Universitat Autònoma de Barcelona
Departament de Física

CAMINS CAP A LA COMPLEXITAT EN SISTEMES DINÀMICS DE BAIXA DIMENSIÓ

Marc Figueras Atienza

Memòria presentada per optar al
títol de Doctor en Ciències Físiques

Bellaterra, 26 de novembre de 2001

Agraïments

Abans de començar aquest treball voldria complir amb el tòpic i expressar el meu agraïment a tots aquells que, directament o indirectament, han fet possible que això arribés al final...

En primer lloc, a tots els meus companys del grup de sistemes dinàmics: en Gaspar, per ser el meu director i guiar-me i corregir-me contínuament; en Ramon, pel mateix i, a més, per compartir despatx i no deixar que m'adormís mai; en Francesc, per estar sempre disposat a donar un cop de mà en qualsevol cosa, especialment al laboratori; i en Mohssine, en Jordi (des de Girona), per moltes estones i, sobretot, al Josep, sense el qual bona part del capítol 2 d'aquesta tesi, simplement, no existiria. I per la mateixa raó als companys d'òptica quàntica: Jordi i Verònica.

Al Toni, per tantes inacabables discussions sobre mil i un temes, des de la teoria BCS a la reforma agrària dels Gracs.

A tots els altres companys de Física, malgrat que amb alguns ens veiem massa poc, Eva, Octavi, Albert, Victòria i Àlex.

A la colla del laboratori de Mutagènesi i els elements relacionats, Glòria i Santi, Teresa i Cristóbal, companys d'excursions, d'"ascensions" al Cotopaxi, de dinars al PAS i de xorrades diverses.

A la pera Maria Lluïsa i a tots els seus fillols, aquí o a la diàspora: Eulàlia, Climent & Octavi, Marià i Laia, Fausto i Anna, Glòria, Rafael & Elián, Carles i Montse, Anna Maria i Rupak, B$\alpha\sigma\sigma$o i Òscar, Bea i Ferran, Laura i Jacob, Clelia i Alfonso, *et caetera*, tots aquells que hi orbiten temporalment.

Als nous companys de Lió, a qui ben aviat donaré la tabarra.

A Javier, Mónica, Carlos y Lorena (ah! y a Tatiana, prima!) amb don Luís i doña Sara inclosos. I en general a l'Equador, "crisol de razas y encrucijada de caminos" (tela!).

Als meus pares i a la meva família, perquè són ells i punt.

I finalment, a la Sara, per estar al meu costat, per tot el que ha aguantat... i seguirà aguantant (espero!), per interessar-se per coses tan soporíferes com el caos i, què collons, perquè me l'estimo.

Índex

Índex de figures

CAPÍTOL 1

Possibles camins cap a la complexitat

1.1 Introducció i motivació del treball

Dins del camp dels sistemes dinàmics un dels problemes més importants i que encara no ha rebut una resposta satisfactòria és el de l'emergència de comportaments complexos observats en molts fenòmens naturals. Els fenòmens oscil·latoris són realment abundants a la natura i sovint mostren la coexistència de processos a diverses escales temporals, les quals estan interrelacionades de manera que l'evolució temporal pot arribar a ser molt complexa i, certament, molts fenòmens qualificats de complexos semblen implicar un gran nombre de freqüències barrejades. Entre aquests fenòmens en destaquen diversos relacionats amb processos fisiològics; un d'ells, molt estudiat a nivell experimental malgrat ser bastant concret, és el del sistema nerviós estomatogàstric de diversos mol·luscs [1]; a nivell més general podem citar els estudis sobre la dinàmica del cervell [2, 3]. També cal destacar les evolucions temporals de diversos indicadors econòmics que sovint mostren períodes més o menys repetitius a diferents escales temporals l'origen de les quals no és clar si està relacionat amb influències externes o és provocat per la pròpia dinàmica interna del sistema [4, 6, 7, 8]. Les oscil·lacions en el clima terrestre mostren també coexistència de freqüències, moltes de les quals semblen estar determinades pels diversos paràmetres orbitals terrestres, però diversos estudis suggereixen que per explicar-les correctament és necessari suposar un origen intern a través de cicles de realimentació [9, 10]. Finalment, entre altres exemples, també s'observen evolucions d'aquest tipus en les variacions del flux d'energia d'estrelles variables d'oscil·lació ràpida (tipus roAp) [11].

Quan fa uns anys es va començar a estudiar allò que s'anomena "teoria del caos" i es van observar comportaments caòtics en sistemes simples, va semblar que aquest era un camí per a explicar el fenomen de la complexitat basant-se en la teoria de sistemes dinàmics dissipatius. Els sistemes dinàmics conservatius tenien ja una llarga història, bàsicament a nivell matemàtic, iniciada amb els treballs pioners de Poincaré [12] que ja va observar l'existència de caos en el problema de tres cossos i continuada amb tots els posteriors estudis, entre els quals cal destacar els de Birkhoff [13], Kolmogorov [14], Arnold [15] o Moser [16]. En sistemes dinàmics dissipatius, en canvi, la presència de caos no es va fer evident fins al ja clàssic treball de Lorenz [17].

No obstant això, de mica en mica es va veure que l'aparició d'una dinàmica caòtica no explicava els comportaments complexos ni, en general, eren fenòmens necessàriament lligats. En definitiva, doncs, els models que podien explicar el caos de pocs graus de llibertat no aconseguien explicar satisfactòriament molts fenòmens complexos, normalment d'alta dimensió i no necessàriament caòtics. Per això van anar apareixent altres "teories" més o menys *ad hoc*: criticitat autoorganitzada, xarxes neuronals, etc. que, algunes amb força èxit, podien reproduir certs aspectes de la complexitat. Malgrat tot molts fenòmens complexos segueixen sense explicació satisfactòria; citem, per posar només dos exemples clàssics el fenomen de la turbulència i la dinàmica del cervell, ja anomenada.

Convé en aquest punt fer alguns aclariments sobre els conceptes de "caos" i de "complexitat". Matemàticament un sistema dinàmic de dimensió n el definim com l'equació

$$\dot{x}(t) = f(x, t; \mu) \tag{1.1}$$

on $f : U \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ és un camp vectorial definit a la regió U, i on $x \in U \subset \mathbb{R}^n$, essent $\mathbb{R}^n$ l'espai de fases, i $\mu \in V \subset \mathbb{R}^p$, essent $\mathbb{R}^p$ l'espai de paràmetres, amb p la seva dimensió. S'entén per solució del sistema una funció $\phi_x : I \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}^n$ definida a l'interval I que verifica l'equació (1.1) i que té x per condició inicial. El conjunt de totes les solucions ϕ_x s'anomena flux ϕ del sistema dinàmic.

Per sistema dinàmic caòtic entenem, seguint Wiggins [18], qualsevol sistema (1.1) el flux ϕ generat pel qual compleixi les següents condicions:

1. té sensibilitat a les condicions inicials en un cert conjunt compacte Λ invariant sota ϕ,
2. és topològicament transitiu en Λ,
3. les òrbites periòdiques de $\phi(x, t)$ són denses en Λ.

En realitat, però, es pot demostrar que les condicions 2 i 3 impliquen la 1 [19]. La condició 1, però, és especialment significativa i és la raó de la manca de predictibilitat a nivell pràctic que presenten els sistemes caòtics. Diem que el sistema dinàmic és *sensible a les condicions inicials* quan, donats x, $y \in U$ tals que $|x - y| < \delta$, llavors $|f(x,t) - f(y,t)| > \epsilon$ per a un cert t; en altres paraules, dos punts qualssevol arbitràriament propers divergiran sota l'acció de (1.1). L'objecte geomètric en l'espai de fases on són atretes les solucions d'un estat caòtic s'anomena *atractor estrany* i es caracteritza per tenir dimensió fractal. Cal tenir en compte, però, que matemàticament el problema de determinar l'existència d'un atractor estrany per a un sistema donat és especialment delicat i en realitat només s'ha demostrat per a molt pocs [18, 20]. D'aquesta manera la majoria de sistemes es classifiquen com a caòtics basant-se més en resultats numèrics que en resultats analítics.

És important recordar que un sistema dinàmic pot ser caòtic ja amb $n = 3$, és a dir, amb només tres graus de llibertat. El descobriment de la dinàmica caòtica ha estat sorprenent i ha canviat les idees establertes sobre el comportament i la modelització dels sistemes. La sensibilitat a les condicions inicials i les evolucions temporals irregulars que presenten els sistemes caòtics fou el que va dur a considerar el caos de pocs graus de llibertat com un possible camí per explicar l'aparició de comportaments complexos com els que hem citat més amunt. Aquests comportaments complexos, en canvi, semblen implicar una dimensionalitat més alta i una coexistència de diverses escales temporals característiques. Un sistema dissipatiu que evoluciona en un estat caòtic descriu un moviment recurrent basat en unes poques trajectòries bàsiques que, tot i aparèixer lleugerament diferents cada vegada, segueixen una seqüència definida sense cap ordre regular aparent i extremadament sensible a canvis de les variables i dels paràmetres [21, 18]. Malgrat tot, les trajectòries bàsiques són d'una estructura força simple i involucren un nombre molt petit de freqüències característiques. Per exemple, el sistema de Rössler presenta caos, però normalment està basat en una sola freqüència característica; té un període bàsic que es repeteix amb variacions en l'amplitud. És clarament irregular, però el seu grau de complexitat és baix. El problema és que, a diferència del concepte de "caos", no hi ha una definició universalment acceptada de "complexitat"; a vegades fins i tot es diu que un sistema complex és aquell per al qual la ciència no té una explicació satisfactòria. S'han proposat diverses definicions, moltes de les quals tenen en comú la idea d'un estat que no és totalment ordenat ni completament desordenat i que és lluny de l'equilibri [24, 25, 26, 27]. En la discussió que segueix podrem donar algunes característiques típiques dels comportaments complexos.

1.2 Com ens aproximem a la complexitat

Com hem dit, si bé la teoria de sistemes dinàmics pot arribar a explicar alguns fenòmens associats a la complexitat, encara està lluny de poder reproduir moltes de les característiques bàsiques que s'observen repetidament en els comportaments complexos; raó per la qual han anat sorgint altres maneres de modelitzar aquests comportaments.

Un fet observat innegable és que molts sistemes de la natura tendeixen cap a l'autoorganització i presenten comportaments complexos aperiòdics molt lleugerament caòtics: "estan a la frontera entre l'ordre i el caos" repetint una frase que s'ha fet molt típica. Ara bé el que sembla realment destacable és la capacitat de certs sistemes de produir complexitat gràcies a la barreja de freqüències i aquesta característica és la més adient per tal que els sistemes dinàmics hi puguin dir alguna cosa, atès que són uns excel·lents productors d'oscil·lacions a través de bifurcacions de Hopf. Altres aspectes de la complexitat, com l'autoorganització, semblen més allunyats i menys evidents de modelitzar amb la teoria dels sistemes dinàmics. Un altre enfocament habitual a l'hora d'intentar reproduir el fenomen de l'autoorganització és a partir de models estadístics. Com diu Prigogine,

> Se han destacado dos disciplinas que, en nuestra opinión, han modi-

> ficado la visión de lo complejo de forma muy dramática. La primera de ellas es la física de los estados de no equilibrio. El resultado inesperado es aquí el descubrimiento de nuevas propiedades fundamentales de la materia que se encuentra muy alejada de las condiciones de equilibrio. La segunda disciplina es la moderna teoria de los sistemas dinámicos. Aquí el descubrimiento central es el papel dominante de las inestabilidades [24].

Els sistemes dinàmics són continus en l'espai i el temps, però hi ha una aproximació consistent en discretitzar-ho tot: espai, temps i estats possibles. Són els autòmats cel·lulars [22]. Cada punt de l'espai, o cada unitat del sistema interacciona amb els seus veïns seguint una llei determinada. Malgrat que són poc tractables analíticament, llur implementació numèrica és molt senzilla i per això han tingut considerable èxit a l'hora de plantejar models de fenòmens reals (de fet la seva història comença amb l'aparició dels primers ordinadors electrònics als anys 1940 [23]). El comportament que mostren els autòmats és en la majoria de casos comparable al dels sistemes dinàmics, però una classe particular (l'anomenada *Classe IV*) s'aparta una mica i pot donar comportaments semblants als dels sistemes al voltant del que s'anomena *punts crítics.*

A la natura hi ha molts fenòmens que es poden donar passant per aquests punts crítics. Un exemple ja clàssic és el de les transicions de fase de segon ordre. Quan una transició d'aquest tipus té lloc passant pel punt crític el sistema adquireix unes propietats força curioses, la més significativa de les quals és l'aparició de lleis d'escala, és a dir, la independència del sistema respecte a les escales temporals i/o espacials. En altres paraules, el sistema presenta fenòmens espacials i temporals que es repeteixen a moltes escales diferents. Matemàticament això es tradueix en lleis potencials. En molts casos, per trobar aquest comportament cal variar externament algun paràmetre del sistema, com per exemple en la transició líquid–gas de l'aigua. Molts altres sistemes, en canvi, tendeixen naturalment a trobar-se al voltant d'aquest punt crític. Són el que s'anomenen *sistemes crítics autoorganitzats.* A partir d'això s'ha format una teoria basada en aquest fet [29]. El quadre bàsic que es proposa és que el comportament complex a la natura reflecteix la tendència natural d'aquests sistemes per evolucionar cap a l'estat crític i en el qual petites pertorbacions poden donar lloc a esdeveniments (anomenats *allaus*) de qualsevol mida. Aquest fet porta de manera natural a les lleis potencials i a la invariància d'escala. El primer model de criticitat autoorganitzada (que no és més que un autòmat cel·lular) fou el del "pilonet de sorra" [29]; però malgrat tot, els experiments no han deixat clar si un pilonet de sorra real compleix les propietats autoorganitzatives del model: alguns resultats porten a lleis potencials, altres no (vegeu [32] per a una extensa revisió). Igualment, molts sistemes naturals, com ara els terratrèmols, les allaus, les extincions o fins i tot la turbulència han estat modelats seguint aquesta idea [30, 31]. Els resultats són interessants però no concloents; el que sí és cert és que en aquests casos hi ha una clara distribució potencial que relaciona la freqüència d'un esdeveniment de grandària determinada, N, amb aquesta grandària, A, de tal manera que $N \sim A^{-\alpha}$, essent $\alpha \approx 1$, com a mínim en un cert interval d'escales.

És en aquest ambient on s'ha forjat el concepte avui ja clàssic de "límit del caos", que dóna a entendre que aquests sistemes es troben en un estat a mig camí entre l'ordre total i el caos més irregular. Això, que pot semblar una frase gairebé publicitària, és prou significatiu, ja que duu naturalment a les propietats d'invariància abans descrites i a fer que aquests sistemes siguin els processadors ideals d'informació equilibrant la seguretat i la redundància amb la variació. És aquest un concepte que es relaciona de manera molt natural amb l'evolució dels éssers vius, que mantenen un delicat equilibri entre les mutacions necessàries per a la variabilitat de l'espècie i la redundància per a la transmissió segura de la informació. Per això molts models d'aquest tipus intenten simular l'evolució biològica, com les anomenades *xarxes de Kauffman*, ideades en el seu origen precisament com a model de sistemes genètics [33].

Una qüestió relacionada amb l'anterior és la presència de fractalitat. Les lleis potencials, la invariància d'escala i l'autosimilaritat impliquen un estructura fractal, ja sigui a nivell espacial o a nivell temporal. Darrerament s'han publicat molts treballs en què es descobreix fractalitat en un determinat fenomen, però el cert és que la majoria d'estudis només poden observar aquesta fractalitat en uns dos ordres de magnitud (espacials o temporals), cosa que no aporta cap evidència definitiva [35]. El màxim que es pot dir és que existeix fractalitat en un cert interval d'escales. Els models, per la seva banda assumeixen fractalitat a totes les escales de magnitud. Una vegada més, doncs, la qüestió no és clara.

El paper dels Sistemes Dinàmics

Com veiem, doncs, hi ha diverses formes d'aproximar-se als comportaments complexos. Com encaixen en aquest marc els sistemes dinàmics i què hi poden aportar? En pimer lloc els sistemes dinàmics estan molt estudiats a nivell estrictament matemàtic i es disposa de nombrosos estudis que estableixen amb seguretat els tipus de comportaments possibles a diverses dimensions i a través de quines possibles seqüències de bifurcacions s'hi arriba. Els sistemes dinàmics han anat progressant a poc a poc, afegint cada vegada més dimensionalitat, de manera que es coneixen força bé els diferents tipus de bifurcacions i comportaments possibles a baixes dimensions. Així, una aproximació a la complexitat a través dels sistemes dinàmics donaria una fonamentació matemàtica molt potent. Entre altres coses, es podria seguir tota la seqüència de bifurcacions que duen cap a la complexitat, aclarint com sorgeixen aquest tipus de comportaments.

Per altra banda els sistemes dinàmics són excel·lents productors d'oscil·lacions a través de bifurcacions de Hopf i sembla, doncs, raonable poder introduir un grau de complexitat més elevat que el del caos de baixa dimensió augmentant el nombre de graus de llibertat i el d'oscil·lacions a diverses escales temporals. Per tot això és important saber amb claredat si la teoria dels sistemes dinàmics és capaç o no de descriure comportaments complexos. La qüestió és doncs saber com un sistema dinàmic no lineal pot produir diferents freqüències i com barrejar les oscil·lacions resultants per donar lloc a evolucions complexes. Fixem-nos, finalment, que parlem sempre de *comportaments* complexos i no de *sistemes* complexos. Cal tenir present que un sistema pot ser molt complex però comportar-se de forma molt senzilla i, òbviament, no és això el què ens interessa, sinó més aviat el cas contrari: sistemes relativament simples que exhibeixen comportaments molt complexos.

En aquest sentit cal que parlem d'un sistema amb comportament complex per excel·lència, i ja clàssic: la turbulència. Durant anys els físics han intentat saber quin procés segueix un fluid en passar del règim laminar al turbulent, però les equacions que descriuen el fluid (les equacions de Navier–Stokes) es fan intractables abans de poder arribar a cap resultat analític i els experiments no aconsegueixen aclarir la qüestió, donat que el procés d'aparició de turbulència sembla ser massa "ràpid" al variar el paràmetre de control, és a dir, no permet observar amb claredat quines bifurcacions (si és que té sentit aquest concepte aplicat a la turbulència) es produeixen.

Per això els sistemes dinàmics per als quals, com hem dit, aquest aspecte és un dels seus punts forts podrien donar bons resultats. Fins ara, però, ningú ha aconseguit obtenir una bona descripció de la turbulència amb els sistemes dinàmics i segueixen sent només una de les diverses maneres d'atacar el problema. La realitat és que avui en dia no existeix cap model totalment satisfactori de la turbulència i del seu origen.

Ja Landau [36] va intentar explicar l'origen de la turbulència a partir d'un mecanisme d'inestabilitats que té una gran relació amb la teoria dels sistemes dinàmics dissipatius. En essència considerava n successives inestabilitats, que actualment s'acostumen a associar a bifurcacions de Hopf, iniciades en un punt estacionari inicial (el règim laminar) que donarien lloc a un torus–n i a una òrbita quasiperiòdica amb n freqüències. Aquesta òrbita tindria n graus de llibertat ja que segons Landau cada bifurcació incorpora un element d'arbitrarietat: la fase relativa entre aquesta nova oscil·lació i les anteriors[1]. Avui en dia sabem que és un camí que cal descartar com a via cap al caos: el teorema de Ruelle–Takens–Newhouse [44, 45] ens assegura que un flux triplement periòdic damunt d'un torus no és estable i dóna lloc a un atractor estrany, però això no és raó per descartar el fet que una successió de bifurcacions de Hopf ens pugui incorporar successives freqüències al sistema (vegeu la secció 2.1), encara que no es trobi en un torus–n, sinó en un cert atractor, sigui caòtic o no, en l'espai de fases. Aquesta successió de freqüències, combinades per mecanismes no lineals de mescla poden donar pistes de com arribar a comportaments més complexos a partir de sistemes dinàmics de baixa dimensió. Aquí és on comença el nostre treball.

1.3 Objectius del treball

L'objectiu del present treball és investigar i caracteritzar amb un cert detall dos aspectes del comportament dels sistemes dinàmics que hem desenvolupat, numèricament i experimental, amb una determinada família de sistemes no lineals però que es poden considerar força generals. Aquests aspectes, adequadament combinats podrien ser l'origen de comportaments considerablement complexos.

En concret, nosaltres pretenem estudiar com aquests dos possibles aspectes dels

[1] Això, però, és dubtós ja que una òrbita quasiperiòdica en realitat és única i no depèn de les fases inicials.

comportaments complexos es poden presentar en sistemes dinàmics de baixa dimensió. El primer aspecte es relaciona amb el que nosaltres anomenem *comportament d'inestabilitat completa*. Considerem sistemes amb una parella sella-node de punts fixos que fan totes les possibles bifurcacions de Hopf que poden fer en N dimensions. Això aporta $N-1$ freqüències característiques d'oscil·lació, que són convenientment barrejades pels mecanismes no lineals del sistema. Per estudiar aquest comportament ens centrem en els sistemes més simples que el presentin, de manera que altres possibles fonts de comportament complex quedin reduïdes al mínim.

L'altre aspecte es basa en la possibilitat dels sistemes dinàmics de tenir molts punts fixos, qualitativament diferents. En altres paraules, el que volem es crear el màxim nombre de punts fixos possibles i, en canvi, només algunes bifurcacions de Hopf, les mínimes possibles, que generin els corresponents cicles límit. Seguint amb la idea de simplificar al màxim les característiques bàsiques de cada via, en aquest cas una configuració possible seria la de sistemes no lineals de baixa dimensió acoblats difusivament, cada un dels quals incorpora una o més funcions no lineals al sistema. És a dir, en aquest segon cas el que fem és obtenir el màxim nombre de punts fixos amb el mínim nombre de bifurcacions de Hopf, mentre que en el primer cas tenim la situació inversa: obtenir el màxim nombre de bifurcacions de Hopf amb el mínim nombre de punts fixos. La idea que volem destacar és que la combinació dels dos aspectes que acabem de comentar pot ser un camí possible per obtenir comportaments amb un alt grau de complexitat. Aquests dos aspectes són els que estudiarem, progressivament i per separat, per tal d'analitzar com sorgeixen i com es relacionen.

La següent qüestió és, doncs, com generar en cada cas les diferents bifurcacions (Hopf en un cas, sella-node en l'altre). Això es pot aconseguir "manipulant" la o les funcions no lineals del sistema. Si incrementem el nombre de funcions no lineals linealment independents (concepte que precisarem més endavant) aconseguirem obtenir una gran quantitat de bifurcacions estacionàries, mentre que si incrementem el nombre de variables involucrades en una sola funció no lineal podem trobar-nos amb una sola parella de punts fixos que pateixen successives bifurcacions de Hopf, ortogonals entre sí en l'espai de fases. En el primer cas les bifurcacions estacionàries hauran creat un gran nombre de punts fixos distribuits en un subespai d'alta dimensió de l'espai de fases, i subsegüents inestabilitats d'aquests punts, combinades adequadament, poden donar lloc als comportaments complexos. En el segon cas les diverses freqüències d'oscil·lació es podran combinar entre sí i podrem control·lar bastant bé cada una per separat, ja que només tindrem una parella de punts fixos, de la qual han sorgit les oscil·lacions.

Experimentalment, utilitzem un cert tipus de dispositius termoòptics la dimensió dinàmica dels quals és realment fàcil de controlar, de manera que podem disposar a voluntat de sistemes de dimensió 1, 2, 3, etc. Aquests dispositius són anomenats BOITAL (acrònim de Biestabilitat Òptica Induïda Tèrmicament amb Absorció Localitzada) i es basen en cavitats interferomètriques en les quals un dels miralls és parcialment absorbent a la llum incident i l'espaiador és fet de materials termoòptics transparents [37]. Més concretament, utilitzem cavitats amb espaiadors multicapa de materials amb coeficients termoòptics alternativament oposats. En aquest cas la dinàmica es pot descriure tal i com segueix: la llum incident escalfa el mirall d'entrada i la calor es propaga a través del dispositiu provocant canvis en el camí òptic i per tant en la fase interferomètrica de la llum. Això, al seu torn afecta l'estat interferencial del dispositiu, i per tant l'absorció del mirall d'entrada, a través de la funció interferomètrica. Aquest és l'anell de realimentació. La posició relativa de les diverses capes respecte a la font de calor introdueix retards temporals capaços de generar autooscil·lacions. Un fet molt destacable d'aquests sistemes és que la seva dimensió dinàmica efectiva és igual al nombre de capes de materials dins l'espaiador, fet del qual prové la facilitat per modificar la dimensió del sistema.

Els dos aspectes que hem comentat anteriorment es tradueixen experimentalment de la següent forma: per una banda, les múltiples funcions no lineals (molts punts fixos, poques bifurcacions de Hopf) es poden aconseguir acoblant difusivament diversos sistemes BOITAL de baixa dimensió; per altra banda, l'increment del nombre de variables en una sola funció no lineal (pocs punts fixos, moltes bifurcacions de Hopf) s'aconsegueix augmentant la dimensió dinàmica del dispositiu BOITAL, és a dir, augmentant el nombre de capes en l'espaiador.

1.4 Organització del present treball

El nucli del present treball són els capítols 2 i 3, que corresponen a les dues possibles vies cap a comportaments complexos que hem comentat. Més concretament, el treball s'organitza de la següent manera:

El capítol 2 descriu el comportament d'inestabilitat completa. En aquest capítol considerem sistemes N-dimensionals capaços d'explotar totes les seves possibilitats d'inestabilitat dels seus punts fixos, és a dir, de fer el màxim nombre possible de bifurcacions de Hopf. La combinació dels diferents modes d'oscil·lació que sorgeixen produeix evolucions força complexes, independentment del grau de caoticitat. L'anàlisi la desenvolupem utilitzant sistemes dinàmics amb una sola funció no lineal d'una sola variable que és una combinació lineal de les N variables dinàmiques. Experimentalment utilitzarem sistemes BOITAL d'N capes i veurem com també són capaços d'exhibir el comportament de màxima inestabilitat. En concret arribarem, numèricament a dimensió 10, mentre que a nivell experimental només arribarem a dimensió 6, per raons que explicarem en el seu moment.

El capítol 3 descriu l'acoblament de sistemes amb l'objectiu d'augmentar el nombre de solucions estacionàries. En aquest cas considerem n sistemes N dimensionals acoblats difusivament, capaços de produir xarxes relativament complicades de punts fixos a través de bifurcacions sella–node. En aquest cas la complexitat no apareixerà a causa de molts modes d'oscil·lació, sinó per l'estructura més o menys complicada de punts fixos en l'espai de fases. Per això fem servir sistemes amb diverses funcions no lineals que són linealment independents entre sí. Cada un d'ells és un sistema com els usats al capítol 2, però amb una N relativament petita (1, 2 o 3). A nivell experimental utilitzarem diversos sistemes BOITAL amb un espaiador format per poques capes i acoblats difusivament mitjançant la propagació de calor d'un a l'altre. En concret investigarem sistemes formats per dos dispositius unidimensionals o bidimensionals que ens oferiran una gran quantitat de fenomenologia per estudiar. En el cas bidimensional ens centrarem especialment en dos fenòmens que han rebut darrerament una considerable atenció: la mort d'amplitud induïda per l'acoblament [42] i la fenomenologia relacionada amb el comportament relatiu de la fase dels oscil·ladors [43].

El capítol 4 , finalment, està dedicat a presentar les conclusions més rellevants del treball i a proposar possibles línies de recerca d'interès futur.