

---

# Comportament d'inestabilitat completa en sistemes dinàmics

---

## 2.1 Introducció

En aquest capítol ens dedicarem a analitzar el primer dels aspectes relacionats amb l'aparició de comportaments complexos, el que hem anomenat comportament d'inestabilitat completa. Com ja hem dit al capítol 1, els sistemes dinàmics no exhibeixen, normalment, comportaments gaire complexos en el sentit que ja hem estat comentant. Un sistema en un estat caòtic descriu un moviment en l'espai de fases que, malgrat que és diferent cada vegada, involucra un nombre baix de freqüències sorgides de bifurcacions de Hopf. En altres paraules, el seu grau de complexitat apareix normalment associat a la irregularitat del caos i no a una estructura complicada d'oscil·lacions.

Un punt de vista diferent de l'anterior és el contingut en el mecanisme físic que

Lev Landau va proposar per explicar l'aparició de la turbulència en fluids [36] i que hem comentat al capítol anterior. El procés es basa en una seqüència d'instabilitats oscil·latòries (el que avui en diríem bifurcacions de Hopf) que, tot partint del flux laminar estacionari, produirien evolucions quasiperiòdiques d'estructura cada vegada més complexa a causa del gran nombre de freqüències característiques diferents. El paper de les no linealitats en aquesta anàlisi és simplement el d'estabilitzar el moviment oscil·latori que sorgeix de cada instabilitat, mentre que els successius modes d'oscil·lació es combinen de forma directa i amb fases relatives arbitràries. Sota la llum de la teoria de bifurcacions dels sistemes dinàmics, la seqüència de Landau es pot interpretar com la bifurcació de Hopf d'un punt fix seguida de bifurcacions secundàries generadores de torus invariants de dimensions successivament majors. Això ens duu a una òrbita quasiperiòdica sobre un torus- $n$  i amb  $n$  graus de llibertat corresponents a les  $n$  fases inicials amb que cada nova freqüència s'incorpora al sistema. En realitat aquesta cadena infinita de bifurcacions no té sentit com a ruta cap al caos perquè actualment és ben sabut que petites pertorbacions d'un flux triplement periòdic en un torus tridimensional donen lloc a atractors estranys [44, 45]. A més a més no queda clar el paper de les  $n$  fases inicials en una òrbita quasiperiòdica, ja que aquesta és única independentment de les fases relatives de les seves  $n$  oscil·lacions. Malgrat això, no hi ha res que prohibeixi que aquest escenari pugui romandre com un mecanisme per a la incorporació de graus de llibertat addicionals (i freqüències característiques) en la dinàmica de sistemes d'alta dimensió, independentment del fet de l'aparició o no de comportament caòtic.

En aquest capítol mostrarem l'aparició de comportament dinàmic complex a través de la superposició no lineal de diferents freqüències característiques generades a partir de bifurcacions de tipus Hopf qualitativament diferents. En relació a l'escenari de Landau que acabem d'exposar el nostre problema és més senzill ja que tracta amb sistemes de dimensió finita, com és habitual en el camp dels sistemes dinàmics, i amb una sola funció no lineal. Per altra banda nosaltres prenem una perspectiva més àmplia en considerar una parella sella-node de punts fixos i la possibilitat de successives bifurcacions de Hopf sobre ambdós punts, mentre que l'escenari de Landau involucra només un sol punt node i una sola seqüència de bifurcacions. El fet de considerar més d'un punt fix és per la raó que els mecanismes no lineals poden barrejar la dinàmica oscil·latòria sorgida de punts veïns. Per altra banda sembla

necessari considerar més d'un punt fix ja que hem de recordar el fet bàsic que un sistema no lineal en té més d'un, aportant d'aquesta manera la possibilitat de barrejar les respectives dinàmiques. En el cas de sistemes amb una sola funció no lineal, els punts fixos apareixen en l'espai de fases alineats en una seqüència alternada de tipus sella-node, i els fenòmens dinàmics bàsics són associats amb un atractor que sorgeix d'un dels nodes i creix sota la influència del punt sella més proper. Per altra banda, una seqüència de bifurcacions torus iniciades en un punt fix està intrínsecament relacionada amb les successives bifurcacions de Hopf d'aquell punt i, possiblement, amb altres seqüències de bifurcacions torus. Finalment, en relació amb la idea de Landau, un sistema dinàmic no pot exhibir relacions de fase arbitràries entre els diferents modes d'oscil·lació, sinó que la superposició té lloc de forma no lineal i els processos de barreja dels diversos modes poden ser responsables d'evolucions dinàmiques bastant complicades.

Més concretament, considerem sistemes dinàmics  $N$ -dimensionals amb una sola, però relativament arbitrària, funció no lineal. Mostrarem com certs sistemes són capaços d'explotar completament les possibilitats d'inestabilitat d'una parella sella-node de punts fixos, amb un total d' $N - 1$  bifurcacions de Hopf sobre aquests punts<sup>1</sup>. Inicialment, els punts tenen varietats estables de dimensió  $N - 1$  i  $N$  respectivament, i després de les  $N - 1$  bifurcacions de Hopf un d'ells ha esdevingut totalment inestable i l'altre manté només una direcció estable. Un conjunt d' $N - 1$  cicles límit hauran sorgit d'aquests punts i possiblement també s'hauran creat alguns torus invariants a través de bifurcacions de Hopf secundàries. La majoria d'aquests cicles límit seran selles i alguns atractors<sup>2</sup> viuran entremig de l'entortolligament de les estructures inestables de la sella. L'evolució temporal associada a un dels atractors pot manifestar la influència de selles properes i, sota aquestes circumstàncies, el fet més destacable a observar en dimensió  $N$  és l'aparició d' $N - 1$  modes d'oscil·lació combinats de forma no lineal en la dinàmica temporal. Això és el que nosaltres anomenem *comportament d'inestabilitat completa* del sistema dinàmic  $N$ -dimensional. La figura 2.1 presenta un exemple numèric per a  $N = 6$ . En aquest cas les diverses bifurcacions de Hopf han generat freqüències d'oscil·lació considerablement diferents i el senyal

---

<sup>1</sup>Si  $N$  és senar la meitat de les bifurcacions tenen lloc a cada punt, mentre que si  $N$  és parell una bifurcació més té lloc en el punt inicialment estable.

<sup>2</sup>De fet, només un atractor pot sorgir de les bifurcacions de Hopf d'una parella sella-node, però atractors addicionals poden aparèixer de processos secundaris.

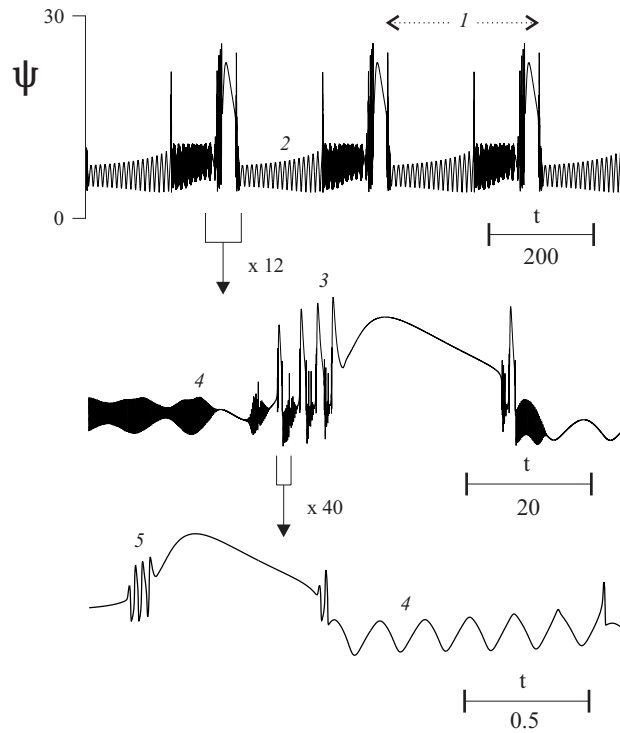


Figura 2.1: Evolució temporal que mostra el comportament d'instabilitat completa d'un sistema hexadimensional en el qual una parella sella-node ha patit dues i tres bifurcacions de Hopf respectivament. Notem la presència d'oscil·lacions a cinc freqüències característiques. La funció no lineal és la gaussiana (A.1) donada a l'Apèndix A, i els altres paràmetres són:  $\omega_{H_q} = 0.1, 0.7, 4, 35, 250$ ,  $p_q = -0.7, 3, -1, 3.2, -2.2$  i  $c_1 = 600 = 2.4\omega_{H_5}$ . Notem també la clara autosimilaritat entre les dues ampliacions, amb un factor 40 en l'escala temporal

temporal mostra una evolució amb una clara distinció dels  $N - 1$  modes. Aquesta figura es comentarà detalladament a la secció 2.5, juntament amb altres simulacions numèriques, i de moment només volem remarcar l'aspecte general del senyal, amb una estructura de gran complexitat i robustesa. És també significatiu que en el cas que ens ocupa el senyal és estrictament periòdic i posa de manifest la independència entre la complexitat i el caos. Un altre fet a destacar d'aquest senyal és la clara autosimilaritat que podem veure entre les dues ampliacions successives. L'estructura a les freqüències més lentes de la primera ampliació és idèntica a la de les ràpides de la segona ampliació. Recordem aquí el fet que els sistemes autoorganitzats presenten molt sovint estructures autosimilars.

La consecució del comportament d'instabilitat completa és associat tant amb l'a-

parició de les diverses bifurcacions de Hopf sobre els punts fixos com amb el treball eficient dels mecanismes no lineals per tal de barrejar les freqüències. La clau sembla ser la participació adient de totes les variables dinàmiques dins de les no linealitats. Nosaltres considerarem funcions d'una sola variable que són combinació lineal de les  $N$  variables dinàmiques, i mostrarem que, en aquest cas, el comportament d'instabilitat completa no és un fenomen gaire subtil i que, en principi, pot ser detectat mitjançant una anàlisi lineal d'estabilitat dels punts fixos. En altres paraules, si els punts fixos han patit, o estan a punt de patir, les  $N - 1$  bifurcacions de Hopf, el sistema exhibirà llavors un senyal del tipus mostrat a la figura 2.1. Els processos secundaris poden ser molt complexos i dependre de les circumstàncies particulars, però no introdueixen freqüències característiques addicionals, que és el que ens interessa, i la barreja no lineal de modes produeix evolucions temporals amb característiques qualitativament genèriques. Algunes d'aquestes característiques estan associades als valors relatius del conjunt de freqüències d'oscil·lació. Les estructures de les evolucions temporals semblen robustes i repetitives en el cas de freqüències realment diferents, però esdevenen més irregulars per a freqüències més properes.

El problema bàsic de bifurcacions en un sistema  $N$ -dimensional està associat a la degeneració zero d'ordre  $N$  ( $0^N$ ) dels autovalors, l'anàlisi de la qual requereix desplegaments<sup>3</sup> amb  $N$  paràmetres com a mínim. Del corresponent punt de codimensió  $N$  es pot esperar que sorgeixin una gran varietat de bifurcacions locals i globals. El problema ha estat totalment solucionat per a  $N = 2$  [51, 88], i alguns resultats són coneguts per a  $N = 3$  [46]. Les degeneracions dels autovalors  $(0, \pm i\omega)$  i  $(\pm i\omega_1, \pm i\omega_2)$ , involucrades en els problemes per a  $N \geq 3$  i  $N \geq 4$ , respectivament, també han estat caracteritzades en detall [21, 47].

En definitiva, a continuació investigarem el comportament d'instabilitat completa de sistemes  $N$ -dimensionals basant-nos en l'anàlisi lineal d'estabilitat dels punts d'equilibri i intentarem generalitzar al màxim les eines d'anàlisi. Desenvoluparem un mètode que proporciona informació global sobre totes les bifurcacions que poden fer els diversos punts fixos d'un sistema. L'objectiu és tenir controlada l'aparició del màxim nombre de bifurcacions de Hopf en una parella sella-node de punts fixos. L'anàlisi no la realitzem en l'espai de paràmetres on, de fet, seria impossible, sinó que considerem l'espai definit pels coeficients de l'equació característica dels autovalors.

---

<sup>3</sup>Utilitzem el terme “desplegament” per l'anglès *unfolding*.

Cada punt d'aquest espai  $N$ -dimensional es pot associar al corresponent conjunt d' $N$  autovalors  $\lambda$ , d'aquesta manera, s'obté una representació universal per a les diverses degeneracions dels sistemes dinàmics de dimensió  $N$ . L'anàlisi lineal d'estabilitat d'un sistema donat s'obté localitzant els seus punts fixos en aquest espai. La situació més simple i tractable correspon a sistemes els punts fixos dels quals estan localitzats sobre una recta i s'hi mouen al damunt quan es varien els paràmetres. Tal situació s'aconsegueix quan els sistemes tenen una sola funció no lineal que depèn d'una sola variable que, al seu torn, és una combinació lineal de les  $N$  variables dinàmiques  $x_i$ , a més, quan el paràmetre de control és simplement un factor multiplicatiu de la funció no lineal. En aquest cas és possible dissenyar el sistema dinàmic per tal d'obtenir les  $N - 1$  bifurcacions de Hopf sobre una parella sella-node amb un conjunt predeterminat de valors per a les freqüències d'oscil·lació i per al valor del paràmetre de control. Aquesta és la situació que hem estudiat en detall, i a ella corresponen els exemples numèrics que presentarem més endavant.

En la part experimental de l'estudi utilitzem sistemes basats en la biestabilitat termoòptica amb absorció localitzada (BOITAL) [78, 39], sistemes que ja han estat àmpliament estudiats pel nostre grup de recerca. Un dispositiu BOITAL consisteix en una cavitat Fabry-Pérot en la qual el mirall d'entrada és parcialment absorbent i l'espaiador està compost de materials transparents amb coeficients termoòptics alternativament oposats. La dinàmica sorgida als dispositius BOITAL es basa exclusivament en la propagació de la calor des del mirall absorbent a través de l'espaiador, mentre que la llum proporciona una realimentació instantània cap a la font de calor. La llum comprova la temperatura de l'espaiador gràcies al seu propi canvi de fase i transfereix aquesta informació a la font de calor a través dels efectes interferencials. La no linealitat es deu exclusivament a l'interferòmetre. La periodicitat de la seva funció interferomètrica és la responsable d'una solució estacionària múltiple, que produeix successius cicles d'histèresi definits per parelles de punts sella-node.

## 2.2 Sistemes $N$ -dimensionals amb un camp vectorial no lineal unidireccional

Considerem sistemes  $N$ -dimensionals continus amb una sola funció no lineal  $o$ , en altres paraules, sistemes en els quals la part no lineal del camp vectorial té una

direcció uniforme a tot l'espai de fases i es pot escriure com

$$\dot{\vec{z}} = A\vec{z} + \vec{b} \cdot f(\vec{z}; \vec{\mu}) \quad (2.1)$$

on  $\vec{z}(t)$  representa el vector d'estat,  $f(\vec{z}; \vec{\mu})$  és una funció escalar no lineal en  $\vec{z}$ ,  $\vec{\mu}$  descriu el conjunt de paràmetres involucrats en la funció no lineal,  $A$  és una matriu  $N \cdot N$  de coeficients constants i  $\vec{b}$  és un vector columna de coeficients constants que defineix la direcció del camp no lineal. Una diversitat considerable de sistemes dinàmics de baixa dimensió prou coneguts estan precisament basats en una sola funció no lineal: els oscil·ladors de Duffing [55] i van der Pol [71], el model de Lotka-Volterra [89], el model de Rössler [80] i el circuit i oscil·lador de Chua [53]. El model Brusselator [72] té també una sola no linealitat però no es pot escriure en la forma (2.1). El model de Rössler generalitzat a  $N$  dimensions [49, 69] està escrit en la forma (2.1) i és particularment rellevant perquè és capaç de produir un gran nombre de modes d'oscil·lació i d'exhibir dinàmica hipercaòtica amb un nombre creixent d'exponents de Lyapunov a mesura que creix  $N$ .

Es pot veure fàcilment que els punts d'equilibri del sistema (2.1) apareixen en l'espai de fases localitzats sobre una certa recta determinada per  $A$  i  $\vec{b}$ . Aquesta és la característica més peculiar dels sistemes  $N$ -dimensionals amb un camp vectorial no lineal unidireccional i suggereix una transformació de coordenades de tal forma que la recta que conté els punts fixos sigui un dels nous eixos. És particularment útil la transformació del sistema (2.1) a la forma canònica basada en la matriu acompanyant<sup>4</sup> que deixa el sistema tal i com segueix [5]

$$\dot{x}_1 = - \sum_{j=1}^N c_j x_j + f(x_1, \dots, x_N; \vec{\mu}) \quad (2.2)$$

$$\dot{x}_j = x_{j-1} \quad (2.2')$$

que, amb la definició  $x_N = y$ , es pot escriure en l'anomenada forma clàssica

$$y^{(N)} + c_1 y^{(N-1)} + \dots + c_{N-2} y'' + c_{N-1} y' + c_N y = f(y^{(N-1)}, \dots, y', y; \vec{\mu}) \quad (2.3)$$

on els superíndexs denoten l'ordre de diferenciació respecte al temps. Notem que en aquesta representació la part no lineal del camp vectorial està dirigida al llarg de la

---

<sup>4</sup>Traduïm *companion* per "acompanyant"

coordenada  $x_1$  o  $y_{(N-1)}$ , mentre que els punts d'equilibri es localitzen sobre l'eix  $x_N$  o  $y$ . Notem també que la divergència del camp vectorial és

$$\vec{\nabla} \vec{F} = \sum_{j=1}^N \frac{\partial \dot{x}_j}{\partial x_j} = -c_1 + \frac{\partial f}{\partial x_1} \quad (2.4)$$

de tal forma que un sistema del tipus (2.2) és conservatiu si i només si  $c_1 = 0$  i  $f$  no depèn de  $x_1$ . Al llarg d'aquest treball tractarem amb sistemes prou dissipatius com perquè l'existència d'un atractor estigui generalment garantida. La influència del grau de dissipació es discutirà a la secció 2.5.

Ara introduïrem un paràmetre de control explícit tot assumint que la funció no lineal inclou un factor d'escala com segueix

$$f(x_1, \dots, x_N; \vec{\mu}) = \mu_c g(x_1, \dots, x_N; \vec{\mu}) \quad (2.5)$$

on  $\mu_c$  se suposa independent dels coeficients  $c_j$  de la part lineal. Tot i que aquest tipus de paràmetre pot no ser accessible en certs casos concrets, és realment útil per a tasques analítiques, ja que simplement modifica el pes relatiu de les parts lineal i no lineal del camp vectorial sense alterar llur estructura. Aquesta propietat ens permetrà considerar l'estabilitat lineal del diagrama de bifurcacions de l'estat estacionari en funció de  $\mu_c$ , sense altres assumpcions sobre la funció no lineal que la continuïtat i la diferenciabilitat.

Com ja veurem a la secció 2.4, les instabilitats d'autovalor zero del sistema (2.2) tenen sempre el subespai central dirigit en la direcció  $x_N$ , és a dir, la direcció de la línia de punts fixos. Per altra banda, també veurem que el comportament d'instabilitat completa requereix que totes les variables siguin presents dins la funció no lineal i la situació més simple és aquella en la qual la funció no lineal actua sobre una combinació lineal de les variables. En altres casos també serà possible aconseguir el comportament d'instabilitat completa, però segurament serà més difícil; així, com a exemple particular i potent, considerem funcions no lineals d'una sola variable tal com especifiquem a continuació

$$f(x_1, \dots, x_N; \vec{\mu}) = f(\Psi, \vec{\mu}) \quad (2.6)$$

on

$$\Psi = \sum_{j=1}^N d_j x_j \quad (2.7)$$



Notem que els coeficients  $d_j$  de fet es poden traspasar a la part lineal del camp vectorial tot definint les  $d_j x_j$  com a noves variables. Els papers de la part lineal i de la no lineal es poden distingir clarament amb aquest tipus de funció no lineal. En particular, permet ajustar la participació relativa de les diverses variables dins l'anell de realimentació independentment de la pròpia funció no lineal. El model de Lotka-Volterra [89], els oscil·ladors de Duffing [55] i van der Pol [71], el circuit de Chua [53] i els sistemes BOITAL [39] són exemples de sistemes amb una sola funció no lineal d'una sola variable en la forma (2.7).

## 2.3 Solució estacionària

L'estat estacionari de (2.2) i (2.5) queda determinat per

$$\bar{x}_j = 0 \quad \text{per a } j = 1, \dots, N - 1 \quad (2.8)$$

$$c_N \bar{x}_N = \mu_c G(\bar{x}_N; \vec{\mu}) \quad (2.8')$$

on la barra denota els valors de l'estat estacionari i  $G(x_N; \vec{\mu}) = g(x_{j \neq N} = 0, x_N; \vec{\mu})$ . Així doncs, el nombre de punts fixos i llur posició sobre l'eix  $x_N$  depèn només de les no linealitats que involucren exclusivament  $x_N$ . La condició (2.8) es pot analitzar gràficament tal i com es veu a la part esquerra de la figura 2.2, on es representa una certa funció no lineal en funció de  $x_N$ , junt amb la recta  $(c_N / \mu_c) x_N$ . Les interseccions d'aquesta línia amb la funció no lineal determinen les solucions  $\bar{x}_N$  per al valor considerat de  $\mu_c$  i canviant el pendent de la línia hom obté el diagrama de branques en funció de  $\mu_c$  (part dreta de la figura 2.2). Per a una funció no lineal afitada existeix una sola solució per a  $\mu_c = 0$ , com correspon a un sistema lineal, i apareixen solucions addicionals a mesura que augmenta  $\mu_c$  i cada vegada que la recta esdevé tangent a la funció no lineal. El contacte puntual a la tangència implica una degeneració de la solució estacionària i l'existència de més d'una solució a una banda del contacte. El cas genèric correspon a la bifurcació sella-node il·lustrada a la figura 2.2a, mentre que condicions addicionals sobre la funció no lineal ens duen a bifurcacions transcrites (figura 2.2b) i bifurcacions en forquilla (figura 2.2c) [18]. Per a una funció contínua el diagrama de branques en funció de  $\mu_c$  apareix sempre connectat i sense illes<sup>5</sup>.

<sup>5</sup>També anomenades sovint *isolae*, o *isola* en singular

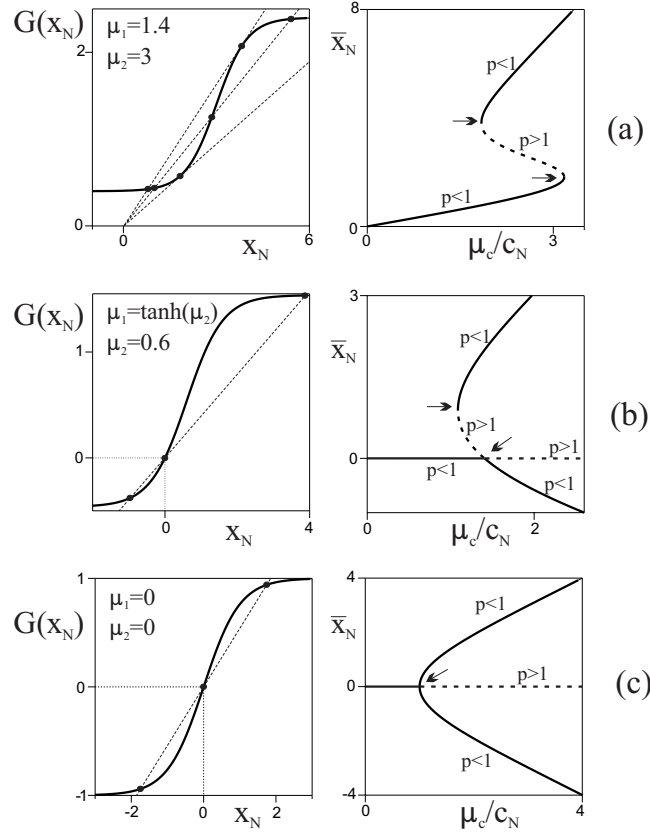


Figura 2.2: Il·lustració de com la funció no lineal  $G(x_N) = \mu_1 + \tanh(x_N - \mu_2)$  origina bifurcacions estacionàries del tipus sella-node, transcítica i en forquilla. A la columna esquerra representem la funció i la recta  $G(x_N) = (c_N/\mu_c)x_N$  per a diferents valors de  $\mu_c$  i les interseccions indiquen les solucions. La columna dreta presenta els corresponents diagrames de branques (o d'embranchament) en funció de  $\mu_c$ . La magnitud  $p$  definida a (2.9) s'usa per caracteritzar l'estabilitat. Les fletxes indiquen els llocs on  $p = 1$ .

A la secció 2.4 veurem que la relació entre els pendents de la funció no lineal i la recta a llur intersecció és útil per caracteritzar l'estabilitat lineal de la corresponent solució estacionària. El quocient de pendents es defineix com el valor

$$p(\bar{x}_N) = \frac{\mu_c(\bar{x}_N)}{c_N} \left[ \frac{\partial G}{\partial x_N} \right]_{\bar{x}_N} = \frac{\bar{x}_N}{G(\bar{x}_N)} \left[ \frac{\partial G}{\partial x_N} \right]_{\bar{x}_N} \quad (2.9)$$

i els diagrames de branques de la figura 2.2 indiquen els valors de  $p$  sobre les diferents branques. Notem en particular que  $p = 1$  correspon als punts no hiperbòlics de les bifurcacions d'autovalor zero.

Per a funcions no lineals d'una sola variable és útil caracteritzar la solució esta-

cionària mitjançant aquesta variable. En el cas d'una combinació lineal de variables com a (2.7), les funcions  $g$  i  $G$  són equivalents i (2.8) i (2.9) es poden escriure de la següent manera

$$d_N \bar{x}_N = \bar{\Psi} = \frac{\mu_c d_N}{c_N} g(\bar{\Psi}) \quad (2.10)$$

$$p(\bar{\Psi}) = \frac{\mu_c d_N}{c_N} \left[ \frac{\partial g}{\partial \Psi} \right]_{\bar{\Psi}} \quad (2.11)$$

Si el paràmetre de control es reescala a  $\mu_c d_N / c_N$  resulta que tots els sistemes basats en una funció no lineal donada  $g(\Psi)$ , però que tenen una dimensió arbitrària i també arbitraris coeficients  $c_j$  i  $d_j$ , estan associats al mateix diagrama de solució estacionària que descriu  $\Psi$  en funció de  $\mu_c d_N / c_N$ . A més a més la distribució dels valors de  $p$  sobre aquest diagrama és la mateixa per a tots aquests sistemes. Aquesta és una situació particularment útil per analitzar sistemes de dimensió gradualment creixent. No obstant això, cal notar que en l'espai de fases els punts fixos apareixen situats en punts que sí depenen del coeficient  $d_N$ .

## 2.4 Anàlisi lineal d'estabilitat

La matriu jacobiana del sistema (2.1) està en la forma acompanyant i l'equació característica és

$$\lambda^N + k_1 \lambda^{N-1} + \dots + k_{N-1} \lambda + k_N = 0 \quad (2.12)$$

que té els coeficients donats directament pels elements del jacobinà. Per a funcions no lineals en la forma (2.5) els coeficients són, per a un punt fix determinat  $\bar{x}$ ,

$$k_j(\bar{x}) = -J_{1j} = c_j - \mu_c \left[ \frac{\partial g}{\partial x_j} \right]_{\bar{x}} \quad \text{per a } j = 1, \dots, N \quad (2.13)$$

La simplicitat d'aquestes relacions ens permet desenvolupar una representació poc convencional de l'anàlisi lineal d'estabilitat. En lloc de l'espai de paràmetres habitual considerarem un espai intermedi definit pels coeficients  $k_j$ . En aquest espai, allò que representen les equacions (2.12) i (2.13) es pot representar de forma independent. Per una banda associem cada punt de l'espai de les  $k_j$  amb el corresponent conjunt d'autovalors determinats per l'equació característica. Això és una representació universal aplicable a qualsevol equació característica en la forma (2.12) i descriu tota la varietat possible de punts fixos  $N$ -dimensionals en el règim lineal. Realment és

molt fàcil localitzar en aquest espai els *loci* ocupats pels punts no hiperbòlics i les degeneracions dels autovalors. Per altra banda, per a sistemes dinàmics en la forma canònica (2.1), les equacions (2.13) identifiquen la posició dels punts fixos del sistema en l'espai de les  $k_j$  i d'aquesta forma podem saber com són. La variació d'un dels paràmetres del sistema mou els punts fixos sobre determinades corbes i són les seves interseccions amb els *loci* dels punts no hiperbòlics el que indica les bifurcacions estacionàries de la família de sistemes considerada. És a dir, (2.12) ens divideix l'espai en diverses zones segons l'estabilitat lineal del punt associat, mentre que (2.13) ens localitza en aquest espai els punts fixos del nostre sistema. Així, la combinació d'ambdues ens dóna tota la informació necessària de l'anàlisi lineal. En particular, si  $\mu_c$  és el paràmetre que es varia, tots els punts fixos es mouen sobre la mateixa corba i això permet associar la família de sistemes de paràmetre  $\mu_c$  (o  $\mu_c$ -paramètrics) amb aqueixa corba en l'espai de les  $k_j$ . Notem que, de les equacions (2.13),  $k_N$  es pot escriure com

$$k_N(\bar{x}) = c_N(1 - p) \quad (2.14)$$

amb  $p$  definida a l'equació (2.9). Això significa que l'eix  $k_N$  es pot relacionar directament amb el valor de  $p$  dels punts fixos i, com la distribució de valors de  $p$  sobre la solució estacionària en funció de  $\mu_c$  és coneguda, suggereix l'ús de  $p$ , en lloc de  $\mu_c$  per relacionar la corba d'una família de sistemes  $\mu_c$ -paramètrics en l'espai de  $k_j$  amb el diagrama de bifurcacions "tradicional". Recordem que la solució estacionària apareix sempre organitzada en branques amb  $p < 1$  o bé  $p > 1$  i que la connexió de les diferents branques té lloc a  $p = 1$  (vegeu les figures 2.2 i 2.3). L'equació (2.14) localitza els dos tipus de branques en costats oposats del subespai  $k_N = 0$  i les solucions amb  $p = 1$  en aquest subespai. En particular, per a  $c_N > 0$ , les solucions amb  $p < 1$  apareixen a  $k_N > 0$  i a la inversa.

El mètode és realment útil per a sistemes amb una funció no lineal d'una sola variable en la forma (2.7), perquè en aquest cas les equacions (2.13) es poden escriure com

$$k_j(\bar{\Psi}) = c_j - \mu_c \left[ \frac{\partial g}{\partial \Psi} \right]_{\bar{\Psi}} d_j = c_j - p \frac{c_N}{d_N} d_j \quad (2.15)$$

amb  $p$  donada per l'equació (2.11). La corba associada a una família de sistemes  $\mu_c$ -paramètrics és ara una recta que passa pel punt de coordenades  $(c_j)$  i que té com a vector director un de determinat pel conjunt de coeficients  $d_j$  (vegeu l'exemple de la figura 2.8). Per a  $d_N$  i  $c_N \neq 0$ , el valor de  $p$  d'un punt fix determina la seva

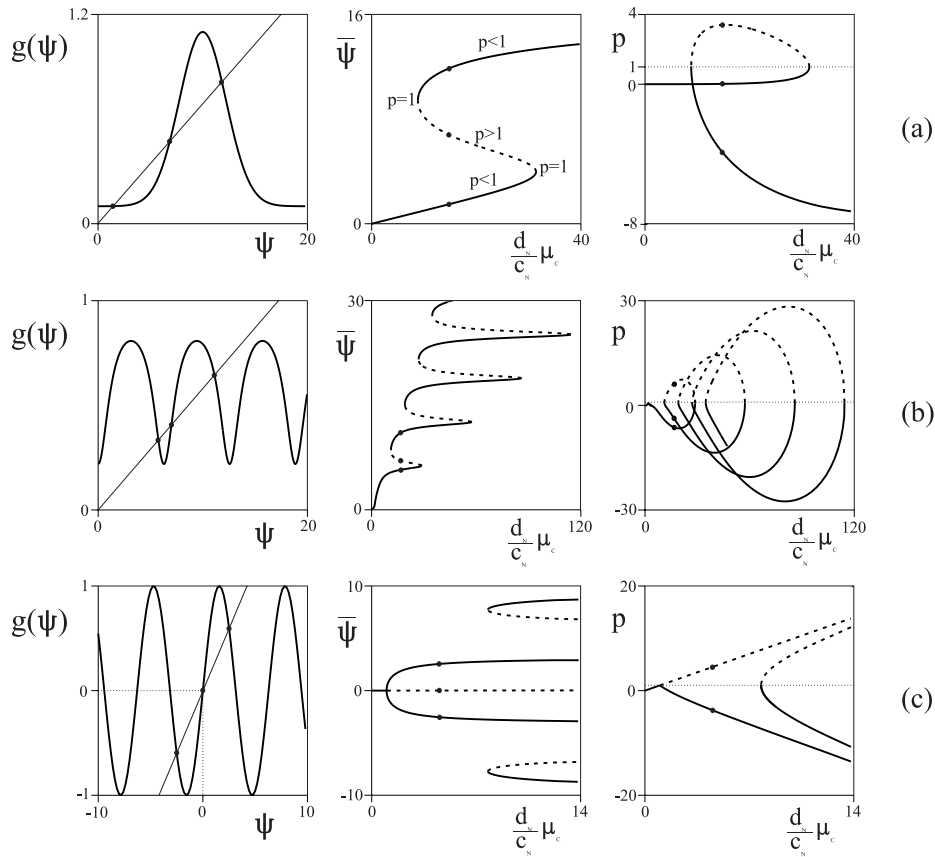


Figura 2.3: Funcions no lineals utilitzades en les simulacions numèriques, juntament amb els seus corresponents diagrames d'embranchament i distribucions del valor de  $p$ . Com a la figura 2.2, representem la recta les interseccions de la qual ens donen les solucions estacionàries per a un cert valor del paràmetre  $\mu_c$ .

posició sobre la línia  $i$ , per tant, determina el tipus de punt que és en el règim lineal. En altres paraules, tots aquells punts fixos amb el mateix valor de  $p$  tenen idèntic comportament pel que fa a l'estabilitat lineal. Per exemple, el punt de coordenades  $(c_j)$  correspon a  $p = 0$  i descriu, o bé la solució única del sistema lineal, quan  $\mu_c = 0$ , o bé qualsevol altra solució per a la qual  $\partial g / \partial \Psi = 0$ . La intersecció de la recta amb el subespai  $k_N = 0$  correspon a  $p = 1$  i, com es veurà més endavant, descriu un punt no hiperbòlic d'autovalor zero. La recta pot patir un cert nombre d'interseccions amb els *loci* dels punts no hiperbòlics de  $\lambda_{\pm} = \pm i\omega$  i el conjunt corresponent de valors de  $p$  indica on tenen lloc les diferents bifurcacions de Hopf sobre el diagrama de bifurcacions estacionàries. D'aquesta forma el mètode proporciona una caracterit-

zació global de l'estabilitat lineal de la solució estacionària de la família de sistemes  $\mu_c$ -paramètrics amb un conjunt donat de valors de  $N$ ,  $c_j$  i  $d_j$ . Notem que la recta que defineix l'equació (2.15) no depèn de la funció no lineal.

En resum, els sistemes amb un camp vectorial no lineal unidireccional que depèn d'una sola variable en la forma (2.7) i un paràmetre de control com a (2.5) tenen dues característiques peculiars:

- la funció no lineal  $g(\Psi)$  determina el diagrama de bifurcacions de la solució estacionària describint  $\bar{\Psi}$  en funció de  $\mu_c$  així com la distribució de valors de  $p$  sobre aquest diagrama, independentment de  $N$ ,  $c_j$  i  $d_j$ .
- la dimensió  $N$  i el conjunt de coeficients  $c_j$  i  $d_j$  determinen l'estabilitat lineal de la solució estacionària i es pot caracteritzar mitjançant la recta definida per l'equació (2.15) en l'espai  $N$ -dimensional de les  $k_j$ . Els punts fixos apareixen localitzats sobre aquesta línia d'acord amb llurs valors de  $p$ , tal i com expressa l'equació (2.14). La posició de la recta respecte als *loci* dels punts no hiperbòlics determina les diverses zones d'estabilitat. Les interseccions de la recta amb les superfícies que defineixen aquests *loci* determinen els valors de  $p$  requerits per a la bifurcació corresponent i, d'aquesta manera, l'estabilitat lineal del diagrama de bifurcacions es pot caracteritzar globalment.

#### 2.4.1 *Loci* dels punts no hiperbòlics en l'espai de les $k_j$

Es pot fer una classificació simple dels punts fixos continguts en l'espai de les  $k_j$  d'acord al nombre de llurs dimensions inestables, cosa que implica  $N + 1$  tipus de punts qualitativament diferents, és a dir, de 0 a  $N$  dimensions inestables. Com els autovalors varien de forma contínua en aquest espai, les diferents classes de punts apareixen organitzades en  $N + 1$  regions diferents delimitades pels *loci* dels punts no hiperbòlics. El *locus* dels punts no hiperbòlics d'un tipus donat en l'espai de les  $k_j$  és una superfície  $m$ -dimensional, que anomenarem com els punts. La codimensió de les superfícies  $m$ -dimensionals és  $N - m$  i ens dóna el nombre d'equacions independents necessàries per definir la superfície o bé el nombre d'autovalors amb part real zero en el punt no hiperbòlic considerat.

Tota la diversitat de superfícies emergeix del punt de codimensió  $N$  a l'origen de l'espai de les  $k_j$ , i la seva intersecció amb qualsevol hiperesfera que contingui l'ori-

gen produeix estructures qualitativament equivalents. Aquesta propietat autosimilar funciona d'acord amb la invariancia de l'equació (2.12) respecte a l'escala temporal, això és, d'acord a la transformació  $\lambda \rightarrow \alpha^{-1}\lambda$  i  $k_j \rightarrow \alpha^j k_j$  essent  $\alpha$  el factor d'escala temporal. La superfície d'un tipus donat de punt no hiperbòlic es pot caracteritzar imposant la condició d'autovalors adient a l'equació (2.12), del què es pot veure que:

- La superfície  $\{0^n\}$  és el subespai lineal de dimensió  $N - n$  definit per

$$k_N = k_{N-1} = \dots = k_{N-n+1} = 0 \quad (2.16)$$

En particular,  $\{0^N\}$  és l'origen,  $\{0^{N-1}\}$  és l'eix  $k_1$ ,  $\{0^{N-2}\}$  és el pla  $k_1 k_2$ , etc. fins el subespai  $\{0\}$  de dimensió  $N - 1$  definit per  $k_N = 0$ . La resta de valors propis per als punts de  $\{0^n\}$  queden determinats per l'equació

$$\lambda^{N-n} + k_1 \lambda^{N-n-1} + \dots + k_{N-n} = 0 \quad (2.17)$$

de tal manera que l'estructura espacial dels autovalors dins de  $\{0^n\}$  és idèntica a la del problema de dimensió  $N - n$  però amb l'afegit d' $n$  autovalors zero.

- $\{\pm i\omega\}$  té dimensió  $N - 1$  i es determina paramètricament en funció de  $\omega$  mitjançant

$$\begin{cases} k_1(i\omega)^{N-2} + k_3(i\omega)^{N-4} + \dots + k_{N-3}(i\omega)^2 + k_{N-1} = 0 \\ (i\omega)^N + k_2(i\omega)^{N-2} + \dots + k_{N-2}(i\omega)^2 + k_N = 0 \end{cases} \quad (2.18)$$

si  $N$  és parell, o bé

$$\begin{cases} k_1(i\omega)^{N-1} + k_3(i\omega)^{N-3} + \dots + k_{N-2}(i\omega)^2 + k_N = 0 \\ (i\omega)^{N-1} + k_2(i\omega)^{N-3} + \dots + k_{N-3}(i\omega)^2 + k_{N-1} = 0 \end{cases} \quad (2.19)$$

si  $N$  és senar. La superfície  $\{\pm i\omega\}$  sorgeix amb  $\omega = 0$  a partir de  $\{0^2\}$  i intersecciona els diversos subespais  $\{0^n\}$ , amb  $n \leq N - 2$ , per produir les degeneracions  $\{0^n, \pm i\omega\}$ . A més, per a  $N \geq 4$ ,  $\{\pm i\omega\}$  també intersecciona amb ella mateixa i dona lloc a les degeneracions del tipus  $\{\pm i\omega_1, \pm i\omega_2, \dots\}$ .

- El semieix  $k_2 \geq 0$  és  $\{0^{N-2}, \pm i\omega\}$ , amb  $\omega_2 = k_2$ , i correspon a  $\{0, \pm i\omega\}$  per a  $N = 3$  i a  $\{\pm i\omega\}$  per a  $N = 2$ .

- La superfície bidimensional definida per  $k_N = k_{N-1} = \dots = k_4 = 0$  i  $k_3/k_1 = k_2 = \omega_2$  és  $\{0^{N-3}, \pm i\omega\}$  i esdevé  $\{0, \pm i\omega\}$  per a  $N = 4$  i  $\{\pm i\omega\}$  per a  $N = 3$ .
- La regió del pla  $k_2 k_4$  amb  $k_2 \geq 2k_4^{1/2} \geq 0$  és  $\{0^{N-4}, \pm i\omega_1, \pm i\omega_2\}$ , i esdevé  $\{\pm i\omega_1, \pm i\omega_2\}$  per a  $N = 4$ .
- La condició de dos autovalors reals iguals,  $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda$ , determina el *locus* dels punts fixos amb una varietat bidimensional en transició de node a focus. Correspon a la superfície  $N-1$ -dimensional definida paramètricament en funció de  $\lambda$  per

$$\begin{cases} k_{N-1} = -\sum_{q=2}^N q\lambda^{q-1}k_{N-q} \\ k_N = -\sum_{q=2}^N (q-1)\lambda^q k_{N-q} \end{cases} \quad (2.20)$$

on  $k_0 = 1$ , i consisteix en dues làmines, associades a  $\lambda < 0$  i  $\lambda > 0$  respectivament, que emergeixen amb  $\lambda = 0$  de  $\{0^2\}$ . Aquesta estructura de doble làmina envolta la superfície  $\{\pm i\omega\}$  i defineix la regió on els punts fixos linealitzats involucren moviments espirals. Per a  $N = 2$  les equacions (2.20) esdevenen  $k_1^2 = 4k_2 = 4\lambda^2$ .

Ara ja estem en disposició de donar una visió qualitativa de l'organització regional d'autovalors en l'espai  $N$ -dimensional de les  $k_j$ . L'espai es particiona en  $N + 1$  regions, contenint cada una punts amb un nombre diferent d'autovalors amb part real positiva. La partició es realitza mitjançant les dues superfícies  $N - 1$ -dimensionals de punts no hiperbòlics, la  $\{0\}$  i la  $\{\pm i\omega\}$ , i per llur interconnexió al llarg de les degeneracions  $\{0, 0\}$  i  $\{0, \pm i\omega\}$ . La primera degeneració es pot considerar com l'origen de  $\{\pm i\omega\}$  enmig de  $\{0\}$ , mentre que la segona descriu el pas de  $\{\pm i\omega\}$  per  $\{0\}$ , és a dir, el pas de  $\{\pm i\omega\}$  entre els semiespais  $k_N > 0$  i  $k_N < 0$ . Els punts fixos de regions contigües estan relacionats per instabilitats unidimensionals o bidimensionals associades a les superfícies no hiperbòliques  $\{0\}$  o  $\{\pm i\omega\}$ , respectivament. El semiespai  $k_N > 0$  ( $< 0$ ) conté regions amb un nombre parell (senar) d'autovalors inestables. La superfície  $\{\pm i\omega\}$  també apareix dividida en  $N - 1$  zones qualitativament diferents allà on separa parelles de regions amb nombres diferents de dimensions inestables (sempre amb una diferència parella, ja que  $\{\pm i\omega\}$  involucra necessàriament dues dimensions), com ara  $0/2$ ,  $1/3$ ,  $2/4$ , etc.

Tot això queda més clar amb alguns exemples concrets. Les figures 2.4 i 2.5 mostren les superfícies no hiperbòliques en l'espai de les  $k_j$  per a  $N = 2$  i  $N = 3$ , respectiva-



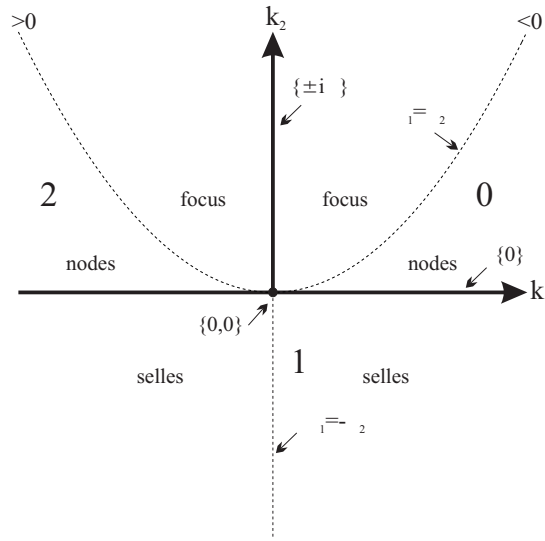


Figura 2.4: Estructura d'autovalors en l'espai de les  $k_j$  per a  $N = 2$  que mostra els *loci* dels punts no hiperbòlics i altres condicions rellevants. Notem la partició de l'espai en tres regions amb nombres diferents de dimensions inestables

ment. El cas  $N = 2$  correspon al conegut problema d'un sistema lineal bidimensional i la mateixa estructura, amb un autovalor zero de més, és la que trobarem al cas  $N = 3$  per al pla  $k_3 = 0$ . La figura 2.5 també descriu l'estructura d'autovalors del subespai  $\{0\}$  per a  $N = 4$  si afegim un autovalor zero a tot arreu. En aquest cas la hipersuperfície tridimensional  $\{\pm i\omega\}$  sorgeix del pla  $\{0, 0\}$  cap a la quarta dimensió i intersecciona el subespai  $\{0\}$  un altre cop a la superfície bidimensional  $\{0, \pm i\omega\}$ . D'aquesta forma queden definides les cinc regions de l'espai de les  $k_j$  per a  $N = 4$ . A més,  $\{\pm i\omega\}$  intersecciona amb ella mateixa per produir la degeneració  $\{\pm i\omega_1, \pm i\omega_2\}$  continguda en el pla  $k_2 k_4$ . Aquest tipus d'intersecció implica una estructura complexa en les regions veïnes però no introdueix regions addicionals.

Una visió més accessible de l'estructura de les superfícies no hiperbòliques la podem obtenir si considerem plans de secció en l'espai de les  $k_j$ , tals com els que mostrem a les figures 2.6 i 2.7 per a  $N = 3$  i  $N = 4$  respectivament. Les seccions no són necessàriament paral·leles a cap dels eixos  $k_j$ , però estan dibuixades projectades sobre el pla  $k_{N-1} k_N$  i els números indiquen el nombre de dimensions inestables a cada regió diferent. També es mostra el valor d' $\omega$  sobre la superfície  $\{\pm i\omega\}$  en el pla de secció. A la figura 2.6 ambdues seccions tallen la degeneració  $\{0, 0\}$ , però només el segon pla conté la degeneració  $\{0, \pm i\omega\}$ . L'aparició d'ambdues degeneracions implica

la presència de totes les possibles regions per a  $N = 3$ . De fet es pot demostrar que, per a una dimensió arbitrària  $N$ , un pla de secció de l'espai de les  $k_j$  pot interseccionar fins a  $N - 1$  vegades amb les superfícies  $\{0\}$  i  $\{\pm i\omega\}$  simultàniament, una vegada al subespai  $\{0, 0\}$  i la resta a la superfície  $\{0, \pm i\omega\}$ . Tota la diversitat de punts fixos i d' $N - 1$  zones diferents de  $\{\pm i\omega\}$  apareixen en el pla de secció si i només si també apareixen  $N - 1$  interseccions puntuals de  $\{0\}$  amb  $\{\pm i\omega\}$ , Això és el que passa en els dos casos per a  $N = 4$  de la figura 2.7, on el segon conté, a més, la degeneració  $\{\pm i\omega_1, \pm i\omega_2\}$ . La transició d'(a) a (b) de la figura 2.6 té lloc quan el pla de secció talla la degeneració  $\{0, 0, 0\}$ , de la qual sorgeix  $\{0, \pm i\omega\}$  amb  $\omega = 0$  (vegeu figura 2.5). A la figura 2.7 la transició d'(a) a (b) s'esdevé quan el pla talla la degeneració  $\{0, 0, \pm i\omega\}$ , de la qual sorgeix la  $\{\pm i\omega_1, \pm i\omega_2\}$  i amb una de les freqüències igual a zero.

Per simplicitat, els plans de secció representats a les figures 2.6 i 2.7 s'han escollit de tal manera que interseccionen la superfície  $\{\pm i\omega\}$  de forma contínua, però per a una orientació arbitrària del pla la intersecció segurament apareixerà desconnectada en diverses parts, relacionades entre sí per dobles divergències. En qualsevol cas val la pena remarcar que la superfície d'una determinada classe de punts no hiperbòlics és única i contínua en l'espai de les  $k_j$ .

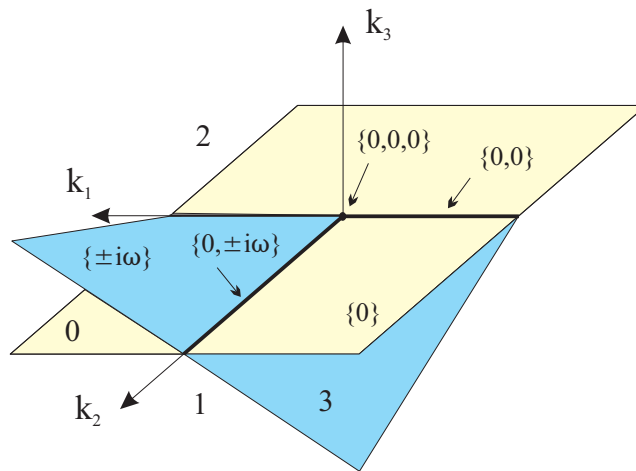


Figura 2.5: Superfícies dels punts no hiperbòlics en l'espai de les  $k_j$  per a  $N = 3$ , La mateixa estructura amb un autovalor igual a zero afegit arreu descriu el subespa  $k_4 = 0$  per a  $N = 4$

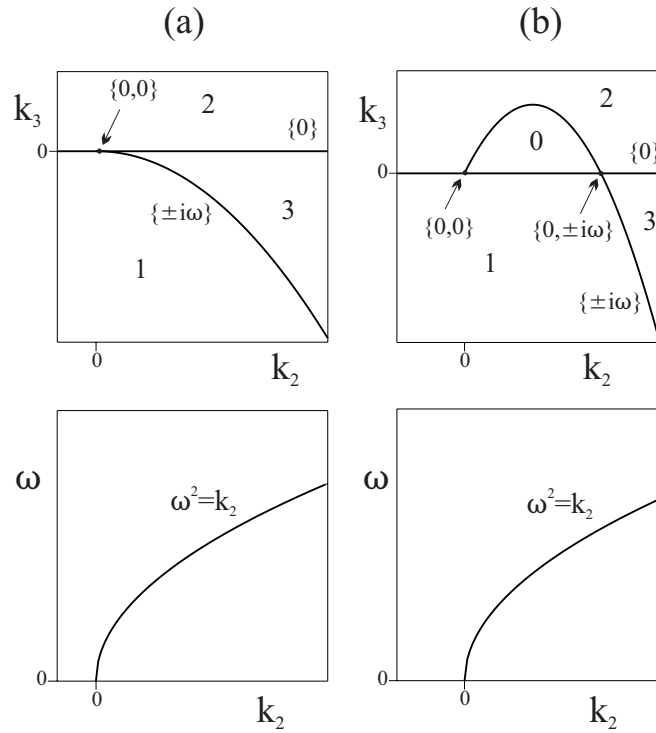


Figura 2.6: Superfícies dels punts no hiperbòlics en dos plans de secció diferents de l'espai de les  $k_j$  per a  $N = 3$ . Ambdós plans són paral·lels a  $k_3$  i tallen els altres eixos amb  $k_1$  i  $k_2 < 0$  o  $> 0$  als casos (a) i (b) respectivament. Les representacions es realitzen projectades al pla  $k_{N-1}k_N$  i les etiquetes numèriques denoten el nombre de dimensions inestables a les diverses regions. També mostrem el valor de  $\omega$  sobre la superfície  $\{\pm i\omega\}$  en el pla de secció

### 2.4.2 Autovectors per a la matriu jacobiana en forma acompanyant

L'estructura de l'espai de fases dels punts fixos linealitzats ens és donada pels corresponents autovectors. A diferència del que passa amb els autovalors, l'organització d'autovectors en l'espai de les  $k_j$  no és universal perquè depèn de la matriu jacobiana a través de l'equació de valors propis. Nogensmenys, les matrius de forma acompanyant tenen la propietat peculiar que els autovectors només depenen de l'autovalor associat de la manera següent

$$\vec{u}_\lambda = (\lambda^{N-1}, \lambda^{N-2}, \dots, \lambda, 1) \tag{2.21}$$

de tal manera que tota la família de sistemes de la forma (2.2) tenen la mateixa estructura d'autovectors en l'espai de les  $k_j$ .

L'autovector d'autovalor zero  $(0, 0, \dots, 0, 1)$  està dirigit al llarg de l'eix  $x_N$  arreu

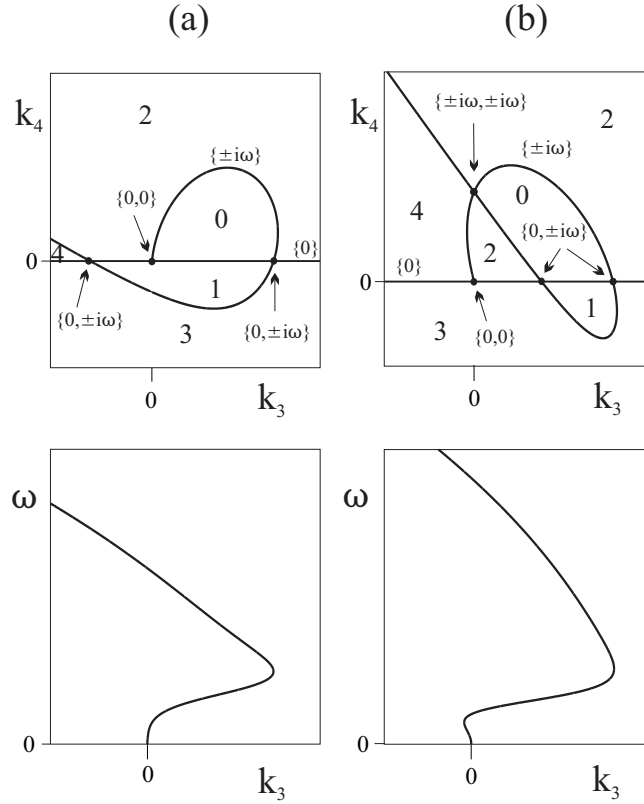


Figura 2.7: El mateix de la figura 2.6 però per a  $N = 4$

del subespai  $\{0\}$ . L'autoespai bidimensional de  $\lambda_{\pm} = \{\pm i\omega\}$  depèn del valor de  $\omega$  i es determina mitjançant els vectors reals

$$\begin{cases} \frac{u_+ + u_-}{2} = (\dots, -\omega^6, 0, \omega^4, 0, -\omega^2, 0, 1) \\ \frac{u_+ - u_-}{2} = (\dots, \omega^5, 0, -\omega^3, 0, \omega, 0) \end{cases} \quad (2.22)$$

El valor d' $\omega$  és igual a zero a la degeneració  $\{0,0\}$  i creix indefinidament a mesura que ens n'allunyem i ens movem per la superfície  $\{\pm i\omega\}$ . Per tant, l'orientació de l'autoespai bidimensional canvia al llarg de la superfície.

Notem que l'equació (2.21) implica que l'autoespai associat amb un autovalor és sempre unidimensional, independentment de la seva multiplicitat. En particular, el subespai central de la degeneració  $\{0^n\}$  es defineix amb el vector  $(0, 0, \dots, 0, 1)$ , independentment d' $n$ ; i  $\{\pm i\omega, \pm i\omega, \dots\}$  es desenvolupa en el subespai central bidimensional definit per les equacions (2.22), independentment del nombre de parelles

d'autovalors amb parts imaginàries iguals. Això potser és sorprenent, però no és un problema perquè la varietat central no lineal pot tenir la dimensió adient. No obstant això, la dinàmica al voltant d'aquestes situacions tan degenerades podria exhibir característiques molt peculiars.

L'autoespai unidimensional dels autovalors múltiples també implica que la condició de dos autovalors reals iguals està associada necessàriament amb un node d'inflexió i no pot involucrar un punt d'estrella.

### 2.4.3 Punts fixos de sistemes no lineals en l'espai de les $k_j$

#### Bifurcacions estacionàries

L'únic punt fix d'un sistema lineal es pot trobar arreu de l'espai de les  $k_j$  i es pot moure lliurement amb una variació dels paràmetres. El creuament transversal d'una superfície de punts no hiperbòlics indica una bifurcació en la qual el flux al voltant del punt fix es modifica qualitativament mitjançant l'intercanvi d'estabilitat dins de l'autoespai afectat. Justament a la bifurcació el sistema lineal exhibeix un nombre indefinit de solucions que cobreixen completament l'autoespai central. D'aquesta manera el domini d'instabilitat s'estén il·limitadament en l'espai.

En presència de no linealitats els processos de bifurcació d'un punt fix involucren normalment conjunts límit addicionals que esdevenen degenerats sobre el punt no hiperbòlic i que defineixen regions limitades de l'espai de fases on tenen lloc els canvis qualitius. Això permet la coexistència de regions de l'espai de fases amb estructures de flux qualitativament diferents. A l'espai de les  $k_j$ , els encreuaments transversals de les superfícies  $\{0\}$  i  $\{\pm i\omega\}$  estan associats, típicament, amb les bifurcacions sella-node i Hopf, respectivament, ja que les condicions corresponents s'hi compleixen de forma genèrica [18]. En una bifurcació sella-node una parella de punts fixos s'aproxima al subespai  $k_N = 0$  des de costats oposats, els dos punts esdevenen el mateix punt no hiperbòlic i llavors desapareixen (de la mateixa forma, també té lloc el procés invers). El nom "sella-node" s'utilitza per conveniència, però cal adonar-se que la hipersuperfície  $\{0\}$  apareix dividida en  $N$  parts on la bifurcació involucra diferents tipus de punts fixos que normalment són una parella de selles i la bifurcació en sí només afecta a una de les  $N$  dimensions de l'espai, mentre les altres no modi-

fiquen llur estabilitat<sup>6</sup>. Per altra banda, el creuament de  $\{0\}$  també es pot associar a les bifurcacions transcítica o en forquilla, sempre i quan les condicions requerides s'hi compleixin. En aquests casos un conjunt diferent de punts fixos s'hi veu involucrat. Les bifurcacions de codimensió dos del tipus vèrtex (anomenades *cusp* en la terminologia anglosaxona) es manifestarien també com un encontre de punts fixos al subespai  $\{0\}$ .

En el creuament de  $\{\pm i\omega\}$  probablement sorgirà un cicle límit al voltant del punt fix a un cantó de la superfície de bifurcació. Si considerem només el subespai central, aquest pot ser o bé un cicle estable al voltant d'un focus divergent o bé un cicle inestable al voltant d'un focus atractiu. En altres paraules, la bifurcació de Hopf pot ser supercrítica o subcrítica en funció de certes característiques de la no linealitat [18]. En qualsevol cas, fora del subespai central el cicle límit manté les mateixes propietats d'estabilitat que ja tenia el punt fix. Això vol dir que una bifurcació de Hopf supercrítica (subcrítica) que tingui lloc entre regions amb 0 ( $N$ ) i 2 ( $N - 2$ ) dimensions inestables produirà un cicle límit estable (inestable), però en qualsevol altre cas es crearà algun tipus de cicle sella. La diversitat de cicles apareixerà orientada en l'espai d'acord als corresponents subespais centrals definits pels seus autovectors que, en el cas de sistemes en la forma canònica (2.2), depenen de les freqüències d'oscil·lació, tal i com expressen les equacions (2.22).

### Un exemple il·lustratiu

Considerem ara les famílies  $\mu_c$ -paramètriques de sistemes pentadimensionals en la forma (2.2), (2.5) i (2.6) que corresponen a la situació representada esquemàticament a la figura 2.8. Així, considerem sistemes per a un conjunt de paràmetres  $c_j$  i  $d_j$  i que els punts fixos dels quals es mouen en la recta representada quan variem  $\mu_c$ . La funció no lineal  $g(\Psi, \mu)$  és arbitrària però determina el nombre de punts fixos i llurs posicions sobre la recta en funció de  $\mu_c$ . El punt de coordenades  $(c_j)$  descriu l'única solució per a  $\mu_c = 0$  i se suposa dins la regió amb 0 autovalors inestables. Els coeficients  $d_j$  s'han escollit de tal manera que la recta jeu en un pla com el projectat a la figura 2.8 i talla les  $N - 1$  zones diferents de  $\{\pm i\omega\}$ . El creuament de  $\{0\}$  indica que qualsevol bifurcació amb un autovalor real zero involucrarà punts

---

<sup>6</sup>Per tant només en el cas unidimensional una bifurcació sella-node afecta globalment a tot l'espai de fases.

fixos amb 0 i 1 dimensions inestables. L'escala vertical de la banda dreta descriu el valor de  $p$  dels punts fixos d'acord amb l'equació (2.14). Els valors  $p = 1$  i  $p = 0$  corresponen a  $k_N = 0$  i  $k_N = c_N$ , respectivament, i com  $c_N > 0$ , el semieix  $k_N > 0$  ( $k_N < 0$ ) està associat a  $p < 1$  ( $p > 1$ ). Les fletxes amb les etiquetes  $p_{SN}$  i  $p_{Hq}$ , amb  $q = 1, 2, 3, 4$ , indiquen les possibles bifurcacions estacionàries per a les famílies descrites per la recta. Recordem el comportament d' $\omega$  sobre la superfície  $\{\pm i\omega\}$  i estarà clar que en aquest exemple les bifurcacions de Hopf estan ordenades per  $q$  d'acord a la freqüència  $\omega$ . Notem també que les bifurcacions tindran lloc en la parella sella-node de punts fixos alternativament ordenades per  $q$ . La figura 2.9 il·lustra com

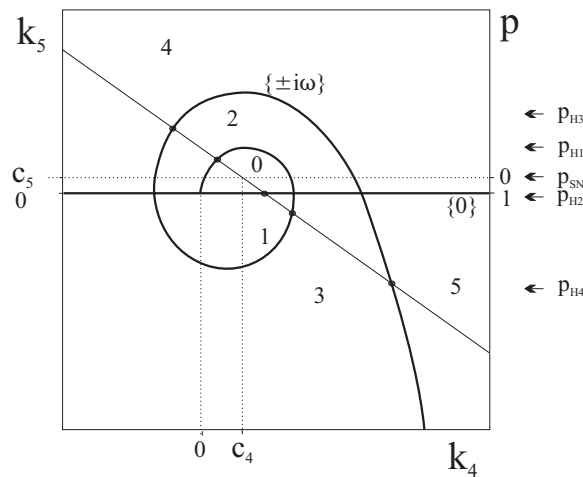


Figura 2.8: Exemple de com es pot caracteritzar l'estabilitat lineal de famílies  $\mu_c$ -paramètriques en la forma 2.2, 2.5 i 2.7 en l'espai de les  $k_j$  per a  $N = 5$ . El pla de secció conté la recta on es poden moure els punts fixos de la família definida per uns conjunt donat de coeficients  $c_j$  i  $d_j$ . La funció no lineal determinarà el nombre de punts fixos i llurs posicions sobre la línia en funció de  $\mu_c$ . Les interseccions de la línia amb les superfícies dels punts no hiperbòlics (punts negres) indiquen les possibles bifurcacions estacionàries. La magnitud  $p$  ofereix una bona connexió amb el diagrama de branques de la figura 2.9

es pot caracteritzar globalment l'estabilitat lineal del diagrama de bifurcacions de l'estat estacionari, amb l'ajuda de la figura 2.8. L'escala comuna de valors de  $p$  d'ambdues figures ens permet veure com apareixen i es mouen els punts fixos sobre la recta de la figura 2.8 quan variem  $\mu_c$ , i ens permet també localitzar els llindars de bifurcació sobre el diagrama de bifurcació. És fàcil imaginar-se situacions semblants per als diagrames de les figures 2.2b i 2.2c, on apareixen les bifurcacions transcritical o en forquilla en lloc de la bifurcació sella-node. La no linealitat ha de produir els punts

fixos coexistents amb una distribució adient de valors de  $p$  per tal que les diverses bifurcacions de Hopf tinguin lloc dins d'un cert rang de valors de  $\mu_c$ . Si assumim bifurcacions de Hopf supercrítiques, es crearà un cicle límit estable a  $H_1$  i sorgiran tres tipus diferents de cicles sella a  $H_2$ ,  $H_3$  i  $H_4$ . Sens dubte, es poden produir una gran diversitat de processos secundaris en aquestes òrbites periòdiques, però les evolucions temporals que s'observen típicament en aquestes condicions mostren formes d'ona característiques, basades en la combinació no lineal de quatre modes d'oscil·lació, i amb propietats qualitatives que semblen independents dels detalls particulars.

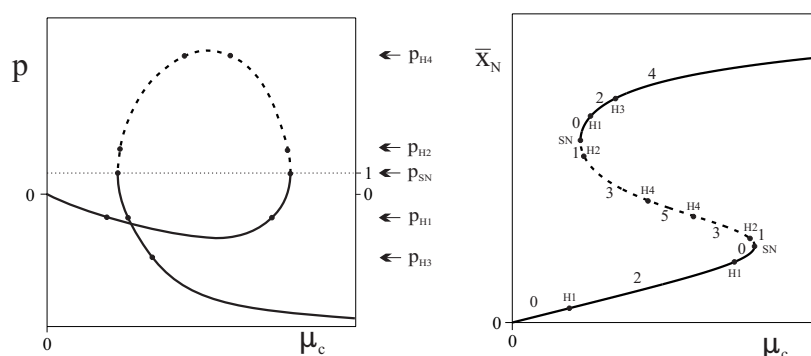


Figura 2.9: Estabilitat lineal del sistema pentadimensional descrit en l'espai de les  $k_j$  per la recta de la figura 2.8 i que té una certa funció no lineal. Les corbes representen el diagrama de branques i la corresponent distribució de  $p$  per a la funció no lineal donada. Els llinars  $p_{H_i}$ , derivats de la figura 2.8, ens permeten determinar les posicions de les bifurcacions de Hopf sobre el diagrama de branques. El nombre de dimensions inestables s'indica sobre les branques estacionàries

### Bifurcacions secundàries i mecanismes de mescla

L'anàlisi lineal d'estabilitat indica la presència de successives bifurcacions de Hopf sobre la parella de punts fixos i la no linealitat del sistema normalment garantirà la generació de successius cicles límit amb les corresponents orientacions i freqüències d'oscil·lació. Per altra banda, les simulacions numèriques indiquen que les evolucions temporals estan basades en la combinació no lineal d'aquests modes d'oscil·lació. Així doncs, tot i que la seqüència de processos que donen lloc a l'atractor pot ser bastant complexa i dependre de les circumstàncies, sembla que alguns mecanismes genèrics són responsables de la mescla de modes observada en la dinàmica temporal, com a mínim en el cas d'una sola funció no lineal d'una sola variable en la forma (2.7).



Coneixem tres formes de mescla de modes, dues de les quals són rellevants en aquest treball. La tercera es basa en bifurcacions globals que produeixen el contacte d'atractors i que comentarem a la subsecció 2.4.3. El mecanisme bàsic de mescla és simplement l'entortolligament de l'atractor al voltant de la varietat inestable d'un conjunt límit sella proper i en el decurs d'un possible procés homoclínic, és a dir, la varietat inestable de la sella es dirigeix cap a l'atractor, mentre que el creixent atractor s'aproxima (i atreu) la varietat estable de la sella. D'aquesta manera la dinàmica temporal de l'atractor pot incorporar de forma natural oscil·lacions a les freqüències de la sella sense que tingui lloc cap bifurcació<sup>7</sup>. Això succeeix, per exemple, en els atractors del tipus Shil'nikov que es formen quan un cicle límit estable s'aproxima a un focus o cicle límit sella exterior. De forma més general, considerem que aquest mecanisme pot funcionar amb la diversitat de conjunts sella sorgits d'ambdós punts fixos de la parella sella-node i que és responsable de les estructures de les evolucions temporals en el comportament d'inestabilitat completa.

Una combinació més profunda de modes d'oscil·lació pot tenir lloc mitjançant l'anomenada bifurcació de Naimark-Sacker, o bifurcació de Hopf secundària, en la qual sorgeix un torus-2 invariant a partir d'un cicle límit o bé, en general, un torus- $(q+1)$  sorgeix d'un torus- $q$ . En aquest cas el torus invariant manté veritables oscil·lacions a diverses freqüències i és possible una dinàmica complexa associada a les ressonàncies, així com problemes de trencament o destrucció dels torus. Cada punt fix de la parella sella-node pot generar una família de torus amb oscil·lacions multimode relacionades amb les freqüències de Hopf d'aquell punt i, en principi, el nombre d'aquestes bifurcacions determina la dimensió del torus de més alt ordre de la família. Per altra banda, un cicle límit donat pot generar successius torus-2 amb freqüències secundàries diferents, de la mateixa manera que un punt fix pot fer successius cicles límit; el mateix succeeix amb els torus d'ordres més elevats. Tot això significa que, per a una dimensió arbitrària  $N$ , la família de conjunts límit associada a l'origen per un punt fix donat pot ser molt gran i que alguns d'aquests conjunts límit poden coexistir.

En l'espai de paràmetres la bifurcació del tipus torus- $q$  sorgeix a partir de la degeneració  $\{\pm i\omega_1, \dots, \pm i\omega_q\}$  dels autovalors del punt fix. En particular, la bifurcació

---

<sup>7</sup>Quan l'ens sella compleix certes condicions [85] es poden produir seqüències complicades de bifurcacions, però la mescla de modes té lloc igualment

torus-2 sorgeix de  $\{\pm i\omega_1, \pm i\omega_2\}$  i s'han investigat en detall els corresponents desplegaments universals [47, 21]. S'ha demostrat que, en certs casos, aquesta degeneració tetradimensional pot produir una bifurcació addicional torus-3 amb la tercera freqüència sense relació directa amb les bifurcacions del punt fix. Igualment, la degeneració tridimensional  $\{0, \pm i\omega\}$  pot produir una bifurcació torus-2 on la segona freqüència també sembla independent dels punts fixos [21]. Aquests torus no es poden associar a un punt fix específic i una generalització cap a degeneracions d'autovalors d'ordre més elevat suggereix la possibilitat de torus de dimensió fins a  $N - 1$  (l'ordre més alt possible en  $N$  dimensions). No obstant això, quan s'observen numèricament [59, 90], aquests torus apareixen molt fràgils i en zones de l'espai de paràmetres extremadament reduïdes.

En conclusió, ens sembla raonable sospitar que el comportament d'instabilitat completa tindrà lloc en regions de l'espai de paràmetres amb una relativa abundància de bifurcacions torus i que els torus possiblement involucrats corresponguin a oscil·lacions a moltes freqüències basades en les bifurcacions de Hopf dels punts fixos. La família de cicles i torus del punt node conté com a mínim un atractor<sup>8</sup>, mentre que la resta d'aquesta família i la família del punt sella són selles. Variant un paràmetre de control l'atractor creix i es transforma mentre que els conjunts sella propers mouen d'acord llurs varietats estables i inestables, en un procés que es basa en una diversitat de possibles processos homoclínic i heteroclínic. La dinàmica temporal de l'atractor incorpora els moviments oscil·latoris de les diverses selles a un nivell molt sensible a la proximitat respecte a l'homoclínica. Per altra banda, poden també tenir lloc complexes i denses seqüències de bifurcacions que duen cap al caos homoclínic [85]. No obstant això les bifurcacions de duplicació de període i la sella-node de cicles no són capaces d'introduir freqüències característiques independents i, per tant, no són essencials per explicar el comportament d'instabilitat completa, com a mínim en primera aproximació. El que és més rellevant és la possibilitat de la destrucció de l'atractor després d'una connexió homoclínica.

### **Condicions per a la instabilitat completa i conjunt bàsic de punts fixos**

Deixant de banda la possibilitat de la destrucció de l'atractor en una bifurcació homoclínica, les situacions d'instabilitat completa es poden identificar, en principi,

<sup>8</sup>Sempre i quan el sistema posseeixi un punt fix sense cap dimensió inestable en algun moment.

mitjançant l'anàlisi lineal d'estabilitat de la solució estacionària. Això no obstant, no és fàcil, en general, d'establir les condicions corresponents per a un sistema donat, fet que probablement explica perquè aquest comportament no s'havia observat encara. L'anàlisi sembla realitzable per a sistemes en la forma (2.2), (2.5) i (2.7), els estats estacionaris dels quals estan localitzats en l'espai de les  $k_j$  sobre la recta definida per (2.15). Les condicions necessàries per a l'estabilitat completa són dues, una que implica la posició i orientació de la recta per tal que interseccioni la superfície  $\{\pm i\omega\}$  de forma adient i l'altra que involucra les capacitats de la funció no lineal per produir el diagrama de bifurcació estacionari. De les equacions (2.18) i (2.19) es pot veure que el nombre màxim d'interseccions entre la recta i  $\{\pm i\omega\}$  és igual a  $N - 1$ . El comportament d'instabilitat completa es pot aconseguir si aquestes interseccions tenen lloc amb  $N - 1$  zones qualitativament diferents de  $\{\pm i\omega\}$ , en cas contari dues de les interseccions correspondran a la mateixa bifurcació de Hopf però en direccions contràries. Per altra banda, la funció no lineal ha de produir punts fixos que creuin efectivament la superfície  $\{\pm i\omega\}$  quan variem  $\mu_c$ , és a dir, que cal un diagrama de bifurcacions estacionàries amb una distribució de valors de  $p$  que abasti ambdós costats de  $p = 1$  i que cobreixi els valors  $p_H$  de les bifurcacions de Hopf.

Volem remarcar per què considerem precisament una parella sella-node de punts fixos. Òbviament hi ha sistemes no lineals que posseeixen només un punt fix i la instabilitat completa en aquest cas correspon a  $N/2$  bifurcacions de Hopf sobre aquest punt si  $N$  és parell, o a  $(N - 1)/2$  si  $N$  és senar. No obstant això, la coexistència d'estats estacionaris és una de les característiques més significatives de la dinàmica no lineal i, per tant, és convenient considerar la possibilitat d'un enfocament més general. Quin conjunt bàsic de punts fixos cal considerar depèn en essència de l'estructura direccional de la part no lineal del camp vectorial, és a dir, del nombre de components linealment independents de direcció uniforme en les quals el camp vectorial no lineal es pugui descomposar.

Per a camps vectorials no lineals unidireccionals els punts fixos apareixen en l'espai de fases alineats en una recta i en una seqüència alternada de tipus sella-node. Les separatrius de les selles determinen les conques d'atracció dels nodes i els fenòmens dinàmics bàsics estaran associats a un atractor que sorgeix d'un dels nodes i creix en presència de la sella més propera. El flux en aquesta regió específica de l'espai de fases podrà incorporar moviments oscil·latoris a través d'una diversitat de bifurcacions de

Hopf que tindran lloc a ambdós punts. Aquests moviments, a més, es podran barrejar entre ells gràcies als mecanismes no lineals. Les situacions d'instabilitat completa s'aconseguiran quan tots dos punts hagin patit (o estiguin a punt de patir) el màxim nombre de instabilitats de Hopf que poden suportar en  $N$  dimensions (això és,  $N - 1$ ).

És clar que hi ha mecanismes per produir atractors associats a un major nombre de punts fixos. Per una banda és possible que l'atractor creixi sota la influència de dues selles veïnes situades a costats oposats. Per altra banda, es pot produir la unió de dos (o més) atractors sorgits als dos cantons d'una separatriu de la sella, mitjançant successives bifurcacions homoclíniques que destrueixen els atractors previs i en creen de nous de tipus híbrid. Aquest tipus d'unió és ben conegut per a sistemes amb bifurcacions en forquilla simètriques, en els quals les homoclíniques tenen lloc simultàniament als dos costats de la sella [62], però pot succeir també en situacions més generals, com les bifurcacions de contacte<sup>9</sup> [41]. Per a sistemes els punts fixos dels quals estan situats sobre una recta en l'espai de les  $k_j$ , els diversos punts node ( $k_N > 0$ ) i sella ( $k_N < 0$ ) generaran les mateixes freqüències d'oscil·lació i les evolucions temporals estaran sempre basades en  $N - 1$  modes d'oscil·lació, independentment del nombre de punts fixos. En general, les freqüències d'oscil·lació generades a partir de nodes o selles diferents poden ser diferents i les evolucions temporals podran incorporar llavors modes addicionals a mesura que s'incrementi el nombre de punts fixos.

La situació esdevé més complexa per a camps vectorials amb parts no lineals multidireccionals com els definits per la superposició d' $n$  camps vectorials no lineals basats en funcions escalars i direccions linealment independents. En aquest cas els punts fixos es poden escampar en l'espai de fases distribuïts en un subespai de dimensió  $n$  i relacionats entre sí mitjançant  $n$  bifurcacions sella-node orientades de diferent forma. El conjunt bàsic de punts fixos pot incloure fins a  $2^n$  punts, un dels quals és un node estable mentre que la resta són selles que defineixen una de les cantonades de la conca d'atracció del node. Aquest conjunt de punts pot suportar una gran quantitat de bifurcacions de Hopf però no és evident fins a quin punt els corresponents moviments oscil·latoris es poden manifestar en la dinàmica temporal. Aquest és el cas dels sistemes acoblats difusivament, als quals dedicarem el capítol 3.

---

<sup>9</sup>També conegudes amb el seu nom anglès, *gluing bifurcation*

### Diagrama de bifurcacions en l'espai de paràmetres

Per tal de copsar els avantatges de l'espai de les  $k_j$  respecte de l'espai de paràmetres, per desenvolupar-hi l'anàlisi lineal d'estabilitat dels estats estacionaris, n'hi ha prou de considerar la família de sistemes en la forma (2.2), (2.5) i (2.7) corresponent a una funció no lineal donada  $g(\Psi)$  i a un conjunt donat de coeficients  $c_j$ , i llavors tractar d'imaginar com podria ser el diagrama de bifurcacions estacionàries en l'espai de paràmetres  $N$ -dimensional definit per  $d_1/d_N, \dots, d_{N-1}/d_N$ , i  $\mu_c$ . Assumint uns pocs punts fixos coexistents que pateixen successives bifurcacions de Hopf, és clar que s'obindrà un conjunt extremadament complex de bifurcacions. El que és més significatiu, però, és el fet que el diagrama serà particular per a la funció no lineal i el conjunt de coeficients  $c_j$ .

Òbviament, l'avantatge de l'espai de paràmetres és que es pot utilitzar per representar qualsevol tipus de bifurcació i, com la nostra anàlisi en l'espai de les  $k_j$  està limitada a les bifurcacions estacionàries, potser val la pena anomenar les estructures de bifurcació addicionals que poden aparèixer en el conjunt de bifurcacions d'una família de sistemes dinàmics.

Les bifurcacions estan interrelacionades en el sentit que unes sorgeixen de degeneracions d'unes altres. Les propietats genèriques de les estructures de bifurcació que sorgeixen de bifurcacions degenerades específiques de punts fixos o cicles límit han estat obtingudes i estudiades mitjançant la tècnica dels desplegaments universals o deformacions versals [47, 21, 18]. Un resultat especialment destacable és l'existència segura d'una bifurcació global en els desplegaments de certes degeneracions dels autovalors dels punts fixos, com la  $\{0, 0\}$  i la  $\{0, \pm i\omega\}$ , i que probablement es poden extrapolar a degeneracions d'ordres superiors. La localització de les bifurcacions homoclíniques normalment és difícil, però cal remarcar que també s'hi poden produir degeneracions i, de fet, s'han investigat ja una sèrie de casos [52]. Les degeneracions homoclíniques poden ser l'origen d'un gran nombre de bifurcacions locals i globals, i probablement estan relacionades amb les denses seqüències de bifurcacions d'òrbites periòdiques que podem trobar en les rutes cap al caos homoclínic. Per altra banda, la bifurcació de Naimark-Sacker que sorgeix de la degeneració  $\{\pm i\omega_1, \pm i\omega_2\}$  conté les anomenades ressonàncies, de les quals també sorgeixen una diversitat de bifurcacions locals i globals [47]. Igualment, és probable que situacions similars tinguin lloc amb les bifurcacions torus- $q$  que sorgeixen de degeneracions d'ordre més elevat.