):237–256, 2006.

[104] R. Seising. Between empiricism and rationalism: A layer of perception modeling fuzzy sets as intermediary in philosophy of science. *Theoretical Advances and Applications of Fuzzy Logic and Soft Computing*, 1:101–108, 2007.

[105] E. Shortliffe. Computer-based medical consultations: MYCIN. 2012.

[106] J. D. Sneed. The logical structure of mathematical physics. 1979.

[107] J. Sobotta, R. Putz, and R. Pabst. Atlas de anatomia humana (vol. 1). 2006.

[108] J. Stanley. Context, interest relativity and the sorites. *Analysis*, 63(280):269–281, 2003.

[109] J. Talairach and P. Tournoux. Co-planar stereotaxic atlas of the human brain. 3-dimensional proportional system: an approach to cerebral imaging. 1988.

[110] M. Teplan. Fundamentals of eeg measurement. *Measurement science review*, 2(2):1–11, 2002.

[111] M. M. Ter-Pogossian. Positron emission tomography (PET). *Diagnostic Imaging in Medicine*, 1:273–277, 1983.

[112] E Trillas. On the use of words and fuzzy sets. *Information Sciences*, 176(11):1463–1487, 2006.

[113] E. Trillas. Some uncertain reflections on uncertainty. *Archives for the Philosophy and History of Soft Computing*, 1, 2013.

[114] E. Trillas. En defensa del razonamiento creativo. *Discurs en la investidura Honoris Causa. Universidad Pública de Navarra*, 2014.

[115] L. Valverde. On the structure of f-indistinguishability operators. *Fuzzy Sets and Systems*, 17:313–328, 1985.

[116] V. Vinnikov. We shall know: Hilbert's apology. *The Mathematical Intelligence*, 21(1):42–46, 1999.

[117] C. L. Walker and E. A. Walker. Powers of t-norms. *Fuzzy sets and systems*, 129(1):1–18, 2002.

[118] D. Wegener. e-anthropomorphizing energy and energy conservation: The case of max planck and ernst mach. *Studies in History and Philosophy of Science Part B: Studies in History and Philosophy of Modern Physics*, 41(2):146–159, 2010.

[119] L. Wittgenstein. Tractatus logico-philosophicus. 1921.

[120] L. A. Zadeh. Toward a theory of fuzzy systems. *National Aeronautics and Space Administration.*, 69(2), 1969.

[121] L.A. Zadeh. From computing with numbers to computing with words. from manipulation of measurements to manipulation of perceptions. *IEEE Transactions on Circuits and Systems I: Fundamental Theory and Applications*, 46.

[122] L.A. Zadeh. Fuzzy logic= computing with words. *IEEE Transactions on Fuzzy Systems*, 4.

[123] L.A. Zadeh. Fuzzy sets. *Information and control*, 8(3):338–353, 1965.

[124] L.A. Zadeh. Similarity relations and fuzzy orderings. *Information Sciences*, 3:177–200, 1971.

[125] L.A. Zadeh. Fuzzy sets and information granularity. *Gupta, M.M., Ragade, R.K., Yager, R.R. (eds.) Advances in Fuzzy Set Theory and Applications*, 1:3–18, 1979.

[126] L.A. Zadeh. Toward a theory of fuzzy information granulation and its centrality in human reasoning and fuzzy logic. *Fuzzy Sets and Systems*, 90:111–127, 1997.