

al totalment simètric i presenta una degeneració de dues bifurcacions sella–node.

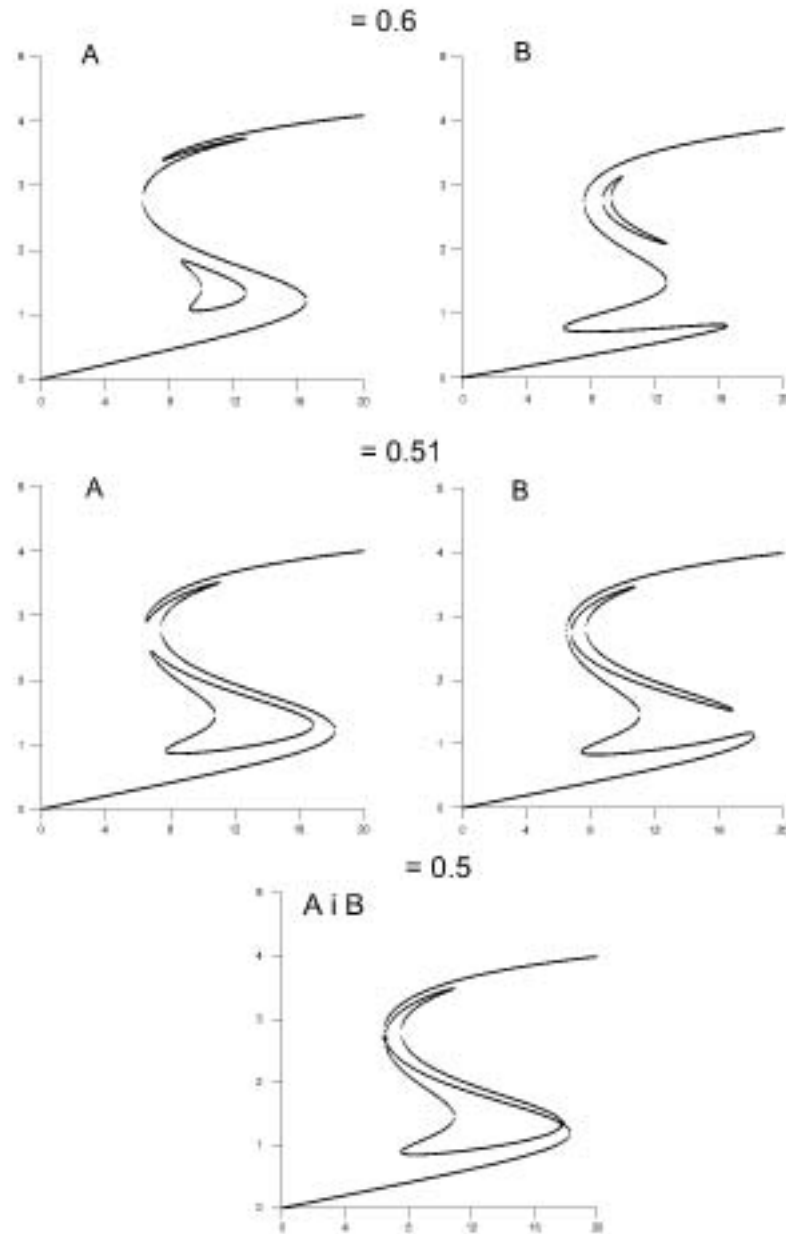


Figura 3.13: Solucions estacionàries per als mateixos casos de la figura anterior amb  $d = 0.4$ .

En les solucions estacionàries corresponents podem observar clarament l'efecte de la simetria. Les presentem, per al cas  $d = 0.4$ , a la figura 3.13. Fixem-nos especialment en com la bifurcació en forquilla del cas  $\gamma = 0.5$  es transforma en un punt fix normal

i en dos més creats a través de la *isola*.

### 3.5 Fenòmens dinàmics en sistemes acoblats

Per estudiar fenòmens dinàmics és convenient acoblar sistemes BOITAL de dimensió igual o superior a dos (com ja hem vist, en el cas unidimensional no es produeixen fenòmens dinàmics d'interès, a excepció dels propis salts de commutació). Concretament, la configuració més senzilla per a l'estudi de fenòmens dinàmics és la de l'acoblament de dos sistemes bidimensionals. Els sistemes d'oscil·ladors acoblats, a diferència dels sistemes acoblats unidimensionals, han despertat un gran interès en els darrers anys, tant a nivell teòric com experimental i fins i tot a nivell de simple observació de fenòmens reals, com per exemple la sincronització entre el ritme cardíac i el ventilatori [81] en l'organisme humà o el cant d'insectes [86]. Aquests efectes es poden descriure mitjançant un acoblament feble i, per tant, amb models de fase, els quals només tenen en compte la fase dels oscil·ladors, i consideren que l'amplitud no es veu afectada. Per a acoblaments prou forts, però, cal esperar també efectes en l'amplitud. El nostre sistema que, com hem dit, permet variar amb certa facilitat l'acoblament, pot mostrar clarament efectes d'amplitud i efectes de fase. A continuació donarem una visió general dels fenòmens més rellevants, per després passar a comentar alguns d'ells, especialment significatius, en més detall.

#### 3.5.1 Comportament general dels oscil·ladors acoblats

D'acord amb el model matemàtic del BOITAL que hem exposat en seccions anteriors, podem descriure la parella d'oscil·ladors bicapa acoblats tal i com segueix

$$\begin{aligned}\frac{d\psi_1^a}{dt} &= -b_{11}\psi_1^a - b_{12}\psi_2^a + G_1 A(\psi^a) \mu_e^a + c_1 \psi_1^b (t - \tau_1) \\ &\quad - (c_1 + c_2) \psi_1^a \\ \frac{d\psi_2^a}{dt} &= -b_{21}\psi_1^a - b_{22}\psi_2^a + G_2 A(\psi^a) \mu_e^a + c_2 \frac{\eta_2}{\eta_1} \psi_1^b (t - \tau_2)\end{aligned}$$

i les mateixes equacions amb els superíndexs  $a$  i  $b$  intercanviats.  $\psi^x = \psi_0^x + \sum_{j=1}^2 \psi_j^x$  és el canvi total de fase per a l'oscil·lador  $x$ ,  $\psi_0^x$  és el canvi de fase en absència d'il·luminació del làser i  $\mu_e^x$  és la intensitat d'entrada normalitzada. La funció no

lineal  $A(\psi)$  descriu la interferència sobre el mirall absorbent i depèn només dels paràmetres del mirall. Els  $b_{ij}$  descriuen l'acoblament tèrmic longitudinal entre les capes i els temps de difusió associats.  $G_j$  caracteritza la contribució efectiva de la capa  $j$  al canvi de fase.  $A(\psi)$ ,  $b_{ji}$  i  $G_j$  són iguals per a ambdós oscil·ladors i llurs expressions en funció de paràmetres físics es poden trobar per exemple a [78, 58]. L'acoblament transversal entre els oscil·ladors es considera tot afegint termes lineals que descriuen el flux de calor desde la capa contigua a l'absorbent fins a les dues capes del (sub)sistema veí. Concretament, considerem propagació de la calor desde la primera capa d'un dispositiu cap a la primera i segona capes de l'altre, però no considerem la propagació de calor entre segones capes, que podem suposar molt menor que les anteriors. Els coeficients d'acoblament són  $c_1 = f \frac{K_1}{d^2}$  i  $c_2 = f \frac{K_1}{d^2 + g_1^2}$ , respectivament. La velocitat finita de propagació es té en compte, en aquest cas, introduint dos retards temporals,  $\tau_1 = \frac{d^2}{D_1}$  i  $\tau_2 = \frac{d^2 + g_1^2}{D_1}$ , dins els termes que descriuen l'arribada de la calor a la primera i segona capes respectivament. Òbviament les mateixes limitacions que hem descrit per al cas unidimensional són també vàlides aquí. Cal dir que les equacions són qualitativament idèntiques a les del cas unicapa, però amb uns coeficients diferents. D'aquesta manera les solucions estacionàries són també qualitativament idèntiques a les de dos BOITAL unidimensionals acoblats, que ja hem estudiat a la secció anterior.

En general, per a acoblaments molt forts (distàncies molt petites), el sistema no presenta més fenòmens dinàmics que els típics de sistemes no acoblats: presenten una sola bifurcació de Hopf i una sola bifurcació homoclínica que destrueix l'atractor; només apareix una freqüència en la dinàmica. Les oscil·lacions dels dos subsistemes es presenten sempre amb una diferència de fase constant i, aproximadament, igual a zero ( $\Delta\phi \equiv \theta = 0$ ). En resum, el comportament relatiu entre els dos subsistemes és escàs, a causa del fort acoblament.

Per a distàncies una mica més grans (acoblaments forts) comencen a aparèixer fenòmens interessants en el comportament relatiu d'ambdós sistemes. El sistema pot presentar oscil·lacions també en contrafase ( $\Delta\phi \equiv \theta = \pi$ ) i té lloc el fenomen de la *mort induïda per l'acoblament*. Aquest fenomen està relacionat amb la bifurcació de Hopf i consisteix en la no oscil·lació del sistema quan, amb els mateixos paràmetres, cada subsistema per separat sí oscil·la. De fet podem considerar dos tipus diferents de mort induïda per l'acoblament. El primer tipus està relacionat amb l'aparició d'una

SN de punts sobre el cicle límit i fou observat experimentalment per primera vegada per Crowley i Epstein [54] (de fet, és el que s'anomena bifurcació d'Andronov). El segon tipus, relacionat amb una bifurcació de Hopf és el que ens afecta, i hem aconseguit observar-lo experimentalment per primera vegada [42]. Aquest fenomen ha estat descrit teòricament tant amb acoblament instantani [50] com amb acoblament retardat [73].

A distàncies mitjanes desapareix el fenomen de mort induïda i tendeix a reduir-se el nombre de noves solucions estacionàries. Trobem tant oscil·lacions en fase com en contrafase, així com transicions entre ambdós estats. Les òrbites amb  $\theta = 0$  acostumen a ser estables, mentre que les  $\theta = \pi$  solen ser inestables. Per altra banda, les transicions entre els estats es poden produir a través d'un desplaçament continu de la fase ( $0 \rightarrow \pi \rightarrow 0 \rightarrow \dots$ ), bé a través d'una duplicació de la freqüència d'oscil·lació o bé a través d'altres bifurcacions més complicades. Cal dir que, en el primer cas, podem observar com els canvis de fase es produeixen sovint amb salts de fase de  $\pi$ , tal com ha estat també predit teòricament [79]. És interessant, així mateix, destacar que a les bifurcacions de Hopf els (sub)sistemes oscil·len en fase, mentre que molt sovint quan es produeix una bifurcació homoclínica les oscil·lacions són en contrafase.

A distàncies més grans (acoblament feble) es poden trobar oscil·lacions periòdiques amb qualsevol diferència de fase ( $\theta$  qualsevol), mentre que podem seguir observant transicions a òrbites quasiperiòdiques a través de salts de fase o també a través de bifurcacions de Hopf de segon ordre.

Per a crear un sistema de diversos oscil·ladors separats una distància  $d$  utilitzem feixos làser paral·lels incidint sobre un mateix dispositiu interferomètric, tal com fèiem en el cas dels dos dispositius unicapa. En aquest cas, els experiments es dugueren a terme amb un dispositiu format per 400  $\mu\text{m}$  de vidre i 100  $\mu\text{m}$  d'oli de girasol, amb coeficients termoòptics de  $10^{-5} \text{ K}^{-1}$  i  $-3.4 \cdot 10^{-4} \text{ K}^{-1}$ , respectivament. Els miralls de la cavitat eren una capa de níquel-crom de 7 nm i una multicapa dielèctrica d'alta reflectivitat. El dispositiu s'irradià amb un làser d' $\text{Ar}^+$  dividit en dos feixos, i cada feix fou focalitzat a un punt de 50  $\mu\text{m}$  de diàmetre sobre el dispositiu. Les potències incidents es denoten per  $P_E^a$  i  $P_E^b$  i la relació entre ambdues és  $\gamma = P_E^a/P_E^b$  i serveix per caracteritzar la il·luminació relativa dels oscil·ladors.