Foliacions totalment geodèsiques de codimensió 1 i camps de Killing

Antoni Ras Sabidó

ADVERTIMENT. La consulta d'aquesta tesi queda condicionada a l'acceptació de les següents condicions d'ús: La difusió d'aquesta tesi per mitjà del servei TDX (**www.tdx.cat**) ha estat autoritzada pels titulars dels drets de propietat intel·lectual únicament per a usos privats emmarcats en activitats d'investigació i docència. No s'autoritza la seva reproducció amb finalitats de lucre ni la seva difusió i posada a disposició des d'un lloc aliè al servei TDX. No s'autoritza la presentació del seu contingut en una finestra o marc aliè a TDX (framing). Aquesta reserva de drets afecta tant al resum de presentació de la tesi com als seus continguts. En la utilització o cita de parts de la tesi és obligat indicar el nom de la persona autora.

ADVERTENCIA. La consulta de esta tesis queda condicionada a la aceptación de las siguientes condiciones de uso: La difusión de esta tesis por medio del servicio TDR (**www.tdx.cat**) ha sido autorizada por los titulares de los derechos de propiedad intelectual únicamente para usos privados enmarcados en actividades de investigación y docencia. No se autoriza su reproducción con finalidades de lucro ni su difusión y puesta a disposición desde un sitio ajeno al servicio TDR. No se autoriza la presentación de su contenido en una ventana o marco ajeno a TDR (framing). Esta reserva de derechos afecta tanto al resumen de presentación de la tesis como a sus contenidos. En la utilización o cita de partes de la tesis es obligado indicar el nombre de la persona autora.

WARNING. On having consulted this thesis you're accepting the following use conditions: Spreading this thesis by the TDX (**www.tdx.cat**) service has been authorized by the titular of the intellectual property rights only for private uses placed in investigation and teaching activities. Reproduction with lucrative aims is not authorized neither its spreading and availability from a site foreign to the TDX service. Introducing its content in a window or frame foreign to the TDX service is not authorized (framing). This rights affect to the presentation summary of the thesis as well as to its contents. In the using or citation of parts of the thesis it's obliged to indicate the name of the author.

FOLIACIONS TOTALMENT GEODÈSIQUES DE CODIMENSIÓ 1 I CAMPS DE KILLING

per

ANTONI RAS I SABIDO

Facultat de Matemàtiques

Universitat de Barcelona

Any 1987

FOLIACIONS TOTALMENT GEODÉSIQUES DE CODIMENSIÓ 1
I CAMPS DE KILLING

Memòria presentada per Antoni Ras i Sabido
per aspirar al grau de Doctor en Matemátiques

Carlos Curras Bosch, professor titular del Departament d'Àlgebra i Geometría de la Universitat de Barcelona

CERTIFICO

que aquesta memòria ha estat realitzada sota la meva direcció per Antoni Ras i Sabido i que constitueix la seva tesi per aspirar al grau de Doctor en Matemàtiques.

Barcelona, 28 de Septembre del 1987.

Carlos Curras Bosch

Agraeixo en Carlos Curras, que m'ha encoratjat a fer i dirigit aquesta tesi, el seu ajut i dedicado i el seu bon humor tan engrescador.

Vull expressar també el meu agrai'ment ais companys del Departament i de la Universitat peí seu suport i col.laboració. Especialment, en Quim Font, que m'ha donat un cap de má amb les equacions diferenciáis; en Miquel Ralló, qui m'ha animat tants cops; en Sebastiá Xambó, que m'ha explicat el TE X sense escatimar-hi temps ni amistat; i n'Enric Fossas, que mai ha deixat d'empényer-me per fer aquesta tasca.

I ais de casa, els he de donar les gràdes per la seva paciència i el seu amor.

Per ***la Pat***

INDEX

PRESENTACIÓ

Les foliacions, com a disciplina **individualit25ada** dins la Geometría Diferencial, pot considerar-se que neixen a partir de la teoria deis sistemes dinámics **en** varietats i de la teoria de connexions en fibrats desenvolupada per Ch. Ehresmann.

Tot i que **els** estudis sobre "famílies regulara de corbes" en superficies (Poincaré, Bendixson, Kneser, Whitney, Kaplan, ...) se'n poden considerar com a precedents, de fet els "pares" de l'estudi modern de les foliacions son G. Reeb i Ch, Ehresmann; i el "naixement" de la teoria s'ha de situar cap ais anys 1940 - 1960 {Vd [He-Hi]).

El camp d'investigació en el tema de foliacions és ara prou vast. Se'n podrien distingir ([He-Hi]) dues línies mestres: un estudi de caire quantitatiu (toplógic), amb topics com homotopia, espais classificants, classes característiques, i un altre de caire qualitatiu (geométric): existencia, classificació, estabilitat, holonomia, ...

Dins d'aquest aspecte mes geométric, apareix l'any 1980 un important article de D.L. Johnson i L.B. Whitt **([J-W]),** centrat en les foliacions totalment geodésiques (aquélles en qué les fulles son subvarietats totalment geodésiques) i, **mes** concretament, en la classificació de varietats compactes que admeten foliacions d'aquest tipus, de codimensió 1 i amb alguna fulla compacta. En aquest treball hi trobem, entre d'altres, un resultat que relaciona camps de Killing i foliacions, que és el següent:

> ***Donada una foliado totalment geodésica, de codimensió 1, a fulles compactes, en una varietat riemanniana completa, si un camp de Killing és tangent a la foliado en un punt, li és tangent arreu. A mes, tot camp de Killing respecta la foliado (és dir, les isometries del grup uniparamétric que genera envien fulles a fulles).***

Mes tard i en aquesta mateixa direcció, G. Oshikiri extén els anys 1982 - 83 el resultat sobre conservació de la foliació per camps de Killing al cas de foliacions a fulles minimals, compactes (**[Os** I]) i al cas de foliacions totalment geodésiques en varietats compactes (**[Os** II]).

L'objectiu básic de la present memòria és precisament l'estudi deis camps de Killing que respecten una foliació donada, totalment geodésica i de codimensió 1, en una varietat riemanniana completa. No ens interessa tant donar resultats en la línia deis suara esmentats com conéixer l'estructura de l'álgebra de Lie que constitueixen els camps d'aquest tipus.

L'estructura riemanniana de les fulles en foliacions totalment geodésiques de codimensió 1 té una certa uniformitat, que es tradueix de forma particularment agradable en el recobridor universal de la varietat, que resulta isométric al producte

$$\tilde{L} \times R,$$

on $\tilde{L}$ és una fulla qualsevol (totes són isomorfes) de la foliació que indueix de forma natural en el recobridor la que es tenia en la varietat de base *{Teorema de Novikov,* Vd [Bl-Hb II]).

La técnica essencial en el nostre treball será la d'estudiar quina situació es dona en el recobridor universal de la varietat donada i veure tot seguit qué li succeix a l'estructura que hi hem trobat quan tornem a la varietat original.

Distingirem tres casos: foliacions de tipus *"bundle-like"*, de tipus *"warped product" i* de tipus general.

Les foliacions *"bundle-like"* van ser definides per primer cop per Reinhart l'any 1958 (Vd [Re]) i es poden caracteritzar com aquélles en qué la distància entre fulles és localment constant.

D'entre les foliacions que no son del tipus anterior diferenciarem segons si al recobridor universal hi ha camps de Killing perpendiculars a la foliació o no. La importància d'aquesta distinció vé donada peí resultat de Curras que, cas d'existir camps de Killing perpendiculars, aquest recobridor és un *"warped product"* (Vd [Cu]). En concret, és isométric a

$$\overset{\wedge\wedge}{M} \times (a, 6), \qquad \text{amb la métrica} \quad ds^{2} \; \_ \; — \; ds^{2}_{L} — h \; / \; {}^{2} dt^{2} \; ,$$

on $f : L \longrightarrow\wedge R'^{*}'$ no depén de la coordenada í.

Els dos primers Capítols són de caire introductori. S'hi donen les definicions básiques per a la resta del treball i **s**'hi estableixen resultáis com els esmentats de Johnson - Whitt i Oshikiri, i sobre l'estructura del recobridor universal per a les foliacions ***"bundle-like"*** i les totalment geodésiques. També es fixen les referéncies que s'empraran habitualment.

El Tercer Capítol está dedicat a les foliacions ***"bundle-like".*** Se'**n** donen caracteritzacions, tant quan **son** (a **mes)** totalment geodésiques com quan no en son; i es prova que l'álgebra § deis camps de Killing que respecten la foliació té dimensió compresa entre 1 i ***n{n + í) ¡2 {n =*** dimensió de les fuUes) (Teorema III.15). En el cas en qué la foliació també és totalment geodésica, l'álgebra ^ esmentada descomposa en suma directa de les seves subálgebres de camps de Killing tangents a la foliació i normáis a la foliació, respectivament (Teorema III.9). A mes, la varietat és localment isométrica a un producte riemanniá foliat de manera natural (Teorema III.13).

Al Capítol 4 hi donem resultats generáis per foliacions totalment geodésiques: es caracteritzen i es donen condicions necessáries per garantir que un camp de Killing respecti la foliació. El resultat **mes** important és el Teorema IV.8 en que s'afita superiorment la dimensió de la subálgebra deis camps de Killing tangents a la foliació.

En el Capítol 5 estudiem el cas ***"warped product".*** En primer lloc donem caracteritzacions de les foliacions que teñen recobridor universal d'aquest tipus i exposem conclusions sobre l'estructura de ^ en casos particulars. Els resultats centráis son els Teoremes ^^".12 i V.13 en qué **s**'estableix totalment l'estructura de **p** i les seves algebres i subálgebres associades, tant en el recobridor universal com en la varietat original. A continuado donem exemples de tots els casos establerts en aquells teoremes. Finalment, tractem amb detall el cas en qué la varietat és una superficie. Aquí es pot Uigar l'estudi deis camps de Killing que respecten la foliació amb el grup fonamental de la superficie (Teoremes ***Y.25*** i V.29). També provem que, en aqüestes condicions, només hi pot haver camps de Killing que no respectin la foliació quan la superficie és simplement connexa i de curvatura constant i negativa (Teorema V.SS).

El cas general és tractat en el capítol 6. Cal introduir noves técniques per arribar a afitar superiorment la dimensió de ^. La fita que es dona és (1/2) ***{n [n*** — 1)) + 2 (que coincideix amb la del cas ***''warped product")*** (Corol.lari VI.3), encara que per dimensions baixes de la varietat aquesta fita es pot rebaixar en una unitat (Teoremes VI.ll i VI.13). Igualment es donen diferents exemples.

El darrer Capítol está dedicat, básicament, a tres qüestions. En primer Uoc es tracta de les foliacions transversalment orientables i de la seva relació amb els temes tractats anteriorment. **Mes** endavant, es Higa la classificació de foliacions que estableix Ghys (Vd [Gh]) amb els resultats deis Capítols precedents. Finalment, ens fixem en la noció de curvatura transversa (curvatura seccional en plans que contenen un camp normal a la foliació) i particularment en el cas en qué és constant, d'acord amb una línia encetada al final del Capítol cinqué.

Capítol I

RESULTATS GENERALS SOBRE FOLIACIONS

En tot aquest treball, M denotará una varietat diferencial, riemanniana i completa.

I.1 **DEFINICIÓ.**

Una foliació J a M és una distribució *C*°° involutiva al fibrat tangent a la varietat ([He]). És dir, una foliació vé donada per l'assignació C^∞ a cada punt p d'M d'un subespai ^ **C TpM** , de manera que tots aquests subespais teñen la mateixa dimensió i es compleixen les condiciona de completa integrabilitat: si ***Y, Z son*** camps de /, també el seu paréntesi de Lie ***[Y, Z*** pertany a ***J.***

Les varietats integráis de ***7*** s'anomenen fuUes de la foliació. Notarem ***Lp*** la fulla que passa peí punt p G ***M.*** Es diu dimensió de la foliació la dimensió de les seves fuUes.

Equivalentment ([Lw], [Re]), una foliació de dimensió p queda definida per la descomposició d'M en unió disjunta de subconjunts connexs **{La}** (les fulles), que verifiquen que per tot punt p 6 M hi ha un entorn coordenat ***U*** amb coordenades C°°

(xi,...,x„) : C/—^R"

en qué les components d' Í7 fl L_α venen donades per equacions

{xp+1 = ***constant,...,*** x_m = ***ctt}*** per cada fulla Z«.

En la intersecció de dos d'aquests entorns (que s'anomenen entorns distingits), el canvi de coordenades vé donat per funcions {yi(a;i,...,a:„)}^<.<^ tais que ***dyjdxj-*** = O, per _ _ ***l<j<p<i<m.***

OBSERVACIÓ.

De manera ***anàloga es poden deñnir foliacions de tipus C,*** (r : 0,1,.,., oo,u;).
Nosaltres treballarem només amb foliacions C°° i per tant no ho explicitarem cada cop.

EXEMPLES 1.2.

Un primer exemple de foliacions son les que s'obtenen a partir de submersions:
Siguin ***Mi,*** **Ms** varietats diferenciáis, ***dim Mi >_dim*** M_2 = m_2, / : ***Mi*** —> **M2** una funció amb ***rang {df)*** = ma . Peí ***Teorema de la ¡unció implícita,*** tindrem a **Mi** una foliació de codimensió **m2** en qué les fulles venen donades per ***{f~^ {p)}peM,*** •

Un fibrat diferencial n'és un cas particular.

Un altre exemple tipie és el de les foliacions que s'obtenen a partir de l'acció d'un grup: Sigui ***M*** una varietat i ***G*** un grup de Lie que actúa sobre ***M*** de manera localment Uiure (i.e. els subgrups d'isotropia **Gp** = ***{g €G \ g{p) = p}*** són discrets, Vp € M). Aleshores, les órbites d'aquesta acció són les fulles d'una foliació a M.

Un cas d'aquest tipus és quan ***M*** és un grup de Lie i ***G*** un subgrup que hi actúa per multiplicació a l'esquerra.

Altres exemples de foliacions surten del maro estríete de la Geometria Diferencial. Així, foliacions apareixen també com famílies de solucions de sistemes d'equacions diferenciáis.

Una equació diferencial ordinària no singular, un cop reduida al primer ordre, esdevé un camp que mai s'anula. Les órbites del fluxe que genera aquest camp donen una foliació de dimensió 1.

El nostre treball es fa sobre foliacions totalment geodésiques:

L3 **DEFINICIÓ.**

Una foliació a M es diu que és totalment geodésica quan les seves fulles són totes subvarietats totalment geodésiques d'M.

Un tipus prou important de foliacions **son** les que admeten una estructura transversa. Donar una estructura transversa a una foliació vol dir, ***grosso modo,*** imposar condicions sobre el pseudogrup ***T*** de difeomorfismes locáis d'R^m engendrat per les funcions de canvi de coordenades en la intresecció d'entorns distingits.

(Així, les foliacions definides per l-formes tancades teñen una estructura transversa "de Lie", amb "grup estructural" R).

Una estructura transversa que apareixerá sovint és el que s'anomenen foliacions ***bundle-like*** (o riemarmianes, per d'altres autors):

1.4 **DEFINICIÓ.** ffíeinJiartj

Es diu que una foliació és ***bundle-like*** quan existeix una "métrica transversa" que és invariant peí pseudogrup ***T*** que suara definiera; és dir, quan les submersions que defineixen localment la foliació **son** "riemannianes" en el sentit que el producte de camps ortogonals a la foliació és localment constant a cada fulla. (Dit altrament, la distància entre les fulles és localment constant).

La definició original de Reinhart ([Re]) era la següent:

Considerem un entorn distingit *U* amb coordenades **(xi,..., x„, t/i , . . . , i/m)** on les fulles d'J s'expressen com **{t/i =** ***ctt,...,*** **t/m** = cíí} .

Fem un canvi de la base de camps per tal d'expressar la métrica com a suma d'una "métrica tangent" i una "métrica transversa". Posem

$$\nu_\alpha = dy_{„}+\hat{}\,b\hat{}\,,dxr \quad , \qquad 1 \leq o : \leq m$$

n / r = 1

$$\text{on} \qquad bcr = \frac{1}{det\backslash gij\backslash} \begin{vmatrix} 9ii & \cdots & -9ai & \cdots & Qm \\ \vdots & & \vdots & & \vdots \\ g_{1n} & \cdots & QoLn & \bullet * \bullet & Qrxn \end{vmatrix}$$

i g.y =<*dXi, dxj* · >, 1 ≤ *i,3* ≤ *«;*

9ar =< ***dy„,dxr*** ***>,*** 1 ≤ a ≤ m , ***1_<r_<n.***

Aleshores la métrica s'expressa:

$$ds_U^2 = \sum_{l\leq i,3\leq n} g_{ij}(x,y)\,\omega_i\,\omega_j + \sum_{l\leq a,0\leq m} g_{\alpha\beta}(x,y)\,dy_\alpha\,dy_\beta$$

iOap **=<** ***i****^a,* ***¡^0 >;*** (wi, **. . . ,** **ü**;„ , dyi, . . dy_m) és la base dual de ***{dxi***,..., 5s„ , i-'**i**, . . . , i^**m)) - |**

I es defineix:

Jes ***bundle-like*** ^ VT € ***F, T{g„p)*** = 0 , Va, /?

Donarem a continuació una caracterització de les foliacions ***bundle-like*** que ens será **mes** útil:

PROPOSICIÓ i.5.

Una ***foliació 7 és bundle-like si i només si***

VR ***e*** T**(J),** VF, ***W normáis*** a ***I,*** ***{L^g){V,W)*** = **O**

DEM.: • • • \ • • •

DEM.:

Considerem en un entorn distingit la base *{dxi*,..., 3x„ , **i/^**) anterior, en qué *I^{dXi}.*

Donat ***T*** = ^ 7 = **i** ، ***dxi*** **G T(J),**

[r, i/„] = [r, 5y„ **] + ¿ [r,** $b_{\alpha i}$ **az:] =**
»+i

$$= \sum_{i+1}^{n} \left([T, b_{\alpha i}\, \partial x_i] - \partial y_\alpha \xi^i\, \partial x_i \right) \in \mathcal{T}(\mathcal{F})$$

Per tant,

{L^g){u^,up) = ***T*** < > - < **[r,i/**„l**,z/**0 > - < **[r,i/;,],i/„** >=

$$= T < \nu_\alpha , \nu_\beta >= T(g_{\alpha\beta}) \blacksquare$$

1.6 DEFINICIÓ.

En general, donada una foliació J de codimensió n > 1, no té perqué existir una distribució involutiva complementària de manera que entre ambdues descomposin l'espai tangent en una suma directa. Quan, tantmateix, sí que existeix aquesta distribució involutiva complementària, de la foliació que genera se'n diu la foliació transversa a J (i l'escriurem ***I***$^{\perp}$). A cada punt p **G** M es tindrá, dones, ***TpM = Ip*** ® $\mathcal{F}_p^{\perp}$ **.**

Un cas particular en qué, óbviament, hi ha foliació transversa és el de les foliacions de codimensió 1, que és el que nosaltres estudiarem.

Hi ha una forta relació entre les foliacions totalment geodésiques i les ***bundle-like:***

PROPOSICIÓ 1.7.

Sigui / una *Foliació que té foliació transversa integrable 7^ . Aleshores:*

7 és totalment geodésica <^ 7$^{\perp}$ ***és bundle-like***

DEM.: •••\•••

DEM.:

Considerem camps ***X,Y eT{T);*** ***Ve T{I)^*** **.**

(L^ff)(X,y) = ***V<X,Y>-<*** ***[V,X],Y*** > - < ***[V,Y],X>=***

=< ***VxV,Y*** > + < *VYV,X>=* - < ***V^Y,V*** > - < ***VyX,V*** >=:

= -2 < VxF,F >

Per tant i a partir de la cracaterització que hem donat ***a. 1.5:***

7 és totalment geodésica VxF.F >= O, VX, F G T{J), ***V*** € T(J)^

L

^ ***[L^g){X,Y)*** = ***%*** VX,y eT(J), F€r(J)'

4=4> ***7*** és ***bundle-like*** **|**

COROL.LARI 1.8.

Siguí *I una, íoliació que té foliació transversa integrable 7^ . Son equivalents:*

i) 7 és totalment geodésica i bundle-like;

ii) 7^ és totalment geodésica i bundle-like

DEM.:

És evident, perqué (J"^)$^{\perp}$ = J, |

Recordarem la **definido** de camp de Killing:

1.9 DEFINICIÓ.

Un camp X E *x{^)* esdiu que és de Killing (o que és una isometria infinitessimal) quan tots els elements del subgrup uniparamétric de transformacions que genera **son** isometries locáis d'M.

Equivalentment (Vd [K-N] I, p. 237),

X és de Killing <=> ***L^g = 0***

⟺ ***Ax = Lx*** — Vx és antisimétric

El conjunt deis camps de Killing d'M és una álgebra de Lie, que denotarem per **ṫ(M) .**

Si la dimensió d'M és n, es té que ***dimi{M)*** <_ i$_2$ n (n + l), i si val l'igual la varietat és de curvatura constant (Vd [K-N] I, p. 238).

1.10 **DEFINICIÓ.**

Donada una foliació ***7*** a M, es diu que un camp ***X*** respecta la foliació quan les transformacions del subgrup uniparamétric que genera ***X*** envien fulles a fulles. Aixó equival a dir que ***X*** verifica que per tot T 6 7, ***\X,T]*** **G** T(J).

El conjunt de camps de Killing que respecten una foliació és una subálgebra de Lie ***Q*** d'í(A^) • L'estudi de ***Q*** és l'objectiu básic d'aquesta memòria.

Cavítol II

FOLIACIONS TOTALMENT GEODÈSIQUES, DE CODIMENSIÓ 1: RESULTATS GENERALS

11.1 INTRODUCCIÓ.

Una de les técniques de demostració que més emprarem consistirá en "passar la qüestió" al recobridor universal. Aixó és degut a qué les varietats simplement connexes que admeten foliacions totalment geodésiques de codimensió 1 teñen una estructura molt "agradable" (Vd *Teorema II.S).*

Abans que res, però, convé observar que ens podem limitar a l'estudi de foliacions de codimensió 1 transversalment orientables, és a dir, aquélles en qué existeix un camp global perpendicular a la foliació. (Aquest camp el normalitzarem i n'hi direm, d'ara en endavant, *N).* Si la foliació no fos transversalment orientable, n'hi ha prou amb considerar un recobridor de dues fulles per solventar el problema.

TEOREMA II.2.

A M, sigui 7 una ***foliació totalment geodésica, transversalment orientable, de codimensió 1. Anomenem*** $\widetilde{M}$ ***el recobridor universal d'M.***

Aleshores:

(1) $\widetilde{M}$ ***és isométric al producte*** ¿̈ x R, amb ***la métrica*** $ds^{2}_{\hat{M}} = ds.^{2}_{L} + f^{2}\, dt^{\sim 2}$***, on:***

(2) ¿ ***és el recobridor universal de qualsevol I-fulla; i***

(3) $f : \widetilde{M} \longrightarrow$ R+ \ { 0 } ***és una fundó*** C~ .

(4) L'eievació ***de í a*** $\widetilde{M}$ ***és la foliació que té per fulles*** $\tilde{L}$ x ***{pt.}***

DEM.:

Diversos autors donen demostracions d'aquest *Teorema* degut en primera instància, sembla ser, a Novikov. (Vd [No], ***Teorema 4-1*** de [Im], [Os II], [Bl-Hb I] i ***Proposidó S.l*** de [Bl-Hb II]).

Probablement, el resultat **mes** complet és el de [Bl-Hb II], en qué es demostra una versió del *Teorema* per a foliacions que admeten una ***connexió d'Ehresmann,*** categoría que inclou les foliacions totalment geodésiques i les ***bundle-like.*** |

II.3 REFERÈNCIA QUAN dim *M* = *2.*

Si ***dimM*** = 2, suposarem la foliació orientable i transversalment orientable.

Consideraren! la base ortonormal (global) ***{T,N), onTe*** 7(7) i ***N*** G T(J)"^ .

Si la foliació és totalment geodésica, es té:

$$\nabla_T T = \nabla_T N = 0$$

V^N* = *aT

VjvT= -aiV

on ***a*** és una certa funció.

A mes.

[**r**, ***N]*** = ***aN***

II.4 REFERÈNCIA EN GENERAL.

A partir de l'estructura del recobridor universal ***{11.2),*** localment es té un entorn ***U*** de ***p€M,***

0" ≅ í7í,xR, ***dsl*** = ***ds^*** + f^2 ***dt^***

Com que les fulles **son** totalment geodésiques, per transport paral.leí a partir de p per geodésiques, s'obté una base ortonormal ***{Xi,...,*** X „ , iV) a C/, en qué:

N* = *jdt (1) ***{Xi,dt]=0*** Vx,iV = 0

$$< \nabla_{X_i} X_j, N > = 0 \qquad (\nabla_{X_i} X_j)_p = 0$$

^j,Xi = ***-aiN***

n

[***X„N]*** = ***aiN,***

V^N* = *Y;aiXi ***<[Xi,X,-],N* > = *0***

a_i

per certes funcions = —(Xj • log/)

PROPOSICIÓ II.5.

Siguí M una superficie i J una foliació de codimensió 1, totalment geodésica, orientable i transversalment orientable. Sigui X = aT + ^N. Aleshores:

i)

$$X \; e \; \text{i"(M)} \;<\; \wedge \;\; \text{i} \begin{cases} \text{' O = r(a)} & (1) \\ o = N\{;3) - aa & (2) \\ 0 = a(3 + T\{(3) + N\{a) & (3) \end{cases}$$

ii)

$$xeg \iff X \; e \; i\{M) \;\; i \;\; N\{a)=0 \qquad (4)$$

DEM.:

(1) $(L_X g)(T,T) = -2 < [X,T],T >= 2 \; T\{a)$

(2) $\{L\wedge9)\{N,N) = -2 < [X, AT], iV >= 2 \; \{N\{;3) - ao)$

(3) $\{L\wedge9nT,N) = -< [x,r],;v> - < [x,iv],r>=a\wedge + r(\wedge) + iv(a)$

$X \; e \; i\{M)$ respecta la foliació $<í=> \; O =< [X,T],N >=< [X,N],T >$

(4) $\iff 0 = al3 + T\{0) = N\{a)$

PROPOSICIÓ II.6.

A M, *sigui J una foliació totalment geodésica, transversalment orientable, de codimensió 1. Utilitzem la base (local) de 11.4.*
Donat X = $\sum^{n}_{i=1}$ $+ \beta N$*, aleshores:*

i)

$$Xei[M) \iff \begin{cases} X^* \text{ és Killing respecte } ds;\wedge^{2} & (1) \\ N\{\wedge) = \sum_{i=1}^{n} '\pounds a,a, & (2) \\ {[a,\wedge} + X,\{P) = -N\{a,), \quad \text{V í : Í, . . . , n} & (3) \end{cases}$$

ii)

$$X \; e \; g \;\; \wedge \;\; X \; ei\{M) \;\; i \;\; N\{ai) \; \wedge 0, \quad \text{V í : Í, . . . , n} \qquad (4)$$

DEM.: . . . \ . . -

DEM.:

Prenem la base habitual. (1) s'obté de ***{L^g){Xi,Xj)*** = 0.

(2) (L^g)(Ar,iV)=2 (iV(/?) - ¿a,a,) n í= 1

(3) $$(L_X g)(X_i, N) = a_i\beta + X_i(\beta) + N(\alpha_i)$$

3iXei{M):

Xeg ^ ***0=<[X,Xi],N >=<[X,N],Xi >,*** V¿:1,...,*n*

(4) ^ 0 = a,/3 + X,(/?) = iV(a,), V¿:l,...,n

OBSERVACIÓ. Si utih'tzem Ja notació x = x* + **ASí,** aíeshores:

X* és ***Killing respecte ds^*** 2 (1)

xeg <=> .<X*'^f = -a.(A/) (2)

[[r,dt] = **r(A)** = 0, **v r e J** (3) ¿ (4)

Un camp de Killing que respecti la foliació pot ser tangent a la foliació, perpendicular a la foliació, o bé descomposa en part tangent i part ortogonal. Això ens porta a definir dues subálgebres, ^' i ^" de ^ i dues noves àlgebres, J i ^. Les relacions entre aqüestes àlgebres i llurs dimensions ens determinaran l'estructura de l'álgebra § de camps de Killing que respecten la foliació.

II.7 DEFINICIONS.

A M, sigui J una foliació totalment geodésica, transversalment orientable, de codimensió 1. Defínim:

𝒢ᵗ **=: {XG^lXeT(J)}.**

g- **=:{XG^|XeT(J)"'}.**

M —. {0:M — . R, /? **C°°,** I **3 X G** ^ **¿ X = X*** + ***pN}.***

Evidentment, ^* i ^" ***son subálgebres de g.***

PROPOSICIÓ II.8.

^* i $\mathcal{G}^n$ ***son ideáis de Q. 'H és una. àlgebra de Lie.***

DEM.:

LEMA II.8.1. ***Si Xi = {X¡ + /3iN) e g, i: 1,2; aleshores:***

[X,,X,] = [X[,X',] + $(\beta_1$AT. $\beta_2)$- /?2(AT • ***P^))N***

DEM. DEL LEMA:

Prenem la béise local habitual. En particular, ***PÍN*** = **A**,-9í.
Per ***Vobservado*** de la ***Propietat 11.6:***

[X, ,X^] = {Xl,Xl] + [X\,/3,N] + [A ***N,Xl] + [13, N,*** β_2***N] =***
= **[Xí,X**$^*_2$**]** + **[XI,*****X,dt] + [X,dt,X,] + {¡3,{N • 0,) - P,{N • Í3,))N =***
= ***[Xl,Xl] + {I3,{N • 13,) - p,{N • p,))N t***

DEM. DE II.8:

Si Y e g\ pN e $\mathcal{G}^n$ i **X = (X* +** ***p:¡N) e g,*** peí ***Lema IL8.1:***

[y,x] = [y,x*] ***e{gn7)*** $\Longrightarrow$[y,x] **G *g'***

[PN,x]={p{N-p,)-p,{N-p))Neignl'-) =^ ***\pN,x]eg"***

Altrament, per donar estructura d'álgebra de Lie a ^, és suficient definir:

[P„p,]=:P,{N-P2)-p2{N-P,), V A **, ^ 2 e ^ "** **I**

OBSERVACIÓ. ***Si prenem la base local, aleshores: P = Xf és global; i es pot defínir***

$$[\lambda_1, \lambda_2] = \lambda_1 \lambda_2' - \lambda_2 \lambda_1'.$$

On **a;** ***vol dir {dX)/{dt) (Vd IL6).***

Aleshores, el lema IL8.1 diría:

$[X_1$**,X2] = [X^, X^] + [Al,** ***X2]dt.***

PROPOSICIÓ II.9.

A M, sigui í una foliació íotaimení *geodésica, transversalment orientable, de codimensió 1.*

Aleshores, es té una successió exacta d'álgebres:

O —> *g'* *g —>}i* —^0

En particular, dimg = dimg + dimM*

DEM.:

Considerem:

Y —> *Y*

j

g *X*

X' +PN —> */?*

Evidentment,

0 ^ *g'-^g^M* - ^ 0

és una successió exacta d'álgebres de Lie. |

Mes endavant ens será útil el fet que si un camp de Killing que respecta la foliació **s**'anula en algún punt, alheshores és tangent arreu a la foliació, encara que aquesta no sigui totalment geodésica. Anem-ho a vem-e:

PROPOSICIÓ 11.10.

Siguin (M,!) una foliació transversalment orientable, de codimensió 1,

X = X* + 0N un camp de Killing que respecta I.

Aleshores, si X s'anula en algún punt, X és tangent a 7.

DEM.: . • . \ . . -

DEM:

Sigui p G M on **Xp** = 0. Peí ***Teorema de Frobenius,*** existeix un entorn coordenat ***U*** de ***p*** de manera que ***{dx^dx'*)*** és una base ***de T i dt*** ho és de J*' (Vd [K-N **I,** p.l82]). Tindrem

r»
2 • ^ . • . • .2 . 2
dsjj = y^gijdx^dx' + f dt
***i=* 1**

•n
X = X* + /3iv = ¿ «i ax' + /3iv
i= 1

LEMA IL1O.1.

(1) **a./? + x (/) = o**

(2) **a**,.(^//)=0, V¿:1,...,n

(3) **[x*,aí]** = 0

DEM. DEL LEMA:

N'hi ha prou amb repetir la demostració deis apartats (2), (3) i (4) de ***V Observado*** de la ***Proposidó II.6.*** Encara que allí suposávem que la foliació era totalment geodésica, en realitat no ho necessitávem pas per provar aquests punts en concret. |

DEM. DE **n**.lO (CONTINUACIÓ):

Sigui **L** ^ la $\overset{\perp}{7}$-fulla per p.

Per (3), com que **Xp** = O, **X*** = O a $L_U^\perp$.

Per (1):

$$(\partial_t\beta)_{L_U^\perp} = (X^t\cdot f)_{L_U^\perp} = 0$$

I per tant /?$_{L_U}$x = 0. Però per (2), /?// és constant a les J-fulles, d'on ***Pu*** = 0.

Com que la varietat és connexa, deduim /9 = 0. |

Finalment, donarem dos coneguts resultats sobre casos particulars en qué tot camp de Killing respecta la foliació:

TEOREMA 11.11 (JOHNSON-WHITT).

A M, ***sigui 7*** una ***foliació totalment geodésica, transversalment orientable, de codimensió 1, a fulles compactes.***

Aleshores, tot camp de Killing respecta la foliació.

DEM.:

Vd ***Teorema S.l*** de [**J-Wl.** |

TEOREMA 11.12 (OSHIKIRI).

A M, ***sigui 7 una foliació totalment geodésica, transversalment orientable, de codimensió 1. Si la varietat M és compacta,***

aleshores, tot camp de Killing respecta la foliació.

DEM.:

Vd fOs **IIl. I**

Cavüol III

FOLIACIONS BUNDLE-LIKE DE CODIMENSIÓ 1

PROPOSICIÓ III. 1.

A M, siguí í una foliació transversalment orientable de codimensió 1; N vector normal unitari; w =: $\cdot_N$ ***g .***

Son equivalents:

i) ***T és bundle — like***
ii) VjviV = 0
iü) w ***és tancada***

DEM.:

i) =^ ii)

Per la ***Proposició 1.5,*** donat ***T eT{7):***

O = {L^g){N,N) ^-2<[T,N],N>=
= 2 <VNT,N >= -2 <VNN,T >

Per tant,

<Vjviv,r> = o, vreT(J).

$$\Longrightarrow \nabla_N N = 0$$

ii) => iii)

Prenem una base **(Ti,...,r„,** iV), en qué els ***Ti e T***(J). Es té:

(1) ***duj{N,N)=0***
2düj{Ti,N) = -uj([Ti,N]) = -< [Ti,N],N >=
(2) ***=< V^Ti,N > = - < Ti,V^N >=0***
(3) 2du;**(r,,r,)** = -u;**([T„r**,])=0

(ja que *7* és involutiva).

Per tant, ***du*** = 0.

iii) =^ i)

Donat ***Ter{7),***

{L^g){N,N) = -2 < ***\T,N],N >= -2u;{[T,N]) =***
= ***4du{T,N)*** =0

I per la ***Proposició 1.5, 7*** és ***bundle-like |***

COROL.LARI III.2 (KAMBER-TONDEUR).

Una varietat compacta i simplement connexa, M, no admet cap foliació bundle-like, de codimensió 1, transversalment orientable.

DEM.: (cf[Ka-Tn])

Considerem la 1-forma ***u =: i^ g .***

Per la ***Proposidó*** anterior, si existís una foliació ***bundle-like,*** do; = 0; i com M és simplement connexa,

=^ ***(jj = dg,*** on g és ***C°°***

Per la compacitat de M, g té extrems relatius;

$\Longrightarrow$ 3p **e** M 1 ***dg***^^ = O

$\Longrightarrow$ **wp** = O

Absurd, perqué *ÍJJ{N)* = 1 |

PROPOSIGIÓ III.3.

A M, sigui I una foliació bundle-like transversalment orientable de codimensió 1.

Aleshores, el recobridor universal d'M és $\tilde{L}$ X K, on $\tilde{L}$ és el recobridor universal d'una I-fulla L i la foliació T s'eleva a una foliació bundle-like f deñnida per $\tilde{L}$ x ***{pt.}.*** A ***mes, totes les 7-fulles son difeomorfes i no teñen holonomia.***

DEM.:

Si la foliació és ***bundle-like,*** admet una connexió d'Ehresmann i, per la ***Proposidó*** 3.1 de [Bl-Hb II], el recobridor universal és del tipus esmentat.

A **mes,** com ***7*** és ***bundle-like,*** la "distància" entre fulles es manté constant i per tant l'holonomia és trivial (vd [I]).

Finalment, del ***Lema*** 1.1 i de la ***Proposidó*** 2.4 de [Bl-Hb II], es dedueix que totes les fulles **son** difeomorfes. |

PROPOSICIÓ III.4.

A M, siguí J una. foliació bundle-like transversalment oríentable de codimensió 1.

Aleshores Ӿ = 0 o bé ^ = *{funcions constants}.*
En particular, dim){ ≤ 1.

DEM.:

Suposem *)/* ^ *<¡í.* Aleshores *3X ={Y + /3N) e 9,* amb /? ^ O .

O = *[L^g)[N,N)* = *{L^^g){N,N)* *=-2* < *[PN,N],N* >= *2N{p),*

Perqué X G *i{M)* i *7* és *bundle like.*

Per tant **A^í/?) = O** (1).

Com J és *bundle-like,* **Vr** G T(J) :

O = *{L^g){N,N)* = -2 < *[T,N],N* >

Per tant, < **[r**,iV],iV >= O (2).

Si X G ^, **V r G T** (7):

O =< *[X,T\,N* > = - < *[I3N,TIN* >=
= r(/3) - *0* < *[N,T],N* >= *T{I3),* per (2)

Per tant, *0* = *T{I3),* VT G T(J) (3).

Així, d'(l) i (3): *¡3* = *constant.* |

PROPOSICIÓ III.5.

A M, ***sigui 7 una foliació bundle-like, transversalment orientable, de codimensió 1, Aleshores:***

7 és totalment geodésica <í=^ iV G ^

DEM.:

⟹)

Si r 6 ***T{7),*** com ***7*** és ***bundle-like:***

(1) ***{K9){T,N)*** = ***-<[N,T],N>=--*** 1 ***{L^g){N,N)*** = O

Si **Ti, T2** G ***T{7),*** com J és totalment geodésica:

{L^g){T,,T,) = ***N<T„T,>-<*** ***[N,T,],T,*** ***>~<*** ***[N,T^],T,*** ***>--=***

(2) = < V:r. iV, > + < ***Vr, N,*** > - O

I óbviament

(3) ***[L^g)[N,N)=Q***

Per tant, d'(l), (2) i (3), AT és de Killing.

⟸)

Com que N és Killing i normal a ***7,*** la foliació és totalment geodésica (vd ***Proposició*** V.l). |

PROPOSICIÓ III.6.

A M, ***sigui 7*** una ***foliació totalment geodésica,transversalment orientable, de codimensió 1.***

Son equivalents:

i) ***7 és bundle-like***
ii) VjviV = 0
iii) JV ***respecta la foliació***
iv) ***N eg***
v) ***N és paral.lel***

DEM.:

i) ii)

Com *7* és ***bundle-like,*** per la ***Proposició III.1,*** Vjv AT = O

ii) = ^ iii)

SiTG **T(J):**

< [**r**,iV],iV > = < *VTN,N>* - < *VNT,N* >=< ***Vt,N,T*** ***>=0***

iii) iv)

(1) ***{L^g){N,N]=0***

Si **r e 7(7):**

(2) (L^fir**)(r**,iV) = - < ***[N,T],N*** >= O per **¿ü)**

Si **Ti,Ta e T(J),** com *7* és totalment geodésica:

(3) ***{L^g){Ti,T,)*** ***^<Vr,N,T,*** > + ***<Vr,N,Ti*** > - O

Per **(1), (2)** i **(3),** N és Killing; i per iii), tenim que iV £ ^.

iv) = ^ v)

Com *7* és totalment geodésica, només cal veure ***si ¥N — 0.***

Vr *e T{7),comN e g,*

< *Vt,N,T* >= - < V^r,iV > = < *[T,N],N* *>=0*

v) i)

vr E *T{7),*

{L^g){N,N) **= -2 <** [**r**,iV],iV >= **2 < V^r**,iV >=

= -2 < V;^iv,r>=o

Per tant, per la ***Proposició 1.5, 7*** és ***bundle-like*** |

COROL.LARI III.7.

A M, sigui 7 una foliació bundle-like, totalment geodésica, transversalment orientable,de codimensió 1.

Aleshores, dim M = 1.

DEM.:

Per la ***Proposició III.4,*** es té dim ***U*** ≤ ***1.***
Com que, per la ***Proposició III.6, N G*** ^ ***i és*** normal ***a 7: M*** ^ ***0.***
Així dones, dim ^ = 1. **1**

LEMA III.8.

A M, sigui ***7 una foliació bundle-like, totalment geodésica, transversalment orientable, de codimensió 1; [Xi,...,*** X „ , iV) ia ***base (local) habitual.***

Aleshores:

7 és bundle-like ˙ ˋ ***ai — O,*** **Vt :** 1, • • • **,n.**

DEM.:

Per la ***Proposició III.6: 7*** és ***bundle-like*** <í=^ ***V^N = 0.*** Però

$$\nabla_N N = \sum_{\text{«•= 1}}^{n} a_i X_i .$$

Per tant:

V^N = 0 ˊ ˋ ***ai,= 0*** **Vi : ! , . . . , n** |

OBSERVACIÓ: . Quan ***dimensió M = 2, el Lema III.8 diria;***

7 és bundle-like ˊ ˋ ***a = O*** ***[T,*** iV] = O

•

PROPOSIGIÓ III.9.

A M, ***sigui I una foliació bundle-like, totalment geodésica, transversalment orientable, de codimensió*** I. X = (X' + X") **G** ***X{M).***

Aleshores:

xeg ^ Xég* ***i*** X» e 5"

DEM.:

⟹)

Sigui **x=** {X* +I3N) e g.

Per la ***Proposidó 111.4, P*** =— ***constant*** i per tant, per la ***Proposidó III.7, 13N*** **G** ***g.***

Com és normal a J: X" = /3iV **G** ^**".**

A mes, X' = X — X" **G** ^; com que és tangent a J, X* **G** 5'.

<=)

Evident, perqué g* i g" **son** subálgebres de ***g.*** |

PROPOSIGIÓ III. 10.

A M, sigui I una foliació bundle-like, totalment geodésica, transversalment orientable, de codimensió 1. X = (X' + ***0N)*** **G** ***i{M).***

Aleshores:

xe g ^ **x(/?) = o**

DEM.:

Per la ***Proposidó IIL4, P = constant.*** Per tant, X**(/3)** = 0.

$\Longleftarrow$)

Com que ***X* G** ***i{M),*** només cal veure si respecta J, i.e., si **vre** T(J), < ***[X,T],N*** > = 0 ?

< ***{X,T],N*** > =< ***[pN,T],N>=*** ***-T[p)+P*** < ***VtfT,N>=***

(1) = *-W)-* *<^NN,T* *>=* ***-TiP)***

Sigui ***{Xi,Xn,N)*** la base habitual.

Peí ***Lema IILS,*** si X = (^.∵=1 $\alpha_i X_i$ + ***PN)*** G ***i{M):***

(2) X,(/3) + iV(a,)=0, **V¿.**

Com ***I*** és ***bundle-like:***

(3) O = (L^ff)(iV,iV) = (L^^g)(iV,iV) = -2 < [/?iV,iV],iV >= 2iV(^)

Per hipótesi ***NX{l3)*** = 0. A mes, peí ***Lema 1118, [Xi,N*** = O **V¿.** Dones,

$$\overset{(3)}{Q} = [X,Nm \overset{(»)}{=} \left[\sum_{U=1}^{n} \alpha_i X_i , N\right] [P) = \sum_{i=1}^{n} \text{-Y,N\{a,)X,\{pf\^}$$

$$= \sum_{«•=1}^{n} (X_i \cdot \beta)^2$$

$\Longrightarrow$ **X(/?)** = 0, **Vi** :1,...,n

$\Longrightarrow$ **r(^)** = 0, **VTeT(J)**

Per tant, per (1), tenim: X **G** ^ |

PROPOSICIÓ III.ii.

A M, *siguí 7 una foliació bundle-like, totalment geodésica, transversalment orientable, de codimensió 1. X G i{M).*

Aleshores son equívalents:

i) *xeg*
ii) VjvX = 0
iii) *[X, N]=o*

DEM.:

i) ii)

Prenem la base habitual. Sigui ***X*** = *^1$_i$"=! ^í^í* + *βN* **G *g.***

Aleshores, per les ***Proposicions 11.6 i 111****.4,* ^(i^) = ^ **(« t·) = O, V¿.**

$$\nabla_N X = \nabla_N \left(\sum \alpha_i X_i + \beta N\right) =$$

= ***Y,{N-oci)Xi+^aiVr,X*** + ***{N-l3)N*** + ***pV^N*** =

$$= \sum \alpha_i \nabla_N X_i + \beta \nabla_N N = 0,$$

Perqué *7* és ***bundle-like*** i totalment geodésica.

ii) => iii)

[X, AT] = Vx iV = O, ***per III.6.***

iii) =^ i)

Com que X **G t"(M), VT G** r(J):

< [X,**r**],iV >- ***-{L^g){T,N)-*** ***<[X,N\,T>=0***

Per tant, X **G** ^ **I**

COROL.LARI III.12.

En el cas particular en qué dim M = 2, si 7 és una íoliació orientable, bundle-like, totalment geodésica, transversalment orientable, de codimensió 1, son equivalents:

i) ***xeg***
ii) ***[X,T] = [X,N]*** = O
iii) ***< X,T > i < X,N > son constants***
iv) ***X és paral.lel***

DEM.:
i) = ^ ii)

$$<\backslash X,T],T > = -\frac{1}{2}\{L\wedge g)\{T,T) = O$$

$$< \{X,T],N> = 0$$

Per tant, **[X ,** ***T]*** = 0.

$$< [X,N],N > \wedge - \wedge\{L\wedge g)\{N,N) = 0$$

$$< \{X,N],T > = -\{L\wedge g)\{T,N)- < [X,T],N >= O$$

Per tant, ***{X, N] = O***

ii) iii)

Sigui **X = «r +** ***13N.*** Peí ***Lema 111.8,***

(1) O = **[X ,** ***T] = -T{a)T - T{P)N T{a) = T{(3)*** = O

(2) O = **[X ,** ***N] = -N{a)T - N{í3)N =^ N{a) = N{0)*** = O

De (1) i (2): ***a = constant i /? = constant.***

iii) =í> iv)

En aquest cas, tant ***7*** com J'*' **son** totalment geodésiques i ***bundle-like;*** per tant, per la ***Proposició III.6, T*** i ***N*** **son** paral.lels.

Com ***a*** i ***P*** son constants, ***X = aT +*** /?iV és paral.lel.

iv) i)

Si **X** és paral.lel, ***Ax ^ O i X e i{M).***

I, altre cop per la ***Proposició III.6*** aplicada a J'*",

< ***[X,T],N*** >=< ***VxT,N>*** - < ***VTX,N*** > = 0 i per tant **X G** ^ |

TEOREMA III. 13.

A M, ***sigui 7*** una ***íoMació bundle-like, totalment geodésica, transversalment orientable, de codimensió 1.***

Aleshores, localment, M és isométrica al producte riemanniá LxH, on L és una 7-fulla. Si, a mes, M és simplement connexa, la isometria és global.

DEM.:

Veurem que el recobridor universal $\widetilde{M}$ és isométric al producte riemanniá $\tilde{L}$ **X R.**

Per les ***Proposicions II.1 i IILS,*** $\widetilde{M} \overset{'\_\_\_\_\sim}{=}$ ***L x'R,*** amb métrica ***ds~***$^{2}_{Af}$ = ***ds.***^{2} + ***f***$^{2}_{\wedge}$ ***dt***^{2} **.**

(1) i V e ^ " = ^ **a** . / = **o** (**vdF**.2).

I peí ***Lema III.8:***

(2) **o** = a, = $\frac{X_{:} f}{f}$ ^ **r(/)=o, vrGT**(j).

Per tant, de (l) i (2): / = ***constant i ds~***$^{2}_{Ai}$ = ***ds.***$^{2}_{+}$ + ***dt***^{2} **.** |

OBSERVAGIONS.

(1) També ***es pot demostrar aquest teorema aplicant el th. A de*** /Bl-Hb ***1] a 7 i 7"^ , que son ambdues totalment geodésiques.***

(2) ***Si les 7-fulles no admeten isometries locáis, el resultat és global sempre. (Vd Corol.lari 1.8 de*** /**J-W**]j.

(3) ***El resultat també és global quan dimM*** ~ 2 ***(vd 111.23).***

En general, però, el resultat no és global, com prova el

CONTRAEXEMPLE III. 14.

Sigui

$$M = \frac{r' \, XS^\wedge}{\sim}$$

on

$[\{x,y\},0\} \sim < \frac{(\{\{x + l,y),MO))}{l\ (I2;,t/ + 1),02(pj)}$ ***(Pi,(P2*** rotacions a S^1 ·

Considerem a M la métrica que s'obté per pas al quocient de la métrica euclidiana a R^{2} **X** S^{1} i la foliació ***J*** que s'obté per pas al quocient de R^{2} **x** {pí.}.

La varietat ***M*** és compacta i té per recobridor universal R^.

El seu grup fonamental és **TTI (** M) ^ A u í { R % M) $\cong$ **Z © Z ® Z.**

La foliació evidentment és ***bundle-like i*** totalment geodésica (el recobridor universal és un producte riemanniá). Els camps ***dx, dy*** i ***dz*** **son** respectats per les ***deck-transformations*** i donen, per pas al quocient, elements de ^. En particular, ***7r^[dz) = N E §.***

Les J"*"-fulles **son** circumferéncies. Les 7-fulles poden ser:

(1) tors, si ***(f>i*** i ***(f)2*** **son** girs d'angle **27rm,** amb m **G** Q;

(2) R^{2}, si els angles **son** irracionals i independents sobre Q;

(3) cilindres x R, si els angles **son** racional un i irracional l'altre, o irracionals pero dependents sobre Q.

En els casos **(2)** i (3), M no pot ser, globalment, un producte, perqué en aquest cas el grup fonamental hauria de ser **Z** o **Z © Z,** respectivament.

TEOREMA III. 15.

A M, ***sigui 7*** una ***foliació bundle-like, transversalment orientable, de codimensió 1.***
Si n = dim fulles,

aleshores, ***dimQ*** < |- n (n + l) + 1

DEM.:

<u>PRIMER CAS:</u> si ***J*** és totalment geodésica.

De la ***Proposició III.9*** es dedueix que

$$dimQ = dimQ^* + dimQ''' = dimQ^* + dimM$$

Ara bé, per ***III. 7, dimM = 1.***

Altrament, si ***L*** és una J-fulla, ***dimQ**** < ***dimi[L)*** < | n (n + 1).

<u>SEGON CAS :</u> si ***7*** no és totalment geodésica.

Sigui **Xi,...,X„** una base de ***Q,*** amb **X, = X' +** ***N.***

X¡ ^ O perqué sino es tindria **Xj** ***z= p-N e Q"*** i, en ser A = ***constant*** (vd ***III.4), N e Q,*** absurd si / no és totalment geodésica.

Si ***y i, ¡3i =0, Q = Q* 1*** aleshores ***dimQ*** < ***dimi{L)*** < ^ n (n + 1).

Si no, suposem per exemple, ***(3i*** ^ 0. Siguin:

$$Y_1 = X_1$$

$$\mathbf{Yj} = \mathbf{Xj} — \frac{\beta_j}{\beta_1} \cdot Y_1 = X_j^t \sim \frac{\beta_j}{\beta_1} X_1^{t}{}' \quad \mathbf{J} \wedge \wedge$$

Obviament ***Y,,...*** ***,Y„*** també és una base de ¿ i, peí ***Lema, Y2,.. .,Y^*** ho és de G*,
Per tant,

$$\text{m — 1} = \textit{\textbf{dimQ*\_< dimi\{L)}} \leq \frac{1}{2}\text{ n (n + 1)}$$

$$\text{=í>} \quad \text{m} = \textit{\textbf{dimQ}} \leq \text{l} + \text{-}\frac{1}{2}\text{n (n + l) |}$$

EXEMPLES III. 16. ***[dimQ*** máximaj

<u>PRIMER</u> <u>CAS:</u> ***7 bundle-like*** i totalment geodésica.

Sigui ***M*** = **R"** **X** **R,** amb la métrica euclidiana.

Aquí5 = **{¿(R")U{ax„^J}.**

<u>SEGON CAS:</u> ***7 bundle-like*** i no totalment geodésica.

Sigi M = R" **X** R, amb la métrica ***ds^*** = **6^^"+^** • ***[dx^*** $+ \cdots + dx_n^2) + dx_{n+1}^2.$

Aquí ***g*** = **{í(R")** u **{xi** ∂x_1 **+ • • • + x„ ax„ + a x „ + j }**

EXEMPLES III. 17. ***(dim g mínima.)***

<u>PRIMER CAS:</u> / ***bundle-like*** i totalment geodésica.

Siguí ***M*** =——- - ,

on G és el grup generat per ***(f) i tp,i***

(f>{x,y,t) = (-i,-y,í + 1)

(Es fácil veure que G és un subgrup d'isometries de **R^** que actúa de manera própiament discontinua).

Considerem a M la métrica induida per l'euclidiana de $\mathbf{R}^3$ i la foliació induida per $\mathbf{R}^2$ X *{pt.}*.

Aquí ***g*** = **{7r**.(5í)} té dimensió 1.

<u>SEGON CAS:</u> ***I bundle-like*** i no totalment geodésica.

Qualsevol foliació totalment geodésica (no ***bundle-like)*** en superficies, amb ^ = 0 serveix com exemple (vd ***V.SS).***

OBSERVACIÓ. ***En*** **una varietat** ***de dimensió 2, si la foliació és totalment geodésica, bundle-like, orientable i transversalment oríentable, aleshores Q té sempre dimensió 2 (vd 111.23), és dir, té sempre la dimensió màxima possible d'acord amb III.15.***

Cas en qué *dimM* = 2

En el que resta del capítol III, considererem que la varietat M té dimensió 2 i que la foliació I és totalment geodésica i de codimensió 1, i.e., és un fluxe geodésic. Suposarem també J orientable i transversalment orientable; T i N donaran una base ortonormal de x{M),TeT[J)   iNeTiI)

PROPOSICIÓ III. 18.

Son equivalents:

i) ***I és bundle-like***
ii) **3** ***camps de Killing tangents a J***

DEM.:

i) =^ ii)

Per ***IIL12, T G g.***

ii)   i)

Sigui X = ***aT G g n 7.*** Per ***II.5, a*** = ***constant*** i

O = ***N{J3)*** = ***aa***

$\Longrightarrow$ ***a = Q*** =^ J és ***bundle-like,*** (per ///.8) |

PROPOSIGIÓ III. 19.

Si la varietat M és compacta i T[a) ≡O, ***aleshores J és bundle-like.***

Dem.:

Amb les notacions de ***II.S:***

divM {VNN) =< **VrV^iV,T** > + < *VNVNN,N* >==

=< ***VraT^T*** > + < ***V^jaT^N*** >=

= ***0*** + ***a***< **Ví^r,iV** >= ***-a^***

Peí ***Teorema de Green,*** com ***M*** és compacta:

0 = / ***divu*** (∇***N N) du3*** ^ - / a^dw

J M J M

= ^ a = **0** =í> ***7 és bundle-like*** ***[per III.8)*** |

PROPOSIGIÓ III.20.

Si 7 és bundle-like i:

(1) M ***és compacta; o***

(2) **3** una ***7-íulla compacta; o***

(3) **3** una ***7^ -fulla compacta:***

xei{M) ^ ***x e g***

Dem.:

El cas (1) resulta de la ***Proposidó 11.12.***

En el cas (2), com totes les fulles **son** difeomorfes (vd ***IILS),*** la foliació és a J-fulles compactes i el resultat es dedueix de la ***Proposidó 11.11.***

El cas (3) és análeg al cas (2), perqué en les hipótesis actuáis, els papers de 7 i J'*' **son** intercanviables. |

OBSERVAGIÓ. ***En el casos (1) i (2), el resultat és válid anàlogament en dimensions superiors. Tantmateix, una foliació bundle-like que no sigui de codimensió 1 pot no teñir totes les fulles difeomorfes: considerem la foliació induida per {pt}xIiaM=*** (r' XR/{</)}),

2

on (j) és un gir a* R** i una írasiació a i'eix ***OZ.

PROPOSICIÓ III.21.

Si 7 és bundle-like i X,Y e i{M), aleshores [X,Y] **G §.**

DEM.:

Peí ***Teorema 111.15,*** la varietat és localment isométrica al pía euclidiá foliat per rectes paral.leles a l'eix ***OX.*** Per tant, localment:

X = (Al + Bi y) ***dx*** **+ (Ci - Bi** ***x) dy,*** ***Y = [A, +*** B_2 ***y) dx + [C, -*** B_2 ***x) dy.***

[***X,Y] = {-{A, + B, y) B, + [A, + B, y) B) dy*** + ((C^ - ***B, x) B,*** - (C^ - ***B, x) B) dx*** =

= *{C,B2-B,C2)dx+{B,A2-A,B2)dy* **(1)** |

Per tant, òbviament, [X, y] respecta la foliació |

COROL.LARI III.22.

Si 7 és bundle-like i X,Y e 9, aleshores \X,Y] = **O.**

DEM.:

Si X, ***Y*** respecten ***7*** vol dir, amb les notacions de la ***Proposició anterior,*** que B_1 = ***B2***= **0.** Per tant, per **(1),** [X, F| = **O** |

TEOREMA III.23.

Si 7 és bundle-like, aleshores:

(1) ***M és isométrica al pía euclidiá, o a un cilindre euclidia, o a un tor euclidiá, amb les foliacions deñnides de manera òbvia per Vestructura de producte;***

(2) ***dimg = 2***

DEM.: ...\...

DEM.:

Peí ***Teorema III.IS,*** el recobridor universal de ***M és*** el pía euclidiá, foliat per rectes paral.leles a un deis eixos.

Les úniques isometries de R^2 que no teñen cap punt fix i, per tant, poden ser ***deck-transformation*** son les traslacions. Com que el grup de ***deck-transformation*** ha d'actuar de forma própiament discontinua, ha d'estar generat per cap, una o dues traslacions independents.

A **mes,** ***g* = *{T, N}*** té dimensió 2. |

Cavítol IV

FOLIACIONS TOTALMENT GEODÈSIQUES, NO BUNDLE-LIKE, DE CODIMENSIÓ 1: RESULTATS GENERALS

En el que resta de la memòria, suposarem, llevat indicadó en sentit contrari, que la foliació 7 no és bundle-like.

PROPOSIGIÓ IV. 1.

A M, ***sigui I una foliado totalment geodésica, transversalment orientable, de codimensió 1. X G i{M). Aleshores:***

X respecta 7 **[X, AT] = O**

DEM.:

$\Longrightarrow$)

Considerem ¡'estructura local del ***Teorema II.1,*** amb la métrica $dsj\hat{}^{2} = ds\hat{}^{2} + f^{2}\ dt^{2}$.

Sigui $x = x' + xdte\ g.$

$$[X,N\ ] = \left[X',-\frac{1}{f}dt\right] + \left[xat,\frac{1}{f}dt\right] =$$

$$= -.Ejl_{2}dt-\backslash\hat{}dt-\backslash dAdt \qquad =$$

$$f \qquad\qquad r \qquad f$$

$$= \frac{1}{f^{2}}(d,iXf)-Xdj-fdA)dt \ = \ o$$

$\Longleftarrow$)

vre T(7):

$$< \quad [X,T],N \quad >=-\{L\hat{}g)\{T,N)- \quad <[X,N],T>=0$$

Per tant ***X*** respecta la foliació. |

PROPOSIGIÓ IV.2.

A M, sigui / una ***foliació totalment geodésica, transversalment orientable, de codimensió 1. X = {X' + pN)*** **G** ***g .***

Aleshores X{l3) = XN{I3) = **O**

DEM.: . . . \ . . -

DEM.: Prenem la notació de la ***Proposició II.6.***

n n n

X[P) = $\sum \alpha_i (X_i$ • /3) + ***I3N{I3)*** =^-***J***^ "^"^'^ + ^ E $\alpha_i a_i$ = ^

«=i 1=1 «= 1

XN{P) = ***[X,N]{(3)*** + ***NXiP)*** = O ***[perlV.l]*** |

OBSERVACIONS.

(I) ***SiXeg,***

X{f3) = ***0*** ^ < ***[X,N],X'*** >=***o*** ^ ***NiW*** X* II) = O,

ja ***que:***

n n

(1) ***X{0)*** = Y.***ai*** (X, • /?) + ***pN{p)*** = ^ a, (X, • ^3 + a,/?)

t=l ***i=l***

n n

<***[X,N],X*** > = ***Y,cci*** <***[X,N],Xi*** >= -Y^***a***^iN • ***ai)*** =

t=i i=i

(2) $$= \sum_{i=1}^{n} \alpha_i \left(X_i \cdot \beta + a_i \beta \right)$$

N N

iV < X ' , X > = ^ J V (a :) ' = 2 ^ a , (i V - a .·) =

i=1 i=1

(3) $$= -2 \sum_{i=1}^{n} \alpha_i \left(X_i \cdot \beta + a_i \beta \right)$$

(II) ***En la expressió local, es té:***

X X* (log /) = X $\left(\sum\right.$ **«i** (^. • log /)) =

= - **x** (^ a , a ,) = - X i V **(** / **3**) = 0

PROPOSIGIÓ IV.3.

A M, ***sigui I una foliació totalment geodésica, transversalment orientable, de codimensió 1; X E Q.***

Aleshores: X < Vjv iV, Vjv iV >= O

DEM.:

Donat ***p*** e ***M,*** prenem en un entorn de ***p*** la base ortonormal (Xi, . . . , X„ , iV) de ***11.4-***

Si ^ = (E ; = **I** «y^y ***+PN)eg,*** per ***II.6:***

(1) XiV**(/3)** = ***[Xi,N]{/3)*** + ***NX,{I3)*** = a,iV(/?) - ***N{a,p)*** = -/?iV(a:)

(2)

$$\hat{}X<V\hat{}N,V\hat{}N> = \hat{}X\left(\sum_{i=1}^{n} \hat{} a,^{2}\right) = \sum_{i=1}^{n} \hat{} a.(\cdot X - ai) =$$

$$= \sum_{\substack{i=1\\j=1}}^{n} a,a,- (Xy \bullet a,) + \sum_{«=1}^{n} a,\hat{}(iV \bullet a,) =$$

$$\overset{(1)}{=} \sum_{\substack{i=1\\j=1}}^{n} a,ay(Xya,) - \sum_{«=1}^{n} a,X,iV(/?) =$$

$$= \sum_{\substack{«=1\\y=1}}^{n} a;«y(Xy \bullet a-) - \sum_{i=1}^{n} \hat{} \alpha X \left(\sum_{Vy=i}^{n} a_{j}"j"\right) =$$

$$= \sum_{\substack{i=1\\j=1}}^{n} \alpha_{ij}y(Xy \bullet tti - Xi \bullet Oy) - \sum_{\substack{i=1\\y=i}}^{n} a\hat{}Cy(Xi \bullet tty) =$$

$$= \sum_{\substack{i=1\\y=1}}^{n} a<ay(Xy \bullet a- - X.- \bullet ay) - \sum_{\substack{i=1\\y\bar{>}<}}^{n} a¿ay(X\hat{} \bullet o;y + Xy \bullet a:)$$

Altrament:

(3) 0 = (L ^ g) (X „ X ,) = < V ;. , . X , X , > + < V x. , X , X , >=

$$= X_i(\alpha_j) + \sum_{fc=1}^{n} \alpha_k < \nabla_{X_i} X_k , X_j > + X_j(\alpha_i) + \sum_{fc=1}^{n} \alpha_k < \nabla_{X_j} X_k , X_i >$$

(4) X,(a,) - X,(a,) = - X , ^ + X , ^ =

$$= \frac{-X_j X_i \cdot f + X_i X_j \cdot f}{/} = \frac{[Xi,X,]\text{-}f}{f}$$

Ara bé, tal com s'ha construit la base, es té:

[X,,X,**]p** = (V;c,Xy**)p** =0

Per tant:

(5) (X,(a,) + X,(a,)) $_p$ $\overset{3)}{'}$=0

(6) (X , { a ,) - X . . (a ,)) $\overset{4)}{/}$= 0

I, substituint (5) i (6) a (2):

{X<V^N,V^N>)^=0

Com el punt ***p*** era arbitrari.

$$\Longrightarrow X < \nabla_N N, \nabla_N N >= 0 \quad \blacksquare$$

PROPOSICIÓ IV.4.

A M, sigui 7 una foliació totalment geodésica, transversalment orientable, de codimensió I; X = (X* + ***PN) e Q.***

Aleshores, X < Vj^X*, iV >= O

DEM.: ---y···

DEM.:

Com que *X* eT{T),*

O =< *\X,X*],N* >=< *[PN,X*],N* >= *-X*{P)* + */?* < *\N,X*],N* >

Per tant,

(1) *X*{P)=/3<[N,X*],N>*

A mes, ***per IV.1,***

(2) *\X*,N]* = [X,*N]* - *[PN,*AT] = O + *N{p)N*

XiV(^) = *NX*{P)* + *[X*,N]{P)* ①

$\overset{(1)}{=}$ iV(/?) *<[N,X*],N* > *+/3N* < *{N,X*],N* > *+[X*,N]{p)* ③

(3) $\overset{(2)}{=}$ -(iV-;9)'+/?iV< [iV,Xl,iV>+(iV-/?)' = *PN* *<[N,X*],N* >

Per tant:

X< V;vX*,iV> = *X* *<{N,X*\,N* *>=X** *<[N,X*],N* > *+PN* < *[N,X*],N>* ②

③ -X*iV(/?)+^iV < [iV,X],iV > ③ 0 **1**

OBSERVACIÓ. ***Els recíprocs de les Propietats IV.3 i IV.4 no son certs, com prava el***

CONTRAEXEMPLE IV. 5.

Considerem $\mathbf{R}^2$ amb la métrica *ds*^{2} — *dx*^{2} + *e^"^ dy*^{2} **.**

Sigui *I* la foliació per rectes paral.leles a l'eix OX.

Operant s'obté:

N = e-'dy *Va,dx = Q* *Vg^dy = dy*

Vay *dy* = - e ' " *dx* *V^^N = -dx* *[dx, N] = -N*

X= *(2ydx* + (e~^" - y^) *dy^* és de Killing.

X< VjviV,V^iV>=X(l) = 0

X <V^X,N* >= *X* *<e-' (2dx* + *2ydy* - *2ydy* - (^e"^{2x} y') e^^^x), e"^^y >= O

Però X no respecta la foliació:

< *[X,dx],N* >= 2e-" ^ 0.

PROPOSICIÓ IV.6.

A M, ***sigui 7*** una ***foliació totalment geodésica, transversalment orientable, de codimensió 1.***
Sigui Y un camp tangent a la Foliació i de Killing a cada Fulla.

Aleshores:

$$Y \quad eg \iff \nabla_N Y = 0$$

DEM.:

Prenem la referència local habitual.

V ^ y = V;, *(j^**a^Xi)*** *=J2**{{N-ai)Xi+ai**\/^**Xi)*** **=**

*^J2**{{N-ai)Xi-aiaiN)***

Aleshores, per ***II.6,*** com que ***Y*** ja és de Killing respecte de la métrica de les fulles, es té:

Yeg ^ { $\left(\begin{array}{l} 0 = \sum \alpha_i a_i \\ 0 \triangleq N(\alpha_i), \quad \forall i \end{array} \right)$ ^ V ; , Y - 0 ∎

COROL.LARI IV.7.

A M, ***sigui 7 una Foliació totalment geodésica, transversalment orientable, de codimensió 1.***
Sigui Y eg'.

Aleshores, *\\Y* = ***constant*** => ***K{Y,N)*** = O

DEM.:

Per ***IV.l, [Y,N]*** = O i, si **7 €** ***i{M),*** ***Y***\\= ***constant*** => ***VyY = 0.***

Per tant, es té:

K{Y,N) =< ***R{Y,N)N,Y*** >=< V y **V^iV,y** **>=**

= **y** **<** ***VNN,Y*** **>=** ***-Y*** **<** **AT, v^y** **>=** **o** ***{perIV.6)*** **I**

OBSERVAGIONS.

(1) ***És fals que Y e i K{Y,N)*** = O ***impliquin \\Y*** = ***constant. (Considerar a*** R^, ***foliat per plans perpendiculars a l'eix QZ i amb la métrica euclidiana, el camp de Killing Y = ydx — xdy).***

(2) ***També és fals queY eT*** (/) ***Killing*** a cada ***fulla, VyY = 0i K{Y, N) = O impliquin Y e g. (Considerar al pía eucUdiá foliat per rectes paral.leles a l'eix OX el camp Y = ydx).***

Com es veurá **mes** endavant, la dimensió de l'álgebra 5* determina prácticament tota l'estructura de $\mathcal{G}$. Com que ^* és una subálgebra d'**i**(L), on ***L*** és una J-fuUa, es té:

$$dimÇi'^\_ \leq \frac{1}{2} n\,(n+1) \qquad (n = dimL)$$

Veurem que aquesta afitació es pot rebaixar. Localment, la métrica es pot expressar com $ds^{2}\wedge = dsj^{2}\wedge + f_{2}^{2} dt^{2}$ i un camp ***Y*** tangent a la foliació és de Killing quan: (1) ho és respecte de ds^, (2) [F, 5í] = O i (3) ***Y{f)*** = 0. / no és constant (si J no és ***bundle-like)*** i la condició (3) fará ***[Teorema IV.8)*** que, genéricament, no hi pugui haver **mes** de n. — 1 vectors independents respecte deis quals / tingui derivada nula i

$$dimQ^* \leq \frac{1}{2} n\,(n - 1).$$

Abans de provar aquest ***Teorema IV.8,*** calen uns lemes previs:

LEMA IV.8.1.

Sigui M una varietat n-dimensional, completa i 7 una foliació de dimensió m < n. Sigui X e i{M) n /. ***Si en una T-fulla L es té*** X|¿ =O,

Aleshores, $\bar{X} = 0$.

DEM.:

Sigui ***{(f>t)*** el grup uniparamétric associat a X. Donat ***p G L,*** veurem que **(</»t).p** = ***Id,*** Vi. Prenem en un entorn de ***p*** una base

{dx\...,dx\dy\...,dy--'-)

de manera que (5x^, • • •, ^i") és base de J.

La modifiquem (Vd a ***I.4*** els detalls) a una nova base

{dx\...,dx\iy\...,u''-'-),

de manera que

$$\nu^j = \partial y^j + \sum b_{ji} \partial x^i, \qquad \forall j$$

(1) i < v' ,dx' > = O, v ¿ , y

Com que **X** és tangent a / i s'anula a la fulla *L* que passa per p:

(2) {<l>,U{dx') = dx'

[<i>,U{dy^) = dy^ + Y,Hi,dx'

{<í>t)*p{¡^' - dy') = u' - dy' [u' - dy' e T(J))

i per tant

(3) (c^.).p(^') = í-'+E/^0-^^''

Pero (^(). és una isometria i respecta la foliació (X G T(J)).

Per tant, per (1), {(¡)t),p{u') ha de ser ortogonal a *T*. Això i (3) impliquen

(4) {cf>,)„{u') = {u'), vy

Finalment, de (1) i (4): (<?!>t)p = Idr^M •

I com que la varietat és completa, s'en dedueix (^t) = *Id*, i.e., **X** = 0. |

LEMA IV.8.2.

Siguí M una varietat completa i T una subálgebra d'i{M).
Si Vp **G** ***M, dimTp < m,***

Aleshores, dimT < | m (m + 1)

DEM.:

Sigui p **G** M en qué ***dimTp*** = m.

Escollim m camps, Xj,...,**X^** **G** T, independents (com a vectors) en un entorn obert ***U*** de ***p.***

Considerem a Í7 la distribució **S** que generen **{Xi,...,X^}**. Com que, en qualsevol punt q, la dimensió de ***Tq*** és com a molt m, se'n dedueix que la dsistribució ***S*** és involutiva i defineix a ***U*** una foliació ***Ju*** de dimensió m.

Diguem r =: I m (m + 1). Si ***dimT*** > ***r,*** siguin **Yi,...,** , **1 G** T independents.

Els camps (Yj)**|y son** de Killing i tangents a **Jy**, perqué T, = **(^u),** per hipótesi.

Sigui ***L*** una fulla de ***ly*** , que té dimensió m per tant. Com **(Yj)|¿ G ¿(L),** r

$(Y_{r+1})_{|L}$ = X^cy (yy)|i , ~j = ***constant.***

j=1

Aleshores,

$$Y =: Y_{r+1} - \sum_{j=1}^{r} c_j Y_j$$

és un camp de Killing que s'anula a la fulla ***L.***

Peí ***Lema IV.8.1, Y\u*** = 0. Com que ***Y*** és de Killing i s'anula a un obert; ***Y = O,*** absurdü

Per tant, ***dimT*** ≤ r |

Ara ja podem demostrar el

TEOREMA IV.8.

A M, sigui I una foliació totalment geodésica, transversalment orientable, de codimensió 1 i de dimensió n. Aleshores:

dimG* ≤ **^n(n-l)**

DEM.:

Ho veurem al recobridor universal. Podem suposar, dones,

M = LxR; ***dslj = ds^ + f^dt^***

Sigui **y G p*.** Prenem la base habitual. Per ***IV.6,***

o = < *VMY,N* > = - < **y,Vjviv** >= - < **y,^aíXi** >=

V f V f

= *J* : ^ < *Y* , *X* . · > = ^ —

f ' ' /

(1) i.e. ***Yeg'*** = ^ y . / = o

D'aquí i de ***IV.l*** deduim que Vy 6 5*, ***[Y,dt*** = 0; per tant té sentit definir

W = {pe L\ dimgi^^^ =n = dimL},

ja que la dimensió de ***Q**** és constant a cada J"""-fulla. Si ***W*** fos dens a ***L,*** tindríem

Z • f = 0,yZ e X{L), per(l)

i la foliació seria ***bundle-like {per IILÍ),*** absurd!!

Per tant, existeix un obert ***U C L \ W.*** Definim ***Qu = {X\u, onX £ Q*},***

9u* C *i{U) i Vp e Q, ***dim {Qu*** **)p** = ***dimg*^*** < n - 1.

Per tant, peí ***Lema IV.8.2,***

dimQy < -$\frac{1}{2}$(n — l)n

Com que ***U*** és un obert de M, camps de Killing independents a M ho son a ***U.*** Per tant,

dimQ* < ***dimQu*** _<\[***n*** — l)n |

Peí que fa a la part normal deis camps de Killing que respecten la foliació, quan hi ha J-fulles compactes es poden donar alguns resultats:

PROPOSICIÓ IV.9.

A M, ***sigui 7 una foliació totalment geodésica, transversalment orientable, de codimensió 1. Si totes les 7-fulles son compactes,***

=^ ***dim}l*** < 1

DEM.:

Peí ***Teorema S.l*** de **[J-W],** tot ***X E Q*** que és tangent a la foliació en algún punt, ho és arreu.

Siguin ***Xi =X¡ +piN, i: 1,2,*** camps de ***Q.***

Si /?! ^ o, sigui p e M tal que ***Pi*** (p) ^ 0. Considerem

$$Z = X_2 - \frac{\beta_2(p)}{\beta_1(p)} X_1 \in \mathcal{G}$$

Com que Z_p és nul o tangent *a 7, Z és* tangent a *7* arreu. Per tant,

$$.0_2 - ,3_1 \cdot \frac{\beta_2(p)}{\beta_1(p)}$$

$$\Longrightarrow \; dimU \leq 1 \quad \bullet$$

PROPOSIGIÓ IV. 10.

A M, sigui 7 una Foliació totalment geodésica, transversalment orientable, de codimensió 1. Si X e Q i LQ és una fulla compacta, aleshores:

(1) ***o X és tangent a LQ,***

(2) o ***totes les fulles son compactes i X és transvers arreu.***

DEM.:

Sigui *C{7)* el conjunt de totes les fulles compactes.

C{7) és un tancat (Reeb). Si *X* no és tangent *& LQ C C{7),* peí *Teorema S* de [Os I], *X* és transvers a J en tots els punts de *C{7).* Per tant, com que *X* respecta la foliació, *C{7)* és un obert. En consequéncia, *C{7) = M.* |

OBSERVAGIÓ. ***En el cas (2), a mes a mes, totes les fulles son isométriques (Vd Corol.lari 2.4 i Teorema 3.3 de*** **fJ-W/}.**

Cas en qué *dim M* = *2*

En el que resta del capítol IV, considererem que la varietat M té dimensió 2 i que la foliació 7 és totalment geodésica i de codimensió 1, i.e., és* un *fluxe geodésic. Suposarem també 7 orientable i transversalment orientable; T i N donaran una base ortonormal de X{M),T€T{7) iNer{7)^.

PROPOSICIÓ IV. I I.

Amb les nota,cions de II.3, posem [T, N\ = aN. Aleshores:

Xeg =^ X{a) = o

DEM.:

Es dedueix directament de ***IV. S,*** perqué quan ***dimM = 2,***

< ***VtiN,'VtfN*** >=< ***aT,aT*** >= a\

O bé, també es pot demostrar de la manera següent:

Sigui ***X = aT + /3N e g-,***

(1) ***TN{0)*** = r(aa) = ***aT{a)***

(2) ***TN{/3) = \T,N]{P) + NT{(3) = aN{/3) - N{afi) = -¡3N{a)***

Si comparem (1) i (2):

X{a) =aT{a)+0N{a) =0 |

Com hem vist a ***IV.5,*** el recíproc d'aquesta propietat no és cert en general. Tantmateix, en alguns casos sí que es verifica:

PROPOSICIÓ IV. 12.

Si, a ***mes, hi ha alguna*** $\mathcal{F}^{\perp}$***-fulla compacta, aleshores:***

D'Xe i{M) i X{a) = O, se'n dedueix ***X e Q.***

DEM.:

Observem en primer lloc que si una J"" -fulla és compacta, totes ho **son,** ja que J""' és una foÜació ***bundle-like*** de codimensió 1 (Vd ***III.S).***

Si X = [aT + PN) ei{M),

NN{a) = -N(a(3 + T{P)) = -N{ap] + [T,N]{(Í) - TN{l3) =

= -N{al3) + aN{0) - TN{0) = -pN{a) - T[aa) =

(1) = ***~í3N{a) - aT{a)*** = -X(a) = O

Si denotem per A_L x el laplaciá en una 7"^ -fulla L""", es té:

A^s.{a) = NN{a)^^ =0 (per(l))

Com L'*' és compacta, a_L ± — ***constant***

Fem el mateix a cada 7^-fulla i deduim que ***a = constant*** i per tant X respecta la foliació. **I**

OBSEVACIÓ. De manera ***similar es pot demostrar un resultat análeg quan la varietat és compacta. Tantmateix, segons el conegut resultat d'Oshikiri, en una varietat compacta, tot camp de Killing respecta la foliació.***

Capítol V

FOLIACIONS TOTALMENT GEODÉSIQUES, NO BUNDLE-LIKE DE CODIMENSIÓ 1: CAS "WARPED PRODUCT"

Per estudiar els camps de Killing en foliacions totalment geodésiques i no ***bundle-like,*** distingirem dos casos, segons pugui haver-hi o no camps de Killing normáis a la foliació. Si n'hi pot haver (o, el que és el mateix, segons veurem, si n'hi ha en el recobridor universal), direm que estem en el cas " ***warped producf,*** perqué correspon a quan el recobridor universal té, efectivament, estructura de ***warped product.***

Abans veurem un altre resultat:

PROPOSICIÓ V.i.

A M, sigui I una foliació de codimensió 1. Si existeix X camp de Killing ortogonal a ***I, aleshores:***

i) ***X respecta J\ i***

ii) ***7 és totalment geodésica***

DEM.:

i)

Si W eT{I)^ , com $\mathcal{F}^{\perp}$ té dimensió 1, ***[X,W]*** *Er{T)^* **.**

Aleshores, **V** T € T(J),

0={L^g){T,W) = ***-<{X,T],W>***

I per tant ***X*** respecta J.

ii)

Fixem-nos que X mai s'anula (Vd. ***11.10)*** i per tant és un camp global que genera J^{X} .

Siguin y, Z€ T(J):

2 < ***VYZ,X*** > = ***-X <Y,Z*** > + < ***[X,Y],Z*** > + < ***[X,Z],Y*** >=

= -(L^ff)(y,Z) = 0

Per tant, les fulles de ***7*** **son** subvarietats totalment geodésiques. |

El recíproc no és pas cert. Abans de veure-ho, però, provarem que en les hipótesis de V.l, el recubridor universal és un ***warped-product.*** Aixó, precisament, caracteritzará l'existéncia de camps de Killing normáis a la foliació.

TEOREMA V.2 (CURRAS).

A M, sigui I una foliació transversalment orientable, de codimensió 1. Si M és simplement connexa i X és un cajnp de Killing ortogonal a 7,

i) M ***és isométrica al producte L*** X (o, 6), amb ***la métrica*** $ds\overset{2}{j}\wedge = ds\overset{2}{\wedge} + f^2 dt^2$;
ii) ***dtf = 0 (i.e., M és un warped product);***
iii) ***dimM*** $\leq$ 2.

DEM.: (Vd[Cu])

i)

Per la ***Proposidó V.l, 7 és*** totalment geodésica, i) s'obté dones de ***II.S.***

ii)

Sigui ***X = Xdt*** de Killing. (X **G** 5", per¬tant).

Aleshores, ***dt{Xf)*** = O, per ***II.6.*** Posem ***f = Xf.***

$$\bar{t} = \int \frac{1}{\lambda}\, dt$$

Com que, per ***11.10, X*** mai s'anula, podem fer el canvi de coordenades:

—

Aleshores,

$$ds^{2} — ds^{2}\wedge + f^{-2}\ dt^{-2}\ .$$

i és un ***warped product.***

iii)

Podem suposar que ja hem fet la reparametrització anterior i per tant ***dt e Q.*** Sigui X = (X^ 4- ***X^dt) e g.*** Peí ***Lema II.8.1,***

$$[dt,x\backslash = x[dteg$$

Per ***(S) de II.6,***

$$o = d,\{X'j) = fX';$$

$$\Longrightarrow A'' = o, \qquad \text{perqué } f \wedge 0 \text{ arreu.}$$

D'on, evidentment, ***dimH*** $\leq$ 2. |

El recíproc, és dir, ***warped product*** impUca que hi ha camps de Killing ortogonals a la foliació, també val quan la varietat és simplement connexa:

TEOREMA V.3.

A M, ***sigui 7 una foliació totalment geodésica, transversalment orientable, de codimensió 1. Si M és simplement connexa,***

son equivalents:

i) M ***és un warped product***
ii) iii ***ha camps de Killing ortogonals a 7***
iii) ***N{ai)*** = O, **Vt** ***(Vd IL4)***

DEM.:

i) ii)

Tenim

2 2 2 2

M = L X [a, b), ds^ = ds^ + f dt , i dtf = **O.**

Posem ***X = dt = fN.*** Si apliquem ***II.6*** a ***X,*** amb X* = **O** i /? = /, obtenim que ***X e Q".***

ii) iii)

Sigui ***I3N e*** *g".* Apliquem ***IL6:***

O = iV(a,/? + ***XiiP)) = Nia^P)*** - a,iV(/?) + X(iV, - ***P)*** =

= /3iV(a,)

Pero /? 7^ **O** arreu, per ***11.10.*** Així dones, iV**(ai) = O, V Í .**

iii) i)

Com que ***M*** és simplement connexa,

2 2 2 2

M = L **X** R, ***dsj^ — ds^ + f dt***

O = a.a, = -a.(x.- **-log/)** = -x.(a.**log/),** v¿

=^ aaog/ = 7(í)

{ **/i** només depén de í

Si reparametritzem:

í = **J /i** di

Aleshores

2 2 2

ds = ***ds^*** + **ᴊ2** di és un ***warped product.*** |

OBSERVACIÓ. *Evidentment, sempre que una foliació totalment geodésica admeti camps de Killing ortogonals, podem assegurar que el recobridor universal és un warped product del tipus anterior. El recíproc, és ciar, és fals. Mes endavant en veurem una colla d'exemples.*

Abans de continuar, anem a definir una nova álgebra de Lie, ***J,*** que juga un paper análeg a ***M*** però respecte la part tangent deis camps que pertanyen a ^. Un cop haguem definit ***J,*** donarem una consequéncia del fet de pertànyer-hi, de la que a continuado en deduirem que efectivament ***J és*** una álgebra.

DEFINICIÓ.

Sigui J=:{YeT{I) \ 3Xeg i Y = X'}.

PROPOSICIÓ V.4.

A M, ***sigui J una foliació totalment geodésica, transversalment orientable, de codimensió 1 i en qué el recobridor universal és un warped product.***

Si y G J, ***aleshores W^Y = kN, on k = constant.***

DEM.:

Passant al recobridor universal, podem suposar que (M,J) és un ***warped product*** i que **ai** G 5".

Si y G J ^ 3 x = (y + *\dt)* G ***g.***

Per ***II.4:***

$$(1) \qquad \mathbf{V};,y = \sim[y,\mathbf{iv}] + \mathbf{Vyiv} = -\{Y,N]$$

I per (2), (3) i (4) de ***Vobservació*** de ***II.6:***

$$[Y,N] = [y, \overset{1}{jdt}] = -\frac{Y\text{-}f}{r}\,dt =$$

$$(2) \qquad = \frac{\partial_t(\lambda f)}{f^2}\,dt = \frac{\partial_t\lambda}{f}\,\partial t = \frac{\lambda'}{f}\,\partial t\,,$$

ja que A només depén de ***t*** (Vd ***II.6).*** Però, com hem vist a (3) de ***V.2,***

$$(3) \qquad A'' = O \Longrightarrow A' = A;, \qquad k = constant$$

Per tant, d'(l), (2) i (3):

$$\wedge\wedge Y = \sim\{Y,N] = -\overset{\lambda'}{j}\,dt = -\overset{k}{j}dt = -kN \qquad \mathrm{I}$$

Provarem ara que ***J* és,** com havíem dit, una álgebra de Lie:

COROL.LARI V.5.

A M, *s\gmi 7* una ***ío\\a.c\6 totalment geodésica, transversalment orientable, de codimensió 1 i en qué el recobridor universal és un warped product.***

Alehores, J és una álgebra de Lie.

DEM.:

Veurem quelcom encara **mes** fort:

yY,z eJ $\Longrightarrow$ ***[Y,z]eg' cJ***

En efecte: per **//.6,** ***[Y, Z]*** és de Killing a cada fulla.
Per tant, d'acord amb ***IV.6,*** només cal veure si Vjv ***[[Y, Z])*** = O?.

V^([y,Z]) = *[N,[Y,Z]]* = *[[Z,N],Y]* + *[[N,Y],Z]* =
= −[∇_N *Z,Y* + *[Vi,Y,Z* = *-[k,N,Y]* + *\k2N,Z]* =
= ***-ki'Vt^Y*** + ***k2VijZ*** = ***-k,k2N*** + ***k2kiN*** = ***0*** |

El recíproc de *V.4* no és cert en general; però sí quan ens trobem al recobridor universal:

PROPOSICIÓ V.6.

A M, sigui 7 una foliació totalment geodésica, transversalment orientable, de codimensió 1. Suposem que* M *és simplement connexa i un warped product. Sigui Y eT{7),de Killing a cada fulla i tal que [Y,dt] = 0. **Aies**/iores:

Y e J <^ ^***NY*** =^ ***k;N,*** ***k*** = ***constant***

DEM.:

==>*)*

Vd. *V.4.*

$\Leftarrow)$

Considerem ***X = Y - ktdt.*** Veurem que ***X G §:***

kN==Vr,Y = [N,Y] = ^{1} ***[jdt,Y***] =

$$= \frac{Y \cdot f}{f^{2}} \partial t = \frac{Y \cdot f}{f} N$$

Por tant,

(1) ***Yf = kf***

Però

-M-kt-f) = kf = Yf, per (1)

A mes, evidentment.

T{-kt)=0, ***\íTe7[7).***

Per tant, d'acord amb ***II.6, X E ^ i*** en consequéncia ***Y G J. M***

Sabem que quan la varietat és compacta o la foliació és a fulles compactes, tot camp de Killing respecta la foliació. Veiem qué es pot dir en aquests casos sobre l'álgebra J.

PROPOSICIÓ V.7.

A M, ***sigui J*** una foliació íotaimení geodésica, ***transversalment orientable, de codimensió 1, en qué el recobridor universal és un warped product.***

Si M és compacta o hi ha alguna 7^ -fulla compacta, aleshores dim'H $\leq$ 1.

DEM.:

Si la dimensió d'^ fos 2, hi hauria dos camps ***Xi = [Yi + /3iN) G ^ ,*** t : 1,2 , amb ***/?i*** i /Jj independents ***a M.***

Aquests camps s'eleven a camps X¿ = X + /?. ^ del recobridor universal M.

Com que ***M*** és un ***warped product,*** per ***V.2*** tindrem que

= ***Xi f = [ki t + hi) f,*** t : 1,2, amb fc,-, ***hi = constants.***

Si ***ki*** = **^2** = 0 ? **/?i)/?2** no serien independents. Suposem , dones, que fc^ ^ O, per exemple.

Podem suposar també que **/?2** mai s'anula:

En efecte, el camp $\tilde{X}$ = ^ $\tilde{X}$***i*** — $\tilde{X}$***2*** també és de §, es projecta sobre ***M*** i té per component normal $\tilde{\beta}$ ~ (^7^ — **^2^** ***f N ,*** que no s'anula mai si $\tilde{0}$***i,*** $\tilde{0}$***2*** són independents. Clarament, la independència ***de 0 i /Si*** equival a la de **^1** i ***/?2* •**

Així dones, considerem que $\tilde{/}$**?2 = ^2** / i per tant que ***0^*** no s'anula enlloc. La funció ***0x102*** está definida arreu d'M i

(1) VpeM, **VxGTT-**^Íp), $$N\left(\frac{\beta_1}{\beta_2}\right)_p = \tilde{N}\left(\frac{\beta_1}{\tilde{\beta}_2}\right)_x = \frac{k_1}{h2\ \ f\{x)}$$

Si M (o una J^-fulla) és compacta, hi haurá un extrem relatiu, po € M de la funció *01**102* • Per (1),** aixó implicaría que **fci = O,** contrariament a alió que havíem suposat.

Així dones, no hi poden haver dos elements independents a)/ i es té que ***dim* ^ ≤ 1. •**

PROPOSIGIÓ V.8.

A M, siguí *7* ***una foliació totalment geodésica, transversalment orientable, de codimensió 1, en qué el recobridor universal és un warped product.***

***Si 7 és a fulles compactes, aleshores M = Q''' (i, en particular, dimM ≤* 1).**

DEM.:

Sigui ***X=^{Y + 0N]e{g\g')*** (i.e., ***0^0).***

Per ***V.4:***

0 = < ***[X,Y],N>=< [0N,Y],N >=-{Y0) + 0 <VNY,N>--=***

(1) ***=-{Y0)+k0***

Prenem una F-fulla *Lo* arbitrària.

Com que és compacta, la funció ^ijr,,^ té un máxim, po i un mínim, *qo.*

Per tant:

$$0 = (Y\beta)_{p_0} = (Y\beta)_{q_0} \overset{(1)}{\Longrightarrow} \begin{cases} \text{Í0\{po)=0\{qo)=O} & (2) \\ \text{fc = 0} & (3) \end{cases}$$

Si (2) succeís en totes les fulles, tindríem ***0 = 0,*** cas que hem exclós.

Per tant, A; = 0. Aleshores, ***V^Y = 0,*** ***Y e g'*** (per ***IV.6)*** i

(3N = x-Y e{gnl^).

Així dones, la part normal de tot camp de ***g*** és (nula o) de Killing i per tant ^ = $\mathcal{G}^{n}$. |

COROL.LARI V.9.

A M, siguí *I una foliació totalment geodésica, transversalment orientable,*
de codimensió 1, en qué el recobridor universal és un warped product.
Si J és a fulles compactes i* j] Vjv iV|l = *constant,

aleshores)í —≺¡i.

DEM.:

Només hem de veure que no hi ha cap camp de Killing normal a ***7.***

Sigui ***X = /3N € g"'.*** En particular, per ***11.10, ¡3*** mai s'anula.

Com abans, sigui p **G** L (L una fulla qualsevol) un punt en qué ¡*3*^^ té un máxim.

Utilitzem la base habitual en un entorn de p. Per ***II.6,*** (3):

$$a_i\,(p)\ /\text{\^{}}(p) = O \quad \text{i per tant}\, a_i(p) = O, \qquad \mathbf{V}\ ¿\ :\ 1,\ldots,n\ .$$

Però aleshores:

$$\mathbf{(l|}v.iv\mathbf{|i),=}\ \left(\overset{n}{\underset{\backslash.=\mathbf{i}}{J2MP))}}^{2}\right)^{\mathbf{1/2}}\ \mathbf{= o}$$

Tindriem, dones:

$$0 = \left\| \textit{V\^{}N} \right\|$$

$$\Longrightarrow\ \nabla_N N = 0\ \Longrightarrow$$ ***J*** és ***bundle-like !! {Vd II 1.6).*** |

COROL.LARI V.io.

A M, *sigui J una foliació totalment geodésica, transversalment orientable,*
de codimensió 1, en qué el recobridor universal és un warped product.

Si hi ha una I-fuUa compacta LQ, aleshores dim}i ≤ 1.

DEM.: • • • \ • • •

DEM.:

D'acord amb ***IV.10, o*** totes les fulles **son** compactes (i aleshores el resultat está demostrat a ***V.8)*** o tot ***X G Q és*** tangent a ***LQ.*** En aquest cas, no hi poden haver camps de Killing normáis a **J** i, per un argument similar al de ***V.7*** (o bé a partir de ***V.ll),*** es té que ***dim)l*** $\leq$ 1. **I**

Veurem ara quina és l'estructura de l'álgebra ***Q*** i quíns són els casos que es poden donar d'acord amb les dimensions de les diferents algebres que intervenen en aquest procés.

Ho farem estudiant, en primer lloc, les relacions possibles entre ***J i*** $\mathcal{G}^t$***,*** per un costat, ***i H i Q'^*** per l'altre. Després ho aplicarem, juntament amb d'altres resultats anteriors, per establir l'estructura deis camps de Killing que respecten la foliació en el cas en qué la varietat és simplement connexa i finalment ho deduirem peí cas general.

PROPOSICIÓ V.11.

A M, ***sigui J una. foliació totalment geodésica, transversalment orientable, de codimensió 1, en qué el recobridor universal és un warped product.***

Aleshores, es poden donar aquests dos casos:

(1) ***O bé dimQ* = dimJ i dimQ"=dim){;***

(2) o bé ***dimQ* = dimJ*** — 1 i ***dimQ"^ = dimM — 1.***

DEM.:

Evidentment, ***Q*** $\underline{C}$***. J.***

També és ciar que la restricció de I'aplicacció ***j*** de ***II.9*** a ***Q"'*** ens dona un monomorfisme d'aquesta álgebra en)(.

Si ***Q* = J,*** donat ***X = {Y + pN) € Q,*** tindrem ***que fiN = X -Y e Q" ì*** per tant ***j*** será una bijecció.

Es té, dones, el cas (1).

Suposem ara que ***Q*** $\underset{\neq}{Ç}$ ***J:***

LEMA V.ii.i.

£n ***les condicions de V.ll, si Q*** $\neq$ ***J, hi ha una base {YI,...,YN) de J tal que:***

i) ***Y^eJ\Q* i V^Y,=N,***

ii) ***Y„...,Yf,eQ****

DEM. DEL LEMA:

Sigui *[Zi,...,* Zjv) una base de ***J.***

Per *V.4,* ***^N Zi = kiN,*** amb A;- = ***constant,*** Vt.

Si ***g**** ^ ***J,*** podem pensar que ***Zi*** G J \ Aleshores, ***ki*** ^ ***O*** (per ***IV.6).***

Siguin

Yi = *^ZieJ*
Ki

Y, = *(^^^Zi-Z,^* G J, *j:2,...,N.*

De manera trivial es comprova que ***{Yi,...,Yff)*** també és una base de ***J.***

A mes, ***V^Yi =N\ V^Y,=0,*** Vj :2,...,iV; i.e., ***Y^,...,Y^*** G . |

DEM. DE V.ll (CONTINUAGIÓ):

A partir del ***Lema, dimQ**** > ***dimj*** — 1.

Com que ^* **C** J, es té ***dimQ**** = ***dimJ*** — 1.

Estem suposant que existeix un X = ***{Y + PN)*** G ***§*** tal que ***Y*** G ***J \ §'.*** Per tant, ***PN*** i /3 ^ **O**, d'on

(3) dtm^" < dim)/, 1 < ***dimU***

Per altra banda, per ***V.2*** (considerant, si cal, el recobridor universal M d'M),

(4) ***dim'H*** < 2

De (3) i (4): ***dimH*** = 1 o 2.

Si és 1, <í¿m5" =: O = ***dim'H*** - 1.

Si és 2, existeixen X^ = ***{Yi*** + /?,iV) G ***Q, i;*** 1, 2, amb ***Pi*** i,-2 independents, no nuls.

Els pujem a camps **X^** ***{i :*** 1,2) del recobridor universal, ***M.*** Per ***V.2*** tindrem a M un camp de Killing normal, que será combinado lineal d'**Xi** i **X2.** Per tant baixará a M i ens donará un element de ^".

Tindrem dones: ***dim§"- = 1 = dimH*** — 1, també en aquest cas, d'on se segueix (2). |

TEOREMA v.12.

A M, sigui f **una** ***foliació totalment geodésica, transversalment orientable, de codimensió 1 i de dimensió n.***
Si M és simplement connexa i warped product,

es teñen les següents possibiltats:

CAS	*dimg^"*	*dimM*	*dimQ^*	*dimJ*	*dimQ*
A	*1*	*2*	*m*	m + 1	m + 2
B	*1*	*1*	*m*	m	m + **1**

amh $0 \le m \le \frac{1}{2}$ níṇ — 1)

DEM.:

Per ***V.S, dimg^' = 1.***

Per ***V.8, dimM*** ≤ 2.

Per ***IV.8, m = dimg**** ≤ | n (n - 1).

Per ***II.9, dimg = dimg^ + dim)i.***

Finalment, l'existéncia de dos casos, ***A* i *B,*** resulta de ***V.ll.*** |

TEOREMA V.13.

A M, *siguí J una, foliació totalment geodésica, transversalment orientable, de codimensió 1, en qué el recobridor universal és un warped product.*

Es teñen les següents possibíltats:

CAS	*CAS a $\widetilde{M}$*	*dimQ''*	*dimy*	*dimQ**	*dimJ*	*dimQ*
A,	***A***	***1***	***2***	***m'***	***m' + 1***	***m' + 2***
A2	***A***	***1***	***1***	***m'***	***m'***	***m' + l***
As	***A***	***0***	***1***	***m'***	m' + 1	m' + 1
A4	***A***	***0***	***0***	***m'***	m'	m'
B_1	***B***	***1***	***1***	***m'***	m'	m' + 1
B_2	***B***	***0***	***0***	***m'***	m'	m'

$$\boxed{\text{amb } 0 \le m' \le m \le \frac{1}{2} n(n - 1)}$$

(Les notacions A, B i m es refereixen a les de V.12, aplicades al recobridor universal $\widetilde{M}$ d'M).

DEM.:

Considerem el recobridor universal $\widetilde{M}$ ***d'M.***

Si a $\widetilde{M}$ es dóna el cas ***A,*** com que les diferents àlgebres teñen dimensions menors o iguals a ***M*** que a $\widetilde{M}$, d'acord amb ***V.ll i V.12,*** hi ha les quatre possibilitats enumerades.

Si a $\widetilde{M}$ es dóna el cas ***B, de*** manera análoga, es teñen per ***M*** les dues possibilitats esmentades. |

Abans de donar exemples de cadascun deis casos establerts en els dos *Teoremes* anteriors, exposarem un parell de resultats que fan referència a cóm són les ***deck-transformations*** del recobridor universal d'una foliació totalment geodésica, transversalment orientable, de codimensió **1.**

PROPOSICIÓ V.14.

A ***M, sigui 7*** una foJiació ***ioialmeni geodésica, transversalment orientable, de codimensió 1, en qué el recobridor universal, $\widetilde{M}$, és un warped product.***

{M = L̃x{a,b); ~~ **i- = ds¿ + / di ** ***dtf = 0)***

Aleshores:

i)

(f>eAut{M,M,Tr) ^ <í>{x,t) = {(f>'{x),Kt + A)

On ϕ^t ***és una isometria d'L,***

-/ i f W—^ **=*K*, V x 6 í,,**

i K i A son constants.

ii) ***<f) respecta els camps de*** <=í> ***K = 1***

iii) ***Si K = 1 i A ^ O, 4> no respecta cap camp de Q\ [Q**** **U ^ ")**

DEM.:

i)

Les ***deck-transformations*** han de ser isometries que respectin les foliacions ***f í*** $\tilde{\mathcal{F}}^{\perp}$ (elevacions a ***M*** d'J i *7* , respectivament).

Per tant, han d'enviar J-fulles (í = ***constant)*** a J-fulles, i J"""-fulles (x = ***constant)*** a *7* -fulles. Aixó implica que

4>{x,t) = [<t>\x),c¡>'^[t)).

(f>* ha de ser una isometria de ***L.***

Hem d'imposar que ***(f>"{N) = N*** (perqué suposem que *7* és transversalment orientable):

La corba integral dW = ***[l¡f) dt*** peí punt po = ***{xo,io)*** és

$$\alpha_{p_0}(s) = \left(x_0, \frac{s}{f(x_0)} + t_0\right)$$

Cal que *a^(P^) = (J)O UP^.* Per tant

$$\frac{s}{f(\phi^t(x_0))} + \phi^n(t_0) = \phi^n\left(\frac{s}{f(x_0)} + \text{í0}\right)$$

Però si aixó val **V** p **G** $\widetilde{\text{M}}$, aleshores

$$\underbrace{\frac{\text{dcf>-}}{dt}}_{*} = \underbrace{\frac{\text{f\{x)}}{(f\circ\phi^t)(x)}}_{**}, \qquad \forall\, x \in \tilde{L}$$

i mentre que (*) només depén de *t, {**)* només depén d'x (recordem que 5^/ = O !).
Per tant, ambdós termes han de ser iguals a una constant, diguem-ne ***K.***

i.e. 7^ = ^' *r{t)=Kt + A*

ii)

En la referencia triada, els elements de $\tilde{\mathcal{G}}^n$ són els múltiples de ***dt.***
Per tant, d'acord amb i), ***(f>"*** ha de ser una trasladó (i.e. ***K* = 1),** per tal de respectar-los.

iii)

Suposem ***K = 1***
Sigui ***X={Y-{kt + h)dt)*** *e9\[9'**ug'**^).* (Per tant, ***ki^O).***
La corba integral d'X per po == ***[XQ*,Ío**) és

$$\gamma_{p_0}(s) = \left(\ldots, e^{-ks}\left(t_0 - \frac{h}{k}\right) + \frac{h}{k}\right)$$

Si es vol que **'7^(po)** = ^ o ^^*P*^, en particular cal que

e^{-ks} / ***h***\ ***h*** ^ (, ***h***\ ***h***
$\Big($ * **o** - - **r**) + **r** + ^ = ^ $^{-ks}$ j^**ío** + **A** - $\frac{}{k}\Big) + \frac{}{k}$, **V 5**
kj ***k***

i això només succeix si A = 0. |

El segon deis resultats anunciats es refereix al cas en qué una de les ***deck-transformations*** és una traslladó en la direcció Oí. (En aquesta situado, la foliació és transversa a una acció Iliure de S^, encara que no és certa Fafirmació inversa).

PROPOSIGIÓ V.15.

A M, siguí T una foliació totalment geodésica, transversalment orientable, de codimensió 1. Si M admet com espai recobridor el warped product

$$\overline{M} = i \times \qquad ds^2_M = ds^2_{\wedge} + f^2 de^2 , \qquad def = 0$$

aleshores, dimQ" = dimX = 1.

(De mes a mes, πι (M) = Z e . . . j

DEM.:

Considerem el recobridor universal $\widetilde{M}$ d'M. Haurá de ser un ***warped product***

$$\widetilde{M} = ¿ \times R , \qquad {}^2_M \; ds\sim=ds^{\wedge}_L.+pdt^{\wedge}$$

i hi tindrem una ***deck-transformation (f>*** que será una traslladó

<Í>{x,t) = [x,t -\- ***Á), A = constant*** ^ 0.

Aleshores, tota altra traslladó en la direcció de les 7$^{\perp}$-fulles ha de ser ϕ^n, per algún n **G** Z (es pot demostrar amb un argument análeg al de ***V.25).***

Sigui ***il}{x,t] = {t¡)^{x),Kt*** + **B**) una altra ***deck-transformation.***

Veurem que ***K = 1.*** Per això, considerem

^1 = t/)o<^o^-i o(^-^ =^ ***<j)i{x,t) = • • • = {x,t + A{K - 1))***

(f)2^'(l)~'^ 0(f)OX})0(f>-^ =^ (j)2{x,t) = . . . = (^X,t + A ***/ 1 \ - I J***) .

Com que ***(f>i*** i **^2** pertanyen al grup de ***deck-transformations i*** **son** traslacions en l'eix Oí, han de ser potencies de ***(f>*** i per tant

K - l = n e Z
1
-
j
> ⟹ **jr = 1**

i per la ***Proposidó*** anterior, dones, tota ***deck-transformation ijj*** conserva els camps de Killing normáis a ***7,*** d'on ***dim^"*** = 1. També per la mateixa ***Proposidó, <f>*** no conserva cap camp de ^ \ **U** ^ **)** **,** i dones) / = P".

Finalment, ^ **dona** un generador Iliure del grup de ***deck-transformations.*** Hem vist que tota ***deck-transformation IIj*** tenia ***K = 1;*** i.e. commuta amb ***(f).*** Per tant, el grup fonamental d'M, que és isomorf al grup de ***deck-transformations,*** té un sumant directe isomorf a Z . |

Donarem a continuació un llistat d'exemples de cadascun deis casos que apareixen en els ***Teoremes V.12 i V.IS,*** amb la qual cosa quedará demostrat que les diferents possibilitats que allí s'esmentaven es poden donar efectivament.

EXEMPLE V.16: CAS A.

Considerem

M = R " x R , J*~>R", ***ds^*** = ***dx***^+'-- + ***dxl*** + ***f*** ^{2} ***dt^,***

on /(**zi,**... ,a:„) = e"'""^"*'^». $^{x_n)}$ i ***g*** és una funció ***C***°° arbitràaria.

Aleshores:

∂*t* **e** 5" ⟹ ***dimg"*** = 1;

dxi -tdte g ⟹ { ***dxi* G *J*** ==> ***dimJ*** = m + 1 / ***-tf e)í*** ⟹ ***dimU*** = 2

Peí que fa a m = ***dimg*:***

(1) Si

G { x 2 , . . . , X N) = **o,** ⟹ m = $\frac{i}{2}$ n (n - 1)

{g* está generada per**{axi,** **x**·^xy - ***Xjdxi}.*** $_{t,j}$.^^^....$_{n}$})

(2) I si, per exemple,

Sf(**x2**,...,x„) = **2X2**^{2} +--- + nx„,^{2} m=:0

ja que

$$i(\mathbf{R}^n) = \left\{ Y =: \sum_{i=1}^{n} \left(b_i + \sum_{j>i} b_{ij} x_j - \sum_{j<i} b_{ji} x_j \right) \mathbf{ax.} \right\}$$

i aleshores

Yeg* ^ **v^y = o** < ^ Y-iog/ = **o,**

que implica ***bi*** = ***bij*** = O, Vt,j(.

EXEMPLE V.I7: CAS B.

Considerem

M = R " x R ,   7<-^R",   *ds^ =dx¡+'-- + dx^ + f^dt^,*

on / (x „ . . . , x „) = $\overset{n}{\underset{i=1}{}}$ **neM»in(2«.)—.)**   i { δ_1 = ^
ó; = O o 1,   Vj > 1

Aleshores:

dteg" => ***dimg"*** = 1.

Altrament, donat ***Y* G Í (R** ") arbitran.

$$Y = \sum_{\text{í=i}}^{n} \left(b_i + \sum_{\}>i} b_{ij}x_j - \sum_{\}<i} b_{ji}x_j \right) \, dxi,$$

Y € J <=> Vjv F = ***constant = k***

$\Longleftrightarrow$ ***Y*** • log / = ***constant*** = k

(1) $$\Longleftrightarrow -4 \sum_{\text{»=1}}^{n} \delta_i \left(b_i + \sum_{3>i} b_{ij}x_j - \sum_{3<i} b_{ji}x_j \right) \sin^2 Xi = k$$

Si aillem els termes en cada ***Xi:***

$$\wedge \begin{cases} \text{(6ibi=0,} & \text{V¿} \\ \delta_j b_{ij} = 0, & \forall\, i,j \end{cases} \qquad (2)$$

Si ho substituim a (1):

==^ ***k = o*** $\Longrightarrow$ ***Yeg'***

Tenim dones:

J = g* i dim'H = 1.

Peí que fa a m = ***dim g****, de (2) es dedueix que:

(1) si ¿i = 1,   Vi   m = 0

(2) si ¿y = O,   Vi > 1   m = ^ n (n - 1).

EXEMPLE V.18: CAS *AI.*

(1) Considerem

$$\overset{,\,,}{M} = \frac{R''\ \mathbf{X}\ R}{\{\phi\}} \qquad \hat{J} \leftrightarrow \frac{R''\ \mathbf{X}\ \{pt.\}}{\{\phi\}}$$

on <^(zi,... ,x„,í) = (xi,...,x„_i,x„ + 1,*t*),

amb la métrica induida per la de R""^^: ***ds*** ^{2} = ***dx^*** ^{2} +——\\-***dx^*** ^{2} + ***f*** ^{2} ***dt*** ^{2} ,

i /(xi,...,!„) = e"'.

Com que ^. respecta els camps ***dt*** i **(5xi — *tdt)*** , s'obtenen a M dos camps de ^ i per tant

dimg''* = 1,** ***dimU = 2.

Peí que fa a ^*, té dimensió

$$m' = \mathbf{1} + \frac{(n-1)(n-2)}{\wedge} \qquad = m\text{-}\{n\text{-}2\}$$

i está generada per les projeccions a M deis camps de R""*"^

{dXi,XjdXk - **a;fcaxy}{i<y<fc<„_i}**
{1≤*i*≤*n*}

(2) Considerem

$$M = \frac{\mathbf{R}^n \times \mathbf{R}}{\{\psi\}} \qquad \mathcal{F} \leftrightarrow \frac{\mathbf{R}^n \times \{pt.\}}{\{\psi\}}$$

on **V(a:i,...,x„**,í) = **(xi** ,x**2** + 27r, x**3**,... ,x**n**,*t*),

amb la métrica induida per la de R""^^ : ds ^{2} = dx^ ^{2} -\\——**h** dx„ ^{2} + ***f*** ^{2} ***dt*** ^{2} ,
n

i/(x:,...,x„) = **e-' • ne'''"-'.**
i = 2

ψ és una ***deck-tmnsformation*** amb *K* = 1 (notacions segons ***V.I4),*** per tant d¿m^" = 1.

t¡} també respecta el camp ***[dx^* — *tdt),*** d'on ***dimM*** = 2.

Finalment, semblantment a ***V.17,*** tindrem que a R""^^ l'únic camp de $\tilde{J}$ és ***dx^,*** que no és de §*. Així, m = O i lógicament m' = ***dimg**** = O.

EXEMPLE V.19: CAS Aa.

Considerem

$$M = \frac{\mathbf{R}^n \text{ X R}}{\{\phi\}} \qquad \mathcal{F} \leftrightarrow \frac{\text{R" X } \{pt.\}}{\{\phi\}}$$

on 0**(xi,...,z**„,í) = **{xi**,...,x„,í + **1),**

amb la métrica induida per la de R" '^^ **:** ***ds*** ^{2} = ***dx^*** ^{2} ***-{***———h dx„^{2} + ***f*** ^{2} ***dt*** ^{2} ***,***

i /**(xi**,...,x„**)**= e^x> +$^{g(x_2}$ . . . . ^"), on ***g*** és una funció ***C°°*** arbitràaria.

Amb les notacions de la ***Proposició V.I4, (¡>*** és una ***deck-transformation*** amb ***K — 1 i A^O.*** Per tant

***dimg"* = 1, *dimH* = 1, J = 5* -**

En particular,

(1) si í/**{x2,...** ,x„) = O m' = |n(n.**-**l)

(2) si **5(x2**,...,x„) = **2X2**^{2} **H**———+ nx„^{2} **=í>** m'= O

EXEMPLE V.20: CAS A3.

Considerem

R" **X** R R" **X** ***{pt.}***

on **<jí)(xi,...,x**„,t) = **(xi** +l**,X2,...,x**„,e**-**4),

amb la métrica induida per la de R""*"^: = ***dx^*** ^{2} -\\———f**-** ***dx^*** ^{2} **+** ***f*** ^{2} ***dt*** ^{2} ***,***

i **/(xi,...,x„)** = e^**i** + ff(*"••-^"), on ***g*** és una funció C" arbitraria.

En aquest cas, *(f)* ***és*** una ***deck-transformation*** que respecta el camp ***N*** i que té, amb les notacions de ***V.I4, K*** **=** ***e~^.*** Per tant, = 0.

Tantmateix, *<i>* conserva el camp ***dxi* — *tdt.*** Així, ***dimH*** **= 1.**

A mes, ^ respecta tots els camps de . En particular,

(1) si í**?(x2,...,x„) =0** => m' = in(n**-**l)

(2) si gf**(x2,...,x„) = 2x2**^{2} **H———i-nx„**^{2} m**' = 0**

EXEMPLE V.21: CAS A_4 (MEYER).

(Vd [Me])

Considerem a $\mathbf{R}^3$ la métrica

$$as^{,2} = dx^{,2} + \left(\frac{3-\sqrt{5}}{2}\right)^{2x} dy^{2} + \left(\frac{3+\sqrt{5}}{2}\right)^{2\wedge} dz^{2}.$$

i *G* el grup generat per les isometries

$$4>i\{x,y,z) = \left(x, y + \frac{5+\sqrt{5}}{10}, 2 + \frac{y/E}{5}\right)$$

$$'f>2\{x,y,z) = \left(x, y - \frac{y/5}{5}, z + \frac{5+\sqrt{5}}{\wedge}\right)$$

$$(f)six,y,z) = \left(x-1, \frac{3-y/5}{2} y, \frac{3+\sqrt{5}}{2} z\right)$$

Sigui

$$M = \frac{\mathbf{R}^3}{G} \quad \mathcal{F} \leftrightarrow \frac{\mathbf{R}^2 \times \{pt.\}}{G}.$$

En aquest cas, resulta que ^ = 0. No donem els càlculs aquí ni justifiquem el qué d'aquest exemple perqué ho veurem amb **mes** detall **mes** endavant, en la ***Proposició VIL7.***

Si ho generalitzem a

$$\mathbf{M2} = R""\wedge \ \mathbf{X} \ M, \qquad dsj^{2}\wedge\wedge = dx^{2}, + \cdots + dx^{2}\wedge\_2 + ds_M^{2}$$

tindrem un exemple del cas ***A***^ amb m' = ~~("~iH"~^)~~ _

OBSERVACIÓ. ***El cas A4 no es pot donar quan M és una superficie, com veurem al Teorema V.25.***

EXEMPLE V.22: CAS B_1.

Considerem

$$M = \frac{K\acute{\imath}\wedge}{\{\phi\}} \qquad \wedge\wedge \frac{R"x\{p\acute{\imath}.\}}{\{\phi\}}$$

on *(f){xi,...,Xn,t)* = (xi,...,x„,í + l),

amb la métrica induida per la de R""*"^ : ***ds*** ^{2} — ***dx^*** ^{2} +——f- ***dx^*** ^{2} + ***f*** ^{2} ***dt*** ^{2} ,

i / (. . , ... , . .) = n e M . . . . . , - . „ $\sum_{i=1}^{n}$ ***o n [i : i ^ ^ ^.^^ J***

Tal com l'hem triada, <***f***> respecta tot camp de$\mathcal{G}^t$ i de$\mathcal{G}^n$. Com que M és un quocient d'un exemple del cas B (Vd ***V.17),*** obtenim les mateixes dimensions que allí. (En particular m' = ***m).***

EXEMPLE V.23: CAS B2.

Considerem

$$M = \frac{R" \mathbf{X} R}{\{\phi\}} \qquad \hat{J} \leftrightarrow \frac{R" \mathbf{X} \ \{pt.\}}{\{\phi\}}$$

on <^(**xi,...,x**„,í) = **(xi +7r,X2,...,x**„,íe^"),

amb la métrica induida per la de R""^^ : ***ds'*** = ***dxl*** -\\——**h** dx^ + ***f*** ^{2} ***dt^*** **,**

i/**(xi,...,x„)=r**[e*'("»(=-')-=^^') $\sum_{ti}^{n}$ on { ***Si=l*** ^ -J = O o 1, Vj > 1

Amb les notacions de ***V.I4, 4>*** és una ***deck-transformation*** amb ***K*** = e^". Per tant, 5" =0.

A **mes,** ^ respecta tots els elements de $\tilde{\mathcal{G}}^t$**,** d'on m' = m, com a ***VExemple V.17.***

Cas en qué *dimM* = 2

En el que resta del capítol V, considererem que la varietat M té dimensió 2 i que la foliació 7 és totalment geodésica i de codimensió 1, i.e., és un fluxe geodésic. Suposarem també T orientable i transversalment orientable; T i N donaran una base ortonormal de x[M),Ter{J)iNeT{7)^.

En aqüestes condicions, tenim definida globalment la funció a =< [T,iSr],iV^ >. ***Igual com hem vist a V.S, que el recobridor universal de M sigui un warped product equival a la condició N{a)*** = 0. ***Distingirem dos casos, segons si també T[a]*** = O ***(i.e., a = constant); o bé T{a) 7¿*** O, ***que es corresponen a les possibilitats A i B, respectivament, del Teorema V.12.***

Veurem en primer lloc un factor que diferencia els dos tipus i que no es **dona** en dimensions superiors.

PROPOSIGIÓ V.24.

Suposem N{a) = 0. ***Alesliores, si J ^ 0, a ha de ser constant.***

Quan M és,* a *mes, simplement connexa, també val el recíproc.

DEM.:

Passarem al recobridor universal i suposarem dones que la varietat és simplement connexa. Ens cal provar, per tant, la doble equivalencia:

Si J ^ 0, existeix ***X = aT + /3N e Q,*** amb ***a 0.***
Per ***II.5, a = constant.***
Com que, per ***IV.11,*** O = ***X{a) = aT{a),*** hem de teñir, per forga, T(a) = 0.

<=)

Veurem en el proper ***Teorema V.25*** que quan ***a = constant*** el recobridor universal és del tipus

2 2 2

R x (c , d), ***ds = dx +e'^'"'dy ,*** ***k = constant ^ O***

Un senzill cálcul permet veure que ***[dx — kydy) € §.*** Per tant, ***dx G J.*** |

El cas ***warped product*** en superficies simplement connexes és fácil d'establir i de donar-ne un model. Peí que fa a superficies en general, també en podem donar l'estructura, per mitjá d'un procés que es basa en l'estudi del recobridor universal i del grup de ***deck-transformations.*** El fet que aquest grup hagi d'actuar de forma própiament discontinua fa que, en aquest cas de dimensió baixa, pugui donar-se una classificació de les diferents possibilitats que hi ha per a l'álgebra ***Q***, en funció del grup fonamental de la superficie.

Estudiarem, en primer lloc, el cas ***a = constant.***

TEOREMA V.25.

Quan ***a = constant:***

i)

7r,(M) ≃ f triWaJ |^

¡i)

Si* TTi (M) *és trivial ⟹

- ***dimQ*** = 2,
- ***M és isométrica a*** **R**^{2} o R **x** (c, d).
- amb ***ds***^{2} = ***dx***^{2} ***+e'^'"'dy***^{2}
- ***i foliat per*** J -«-^ R x ***{pt.}.***

iii)

Si **TTi (M)** ≅ Z ⟹

- ***dimQ = 1***
- o bé ***totes les 7 ^ - fulles son compactes, cap T-fulla ho és i Q = Q"***
- o ***bé cap 7***$^\perp$***-fulla és compacta, una o cap 7-fulla ho és i Q"*** =0

DEM.:

LEMA V.25.1.

El recobridor universal d'M és isométric a R^ o a R **x** (c, d),

amb ***ds***^{2} = ***dx***^{2} ***+ e'^'"'dy***^{2} ***,*** ***k =—a = constant***

DEM. DEL LEMA i:

Per ***V.S,*** el recobridor universal será

$\widetilde{\mathbf{M}}$ **S** $\tilde{\mathbf{L}}$ **x** (c , d) , ***ds***^{2}***~=:^dSf+f***$^{.2}$***dt***$^{\sim 2}$, $\partial_y f = 0$.

Com que $\tilde{L}$ ha de ser 1-dimensional i simplement connexa,

$$\tilde{L} \cong \mathbf{R}$$

Tenim, per hipótesi, ***a* = *constant***. De la definició d'a:

constant* = —*T̃ • log / = —5^. log /

D'on

$$f = e^{-ax} = e^{kx} \quad \blacksquare$$

DEM, DE ü):

Si ***M*** és simplement connexa, és isomorfa al seu recobridor universal i és del tipus citat.

Considerem

X=dx- kydy = r - ***kye'^'N***

Aleshores:

a = 1 = ***constant,*** ***N{0) = ~k = aa,***

ap + r(/3) = ***k'^ye'^' - k"" ye"'*** = O

Per tant ***X E Q.*** Com ***dt E Q ,*** tenim ***"H*** = , —A;ye""} de dimensió 2. Estem, dones, en el cas ***A*** de ***V.12,*** amb m = O (Per *III.8* no hi pot haver cap camp de Killing tangent). |

Sabem que

$$M \wedge \frac{\tilde{M}}{Aut\{\tilde{M},M)}$$

Per tant, hem déstudiar el grup de ***deck-transformations.*** Aqüèstes **son** isometries, respecten el camp $\tilde{N}$ (perqué (M, J) és transversalment orientable) i respecten la foliació. Tenim:

LEMA V.25.2.

Les deck-transformations de $\tilde{M}$ son del tipus

<Í>{x,y) = {x +A,ye~'"^ + B), A, B = constant s

DEM. DEL LEMA 2:

D'acord amb ***V.14,***

cl>{x,y) = {<i>'{x),Ky + B)

(f>* ha de ser una isometria a R que respecti l'orientació, per tant és una trasladó

(j)^{x) = x + A, A = constant

Per altra banda.

$$K = \frac{f(x)}{(f \circ \phi^t)(x)} = \frac{e^{kx}}{e^{k(x+A)}} = e^{-kA} \quad \blacksquare$$

Hem d'estudiar cóm pot ser el grup ***G*** de les ***deck transformations.*** Recordem que aqüestes no poden teñir punts fixes (per tant, si al ***Lema 2 A = O,*** cal que B 7^ 0) i el grup ha d'actuar de forma própiament discontinua.

LEMA V.25.3.

Si G té un únic generador, és ¡liure.

DEM. DEL LEMA 3:

Sigui ***(f>{x,y)*** = (x + ***A,ye~''-^ + B)*** generador de ***G.***

Si A = O, <f) és una traslació i evidentment no és nilpotent.

Si A 7^ O, per un senzill cálcul:

<l>^{x,y)=---=\^x + rA, ye' + **j**

que no pot ser mai la Identitat. |

LEMA V.25.4.

Siguin

<f>{x,y)=^{x + A,ye-'''' +B), V(x, ***y) = {x + A, ye'*** "'^ + ***B)***

Aleshores

(j) i t}j commuten ^ B _ - e'''^) = B (l - e"''^)

DEM. DEL LEMA 4:

i4>o,p){x,y) =(^x + A + A, ye-'=(^ + ^' ***+ B^***

{ÍJo<f>){x,y) = (^x + A + A, ye-''(^+^'+5e-''^+l)

Igualant, s'obté la fórmula eniuiciada. |

LEMA V,25.5.

Siguin (f> i dos elements de G que commuten i no son Uiures

(i.e., **3** r**,5 e** ***Z tais que (f)" o tli' = Id)***

Aleshores,

3 X **e** G íaJ que <^ = , =

DEM. DEL LEMA 5: ...\...

DEM. DEL LEMA 5:

Amb les notacions del ***Lema*** anterior, suposem primer que ***A*** ^ ***O*** ^ $\overline{\textbf{\textit{A}}}$**.**

Fent cálculs i utilitzant la igualtat del ***Lema 4,***

$$(\phi^r \circ \psi^s)\,(x,y) = \cdots =$$

$$= \left(x + rA + s\overline{A},\ \ ye\text{-''}i\text{-}\wedge + \text{'}\wedge) \ +B\frac{1-e^{-krA}}{1-e^{-ks\overline{A}}}+ \quad e\text{-*'}\wedge \overline{B}\frac{1-e^{-ks\overline{A}}}{1-e^{-k\overline{A}}} \right) =$$

$$= \cdots = \left(X + rA + sA,\ \overline{\ }\,ye\text{-Mrvl} + .\,\overline{A}\,) + B\frac{l \ \_ \ g\text{-}\ k\{rA + ,\overline{A})}{l\text{-}e\text{-''}\wedge} \right)$$

Per tant:

(j)^ oip' = Id <***F***=^ rA + s$\overline{\text{A}}$ = **o**

Podem suposar que r i 5 **son** primers entre sí. Aleshores

(l) 3 m, n 6 **Z** I nr — ***ms*** = 1

Sigui ***X*** = $\phi^m\circ$ ***i***^'' ^ ***G- Com 4> İ ip*** commuten:

$$\chi^r = \phi^{rm} \circ \psi^{rn} \overset{(1)}{=} \phi^{rm} \circ \psi^{1+sm} =$$

= *{<f)' OXIJ')"^ orP = Id orlj^xP*

$$\chi^s = \phi^{sm} \circ \psi^{sn} \overset{(1)}{=} \phi^{rn-1} \circ \psi^{sn} =$$

$$= (\phi^r \circ \psi^s)^n \circ \phi^{-1} = Id \circ \phi^{-1} = \phi^{-1}$$

Per tant, ***(f>*** i ***ip*** venen generats per x-

Si A = O $(\phi \neq$ ***Id)*** i commuten, també $\overline{\text{A}}$ = O, peí ***Lema 4-*** **Son** dues traslacions, dones, i

(f>' oxf)' = Id$\Longleftrightarrow$ ***rB*** + $\overline{\textbf{\textit{sB}}}$***=0***

Podem suposar que r i s **son** primers entre sí. Aleshores

(l) 3 m , n 6 Z ¡ ***nr*** — ***ms*** = ***l***

Sigui X = íí»"' o V»" G G. Com abans.

$$\chi^r = \psi, \qquad \chi^{-s} = \phi \quad \blacksquare$$

LEMA V.25.6.

Si dues isometries de G commuten, no son independents com a generadors.

DEM. DEL LEMA 6:

Suposem el contrari. Siguin

(l){x,y) = {x + A,ye-''^ + B), **t/;(a;,y) = (x + I,ye-'^ +*B)***

Suposem primer que ***A*** ^***0*** ***A***

Si (f> i t/} son independents, peí ***Lema*** anterior:

(2) V r , **s e Z ,** TA + SAT^O

Podem suposar A > A > **0.** Aleshores, sigui

(3) no =: ***max*** {n G N | A - nA > 0} > 1

Diguem **Oi** *=: A — UQA > 0.*

A-ai =-A + {no +1)A>0 per (2), (3)

Tindrem dones A > **Oi** > **0.** Siguin

Hi' =: ***max{n*** **G** N | ***nai*** < A} > **1,** **Ui** =: ***rii'*** + **1**

Si riiOi = A, tindríem

riiA — **(no ni** + **1**)A = **O,** contradint (2).

Per tant ***n^ai*** > ***A.*** Sigui

02 =: nj tti — (no ***rii*** + 1)A = nj Oi — A > O

«2 — Oi = (í^i - l)**ai** - A = n/cj — A < O

Per tant, A > **ai** > **«2** > O-

Així, recurrentment, construiríem una successió monótona, decreixent, afitada inferiorment, de termes que **son** combinació lineal entera d'A i A:

A > **Oi** > **a2** > • • • > a, > • • • > O, = myA + rñyA

Per tant

3 (5 = lim ay.
y-» oo

Considerem la familia d'isometries de ***G:***

$$\chi_j =: \phi^{m_j} \circ \psi^{\overline{m}_j}$$

Fent un cálcul desagradable i emprant la igualtat del ***Lema 4*** obtenim:

$$\chi_j(x,y) = \cdots = \left(x + a_j,\ ye^{-ka_j} + B\frac{1 - e^{-ka_j}}{1 - e^{-kA}}\right)$$

Per tant la isometria

/ 1 _ g-**fcí** \
X(x,y)= (*x* + *6,* *ye-"'* + *B-*———)
\ 1 — e~*'* /

és el limit de la familia:

X = lim ***X}***
***i*— oo**

Pero aleshores, ***G*** no actuarla de forma própiament discontinua !! (Vd [K-N I, p-44]).

Suposem ara A = O (i per tant ***A— tí).***

De manera semblant, tindrem

Vr,sGZ, rB + sB^O

i repetint el procés anterior, canviant el paper de les ***A, A*** per ***B*** i B, arribariem a la mateixa contradicció. |

Finalment, per acabar de conéixer cóm és ***G*** ens cal el

LEMA V.25.7.

Qualsevol parella d'isometries de G commuten entre sí

DEM. DEL LEMA 7:

I) Si a G hi ha una trasladó en la direcció ***OY.***

Totes les traslacions commuten entre si. Peí ***Lema 5,*** podem suposar dones que totes les traslacions de ***G*** **son** múltiples de

X{x,y) = (x, y + B).

Si existis una isometria 0 que no commutés amb x seria

<f>{x,y) = (^x + A, ye~''^ + B^ , amb A **7**^ O, peí ***Lema 4.***

Tindríem:

$(\phi$ o X o **r 1** o X-^)(x, y) = • • • = (x, y + ***Bie-'^* - 1))**

(<ji.-^ o x o , ^ o x - ^) (x , y) = (x, *y* + ***Bie"^*** - l))

Com que totes dues són traslacions, han de ser potències de x- I>e.

***e-"^ e* Z, *e"^ e* Z**

que només pot succeir si A = O, contradicció!

II) Si a G no hi ha cap traslació en la direcció ***OY.***

Siguin ***<f)*** i ***tp*** que no commuten,

<í>{x, y) = {x + A, ye-"^ + B), *x¡j{x,* y) = (x + $\bar{}$*A, ye'"^* + $\bar{B}$*)*

Considerem

$$[(¡>o'4,o(j>^{-} \wedge ot7) \ ')(x,y) = \cdots = \left(X, \ y + \underbrace{B(l-e-'=^')-\bar{B}(l-e-'=^)}_{C} \right)$$

Peí ***Lema*** *4,* ***C*** no pot ser zero, si ^ i ^ no commuten. Per tant, tindríem a G una traslació, que justament és el que havíem negat en la hipótesi ! |

DEM. DE i):

Si tots els elements de G han de commutar ***[Lema* 7),** tots depenen d'un mateix element ***{Lemes 6 i 5),*** que ha de ser Iliure ***[Lema* 5).** Per tant, si el grup de ***deck-transformations*** no és trivial, és isomorf a **Z.** Finalment, per un conegut resultat d'espais recobridors, TII (M) és isomorf al grup de les ***deck-transformations*** i en consequéncia a **Z.** |

DEM DE m):

Diguem ***(f)*** el generador del grup de les ***deck-transformations.*** Distingirem dos casos, segons si ***(f>*** és una traslació o no.

(I) Primer cas:

Si *(l>[x,y) = [x, y + B)*

Per la ***Proposidó V.I4,*** com que no hi ha camps de Killing tangents (m = O a ***V.IS),*** tindrem ^ = ^" i té dimensió **1.**

És ciar que la varietat és topológicament un cilindre, que les J-fuUes en **son** les generatrius i les ***I*** $^{\perp}$-fulles seccions circulars.

(II) Segon cas:

Si *<j){x,y) = {x + A, ye-'^ +B),* *A* $\neq$*O*

Per la ***Proposició V.I4,*** és ciar que ***Q"*** = 0.

Sigui

$$X = \partial x + \left(\frac{kB}{1 - e^{-kA}} - ky\right)\partial y$$

Com que ***X*** és combinado (a coeficinets constants) de ***dy*** i ***{dx — kydy),*** d'acord amb el que hem vist a **ṫ),** ***X E Q̃.***

La corba integral d'X per Po = (a^o, I/o) és

$$\alpha_{p_o}(s) = \left(x_0 + s, \quad e^{-ks} \cdot \left(y_0 - \frac{B}{1 - e^{-kA}}\right) + \frac{B}{1 - e^{-kA}}\right)$$

Es comprova f̂acilment que

(^HPO) = ' «PO-

Per tant, X **dona** un camp a ***M*** i ***dimQ*** — 1,

Com que cap /^ -fulla pot teñir punts de la mateixa fibra (respecte de l'acció de ***(f>),*** les *7* -fulles mai no són compactes.

La única J-fuUa compacta seria la projecció de la J̃-fuUa

$$y = \frac{B}{1\_ \ \text{e-fcA}} '$$

(si és que aquesta fulla pertany a $\widetilde{M}$, cosa que no té perqué succeir si $\widetilde{M}$ = Rx (c, ***d)).*** Observem que el camp ***X*** és tangent a aquesta fulla, com ja sabíem per ***IV.10.***

A mes, totes les J-fulles **son** adherents a la fulla compacta, si existeix, o **son** denses en cas contrari. Les fulles transverses tallen infinits cops cadascuna de les J-fulles menys, si de cas, la fulla compacta, que només la tallen un sol cop. |

Si comparem el ***Teorema*** anterior amb ***V.13,*** ens adonem que quan la varietat és una superficie amb recobridor universal del tipus **A,** només **son** possibles els casos ***A2*** i **A3**. El cas **Al** no es pot donar perqué és aquell en que es redueix només el nonmbre de camps de ***Q****, que aqui és zero d'entrada. **A4** tampoc es pot donar si exigim que la foliació sigui transversalment orientable.

Donarem ara nous exemples en superficies deis casos esmentats:

EXEMPLE V.26: CAS *A*.

Trivialment, n'hi ha prou amb considerar el pía foliat per rectes paral.leles a l'eix ***OX,*** amb la métrica

$$ds^{2} = dx^{2} + \text{e\^{}*}\, dy^{2}$$

(i.e., un model del pía hiperbólic).

EXEMPLE V.27: CAS *A^*.

Considerem la pseudoesfera, i.e. la superficie de $\mathbf{R}^3$ parametritzada per

$$x\{u,v)\text{—:}\; \left(e''\ cosu,\ \ e''\ \text{sin ti},\ \ \int_{Jo}^{rv} \overline{Vi — é\text{\^{}}''}\ dv \right]_{J}$$

amb la métrica induida per l'euclidiana de l'espai.

La foliació de la pseudoesfera per les generatrius ***{u = constant}*** és totalment geodésica. Les $J^{\perp}$-fulles **son** els paral.lels de la superficie de revolució.

L'únic camp de Killing que respecta la foliació (de fet, l'únic camp de Killing) és ***du,*** que és normal a la foliació.

Tenim, dones, un exemple del primer cas de ***V.85, iii).***

EXEMPLE V.28: CAS *A3.*

Considerem

$$M = \frac{R \times R}{-\ \wedge}\ \ \hat{I}\ \wedge\ \ R \times \{\text{pí.}\}\qquad on\text{<}l\text{>}ix,y) = \{x + l,\ ye\text{-'}),$$

$$\text{amb la métrica induida per la de R\^{} :}\quad ds^{2} = dz^{2} + \text{e\^{}*}\, dy^{2}\ ,$$

Correspon, amb les notacions de ***V.I4,*** a una isometria amb ***K =*** . Per tant, ***9"*** = 0,

L'únic camp de § (de fet, l'únic camp de Killing a ***M)*** és la projecció de ***[dx — ydy)*** (que és respectat per *(f>).*

Hi ha una única J-fulla compacta, la projecció a M de {y = 0}. Totes les altres fulles Ii **son** adherents.

(Si enlloc de R^ haguéssim pres R x **(0,00)**, no hi hauria cap fulla compacta i totes serien denses a M).

Tenim, dones, un exemple del segon cas de ***V.85, iii).***

OBSERVACIÓ. ***Tots els exemples anteriors corresponen a superficies de curvatura constant negativa. No és pas casualitat: provarem*** més endavant ***(VII.8) que quan a = constant, la*** curvatura ***és també constant i val —a*** ^{2} ***.***

Anem peí segon cas anunciat:

7EOREMA V.29.

Quan JV(a) = 0; però ***T{a)*** $\neq$ 0;

i) ***g = g"*** **i** ***dimg*** $\leq$ **i.**

ii)

$$\pi_1(M) \cong \begin{cases} \text{triviaí} \\ \text{Z} \\ \textbf{z e z} \end{cases}$$

iii) ***Si*** **TTi**(M) ***és trivial, dimg*** = 1

iv) **SÍ7ri**(M) ^ Z,

==^ <
- ***I) aés una funció periódica (de període A)***
- / /) o ***bé totes les 7*** $^{\perp}$ ***-fulles son compactes, cap 7-fulla ho és i dimg*** = 1
- ^ / / /) o ***bé cap 7*** $^{\perp}$ ***-fulla és compacta***

v)

En el cas / / /) : <
- ***si I a{s) ds = O =^*** ***i dimg*** — 1 / ***Totes o cap 7-fulla son compactes***
- ***si I a[s) ds ^ O =^*** ***g = 0*** / ***Una o cap 7-fulla és compacta***

vi j Sí TTi(M) ^ Z ® Z,

^ J
- ***(' IV) aés una funció periódica (de període A)***
- ***V) dimg*** = 1
- , V /) ***totes les 7*** $^{\perp}$ ***-fulles i totes o cap 7-fulla son compactes***

DEM.: • • • \ • • •

DEM. D'ṫ):

Per la ***Proposició V.S4,*** tenim directament ^ = $\mathcal{G}^n$ que, altrament, sempre té dimensió **mes** petita o igual a **1.** |

Com en el ***Teorema*** anterior, el recobridor universal $\widetilde{M}$ será

$$\widetilde{M} = Rx(c,íi), \qquad ds^{\wedge}_{\widetilde{M}} = dx^{\wedge} + f^2\, dy^{\wedge}, \qquad 9„/ = 0$$

Hem d'estudiar-ne el grup ***G*** de les ***deck-transformations.***

LEMA V.29.1.

Si 3<f>eG, (f)^ Id, aleshores:

(1) ***a és una fundó periódica (de peri'ode A); i***

(2) ***<f>{x,y)*** = (x + rA, ***yK'^ + B)***

on B = constant, r **G** Z i ***K = e~*** $(\int_0^A$ ***«{»)<»<)*** = *constant.*

DEM. DEL LEMA i:

Per la ***Proposició V.I4,***

<f>{x,y) = [<f>'{x),Hy + B).

Com en el ***Teorema*** anterior, la part tangencial ha de ser una trzíslació. Posem, per exemple, ***<j>'***(x) = **X** + ***C.*** També:

$$\textit{constant} = H = \text{,}\frac{\text{A'AAA},}{(J \circ \phi^{\cdot})(x)} = \frac{f(x)}{J(x + C)}. \qquad \forall x$$

D'on /'(x) =ií/'(x + C) i

a(x) = -{log /)'(x) = -(log***H)'*** - (log /)'(x + ***C)*** = -(log/)'(x + C) = a(x + C)

Per tant la funció ***a*** és periódica. El període ***C*** que hem trobat depén de la isometria que considerávem; però com que estem en el cas ***a*** ^ ***constant,*** hi ha d'haver un període mínim, no nul, que anomenarem ***A.***

Sigui ***h*** una primitiva qualsevol d'a; Vx:

$$g\{x + A) = g(0) + \int_{Jo}^{rx+A} a\{s)ds =$$

$$= g(0) + \int^{x}_{rA} a\{s)\, ds + \int_{x}^{rx+A} 0(5)\, ds =$$

$$= g\{x) + \underbrace{\int_{Jo} a\{s)\, ds}_{= K_1}$$

Ki no depén de la primitiva escoUida i per tant, si posem:

(3) **ür** = e-^'

tindrem

f{x + A) = e-''(^+^' = e-"'^'-^' = *Ke-'^'^* = *Kf{x)*

Tornem a la isometria *4>*-

La constant C, dones, ha de ser un múltiple enter del període; i.e. ***C* = *rA*** per algún $r \in \mathbb{Z}$. i

$H = \frac{f(x)}{/(x + C)} = \frac{f(x)}{/(x + rA)} = \frac{f(x)}{K\hat{}í\{x)}$ = ^ •

OBSERVACIÓ. Pot succeir que ϕ^t = ***Id. Aleshores, el "període" serà*** A = O i ***tindrem K = 1, i.e., una trasladó en la direcció OY. També pot ocórrer que K sigui 1 encara que hi hagi un període no nul.***

LEMA V.29.2.

Si G té un únic generador, és lliure

DEM. DEL LEMA 2:

Sigui *4>* el generador,

<^{x,y) = (x+rA, *yK^* + *B)*

Si **A** = O, per (3), if = 1 iϕ és una traslació, que mai no és nilpotent.

Altrament, fem cálculs i:

<í>'{x,y)=(^x + srA, yJC — + J9^^~ $\frac{K^{-rs}}{-K^{-r}}$)

que mai pot ser la Identitat. |

Considerem dos elements de G:

(l>{x,y) = {x + rA, yK- +B) í/-(x,y) = (x + sA, yÜT"'+l)

Com en el cas precedent, es calcula que

(4) ***(l>i^*** commuten ***B {K'' -l) =$\overline{B}$ [K"*** - l)

LEMA V.29.3.

Dues isometries qualssevol de G sempre commuten entre sí

DEM. DEL LEMA 3:

* Si a G hi ha una traslació en la direcció ***QY.***

Peí ***Lema V.25.5,*** totes les traslacions **son** potències d'una d'elles,

$$X\{x,y) = [x, y + B)$$

Qualsevol altra traslació commuta amb x- Si <^ e G i no hi commuta, ha de ser

<^(x,y) = (x + ***rA, yK'^*** + ***D) ,*** amb rA ?¿ O iJC $\neq$ 1.

Considerem:

{cf>oxocf>-'ox-'){x,y) = ***--'={x,y+B{K-^-l))***

{4>-'oxo<f>ox-']{x,y) = ***---={x,y*** + ***B{K' -1))***

Ambdues composicions donen traslacions, que per tant haurien de ser potències de X- Caldria

$$K^{-r} ez \quad \text{i} \quad K^{r} ez$$

que no pot passar si K7^ 1!

** Si a G no hi ha cap traslació en la direcció ***OY.***

Considerem ***(f>*** i ***ip*** que no commuten,

(¡>{x, y) = ***{x + rA, yR-' + B) ,*** ^***{x,*** y) = (x + ***sA,*** yiC"' +1)

Si fem:

$$\{(f> o\ tf\} o\ (f)\text{-}\wedge\ o\ t_i J\ \wedge)(x,y) = \cdots = \left(x,y \underbrace{+ \quad B\{l\text{-}\overline{K}\text{-}')\sim B\{l\text{-}K\text{-}')}_{D} \right)$$

Com que no commuten, per (4) ***D ^ 0.*** És dir que a G hi hauria una traslació, just alió que negávem a la hipótesi! |

LEMA V.29.4.

Si a ***G hi ha una isometria***

4>{x,y) = ***(x + rA, yK-'+B)*** amb Jf # 1,

aleshores G = Z.

DEM. DEL LEMA 4: •.•\-..

DEM. DEL LEMA 4:

A G no hi poden haver traslacions perqué, d'acord amb (4), no commutarien amb ***(f)***, contradint el ***Lema S.***

Sigui ***ipeG,***

$$tP\{x, y) = (s + sA, yK\text{-}' + \bar{b}) .$$

Posem

(5) r = mí, ***s — nt, {t = m.c.d.[T,s))*** 1 = $\bar{m}$m + ñn.

Com que ^ i ***tp*** commuten ***[Lema S)*** i

$$nr - ms = nmt - mnt = O,$$

tindrem:

{ror" ')ix,y) = --- =

$$= \left(X, \quad \underbrace{y+(\bar{B}\{K\text{-}'\text{-}1)\text{-}B\{K\text{-}'\text{-}1))}_{= 0\text{ , per }(4)} \cdot \frac{1 \wedge '' ''}{(1 - K^{-s})(1 - K^{-r})} \right) =$$

$= \{x,y)$

(6) i.e. **o ^ - "** = ***Id.***

Diguem X = <$\bar{\wedge}$''*' o '$\bar{/}$''' e G. Es té:

$$\chi^n = \phi^{\bar{m} n} \circ \psi^{\bar{n} n} \overset{(5)}{=} \phi^{\bar{m} n} \circ \psi^{1-\bar{m} m} =$$

$$= \left(\phi^n \circ \psi^{-m}\right)^{\bar{m}} \circ \psi \overset{(O)}{=} Id \circ \psi = \psi$$

$$X^{TM} = \phi^{\bar{m} m} \text{ o } \wedge^{\bar{''}}{''}\wedge \overset{(5)}{=} <\wedge i\text{-}^{\bar{''}}{''} \text{ o} \psi^{\bar{n} m} =$$

$$= (f)o \{(j)\text{-}'' \, oxl)'')^{\bar{''}} \overset{(6)}{=} (f)oId = ()>$$

Per tant, hem trobat un generador comú.

Així dones, G ha de teñir un únic generador, que será Iliure ***{Lema 8).*** |

LEMA V.29.5.

Si** a **G hi** ha ujia **isometria

<j){x,y) = {x + rA,y + B) {i.e.K^l),

aleshores** $G \stackrel{\sim}{=} Z$ **o $G \stackrel{\sim}{=} Z$ © Z .

DEM. DEL LEMA 5:

* Si a G hi ha una traslladó en la direcció ***OY.***

Podem suposar que ^ és aquesta traslladó (i.e., r = 0) i, peí ***Lema V.25.5,*** que tota altra traslladó en la direcció OY" és potencia de <p. Siguin ψ_1 i V'2 de G,

V'i(a;,y) = (x + SiA, y + Bi), V2(x,y) = (a; + 52A, y + B2), 5i7^0 7¿S2

Posem

(7) *Si* = ***mt,*** S2 = ni, ***[t** = **m.c.d.{si,S2));*** ***l=fñm + ñn.***

Tindrem:

(V'r o02-"')(x,y) = • • • = (z, y + nBi - ***mB2)***

que ha de ser, dones, potència de <^:

(8) ***riorl^-"- =4>'***

Diguem

$$\chi = \psi_1^{\overline{m}} \circ \psi_2^{\overline{n}}.$$

Aleshores:

$$(*\overline{\wedge}'\text{"}ox'\text{"})(x,y) = ---. = \left(X + \underbrace{m(\overline{m}Si + \overline{7}152)}_{=AIPER(7)}\text{-4)} \quad y + I\tilde{n}B + \underbrace{m[r\tilde{n}^{-} Bi + \overline{n}B2 \;)}_{= BI\text{ -ÍFTB } PER(7),(8)} \right)$$

= (x + SiA, y + Bi) = T/'i(x,y)

$$(\wedge\text{-}\overline{'}\text{-}ox\text{"})(x,y) = .\text{-}. = V'2(x,y)$$

Per tant, els grups generats per **{<^,0i,V'2}** i **{0>x}** coincideixen.

Així dones, ***G*** tindrá peí cap alt dos generadors, Uiures (perqué **son** traslacions de vectors independents) i que commuten.

** Si a G no hi ha cap traslació en la direcció ***OY.***

Si ha ***G*** hi ha dues isometries

Í^iix,y) = {x + SiA, y + Bi), 7p2Íx,y) = ÍX + S2A, y +B2), Si^0j^S2,

posem, com a (*).

Si = mt, S2 = nt, {t = m.c.d.[si, S2)); l = mm + ñn.

Tindrem:

(^;* o^--)(a:,y) = • • • = **(2,** y + nfl^ - mB^)

Com que no hi ha OY-traslacions, cal que ***nBi*** **— tmBq** = 0.

Aleshores, diguem

Com al ***Lema 4,*** obtindrem

^1 = i **^2 = <^"'**

i dones hi ha un únic generador: G = Z. |

DEM. DE *n):*

És evident deis dos ***Lemes*** anterioi^. |

DEM. DE *ni):*

Evident, |

DEM. DE *iv)* i *v):*

I) s'ha provat al ***Lema 1.***

Si les isometries de G **son** traslacions en la direcció ***OY,*** per ***V.I4, dim§"*** = 1. També és obvia l'estructura de les fulles que s'indica a / /) .

Si no hi ha a OF-traslacions, és ciar que cap J"^-fulla és compacta (///)).

D'acord amb ***V.I4,***

^« = 0 **7¿** 1, **V** isometria de G

i si tenim en compte la definició de ***K*** (Vd (3)), obtindrem les dues possibilitats que s'indiquen a ***v)*** per a ***Q.***

Quan totes les isometries de G teñen X = 1, les 7-fulles serán totes (o cap) compactes segons si a G hi ha OX-traslacions (o no n'hi ha cap, respectivament).

Finalment, ***si K ^ 1*** per a les isometries de G, la discussió sobre les J-fuUes és análoga a la de ***V.S5 iii).*** |

DEM. DE *vi):*

IV) ho hem provat al ***Lema 1.***

D'acord amb la demostració del ***Lema 5, cas *,*** totes les isometries de ***G*** teñen ***K = 1 i*** per ***VJ4, dimg"*** = 1 (F)).

També hi hem vist que a G hi ha d'haver traslacions en la direcció ***QY,*** per tant les ***I*** $^{\perp}$-fulles **son** circumferéncies. Peí que fa a les J-fuUes, serán totes (o cap) compactes segons si a G hi ha OX-traslacions (o no n'hi ha cap, respectivament) (FJ)). |

Comparem el ***Teorema*** anterior amb ***V.12*** i ***V.IS.*** És ciar que quan la superficie és simplement connexa (o bé, el recobridor universal), correspon al cas ***B;*** mentre que en general, ara sí, es poden donar tant el cas ***Bx*** (apartats ***iv)II), vi)*** i, de vegades, ***iv)III)*** del ***Teorema),*** com el cas ***B2*** (apartat ***iv)III),*** de vegades).

Com anteriorment, donarem **mes** exemples, en superficies, de tots aquests casos:

EXEMPLE V.30: CAS *B.*

Considerem l'helicoide, i.e. la superficie simplement connexa de $\mathbf{R}^3$

$$x(«, v) = (ucosu, usinu, v)$$

amb la métrica induida per l'euclidiana de l'espai.

La foliació definida per les rectes ***{v = constant}*** és totalment geodésica. Les ***T*** $^{\perp}$-fulles **son** hélixs.

Calculant, s'obté

$$a = \frac{-u}{1 + «^{\wedge} *}$$

L'álgebra ***Q = g"*** está generada peí camp ***dv.***

EXEMPLE V.si: CAS *B^.*

Considerem

$$M=:j^{\wedge}, \quad I \ ^{\wedge} \quad ' \quad {}^{\circ}\wedge \quad (f>\{x,y) = \{x,y+l),$$

amb la métrica induida per la d'R^ $ds^2 = dx^2 + (^{\wedge}e'' + e^{\sim *})^2 \, dy^{2}$

Aquí, amb les notacions de *V.29,*

$$a=-\frac{e^{-x} - e^{x}}{e' + e-'} \wedge, \qquad A = 0, \qquad K = l.$$

El camp TT. ***[dy]*** genera l'álgebra deis camps de Killing que respecten J.

És, dones, un exemple del cas ***V.29 iv), II).***

EXEMPLE V.32: CAS *Bi.*

Considerem

$$M = -\overset{R \times R}{\wedge}, \qquad 7 \wedge \frac{R \ X \ \{pí,\}}{\{\phi\}} \text{ — o n <}, \wedge (x, y) \overset{X \quad /}{=} (x + \mathbf{27r}, \ y + S),$$

$$\text{amb la métrica induida per la de } R\wedge : \ \mathbf{ds}^{2} = \mathbf{dx}^{2} + e\wedge''°'*cíy^{2} .$$

Calculem ***a*** = —(log /) ' = sinx. És periódica, amb període A = **27r** i

$$K = e^{-\int_0^{2\pi} \sin x \, dx} = e^0 = 1$$

<*f*> respecta el camp ***dy*** que baixa a M i **dona** un generador de §.

Les fulles transverses és ciar que no **son** compactes. Peí que fa a les J-fuUes, ho **son** totes si B = 0; altrament, cap ho és.

Tenim per tant un exemple de ***V.29 iv), III).***

EXEMPLE V.33: CAS *B2.*

Considerem

$$M \wedge -\overset{R \times R}{j - y}, \qquad \overset{\wedge}{7\wedge} \ \frac{R x \{pí.\}}{\{\varphi\}} \backslash \qquad \mathbf{on<\wedge(x,} \ y) \overset{s \quad ,}{=} (\mathbf{x +} \ TT, \ ye"'\wedge)^{1.\wedge},$$

amb la métrica induida per la de R^ : ***ds"*** **=** ***dx"*** **+ e^^^"' 2x-2x)¿y2 ^**

En aquest cas resulta *a* = —(log /) ' — —2eos 2x + 2 = 4 sin^{2} x, periódica, amb A = TT; **i**

$$\int_{Jo}^{2\pi} \mathbf{4 \sin^{2} 2x \, dx = 27r \ 7\wedge \ O}$$

Com que *(f>* no respecta el camp *dy,* tindrem ^ = 0.

No hi ha fulles transverses compactes i l'única fulla compacta és la que s'obté en projectar {y = 0}. (Si haguéssim pres R **x** (0,oo) enlloc de R^, cap fulla seria compacta).

Correspon, dones, al segon cas de ***V.S9 iv), III).***

EXEMPLE V.34: CAS *BI.*

Considerem el tor a R^

$$x\{u, v) = ((r \text{ eos } u + b) \text{ eos } v, \ (r \text{ eos } u + b) \sin v, \ \sin u)$$

amb la métrica induida per l'euclidiana de l'ambient.

La foliació que té per fulles els meridians (i per fulles transverses els paral.lels) és totalment geodésica.

$$a = -(\log /)' = -(\log(\cos « + b))' = \frac{AAAA}{\text{eos } u + o},$$

és periódica, de período **27r.** Calculant, s'obté $K = 1$.

L'álgebra § está generada peí camp ***dv.***

Aquest exemple correspon a ***V.S9 vi).***

Finalment, aprofitarem algún deis cálculs anteriors sobre ***deck-transformations*** per donar un resultat en la línia deis d'Oshikiri i Johnson-Whitt sobre camps de Killing que respecten foliacions. Demostrarem que en el cas ***warped product*** tot Killing respecta la foliació, menys quan la superficie és simplement connexa i de curvatura constant i negativa.

PROPOSICIÓ V.35.

En ¡es foliacions sobre superficies, cas warped product:

i) si Ja superficie és ***simplement connexa i de*** curvatura ***constant i negativa,***

hi ha camps de Killing que no respecten 7

ii) ***altrament, tot camp de Killing respecta la foliació.***

DEM.: •.•\---

DEM.:

i)

Sigui M simplement connexa, i.e.

M = R X {c,d), ***ds***^{2} ***=dx*** ^{2} + ***f · dy***^{2,2}***,*** ***dyf = 0.***

Veurem a ***VII.IS*** que l'expressió general de / quan la curvatura és constant i negativa (igual a — fc^2 , per exemple) és:

f[x) = Ae''' + Be-''', A,B constants,>_O

* Si B = 0:

Es comprova que el camp

X= ***{2Aky) dx+ (^e-"' - {Akf y***^{2} ***e"'^ N***

és de Killing i no respecta la foliació.

** Si A = 0:

També en aquest cas, el camp

X={2Bky)dx+({Bkf y\-''^-e^^^N

és de Killing i no respecta la foliació.

******* ***SiAy^O^B:***

Es pot vem-e que els camps

X = (M, **6^'="^^ + M2 6-^'="^^)** ***dx*** -

- -^-—^ ***{Ae"'' - Be-"^)*** (MI **g^vv/ZS"** _ ***^-2kyVTF^*** ^

son de Killing i, si ***Mi ^ O o M, ^ O, no*** respecten la foliació.

Veurem que si hi ha algún camp de Killing que no respecta la foliació, la superficie ha de ser simplement connexa i amb curvatura constant negativa.

Peí que sabem, el recobridor universal és

$\widetilde{M}$ = R x (c , d) , *ds^ = dx' + f" dy\ dyf =0.*

Sigui *X = [adx + (3N) e* (í($\widetilde{M}$) \ *§).* D'acord amb *II.5:*

(1) *a = a{y) ^ constant, Py = ~f^a, f/3^-f^0 = -ay*

Derivem a (1):

(2) = *-af,., - fxfiy = -ccyy .*

D'(l) i (2):

Per tant, com que / només depén d'i i o: només d'y, en l'obert *U* en qué *a* ≠*O* (obert que ha de ser del tipus C/ = R x . . . , ja que *a* no depén d'x),

(3) *ff^^ - f^ = ^ =k = constant*
a

Estudiarem l'equació (3), distingint si *k* és O, positiva o negativa.

I) Cas A; = O

Aleshores,

T{a) = a. (a) = -(log /) " = ..- = - ^ = *0*

Per tant, *a = constant.*

Per altra banda, també de (3):

a{y) = my + n *m,n* constants, *m^O*

D'acord amb el *Teorema V.25,* si la nostra superficie no fos simplement connexa, hi hauria una ***deck-transformation*** a *M*

<^(x,y) = (x + A , ye-"^ A o B ^ O.

Es ciar dones que *ao<¡) ^ a;* com a =< *X,T* > i ^ és una isometria que conserva el camp *T,* aixó voldria dir que *4>* no respectarla *X.*

Per tant, si hi ha algún Killing que no és de ^, no hi ha cap ***deck-transformation.*** Estarem dones en una superficie simplement connexa.

Veurem a ***VIL12.1*** que en aquest cas la curvatura és constant i val ***—a***$^{\mathbf{2}}$**.**

II) Cas A; < O

Provarem que, com que la funció / mai s'ha d'anular, aquest cas no es pot donar.

Posem, per comoditat, ***h*** = ***sZ—k.*** Hem de resoldre

(3) ***ff"-{f'f=-h"*** ***(/' = /,)***

(4) Fem el canvi: ***u = f"***

Derivant (3): {/')^ ***=uf*** + ***h***^ i substituint (4) s'obté

(5) ***uf = üff*** , on ¿ = ^

(6) i.e ***f'{u-üf) = 0***

Si /' s'anulés en un obert, contradiríem (3). Per tant, de (6),

(7) ***u — üf = O*** (arreu d'ÍJ, i.e.. Va;) ==>• ***u = cf,*** c = ***constant.***

* Sic = 0

De (7) i (4), tindríem /" = O i / s'anularia en algún punt!! (/ ^ ***constant,*** si no la foliació seria ***bundle-like).***

** Si O O

Substituint a (3):

f' = ±s/cr+h'

i (si posem, per comoditat, ***C = ^/c),*** integrant:

que també s'anula en algún punt !!

*** Sic<0

Resolem l'equació diferencial, análogament al darrer apartat. Diguem ***C — V^:***

f{x) = ^ sm{C ± Cx)

que també s'ha d'anular per algún valor d'x !!

Per tant, el cas II) no pot donar-se.

III) Cas A; > **o**

Resolem (3) peí que fa a ***a:***

(8) **a = Ce^^^ + jDe-^^'^**

Si la superficie no fos simplement connexa, hi hauria ***deck-transformations,*** que han de ser (ens trobem evidentment en el cas **r**(o) ≠ 0; ***N{a)*** = 0) :

(f>{x, y) = {x + rA, yK'^ +B) (Vd ***V.29)***

Hem d'imposar, com abans, a **o** ^ = a:

Si a (8) ***C o D*** **son** zero, això només pot passar quan ***K = l i B = Q*** però aleshores ^ seria una OX-traslació, totes les fulles serien compactes i tot Killing respectarla la foliació peí ***Teorema de Johnson- Whitt.***

Suposem, dones, a (8): C = 1, ***D ^ 0.*** Hem d'imposar

$$e^{y\sqrt{k}} + De^{-y\sqrt{k}} = e^{(yK^{-\prime}+B)\sqrt{k}} + De^{-(yK^{-\prime}+B)\sqrt{k}}$$

que només té solució si ***K~''*** = —1 . Però això és absurd, perqué ***K*** és sempre positiva, d'acord amb la seva **definido** (cf (3) de ***V.29).***

Així dones, si hi ha camps de Killing que no respecten ***I, M*** ha de ser simplement connexa. Veiem que aleshores la curvatura és constant i negativa.

Resolem (3), peí que fa a /, com en el cas II) (ara posarem ***h = y/k).*** Obtindrem també ***u = cf.***

* **Sic** = 0

Com a II), / s'anularia per algún valor d'x !!

** Si O O

Substituint a (3):

r = ±yjcf'-h'

i (si posem, per comoditat, ***C*** = \/c), integrant:

/(x) = ¿(e^^^-^^+/t%^^^-*-^)

Veurem a ***VII.12.1*** que la curvatura val —/"//• En el nostre cas:

curvatura = —/"/f = ••• = —c < 0

*** S i c < 0

(3) ens donarla

f' = ±yjcf^ -h'-²

que és absurd perqué la reí és imaginària !! |

OBSERVACIONS.

(1) La curvatura ***mai pot ser constant i positiva, com provarem a VII.ll.***

(2) Quan ***la curvatura és*** zero, ***la foliació és bundle-like (Vd VII.9). També en aquest cas, és fácil veure a partir del Teorema 111.23, que només hi ha camps de Killing que no respecten la foliació si la varietat és simplement connexa.***

Capítol VI

FOLIACIONS TOTALMENT GEODÈSIQUES, NO BUNDLE-LIKE, DE CODIMENSIÓ 1: CAS «NO WARPED PRODUCT"

Farem un estudi de l'álgebra ***Q*** análeg al del capítol anterior, en el cas en qué el recobridor universal no és un ***warped product, o,*** el que és el mateix (Vd ***V.S),*** quan no hi pot haver cap camp de Killing (ni tant sois al recobridor universal) ortogonal a la foliació.

L'álgebra J que hem definit al capítol precedent no té interés, perqué la seva dimensió i la de 5 veurem que coincideixen. Per tant, l'estructura de ***Q*** queda determinada per les de ***Q**** i ***M.*** La dimensió de §* l'hem afitada a ***IV.8*** i ens resta només per estudiar la d')/. Per fer-ho, ens caldrá construir una base prou bona de l'álgebra ***Q.***

Com que per afitar superiorment dimensions n'hi ha prou amb fer l'estudi al recobridor universal, treballarem allí directament i n'aprofitarem l'estructura que li hem vist a ***II.2.***

PROPOSICIÓ VL1.

A M, sigui 7* una *foliació totalment geodésica, transversalment orientable, de codimensió 1. Suposem M simplement connexa, no warped product,

M = I/XR, ***dslf = dsl + f*** ^{2} ***dt^,*** ***dtfyíQ.***

Aleshores, hi ha una base {XiX^,X^ +1,...,Xj^} de Q, amb X, = Y_i + ***Kdt , tal que:***

i) **{Xi,...,X„}** ***és base de Q*;*** i {A„ + **1**,...,Ajv} ***és base d'M.***

(En particular$\grave{}_1$ = • • • =$\grave{}_m$ ***= 0);***

ii) ***{Yi,...,Yff} és una subálgebra de dimensió N dH{L).***

(En particular, dones, dimJ = dimQ).

DEM.:

i)

Prenem una base qualsevol, {Yj,..., } de l'álgebra ***Q**** i posem

X, =:y;-, V¿:l,...,m.

Sigui també {A^ + **1**,...,A//} una base de ***M.*** (Recordem que hem vist a ***II.9*** que ***dimQ = dimQ* + dimU*** i que hi ha un epimoríisme natural de ***Q*** sobre ***U).*** Existebcen dones

Xy =: (Fy + Ay) **G** ^, j : m + **1,**...,iV.

Provarem que **{Xi,...,*X*^}** és una base de ***Qi***

$$\textbf{(1)} \qquad \text{Si} \quad \mathbf{0 = 5}\,];\sum_{\text{«}=1}^{N} fc,X, = \wedge \sum_{i=l}^{N} fc,F, + \wedge \sum_{i=m+l}^{N} fcyAy,$$

hauran d'anular-se tant la part tangencial com la normal.

Les {Ay}'5 eren una base, d'on

=4> A;„ + i =--- = *k*^ = 0

Aleshores (1) dona

m
0 = Y2^iYi ^1 = " • • =' ... = 0, perqué les {'Y'} eren una base.
t = 1

Per tant, efectivament, hem construit una base de ^.

ii)

Ja sabem per ***11.6*** i ***11.8.1*** que **{ Y i , . . . , Fjy** } és una subálgebra d'¿(L). Veiem dones que les **{ Y } '** 5 són independents:

N - l

(2) Si, per exemple ***Y^f*** =*i*=^1 **fc^Y,**

posem

$$X =: \left(X_N - \sum_{\cdot = 1}^{N-1} k_i X_i \right) \in \mathcal{G}$$

Substituint (2) a la definido d'X, trobaríem que només té part normal; però com estem en el cas no ***warped product,*** ^" = O, per tant, ***X = O.***

En particular, peí que fa a la part normal:

iV- 1
O = X}f — ^ ***kjXj*** => ***k^^i*** = •.. = **A;^ _ j** = **o**
y = m + 1

perqué hem vist a ***i)*** que les **{Aj}'s** eren independents. Tornant a (2),

tn
Y^ = ***Y^KYi*** i pertanyeria a ^*
»= 1

però aleshores Ajv = ***X^*** — **Yv** ^ ***g,*** absurd perqué no hi pot haver cap camp de Killing normal.

Així dones, els {**Y** j,..., **Y** ^ } efectivament **son** independents. |

El ***Teorema*** següent és l'equivalent a ***V.S,*** peí que fa a la dimensió de ***Q.*** Suposarem que tot camp de ***S \ S**** **,** si és tangent a una fulla Lo, no ho és a cap altra d'un entorn prou petit de ***LQ.***

TEOREMA VI.2.

A M, siguí 7 una ***foliació totalment geodésica, transversalment orientable, de codimensió 1, en*** qué ***el recobridor universal no és warped product***

Aleshores, dimU $\leq$ 2.

DEM.:

La farcm al recobridor universal. Prendrem, dones, la base de la ***Proposidó VLl.***

Si ;/ 7¿ { 0 } , sigui ***U*** l'obert

t/ =: {í G R **I** A/, ^ 0}

Definim, Vi; G C/ , el subespai vectorial de ***Q***

$\mathcal{H}_{t_i}$ = ***{Xeg*** 1 X és tangent a la fulla ***{t*** = í.·} }

A partir del ***Lema II.8.1*** és fácil comprovar que $\mathcal{H}_{t_i}$ és una subálgebra (pròpia, perqué X_N no hi pertany) de ***g.***

LEMA **VI.2.I.**

Vi·, G ***U, dimXt, =N-1.***

DEM. DEL LEMA I:

Definim, per rG { ! , . . . , m } , Z_r<^' = : N (= X)

i per 5 G { ! , . . .,iV — m - 1},

$$Z_{m+s}^{(t_i)} =: Y_{m+s} - \left(\frac{\lambda_{m+s}(t_i)}{\lambda_N(t_i)} \right) X_N =$$

$$= \left(Y_{m+s} - \left(\frac{\lambda_{m+s}(t_i)}{\lambda_N(t_i)} \right) Y_N \right) + \left(\lambda_{m+s} - \left(\frac{\lambda_{m+s}(t_i)}{\lambda_N(t_i)} \right) \mathrm{A}^{\wedge} \right) dt$$

Tal com els hem construits, Z ^ P 6 ^**t,,** **Vj :** 1,...,iV - 1.

$$\text{Si} \qquad 0 = \sum_{j=1}^{N-} \mathbf{X\,Í\,f\,c}\,,\ \mathrm{Z\,f} =$$

$$= \sum_{y=i}^{N-1} k_j Y_j - \left(\sum_{»=i}^{'N\ \underline{-m}-X} k_{m+s} \frac{\mathrm{Am} + »\,(\hat{}\,\mathrm{i})}{\lambda_N(t_i)} \right) Y_N +$$

$$+ \left(\sum_{s+1}^{\mathbf{JV-m-1}} k_{m+s} \left(\lambda_{m+s} - \left(\frac{\lambda_{m+s}(t_i)}{\lambda_N(t_i)} \right) \lambda_N \right) \right) \partial t,$$

com que Yj,... ,1V **son** independents, tindrem ***kx*** = • • • = fc^r **-1** = 0 .

Per tant, $Z_1^{(i)}$**, . . ,** **.^l/l.** ^ **son** independents.

Hem trobat, dones, ***N* — *1*** camps independents a ^**t,.** Altrament, ***Mţ.*** ha de teñir dimensió menor que ***N*** perqué **sino** coincidiría amb ***Q.*** Per tant,

dimHt, = iV - 1 **I**

LEMA VI.2.2.

Si N -m>2 ***aleshores*** *3* ***U*** ^ íy íaJs que ***Mt,*** *D* ***Mt***^ = 5*.

DEM. DEL LEMA 2:

Evidentemnt, n'hi ha prou amb veure la inclusió **C.**

Suposem que *Z L* ^ \ ^***G,Mt.*** , on r € { 1 , • . . , iV - m — 1 } . Caldria que

$$\textbf{(1)} \qquad Z_{m+r}^{(i)} = \sum_{s=1}^{N-l} k_s Z_s^{(j)} =$$

$$= \sum_{í=1}^{N-l} k_s Y_s - \left(\sum_{1=1}^{N-m-1} k_{m+l} \frac{\lambda_{m+l}(t_j)}{\lambda_N(t_j)} \right) Y_N +$$

$$+ \left(\sum_{l=1}^{'N\ \underline{-m}-l} \hat{}\mathrm{m} + \mathrm{í}\left(\mathbf{I}\ \hat{}\mathrm{m} + \mathbf{1}\ \mathrm{A//}\ \frac{\lambda_{m+\mathrm{í}(\dot{\iota}\mathrm{y})}}{\lambda_N(t_j)} \right) \right) di$$

Si ho comparem amb la definició de *Z* \ ^ ,$_r$^ *:*

$$(2) \qquad Z_{m+r}^{(i)} = Y_{m+r} - \left(\frac{\lambda_{m+r}(t_i)}{\mathrm{Aw}\,(\mathrm{í:})} \right) \mathbf{YV} + \left(\mathrm{Am} + \mathbf{r} - \mathrm{A//}\ \frac{\lambda_{m+r}(t_i)}{\lambda_N(t_i)} \right) \partial t$$

de (l) i (2), com que *Y i , . , Y i ^* són independents:

$$\begin{cases} ki = \cdots = \widehat{A;\wedge \wedge j.} = \cdots = kjtj -1 = 0 \\ km + r = 1 \\ \frac{Xm + r(ti)}{\lambda_N (t_i)} = - \frac{\lambda_{+r} (\wedge j)}{\lambda_N (t_j)} \qquad /,,\wedge (3) \end{cases}$$

Veurem que **(3)** no es pot donar, localment, per cap *r E {1,..., N — m — 1}:*

Si $\wedge \frac{\overset{\lambda}{-}\, J\overset{+r}{A}}{N}$ fos constant, igual a ***k,*** en un obert,

el camp X = (X^^-**r** — ***k X ^) E Q*** seria tangent a la foliació en un obert, contradint una hipótesi inicial. Per tant podem trobar un punt ¿o tal que

$$\text{V r € \{ l , . . . , i V - m - l \} ,} \qquad \left(\frac{Xm + r}{\lambda_N} \right)' \text{(ío)7^0.}$$

Apliquem el ***Teorema de la funció inversa*** a les funcions

$$\frac{A.n + r}{\lambda_N}, \qquad r \qquad E\{U...,N-m-1\}$$

en un entorn Vde Í**Q** i deduim que la igualtat (3) no es pot donar per cap parella de punts ***ti*** $\neq$ íy de F.

Per tant, $\mathcal{H}_{t_0}$ **n** $\mathcal{H}_t$ = 5*, V í **G** F |

DEM. DE VI.2:

EscoUim í,-,íy que verifiquin la igualtat del ***Lema S.*** Aleshores:

$$N \geq dim [Mt, UMt_j.) = dimMt\wedge + dimXt_j. - dim\{Ut, \cap Ut\wedge) =$$

$$= N - l + N - l - m = 2 N - m - 2$$

$$= \wedge \quad 0 \geq N - m - 2$$

$$=\wedge \quad dimM = N - m \leq 2 \quad |$$

OBSERVACIÓ. ***Si dimM = 2, es* verifica que *(notacions de VLl):***

$$[Y_{m+1}, Y_{m+2}] \neq 0$$

(que *no succeia en el cas warped product, on un deis dos camps* era nuij, *ja que, en cas contrari, d'acord amb el Lema IL8.1, tindríem*

$$[Xm + i, X_{m+2}] = [\lambda_{m+1} K + \hat{\ }_2] O \qquad (\text{A m+1, A,,+2 } \textit{independents})$$

i hi hauria camps de Killing normáis a la íoliació !!

Un cop afitada la dimensió d'í/, podem concloure, dones, que

COROL.LARI VI.3.

A M, sigui 7 una Foliació totalnaent geodésica, transversalment orientable, de codimensió 1, en qué el recobridor universal ***no és warped product.***

Aleshores, dimQ $\leq$ ***^n{n — 1)*** + 2. ***(On n és la dimensió de la foliació.)***

DEM.:

N'hi ha prou amb teñir present els resultats de ***11.9, IV.8*** i ***VI.2.*** |

Donarem tot seguit uns quants exemples, per a les diferents dimensions possibles d')/.

EXEMPLE VI.4: ***dim}i*** = 2.

Considerem

$$M = B,\sim \times R+ \times R, \qquad J \wedge R- \times R+,$$

amb la métrica $$ds\wedge = \frac{dx^2}{y^2} + \frac{dy^2}{y^2} + \left\{\frac{}{\backslash e'\sim xj}\right)^2 dt^2 .$$

És ben conegut que els camps de Killing de les fulles están generats per

$$\{dx, \; xdx + ydy, \; [x^2 - y^2)dx + 2xydy\}$$

Cap d'ells verifica ***Yf = 0*** , per tant $\mathcal{G}^t = 0$.

Tantmateix, els camps

$$Xi = dx + e\sim'dt \qquad \text{i} \qquad X2 = xdx\text{-}j\text{-}ydy + dt$$

verifiquen totes les condicions de ***II.6*** i són de §.

$\mathcal{H}$ tégeneradors {e~*,1},

OBSERVACIÓ. La varfeíat ***de l'exemple anterior no és completa (les fulles son la meitat d'un semiplá de Poincaré). Si volguéssim completar-la per a tots els valors d'x, podríem extendre la métrica*** a

$$ds^2 = \frac{doo^2}{y^2} + \frac{dxj^2}{y^2} + di^2 \qquad (x \geq 0)$$

però aleshores Xi deixaria de ser de Killing. Seria un cas amb dimQ = ***dimU*** $\simeq$ 1; $\mathcal{G} = \{X_2\}$.

EXEMPLE VI.5: ***dimM*** = i.

Considerem

M = $\mathbf{R}^2$ **X** R, 7 ^ **R2 X** ***{pt.},***

amb la métrica ***ds***^ = ***dx***^ + ***dy*****""** + e**-2(-**«m **t + y eos t**dt^2**)** ^

Un camp de Killing a les fulles, arbitrari, és

Y = {a + cy) dx + {h- cy) dy

L'equació (Vd ***II.6)***

Yf = -d,[\f), on \ = ***{t)***

té per solució A = c; o = 6 = 0.

Tenim dones, ***Q = {ydx — xdy + dt}***\ ***dimg = dimM*** = 1 **i** 5* = {O}.

EXEMPLE VI.6: ***dimM*** = 1.

Considerem

M = R^ **X** R, J <^ R^ **X** ***{pt.},***

e^2

amb la métrica ***ds***^ = ***dx***^ -\\-***dy***^ + ""(*+''Mí^.

Com que la métrica no depén d'a;, tenim que ***dx G*** $\mathcal{G}^t$**.**

De ***dyf — dif,*** deduim que ***dy — dt E Q.***

Es comprova fácilment que no hi ha **mes** generadors de ***Q.*** Tenim dones ***dim^**** = ***dimM*** = 1.

EXEMPLE VI.7: ***dimM = Q.***

Considerem

M = R^ **X** R, J ^ R' **X** ***{pt.},***

2 2 2 ℜ

amb la métrica ***ds = dx + dy + e***^^'''***dt'***

SiY = {{a + cy)dx + (6 - ***cx)dy) E i{L),*** l'equació

-d,{Xf)=Yf, ambA = A**(í)**

dona

{a-b + c{x + y))tf = (A(y - x) - A')

que té solució A = c = 0; ***a = b.***

Per tant, ***g = = {dx + dy}.***

Tot i que, en principi, en el cas no ***warped product*** la dimensió de l'álgebra ***M*** pugui arribar a ser 2, això no és pas el **mes** corrent. Sovint aquesta dimensió només val 1 (per exemple, per ***IV,9,*** quan la foliació és a fulles compactes). Donarem a continuado un altre ***cas*** en qué podem assegurar el mateix:

PROPOSICIÓ VI.8,

A M, sigui 7 una foliació totalment geodésica, transversalment orientable, de codimensió 1, en qué el recobridor universal no és warped product.
Sigui Xeg tal que <X,iV>7^0 arreu d'M.
Si M és compacta, o alguna $7^{\perp}$ ***-fulla és compacta,***

aleshores dimH = 1.

DEM.:

Posem ***X*** = (X* -\- ***PiN) e 9 ,*** amb ***0^0*** arreu per hipótesi.

Evidentment, 2 > ***dimH*** >_1. Si fos 2, hi hauria un camp ***Y*** = (F* + /^a^T) ***e Q ,*** amb ***Pi, P2*** independents.

Elevem ***X,Y a*** camps del recobridor universal $\widetilde{M}$

$$\tilde{X}\text{\^{}}X'+\tilde{X}idt, \qquad Ai7¿0 \text{arreu;} \qquad \sim \quad \tilde{Y}\text{\^{}}Y'+X\text{\^{}}dt.$$

Si ***pi , P2*** **son** independents, també ho serán **Aj , A2** i generaran ***H .*** Per tant:

$$[A2, Al] = A2 \; Al - A2 \; Ai - m \; Al + TI \; Xq; \tag{1}$$

Donats ***p e M,*** $\tilde{p}$ ***e*** π^{-}^(p) arbitraris, tindrem

$$N\left(\frac{\beta_2}{VA}\right)_p = \tilde{N}\left(\frac{\beta_2}{Ui}\right) = \tilde{N}\left(\frac{\lambda_2}{M)7}\right) =$$

$$= \left(\frac{1}{f}\frac{X\text{\^{}}X'i - X'\text{\^{}\^{}}A}{\lambda_1^2}\right)_{\text{\^{}}\tilde{p}} - \left(\frac{í\text{\^{}}>/mAi+nA2\backslash}{\lambda_1^2 f}\right)_{\tilde{p}} \tag{2}$$

Si M (o alguna $\mathcal{F}^{\perp}$-fulla) és compacta, la funció (que está definida arreu d'M perqué ***Pi*** mai s'anula) ha de teñir un máxim, **91,** i un mínim, ***q2.*** Per (2),

$$0 = mAi(§;)+nA2(§;), \qquad \dot{t} : 1, 2.$$

Com **Al** no s'anula mai, si n = O també m = O i **Ai, A2** no serien independents. Si n ^ O, es té:

$$\frac{\lambda_2}{\grave{A}l}(\tilde{q}_1) = -\frac{m}{n} = \frac{\lambda_2}{\grave{A}l}(\tilde{q}_2),$$

i, análogament, valdria el mateix a q_1 (que és el máxim) i a ***q,*** (mínim) i seria constant, contradint la suposada independència de ***0 2 , 0i*** •

Així dones, la dimensió ***d^M*** ha de ser 1. |

OBSERVACIÓ. Aquesí resuítaí generalitza parciaJmení un ***d'Oshikiri (Vd [Os II]) on es prova el mateix; però només peí*** cas en qué la varietaí ***és compacta.***

Quan la superficie té un recobridor universal warped product, el resultat segueix es- ***sent cert (Vd V.7) i, encara mes, també es*** verifica quan Ja ***foliació és*** a ***fulles compactes (Vd IV.9).***

Per cert que en Vesmentat article d'Oshikiri, en el REMARK finaJ, s'Jii diu que ***l'existéncia d'un camp de Killing en les condicions del de la Proposició anterior fa que la foliació sigui bundle-like. Això no és pas cert; el tor de l'Exemple V.34 n'és un contraexemple.***

En superficies, hem distingit quan ***N{a) — constant*** (i.e., cas ***warped product) i*** quan no ho és. En aquesta darrera possibilitat, podríem considerar per separat segons si ***T[a)*** fos zero o no; però veurem ***{Proposició VI.IS)*** que el cas ***T{a)*** = O ^ ***N{a)*** no es pot donar.

Aquest fet no es pot generalitzar de manera evident a dimensió arbitraria. El primer problema és que no hi ha un equivalent ***global*** per a la funció ***a.*** Donarem dos resultats que en certa manera generalitzen el que hem esmentat en superficies. El primer d'ells substitueix el paper de la funció o per < ***VffY,N*** > , per tot camp Y € J (F/**.9).** El segon fa referència a quan la base de ***11.4*** és global i les funcions {a,·}'**5** faran el joc que corresponia a ***a {VI.IO).***

PROPOSICIÓ VI.9.

A M, sigui 7 una foliació totalment geodésica, transversalment orientable, de codimensió 1, en qué el recobridor universal no és warped product.

Donat Y eJ,

si es verifíca Y *<VNY,N* ***>^0, aleshores*** *N <VNY,N* ***>=0.***

DEM.:

Considerem el corresponent ***X*** ~ ***{Y + PN)*** € ***§.*** Per ***IV.4,***

(1) ***0 = X <V^Y,N >= PN- <V^Y,N >***

Sigui ***U*** l'obert

U =:{peM\N <Vr,Y,N >^0}.

Si *U* no fos el 0, tampoc ho seria l'obert

VCU, *V =:{qGU\Y,^0}.*

Considerem la distribució *D* de dimensió 2 que defineixen *{Y,N}* a V. Apliquem ***IV. 1:***

0 = [X,N] ⟹ *[Y,N] = -{N/3)NeD*

per tant *D* és involutiva.

Si **M** és una varietat integral de **P,** el camp *Y* defineix una foliació J a **M.**

Per la definició d'íJ, d'(1) es dedueix que *X^^ = Y^u* ; per tant *Y* és un camp de Killing a la superficie *M* i dones k foliació J és totalment geodésica. Com que té camps de Killing tangents *{Y),* per ***111.18,*** ***T*** ha de ser ***bundle-like.***

Apliquem ***III.6*** si V és la derivado a ***M,***

O =*<V^N,Y* > = *<V^Y,N* > = *<Vt,Y,N>*

i aleshores

0 = iV < VjvF,F >, ***aM*** ***CU,***

que contradiu la definició d'E/.

Així dones, ?7 = 0. |

PROPOSICIÓ VI.**lo.**

A M, sigui *I una foliació totalment geodésica, transversalment orientable, de codimensió 1, en qué el recobridor universal no és warped product.*

Si la base {Xj,...,X„} ***de 11.4 és global*** i **V¿,** *\/Z GT{I),* Z(a.·) = O, ***aleshores, si hi ha algún camp X € {9\9*), es té:*** |¡ Vjy *N*\\ = ***constant***

DEM.:

Sigui Z e T(/); aplicant l'hipótesi:

$$Z(\|\nabla_N N\|) = Z\left(\sqrt{\sum_{i=1}^{n} a_i^2}\right) = 0 \tag{1}$$

En particular, tenint en compte ***IV.S,*** **(l)** aplicat a X = X* + *Xdt* ens **dona** que

o = x(||v^Ar||) = Aa.(||v^iv||)

Ara bé, si admetem com a ***VI.S*** que un camp de ^ \ ^* no pot ser tangent a la foliació en cap obert, tindrem que la funció A será no nula en un conjunt dens. Per tant,

(2) a.(||v^iv|i) = o

Així, d'(l) i (2), deduim que ||Ví/-Ar|| = ***constant.*** |

OBSERVAGIÓ. ***(A tall d'exemple).***

Si ens ñxem en VExemple VL5, hi trobem que

|I Vjv iV|| = . . . = 1 = ***constant***

i hi ha camps de Killing no tangents que respecten la foliació.

En canvi, en VExemple VL6,

$\|\nabla_N N\| = \cdots =$ |cos(y + ***t)***\ ^ ***constant;***

i en VExemple VI.7,

$\|\nabla_N N\| = \cdots =$ I ***t\y/2*** ^ ***constant.***

En cap deis dos casos no hi mes camps a Q que els de ^*.

Cas en qué *dim* M = 3

Un altre cas en qué la dimensió de l'álgebra ¿ no pot assolir el máxim establert és quan la varietat té dimensió 3. D'acord amb el ***Corol.lari VI.S, Q*** podría arribar a teñir, en aquest cas, dimensió 3; tantmateix provarem que, si la varietat és completa, no pot ser **mes** gran de 2. (Alió que fa diferent aquest cas és que si s'assolís el máxim, 3, a partir de ***VI.1*** es deduiria que les fulles haurien de ser de curvatura constant i, per tant, será suficient veure qué succeix en aqüestes circumstáncies).

PROPOSIGIÓ VI. 11.

Sigui M una varietat completa de dimensió 3; 7 una foliació a M, totalment geodésica i transversalment orientable, de codimensió 1, amb recobridor universal que no és warped product.

Aleshores, dimQ < 2.

DEM.:

Farem la demostració al recobridor universal. Tal i com hem comentat, només hem de veure que la dimensió de § no pot ser 3.

Si fos 3, tindríem, per ***VI.l:***

(1) ***dimg^*** = 1, ***dimM*** = 2, i ***dim i{L)*** = 3.

Per tant, l'álgebra de Lie deis camps de Killing a cada fulla té dimensió máxima; així és que la J-fulla ***standard*** ha de ser una superficie simplement connexa de curvatura constant.

Distingirem tres casos, segons la fulla sigui el pía euclidiá, l'esfera o el pía hiperbólic.

i)

M = **R ^ x R ,** ***ds^ = áx^+dy^ ^ f" " {x,y,t)dt^***

Sabem que 5* té dimensió 1 i, a **mes, és** un ideal de ***Q {II.8).*** Sigui

^* = ***{Yo*** = : **(co + Coy)** ***dx*** + ***{bo*** - *CQX)* ***dy}***

Si y = (a + ***cy)dx*** + (6 — ***cx)dy*** **£** ***J,*** caldrá que

mFo = [^05^] = • • • = (c6o **-** ***bco)dx*** **+** (OCQ — ***cao)dy***

(2) ^ **I m**(AO + CO **y)** **=** ***cbo*** **-** ***bco***

(m[bo — Co x) = aco — cao

Distingint casos:

* si CO **7**^ 0:

, **V** **f** CEEN **—** ***bCo*** ***C***

{2) ^ \ ° =^ y = **—*Yo*** **=^** ***dimg*** = 1

t ***ac„*** **=** ***cao***

** si CO = 0:

(2) | ^ « o = c 6 o ^ ^ ^ ^ ^ ^ ^ ^ ^ ^ . ^ ^ ^ 2

(m6o = ***~cao***

M = S^ **x R ,** (¿5^ ***=d(f)***^ + c o s ^ <^(Í5^ + ***{(f>,e,t)dt^***

(parametritzem S : (eos ^ eos 0, eos <^ sin 5, sin 0))

Com que els camps de Killing corresponen tots a rotacions de l'esfera, podem suposar sense restricció que ^* = ***{36}.***

Sigui y **e** J arbitran,

y = (asin0 + ***bcos9)d(¡)*** + (c — a tan^cosfl + 6 tan^sinfl)^^

Tindrem, com abans:

mdO **=** ***[dd,Y*** **=** **=** ***{acose*** **-** ***bsme)d<f)+*** (a tan<^sin0 + 6 ***t&n(j>cose)de***

Caldria, dones, que ***a = b = 0*** i aleshores ***g = g''*** tindrá dimensió 1.

I si ^* = 0 , també ***dimg*** < 3.

iii)

M = R ^ x R , ***ds*** ^{2} ***=dx*** ^{2} ***-\-e^^dy*** ^{2} ***+f*** $^{.2}$ ***{x,y,t)dt*** ^{2} **.**

SiguLa ***Y E J*** arbitrari; i ***Yo*** un generador de ***Q*,***

Yo = (6o + 2co ***y)dx* + (oq** - ¿o y + **Co** (e"''* ~ ^0) $\partial y;$

r = (6 + 2cy**)ax+** (a-6y + c(e-^^ - **y'))** **^y.**

Com sempre:

mYo=[Yo,Y] = ••• =

= 2 {(coo - aco) + ***y{bco - cbo)}dx*** +

\+ ***{{abo -bao) + 2y{aco - cao)*** + (e~^' - **y'')** (6co - c6o**))ay**

(3) $\Longrightarrow$ $\begin{cases} \text{m6o = 2 (cao ~ oco)} \\ \text{mco} = bco - cbo \\ mao = abo - bao \end{cases}$

Distingim casos:

* si *ao* = ***O :***

(3) =í> a = O, Vy G J =^ ***dimg*** $\leq$ 2

** si ¿ **0** = 0 i oo ^ O :

(3) $\Longrightarrow$ $\begin{cases} o \ \ Co = \text{c = O, VF } \mathbf{e} \text{ J =^ d¿m^} \leq 2 \\ o \ \ Y = \dfrac{c}{c_0} Y_0 \Longrightarrow dim\mathcal{G} = 1 \end{cases}$

*** si **Co** = O i **Oq**, 6o **7¿** O :

(3) $\Longrightarrow$ c = O, VF G J =í> d¿m5 $\leq$ 2

**** si **ao,** 6o, **Co** 7^0 :

Podem posar, per exemple, 6o = 1 . Operant a (3) s'obté:

$$\begin{cases} b = \dfrac{1}{2}\left(\dfrac{a}{\text{Vao}} + \dfrac{c}{\text{Co}}\right) \\ \end{cases}$$

{ (1 **+4aoCo**)(cao - aco) = O

$$\Longrightarrow \begin{cases} '\ \text{si } 4\,\mathbf{Go\ Co}\ \#1\ =\wedge\ Y = bYo & dimQ = 1 \\ \text{si } 4\ \mathbf{tto\ Co} = 1\ \bullet & \begin{cases} \Longrightarrow b\ \frac{a}{2a_0}\text{--2ooc.} \\ \text{Prenem 3 camps de } J \text{ arbitraris:} \\ \Longrightarrow \begin{vmatrix} 0\text{-}0 & 1 & \mathrm{Co} \\ a & \frac{a-4a_0^2c}{2ao} & c \\ a' & \frac{a'-4a_0^2c'}{2oo} & c' \end{vmatrix} = O \\ =\wedge\ dimQ \le 2 \end{cases} \end{cases}$$

Així dones, sempre tenim que $dimQ \le 2$. |

Cas en qué *dim M = 2*

En el que resta del capítol VI, considererem que la varietat M té dimensió 2 i que la foliació 7 és totalment geodésica i de codimensió 1, i.e., és un fiuxe geodésic. Suposarem també 7 orientable i transversalment orientable; T i N donaran una base ortonormal de x{M),TeT{7) iNeTi7)

En aqüestes condicions, tenim definida globalment la funció a ==< ***[T,N],N >. Com véiem a V.S, que el recobridor universal de M no sigui warped product equival a la condició N{a)*** ^ 0. ***Aleshores, distingirem dos casos, segons si T{a)*** = 0; o ***bé T{a)*** ^ 0.

Peí primer cas, resulta que no hi haurá cap camp de Killing que respecti la foliació:

PROPOSICIÓ VI. 12.

En aqüestes condicions, si T{a) = O ,

aleshores, Q = 0.

DEM.:

Suposem el contrari. Sigui ***X = {X* + ^N) € Q.***

Per ***IV. 11:***

(1) O = ***X{a) = 0N{a)***

Considerem l'obert, no 0,

U=: {peM\N{a)p^O}

Per (1), tenim que /3|¡7 = O . Per tant, ***X^u*** és un camp de Killing (no nul, perqué ***U*** és un obert) tangent a la foliació.

D'acord amb ***111.18,*** dones, ***[U,7\u)*** és una foliació ***bundle-like.***

Ara bé, aleshores caldria (Vd ///.7) que ***a^u*** = O , contradint precisament la definició d'C/ !! **I**

OBSERVAGIÓ.

Si considerem el pía $\mathbb{R}^2$ ^ *foliat per rectes paral.leles a l'eix d'abcises i amb la métrica*

ds^ = dx^ + e^'^dy^,

tindrem un exemple en les condicions de VI. 12.

Anem peí cas general, en superficies. També aquí es pot rebaixar en una unitat l'afitació superior de la dimensió de ***Q*** que hem fet a ***VI.S.***

TEOREMA VI. 13.

Quan ***T{a) i-* O** i iV(a) # **O ,**
si iV(a) ***no s'anula en cap obert d'M,***

aleshores,

i) ***dimQ* ≤ 1;**

ii)

dimQ* = 1** --^^^ ***3 una funció C°°, 0, tal que
; T(a) = í3N{a)
TN{a) = PNN{a)
[TT{a) = ¡3NT{a)

iii) ***Totes o cap*** $J^{\perp}$ ***-fulla son compactes.***

DEM.:

i)

Ho veurem al recobridor universal.

Siguin ***Xi, X2 € Q ,***

Xi =aiT + Xidy, i: 1,2

Com ***T{ai)* = O** , per ***118.1:***

***[x„ X2]* = [Al, A^iaí = (Al A; - A^A'jat**

D'acord amb ***V.S,*** no hi ha camps de Killing normáis, per tant:

(1) AIA; - A2A; = O

Si algún A; s'anulés en un obert, en aquell obert la foliació seria ***bundle-like*** (perqué hi hauria camps de Killing tangents) i, en particular, hi tindríem **7V**(a) = O , contradint una de les hipótesis. Per tant, del fet que ^* = 0 i d'(l) deduim

Al i **A2** **son** proporcionáis **==>** ***dimU* = *dimQ* = 1**

ii)

⟹)

Sigui ***X* = *[aT — I3N)* E *Q*** . Com ***a*** ha de ser constant, suposarem ***a* = *1* .** Per ***IV.11:***

(2) O = ***X{a)*** = T(o) - ***PN{a)***

Fent cálculs a partir d'**(2)** i aplicant les condicions de ***II.S*** i ***II.5:***

***TN[a)* = *NT{a)* +** **ai**V(a) = ***N{l3)* *N{a)* + *0NN{a)* + *aN{a)* =**

= *-aN{a)* + *pNN{a)* + *aN{a)* = */3NN{a)*

***TT{a)* =** T(/?) ***N{a)* + *0TN{a)* =**

= *-apN{a)* + *pNT{a)* *+I3aN{a)* = *pNT{a)*

<=)

Considerem el camp ***X* = *T* - *0N* .** Veurem que pertany a ***Q:***

(3) a = 1 = ***constant***

***NT{a)* =*N{l3- N{a))* = iV(/3) *N{a)* + */3NN{a)* =**

= iV**(/3)** ***N(a)* + *TN{a)* =** iV**(/3)** ***N{a)* + *NT{a)*** + aiV(a)

Per tant ***N{a){N{(3)*** + a} = O . Com el conjunt de punts en qué ***N{a)*** no s'anula és dens per hipótesi, caldrá que

(4) **iV(/?) = *-a***

***¡3NT{a)* = *TT{a)* = *T{(3)* *N{a)* + *f3TN{a)* =**

= *T{p)* *N{a)* + ***mT{a)*** ***+PaN{a)***

Per tant ***N{a){T{¡3)* + *a^}* = *O* .** Com suara,

(5) **r(/?) + *a0*** = *O*

De (3), (4) i (5), per ***II.5,*** deduim que ***Xe 9 .***

iii)

El recobridor universal será

11%   J < ^ R x { p í . } ,   ***ds"^ = dx^ + f"" {x,y)dy'***

Semblantment a casos anteriors, es dedueix que les ***deck-transformations*** son del tipus

<*f*>***{x,*** y) = (i + A , *r****{y))***

Si ***A*** ^ ***O ,*** cap fulla transversa pot ser compacta.

Si ***A = O ,*** com que ***(f) no*** pot teñir cap punt fix, caldrá que ϕ^n (y) ^ ***y,*** Vy . Per tant, totes les J $^{\perp}$ -fulles serán compactes. |

Donarem uns quants exemples d'aquesta classe de foliacions en superficies. Aquests exemples ens faran veure que, contrariament a alió que passava en el cas ***warped product,*** aqui no es pot dir res, en general, sobre les J-fulles, perqué hi poden haver casos de tota mena.

EXEMPLE VI. 14: ***dim9*** = i.

Considerem

M i = R x R ,   J ^ R x {pí.},

amblamétrica ***ds^*** = dx'' +   ""'^+'''dy

Fent cálculs, resulta ***a*** = cos(x + y) .

La funció /?(x,y) = ***e~*** «•»(* + !') verifica les tres condicions de l'apartat ***ii)*** del ***Teorema*** anterior; per tant el camp

X = dx- e-""(- + s')Ar = ***dx-dye 9***   (Cf ***VI.6)***

Aquí, és ciar, cap mena de fulla és compacta.

EXEMPLE VI. 15: ***dim9 = i.***

Considerem

Aíj = **77T,**   on **Mi** és la varietat de ***VExemple*** anterior,
10}

$\mathcal{F}$ ^ — { ^ } — ' $\mathbf{R} \times \{pt.\}$ ^ $\phi(x,$ y) =$(x$ + ^Tf, y),

amb la métrica induida per la d'Mj.

És ciar que el camp X de ***VExemple*** anterior baixa a un camp d'Ma, per tant també ara ***dimQ*** = 1 .

En aquest cas totes les J-fulles (però cap 7""" -fulla) **son** compactes.

Si ara definim

$$M_3 = \frac{1}{\{\psi\}}\text{o}, \quad \text{n} \quad 0(z,\ y) = (\mathbf{i},\ y + \mathbf{27r}),$$

tindrem un cas amb cap 7-fulla i totes les J'*' -fulles compactes.

Finalment, si

$$M_4 = \frac{M_1}{\{\phi, \psi\}},$$

ens trobarem un cas en qué totes les fulles, transverses i de la foliació, **son** compactes. (I ***dimQ*** segueix essent 1).

EXEMPLE VI.16: d¿mp = i.

Considerem a

M_5 ^ ?1^**ÍÍZ**^_**Í1,** on (x,y) ~ (x',y') ^ x - x' € Z,

la foliació generada per la projecció del camp T =: 5x + eos^2 ***ydy***

i la métrica en qué ||r|l = ||ay|| = 1; < ***T,dy*** **>=** O .

Com que

V t T =< ***VrT^dy*** **>=<** ***[dy,T],T*** >= **-**sin^ ***y<dy,T>=Q***

la foliació és totalment geodésica.

Es calcula que ***a*** = sin **2y** **.**

La funció ***P{x,y)*** **=** — eos^2 y verifica les condicions de ***VLIS, ii);*** per tant

X =: r - cos^ ***yN*** **=** ***dxe Q.***

En el nostre cas, cap $\mathcal{F}^{\perp}$ -fulla és compacta i totes les fulles són denses.

Si en la definició de M haguéssim pres R com a segon factor, tindriem un cas amb infinites fulles compactes (totes les de la forma {y = fc7r/2}, ***O ^ k E Z) i*** també infinites fulles no compactes, cadascuna de les quals és adherent a les dues fulles compactes consecutives entre les que es troba. (Fixem-nos que el camp ***X*** és tangent a cada fulla compacta).

Evidentment, prenent un cilindre d'al^ada finita, aconseguiriem un cas amb un nombre finit arbitran de fulles compactes.

Si ara posem (Vd **[J-W])**

$$Me = \frac{R \times \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]}{Z},$$

on ***Jl*** és la relació d'equivaléncia definida per

(rr,y)~(a;',y') <=^ ***x-x'eZ,*** (a:,-|) - (x, ^)

i prenem una foliació análoga a l'anterior, tindrem un exemple amb totes les J"^-fulles compactes i una única J-fulla compacta, a la que **son** adherents totes les altres. (Es tracta d'un tor; les fulles transverses **son** els paral.lels, la fulla compacta és un meridiá i les altres fulles van giravoltant entorn del tor, tot tendint, pels dos extrems, al meridiá anterior).

El camp ***X*** ens **dona,** òbviament, un camp de Killing a ***MQ,*** que respecta la foliació (Altrament, és l'únic camp de Killing, Uevat constant, de la varietat compacta M).

De manera evident, podem modificar l'exemple per tal d'aconseguir un tor amb un nombre (finit) arbitrari de fulles compactes.

Finalment, si convinem sobre un tor la foliació anterior, entre dos meridians-fulles compactes, i lafoliació habitual per meridians (Vd. *V.34*), obtindremun exemple amb infinites, però no totes, fulles compactes; totes les fulles transverses compactes, i amb ***dimQ*** = 1 , perqué el camp ***X*** d'abans s'extén diferenciablement a la resta del tor peí camp ***dv*** de ***V.S4,*** que és de Killing. (Aquesta foliació és un exemple clàssic de fulles amb holonomia no trivial; Vd [Bl-Hb II]).

EXEMPLE VI. 17: ^ = 0.

Considerem

M = R x R , í ' ^ R x ***{pt.}***

2 _ 2 ^ S2

amb la métrica ***ds*** — ***dx*** +e~^^ ***"dy***

Aleshores, resulta $a\{x,y) =2xy$.

La funció

$$\frac{^{\wedge\wedge}T\{a)\_}{N\{a)} \_ \cdots \_ \frac{\_ye_{-x}{}^{2}\,y}{X}$$

no verifica les altre dues condicions de ***VI.IS, ii),*** per tant no hi pot haver cap camp de Killing que respecti la foliació.

Quan la superficie admet un recobridor universal ***warped product,*** hem vist a ***V.S5*** que gairebé sempre tots els camps de Killing respecten la foliació. Aqui no podem arribar tant lluny; tantmateix el que si será cert és que la condició necessária $X\{a) = O$ (Vd ***IV.9)*** també será suficient per garantir que un camp de Killing pertanyi a $\mathcal{G}$. (De fet, en el cas ***warped product,*** si a ^ ***constant*** , es pot veure també que l'esmentada condició és necessária i suficient).

PROPOSICIÓ VL18.

Quan $T\{a) \wedge O\ yé^{\wedge}\ N\{a)$, ***donat*** $X e\ i\{M)$:

$$Xeg \quad \wedge \quad X\{a) = o$$

DEM.:

$\Longrightarrow)$

Vd ***IV.ll.***

$\Longleftarrow)$

Fem la demostrado al recobridor universal, $\mathbf{R}^2$.

Posem $X = \{adx + (3N) = [adx + Xdy) \ e\ i\{M)$.

Utilitzem ***II.5*** per provar que $NN[a) = —X[a)$:

$$NNia) = -NT\{I3) - l3N\{a) - aN\{0) - -TN\{I3) - f3N\{a) =$$
$$= {\sim}aT\{a) - /3N\{a) = -X\{a) = O$$

Per tant:

$$O = NN\{a) = \cdots = \frac{cc''f-a'fy}{f^{2}} \qquad \left(\alpha'' = \frac{d^{2}\alpha}{dy^{2}}\right)$$

(1) i.e. a" = a', (logA

En. particular, **si** derivem **(1)** respecte *x,* obtenim

(2) *0 = a'a,*

Volem veure qu *a! = O ,* per tal que *X E Q .* Si no és així, sigui

U =: {p e R"" \ a'{p)≠ 0} obert, no 0.

Prenem una component connexa d'ÍJ que, com o: = *a{y)* , será

(3) *V =:Rx{y,,y2)CU*

De **(2) mes** el fet que *a* només pot anular-se en punts aillats de V; i de *X[a)* = O , es desprén que *a^v = constant.* D'acord amb *V.S* i *V.25.1,*

í\v = e"^ - /a(y), i *a = -k.*

Si fem el canvi $\bar{}$y = *jf2 dy* , amb la notació

$$\alpha' = \frac{da}{dy} ; \qquad \alpha \doteq \frac{d\ a}{dy} ,$$

de **(1)** deduim:

ä-f¡ +a-ṙ,=a" = *a'-* (log/), = ¿ • f_2'

Per tant, com que f_2 mai s'anula,

ƠL = *ȧ - ¡2 = m f-2,* **O** 7^ **m =** ***constant***

La fulla {y = yi} és de la frontera de F, per tant:

O = a'(yi) = m • ^lim^ *¡2*(y)
→ y
yev

i aleshores

/(x,yi)=^Um e'=**V2**(y)=0
→ y₁
y∈V

absurd, perqué / mai pot anular-se.

Així dones, cal que a' ≡ O i en consequéncia, X **G** ^ . **i**

Capítol VII

ALTRES RESULTATS SOBRE FOLIACIONS DE CODIMENSIÓ 1

Foliacions transversalment afins

Diversos autors estudien un tipus especial de foliacions, anomenades transversalment afins. El nom és degut a que la varietat es pot recobrir per entorns coordenats en que les fulles venen donades per equacions del tipus **{t/j** = ***constant}*** , de manera que el canvi de coordenades en la intersecció de dos d'aquests entorns s'expressa per equacions afins en les ***{yi}'s.*** En el cas de codimensió 1 hi ha una definició equivalent, per mitjá d'l-formes, que ens será **mes** útil per tal d'estudiar relacions entre aqüestes foliacions, les ***bundle-like*** i les de tipus ***warped product.***

VII. 1 **DEFINICIÓ (FURNESS-FÉDIDA).**

A M, siguí 7 una foliació transversalnaent orientable de codimensió 1.

Es diu que 7 és transversalment afí quan existeixen l-formes C°°*, w, Wi , íais *que:

' w defineix *7* ***{i.e.*** ***X e T{7)*** ^ ***u){X)*** = O),

duj = ***u} A uji*** ***i***

dojí = **O**

(Vd [Fu-Fe])

En primer lloc, anem a veure que les foliacions ***bundle-like*** **son** transversalment afins:

PROPOSICIÓ VII.2.

A M, sigui 7 una foliació bundle-like, transversalment orientable, de codimensió 1.

Aleshores, (M,7) és transversalment afí.

DEM.: • • • \ • • •

DEM,:

Siguí ***w*** la forma w =: **ïjv** *g* ,

Hem vist que aquesta forma és tancada quan la foliació és ***bundle-like [IILl);*** per tant és un cas trivial de foliació transversalment afí, |

Peí que fa a les foliacions totalment geodésiques, només podem garantir que **son** transversalment afins quan la varietat **és** simplement connexa:

PROPOSICIÓ VII.3,

A **M,** ***sigui 7*** **una** ***fo\ia.ció totalment geodésica, transversalment orientable, de codimensió 1. Si M és simplement connexa,***

aleshores, (M,T) és transversalment afí.

DEM,:

Sabem que ***M*** és de la forma

M = L x R , ***dslf = dsl + f*** ^{2} ***dt^***

Definim

a; =< . , AT >, **Wi** = -d(log/)

Evidentment, ***oj*** defineix ***I.***

També és evident que ***Ui*** és una I-forma tancada.

Veiem dones la condieió restant. Donats ***Y, Z E T{J) ,***

2dw{Y,Z) = Y<Z,N>-Z<Y,N>--< [Y,Z],N >= **O**

2dü){Y,N) = - < {Y,N],N>= $\frac{(Y f)}{f}$ **= y.log/**

2uAuJi{Y,Z] = -<Y,N> Z-logf+ <Z,N> **r**-log/ = 0

2wAa;**i**(F, iV) = -<F,iV> iV-log/ + F-log/ = y-log/

Per tant, dw = w **A Wi** i J és transversalment afí. |

En el cas en qué el recobridor universal és un ***warped product,*** també podem afirmar que la foliació és transversalment afí, encara que la varietat no sigui simplement connexa:

PROPOSICIÓ VI 1.4.

A **M,** *sigui 7* **una** *ío\ia.c\6 totalment geodésica, transversalment orientable, de codimensió 1, en qué el recobridor universal és un warped product.*

Aleshores la foliació és transversalment afí.
A mes, la forma uj^ es pot escollir de manera que ω_1 *{N)* = O.

DEM.:

Sigui, com abans, w =:$\dot{i}_N$ *g/„* que defineix *7.*
Definim, **V** X **G** *x{M)* ,

$$Ui{X) \quad =:<[X',N],N>.$$

Com que

$$\text{V funció 7,} \qquad (7X) = -(ÍV7) < X',iV > + \gamma\omega_1(x) = \gamma\omega_1(X),$$

és ciar que ω_1 és una forma *C°°* **.** A mes **Wi** (iV) = O .

Prenem la base local de ***11.4.*** Emprant ***V.S***

$$2duJi\ (X,,X,.) = X, \bullet a, - X,- . o.. + [X,,X,.] \bullet log/ =$$

$$= -X,X,. . log / + X,\cdot X, \bullet log / + [X„X,.]. log / = O$$

$$2áwi\ {Xi,N) = -(iVa.)+ < [\{a.\cdot iV)^*,iV],iV> = 0 + 0 = 0$$

Per tant **oJi** és tancada. Finalment,

$$2dw(X,-,Xy) = \bullet\bullet\bullet = O$$

$$2dui{Xi,N) = - < [XuN\backslash,N>= -üi$$

$$2u;\ AWi\ (Xí,Xy) = \bullet\bullet. = O$$

$$2\,w\,A\,Wi\ (X,-,N) = -w\,i\,(X¿) = ai$$

Així dones, du; = u; **A Wx** i J és transversalment afí. |

OBSERVACIÓ. **ffem** *fet servir que estem en el* **cas** *warped product per tal de demostrar que duji{Xi,N)* = o . *Si s'hagués deñnit uji com ÍJJI{X)* **=** < **[X,JV],iV > , encara que** *la igualtat anterior es seguirla verifícant en el cas general,* **Wi no seria pas una forma /**

Tal i com l'hem deñnida, localment i a partir de Fexpressió habitual de la métrica, es té **Wi** = —dlog / . *El problema és que el segon terme de la igualtat no es pot garantir* que *s'extengui a una forma global de la varietat.*

Finalment, donarem una mena de recíproc de la ***Proposició*** anterior:

COROL.LARI VII.**5.**

A M, sigui ***T*** una ***foliació totalment geodésica, transversalment orientable, de codimensió 1, transversalment afí.***

Aleshores son equivalents:

i) ***El recobridor universal és un warped product***

ii) ***La forma Ui es pot triar de manera que*** **Wx** ***{N)*** = O

DEM.:

i) => ii)

Ho hem vist a la ***Proposició*** anterior.

ii) =^ i)

Pujant al recobridor universal $\widetilde{M}$, tindrem una foliació en les mateixes condicions; per tant podem suposar directament que la varietat és simplement connexa.

Aleshores ***Ui*** será una forma exacta: **Wi** = ***dh.***

Veurem que ***X =: e'^N*** és un camp de Killing normal. (Així, per ***V.S, M*** será un ***warped product).***

Prenem la base local habitual:

N{(3) = **JV(e-'^)** = ***-e-'^iNh)*** = **-e-''u;i**(iV) = O

X,(/?)=X,(e-'*) = -e - V **(** **X ,)** =

= ***2e-''du}{Xi,N)*** =**-**e**-**''w**([Xi**,iV]) =

= —***e~^ai*** = —o;/?

Així és que ***X*** compleix totes les condicions de ***IL6*** i és un camp de Killing, ortogonal a la foliació. Per tant, per ***V.S*** $\widetilde{M}$ és un ***warped product.*** |

La classificació de Ghys

Etienne Ghys ha establert una classificació de les folacions totalment geodésiques en codimensió **1** en varietats compactes i orientables (Vd [Gh]). De fet, ell s'ocupa de classificar les foliacions de codimensió **1** que admeten una métrica respecte de la qual **son** totalment geodésiques. El seu punt de vista és substancialment diferent, per tant, del nostre, perqué ell "construeix" la métrica, mentre que per nosaltres ja está fixada de **bon** principi.

Tantmateix, pot ser interessant d'escatir a quins deis tipus que hem establert corresponen les distintes categories de la classificació de Ghys.

Ho ferem per a la dimensió **mes** baixa de qué s'ocupa Ghys, i.e. quan la varietat te dimensió **3.** Ghys i Garriere estableixen (Vd [Ca-Gh]) dues possibilitats: o bé J és transversa a una acció localment Iliure de la circumferéncia; o bé es tracta d'un tor hiperbólic.

Anem peí primer cas:

PROPOSIGIÓ VIL6.

A M, sigui 7 una foliació transversalment orientable, de codimensió 1, transversa a una acció (localment) Iliure de . Aleshores:

i) ***Hi ha una métrica g respecte de la que 7 és totalment geodésica***

ii) ***Amb aquesta métrica, la foliació correspon ais casos A2 o Bi de V.IS.***

DEM.:

i)

Sigui # : 5^ **X** M —> ***M*** l'acció de .

Si diem ***30*** el camp tangent a les órbites **$p** de l'acció, com que aquesta és transversa a la foliació,

V p 6 M , ***T,M=T,{7)®{d0),.***

Aleshores es pot dotar M d'una métrica, ***g,*** de manera que les transformacions #, son totes isometries (Vd [Ca]). En particular, el camp ***86*** és de Killing i genera la foliació ***7*** . Per ***V.l, 7*** és totalment geodésica.

ii)

Les fulles transverses son, per construcció, homeomorfes a circumferéncies.

En particular, **son** totes compactes i la varietat no pot ser simplement connexa.

Com que hi ha un camp de Killing normal a la foliació, d'acord amb el ***Teorema V.IS,*** s'ha de tractar d'un deis següents casos: ***Ai , A2 o Bi .***

Ara bé, el cas ***Ai no*** es pot donar perqué si totes les / -fulles **son** compactes, al recobridor universal hi ha d'haver una ***deck-transformation*** que sigui una trasladó i aleshores, d'acord amb ***V.I4***, cal que ***H = S" ,*** fet que no succeix en el cas esmentat.

Per tant ha de ser un deis altres dos casos. |

La segona possibilitat, d'acord amb Ghys, és que la foliació sigui conjugada (i.e. homeomorfa, per mitjá d'un homeomorfisme que envii fulles a fulles) al següent model de tor hiperbólic:

Considerem un element ***(j>e.SL*** $^{\mathbf{2}}$ **(Z)** amb traga estrictament **mes** gran que **2.**

Definim

$$T^3_A = \frac{\mathbf{R}^2 \times \mathbf{R}}{\{G\}}$$ (• ^1—!   on G´es el grup generat per :

' ***(f>iíx,y,z)*** = $(x +$ 1, ***yz)***

$\phi_2(x, y, z) = (x,\, y + 1\, z)$

</)3{x,y,z) = {(f>{x,y), z + l)

(T^ és un quocient del producte del tor de dimensió 2 per **R**, de manera evident).

La matriu A de ^ té dos vectors propis, (l,**/i), (1,1^)** , de valors propis A i **1**/A respectivament. **(A mes,** tant **/Í** com ***u*** son irracionals i el seu producte és -1).

r| admet una foliació de dimensió **1** generada peí pas al quocient de les dirreccions paral.leles al vector propi (1, *v*) .

Veurem que hi ha una distribució involutiva complementària que ens donará la 2-foliació de la classificació de Ghys.

PROPOSICIÓ VII.7.

Considerem a T| Ja *foliació Ji generada peí vector* (1,f).

Aleshores:

i) *(Meyer) (Vd [Me])*

Jl ***és una foliació transversalment de Lie sobre el grup afí real.***

(En particular, hi ha una foliació de dimensió 2, J, complementària de $\mathcal{F}_1$***, que és de Lie).***

ii) *(Ghys) (Vd [Gh], [Gh-Se])*

Hi ha una métrica g a , respecte de la qual J és totalment geodésica.

iii) **(r j , J)** ***és un exemple del cas Ai de V.IS.***

DEM.:

i)

Com hem dit, siguin **(1,** /i) i **(1, *u)*** els vectors propis d'A, de valor propi A i respectivament,

Considerem els següents camps de :

X = X'{dx + tidy), Y = dz, Ñ = X-'{dx + udy)

Es ciar que les isometries *4>i* 1 **^2** conserven aquests tres camps; també ho és que *4>z* respecta ***Y*** **.**

El camp ***X*** té com a corba integral per po = **(s^o** ? yo,):

IPÁ^) = (A^-'s + **X**o, A'**o**/zs + **yo.**^**ío).**

Aleshores,

{<^3 o7po)(s) = (<^(A^°s+Xo, A^" /i5 + yo), **2o +1)** =

= (A^°5 **(^(1,** *ii)* + **(?i{xo,** yo), **2o** + **1)** =

= (A^" s A (1,*11)* + ^(xo, yo), 2o + 1) =

- **7(.í{:to,Sío),«o + l) W** = **'70,(Po)**

Per tant, **^3** també respecta el camp ***X*** **.** De la meteixa manera, es comprova que igualment ho fa amb iV .

Projectant-los sobre ***T*** **,** hi obtenim tres camps globals, que notarem ***X,Y, N.*** És ciar que ***N*** defineix la foliació **Ji.**

Es té:

$$[X,Y] \mid = --([\tilde{X}, \tilde{Y}]) = \pi_*\left(-(\log\lambda)\tilde{X}\right) = -(\log\lambda)X \qquad (1)$$

$$[X,\ N] = \pi_*([\tilde{X}, \tilde{N}]) = 0 \qquad (2)$$

$$[Y,\ N] = \mathbf{T.}([\tilde{Y}, \tilde{N}]) = \pi_*\left(-(\log\lambda)\tilde{N}\right) = -(\log\lambda)N \qquad (3)$$

Per tant, { X , F} defineixen una foliació **J** a T^3_A , complementària d'**Ji.**

Sigui *g* la métrica riemanniana a T^3_A en qué

||X|| = ||F|| = ||iV|| = 1; <*X,Y* >=< *X,N*>=< F,iV >= O

Diguem *oJi, 0J2* les formes duals d' *X,* F, respectivament. Aqüestes formes defineixen la foliació *Ti.*

De (2) i (3):

(4)

{ ***dují*** = (logA)(a;**i AWs)**

{ *duJ2* = O

Per tant (Vd [Me], [He]), ***Ti*** és transversalment de Lie i té per grup estructural l'afí real, que és el grup de Lie simplement connex que té l'estructura d'álgebra de Lie de (4).

(Una foliació es diu de Lie amb grup estructural ***G*** quan el canvi de coordenades en la intersecció d'entorns distingits vé donat per restriccions de traslacions a l'esquerra per elements de ***G.*** Aixó és equivalent (Vd [He]) a l'existéncia de formes globals que defineixin la foliació, les diferenciáis de les quals s'expressen com a combinado a coeficients constants deis seus productes exteriors).

íi)

Veurem que amb la métrica ***g*** que hem definit **mes** amunt la foliació **J** és totalment geodésica.

Aixó és equivalent a qué ***Ti*** = ***T^*** sigui ***bundle-like*** (Vd ***1.7),*** és dir ***{1.5),*** a qué ***{L^g){U,V)=0,*** ***yU,Ver{T):***

{L^ g){X, X) = - 2 < ***[N,*** X] , X > = O per (2);

(L^y)(F,F) = - 2 < [i V , F] , F > = 0 per (3);

{L^ g){X,Y) = ***-<[N,X],Y>-<*** ***[N,Y],*** X >= O per (2) i (3).

Per tant, efectivament, ***T*** és totalment geodésica.

iii)

Considerem el recobridor universal, $\mathbf{R}^3$, amb les corresponents elevacions de la foliació i de la mètrica.

Fent uns càlculs un xic pesats es comprova que els camps

$$Wi =: X''\tilde{N} = dx + udyi \qquad '''_{-} =: X\sim'\tilde{X} = dx + fidy;$$

$$W, =: \{x + ny)X\text{-}'\ \tilde{X} + \frac{1 + fi^{2}}{\log A}\ \tilde{Y}\text{-}ti\{nx\text{-}y)y \qquad \tilde{N}$$

son de Killing i respecten la foliació $\tilde{7}$.

Per tant, (R^, $\tilde{J}$) és un ***warped product [Wi*** és un Killing normal), amb

d¿m^" = l *{Wi);* *dimg'=l* *[W^];* *dimM =2.*

i correspon al cas ***A*** de ***V.12.***

Com que tant ϕ_1 com **^2** actúen com traslacions respecte de la coordenada transversa, per iii) de ***V.I4,*** resulta que cap camp que no sigui de $\mathcal{G}^t$**U *Q"*** no pot baixar a T^3_A .

Donat que ‖''‖ = **jA"'!** no val el mateix a ***p*** que a <^3(p) , tampoc aquest camp es projecta a T^3_A .

Analogament, ***W2*** que té norma **|A~'|** , tampoc es projecta.

Així dones, ***§ = 0 i*** tenim un exemple del cas ***A^.*** |

OBSERVAGIÓ.

Per veure Bns quin punt en fer la classifícació segons Ghys estem modiñcant Vestructura mètrica de ¡a varietat n'hi ha prou d'adonar-se que el tor de Johnson-Whitt (Exemple VL16) es pot definir ***també a partir de la següent acció de S^1:***

$$M =: \frac{[0,1] \times R}{\mathcal{R}}, \quad on\ Z: \begin{cases} (0,s)\sim(l,5) \\ (í,s) \sim (í,5 + AJTT) \end{cases} \qquad keZ$$

$$\begin{array}{ccc} MxS\wedge & * & M \\ ([í,s],\ e\wedge\text{--}) & & [í,\ \{5 + 7ra)] \end{array}$$

El ñuxe {$«} genera el vector ir • dy que és transvcrs a *¡a foliado 7 de l'Exemple esmentat; tantmateix amb la métrica que allí consideràvem* Φ_α *no és una isometria i per tant no coincideix amb la métrica* que es *contrucix en el procés de classiñcació de Ghys.*

És per això que no insistim mes en el tema i ens hem Umitat a estudiar el cas de dimensió 3, on hi ha Pavantatge que el tor hiperbólic és una foliació de Lie donada per un paral.lelisme absolut, fet que no es dona en els "tors hiperbólics generalitzats" de dimensions superiors.

Foliacions totalment geodésiques
amb curvatura transversa constant

Al final del CAPÍTOL V hem fet diverses referéncies a foliacions en superficies de curvatura constant (Cf. ***V.S5).*** Ara anem a vexire amb mes generalitat les relacions que podem establir entre foliacions totalment geodésiques de codimensió 1 i curvatura.

El paper que juga en superficies la curvatura seccional respecte de les nostres foliacions es generalitza a dimensions **mes** altes amb el concepte que ara introduirem de "curvatura transversa":

VII.8 **DEFINICIÓ.**

A ***M, siguí 7*** una ***foliació transversalment orientable, de codimensió 1.***
Donat un camp unitari, X, tangent a 7, arbitran,
deñnim la curvatura transversa d'X com

K {X) =: < R{X, N)N, X>

(i.e., la curvatura seccional del pía que determina X amb el camp unitari normal a ***la foliació)***

Veurem en primer lloc una caracterització de les foliacions totalment geodésiques ***bundle-like*** per mitjá de la curvatura transversa:

PROPOSICIÓ VII.9.

A M, sigui 7 una foliació totalment geodésica, transversalment orientable, de codimensió 1. Aleshores:

7 és bundle-like $\Longleftrightarrow$ ***K{X)=0,*** VX

DEM.:

LEMA VII.9.1.

En la base local habitual, la curvatura s'expressa per la fórmula:

$$K\ (\mathrm{X},) = \mathrm{X},(\mathrm{a},) - \text{«;} + \sum_{j=1}^{n} < \mathrm{Vx},\mathrm{X},,\ \mathrm{X}, > \mathrm{a},$$

DEM, DEL LEMA l:

No és sino un cálcul:

K [Xi) = < ***R{Xi,N)N,*** ***Xi>*** =

$$= < \nabla_{X_i}\nabla_N N - \nabla_{[X_i,N]}N,\ X_i > =$$

$$= < \mathrm{V}_{X_i} \left(\sum_{j=1}^{n} a_j X_j \right) - a_i \nabla_N N,\ X_i > =$$

$$= X_i(a_i) + \sum_{j=1}^{n} a_j\ < \nabla_{X_i} X_j, X_i > - a_i^2\ \blacksquare$$

DEM. DE VII,9:

=>)

Peí Lema///,7, totes les ***q\s*** són nules. El resultat, consequentment, és evident a partir del ***Lema*** precedent.

^)

Donat un punt p arbitrari d'M, veurem que a,- (p) = O.

Prenem la base habitual en un entorn de p. Tal com la construíem (Vd ***IL4),*** si 7¿ és la geodésica peí punt p amb vector tangent X,-, es té: (VxjXy)|$^{\wedge}_{i}$ = 0. Per tant.

0 = íí(X,)„. = (X,(a,)-a;),$^{\wedge}_{i}$ = $\left(\text{- X .·} \left(\frac{(X_i f)}{f} \right) - \left(\frac{(X_i f)}{/} \right)^{2\backslash} \right)_{|\gamma_i} =$

$$= - \left(\frac{X_i X_i \cdot f}{f} \right)_{\backslash 1i}$$

En deduim que ***{f o ^i)[s) = ks + h .***

Com que la varietat és completa, recobrint la geodésica per entorns del tipus desitjat, obtindríem que aquesta expressió de / hauria de valer per tot valor de ***s.*** Però / mai s'anula, així que cal *k*= O i / **o 'Y,- =** ***constant*** **.** Aleshores:

$$a_i(p) = -\left(\frac{(X_i f)}{f}\right)_p = 0$$

El punt ***p*** era arbitrari, així és que les funcions ***a_i'.s*** s'han d'anular arreu i la foliació ha de ser ***{III.7) bundle-like.*** **|**

OBSERVACIÓ. **Quan la varieíat *és plana, la foliació ha de ser, és* ciar, *bundle-like. El recíproc és cert en superficies; però no en dimensions superiors. N'hi ha prou amb considerar aquest exemple:***

M = $\mathbf{R}^2$ **X** R, **J** <-> R' **X** ***{pt.},*** ***ds^ = dx^ + e'^dy'' + dt"".***

Si la varietat és compacta i la curvatura transversa té signe constant, podem assegurar que la foliació és ***bundle-like:***

PROPOSICIÓ VIL 10.

A M, sigui 7 una foliació totalment geodésica, transversalment orientable, de codimensió 1. Si M és compacta i la curvatura transversa té signe constant, aleshores la foliació és bundle-like (i K = 0).

DEM.:

Suposarem ***K {X)*** > O, V X . (L'altre cas es demostra igual).

En la base de sempre:

n

div (V.viV) = $\sum$ < Vx..V^iV, X, > + < V;, V^riV, ***N*** >=

i= 1

$$= \sum_{«=i}^{n} < \nabla_{X_i} \nabla_N N,\ X_i > + \sum_{i=i}^{n} a_i < \nabla_N X_i,\ N >=$$

n *n*

- E_< '^x.V^iV, X.. > -X^a, < V^iV, X.- >=
i= 1 i= 1

« n

= **E** < '^x.'^/'^. X, > **- x ;** < **v**,x,.^¡i\^, X.- >=
•=i »=i

n

= **X^ir(x,) _>o**

i= 1

Apliquem el ***Teorema de Green i***

0=1 ***div (V^N) duj _>0***

JM

És dir que ***div*** (Vj^iV) = O i com totes les ***K***(X¿) _> O , això vol dir que totes s'anulen.

O sia que ***K***(Xj) = 0, V¿ i, per la ***Proposició*** anterior, tenim que la foliació és ***bundle-like.*** **I**

OBSERVACIÓ. ***El resultat també val si, enlloc de ser-ho*** M, ***suposem que hi ha una fulla compacta. La demostrado és molt semblant: ara cal calcular la divergència de*** $\nabla_N N$ ***en la fulla compacta, que difereix de la divergència en la varietat en el terme sempre positiu*** |I **Vjv iV**|| ^{2} ; així ***és que un raonament análeg*** a ***¡'anterior prova aquesta segona versió. (I, a mes, podem garantir que totes les fulles son compactes: Vd*** /J-Wjj.

Anem a tractar de íes foliacions amb curvatura transversa constant. Si és O, ja sabem que la foliació será ***bundle-like.*** Veiem ara que la curvatura, si és constant, és no positiva:

PROPOSICIÓ VII.11.

A M, sigui 7 una foliació totalment geodésica, transversalment orientable, de codimensió 1 amb curvatura transversa K constant.

Aleshores, K <0.

DEM.: •••\..-

DEM.:

Donat un punt ***p*** qualsevol, considerem la base local habitual i anomenem 7^ la geodésica per ***p*** amb vector tangent X;.

Repetint la demostrado de ***VILO*** obtenim que

$$-\left(\frac{XiXi\text{-}f\backslash}{f}\right)_{|\gamma_i} = \hat{K} = \hat{c}onst\hat{a}nt.$$

Si ***K*** > ***O,*** l'equació anterior te solució

$$(/ \ \mathbf{o} \ 7_{¡})(s) = m \cos(s \overline{VK}) + n \ s'm\{s \ \overline{VK}]$$

Igual que en aquélla ***Proposició,*** aquesta expressió hauria de valer per qualsevol valor de **5;** però això comportarla que la funció / arribarla a anular-se en algún punt, absurd!

I dones, ***K*** $\leq$***0.*** ***M***

Foliacions amb curvatura transversa constant:
cas en qué *dim M = 2*

Com d'habitud, suposarem en el que resta de capítol que la varietat M té dimensió 2; i que 7 és totalment geodésica, orientable i transversalment orientable, de codimensió 1. Utilitzarem la notació habitual en el cas de superficies.

Peí que hem vist abans, si la curvatura transversa (que en el cas de de dimensió **2** coincideix, és ciar, amb la curvatura de Riemann de la superficie) és constant, només pot ser zero o negativa. Si és zero, la foliació és ***bundle-like*** i és un cas ben conegut (Vd ***III.23).*** Ens ocuparem, dones, de quan és estrictament negativa.

Estudiarem en primer lloc qué es pot dir en aquesta situació quan hi ha alguna fulla compacta.

PROPOSICIÓ VII.12.

Si la curvatura K és constant i negativa; i LQ és una 7-fulla compacta, aleshores:

i) En qualsevol entorn de LQ hi ha fulles no compactes;

ii) ***dimg*** < **1,** ^" = 0 ***i tot camp de Killing és tangent a LQ .***

DEM.:

LEMA VII.12.I.

En superficies:

$$K = T\{a) - a^{2} \; \acute{/} \; \mathrm{Í} = \frac{TT \bullet f}{j}, \quad \textit{localment)} \backslash$$

DEM. DEL LEMA l:

La primera igualtat resulta del ***Lema VII.9.1***, ja que en superficies V^T = O.

La segona igualtat s'obté de la primera, de manera análoga a com ho féiem a ***VII.9*** en el cas general. |

DEM. DE VII.12:

Situem-nos al recobridor universal, $\mathbf{R}^2$. L'equació del ***Lema***

f^^ + Kf = 0, 0> K = constant,

té per solució general

(1) ***f{x,y) = h*(y) *+f2{y)e-''% on k ^ sTK.***

Per tal de garantir que / mai s'anuli hem d'imposar que

(2) **Vy :** **/i(y)**>0, ***U{y)***>^\ **/i (y)** ^ O o ^**{y)** 0.

Fent cálculs:

$$a(x,y) = -\left(\log f\right)_x = \cdots = k \cdot \frac{f_2(y) - e^{2kx}\ f_1(y)}{f_2(y) + e^{2kx}\ f_1(y)} \tag{3}$$

Per hipótesi, la nostra superficie té una fulla compacta, ***LQ .*** Per tant, a R^ hi ha d'haver punts diferents, **(xq, yo), (xi, yo)** de la mateixa fibra.

En particular, a **(xq, yo)** = a **(xi, yo)** , que, per (3),

$$\Longrightarrow \left(f_1 \cdot f_2\right)(y_0)\left(e^{2kx_1} - e^{2kx_0}\right) = \left(f_1 \cdot f_2\right)(y_0)\left(e^{2kx_0} - e^{2kx_1}\right)$$

i, com que *XQ* ^ ***Xi*** , vol dir que

/i(yo)=o o **/2(yo)=o.**

Si ho substituim a (3):

0|L,, =*k* ***o*** a|**i,,** = ***-k.***

i)

Si en un entorn de **Lo** totes les fulles fossin compactes, d'acord amb el resultat precedent, en aquest entorn la funció ***a*** seria constant; ara bé, segons ***V.S5,*** quan ***a = constant,*** com a molt, hi pot haver una fulla compacta i tindríem una contradicció. Per tant, hem provat l'afirmació i).

ii)

Prenem un camp ***X =: [aT + /?iV) € i{M)*** arbitrari.

(4) **TAr(a)|,„ = [r,Arl(a)|^„ = aiV(a),^„ = ±fciV** $(\alpha)_{|L_0}$

La funció *N* (a) ha de teñir un màxim i un mínim a la fulla compacta ***LQ* .** D'acord amb (4), s'haurá d'anular en ambdós punts, i.e.

^ («) | i . „ = 0

Per ***11.5:***

(5) T (/ ?) , , „ = - a / 3 , ^ „ - i V (a) „ „ = TA: $\beta_{|L_0}$

Com abans, la funció /? ha de teñir un máxim i un mínim a la fulla ***LQ* .** Tenint en compte (5), s'haurá d'anular en ambdós extrems, i.e.

$$\beta_{|L_0} = 0$$

i tot camp de Killing és tangent a ***LQ* .**

No hi pot haver cap camp de Killing normal a la foliació, perqué s'hauria d'anular en la fulla ***Lo*** i, segons ***ILIO,*** caldria que fos tangent a la foliació!

Si ***g" = 0*** **,** com a consequéncia de ***V.S5, V.29*** i ***VLIS, dimg*** ≤ 1. **i**

OBSERVAGIÓ.

Quan ***a*** = ***constant*** **,** Ja ***situado de la Proposidó precedent es pot donar (i Lo será rúnica fulla compacta). De fet, si a = constant , la curvatura sempre és constant i val***
2
-O ***, segons es desprén del Lema VIL 12.1.***

El cas T{a) = O ^ ^{f^) no ***pot*** ocórrer si ia curvatura ***és constant: a partir de l'expressió d'a (Vd (3) de la Proposidó anterior) es comprova fácilment que T{a) no pot ser idénticament nul llevat de quan a és constant.***

Si T{a) 7^ **O** = ***N{a) i la*** **curvatura** ***és constant, no hi pot haver cap fulla compacta:***

COROL.LARI VIL 13.

Quan ***K = constant < O, si T{a)*** ≠ ***O = N{a),***

aleshores la foliació no té cap fulla compacta.

DEM.:

Situem-nos al recobridor universal,

$$\mathbf{M = Rx(c,íi),} \qquad ds^2 = dx^2 +/ \{x)dy^2 .$$

Com en la *Proposició* precedent, rcsolcm rcquació

$$f'' + Kf =0$$

de / quan la curvatura és constant i negativa i obtenim que

$$f\{x) = Ae'''+ De-''\backslash \qquad k = y/\wedge .$$

Cal imposar que / mai s'anulí i això fa que

$$A \geq 0 , \qquad B \geq 0 , \qquad \text{AjíOo B :/:0.}$$

L'expressió que es troba per a a és

$$a\{x) = -\{\backslash ogfy =-k \cdot \frac{Ae''' - Be-'''}{A e^{kx} + B e^{-kx}} \tag{1}$$

Com que volem *T{a)* 7¿ O, de (1) deduim que cal imposar *AB* ^ O i això fa que la funció *a* sigui injectiva.

Ara bé, si *a* és injectiva, punts (xo)!/o). *{xi,yo)* no poden ser de la mateixa fibra i per tant cap fulla pot ser compacta. |

OBSERVACIÓ. Tantmateix, *en les hipótesis de la. Proposició anterior, el que sí pot passar és que les fulles transverses siguin compactes. L'exemple V.31 n'és un cas.*

Ja sabem que hi ha relació entre el fet que la curvatura no sigui constant i que tot camp de Killing respecti la foliació: a *V.SS* hem vist que, en el cas *warped product,* ambdues condicions son equivalents.

En el cas general, la condició per tal que un camp de Killing *X* repecti és que *X{a)* = O (Vd *VH8).* Aquesta condició es pot substituir, sota certes hipótesis bastant restrictives, per *X{K)* = 0 .

Considerarem foliacions en qué un camp de Killing, (que no pot ser tangent si estem en un cas no *bundle-like)* no pot ser tangent a les fulles en cap obert de la superficie.

PROPOSICIÓ VIL 14.

Quan *la curvatura K no és constant en cap obert,*
si g yí0 i Xe i{M):

$$xeg \iff X[K) = 0$$

DEM.:

)

Sigui X =: *{aT + pN)* **G** ^ ; per ***II.5:***

X,T] = [PN, T] = -T{P)N -0aN = 0.

Com que ***X{a)=0 {IV.ll),***

X{K) = XT -a- X{a^) =TX-{a) = 0 .

Peí CELS ***warped product,*** en funció de ***V.S5,*** no cal provar res.

Peí que fa al cas general, **r**(o) ***N{a):***

Si ^ **7^** 0 , hi ha Xi- = ***{aiT + 0iN) € g.*** Per ***VI.IS:***

T{a) = **-**/?iiV(a) i ***TT{a) = -PiNT{a)***

i, donat que, segons suposem, /?i no es pot anular en cap obert,

(1) =^ ***T{a) NT{a) = N{a) TT{a)***

Donat X = (aT + ***f3N) G i{M)*** arbitrari:

T{a) X{K) = T{a)- {a TT{a) + p NT{a) - X(a')) =

= ***TT{a)-{aT{a)+0N{a)) -T{a)X{a^) =***

= ***TT{a) X{a)*** - **r**(o^) X(a) =

(2) = ***T{K) X{a)***

Igualment:

N{a) X{K) = N{a) aTT{a) -N{a)a2aT{a) + N{a) ¡3N{K) =

= ***aT{a)NT{a)-aT{a)N{a^) +0N{a)N{K) -=***

= ***a T{a) N{K) + PN{a) N{K) =***

(3) = ***N{K) X{a)***

Suposem ara que $X\{K) \;—\!\!= 0.$ De (2) **i** (3), més el fet que la curvatura no pugui ser constant en cap obert, es dedueix que $X\{a) = O$, i.e., per ***VI.18,*** que X **G** ^ **.** |

OBSERVACIÓ.

La condició que l'álgebra dels camps de Killing que respecten la foliació no fos buida es pot substituir per aquesta altra, encara ***menys agradable:*** $T\{a)\ NT\{a) = N\{a)\ TT[a)$ ***(*).***

Aquesta ***condició (*) es*** verifica ***automáticament si la curvatura és constant:***

$$0 = N\{K) = NN\{a) \ -2aN\{a)$$

$$0 = T\{K) = TT\{a) \ -2aT\{a)$$

d'on $$T\{a)\ NN\{a) = 2\,a\,T\{a)\ N\{a) = N\{a)\ TT\{a)$$

Tantmateix, la hipótesi que la curvatura no sigui constant, evidentment, és necessária (Vd contraexemples a V.35).

BIBLIOGRAFÍA

ARTICLES

[Bl-Hb I] R.A. Blumenthal ***&z 3.3.*** Hebda, ***De Rham decomposition theorems for foUated manifolds,*** Ann. Inst. Fourier, Grenoble, 33 (1983), 183-198.

[Bl-Hb II] R.A. Blumenthal &; J.J. Hebda, ***Ehresmann Connections for Foliations,*** Indiana Math. J. 33 (1984), 597-611.

[Ca] Y. Garriere, ***Flots Riemanniens*** (a ***Structure Transverse des Feuilletages,*** Toulouse, Fev. 1982), Astérisque 116 (1984), 31-52.

[Ca-Gh] Y. Garriere &; **E.** Ghys, ***Feuilletages totalement géodésiques,*** An. Acad. Brasil. Giénc. 53 (1981), 427-432.

Cu] G. Currás-Bosch, ***On the geoemetry of totally geodesia foliations admitting Killing field,*** to appear in Tóhoku Math. Journ.

Fu-Fe] P.M.D. Furness ***&¿*** E. Fédida, ***Transversally Affine Foliations,*** Glasgow Maths. J. 17 (1976), 106-111.

[Gh] E. Ghys, ***Classification des feuilletages totalement géodésiques de codimension un,*** Gomment. Math. Helvetici 58 (1983), 543-572.

[Gh-Se] E. Ghys ***&¿*** V. Sergiescu, ***Stabilité et conjugaison différentiable pour certains feuilletages,*** Topology 19 (1980), 179-197.

[He] R. Hermann, ***On the differential geometry of foliations,*** Ann. of Math. (2) **72** (1960), 445-457.

Im] H. Imanishi, ***On the Theorem of Denjoy-Sacksteder for codimension one foliations without holonomy, 3.*** Math. Kyoto Univ. 14 (1974), 607-634.

[Ka-Tn] F.W.Kamber &¿ P. Tondeur, ***Harmonio Foliations*** (a ***Proc. NSF Conference on Harmonic Maps,*** Tulane, Dec. 1980), Springer Lecture Notes in Math. 949 (1982), 87-121.

[J-W] D.L. Johnson & L.B. Whitt, ***Totally Geodesic Foliations, 3.*** Differential Geom. 15 (1980), 225-235.

[Lw] H.B. Lawson, ***Foliations,*** Bull. Amer. Math. Soc. 80 (1974), 369-418.

[Me] J. Meyer, ***e-foHations of codimension two,*** J. DifFerential Geom. 12 (1977), 583-594.

[No] S.P. Novikov, ***The topology of foliations,*** Trudy Moskow. Mat. Ob§í. 14 (1965), 248-278. (English translation: Trans. Moskov Math. Soc. (1965), 268-304).

[Os I] G. Oshikiri, ***Jacohi fields and the stability of leaves of codimension-ont minimal foliations,*** Tóhoku Math. Journ. 34 (1982), 417-424.

[Os 11] G. Oshikiri, ***Totally geodesic foliations and Killing fields,*** Tóhoku Math. Journ. 35 (1983), 387-392.

[Re] B.L. Reinhart, ***Foliated manifolds with bundle-like metrics,*** Ann. of Math. (2) 69 (1959), 119-132.

LLIBRES

[He-Hi] G. Héctor ***&¿*** U. Kirsch, ***Introduction to the geometry of foliations,*** Parts A & B. Aspects of Mathematics El ***S¿*** E3, Vieweg, Braunschweig, 1986.

[K-N] S. Kobayashi & K. Nomizu, ***Foundations of Differential Geometry,*** Vol. I. Interscience Tracts in Puré and Appl. Math. 15, Interscience, New York, 1963.