

ADVERTIMENT. La consulta d'aquesta tesi queda condicionada a l'acceptació de les següents condicions d'ús: La difusió d'aquesta tesi per mitjà del servei TDX (www.tesisenxarxa.net) ha estat autoritzada pels titulars dels drets de propietat intel·lectual únicament per a usos privats emmarcats en activitats d'investigació i docència. No s'autoritza la seva reproducció amb finalitats de lucre ni la seva difusió i posada a disposició des d'un lloc aliè al servei TDX. No s'autoritza la presentació del seu contingut en una finestra o marc aliè a TDX (framing). Aquesta reserva de drets afecta tant al resum de presentació de la tesi com als seus continguts. En la utilització o cita de parts de la tesi és obligat indicar el nom de la persona autora.

ADVERTENCIA. La consulta de esta tesis queda condicionada a la aceptación de las siguientes condiciones de uso: La difusión de esta tesis por medio del servicio TDR (www.tesisenred.net) ha sido autorizada por los titulares de los derechos de propiedad intelectual únicamente para usos privados enmarcados en actividades de investigación y docencia. No se autoriza su reproducción con finalidades de lucro ni su difusión y puesta a disposición desde un sitio ajeno al servicio TDR. No se autoriza la presentación de su contenido en una ventana o marco ajeno a TDR (framing). Esta reserva de derechos afecta tanto al resumen de presentación de la tesis como a sus contenidos. En la utilización o cita de partes de la tesis es obligado indicar el nombre de la persona autora.

WARNING. On having consulted this thesis you're accepting the following use conditions: Spreading this thesis by the TDX (www.tesisenxarxa.net) service has been authorized by the titular of the intellectual property rights only for private uses placed in investigation and teaching activities. Reproduction with lucrative aims is not authorized neither its spreading and availability from a site foreign to the TDX service. Introducing its content in a window or frame foreign to the TDX service is not authorized (framing). This rights affect to the presentation summary of the thesis as well as to its contents. In the using or citation of parts of the thesis it's obliged to indicate the name of the author

**ESTIMACIO DELS PARAMETRES DE MODELS ARMA (P, Q)
MITJANÇANT ALGORISMES DE FILTRATGE OPTIM**



Tesi elaborada per:

Maria Pilar MUÑOZ i GRACIA

Sota la direcció del

Dr. Jaume PAGES i FITA

I presentada per a l'obtenció del
Grau de Doctora en Informàtica

Juny 1988

FACULTAT D'INFORMATICA DE BARCELONA

UNIVERSITAT POLITECNICA DE CATALUNYA

CAPITOL 3

FILTRE NO LINEAL PER L'ESTIMACIO DELS PARAMETRES DE PROCESSOS ARMA(P,Q)

3.1 INTRODUCCIO.

Tal com ja s'ha dit en el capítol 2, el filtre no lineal òptim és costós en temps de CPU i capacitat de memòria quan el nombre de paràmetres a estimar creix. Es pot veure a l'expressió (1.12) que per a un model ARMA(p,q), la probabilitat a posteriori de l'estat s'ha de calcular damunt d'una malla de dimensions $k_{p1}x...xk_{pp}xk_{q1}x...xk_{qq}xk_{e1}x...xk_{ep}$ on cada k_{ij} és el nombre de punts en què s'ha discretitzat cada component del vector d'estat ampliat. Degut a les limitacions de la capacitat de memòria, aquestes discretitzacions s'hauran de fer amb un interval de discretització gran i això dóna problemes en la convergència de la probabilitat calculada. Tot això ens ha fet arribar a comprendre que cal dissenyar un algorisme òptim que sigui més ràpid en temps de càlcul i ocupi menys memòria. La solució de l'algorisme és possible gràcies a la demostració d'una recursivitat entre les formes quadràtiques que defineixen la funció de densitat conjunta a posteriori dels paràmetres a estimar. De fet, l'aplicació d'aquesta recursivitat és general i té aplicació a altres problemes a més del problema de l'estimació dels paràmetres de models ARMA. Aquesta recursivitat es pot aplicar al càlcul de qualsevol funció de densitat gaussiana amb l'única restricció que la matriu que defineix la forma quadràtica sigui simètrica i no singular. Si l'esmentada matriu té estructura de Toeplitz, estructura ja ben estudiada a la literatura [14], l'algorisme té un guany substancial en temps de càlcul i requeriment de memòria, ja que en un moment determinat es pot aplicar la recurrència de Levinson pel càlcul del determinant i de la matriu inversa.

3.2 DEFINICIO DE LA PROBABILITAT A POSTERIORI DELS PARAMETRES

Donada una mostra de dimensió n , denotem per y^n , el conjunt de totes les observacions fins l'instant n , és a dir

$$y^n = \{y_1, \dots, y_n\}$$

Suposem que aquesta mostra segueix un model ARMA(p, q):

$$y_t = a_1 y_{t-1} + \dots + a_p y_{t-p} + e_t - c_1 e_{t-1} - \dots - c_q e_{t-q} \quad (1.8)$$

on e_t és un soroll blanc gaussià de variància σ^2 .

Definim per $\varnothing = (a_1, \dots, a_p, c_1, \dots, c_q)$ vector de $p+q$ paràmetres. La densitat de probabilitat a posteriori dels paràmetres després de n observacions és:

$$p(\varnothing, \sigma^2 / y^n) = \frac{p(y^n / \varnothing, \sigma^2) p(\varnothing, \sigma^2)}{\int_{\sigma^2 \varnothing} p(y^n / \varnothing, \sigma^2) p(\varnothing, \sigma^2) d\varnothing d\sigma^2} \quad (3.1)$$

on $p(\varnothing, \sigma^2)$ és la probabilitat a priori del vector format pels paràmetres del model \varnothing i σ^2 i $p(y^n / \varnothing, \sigma^2)$ és la funció de densitat de probabilitat a posteriori del conjunt y^n de totes les observacions fins l'instant n , coneguts els paràmetres i la variància del soroll. Aquesta densitat és gaussiana ja que a partir de l'equació (1.8)

$$y_0 = e_0$$

$$y_1 = a_1 y_0 + e_1 - c_1 e_0 = (a_1 - c_1) e_0 + e_1$$

$$y_2 = a_1 y_1 + a_2 y_0 + e_2 - c_1 e_1 - c_2 e_0 = (a_1(a_1 - c_1) + a_2 - c_2) e_0 + (a_1 - c_1) e_1 + e_2$$

i així successivament. Per tant, quan es coneixen els paràmetres, les observacions són combinacions lineals dels diferents sorolls blancs gaussians, i llavors

$$p(y^n | \theta, \sigma^2) = \frac{1}{(2\pi)^{n/2} (\det R_n)^{1/2}} \exp \left\{ -1/2 (y^n)' R_n^{-1} y^n \right\} \quad (3.2)$$

on R_n és la matriu de covariàncies de les observacions.

Definim, pel cas estacionari,

$$\gamma_k = E [y_{t+k} y_t] \quad k \geq 0$$

$$\gamma_{ey}(j) = E [e_t y_{t-j}]$$

$$\text{obviament } \gamma_{ey}(j) = 0 \quad j > 0$$

ja que el soroll e_t és independent de les observacions anteriors.

i per qualsevol $k > 0$, [5]

$$\gamma_k = a_1 \gamma_{k-1} + \dots + a_p \gamma_{k-p} + \gamma_{ey}(k) + c_1 \gamma_{ey}(k-1) + \dots + c_q \gamma_{ey}(k-q) \quad (3.3)$$

i llavors per a $k > q$ l'equació (3.3) es redueix a:

$$\gamma_k = a_1 \gamma_{k-1} + \dots + a_p \gamma_{k-p} \quad (3.4)$$

En aquest cas, la matriu de covariàncies R_n , $n > 0$ és

$$R_n = E [y^n (y^n)'] = \begin{bmatrix} \gamma_0 & \gamma_1 & \gamma_2 & \dots & \dots \\ \gamma_1 & \gamma_0 & \gamma_1 & \dots & \dots \\ \gamma_2 & \gamma_1 & \gamma_0 & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \end{bmatrix} \quad (3.5)$$

Aquesta matriu de covariàncies és simètrica i té estructura de Toeplitz.

Els diferents valors $\gamma_0, \gamma_1, \dots$, són calculats segons la recursió (3.3) en funció de l'ordre del model, resolent el sistema d'equacions lineal:

$$\begin{aligned} \gamma_0 &= a_1 \gamma_1 + \dots + a_p \gamma_p + \sigma^2 + c_1 \gamma_{ey}(-1) + \dots + c_q \gamma_{ey}(-q) \\ &\vdots \\ \gamma_p &= a_1 \gamma_{p-1} + \dots + a_p \gamma_0 + \gamma_{ey}(p) + c_1 \gamma_{ey}(p-1) + \dots + c_q \gamma_{ey}(p-q) \end{aligned}$$

tenint en compte que $\gamma_{ey}(j) = E[e_t y_{t-j}]$ i $\gamma_{ey}(j) = 0$, $j > 0$.

De fet, l'expressió (3.1) es pot posar com

$$p(\emptyset, \sigma^2 / y^n) = k_n p(y^n / \emptyset, \sigma^2) p(\emptyset, \sigma^2) \quad (3.6)$$

on k_n és la constant de normalització, ja que el denominador de (3.2) és una constant respecte a les variables \emptyset i σ^2 .

Si la probabilitat a priori $p(\emptyset, \sigma^2)$ és localment uniforme, d'acord amb la definició donada en l'apartat 2.12, l'expressió (3.6) quedarà com

$$p(\emptyset, \sigma^2 / y^n) = k'_n p(y^n / \emptyset, \sigma^2) \quad (3.7)$$

on k'_n serà la nova constant de normalització. Es a dir, la probabilitat a posteriori $p(\emptyset, \sigma^2 / y^n)$ és, numèricament, aproximadament igual a la funció de versemblança normalitzada.

3.3 CALCUL RECURSIU DE LA FUNCIO DE VERSEMBLANÇA NORMALITZADA

3.3.1 Obtenció eficient de la matriu inversa

Donada una matriu simètrica i no singular

$$S_n = \begin{bmatrix} s_{11} & \cdot & \cdot & s_{1n} \\ \cdot & s_{22} & \cdot & s_{2n} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & s_{nn} \end{bmatrix}$$

suposem que el sistema següent d'equacions és resoluble amb $b_n^n \neq 0$.

$$\begin{bmatrix} s_{11} & \cdot & \cdot & s_{1n} \\ \cdot & s_{22} & \cdot & s_{2n} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & s_{nn} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} b_n^1 \\ \cdot \\ \cdot \\ b_n^n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ \cdot \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \quad (3.8)$$

Es a dir, si definim per

$$S_{n-1} = \begin{bmatrix} s_{11} & \cdot & s_{1n-1} \\ \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & s_{n-1\ n-1} \end{bmatrix}$$

per $s_n' = [s_{1n}, \dots, s_{n-1n}]$

i per $\beta_{n-1}' = [b_n^1, \dots, b_n^{n-1}]$.

on el subíndex n indica la dimensió del vector associat a la matriu quadrada de dimensió n i el superíndex $j, j=1, \dots, n-1$, indica cadascuna de les components de l'esmentat vector. El vector $[b_n^1, \dots, b_n^n]$ no és res més que la darrera columna de S_n^{-1} .

Amb aquesta notació el sistema d'equacions (3.8) es podrà escriure:

$$\begin{bmatrix} S_{n-1} & s_n' \\ \cdot & s_{nn} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \beta_{n-1}' \\ b_n^n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0_{n-1} \\ 1 \end{bmatrix} \quad (3.8)'$$

on 0_{n-1} és el vector de dimensió $(1 \times n-1)$ format per zeros.

Definim la matriu

$$B_n = \begin{bmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 & b_n^1 \\ 0 & 1 & \dots & 0 & \vdots \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & \dots & 0 & 1 & b_n^{n-1} \\ 0 & \dots & 0 & 0 & b_n^n \end{bmatrix}$$

si denotem per I_{n-1} la matriu identitat de dimensió $n-1$, tindrem

$$B_n = \begin{bmatrix} I_{n-1} & \beta_{n-1} \\ 0_{n-1} & b_n^n \end{bmatrix} \quad (3.9)$$

Llavors:

$$S_n^{-1} = B_n \begin{bmatrix} S_{n-1}^{-1} & 0_{n-1} \\ 0_{n-1} & \frac{1}{b_n^n} \end{bmatrix} B_n^{-1} \quad (3.10)$$

i els elements de S_n^{-1} es podran obtenir a partir dels de S_{n-1}^{-1} :

$$\begin{aligned} S_n^{ij} &= S_{n-1}^{ij} + \frac{b_n^i b_n^j}{b_n^n} & i=1, \dots, n-1 \\ & & j=1, \dots, n-1 \\ S_n^{nj} &= b_n^j & j=1, \dots, n \end{aligned} \quad (3.11)$$

on S_n^{ij} són els elements de S_n^{-1} i

S_{n-1}^{ij} són els elements de S_{n-1}^{-1}

Demostració

En efecte:

$$B_n' S_n B_n = \begin{bmatrix} I_{n-1} & 0_{n-1} \\ \beta_{n-1}' & b_n^n \end{bmatrix} \begin{bmatrix} S_{n-1} & s_n \\ s_n' & s_{nn} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} I_{n-1} & \beta_{n-1} \\ 0_{n-1}' & b_n^n \end{bmatrix} = \quad (3.12)$$

$$= \begin{bmatrix} S_{n-1} & s_n \\ \beta_{n-1}' S_{n-1} + b_n^n s_n' & \beta_{n-1}' s_n + b_n^n s_{nn} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} I_{n-1} & \beta_{n-1} \\ 0_{n-1}' & b_n^n \end{bmatrix} =$$

$$= \begin{bmatrix} S_{n-1} & s_n \\ 0_{n-1}' & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} I_{n-1} & \beta_{n-1} \\ 0_{n-1}' & b_n^n \end{bmatrix} = \quad (3.13)$$

$$= \begin{bmatrix} S_{n-1} & S_{n-1} \beta_{n-1} + s_n b_n^n \\ 0_{n-1}' & b_n^n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} S_{n-1} & 0_{n-1} \\ 0_{n-1}' & b_n^n \end{bmatrix}$$

ja que d'acord amb l'equació (3.8)' resulta que:

$$\beta_{n-1}' S_{n-1} + b_n^n s_n' = 0_{n-1}'$$

$$\beta_{n-1}' s_n + b_n^n s_{nn} = 1$$

Per tant si

$$B_n^{-1} S_n B_n = \begin{bmatrix} S_{n-1} & 0_{n-1} \\ 0_{n-1} & b_n^n \end{bmatrix} \quad (3.14)$$

Premultiplicant l'expressió (3.14) per $(B_n^{-1})^{-1}$

$$S_n B_n = (B_n^{-1})^{-1} \begin{bmatrix} S_{n-1} & 0_{n-1} \\ 0_{n-1} & b_n^n \end{bmatrix}$$

i posmultiplicant-la per B_n^{-1} tindrem que

$$S_n = (B_n^{-1})^{-1} \begin{bmatrix} S_{n-1} & 0_{n-1} \\ 0_{n-1} & b_n^n \end{bmatrix} B_n^{-1}$$

Es a dir:

$$S_n^{-1} = B_n \begin{bmatrix} S_{n-1}^{-1} & 0_{n-1} \\ 0_{n-1} & 1/b_n^n \end{bmatrix} B_n^{-1}$$

Les igualtats (3.12) i (3.13) s'obtenen a partir del lemma de Schur per matrius particionades.[17]

3.3.2 Càlcul recursiu de la matriu de covariàncies inversa.

Aplicant l'anterior resultat (3.10) al càlcul de la matriu de covariàncies inversa, tenim que

$$R_n^{-1} = B_n \begin{bmatrix} R_{n-1}^{-1} & 0_{n-1} \\ 0_{n-1} & 1/b_n^n \end{bmatrix} B_n \quad (3.15)$$

i ara la recurrència pels elements de la matriu inversa d'ordre n en funció dels elements de la matriu inversa d'ordre $n-1$ serà:

$$\begin{aligned} v_n^{ij} &= v_{n-1}^{ij} + \frac{b_n^i b_n^j}{b_n^n} & i=1, \dots, n-1 \\ & & j=1, \dots, n-1 \\ v_n^{ij} &= b_n^j & j=1, \dots, n \end{aligned} \quad (3.16)$$

on v_n^{ij} són els elements de R_n^{-1} i
 v_{n-1}^{ij} són els elements de R_{n-1}^{-1}

A més, com que R_n té estructura de matriu de Toeplitz, la solució del sistema d'equacions (3.8) es simplifica notablement, ja que el vector $[b_1^n, \dots, b_n^n]'$ s'obté fàcilment a partir de la recurrència de Levinson i l'algorisme de Burg. [10] [8]:

La versió moderna de l'algorisme de Levinson proposada per Burg [8] és la següent:

En primer lloc cal solucionar de forma recurrent el següent sistema d'equacions:

$$\begin{bmatrix} \gamma_0 & \gamma_1 & \cdot & \gamma_{n-1} \\ \gamma_1 & \gamma_0 & \cdot & \gamma_{n-2} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \gamma_{n-1} & \gamma_{n-2} & \cdot & \gamma_0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ g_n^2 \\ \cdot \\ g_n^n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} d_n \\ 0 \\ \cdot \\ 0 \end{bmatrix}$$

que en notació matricial serà:

$$R_n G_n = D_n$$

on $G_n = [1, g_n^2, \dots, g_n^n]^t$

$$D_n = [d_n, 0, \dots, 0]^t$$

i $(R_n)_{ij} = \gamma_{i-j}$

L'algorisme per resoldre el sistema de $n+1$ equacions en funció de la solució del sistema de dimensió n es troba fàcilment estudiant la següent equació matricial:

$$\begin{bmatrix} \gamma_0 & \gamma_1 & \cdot & \gamma_{n-1} & \gamma_n \\ \gamma_1 & \gamma_0 & \cdot & \gamma_{n-2} & \gamma_{n-1} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \gamma_{n-1} & \gamma_{n-2} & \cdot & \gamma_0 & \gamma_1 \\ \gamma_n & \gamma_{n-1} & \cdot & \gamma_1 & \gamma_0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 \\ g_n^2 \\ \cdot \\ g_n^n \\ 0 \end{bmatrix} + c_{n+1} \begin{bmatrix} 0 \\ g_n^n \\ \cdot \\ g_n^2 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} d_n \\ 0 \\ \cdot \\ 0 \\ \Delta_{n+1} \end{bmatrix} + c_{n+1} \begin{bmatrix} \Delta_{n+1} \\ 0 \\ \cdot \\ 0 \\ d_n \end{bmatrix}$$

Utilitzarem un superíndex "+" per indicar inversió de l'ordre de les components d'un vector. Per exemple,

$$G_n^+ = [g_n^n, \dots, g_n^2, 1]^T$$

El sistema precedent en equació matricial és:

$$R_{n+1} \left[\begin{bmatrix} G_n \\ 0 \end{bmatrix} + C_{n+1} \begin{bmatrix} 0 \\ G_n^+ \end{bmatrix} \right] = \left[\begin{bmatrix} D_n \\ \Delta_{n+1} \end{bmatrix} + C_{n+1} \begin{bmatrix} \Delta_{n+1} \\ D_n^+ \end{bmatrix} \right] \quad (3.16a)$$

Observi's que al fer el producte:

$$R_{n+1} \begin{bmatrix} G_n \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} D_n \\ \Delta_{n+1} \end{bmatrix}$$

es dedueix que:

$$\Delta_{n+1} = \sum_{j=1}^n \gamma_{n+1-j} g_n^j$$

on $g_n^1 = 1$.

A més, es desitja que el sistema expressat en (3.16a) sigui equivalent al sistema:

$$R_{n+1} G_{n+1} = D_{n+1}$$

de la qual cosa s'obté que:

$$\begin{bmatrix} G_n \\ 0 \end{bmatrix} + c_{n+1} \begin{bmatrix} 0 \\ G_n^+ \end{bmatrix} = G_{n+1} \quad (3.16b)$$

$$i \begin{bmatrix} D_n \\ \Delta_{n+1} \end{bmatrix} + c_{n+1} \begin{bmatrix} \Delta_{n+1} \\ D_n^+ \end{bmatrix} = D_{n+1} \quad (3.16c)$$

Per tant, de (3.16c) es dedueix que:

$$\Delta_{n+1} + c_{n+1} d_n = 0$$

és a dir

$$c_{n+1} = -\frac{\Delta_{n+1}}{d_n} \quad (3.16d)$$

i de (3.16b) s'obté la recurrència pels elements del vector G_{n+1} en funció dels elements del vector G_n :

$$\begin{bmatrix} 1 \\ g_n^2 \\ \cdot \\ g_n^n \\ 0 \end{bmatrix} + c_{n+1} \begin{bmatrix} 0 \\ g_n^n \\ \cdot \\ g_n^2 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ g_{n+1}^2 \\ \cdot \\ g_{n+1}^n \\ g_{n+1}^{n+1} \end{bmatrix}$$

és a dir

$$\begin{aligned} g_{n+1}^1 &= 1 \\ g_{n+1}^j &= g_n^j + c_{n+1} g_n^{n+2-j} \quad j = 2, \dots, n \\ g_{n+1}^{n+1} &= c_{n+1} \end{aligned} \quad (3.16e)$$

A més a partir de (3.16c) es veu que

$$d_{n+1} = d_n + c_{n+1} \Delta_{n+1}$$

i utilitzant l'equació (3.16d) arribem a la recurrència:

$$d_{n+1} = d_n - c_{n+1}^2 d_n = d_n (1 - c_{n+1}^2) \quad (3.16f)$$

Inicialitzarem aquesta recursivitat prenent $d_1 = \gamma_0$.

Però el nostre objectiu és poder expressar els elements de R_{n+1}^{-1} en funció dels elements de R_n^{-1} i el determinant de R_{n+1} en funció del determinant de R_n . Aquestes recurrències es troben fent servir la factorització de Cholesky per la matriu R_{n+1} :

$$\begin{bmatrix} \gamma_0 & \gamma_1 & \dots & \gamma_n \\ \gamma_1 & \gamma_0 & \dots & \gamma_{n-1} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \gamma_n & \gamma_{n-1} & \dots & \gamma_0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & g_{n+1}^2 & \dots & g_{n+1}^{n+1} \\ 0 & 1 & \dots & g_n^n \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} d_{n+1} & 0 & \dots & 0 \\ 0 & d_n & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & d_1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 \\ g_{n+1}^2 & 1 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ g_{n+1}^{n+1} & g_n^n & \dots & 1 \end{bmatrix}^{-1}$$

Per tant la recurrència pels determinants d'ordres successius és:

$$\det R_{n+1} = \det R_n d_{n+1} \quad (3.16g)$$

En el nostre problema concret no ens interessa trobar tots els elements de la matriu inversa R_{n+1}^{-1} , únicament ens afecta la darrera

columna d'aquesta matriu. La recurrència obtinguda per a aquest cas és:

$$b_{n+1}^1 = \frac{g_{n+1}^{n+1}}{d_{n+1}}$$

$$b_{n+1}^j = b_n^{j-1} + b_{n+1}^1 g_{n+1}^j \quad j=2, \dots, n+1 \quad (3.16h)$$

3.3.3 Càlcul recursiu de la forma quadràtica.

Donat un vector de n observacions, $(y^n)' = [y_1, y_2, \dots, y_n]$, la forma quadràtica obtinguda amb aquestes n observacions $(y^n)' R_n^{-1} y^n$ la podem calcular a partir de la forma quadràtica anterior calculada amb n-1 observacions ja que el vector d'observacions fins l'instant n y^n el podem descomposar en $[y^{n-1}, y_n]'$ i llavors:

$$\begin{aligned} (y^n)' R_n^{-1} y^n &= [y^{n-1}, y_n] B_n \begin{bmatrix} R_{n-1}^{-1} & 0_{n-1} \\ 0_{n-1}' & 1/b_n^n \end{bmatrix} B_n' \begin{bmatrix} y^{n-1} \\ y_n \end{bmatrix} = \\ &= [y^{n-1}, y_n] \begin{bmatrix} I_{n-1} & \beta_{n-1} \\ 0_{n-1}' & b_n^n \end{bmatrix} \begin{bmatrix} R_{n-1}^{-1} & 0_{n-1} \\ 0_{n-1}' & 1/b_n^n \end{bmatrix} \begin{bmatrix} I_{n-1} & 0_{n-1} \\ \beta_{n-1}' & b_n^n \end{bmatrix} \begin{bmatrix} y^{n-1} \\ y_n \end{bmatrix} = \\ &= [y^{n-1}, y_n] \begin{bmatrix} R_{n-1}^{-1} & \frac{1}{b_n^n} \beta_{n-1} \\ 0_{n-1}' & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} I_{n-1} & 0_{n-1} \\ \beta_{n-1}' & b_n^n \end{bmatrix} \begin{bmatrix} y^{n-1} \\ y_n \end{bmatrix} = \\ &= [y^{n-1}, y_n] \begin{bmatrix} R_{n-1}^{-1} + \frac{1}{b_n^n} \beta_{n-1} \beta_{n-1}' & \beta_{n-1}' \\ \beta_{n-1}' & b_n^n \end{bmatrix} \begin{bmatrix} y^{n-1} \\ y_n \end{bmatrix} = \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \left[(y^{n-1})' R_{n-1}^{-1} + \frac{1}{b_n} (y^{n-1})' \beta_{n-1} \beta_{n-1}' + y_n \beta_{n-1}' (y^{n-1})' \beta_{n-1} + y_n b_n^n \right] \begin{bmatrix} y^{n-1} \\ y_n \end{bmatrix} = \\
&= (y^{n-1})' R_{n-1}^{-1} y^{n-1} + \frac{1}{b_n} (y^{n-1})' \beta_{n-1} \beta_{n-1}' y^{n-1} + y_n \beta_{n-1}' y^{n-1} + \\
&+ (y^{n-1})' \beta_{n-1} y_n + y_n^2 b_n^n = \\
&= \sum_{i=1}^{n-1} \sum_{j=1}^{n-1} y_i y_j v_{n-1}^{ij} + \frac{1}{b_n} \sum_{i=1}^{n-1} \sum_{j=1}^{n-1} y_i y_j b_n^i b_n^j + 2 y_n \sum_{i=1}^{n-1} y_i b_n^i + y_n^2 b_n^n
\end{aligned}$$

però

$$\frac{1}{b_n} \sum_{i=1}^{n-1} \sum_{j=1}^{n-1} y_i y_j b_n^i b_n^j + 2 y_n \sum_{i=1}^{n-1} y_i b_n^i + y_n^2 b_n^n = \left(\sum_{i=1}^n y_i b_n^i \right)^2$$

i

$$\sum_{i=1}^{n-1} \sum_{j=1}^{n-1} y_i y_j v_{n-1}^{ij}$$

no és res més que la forma quadràtica anterior.

Per tant, si definim la forma quadràtica a l'instant n com $\text{forq}(n)$ resultarà que

$$\text{forq}(n) = \text{forq}(n-1) + \left(\sum_{i=1}^n y_i b_n^i \right)^2$$

3.3.4 Càlcul recursiu de la probabilitat a posteriori.

D'acord amb (3.7) i definint la probabilitat a posteriori dels paràmetres a l'instant n com p_n , tenim que:

$$\begin{aligned} p_n(\emptyset, \sigma^2 / y^n) &= k p(y^n / \emptyset, \sigma^2) = \\ &= k' (\det R_n)^{-1/2} \exp \{ -1/2 (y^n)' R_n^{-1} y^n \} = \\ &= k' (\det R_n)^{-1/2} \exp \{ -1/2 \text{forq}(n) \} \end{aligned}$$

A més, utilitzant la recurrència (3.16g), tenim que

$$\det R_n = \det R_{n-1} d_n \tag{3.16g}$$

on aquests d_n s'obtenen aplicant l'esmentada recurrència.

Es a dir

$$\begin{aligned} p_n(\emptyset, \sigma^2 / y^n) &= \\ &= k' (\det R_{n-1} d_n)^{-1/2} \exp \{ -1/2 (\text{forq}(n-1) + (\sum_{i=1}^n y_i b_n^i)^2) \} \\ &= k' (\det R_{n-1})^{-1/2} \exp \{ -1/2 \text{forq}(n-1) \} d_n^{-1/2} \exp \{ -1/2 (\sum_{i=1}^n y_i b_n^i)^2 \} \end{aligned}$$

Per tant

$$\begin{aligned}
 & p_n(\emptyset, \sigma^2 / y^n) = \\
 & = k' p_{n-1}(\emptyset, \sigma^2 / y^{n-1}) d_n^{-1/2} \exp \left\{ -1/2 \left(\sum_{i=1}^n y_i b_n^i \right)^2 \right\} \quad (3.17)
 \end{aligned}$$

és a dir, l'expressió (3.17) ens permet obtenir de manera recursiva la probabilitat a l'instant n en funció de la probabilitat obtinguda a l'instant $n-1$.

3.3.5 Comportament asimptòtic.

Segons (3.16)

$$\begin{aligned}
 v_n^{ij} &= v_{n-1}^{ij} + \frac{b_n^i b_n^j}{b_n^n} & i=1, \dots, n-1 \\
 & & j=1, \dots, n-1 \\
 v_n^{ij} &= b_n^j & j=1, \dots, n
 \end{aligned} \quad (3.16)$$

on v_n^{ij} són els elements de R_n^{-1} i

v_{n-1}^{ij} són els elements de R_{n-1}^{-1}

Prenem límits quan $n \rightarrow \infty$ en els elements de la matriu R_n^{-1} i

R_{n-1}^{-1}

$$\lim_{n \rightarrow \infty} R_n^{-1} = \lim_{n \rightarrow \infty} R_{n-1}^{-1}$$

s'obté que

$$b_n^j = 0, \quad j=1, \dots, \infty$$

Per tant, un indicador de que ens acostem a la distribució asimptòtica serà comprovar que tots els b_n^j són pròxims a zero.

3.4 ESTIMACIÓ DELS PARAMETRES D'UN MODEL ARMA(1,1) AMB LA VARIÀNCIA DEL SOROLL DESCONEGUDA.

3.4.1 Formulació.

Donada una mostra de dimensió n , $y^n = \{y_1, \dots, y_n\}$ que segueix un model ARMA(1,1)

$$y_t = ay_{t-1} + e_t + ce_{t-1} \quad (3.18)$$

on y_t és l'observació a l'instant t , a , c són els paràmetres a estimar $\{e_t\}$, $t=1, \dots, n$ és una successió de variables aleatòries independents amb distribució $N(0, \sigma^2)$. Suposarem que σ^2 és desconeguda i estimada simultàniament.

Per a aquest model es calcula la funció de covariància d'acord amb l'equació (3.3) i s'obté

$$\gamma_0 = a \gamma_1 + \sigma^2 + c \gamma_{ey}(-1) \quad (3.19)$$

$$\gamma_1 = a \gamma_0 + c \sigma^2 \quad (3.20)$$

i

$$\gamma_k = a \gamma_{k-1} \quad k > 1 \quad (3.21)$$

Multiplicant l'equació (3.18) per e_{t-1} i prenent esperances obtenim

$$\gamma_{ey}(-1) = a \sigma^2 + c \sigma^2$$

Substituint la darrera expressió en (3.19) i resolent el sistema de dues equacions amb dues incògnites format per (3.19) i (3.20) s'obté

$$\gamma_0 = \frac{(1 + 2ac + c^2)}{(1-a^2)} \sigma^2 \quad (3.22)$$

$$\gamma_1 = \frac{(a+c)(1+ac)}{(1-a^2)} \sigma^2 \quad (3.23)$$

i les covariàncies d'ordre superior γ_k , $k > 1$, s'obtenen a partir de l'equació (3.21).

Ara ja estem en disposició de calcular la matriu de covariàncies de les observacions d'acord amb (3.5) i prenent la distribució a priori per les variables desconegudes d'acord amb l'apartat 2.2.1 podrem calcular la probabilitat a posteriori per a aquestes variables d'acord amb l'equació (3.17).

3.4.2 Implementació de l'algorisme de filtratge no lineal

S'ha realitzat una discretització inicial a intervals iguals de les variables a estimar, és a dir a , c i σ^2 i s'obté una malla cúbica. Igual que s'ha fet en l'apartat 2.3.2, per calcular la funció de densitat de probabilitat a posteriori s'emmagatzema aquesta densitat de probabilitat a posteriori a cada un dels punts de la malla cúbica. La malla, a l'igual que en el capítol 2, pot canviar-se a cada iteració intentant seguir l'evolució de la densitat de la probabilitat. Un cop calculada $p(\theta, \sigma^2 / y^l)$ es comprova que en cada dimensió, tots els punts de la malla tenen assignada una probabilitat significativament diferent de zero. Els punts que no compleixin aquesta

condició són eliminats, però tenint en compte que el nombre de punts en cada dimensió no sigui excessivament petit.

Les etapes a seguir per l'adaptació de la malla són les mateixes que en l'apartat 2.3.2

- 1) Inicialitzacions, adopció d'una malla inicial.
- 2) Càlcul de la probabilitat a cada punt de la malla segons l'algorisme descrit en l'apartat 3.3.4 i representat per l'equació (3.17).
- 3) Comprovar que tots els punts de la malla tenen associat un valor de la probabilitat superior a una certa tolerància. Els punts que no compleixin aquesta condició són eliminats.
- 4) Comprovar que el nombre total de punts en cada dimensió és superior a un valor prefixat. Si resulta ser més petit que l'esmentat valor, es canvia l'interval de discretització i s'interpol·la la funció de densitat de probabilitat pels nous punts.
- 5) Tornar a 2)

3.4.2.1 Inicialització de la recursió

Siguin ζ_1 , ζ_2 i ζ_3 els possibles valors reals que poden prendre les variables a , c i σ^2 respectivament. Hem construït la següent malla inicial:

$\zeta_1 \in (-1.,1.)$ i es discretiza aquest interval en k_1 punts.

$\zeta_2 \in (-1.,1.)$ i es discretiza aquest interval en k_2 punts.

$\zeta_3 \in (0,S)$ i es discretiza aquest interval en k_3 punts.

Per a ζ_1 es pren l'interval $(-1,1)$ perquè el pol d'un model ARMA(1,1) estacionari pertany sempre a l'esmentat interval. Anàlogament es pren l'interval $(-1,1)$ per a ζ_2 ja que el zero d'un model ARMA(1,1) invertible pertany a aquest interval. Finalment es pren l'interval $(0,S)$ per a ζ_3 en funció de l'ordre de magnitud de la variància del soroll a estimar.

La densitat a priori de les condicions inicials està d'acord amb l'equació (2.11):

$$p(\zeta_1, \zeta_2, \zeta_3) \propto \frac{1}{k_1 k_2 k_3^2} \quad \text{si} \quad \begin{cases} \zeta_1 \in (-1, 1) \\ \zeta_2 \in (-1, 1) \\ \zeta_3 \in (0, S] \end{cases}$$

3.4.2.2 Càlcul recursiu de la probabilitat a posteriori

Per cada punt de la malla $(\zeta_1, \zeta_2, \zeta_3)$ i a mesura que estan disponibles les observacions, es calcula la densitat de probabilitat a posteriori d'acord amb l'equació (3.17).

Les etapes a seguir són:

- 1) Es calcula la funció de covariància d'acord amb les equacions (3.22), (3.23) i (3.21)

$$\gamma_0(\zeta_1, \zeta_2, \zeta_3) = \frac{1 + 2\zeta_1 \zeta_2 + \zeta_2^2}{1 - \zeta_1^2} \cdot \zeta_3 \quad (3.22)'$$

$$\gamma_1(\zeta_1, \zeta_2, \zeta_3) = \frac{(\zeta_1 + \zeta_2)(1 + \zeta_1 \zeta_2)}{1 - \zeta_1^2} \cdot \zeta_3 \quad (3.23)'$$

$$\gamma_k(\zeta_1, \zeta_2, \zeta_3) = \zeta_1 \gamma_{k-1}(\zeta_1, \zeta_2, \zeta_3) \quad k > 1 \quad (3.21)'$$

2) Utilitzant la recurrència de Levinson (3.16f) i (3.16h) es calcula el darrer vector de la matriu de covariàncies de dimensió $n+1$ a partir del darrer vector de la matriu de dimensió n i el valor d_{n+1} a partir de d_n .

Primer calcular el valor Δ_{n+1} :

$$\Delta_{n+1}(\zeta_1, \zeta_2, \zeta_3) = \sum_{j=1}^n \gamma_{n+1-j}(\zeta_1, \zeta_2, \zeta_3) g_n^j(\zeta_1, \zeta_2, \zeta_3)$$

on $g_n^1(\zeta_1, \zeta_2, \zeta_3)$.

A continuació calcular els elements c_{n+1} seguint l'equació (3.16d)

$$c_{n+1}(\zeta_1, \zeta_2, \zeta_3) = \frac{\Delta_{n+1}(\zeta_1, \zeta_2, \zeta_3)}{d_n(\zeta_1, \zeta_2, \zeta_3)} \quad (3.16d)'$$

L'actualització del vector $g_{n+1}^1(\zeta_1, \zeta_2, \zeta_3)$ $j=1, \dots, n+1$ és feta utilitzant la recurrència (3.16e)

$$g_{n+1}^1(\zeta_1, \zeta_2, \zeta_3) = 1$$

$$g_{n+1}^j(\zeta_1, \zeta_2, \zeta_3) = g_n^j(\zeta_1, \zeta_2, \zeta_3) + c_{n+1} g_n^{n+2-j}(\zeta_1, \zeta_2, \zeta_3) \quad j=2, \dots, n \quad (3.16e)'$$

$$g_{n+1}^{n+1}(\zeta_1, \zeta_2, \zeta_3) = c_{n+1}(\zeta_1, \zeta_2, \zeta_3)$$

Finalment, el càlcul del darrer vector de la matriu de covariàncies inversa es fa utilitzant la recurrència (3.16h):

$$b_{n+1}^1(\zeta_1, \zeta_2, \zeta_3) = \frac{g_{n+1}^{n+1}(\zeta_1, \zeta_2, \zeta_3)}{d_{n+1}(\zeta_1, \zeta_2, \zeta_3)}$$

$$b_{n+1}^j(\zeta_1, \zeta_2, \zeta_3) = b_n^{j-1}(\zeta_1, \zeta_2, \zeta_3) + b_{n+1}^1(\zeta_1, \zeta_2, \zeta_3) g_{n+1}^j(\zeta_1, \zeta_2, \zeta_3) \quad j=2, \dots, n+1$$

La recurrència de Levinson s'inicialitza prenent

$$d_1(\zeta_1, \zeta_2, \zeta_3) = \gamma_0(\zeta_1, \zeta_2, \zeta_3)$$

$$b_1^1(\zeta_1, \zeta_2, \zeta_3) = \frac{1}{d_1(\zeta_1, \zeta_2, \zeta_3)}$$

3) S'implementa la recurrència (3.17):

$$p_{n+1}(\zeta_1, \zeta_2, \zeta_3 / y^{n+1}) = k' p_n(\zeta_1, \zeta_2, \zeta_3 / y^n) d_{n+1}^{-1/2}(\zeta_1, \zeta_2, \zeta_3) \exp\left\{-\frac{1}{2} \sum_{i=1}^{n+1} y_i b_{i, n+1}^i(\zeta_1, \zeta_2, \zeta_3)\right\} \quad (3.17)'$$

on k' és la constant de normalització.

3.4.3 **Resultats**

S'han simulat vàries successions d'observacions d'acord amb un model ARMA(1,1), utilitzant el generador de nombres aleatoris gaussians NRANDOM existent en el paquet estadístic MINITAB [29]. En totes les simulacions s'ha pres la mitjana del soroll igual a zero i la variància igual a la unitat.

Donem aquí quatre successions que considerem les més representatives.

La primera de totes elles representa un model en el que el pol i el zero estan allunyats un de l'altre, la qual cosa s'aconsegueix prenent el pol igual a 0.5 i el zero igual a -0.8, per tant, els vertaders valors dels coeficients són $a=0.5$ i $c=0.8$.

En la segona successió es reflecteix el fet que el zero del model és a prop de l'origen. En aquest cas els vertaders valors dels coeficients són $a=0.5$ i $c=0.1$, és a dir, el pol d'aquest model és 0.5 i el zero és -0.1.

Amb la tercera successió d'observacions s'analitza la situació en que el zero i el pol del model són pròxims. S'ha generat un model on el valor del pol és 0.5 i el valor del zero és 0.6, per tant els vertaders coeficients són $a=0.5$ i $c=-0.6$.

Finalment, amb la quarta successió d'observacions s'estudia el cas en que el pol del model és a prop de l'origen. S'ha pres el pol igual a 0.1 i el zero igual a -0.8, per tant els vertaders valors dels coeficients són $a=0.1$ i $c=0.8$.

En cada cas s'ha obtingut la funció de densitat de probabilitat conjunta a posteriori pels coeficients a , c i σ^2 , i a partir d'ella s'han calculat les funcions de densitat a posteriori marginals pels coeficients a , c i σ^2 respectivament. Aquestes funcions de densitat marginals s'han representat gràficament amb una grandària de mostra de $N=50$ i $N=100$ observacions. Anàlogament, s'han tabulat els valors numèrics més significatius de les gràfiques esmentades. No s'ha considerat necessari incloure els resultats obtinguts amb grandària de mostra superior a una centena ja que les estimacions dels paràmetres coincideixen pràcticament amb les obtingudes mitjançant els paquets estadístics habituals: MINITAB[29], BMDP[9], ...

En tots els models, la malla inicial va des de $(-1+1.e-37)$ fins a $(+1.-1.e-37)$ per les dues primeres variables i des de $(0.+1.e-37)$ fins a 10.0 per la variància del soroll amb l'interval de discretització inicial tal que el nombre de punts en cada dimensió és $k_1=19$, $k_2=19$, $k_3=19$.

Les figures 1, 2 i 3 són les funcions de densitat de probabilitat a posteriori després de N observacions ($N=50$, 100) pel coeficient a , pel coeficient c i per la variància del soroll respectivament. El pol en aquest model és 0.5, el zero és -0.8 i $\sigma^2=1$.

L'equació del model estudiat és:

$$y_t = 0.5y_{t-1} + e_t + 0.8e_{t-1}$$

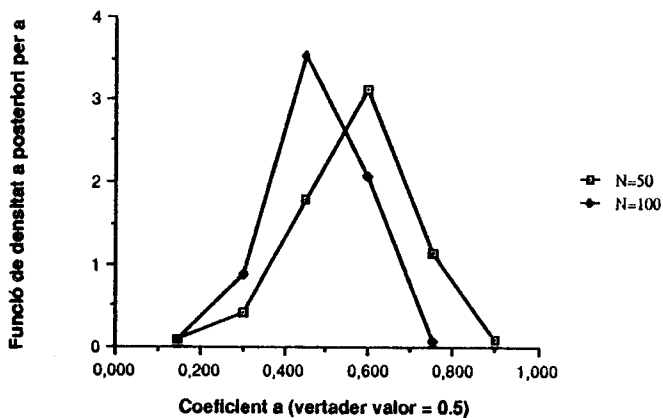


Figura 1. Densitat de probabilitat a posteriori del coeficient a . (El vertader valor és 0.5)

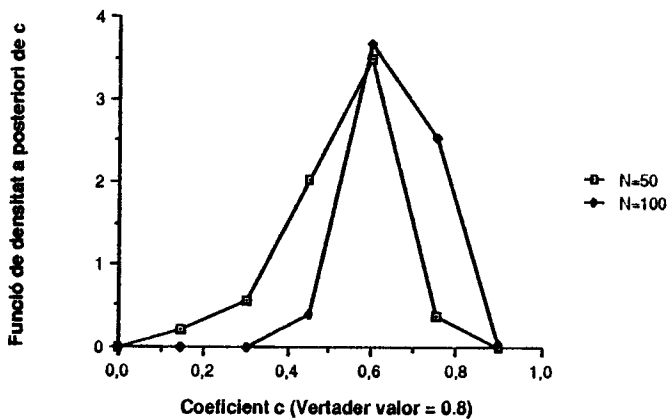


Figura 2. Densitat de probabilitat a posteriori del coeficient c. (El vertader valor és 0.8)

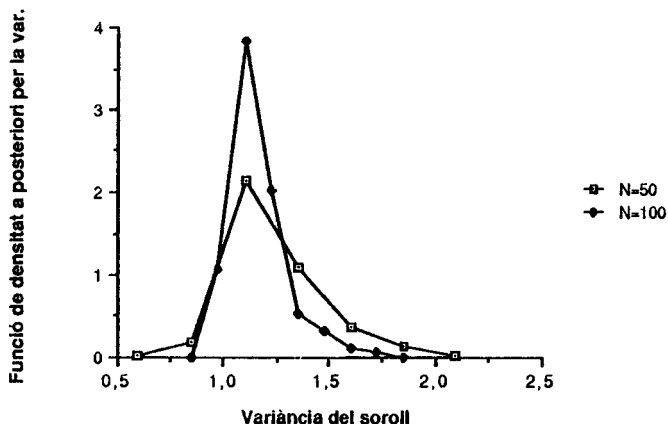


Figura 3. Densitat de probabilitat a posteriori de la variància del soroll. El vertader valor del coeficient a és 0.5, el del coeficient c és 0.8 i el de la variància és 1.

Comparant les figures 1 i 2, sempre per la mateixa grandària de mostra, s'observa que la funció de densitat a posteriori pel coeficient c és molt més asimètrica respecte el valor real que la funció de densitat a posteriori pel coeficient a.

Tant a la figura 1 com a la figura 2 es redueix la dispersió de manera significativa conforme s'incrementa la grandària de la mostra.

A la figura 3 es comparen les densitats de probabilitat a posteriori de la variància del soroll obtingudes amb grandària de mostra de N=50 i N=100 observacions. Es pot afirmar que hi ha un salt qualitatiu entre ambdues funcions.

Les figures 4, 5 i 6 són les funcions de densitat de probabilitat a posteriori després de N observacions (N=50, 100) pel coeficient a, pel coeficient c i per la variància del soroll respectivament. El pol en aquest

model és 0.5, el zero és -0.1 i $\sigma^2=1$. L'equació del model estudiat és:

$$y_t = 0.5y_{t-1} + e_t + 0.1e_{t-1}$$

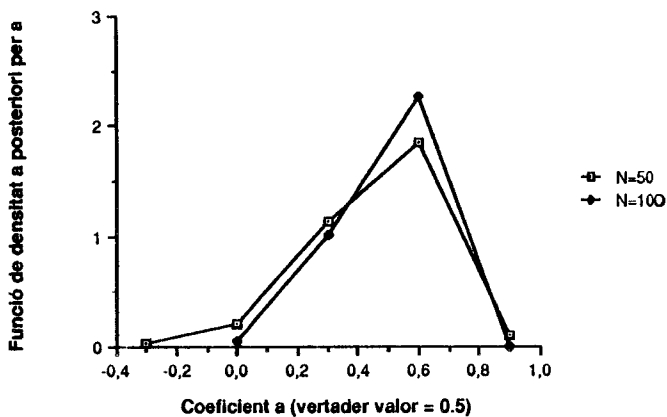


Figura 4. Densitat de probabilitat a posteriori pel coeficient a. (El vertader valor és 0.5)

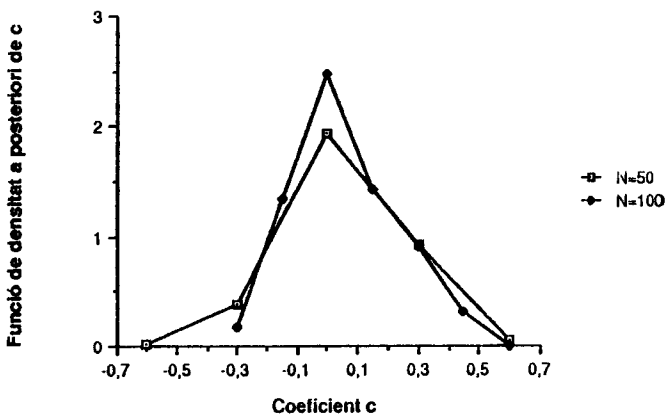


Figura 5. Densitat de probabilitat a posteriori pel coeficient c. (El vertader valor és 0.1)

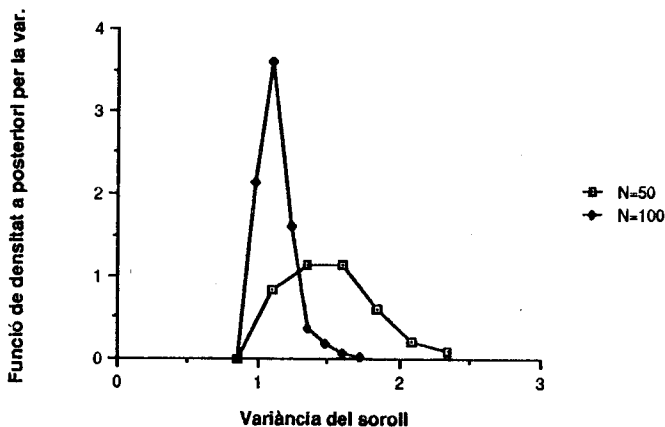


Figura 6. Densitat de probabilitat a posteriori per la variància del soroll. El vertader valor del coeficient a és 0.5, del coeficient c és 0.1 i de la variància del soroll és 1.

Observant la figura 4, podem afirmar que en aquest cas no hi ha gaire diferència entre les funcions de densitat a posteriori pel coeficient a després de $N=50$ i $N=100$ observacions. Tanmateix hi ha reducció en la dispersió.

Les afirmacions del paràgraf precedent també són certes per la funció de densitat a posteriori pel coeficient c , com es dedueix de la figura 5.

A l'estudiar l'evolució de la densitat de probabilitat a posteriori de la variància del soroll s'observa un canvi substancial entre l'obtinguda amb 50 observacions i l'obtinguda amb 100 observacions. Vegi's la figura 6.

Les figures 7, 8 i 9 són les funcions de densitat de probabilitat a posteriori després de N observacions ($N=50, 100$) pel coeficient a , pel coeficient c i per la variància del soroll respectivament. El pol en aquest model és 0.5, el zero és 0.6 i σ^2 val 1.

L'equació d'aquest model és:

$$y_t = 0.5y_{t-1} + e_t - 0.6e_{t-1}$$

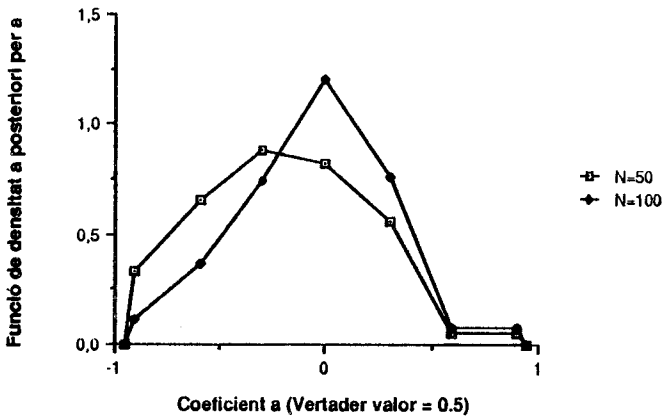


Figura 7. Densitat de probabilitat a posteriori pel coeficient a. (El vertader valor és 0.5)

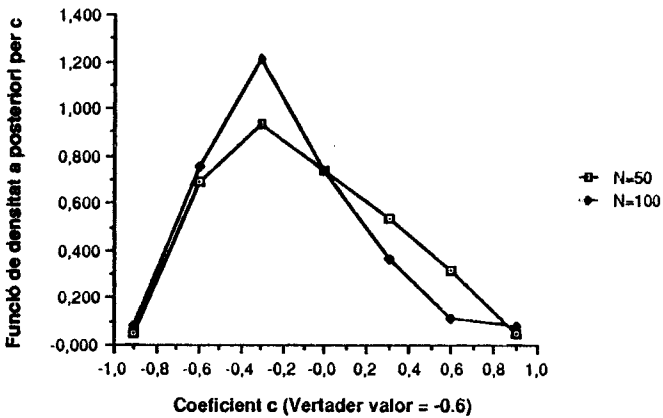


Figura 8. Densitat de probabilitat a posteriori pel coeficient c. (El vertader valor és -0.6).

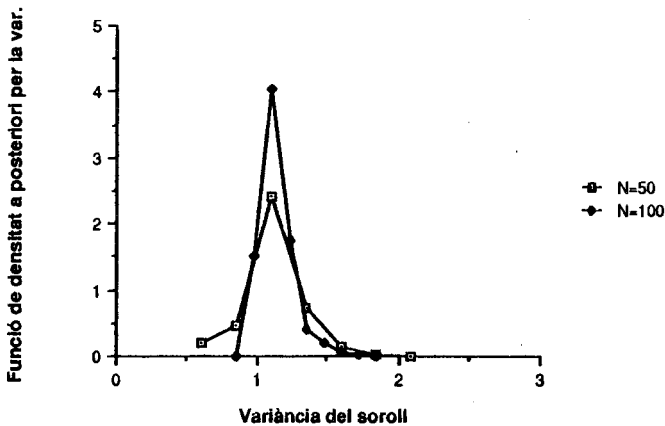


Figura 9. Densitat de probabilitat a posteriori per la variància del soroll. El vertader valor del coeficient a és 0.5, el del coeficient c és -0.6 i el de la variància del soroll és 1.

La reducció de la dispersió en les figures 7 i 8 és mínima quan s'incrementa la grandària de la mostra. No obstant aquesta reducció és significativa en la figura 9.

Les figures 10, 11 i 12 són les funcions de densitat de probabilitat a posteriori després de N observacions ($N=50, 100$) pel coeficient a , pel coeficient c i per la variància del soroll respectivament. En aquest model els vertaders valors són $a=0.1$, $c=0.8$ i $\sigma^2=1$. Es a dir, el pol en aquest model és 0.1 i el zero és -0.8, model en el que es vol reflectir el fet que el pol és a prop de l'origen.

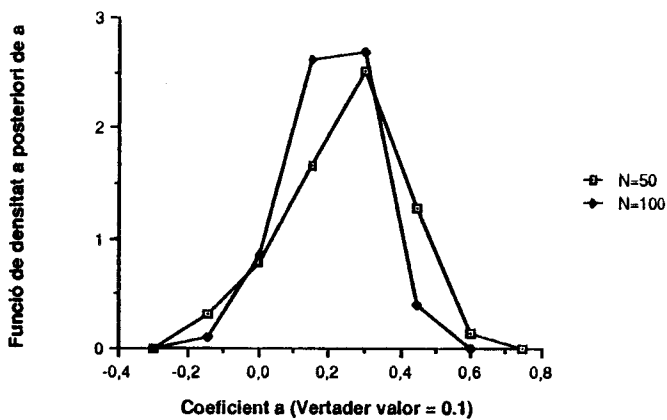


Figura 10. Densitat de probabilitat a posteriori pel coeficient a. (El vertader valor és 0.1).

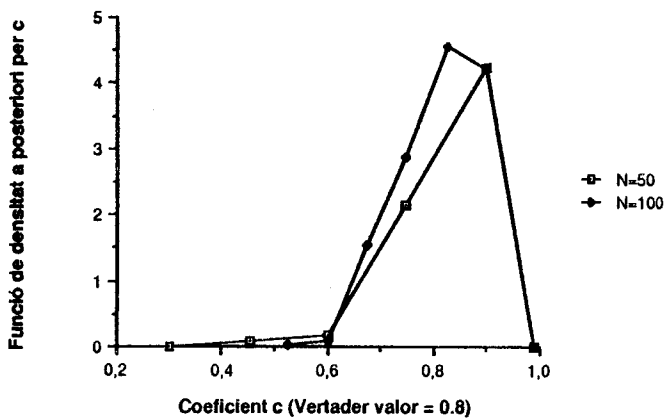


Figura 11. Densitat de probabilitat a posteriori pel coeficient c. (El vertader valor és 0.8).

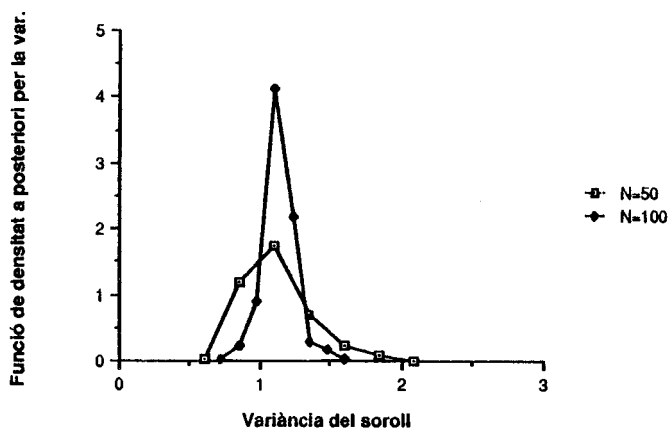


Figura 12. Densitat de probabilitat a posteriori per la variància del soroll. El vertader valor del coeficient a és 0,1, el del coeficient c és 0,8 i el de la variància del soroll és 1.

La figura 11, és a dir, la densitat de probabilitat a posteriori pel coeficient c és molt més simètrica respecte el valor real que la figura 10, fent sempre aquesta comparació pel mateix nombre d'observacions. No obstant, es pot observar en ambdues figures una reducció de la dispersió quan s'incrementa la grandària de la mostra.

La gràfica de la figura 12 per 100 observacions difereix molt poc de les gràfiques de les figures 3, 6, 9, essent aquestes gràfiques les densitats de probabilitat a posteriori per la variància del soroll pels diferents models ja comentats.

Els valors numèrics més significatius de les figures precedents es poden resumir en la taula següent, on s'ha denotat per

a^* = Esperança condicionada després de N observacions i obtinguda a partir de la funció de densitat marginal a posteriori del coeficient a.

s_{a^*} = Desviació tipus condicionada del coeficient a després de N observacions.

c^* = Esperança condicionada després de N observacions i obtinguda a partir de la funció de densitat marginal a posteriori del coeficient c.

s_{c^*} = Desviació tipus condicionada del coeficient c després de N observacions.

s^2 = Esperança condicionada després de N observacions i obtinguda a partir de la funció de densitat marginal a posteriori de la variància de les pertorbacions aleatòries σ^2 .

s_{s^2} = Desviació tipus condicionada de σ^2 després de N observacions.

MODEL	N=50	N=100
$y_t=0.5y_{t-1}+e_t+0.8e_{t-1}$	$a^* = 0.56$ $s_{a^*} = 0.14$ $c^* = 0.52$ $s_{c^*} = 0.13$ $s^2 = 1.24$ $s_{s^2} = 0.24$	$a^* = 0.48$ $s_{a^*} = 0.11$ $c^* = 0.65$ $s_{c^*} = 0.09$ $s^2 = 1.15$ $s_{s^2} = 0.14$
$y_t=0.5y_{t-1}+e_t+0.1e_{t-1}$	$a^* = 0.46$ $s_{a^*} = 0.22$ $c^* = 0.05$ $s_{c^*} = 0.20$ $s^2 = 1.51$ $s_{s^2} = 0.31$	$a^* = 0.50$ $s_{a^*} = 0.15$ $c^* = 0.06$ $s_{c^*} = 0.18$ $s^2 = 1.12$ $s_{s^2} = 0.13$
$y_t=0.5y_{t-1}+e_t-0.6e_{t-1}$	$a^* = -0.21$ $s_{a^*} = 0.40$ $c^* = -0.1$ $s_{c^*} = 0.40$ $s^2 = 1.12$ $s_{s^2} = 0.22$	$a^* = -0.06$ $s_{a^*} = 0.36$ $c^* = -0.2$ $s_{c^*} = 0.37$ $s^2 = 1.13$ $s_{s^2} = 0.13$
$y_t=0.1y_{t-1}+e_t+0.8e_{t-1}$	$a^* = 0.24$ $s_{a^*} = 0.17$ $c^* = 0.83$ $s_{c^*} = 0.09$ $s^2 = 1.12$ $s_{s^2} = 0.25$	$a^* = 0.20$ $s_{a^*} = 0.13$ $c^* = 0.81$ $s_{c^*} = 0.08$ $s^2 = 1.13$ $s_{s^2} = 0.12$

TAULA 1.

Per veure si l'estimació de la variància del soroll influeix en l'estimació dels paràmetres del model o no, s'ha considerat, en totes les successions d'observacions precedents, el cas en que la variància del soroll σ^2 és coneguda i val la unitat.

S'ha calculat la funció de densitat a posteriori dels paràmetres a i c , i a continuació s'han obtingut les funcions de densitat marginals d'aquests paràmetres amb la intenció de comparar-les amb les funcions de densitat respectives obtingudes mitjançant el filtre no lineal descrit en l'apartat 3.4.2.

La malla inicial pels paràmetres i l'interval de discretització inicial són iguals que els utilitzats en l'estimació dels paràmetres del model ARMA (1,1) quan la variància del soroll és desconeguda. Es a dir, en aquest cas la malla inicial va des de $(-1+1.e-37)$ fins a $(1-1.e-37)$ pels dos paràmetres i el nombre de punts en cada dimensió és $k_1=19$ i $k_2=19$.

A la taula següent hi ha els valors numèrics més significatius de les estimacions del model ARMA (1,1) amb σ^2 coneguda i σ^2 desconeguda. La grandària de mostra és de $N=25$ observacions.

S'ha denotat per

a_i^* = Esperança condicionada després de N observacions i obtinguda a partir de la funció de densitat marginal a posteriori del coeficient a .

$s_{a_i^*}$ = Desviació tipus condicionada del coeficient a després de N observacions.

c_i^* = Esperança condicionada després de N observacions i obtinguda a partir de la funció de densitat marginal a posteriori del coeficient c .

$s_{c_i^*}$ = Desviació tipus condicionada del coeficient c després de N observacions.

El subíndex i pren el valor 1 ó 2 en funció de si l'estimació ha esta feta pel cas en que es coneix la variància del soroll o la variància del soroll és desconeguda i estimada simultàniament mitjançant el filtre no lineal.

MODEL	N=25		N=25	
$y_t = 0.5y_{t-1} + e_t + 0.8e_{t-1}$	$\hat{a}_1 = 0.51$ $\hat{c}_1 = 0.67$	$s_{a_1} = 0.17$ $s_{c_1} = 0.20$	$\hat{a}_2 = 0.51$ $\hat{c}_2 = 0.64$	$s_{a_2} = 0.20$ $s_{c_2} = 0.23$
$y_t = 0.5y_{t-1} + e_t + 0.1e_{t-1}$	$\hat{a}_1 = 0.75$ $\hat{c}_1 = 0.07$	$s_{a_1} = 0.21$ $s_{c_1} = 0.24$	$\hat{a}_2 = 0.78$ $\hat{c}_2 = 0.09$	$s_{a_2} = 0.20$ $s_{c_2} = 0.25$
$y_t = 0.5y_{t-1} + e_t - 0.6e_{t-1}$	$\hat{a}_1 = 0.19$ $\hat{c}_1 = 0.03$	$s_{a_1} = 0.56$ $s_{c_1} = 0.51$	$\hat{a}_2 = -0.19$ $\hat{c}_2 = 0.02$	$s_{a_2} = 0.56$ $s_{c_2} = 0.51$
$y_t = 0.1y_{t-1} + e_t + 0.8e_{t-1}$	$\hat{a}_1 = 0.31$ $\hat{c}_1 = 0.88$	$s_{a_1} = 0.17$ $s_{c_1} = 0.08$	$\hat{a}_2 = 0.31$ $\hat{c}_2 = 0.83$	$s_{a_2} = 0.21$ $s_{c_2} = 0.16$

TAULA 2.

3.4.4 Conclusions

A la vista dels resultats precedents de la taula 1, es pot deduir en primer lloc que la grandària de mostra necessària per l'estimació correcta dels coeficients depèn de la localització en el cercle unitat dels paràmetres. En el primer model, on el pol és 0.5 i el zero és 0.8, s'obté una desviació tipus dels coeficients (per $N=50$, $s_{a_1}=0.14$, $s_{c_1}=0.13$ i per $N=100$, $s_{a_1}=0.11$, $s_{c_1}=0.09$) menor que l'obtinguda en el tercer model, on el pol és 0.5 i el zero 0.6 (per $N=50$, $s_{a_1}=0.40$, $s_{c_1}=0.40$, i per $N=100$, $s_{a_1}=0.36$, $s_{c_1}=0.37$), comparant-les sempre per la mateixa N . Observi's també que en aquest tercer model en que el zero i el pol són un a prop de l'altre, la desviació tipus dels coeficients estimats és la més gran de totes les obtingudes.

En segon lloc, depèn de la distància dels paràmetres a l'origen com es pot comprovar en els models segon i quart. En el segon model, el

zero és 0.1 i la desviació tipus d'aquest coeficient (per $N=50$, $s_{c^*}=0.20$ i per $N=100$, $s_{c^*}=0.18$) sempre és major que l'obtinguda en el primer model (per $N=50$, $s_{c^*}=0.13$ i per $N=100$, $s_{c^*}=0.09$). En el quart model, el pol és 0.1 i succeeix un fenomen anàleg al cas en que el zero és a prop de l'origen. La desviació tipus de l'estimació obtinguda en aquest model és per $N=50$, $s_{a^*}=0.14$ i per $N=100$, $s_{a^*}=0.11$. No obstant, sembla ser que si el zero és a prop de l'origen no afecta gaire l'estimació del pol i el mateix resultat es pot estendre al cas que el pol sigui a prop de l'origen.

L'estimació de la variància de les perturbacions aleatòries dóna els mateixos resultats per a tots els models a partir de $N=100$ observacions. Per tant, es pot deduir que a partir d'un nombre d'observacions cap endavant, l'estimació de la variància de les perturbacions aleatòries és independent de la localització en el cercle unitat dels coeficients autorregressius i de mitjanes mòbils.

A l'observar els resultats obtinguts en la taula 2, és a dir les estimacions dels coeficients suposant la variància del soroll coneguda i les obtingudes quan aquesta es desconeix i és estimada simultàniament, es pot afirmar que, excepte en el quart model en que la desviació tipus del coeficient c estimat quan es coneix la variància del soroll és 0.08 en front de l'obtinguda en el cas en què és desconeguda ($s_{c^*2}=0.16$), en tots els altres models les diferències en les estimacions no són gaire significatives. En aquest cas, totes les estimacions són fetes per una grandària de mostra $N=25$ observacions. A la vista d'aquests resultats no s'ha considerat necessari incloure les estimacions realitzades amb més observacions.

A continuació, tractarem els resultats numèrics de la implementació de l'algorisme proposat en l'apartat 3.4.2.

Pel fet que la matriu de covariàncies de dimensió n de les observacions té estructura de Toeplitz, podem utilitzar l'algorisme de Levinson per trobar la matriu inversa i el determinant. Aquest algorisme necessita fer un nombre d'operacions de l'ordre de n^2 i la memòria utilitzada és proporcional a n .

A la densitat de probabilitat es volen guardar N_s punts a cada dimensió i a més per cada punt de la malla s'ha de calcular el darrer vector de la matriu inversa, per tant la capacitat de memòria disponible ha de ser proporcional a $nN_s^{(p+q+1)}$. La capacitat de memòria disponible segons el mètode del capítol 2 és $N_s^{(3p+q+1)}$, per tant el mètode presentat en aquest capítol necessitarà menys memòria si el nombre d'observacions és com a màxim de l'ordre de N_s^{2p} .

El nombre d'operacions necessàries per calcular la probabilitat a posteriori dels paràmetres és proporcional a $n^2N_s^{(p+q+1)}$ mentre que el temps de càlcul necessari per obtenir aquesta probabilitat fent servir l'algorisme del capítol 2 és proporcional a $nN_s^{(3p+q+1)}$. L'algorisme d'aquest capítol serà més ràpid que el del capítol 2 si el nombre d'observacions a l'abast és com a molt de l'ordre de N_s^{2p} , resultat anàleg al del paràgraf precedent.

La memòria necessària per calcular els estimadors dels paràmetres del model ARMA(1,1) amb σ^2 desconeguda és de l'ordre de nN_s^3 mentre que si es suposa coneguda és de l'ordre de nN_s^2 . El temps de càlcul en el primer cas és proporcional a $n^2N_s^3$ i, en el segon cas, és proporcional a $n^2N_s^2$.

3.5 ESTIMACIO DELS PARAMETRES D'UN MODEL ARMA(2,1)

3.5.1 Formulació

Donada una mostra de dimensió n , $y^n = \{y_1, \dots, y_n\}$ que segueix un model ARMA(2,1):

$$y_t = a_1 y_{t-1} + a_2 y_{t-2} + \epsilon_t + c \epsilon_{t-1} \quad (3.24)$$

on y_t és l'observació a l'instant t , a_1 , a_2 i c són els paràmetres a estimar, $\{\epsilon_t\}$, $t=1, \dots, n$ és una successió de variables aleatòries independents amb distribució $N(0, \sigma^2)$. Suposarem al llarg de tot aquest apartat que la variància de les pertorbacions aleatòries és coneguda i val 1.

Per aquest model es calculen les funcions de covariància d'acord amb l'equació (3.3) i s'obté

$$\gamma_0 = a_1 \gamma_1 + a_2 \gamma_2 + \sigma^2 + c \gamma_{\epsilon y}(-1) \quad (3.25)$$

$$\gamma_1 = a_1 \gamma_0 + a_2 \gamma_1 + c \sigma^2 \quad (3.26)$$

$$\gamma_2 = a_1 \gamma_1 + a_2 \gamma_0 \quad (3.27)$$

A l'igual que s'ha fet en l'apartat 3.4, multiplicant l'equació (3.24) per ϵ_{t-1} i prenent esperances s'obté

$$\gamma_{\epsilon y}(-1) = (a_1 + c) \sigma^2 \quad (3.28)$$

Substituint l'equació (3.28) en l'equació (3.25) i tenint en compte que σ^2 és coneguda i igual a 1, arribem al següent sistema de tres equacions amb tres incògnites:

$$\gamma_0 = a_1 \gamma_1 + a_2 \gamma_2 + 1 + c(a_1 + c) \quad (3.25a)$$

$$\gamma_1 = a_1 \gamma_0 + a_2 \gamma_1 + c \quad (3.26a)$$

$$\gamma_2 = a_1 \gamma_1 + a_2 \gamma_0 \quad (3.27)$$

Resolent aquest sistema, aconseguim la variància γ_0 i la covariància d'ordre 1 γ_1 :

$$\gamma_0 = \frac{(1-a_2)c^2 + 2a_1c + (1-a_2)}{(1+a_2)(1-a_2+a_1)(1-a_2-a_1)} \quad (3.29)$$

$$\gamma_1 = \frac{a_1\gamma_0 + c}{1-a_2}$$

Les covariàncies d'ordre superior s'obtenen a partir de l'equació

$$\gamma_k = a_1 \gamma_{k-1} + a_2 \gamma_{k-2} \quad k \geq 2 \quad (3.30)$$

A continuació es calcula la matriu de covariàncies de les observacions R_n d'acord amb (3.5), matriu que utilitzarem per calcular la probabilitat a posteriori dels coeficients del model ARMA(2,1).

Prenem la distribució a priori pels coeficients desconeguts uniforme, tal com ja s'ha dit en l'apartat 2.2.1 i implementem una recurrència

anàloga a l'obtinguda en (3.17) però tenint en compte que en aquest apartat la variància del soroll és coneguda, és a dir

$$\begin{aligned}
 p_n(\theta / y^n) &= \\
 &= k' p_{n-1}(\theta / y^{n-1}) d_n^{-1/2} \exp\{-1/2 (\sum_{i=1}^n y_i b_n^i)^2\} \quad (3.17 a)
 \end{aligned}$$

on d_n i b_n^i , $i=1, \dots, n$, s'obtenen de la forma ja descrita en l'apartat 3.3

3.5.2 Implementació de l'algorisme de filtratge no lineal

L'estimació dels paràmetres del model ARMA(2,1) la farem sobre els coeficients en lloc de fer-la sobre pols i zeros, per optimitzar la capacitat de memòria i el temps de càlcul. El nostre model té dos pols i un zero. Si volguéssim treballar sobre pols i zeros caldria tenir en compte la possibilitat de l'existència de pols complexos. Cada dada complexa està formada per un parell de reals formant la part real i la part imaginària del complex. Obviament, la memòria necessària i el temps de càlcul serà superior que la utilitzada si treballem amb els coeficients.

Es realitza una discretització inicial a intervals iguals dels coeficients a estimar, és a dir a_1 , a_2 i c . Veurem en el proper apartat que la malla que s'obté no és cúbica degut a l'existència de lligams entre les variables. La densitat de probabilitat a posteriori calculada d'acord amb (3.17a) s'emmagatzema a cada un dels punts de la malla, tal com ja s'ha fet en el capítol 2 i en l'apartat 3.4. Seguint la mateixa metodologia ja descrita en els esmentats apartats, la malla en aquest cas també serà mòbil.

Les etapes a seguir en aquest apartat són les mateixes que les ja indicades en l'apartat 3.4.2 però tenint en compte que ara la recurrència a implementar és l'expressada en l'equació (3.17a).

3.5.2.1 Inicialització de la recursió.

En aquest cas, la construcció de la malla serà diferent que en els altres models ja estudiats degut a que tal com ja hem vist

$$\gamma_0 = \frac{(1-a_2)c^2 + 2a_1c + (1-a_2)}{(1+a_2)(1-a_2+a_1)(1-a_2-a_1)} \quad (3.29)$$

i per ser γ_0 la variància del model, haurà de ser positiva, és a dir el denominador i el numerador ambdós positius o ambdós negatius.

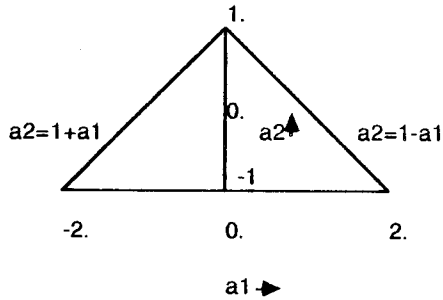
Si volem que el denominador sigui positiu s'haurà de complir que

$$\begin{aligned} 1 + a_2 &> 0 \\ 1 - a_2 + a_1 &> 0 \\ 1 - a_2 - a_1 &> 0 \end{aligned} \quad (3.31)$$

i les altres possibilitats es poden despreciar, és a dir

$$\begin{aligned} a_2 &> -1 \\ a_2 + a_1 &< 1 \\ -a_1 + a_2 &< 1 \end{aligned} \quad (3.32)$$

i de les desigualtats (3.32) es dedueix que també s'ha de complir que $a_2 < 1$ com es pot deduir sumant la segona i tercera desigualtat de (3.2), i llavors la regió on el denominador és positiu és la representada en la gràfica adjunta:



Però a més el numerador ha de ser positiu, és a dir volem que el trinomi

$$(1 - a_2) c^2 + 2 a_1 c + (1 - a_2) > 0 \quad (3.33)$$

el discriminant és

$$(a_1 + a_2 - 1) (a_1 - a_2 + 1) \quad (3.34)$$

i en el cas de complir-se les desigualtats (3.32), el discriminant és negatiu, per tant no té solucions reals. Es a dir, qualsevol valor de c fa que l'equació (3.33) sigui positiva. Però c és el coeficient de la part MA(1), per tant, si volem que el model sigui invertible, s'haurà de complir que

$$-1. < c < 1. \quad (3.35)$$

El cas en què numerador i denominador de l'equació (3.29) són ambdós negatius dóna lloc a les mateixes desigualtats.

Siguin ζ_1 , ζ_2 i ζ_3 els possibles valors reals que poden prendre els paràmetres a_1 , a_2 i c respectivament. La malla inicial la construirem tenint en compte les restriccions donades per les desigualtats (3.32) i (3.35), és a dir:

$\zeta_1 \in (-2., 2.)$ i aquest interval es discretitza en k_1 punts.

$\zeta_2 \in (-1., 1)$ i aquest interval es discretitza en k_2 punts.

$\zeta_3 \in (-1., 1.)$ i aquest interval es discretitza en k_3 punts.

Però a més a més ζ_1 i ζ_2 han de complir les desigualtats donades en (3.32), és a dir:

$$\zeta_1 + \zeta_2 < 1$$

$$-\zeta_1 + \zeta_2 < 1$$

obtenint-se així la malla inicial.

La densitat a priori de les condicions inicials la prenem uniforme, per tant:

$$p(\zeta_1, \zeta_2, \zeta_3) = \frac{1}{k_1 \times k_2 \times k_3} \quad \text{si} \quad \begin{cases} \zeta_1 \in (-2., 2.) \\ \zeta_2 \in (-1., 1.) \\ \zeta_3 \in (-1., 1.) \\ \zeta_1 + \zeta_2 < 1 \\ -\zeta_1 + \zeta_2 < 1 \end{cases}$$

3.5.2.2 Càlcul recursiu de la probabilitat a posteriori

El càlcul recursiu de la probabilitat a posteriori es fa seguint la metodologia exposada en l'apartat 3.4.2.2. Per a cada punt de la malla $(\zeta_1, \zeta_2, \zeta_3)$ i a mesura que estan disponibles les observacions, es calcula la densitat de probabilitat a posteriori implementant la recurrència obtinguda en l'equació (3.17a).

Les etapes a seguir són:

1) Es calcula la funció de covariància d'acord amb les equacions (3.29) i (3.30):

$$\gamma_0(\zeta_1, \zeta_2, \zeta_3) = \frac{(1-\zeta_2)\zeta_3^2 + 2\zeta_1\zeta_3 + (1-\zeta_2)}{(1+\zeta_2)(1-\zeta_2+\zeta_1)(1-\zeta_2-\zeta_1)} \quad (3.29)'$$

$$\gamma_1(\zeta_1, \zeta_2, \zeta_3) = \frac{\zeta_1\gamma_0(\zeta_1, \zeta_2, \zeta_3) + \zeta_3}{1-\zeta_2}$$

$$\gamma_k(\zeta_1, \zeta_2, \zeta_3) = \zeta_1\gamma_{k-1}(\zeta_1, \zeta_2, \zeta_3) + \zeta_2\gamma_{k-1}(\zeta_1, \zeta_2, \zeta_3) \quad k \geq 2 \quad (3.30)'$$

2) Utilitzant la recurrència de Levinson (3.16f) i (3.16h) es calcula el darrer vector de la matriu de covariàncies de dimensió $(n+1)$ a partir del darrer vector de la matriu de dimensió n i el valor d_{n+1} a partir de d_n , a l'igual que s'ha fet en l'apartat 3.4.2.2.

3) S'implementa la recurrència (3.17a):

$$\begin{aligned}
 p_{n+1}(\zeta_1, \zeta_2, \zeta_3 / y^{n+1}) &= \\
 &= k' p_n(\zeta_1, \zeta_2, \zeta_3 / y^n) d_{n+1}^{1/2}(\zeta_1, \zeta_2, \zeta_3) \exp\left\{-\frac{1}{2} \sum_{j=1}^{n+1} y_j b_{n+1}^j(\zeta_1, \zeta_2, \zeta_3)\right\} \quad (3.17)'
 \end{aligned}$$

3.5.3 Resultats.

S'han simulat varies successions d'observacions d'acord amb un model ARMA(2,1), de les quals en presentem aquí cinc que considerem les més representatives. Aquestes simulacions han estat fetes utilitzant el generador de nombres aleatoris existent en el paquet estadístic MINITAB [29]. En totes les simulacions s'ha mantingut la mitjana del soroll igual a zero i la variància igual a la unitat. A continuació s'han obtingut les funcions de densitat marginals a posteriori conjuntes pels paràmetres dos a dos, és a dir s'ha calculat la funció de densitat conjunta marginal a posteriori pels dos coeficients a_1 i a_2 , per el coeficient a_1 i c i finalment per el coeficient a_2 i c .

Aquestes funcions de densitat s'han representat gràficament per una grandària de mostra de $N=100$ i $N=200$ observacions, ja que els estimadors obtinguts coincideixen pràcticament amb els obtinguts en els paquets estadístics habituals (BMDP[9], MINITAB [29]) per una grandària de mostra superior (de l'ordre de 200 observacions). No obstant, hi ha algun model en que aquestes funcions de densitat no convergeixen per $N=200$ i en aquest cas s'ha fet la representació gràfica amb $N=300$.

S'han tabulat els valors numèrics més significatius de les estimacions realitzades utilitzant el filtre no lineal per una grandària de mostra de $N=50$, 100 i 200 observacions, excepte en el cas esmentat quan no convergeixen les funcions de densitat conjuntes marginals i llavors s'han tabulat aquests valors per $N=50$, 100 i 300 observacions. Les estimacions realitzades amb 50 i 100 observacions s'han comparat amb les obtingudes amb el paquet estadístic BMDP2T [9] amb la mateixa grandària de mostra.

En les taules següents s'ha denotat per

a_1^* = Esperança condicionada després de N observacions i obtinguda a partir de la funció de densitat marginal a posteriori del coeficient a_1 .

s_{a_1} = Desviació tipus condicionada del coeficient a_1 , després de N observacions.

a_2^* = Esperança condicionada després de N observacions i obtinguda a partir de la funció de densitat marginal a posteriori del coeficient a_2 .

s_{a_2} = Desviació tipus condicionada del coeficient a_2 , després de N observacions.

c^* = Esperança condicionada després de N observacions i obtinguda a partir de la funció de densitat marginal a posteriori del coeficient c .

s_c = Desviació tipus condicionada del coeficient c , després de N observacions.

A més a la següent taula es denota per (1) la subtaula que conté els resultats de les estimacions realitzades utilitzant el filtre no lineal i per (2) la subtaula que conté els resultats de les estimacions utilitzant el paquet estadístic BMDP2T [9].

En tots els models, la malla inicial va des de $(-2. \cdot 10^{-37})$ fins a $(+2. \cdot 10^{-37})$ pel primer paràmetre i des de $(-1 \cdot 10^{-37})$ fins a $(+1 \cdot 10^{-37})$ pel segon i pel tercer paràmetre. L'interval de discretització inicial és tal que el nombre de punts en cada dimensió és $k_1=19$, $k_2=19$ i $k_3=19$.

A les figures 25, 27 i 38 pot semblar que hi ha probabilitats negatives en alguns valors extrems. Aquest és un problema d'extrapolació de la rutina gràfica utilitzada, que no ha afectat per res els nostres càlculs probabilístics.

El primer model que estudiarem es quan els dos pols i el zero no estan a prop entre ells ni tampoc estan a prop de l'origen. S'ha estudiat el model en que un pol és -0.8, l'altre és 0.4 i el zero és 0.8. L'equació del model estudiat és

$$y_t = -0.4 y_{t-1} + 0.32 y_{t-2} + e_t - 0.8 e_{t-1} \quad (3.36)$$

L'evolució de les funcions de densitat conjunta dels paràmetres dos a dos després 100 i 200 observacions són posades de manifest per les figures 13, 14, 15, 16, 17 i 18.

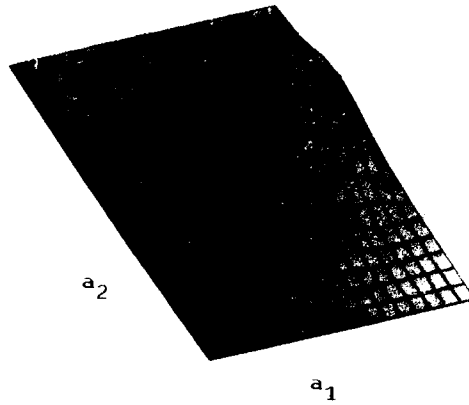


Figura 13. Densitat de probabilitat conjunta a posteriori després de 100 observacions pels coeficients a_1 i a_2 . Malla des de -0.8 a 0.0 per a_1 i des de -0.1 a 0.7 per a_2 .

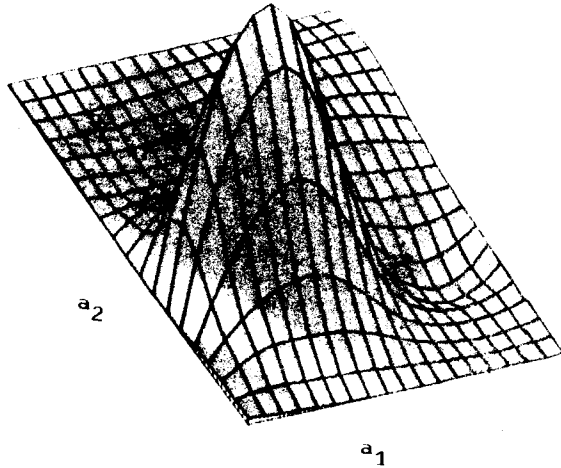


Figura 14. Densitat de probabilitat conjunta a posteriori després de 200 observacions pels coeficients a_1 i a_2 . Malla des de -0.6 a 0.0 per a_1 i des de 0.0 a 0.6 per a_2 .

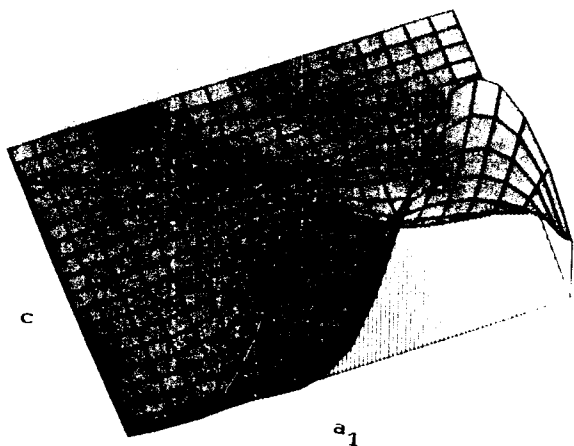


Figura 15. Densitat de probabilitat conjunta a posteriori després de 100 observacions pels coeficients a_1 i c . Malla des de -0.8 a 0.0 per a_1 i des de -0.9 a -0.225 per c .

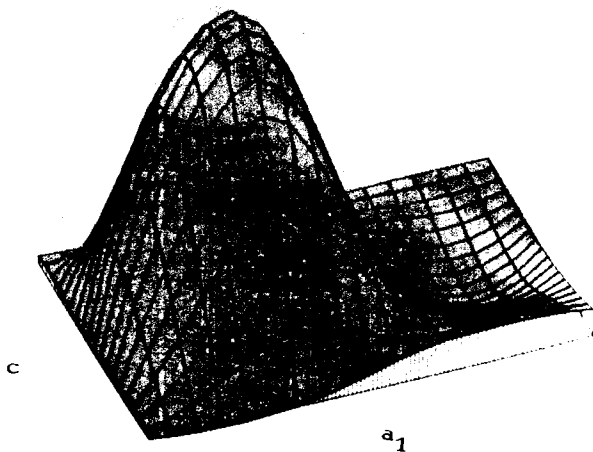


Figura 16. Densitat de probabilitat conjunta a posteriori després de 200 observacions pels coeficients a_1 i c . Malla des de -0.6 a 0.0 per a_1 i des de -0.9 a -0.45 per c .

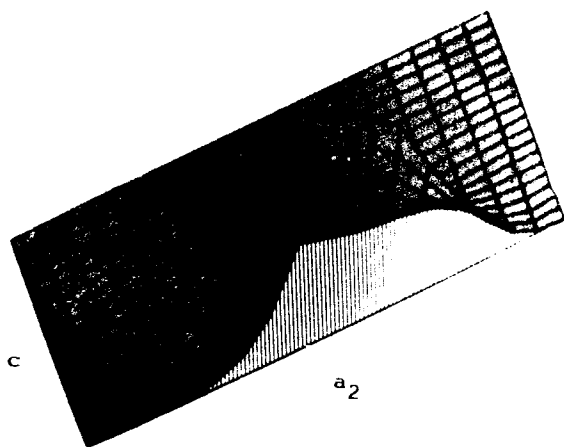


Figura 17. Densitat de probabilitat conjunta a posteriori després de 100 observacions pels coeficients a_2 i c . Malla des de -0.1 a 0.7 per a_2 i des de -0.9 a -0.225 per c .

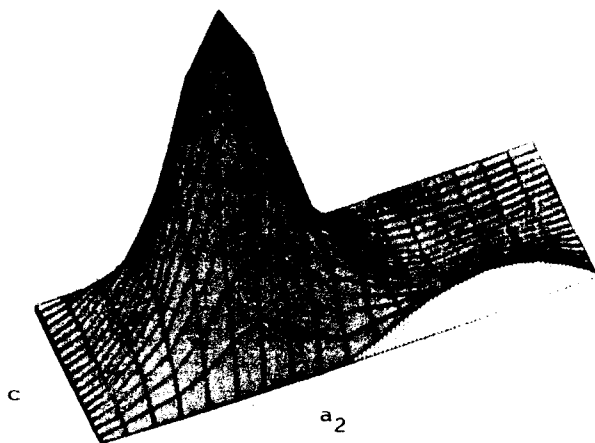


Figura 18. Densitat de probabilitat conjunta a posteriori després de 200 observacions pels coeficients a_2 i c . Malla des de 0.0 a 0.6 per a_2 i des de -0.9 a -0.45 per c .

MODEL 1 (Un pol=-0.8, l'altre pol=0.4, el zero=0.8)			
$y_t = -0.4y_{t-1} + 0.32y_{t-2} + e_t - 0.8e_{t-1}$			
N=50	$a_1^* = -0.366$	$a_2^* = 0.200$	$c^* = -0.685$
(1)	$s_{a1} = 0.270$	$s_{a2} = 0.224$	$s_c = 0.270$
N=50	$a_1^* = -0.037$	$a_2^* = -0.255$	$c^* = -1.076$
(2)	$s_{a1} = 8375.6719$	$s_{a2} = 1762.9889$	$s_c = 1834.25$
N=100	$a_1^* = -0.220$	$a_2^* = 0.341$	$c^* = -0.847$
(1)	$s_{a1} = 0.141$	$s_{a2} = 0.130$	$s_c = 0.116$
N=100	$a_1^* = -1.122$	$a_2^* = -0.139$	$c^* = -1.017$
(2)	$s_{a1} = 0.064$	$s_{a2} = 0.105$	$s_c = 0.0001$
N=200	$a_1^* = -0.354$	$a_2^* = 0.238$	$c^* = -0.705$
(1)	$s_{a1} = 0.121$	$s_{a2} = 0.115$	$s_c = 0.08$

TAULA 3

A la vista de les figures 13, 14, 15, 16, 17 i 18 i de la taula 3 podem afirmar que per aconseguir la convergència cap als vertaders valors dels coeficients del model ARMA(2,1) corresponent al cas en que els pols i el zero no són pròxims en el cercle unitat i estan allunyats de l'origen, hi ha un salt qualitatiu en l'estimació entre disposar de 50 observacions i disposar-ne de 200. Aquest resultat es pot deduir de comparar les figures esmentades i de comparar les desviacions tipus dels estimadors a la taula 1. A més el paquet estadístic BMDP2T[9] per 50 observacions no funciona prou bé com es pot detectar a l'observar les desviacions tipus dels estimadors obtingudes i per 100 observacions proporciona estimadors amb gran biaix.

Els següents tipus de models que s'han estudiat són els que tenen un pol i zero a prop. Per representar aquests models hem triat el cas en que un pol val 0.5, l'altre pol val -0.8 i el zero val -0.7. L'equació del model així obtingut és

$$y_t = -0.3 y_{t-1} + 0.4 y_{t-2} + e_t + 0.7 e_{t-1} \quad (3.37)$$

Les figures 19, 20, 21, 22, 23 i 24 representen les funcions de densitat conjunta a posteriori després de 100 i 300 observacions dels paràmetres a estimar, relacionant-los dos a dos.

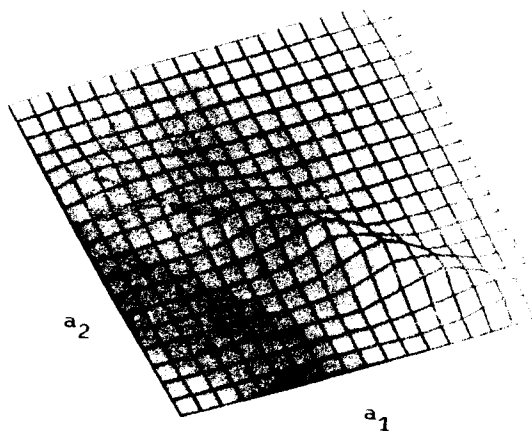


Figura 19. Densitat de probabilitat conjunta a posteriori després de 100 observacions pels coeficients a_1 i a_2 . Malla des de -0.4 a 1.4 per a_1 i des de -0.5 a 0.6 per a_2

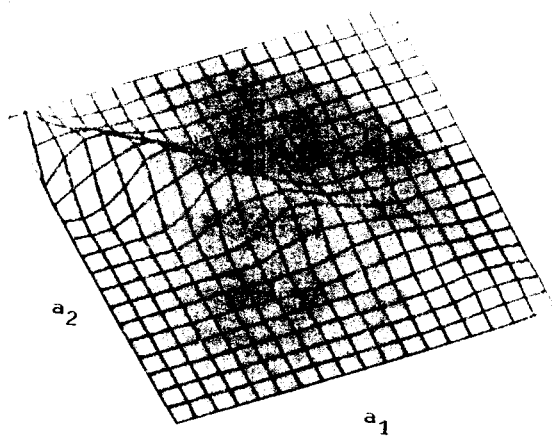


Figura 20. Densitat de probabilitat conjunta a posteriori després de 200 observacions pels coeficients a_1 i a_2 . Malla des de -0.4 a 1.2 per a_1 i des de -0.4 a 0.5 per a_2

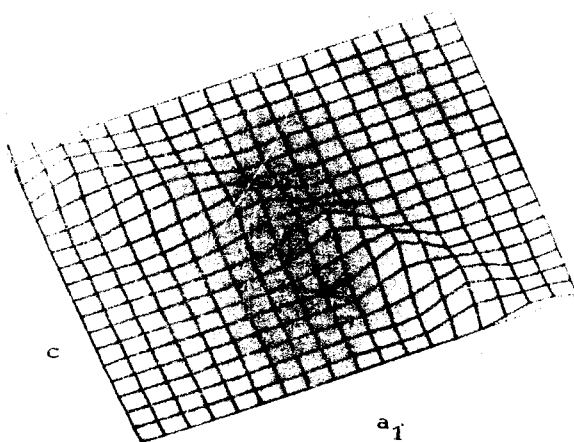


Figura 21. Densitat de probabilitat conjunta a posteriori després de 100 observacions pels coeficients a_1 i c . Malla des de -0.4 a 1.4 per a_1 i des de -0.675 a 0.9 per c .

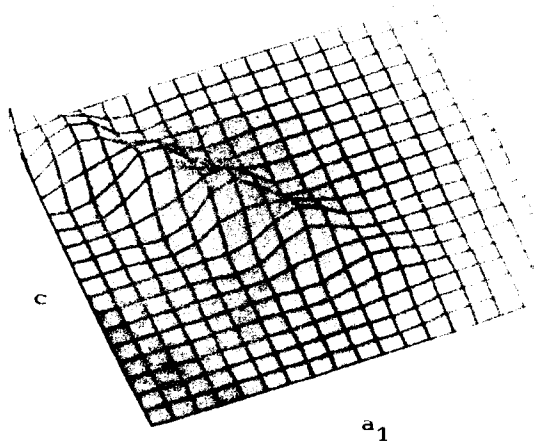


Figura 22. Densitat de probabilitat conjunta a posteriori després de 300 observacions pels coeficients a_1 i c . Malla des de -0.4 a 1.2 per a_1 i des de -0.675 a 0.9 per c .

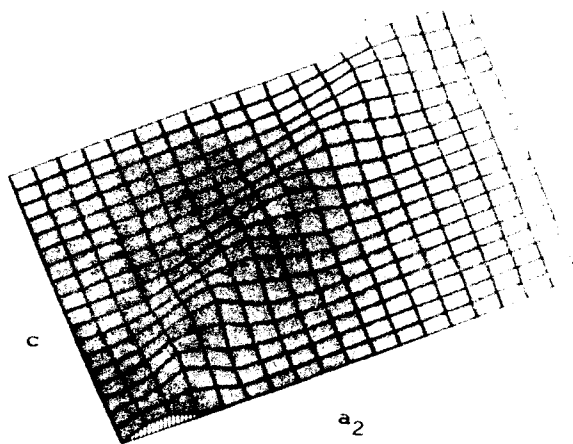


Figura 23. Densitat de probabilitat conjunta a posteriori després de 100 observacions pels coeficients a_2 i c . Malla des de -0.5 a 0.6 per a_2 i des de -0.675 a 0.9 per c .

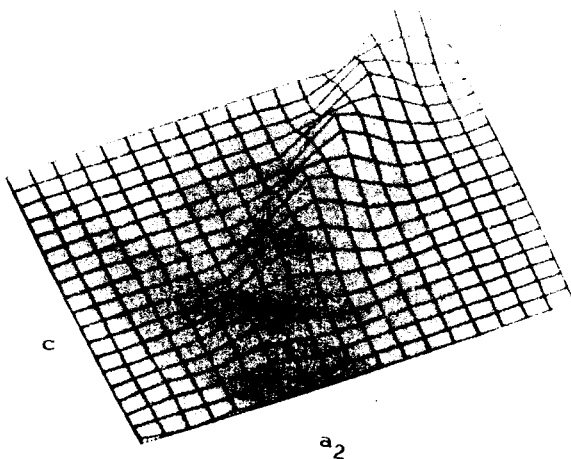


Figura 24. Densitat de probabilitat conjunta a posteriori després de 300 observacions pels coeficients a_2 i c . Malla des de -0.4 a 0.5 per a_2 i des de -0.675 a 0.9 per c .

MODEL 2 (Un pol=0.5, l'altre=-0.8, el zero=-0.7)			
$y_t = -0.3y_{t-1} + 0.4y_{t-2} + e_t + 0.7e_{t-1}$			
N=50	$a_1^* = 0.343$	$a_2^* = 0.142$	$c^* = 0.134$
(1)	$s_{a1} = 0.468$	$s_{a2} = 0.272$	$s_c = 0.457$
N=50	$a_1^* = 0.171$	$a_2^* = 0.258$	$c^* = -0.304$
(2)	$s_{a1} = 1.265$	$s_{a2} = 0.644$	$s_c = 1.291$
N=100	$a_1^* = 0.446$	$a_2^* = -0.011$	$c^* = 0.113$
(1)	$s_{a1} = 0.459$	$s_{a2} = 0.262$	$s_c = 0.442$
N=100	$a_1^* = 0.783$	$a_2^* = -0.211$	$c^* = -0.202$
(2)	$s_{a1} = 0.864$	$s_{a2} = 0.447$	$s_c = 0.881$
N=300	$a_1^* = 0.145$	$a_2^* = 0.157$	$c^* = 0.299$
(1)	$s_{a1} = 0.391$	$s_{a2} = 0.188$	$s_c = 0.414$

TAULA 4

En aquest cas, en què hi ha un zero i un pol pròxims, s'han fet les estimacions i representacions gràfiques per $N=300$ observacions en comptes de $N=200$ observacions, com en el model anterior. Podem afirmar que seran necessàries un nombre d'observacions bastant més gran que 300 per aconseguir bons estimadors. Aquest resultat es pot deduir de les figures 19, 20, 21, 22, 23 i 24 que ja es veu a partir de les funcions de densitat marginal a posteriori, que la convergència dels estimadors cap el vertader valor és molt feble i observant la taula 4 es pot veure que els estimadors aconseguits tant pel filtre no lineal òptim, com pel paquet estadístic BMDP2T[9] són biaixats i tenen una gran variància. No obstant, per 50 i 100 observacions, els estimadors obtinguts pel filtre no lineal tenen variància més petita que els obtinguts mitjançant el BMDP2T [9].

A continuació s'han estudiat els models que tenen el zero a prop de l'origen. Com model representatiu d'aquest tipus hem triat el que un pol val 0.5, l'altre val -0.8 i el zero val -0.1. L'equació representativa d'aquest model és

$$y_t = -0.3 y_{t-1} + 0.4 y_{t-2} + e_t + 0.1 e_{t-1} \quad (3.38)$$

Les figures 25, 26, 27, 28, 29 i 30 representen les funcions de densitat conjuntes a posteriori després de 100 i 200 observacions pels coeficients estimats dos a dos.

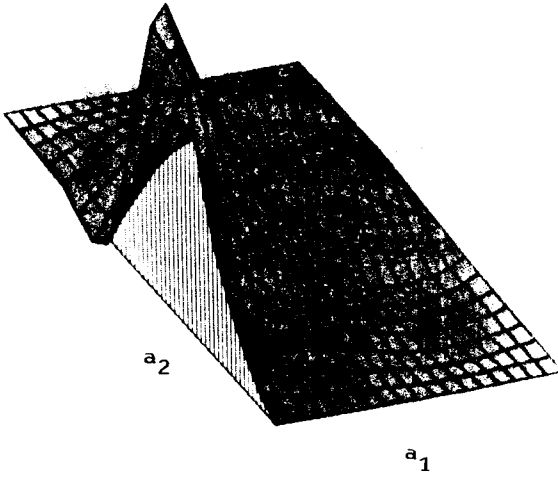


Figura 25. Densitat de probabilitat conjunta a posteriori després de 100 observacions pels coeficients a_1 i a_2 . Malla des de -0.4 a 0.0 per a_1 i des de 0.3 a 0.8 per a_2 .

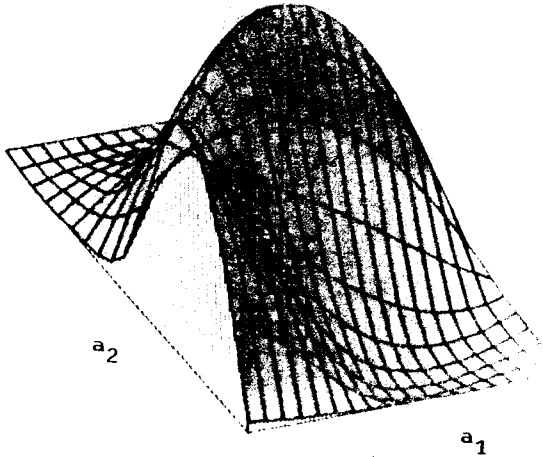


Figura 26. Densitat de probabilitat conjunta a posteriori després de 200 observacions pels coeficients a_1 i a_2 . Malla des de -0.4 a 0.0 per a_1 i des de 0.3 a 0.7 per a_2 .

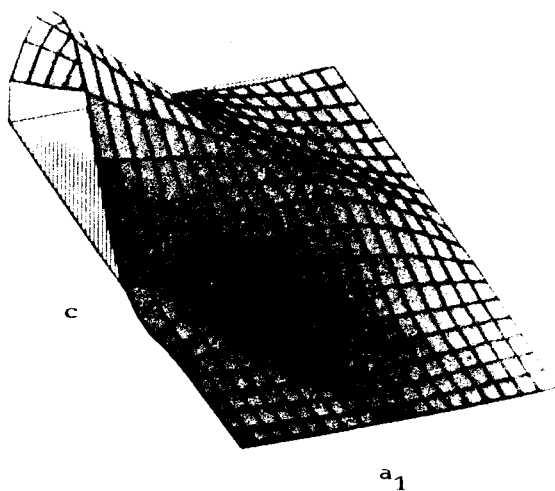


Figura 27. Densitat de probabilitat conjunta a posteriori després de 100 observacions pels coeficients a_1 i c . Malla des de -0.4 a 0.0 per a_1 i des de -0.45 a 0.45 per c .

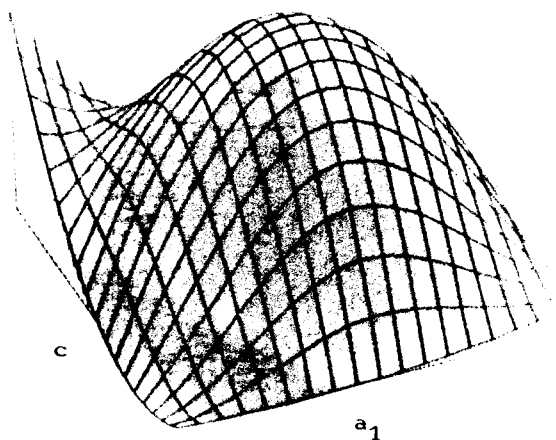


Figura 28. Densitat de probabilitat conjunta a posteriori després de 200 observacions pels coeficients a_1 i c . Malla des de -0.4 a 0.0 per a_1 i des de -0.225 a 0.225 per c .

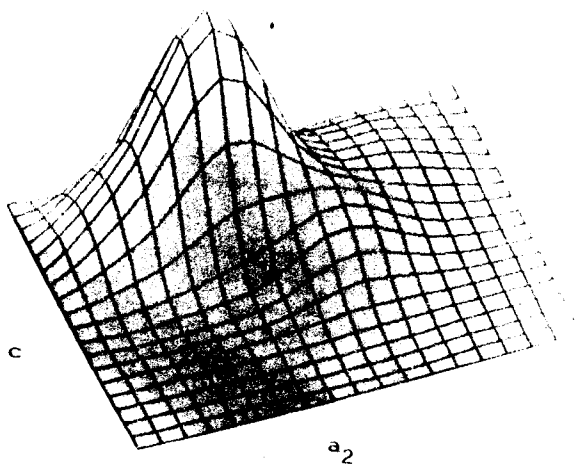


Figura 29. Densitat de probabilitat conjunta a posteriori després de 100 observacions pels coeficients a_2 i c . Malla des de 0.3 a 0.8 per a_2 i des de -0.45 a 0.45 per c .

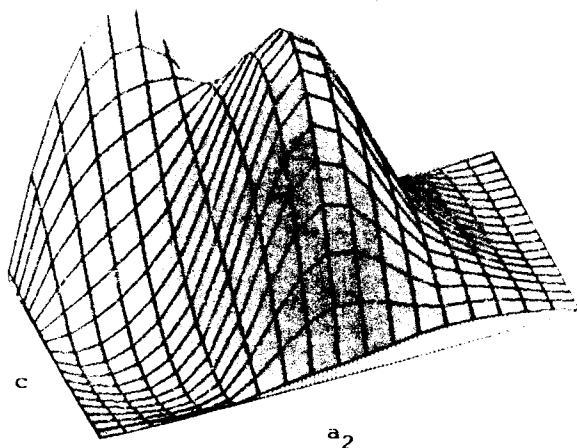


Figura 30. Densitat de probabilitat conjunta a posteriori després de 100 observacions pels coeficients a_2 i c . Malla des de 0.3 a 0.7 per a_2 i des de -0.225 a 0.225 per c .

MODEL 3 (Un pol=0.5, l'altre=-0.8, el zero=-0.1)			
$y_t = -0.3y_{t-1} + 0.4y_{t-2} + e_t + 0.1e_{t-1}$			
N=50	$a_1^* = -0.118$	$a_2^* = 0.658$	$c^* = -0.051$
(1)	$s_{a1} = 0.145$	$s_{a2} = 0.107$	$s_c = 0.233$
N=50	$a_1^* = -0.177$	$a_2^* = 0.681$	$c^* = 0.060$
(2)	$s_{a1} = 0.160$	$s_{a2} = 0.125$	$s_c = 0.226$
N=100	$a_1^* = -0.328$	$a_2^* = 0.522$	$c^* = 0.203$
(1)	$s_{a1} = 0.103$	$s_{a2} = 0.082$	$s_c = 0.138$
N=100	$a_1^* = -0.399$	$a_2^* = 0.496$	$c^* = 0.301$
(2)	$s_{a1} = 0.139$	$s_{a2} = 0.112$	$s_c = 0.155$
N=200	$a_1^* = -0.274$	$a_2^* = 0.471$	$c^* = 0.084$
(1)	$s_{a1} = 0.117$	$s_{a2} = 0.072$	$s_c = 0.132$

TAULA 5

Observant les figures 25, 26, 27, 28, 29 i 30 i la taula 5 podem afirmar que la proximitat del zero a l'origen no afecta gaire l'estimació dels coeficients autorregressius.

A continuació s'han estudiat els models que tenen un pol a prop de l'origen. Com a exemple d'aquests tipus de models hem triat el cas en que un pol és 0.5, l'altre pol és -0.1 i el zero val -0.8. L'equació representativa d'aquest model és

$$y_t = 0.4 y_{t-1} + 0.05 y_{t-2} + e_t + 0.8 e_{t-1} \quad (3.39)$$

Les figures 31, 32, 33, 34, 35 i 36 representen l'evolució de la densitat de probabilitat conjunta a posteriori després de 100 i 200 observacions pels coeficients estimats dos a dos.

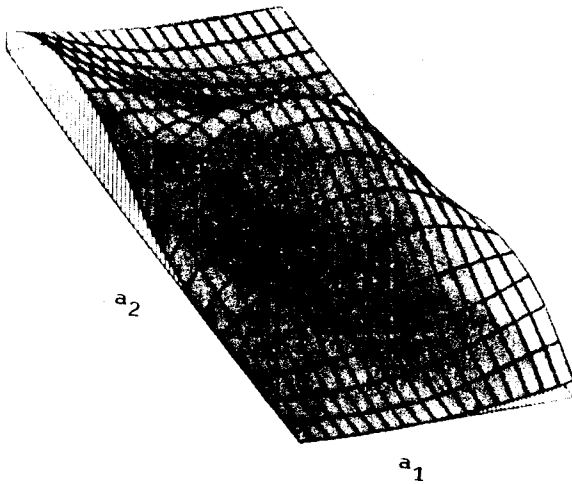


Figura 31. Densitat de probabilitat a posteriori conjunta després de 100 observacions pels coeficients a_1 i a_2 . Malla des de 0.4 a 0.8 per a_1 i des de -0.3 a 0.3 per a_2 .

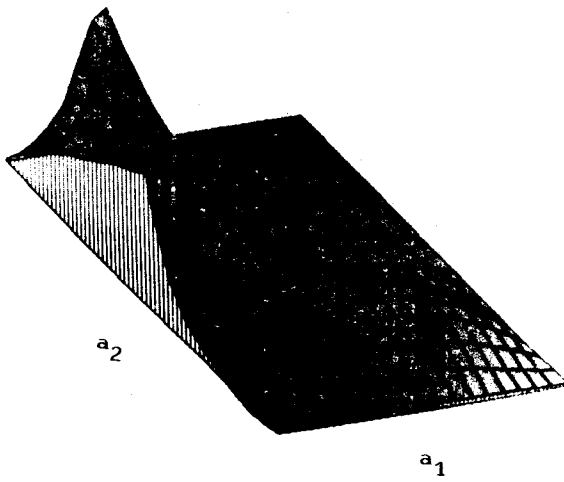


Figura 32. Densitat de probabilitat a posteriori conjunta després de 200 observacions pels coeficients a_1 i a_2 . Malla des de 0.4 a 0.8 per a_1 i des de -0.2 a 0.3 per a_2 .

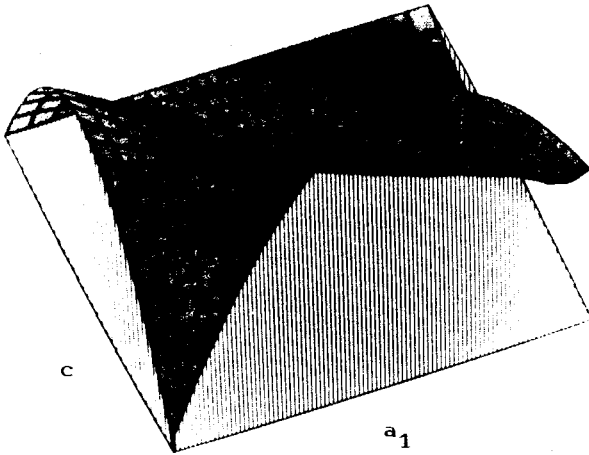


Figura 33. Densitat de probabilitat a posteriori conjunta després de 100 observacions pels coeficients a_1 i c . Malla des de 0.4 a 0.8 per a_1 i des de 0.675 a 0.9 per c .

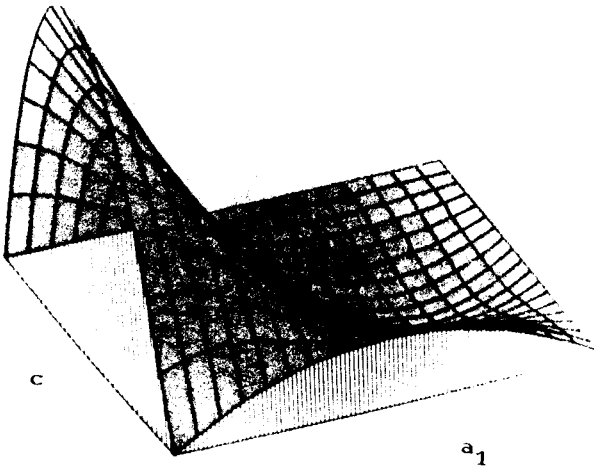


Figura 34. Densitat de probabilitat a posteriori conjunta després de 200 observacions pels coeficients a_1 i c . Malla des de 0.4 a 0.8 per a_1 i des de 0.675 a 0.9 per c .

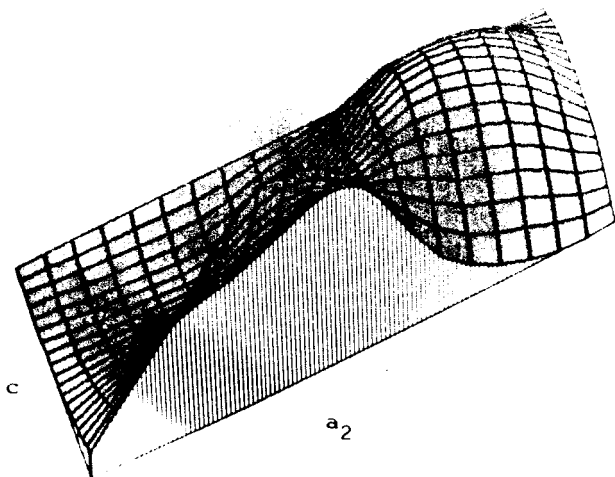


Figura 35. Densitat de probabilitat a posteriori conjunta després de 100 observacions pels coeficients a_2 i c . Malla des de -0.3 a 0.3 per a_2 i des de 0.675 a 0.9 per c .

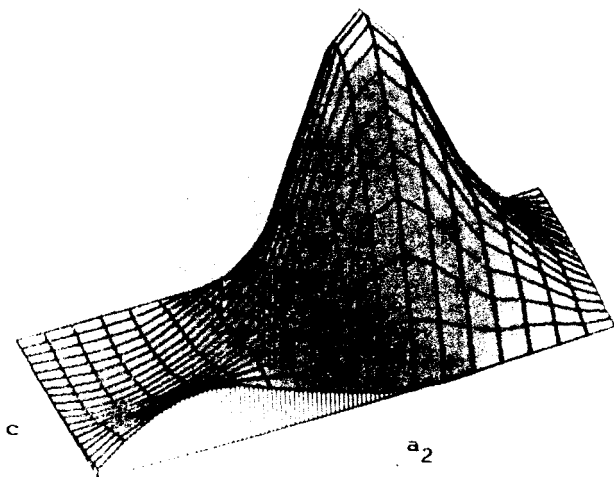


Figura 36. Densitat de probabilitat a posteriori conjunta després de 200 observacions pels coeficients a_2 i c . Malla des de -0.2 a 0.3 per a_2 i des de 0.675 a 0.9 per c .

MODEL 4 (Un pol=0.5, l'altre=-0.1, el zero=-0.8)			
$y_t = 0.4y_{t-1} + 0.05y_{t-2} + e_t + 0.8e_{t-1}$			
N=50	$a_1^* = 0.710$	$a_2^* = -0.137$	$c^* = 0.696$
(1)	$s_{a1^*} = 0.238$	$s_{a2^*} = 0.223$	$s_{c^*} = 0.210$
N=50	$a_1^* = 0.585$	$a_2^* = -0.002$	$c^* = -0.935$
(2)	$s_{a1^*} = 0.158$	$s_{a2^*} = 0.158$	$s_{c^*} = 0.062$
N=100	$a_1^* = 0.590$	$a_2^* = -0.006$	$c^* = 0.754$
(1)	$s_{a1^*} = 0.142$	$s_{a2^*} = 0.141$	$s_{c^*} = 0.107$
N=100	$a_1^* = 0.588$	$a_2^* = -0.001$	$c^* = 0.796$
(2)	$s_{a1^*} = 0.133$	$s_{a2^*} = 0.131$	$s_{c^*} = 0.088$
N=200	$a_1^* = 0.442$	$a_2^* = 0.077$	$c^* = 0.862$
(1)	$s_{a1^*} = 0.085$	$s_{a2^*} = 0.095$	$s_{c^*} = 0.085$

TAULA 6

A partir de 200 observacions els dos coeficients autorregressius queden bastant ben localitzats i la convergència de l'estimador del valor c cap el valor real no queda gaire afectada. Aquests resultats es poden deduir de les figures 31, 32, 33, 34, 35 i 36 i de la taula 6.

Finalment, s'ha estudiat el cas en que els dos pols són pròxims un a l'altre. Com a representació d'aquest cas s'ha triat el model en que un pol és 0.5, l'altre és 0.4 i el zero val -0.8. L'equació d'aquest model és

$$y_t = 0.9 y_{t-1} - 0.2 y_{t-2} + e_t + 0.8 e_{t-1} \quad (3.40)$$

Les figures 37, 38, 39, 40, 41 i 42 representen l'evolució de la densitat de probabilitat conjunta a posteriori després de 100 i 200 observacions pels coeficients estimats dos a dos.

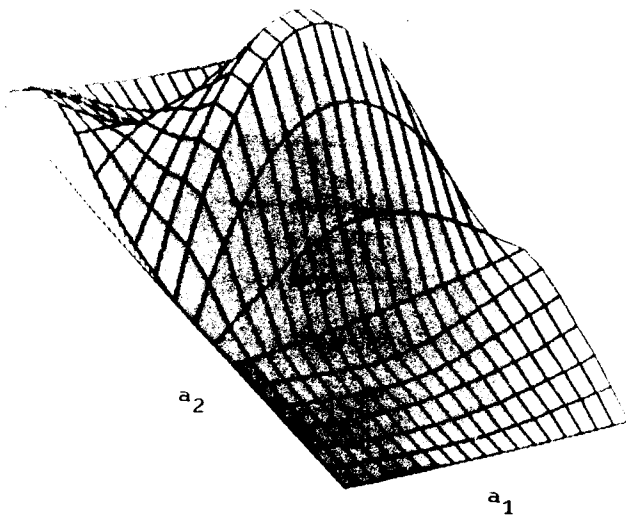


Figura 37. Densitat de probabilitat conjunta a posteriori després de 100 observacions pels coeficients a_1 i a_2 . Malla des de 0.8 a 1.2 per a_1 i des de -0.6 a 0.0 per a_2 .

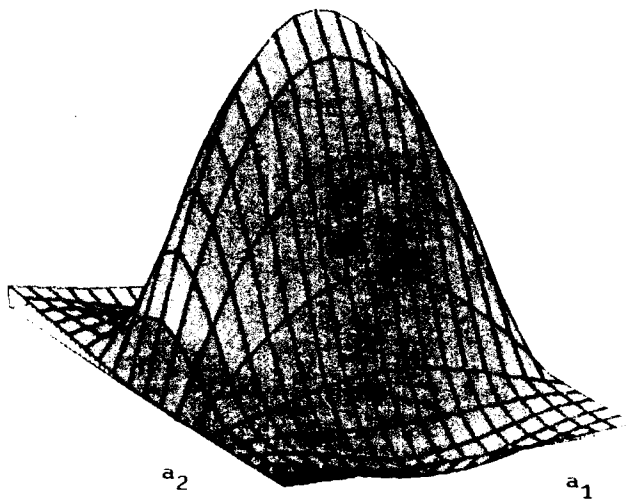


Figura 38. Densitat de probabilitat conjunta a posteriori després de 200 observacions pels coeficients a_1 i a_2 . Malla des de 0.8 a 1.2 per a_1 i des de -0.5 a -0.1 per a_2 .

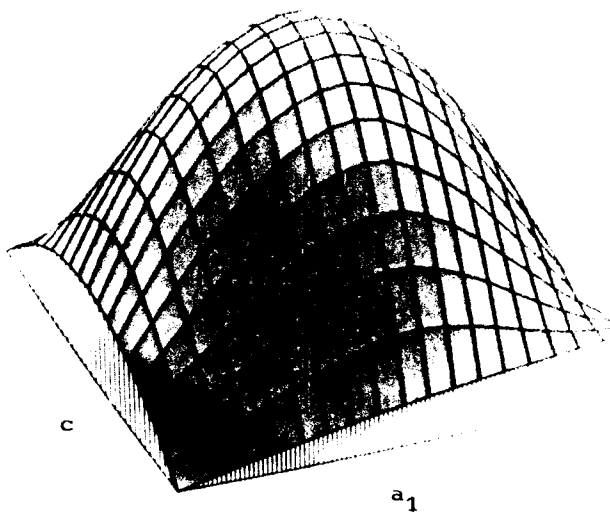


Figura 39. Densitat de probabilitat conjunta a posteriori després de 100 observacions pels coeficients a_1 i c . Malla des de 0.8 a 1.2 per a_1 i des de 0.45 a 0.9 per c .

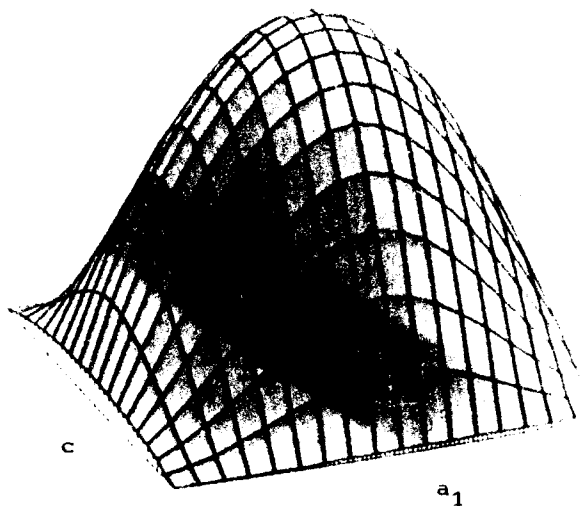


Figura 40. Densitat de probabilitat conjunta a posteriori després de 200 observacions pels coeficients a_1 i c . Malla des de 0.8 a 1.2 per a_1 i des de 0.45 a 0.9 per c .

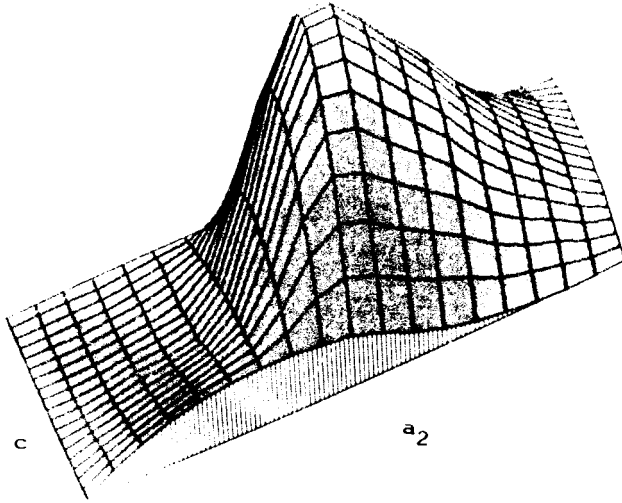


Figura 41. Densitat de probabilitat conjunta a posteriori després de 100 observacions pels coeficients a_2 i c . Malla des de -0.6 a 0.0 per a_2 i des de 0.45 a 0.9 per c

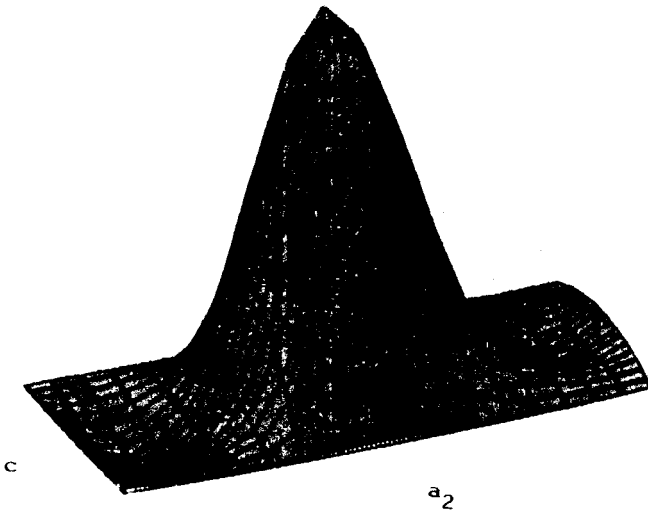


Figura 42. Densitat de probabilitat conjunta a posteriori després de 200 observacions pels coeficients a_2 i c . Malla des de -0.5 a -0.1 per a_2 i des de 0.45 a 0.9 per c .

MODEL 5(Un pol=0.5, l'altre=0.4, el zero=-0.8)			
$y_t = 0.9y_{t-1} - 0.2y_{t-2} + \theta_1 + 0.8e_{t-1}$			
N=50	$a_1^* = 1.031$	$a_2^* = -0.264$	$c^* = 0.641$
(1)	$s_{a1} = 0.177$	$s_{a2} = 0.172$	$s_c = 0.146$
N=50	$a_1^* = 1.032$	$a_2^* = -0.253$	$c^* = 0.719$
(2)	$s_{a1} = 0.174$	$s_{a2} = 0.172$	$s_c = 0.124$
N=100	$a_1^* = 0.998$	$a_2^* = -0.268$	$c^* = 0.628$
(1)	$s_{a1} = 0.114$	$s_{a2} = 0.112$	$s_c = 0.091$
N=100	$a_1^* = 1.007$	$a_2^* = -0.273$	$c^* = 0.641$
(2)	$s_{a1} = 0.127$	$s_{a2} = 0.125$	$s_c = 0.102$
N=200	$a_1^* = 0.989$	$a_2^* = -0.286$	$c^* = 0.669$
(1)	$s_{a1} = 0.058$	$s_{a2} = 0.060$	$s_c = 0.038$

TAULA 7

S'observa a les figures 37, 38, 39, 40, 41 i 42 i a la taula 7 que la proximitat dels dos pols no afecta gaire a l'estimació dels coeficients autorregressius ni a l'estimació del zero.

3.5.4 Conclusions

En primer lloc parlarem de les conclusions estadístiques. A la vista dels resultats precedents de l'apartat 3.5.3, es pot deduir que la grandària mínima de mostra necessària per la correcta estimació dels coeficients d'un model ARMA(2,1) depèn de la localització en el cercle unitat dels dos pols i del zero.

Els models que tenen el zero a prop d'un pol són els que exigeixen més observacions per aconseguir la convergència dels valors estimats als valors reals. Aquest resultat el podem deduir de comparar les figures 19, 20, 21, 22, 23 i 24 amb totes les altres figures representades. Noti's que no hi ha cap model que tingui funcions de densitat a posteriori tant planeres com les obtingudes en aquest cas. Anàlogament, les desviacions tipus dels coeficients estimats (vegi's taula 4) són molt més grans que les obtingudes per qualsevol altre model.

Els models que tenen el zero a prop de l'origen, per exemple, el model de la taula 5, necessiten més observacions per estimar el zero que els models que no tenen aquesta restricció en el zero, per exemple, el model de la taula 3, ja que en el primer cas per 200 observacions $s_{c_0} = 0.089$ i en el segon cas, amb el mateix nombre d'observacions $s_{c_0} = 0.132$. A més, tal com ja hem dit en l'apartat precedent, sembla ser que la proximitat del zero a l'origen no afecta gaire l'estimació dels coeficients autorregressius. Aquests resultats també es posen de manifest a les figures 25, 26, 27, 28, 29 i 30.

Les conclusions per un model ARMA(2,1) que té un pol a prop de l'origen, les deduirem de la taula 6 i de les figures 31, 32, 33, 34, 35 i 36. En aquest cas, l'estimació del zero no queda gaire afectada per la localització dels pols com es pot veure al comparar les desviacions tipus

obtingudes pel coeficient c^* de les taules 3 i 6, ja que per $N=50$ en la taula 3 $s_{c^*}=0.270$ i $s_{c^*}=0.210$ en la taula 6. A partir de 200 observacions, els dos coeficients autorregressius queden bastant ben localitzats i les desviacions tipus dels coeficients estimats, $s_{a_1^*}=0.085$, $s_{a_2^*}=0.095$, són menors que les obtingudes en la taula 3, $s_{a_1^*}=0.121$ i $s_{a_2^*}=0.115$.

Finalment, hem estudiat el cas en què els dos pols són un a prop de l'altre com es pot veure en el model 5 (un pol=0.5, l'altre=0.4 i el zero=-0.8). Si comparem els resultats obtinguts amb els del model 4 (un pol=0.5, l'altre=-0.1 i el zero=-0.8) podem deduir que per qualsevol nombre d'observacions les desviacions tipus dels coeficients autorregressius són majors en el model 4 que en el model 5. A més per 200 observacions, les desviacions tipus dels coeficients obtinguts són més petites que les de qualsevol altre model estudiat.

En segon lloc tractarem els aspectes numèrics de la implementació de l'algorisme. Pel que fa al temps de càlcul i capacitat de memòria disponible podem treure les mateixes conclusions que en l'apartat 3.4.4, ja que en aquest cas també volem guardar la densitat de probabilitat a posteriori en tres dimensions, una per a cada coeficient del model ARMA(2,1). Per tant la capacitat de memòria disponible ha de ser de l'ordre de nN_s^3 i el temps de càlcul, proporcional a $n^2N_s^3$ on N_s és el nombre de punts de discretització de la funció de densitat a posteriori en cada dimensió.

3.6 ESTIMACIO DELS PARAMETRES D'UN MODEL AR(1). COMPARACIO AMB ELS DOS METODES.

Amb la intenció de comparar el mètode del capítol 2 amb el descrit en aquest capítol, s'han estimat els paràmetres del model AR(1) amb σ^2 desconeguda utilitzat a l'apartat 2.4. S'ha estudiat els casos en que el pol és 0.8 i 0.05. El valor de la variància és igual a 1 en tots dos casos. L'estimació ha estat realitzada fent servir l'algorisme pel càlcul de la funció de versemblança normalitzada descrit en aquest capítol.

Les estimacions del pol i de la variància del soroll coincideixen amb les obtingudes fent servir el filtre no lineal descrit en l'apartat 2.3. Utilitzant el mètode del capítol 2, denotant per n el nombre d'observacions i per N_s el nombre de punts en que s'ha discretitzat la funció de densitat de probabilitat a posteriori en cada dimensió, s'ha vist que la capacitat de memòria i el temps de càlcul per aquest problema és proporcional a N_s^2 i a nN_s^2 respectivament, ja que és possible fer la predicció i el filtratge conjuntament. Fent servir l'algorisme proposat en aquest capítol, la capacitat de memòria i el temps de càlcul seran proporcionals a nN_s^2 i $n^2N_s^2$ respectivament. Per tant, podem concloure que quan es tracta d'estimar el pol i la variància del soroll d'un model AR(1) serà més eficient utilitzar l'algorisme del capítol 2 que l'algorisme del capítol 3.

CAPITOL 4

CONCLUSIONS I EXTENSIONS

En aquest treball s'ha volgut avançar en l'estudi de les tècniques d'estimació dels paràmetres de models ARMA(p,q) estacionaris. L'estimació òptima de models ARMA(p,q) ha pogut ser resolta utilitzant filtres no lineals.

La construcció de la funció de densitat a posteriori i el seguiment de la seva evolució ens permet controlar la precisió de l'estimació realitzada a mida que el nombre de dades emprades va creixent. Com que el filtre és òptim, el nombre de dades necessàries per a una estimació amb una precisió determinada constitueix una fita inferior del nombre de dades que necessitariem per a qualsevol altre algorisme per obtenir aquesta mateixa precisió.

No obstant, en aquest moment el filtre no lineal òptim s'ha de veure com una eina teòrica ja que el temps de càlcul és proporcional al producte entre el quadrat del nombre d'observacions a tractar pel nombre de punts de discretització de la densitat de probabilitat elevat al nombre de paràmetres a estimar.

La recurrència per les formes quadràtiques demostrada en el capítol 3 ha permès un guany en la capacitat de memòria i temps de CPU. La malla dissenyada tindrà tantes dimensions com paràmetres a estimar mentre que la malla utilitzada segons la metodologia del capítol 2 té tantes dimensions com paràmetres a estimar més una per cada variable d'estat utilitzada.

La implementació pràctica dels algorismes d'estimació òptims dels paràmetres dels models ARMA (p,q) ha estat feta en l'ordinador VAX-8600 de la Facultat d'Informàtica de Barcelona. Aquest ordinador té

una velocitat de 4.6 Mips. El temps de CPU utilitzat en l'estimació dels paràmetres d'un model ARMA (1,1) amb 25 observacions ha estat 0.40 seg. i l'utilitzat per aquest mateix problema amb 100 observacions ha estat 8 seg.

De les experiències en estimació òptima pel problema AR(1) quan la variància del soroll és desconeguda s'en despren que la precisió depèn essencialment del valor absolut del pol. També s'ha pogut observar que l'estimació de la variància del soroll resulta poc influenciada per la situació del pol i en tots els casos s'ha comprovat que la convergència per l'estimador de la variància és més ràpida que per l'altre paràmetre.

Pel problema ARMA(1,1), amb la variància del soroll desconeguda, es pot comprovar que la precisió depèn bàsicament del valor absolut del pol o del zero i de la distància entre ells. En aquest cas també s'ha evidenciat que l'estimació de la variància del soroll vé poc influenciada per l'estimació dels coeficients autorregressius i de mitjanes mòbils del model.

Pel que fa al problema ARMA(2,1), es ressalta el fet de què la precisió en l'estimació dels coeficients depèn principalment del valor absolut dels pols o del zero i de la distància entre pols i zeros.

Qüestions obertes

Una qüestió teòrica important que no s'ha abordat en aquest treball és la demostració que l'estimació de la variància del soroll és independent de l'estimació dels coeficients ARMA(p,q) a partir d'un nombre d'observacions cap endavant. Aquest nombre correspon al necessari per estimar la variància del soroll, que en tots els casos en que s'han fet proves és el primer paràmetre que convergeix.

El càlcul en paral·lel utilitzant un processador vectorial reduiria el temps de CPU de forma dràstica. El gran nombre d'operacions a realitzar en la implementació numèrica d'un algorisme de filtratge no lineal és degut a que s'ha de calcular la densitat de probabilitat a posteriori sobre cada punt de la malla. Com que els càlculs per cada punt són completament independents, pot reduir-se el temps efectuant en paral·lel el càlcul d'aquesta densitat de probabilitat a posteriori i després normalitzar-la.

Fora interessant pels diferents models quantificar l'evolució de les variàncies en funció del nombre d'observacions i trobar relacions quantitatives entre les variàncies i les posicions dels pols i zeros.

