

UNIVERSIDAD DE SANTANDER

Escuela Técnica Superior de
Ingenieros de Caminos, Canales y Puertos

TESIS DOCTORAL

**"UNA FAMILIA DE ELEMENTOS SIMPLES
CONFORMES CLASE C^1 "**

PRESENTADA POR: Javier Torres Ruiz

DIRIGIDA POR: Avelino Samartín Quiroga

SANTANDER, FEBRERO 1984

A mis padres

AGRADECIMIENTOS

Quiero recordar aquí a aquellas personas y entidades que han hecho posible este trabajo.

A Avelino Samartín, amigo y maestro que, además, ha sido el Director de la Tesis.

A mi amigo Valentin Arroyo, sin cuyo esfuerzo y ánimos no se hubiese realizado este trabajo.

A todos los miembros del Departamento de Análisis de las Estructuras que han hecho posible esto con su apoyo y ayuda.

A mis compañeros de la Escuela de Caminos, que han colaborado siempre que lo he necesitado.

A Agustín Manrique que tan buenos dibujos ha hecho.

A Joaquín San Román que ha mecanografiado todo el texto, por su dedicación y eficacia.

A STEEL-BETON S.A., por haberme facilitado el uso del ordenador.

SIMBOLOS Y ABREVIATURAS

a) Escalares

- A : Area del elemento triangular.
- a : Longitud del lado de la placa cuadrada.
- \underline{a}_i : Coeficientes de funciones de forma.
- a_i : Incremento de abscisas de los vértices del elemento triangular.
- $a_j^{(i)}$: a_i en el subtriángulo i .
- b_j : Incremento de ordenadas de los vértices del elemento triangular
- \underline{C} : Operador diferencial
- C^K : Clase K
- \underline{D} : Operador diferencial
- d_i : Coeficiente intrínseco del triángulo
- e_i : Coeficiente intrínseco del triángulo
- \underline{E} : Operador diferencial
- E : Módulo de elasticidad de la placa
- \underline{F} : Operador diferencial
- f_i : Coeficiente intrínseco del triángulo
- G : Módulo de elasticidad transversal
- G_i : Cargas de momentos repartidas
- H : Espacio de Hilbert
- H^{2m} : Espacio de Hilbert con funciones de derivada de norma finita de orden $2m$.
- H_C^{2m} : Subespacio de H^{2m} que cumple las condiciones de contorno (naturales y esenciales)
- H_E^{2m} : Subespacio de H^{2m} que cumple las condiciones de contorno esenciales
- H_i : Altura sobre el lado i del elemento

$H_i^{(j)}$: Matrices de continuidad interna
 h : Espesor de la placa
 h_e : Mayor dimensión de un elemento
 h_i : Altura desde el vértice $-i$ del triángulo
 k : Orden de derivación o continuidad
 K_{ij} : Curvaturas
 L_i : Coordenada triangular
 l_i : Longitud del lado del triángulo opuesto al vértice i
 M_{II} : Momentos flecotres por unidad de longitud
 M_{IH} : Momentos torsores por unidad de longitud
 M_i : Momentos en los nudos por unidad de longitud
 m_{ii} : Momentos flectores por unidad de longitud
 m_{ij} : Momentos torsores por unidad de longitud
 n : Dirección normal a un lado
 Q_I : Cortantes por unidad de longitud
 q_i : Cortantes por unidad de longitud
 R_I : Reacciones de Kirchhoff por unidad de longitud
 r_i : Reacciones de Kirchhoff por unidad de longitud
 q : Carga uniformemente distribuida por unidad de área
 S : Dirección según un lado
 S_C^h : Subespacio finito de H_C^{2m}
 S_E^h : Subespacio finito de H_E^{2m}
 u_i : Componente o gdl i -simo del elemento
 \underline{u} : Función de campo
 $\underline{u}^{(N)}$: Desarrollo finito de \underline{u}
 \underline{v} : Funciones de peso
 $\underline{v}^{(N)}$: Desarrollo finito de \underline{v}
 \underline{u}_S : Condiciones de contorno

$\underline{\alpha}$: vector de coeficientes
 V_x, V_y : Reacciones de Kirchhoff
 W_m : Pesos asociados a los puntos de integración
 ω : Flecha de la placa
 x_1, x_2 : Coordenadas cartesianas
 α_{ijk} : Coeficientes de desarrollos polinómicos en coordenadas triangulares
 λ : Coordenada intrínseca del triángulo
 θ_1, θ_2 : Giros alrededor de los ejes x_1 e x_2
 ϕ_i : Función de interpolación i-esima
 $\underline{\psi}_i$: Función de forma i-esima
 $\underline{\psi}_{,i}$: Derivada de la función de forma respecto a L_i
 $\underline{\psi}_{,ij}$: Derivada de la función de forma respecto a L_i y L_j
 μ : Coordenada instrínseca del triángulo
 ν : Coeficiente de Poisson
 Ω : Dominio de definición del campo
 $\pi(\)$: Funcional
 Γ : Reciento del dominio de definición
 ρ_e : Diámetro del circuito inscrito mayor

b) Vectores y matrices

$\underline{A}(u)$: Operador diferencial
 $\underline{A}_1(u)$: Operador diferencial
 $\underline{B}(u)$: Operador diferencial
 $\underline{B}_1(u)$: Operador diferencial
 $\underline{B}_2(u)$: Operador diferencial
 \underline{b} : Vector de fuerzas másicas

- \underline{B} : Matriz de la transformación de desplazamientos nodales a deformaciones
- \underline{B}_i : Vector resultante de la partición de \underline{B} en columnas
- \underline{C} : Matriz que relaciona los desplazamientos con las coordenadas generalizadas
- $\underline{\bar{C}}$: Matriz que relaciona las coordenadas generalizadas con los desplazamientos
- \underline{D} : Matriz de flexibilidad del material
- $\underline{d}^{(i)}$: Vector de desplazamientos en el subelemento i
- \underline{d}^* : Vector de desplazamientos total
- \underline{d}_{ij} : Subvectores de \underline{d}^*
- \underline{G} : Vector cuyas componentes son los 21 términos potenciales resultantes de un polinomio cúbico expresado en coordenadas triangulares
- \underline{K} : Matriz de rigidez global de la placa
- \underline{K}_e : Matriz de rigidez elemental
- \underline{K}_m : Matriz de rigidez modal
- \underline{L} : Vector de monomios del tipo $L_1^i L_2^j L_3^k$
- p : Función particularizada de \underline{L}
- $\underline{\bar{p}}_i$: Derivada i de \underline{L} respecto x e y
- $\underline{=p}_i$: Derivada i de \underline{L} respecto n y s
- \underline{p} : Vector de fuerzas actuando localmente en los gdl de la placa
- \underline{p}^i : Vector de cargas equivalentes en los gdl del elemento A_i
- \underline{p} : Vector de fuerzas total en los nudos
- \underline{p}_s : Vector de fuerzas aplicadas en el contorno

P_z : Carga repartida
 $S(N)$: Función escalar
 \underline{U}^i : Vector de gdl elementales
 \underline{U} : Vector de gdl globales de toda la placa
 \underline{u} : Función de campo
 $\underline{\varepsilon}$: Vector de deformación
 \underline{u} : Vector de campo
 \underline{u}_i : Vector de gdl
 $\underline{\sigma}$: Vector de tensión

c) Símbolos y abreviaturas

cdg : Centro de gravedad
 gdl : Grados de libertad
 M.E.F: Método de los elementos finitos
 $w(2)^I$: Función w en el subelemento I , en el nudo 2
 $w_{,12}$: Derivada de w respecto a x_1 y x_2
 $\|\underline{u}\|_{2m}$: Norma de orden $2m$ del vector \underline{u}
 $(\underline{u}, \underline{v})$: Producto escalar de \underline{u} por \underline{v}
 $\frac{\partial \underline{u}}{\partial \underline{x}}$: Derivada de \underline{u} respecto de \underline{x}

I N D I C E

	<u>Pág.</u>
CAPITULO 1.- <u>PROBLEMAS DE CONTORNO</u>	1
1. Problemas de contorno.....	3
2. Consideraciones previas a la resolución por desarrollo en series.....	4
3. Métodos de desarrollo en serie para la resolución de ecuaciones diferenciales elípticas.....	7
3.1. Identificación.....	7
3.2. Métodos integrales.....	9
3.2.1. Métodos de la integral de dominio.....	14
3.2.2. Métodos de la integral de contorno.....	19
4. Características del método de los elementos finitos.....	26
4.1. Convergencia de los métodos de Ritz y Galerkin.....	26
4.2. Ventajas del método de los elementos finitos.....	28
4.3. Errores en el método de los elementos finitos.....	31
4.3.1. Errores de discretización.....	33
4.3.2. Errores de integración numérica.....	36
4.3.3. Errores de idealización.....	36
4.3.4. Errores de redondeo.....	37
5. Clases de problemas que se resuelven con elementos de <u>continuidad C^1</u>	38

	<u>Pág.</u>
CAPITULO 2.- <u>PROBLEMA C^1. FLEXION DE PLACAS DELGADAS.</u>	41
2. Problema C^1 . Flexión de placas delgadas.....	43
2.1. Modelo de placa delgada.....	43
2.2. Formulación en elementos finitos de la placa.....	44
2.2.1. Planteamiento general.....	44
2.2.2. Relaciones entre las distintas magnitudes.....	46
2.3. Elementos conformes en problemas de clase C^1 . Teorías de obtención. Estado del arte.....	50
2.3.1. Inmersión en un problema C^0	51
2.3.2. Multiplicadores de Lagrange.....	54
2.3.3. Utilización de polinomios con continuidad C^1	56
2.3.4. Utilización de funciones racionales.....	57
2.3.5. Hiperelementos.....	59
2.3.6. Funciones a trozos.....	61
2.4. Crítica.....	62
2.4.1. Inmersión en un problema C^0	62
2.4.2. Multiplicadores de Lagrange.....	63
2.4.3. Utilización de funciones racionales.....	63
2.4.4. Hiperelementos.....	63
2.4.5. Funciones a trozos.....	64
CAPITULO 3.- <u>OBJETIVO DE LA TESIS.</u>	65
3. Objetivo de la tesis.....	67
3.1. Familia de elementos simples y conformes.....	67
3.2. Interés e importancia.....	68
3.3. Resumen histórico.....	69

	<u>Pág.</u>
3.4. Generalización de las funciones a trozos.....	72
3.4.1. Desarrollo analítico.....	72
3.4.2. Desarrollo numérico.....	76
3.4.2.1. Continuidad interna entre subelementos	82
3.4.2.2. Expresiones utilizadas. Funciones de forma.....	85
3.4.2.3. Matriz de rigidez y condensación está- tica.....	94
CAPITULO 4.- <u>PROGRAMA DE COMPUTADOR</u>	97
4. Programa de computador.....	99
4.1. Características y descripción general.....	99
4.2. Programa de elementos finitos.....	100
4.3. Funciones de forma.....	103
4.4. Entrada de datos y salida de resultados.....	103
4.4.1. Entrada de datos.....	105
4.4.2. Salida de resultados.....	115
CAPITULO 5.- <u>EXPERIMENTACION NUMERICA</u>	119
5. Experimentación numérica.....	121
5.1. Planteamiento general.....	121
5.2. Placa cuadrada, empotrada en su contorno, sometida a car- ga uniforme.....	125
5.3. Placa cuadrada empotrada con carga puntual en el centro	127
5.4. Placa cuadrada simplemente apoyada y con carga unifor- me.....	127

	<u>Pág.</u>
5.5. Placa cuadrada simplemente apoyada y carga puntual....	130
5.6. Placa cuadrada simplemente apoyada en sus esquinas y carga uniforme.....	130
5.7. Placa cuadrada simplemente apoyada en sus esquinas y carga puntual.....	133
5.8. Influencia del tipo de malla.....	139
5.9. Influencia del esviaje.....	139
5.9.1. Placa esviada 30°.....	141
5.9.2. Placa esviada 45°.....	141
5.9.3. Placa esviada 60°.....	144
5.10. Influencia del coeficiente de forma de los elementos..	147
5.11. Aplicación al cálculo de tableros de puentes.....	151
5.12. Comparación con otros elementos de flexión.....	154
<u>CAPITULO 6.- CONCLUSIONES, APORTACIONES Y FUTURAS LINEAS DE TRABAJO.....</u>	<u>165</u>
6. Conclusiones, aportaciones y futuras líneas de trabajo.....	167
6.1. Conclusiones y aportaciones.....	167
6.2. Sugerencias para futuras investigaciones.....	169
<u>APENDICE 1.- ECUACION DE LA PLACA DELGADA.....</u>	<u>175</u>
1. Ecuación de la placa delgada.....	177
<u>APENDICE 2.- FORMULAS UTILIZADAS EN LA RESOLUCION DE TRIANGULOS</u>	<u>185</u>
2. Fórmulas utilizadas en la resolución de triángulos.....	187

	<u>Pág.</u>
APENDICE 3.- <u>FORMULACION Y RESOLUCION DEL ELEMENTO QUINTICO...</u>	205
3. Formulaci3n y resoluci3n del elemento quíntico.....	207
APENDICE 4.- <u>DISTRIBUCION DE LOS GDL DEL LADO EXTERIOR EN EL</u>	
<u>SUBTRIANGULO INICIAL.....</u>	213
4. Distribuci3n de los gdl del lado exterior en el subtriángu- lo inicial.....	215
APENDICE 5.- <u>LISTADO DEL PROGRAMA DE ORDENADOR.....</u>	223
5. Listado del programa de ordenador.....	225
BIBLIOGRAFIA.....	297

CAPITULO 1

PROBLEMAS DE CONTORNO

1.- PROBLEMAS DE CONTORNO

Numerosas situaciones en la Ingeniería, y en particular en el Análisis de las Estructuras, pueden ser adecuadamente descritas mediante un modelo matemático que conduce a la resolución de un problema de contorno. Este se define, como la búsqueda de una función \underline{u} , escalar o vectorial, de la variable \underline{x} (normalmente de dimensión 1, 2 ò 3) que satisface las condiciones:

$$\underline{A}(\underline{u}) = \underline{0} \quad \text{para} \quad \underline{x} \in \Omega \tag{1.1}$$

$$\underline{B}(\underline{u}) = \underline{0} \quad \text{para} \quad \underline{x} \in \Gamma$$

siendo Ω y Γ el dominio y su frontera respectivamente, donde se plantea el problema. \underline{A} y \underline{B} constituyen operadores diferenciales de orden $2m$ y rango k , donde $k < 2m$, que es la definición de operadores elípticos.

Existen numerosas técnicas de resolución del problema (1.1); a saber:

- (1) Solución exacta o analítica, que consiste en deducir la función \underline{u} que satisface exactamente la ecuación (1.1). Esta solución, denominada clásica, sólo es posible obtenerla en situaciones muy simples de contorno y operadores diferenciales.
- (2) Solución en desarrollo en serie, que se caracteriza por obtener una solución en serie, que término a término satisface alguna de las ecuaciones diferenciales (1.1) y cuya suma en el límite cumple todas ellas.

2.- CONSIDERACIONES PREVIAS A LA RESOLUCION POR DESARROLLO EN SERIES

Con objeto de precisar las técnicas actuales de resolución indirecta de problemas de contorno, conviene introducir los siguientes conceptos.

Dado un sistema de vectores completo $\phi_1, \phi_2, \dots, \phi_n, \dots$ en un espacio de Hilbert, H , siempre se puede encontrar una descomposición del vector $\underline{u} \in H$ tal que:

$$\underline{u} = \sum_1^{\infty} \underline{a}_i \phi_i$$

Se llamará H^{2m} a un espacio de Hilbert en el que sus funciones tienen derivada de norma finita hasta la de orden $2m$, donde se considera norma de orden $2m$ para un vector $\underline{u}(\underline{x})$ la siguiente expresión:

$$\|\underline{u}\|_{2m} = \left[\int \{ (\underline{u}^{2m}(\underline{x}))^2 + \dots + (\underline{u}'(\underline{x}))^2 + (\underline{u}(\underline{x}))^2 \} dx \right]^{\frac{1}{2}}$$

Por otra parte H_C^{2m} se llamará al subespacio de H^{2m} que además cumple las condiciones de contorno $\underline{B}(\underline{u}) = \underline{0}$.

El sistema (1.1) puede formular como sigue, con p función de \underline{x} pero no de la incógnita \underline{u} :

$$\begin{aligned} \text{No homo} \quad \underline{A}_1(\underline{u}) &= \underline{p} & \text{en } \Omega \\ \underline{B}(\underline{u}) &= \underline{0} & \text{en } \Gamma \end{aligned} \tag{1.1a}$$

Si a p se le exige que sea de norma de orden "0" finita, se tiene que (1.1a) expresa una aplicación del espacio H_C^{2m} en H^0 .

Cuando se cumple que $\|\underline{u}\|_{2m} \leq C\|\underline{p}\|_0$, se puede demostrar que existe solución y es única. De esta forma se puede buscar una solución del tipo:

$$\underline{u} = \sum_1^{\infty} a_i \phi_i \quad (1.2)$$

Generalmente no se suele hallar la solución del desarrollo infinito, sino una suma parcial de varias funciones solamente:

$$\underline{u}^{(N)} = \sum_1^N a_i \phi_i \quad (1.3)$$

En definitiva lo que se quiere encontrar es una solución aproximada en el subespacio $S_C^h \in H_C^{2m}$, es decir la proyección, respecto al producto escalar interno, de la solución exacta \underline{u} en el subespacio S_C^h , que se representará por $\underline{u}^{(N)}$. (Figura 1.1).

Si el problema se plantea en una forma más débil (planteamiento variacional), la solución aproximada sólo ha de tener derivadas finitas hasta la de orden m , y cumplir únicamente las condiciones esenciales de contorno. Esta solución ha de estar contenida en el espacio H_E^m , que es más amplio que el H_C^{2m} , pues este último, además de exigir condiciones de derivada finita hasta el orden $2m$, ha de cumplir también las condiciones naturales de contorno. Hay que añadir que la solución en H_E^m que hace mínima la variación (suma de infinitas funciones), cumple también las con-

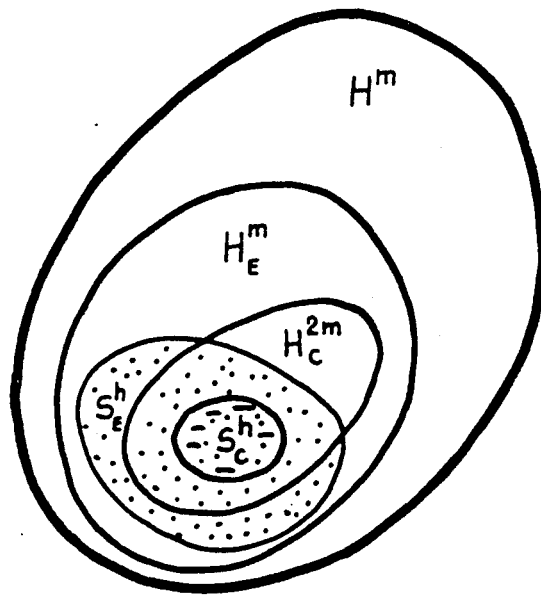


Figura 1.1

diciones naturales. De esta forma se amplía el campo de elección de posibles soluciones, que, por otra parte, suelen ser más parecidas al problema físico original.

3.- METODOS DE DESARROLLO EN SERIE PARA LA RESOLUCION DE ECUACIONES DIFERENCIALES ELIPTICAS

3.1.- Identificación

El sistema de ecuaciones diferenciales:

$$\begin{aligned} \underline{A}_1(\underline{u}) &= \underline{p} & \text{en } \Omega \\ \underline{B}(\underline{u}) &= \underline{0} & \text{en } \Gamma \end{aligned} \quad (1.1a)$$

se puede descomponer como sigue:

$$\begin{aligned} \underline{A}_1(\underline{u}) &= \underline{p} & \text{en } \Omega \\ \underline{B}_1(\underline{u}) &= \underline{s} & \text{en } \Gamma_1 \text{ (condiciones esenciales de contorno)} \\ \underline{B}_2(\underline{u}) &= \underline{g} & \text{en } \Gamma_2 \text{ (condiciones naturales de contorno)} \end{aligned}$$

Esta resolución aproximada consiste en encontrar una función solución del tipo:

$$\underline{u} = \sum_1^{\infty} \underline{a}_i \phi_i \quad (1.2)$$

donde ϕ_i son funciones con las siguientes características:

- a) ortogonales
- b) cumplen las condiciones de contorno $\underline{B}(\underline{u}) = \underline{0}$ o parte de ellas.

Y, además, el sistema de funciones ϕ_i es:

- a) completo

b) linealmente independiente.

Los coeficientes \underline{a}_i son desconocidos y pueden ser de dos tipos:

a) constantes, en el caso de que las $\underline{\phi}_i$ cumplan todas las c.c. (Solución tipo Navier).

b) funciones, si las $\underline{\phi}_i$ no cumplen todas las c.c. (las suelen cumplir en una dirección solamente. Solución tipo Levy).

El problema se concreta en hallar los coeficientes \underline{a}_i . Para ello se sigue el proceso siguiente:

1) Se desarrolla el término independiente del sistema (1.1a):

$$\underline{P} = \sum_1^{\infty} \underline{b}_i \underline{\phi}_i \quad (1.5)$$

2) Con los desarrollos (1.2) y (1.5) se entra en (1.4):

$$\underline{A}_1 \left(\sum_1^{\infty} \underline{a}_i \underline{\phi}_i \right) = \sum_1^{\infty} \underline{b}_i \underline{\phi}_i \quad (1.6)$$

3) Se identifican los coeficientes en (1.6), obteniéndose los \underline{a}_i buscados, bien por simple resolución de un sistema de coeficientes constantes (Navier) o de un sistema de ecuaciones diferenciales de menor número de variables (Levy), que da una convergencia más rápida, ya que en una de las direcciones no se desarrolla, sino que se toma el resultado ya integrado.

Para poder efectuar la identificación entre los miembros de (1.6), las funciones derivadas de ϕ_i (en el grado indicado en A_1) han de coincidir con las mismas ϕ_i .

En general las autofunciones del problema:

$$\begin{aligned} \underline{A}_1(\underline{u}) &= \lambda \underline{u} \\ \underline{B}(\underline{u}) &= \underline{0} \end{aligned} \quad (1.1b)$$

constituyen una base adecuada de funciones ϕ_i . En casos particulares de flexión de placas, las funciones trigonométricas (senos, cosenos) o bien las funciones de Rayleigh se utilizan con frecuencia.

Se puede simplificar el problema si se conoce bien la interpretación física del fenómeno y se eliminan términos del sistema de ecuaciones diferenciales que no desvirtúen demasiado la solución del problema.

3.2.- METODOS INTEGRALES

Para plantear estos métodos hay que utilizar el concepto de producto escalar de dos funciones \underline{u} y \underline{v} en el espacio H^{2m} con dominio de definición Ω . Este producto se define como sigue:

$$\int_{\Omega} \underline{u} \underline{v} \, d\Omega$$

Como el sistema de ecuaciones (1.1a) ha de cumplirse en todos los puntos del dominio Ω , se puede obligar igualmente a:

$$\int_{\Omega} \underline{v}^T \underline{A}(\underline{u}^{(N)}) d\Omega = \int_{\Omega} (v_1 A_1(u^{(N)}) + v_2 A_2(u^{(N)}) + \dots) d\Omega = 0$$

$$\int_{\Gamma} \underline{v}^T \underline{B}(\underline{u}^{(N)}) d\Gamma = \int_{\Gamma} (v_1 B_1(u^{(N)}) + v_2 B_2(u^{(N)}) + \dots) d\Gamma = 0 \quad (1.7)$$

para todo $\underline{v} \in H_1$ en Ω , siendo:

$$\underline{A}(\underline{u}) = \begin{pmatrix} A_1(\underline{u}) \\ A_2(\underline{u}) \\ \vdots \end{pmatrix} ; \quad \underline{B}(\underline{u}) = \begin{pmatrix} B_1(\underline{u}) \\ B_2(\underline{u}) \\ \vdots \end{pmatrix} ; \quad \underline{v} = \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ \vdots \end{pmatrix}$$

o lo que es lo mismo

$$\int_{\Omega} \underline{v}^T \underline{A}(\underline{u}^{(N)}) d\Omega + \int_{\Gamma} \bar{\underline{v}}^T \underline{B}(\underline{u}^{(N)}) d\Gamma = 0 \quad (1.8)$$

para todo $\underline{v} \in H_1$ en Ω y $\bar{\underline{v}} \in H_2$ en Γ :

Lo que en realidad se està haciendo es distribuir el error a lo largo del dominio dando un peso distinto a cada zona por medio de \underline{v} .

El tipo de funciones que se pueden utilizar para definir \underline{v} y \underline{u} han de ser tales que se puedan efectuar las integrales. Así si el orden de derivación en (1.8) es $2m$, se necesitaràn para \underline{u} unas funciones de prueba que sean continuas hasta el orden $2m-1$, es decir, C^{2m-1} . De esta forma se evitan tÈrminos que hagan infinito algùn tÈrmino del integrando.

Este mÈtodo obliga a que el error de la soluciòn aproximada (1.3) sea ortogonal al espacio de funciones \underline{v} . Segùn sean la dimensiòn y las caracterìsticas del espacio de funciones \underline{v} , variarà el error cometido con la soluciòn (1.3). A fin de cuentas se està realizando una ponderaciòn de residuos; de ahì que al procedimiento

se le llame "mètodo de los residuos ponderados".

Obligar a que un residuo o error sea ortogonal a un espacio, es que lo sea a cada una de las funciones de una base de ese espacio. Segùn sean el espacio y la base escogidos, se tiene una de las variantes del mètodo de los residuos ponderados.

El error representa en el campo estructural, una diferencia de equilibrio, si el problema està planteado en movimientos, y una incompatibilidad de movimientos si està planteado en fuerzas.

Teniendo en cuenta este concepto, las funciones de peso \underline{v} han de ser, para cada caso, duales del tipo de error que se tenga. Un mètodo que plantee errores en fuerzas -diferencia de equilibrio- utilizarà como funciones \underline{v} movimientos eficaces con las fuerzas consideradas. Si el mètodo plantea una diferencia cinemàtica, las funciones pesantes deben de ser esfuerzos eficaces con los desplazamientos que se han tenido en cuenta.

El cumplimiento del sistema (1.1a) implica la verificaciòn de (1.8). Sin embargo, el recìproco necesita para ser cierto la imposiciòn de determinadas condiciones sobre el espacio de funciones \underline{v} . Es decir, todas las soluciones fuertes son soluciones dèbiles, pero no al revès. A la soluciòn integral se le llama soluciòn dèbil, ya que no se tienen en cuenta posibles conjuntos de puntos de medida nula.

Si en la ecuaciòn (1.8) se efectúa una integraciòn por partes, se obtiene:

$$\int_{\Omega} \underline{C}(\bar{\underline{v}})^T \underline{D}(\underline{u}) d\Omega + \int_{\Gamma} \underline{E}(\bar{\underline{v}})^T \underline{F}(\underline{u}) d\Gamma = 0 \quad (1.9)$$

para todo $\underline{v} \in H_1$ en Ω , $\bar{\underline{v}} \in H_2$ en Ω y $\underline{u} \in H$.

El orden de derivación de los operadores \underline{C} , \underline{D} , \underline{E} y \underline{F} de (1.9) es menor que el de \underline{A} y \underline{B} en (1.8). En el planteamiento (1.9) se necesita una continuidad menor en las funciones \underline{u} y en contrapartida un orden de continuidad mayor en las funciones \underline{v} y $\bar{\underline{v}}$. Es decir, H_1 y H_2 son ahora más restringidos, mientras que H lo está menos. La expresión (1.9) impone menos restricciones que la (1.8) y la (1.1a), y es también una forma débil del problema.

Una expresión del tipo (1.9) se puede conseguir siempre si en el sistema (1.1a) se cumplen las condiciones siguientes:

\underline{A}_1 es un operador lineal definido en un conjunto denso M de un espacio complejo de Hilbert H^m .

H^m tiene definido un producto interno o escalar $(\underline{u}, \underline{v})$ donde \underline{u} , $\underline{v} \in H^m$.

\underline{A}_1 es positivo, y por lo tanto simétrico si $(\underline{A}_1 \underline{u}, \underline{u})$ es real y mayor que cero para toda $\underline{u} \in M$ distinta de 0.

\underline{A}_1 cumple las condiciones de contorno, que se consideran homogéneas.

Con estos supuestos el sistema (1.1a) tiene solución y es única. Esta solución minimiza el funcional siguiente:

$$\begin{aligned} \pi(\underline{u}) &= (\underline{A}_1 \underline{u}, \underline{u}) - (\underline{u}, \underline{p}) - (\underline{p}, \underline{u}) = \\ &= (\underline{A}_1 \underline{u}, \underline{u}) - 2R_e(\underline{u}, \underline{p}) \end{aligned} \tag{1.9a}$$

Si las condiciones de contorno no fueran homogéneas, el funcional

$\pi(\underline{u})$ se debe modificar convenientemente.

Este funcional convenientemente integrado por partes lleva a un planteamiento tipo (1.9):

$$\pi_1(\underline{u}) = \int_{\Omega} \underline{C}_1(\bar{\underline{v}})^T \underline{D}_1(\underline{u}) + \int_{\Gamma} \underline{E}_1(\bar{\underline{v}}) \underline{F}_1(\underline{u}) d\Gamma \quad (1.9b)$$

Si se vuelve a integrar por partes la expresiòn (1.9) queda:

$$\begin{aligned} & \int_{\Omega} \underline{u}^T \underline{A}(\bar{\underline{v}}) d\Omega + \int_{\Gamma} \underline{G}(\underline{u}) \underline{S}(\bar{\underline{v}}) d\Gamma - \\ & - \int_{\Gamma} \underline{S}(\underline{u}) \underline{G}(\bar{\underline{v}}) d\Gamma + \int_{\Gamma} \bar{\underline{v}}^T \underline{B}(\underline{u}) d\Gamma = 0 \end{aligned} \quad (1.10)$$

para todo $\underline{v} \in H_1$ en Ω y $\bar{\underline{v}} \in H$ en Γ siendo \underline{A} un operador lineal.

En este tipo de formulaciòn se ha trasladado el sistema de ecuaciones diferenciales a las funciones de peso.

Al resolver las ecuaciones (1.8), (1.9) y (1.10) se pueden eliminar algunos de sus tÈrminos para simplificar el problema. Esto se consigue imponiendo condiciones a las funciones de peso \underline{v} , $\bar{\underline{v}}$ o a las de aproximaciòn ϕ_i (1.2). Segùn sean las condiciones exigidas los tÈrminos eliminados cambian y los mÈtodos de resoluciòn reciben distinto nombre:

1) Métodos de la integral de dominio.

2) Métodos de la integral de contorno.

3.2.1.- Métodos de la integral de dominio

Este tipo de planteamiento corresponde a lo que en el cálculo de estructuras se llama soluciones en desplazamientos o métodos de equilibrio.

La solución \underline{u} se desarrolla en serie de funciones que cumplan las condiciones de contorno:

$$\begin{aligned}\underline{u}^{(N)} &= \sum_1^N \underline{a}_i \phi_i \\ \underline{B}(\phi_i) &= \underline{0} \quad \text{para todo } \phi_i\end{aligned}\tag{1.11}$$

Las distintas variantes aparecen según sean las funciones de peso utilizadas en (1.8).

$$\int_{\Omega} \underline{v}^T \underline{A}(\underline{u}^{(N)}) d\Omega + \int_{\Gamma} \bar{\underline{v}}^T \underline{B}(\underline{u}^{(N)}) d\Gamma = 0\tag{1.8}$$

para todo $\underline{v} \in H_1$ en Ω y $\bar{\underline{v}} \in H_2$ en Γ .

a) Colocación por puntos. Las funciones de peso son deltas de Dirac..

- b) Colocaci3n por subdominios. Las funciones de peso valen 1 en el subdominio y cero en los demàs.
- c) Galerkin. Recordando (1.11), las funciones \underline{v} y \bar{v} son las ϕ_i .
- d) Mìnimos cuadrados. Se consideran como funciones de peso $\underline{A}(\phi_i)$, donde \underline{A} es el operador usado en (1.8).

Si se parte de la formulaci3n (1.9):

$$\int_{\Omega} \underline{C}(\underline{v})^T \underline{D}(\underline{u}) d\Omega + \int_{\Gamma} \underline{E}(\bar{v})^T \underline{F}(\underline{u}) d\Gamma = 0 \quad (1.9)$$

para todo $\underline{v} \in H_1$ en Ω , $\bar{v} \in H_2$ en Γ y $\underline{u} \in H$.

y una soluci3n del tipo:

$$\underline{u}^{(N)} = \sum_1^N a_1 \phi_i \quad (1.12)$$

donde $\underline{F}(\phi_i) = 0 \quad \forall \phi_i$

la ecuaci3n (1.9) queda reducida a:

$$\int_{\Omega} \underline{C}(\underline{v})^T \underline{D}(\underline{u}^{(N)}) d\Omega = 0 \quad (1.13)$$

- e) Formulaci3n variacional. Mètodo de Rayleigh-Ritz

Partiendo de (1.13), para las funciones \underline{v} se puede utilizar cualquier conjunto que sea admitido por (1.13). Se suele emplear un mètodo de Galerkin es decir, las funciones \underline{v} son las ϕ_i de (1.12).

f) Métodos de Kantorovich.

El problema se resuelve por pasos. Recordando (1.7) la función solución se desarrolla en serie de funciones que cumplen las condiciones siguientes:

$$\underline{u}^{(N)} = \sum_1^N \underline{a}_i \phi_i \quad (1.14)$$

$$B_j(\phi_i) = 0 \quad \forall_i \quad \text{pero no } \forall_j$$

es decir, se cumplen solo algunas condiciones de contorno, y los coeficientes \underline{a}_i son funciones.

Se aplica con esta solución un método de los anteriores en el dominio y, además, se exige que las funciones \underline{a}_i sean tales que se cumplan las condiciones de contorno.

g) Formulación discretizada. Elementos finitos.

Hasta ahora la serie de funciones ϕ_i de los desarrollos (1.11), (1.12) y (1.14) se extiende a todo el dominio. Se puede considerar el dominio subdividido en elementos, sobre los cuales se define la serie de funciones ϕ_i . En estas funciones se suelen considerar como parámetros los grados de libertad que intervienen en el fenómeno que se estudia.

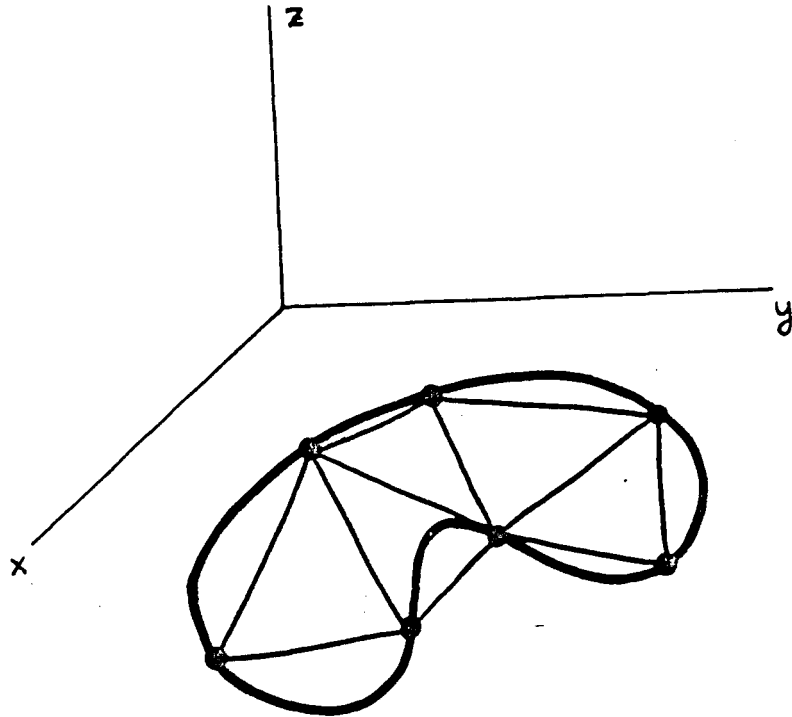


Figura 1.2.

Se impone a los parámetros \underline{a}_i de la frontera del dominio que satisfagan las condiciones de contorno, y se determinan los \underline{a}_i restantes de las formas indicadas anteriormente. La única diferencia es que la integral se puede efectuar como suma de integrales a lo largo de los subdominios.

$$\int_{\Omega} d\Omega = \sum_{i=1}^M \int_{\Omega_i} d\Omega \quad (1.15)$$

Para que esta integral se pueda evaluar, la función compuesta por los trozos ya indicados ha de cumplir las condiciones de continuidad que ya se han explicado anteriormente.

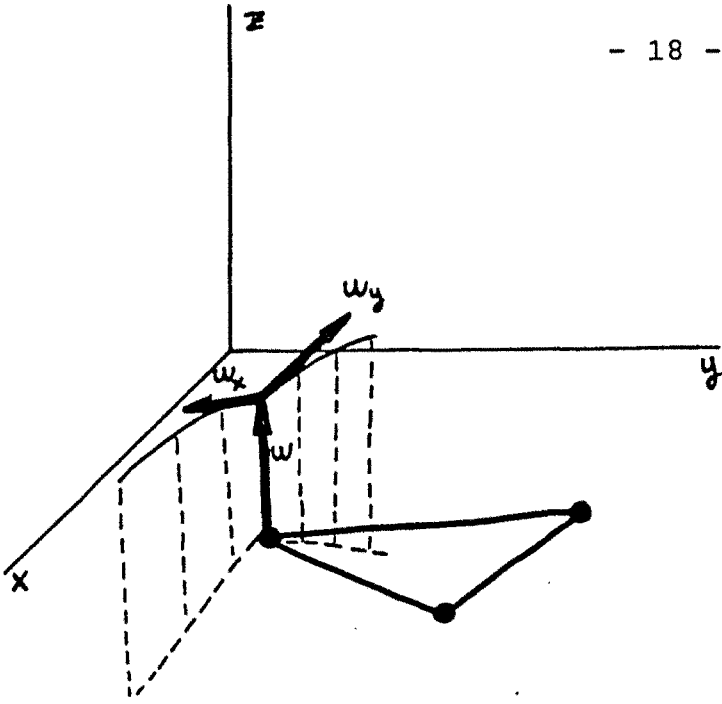


Figura 1.3

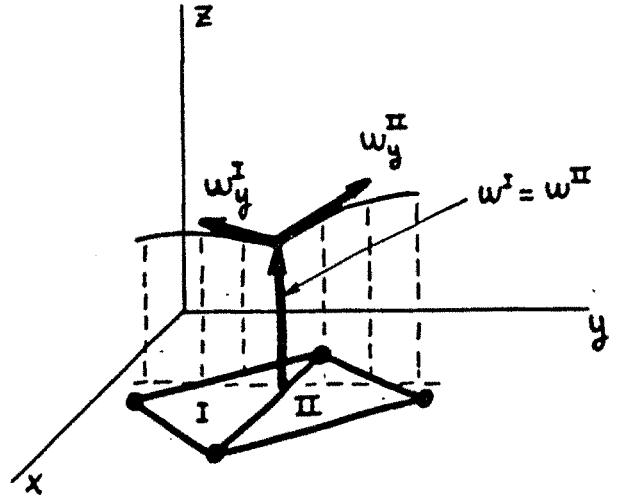


Figura 1.4

Como solamente tienen relación entre sí los grados de libertad que están conectados por medio de algún elemento, la matriz del sistema que resuelve el problema es una matriz en banda (Figura 1.5), siempre que la numeración se haga congruentemente.

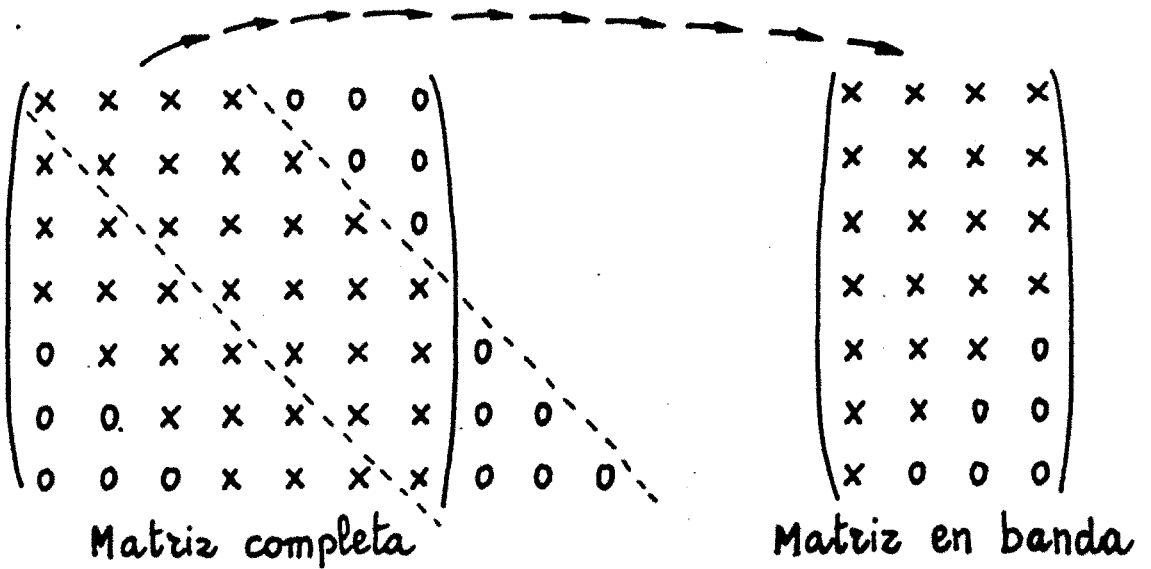


Figura 1.5

Esta formulación en banda permite almacenar menor número de datos, utilizando para la resolución de este sistema de ecuaciones lineales, técnicas específicas.

El método de los elementos finitos tiene gran analogía con las técnicas matriciales de cálculo de estructuras de barras. En realidad este método fue introducido en el ámbito de la ingeniería, como una extensión natural de los procedimientos existentes del cálculo matricial de estructuras. Así se planteó en el trabajo pionero de Turner, Clough, Martin y Topp (1956) sobre el método de los elementos finitos, que se mostró como un procedimiento eficaz para la obtención de rigideces de elementos distintos a las barras, es decir, con más de dos nudos.

3.2.2.- Métodos de la integral de contorno

Dentro de este tipo de planteamiento se pueden señalar dos formas de aplicación:

- a) las funciones aproximadas cumplen la ecuación diferencial.
- b) las funciones de peso cumplen la ecuación diferencial.

En ambos casos son procedimientos que se plantean en fuerzas, también llamados métodos de compatibilidad.

3.2.2.1.- Las funciones aproximadas cumplen la ecuación diferencial.

Se considera el siguiente tipo de solución aproximada del sistema (1.8):

$$\underline{u}^{(N)} = \underline{\phi}_0 + \sum_1^N \underline{a}_i \underline{\phi}_i \quad (1.16)$$

donde $\underline{\phi}_0$ es solución particular de $\underline{A}_1(\underline{u}) = \underline{p}$ y las funciones $\underline{\phi}_i$ son

soluciones de la ecuación homogénea $\underline{A}_1(\underline{u}) = \underline{0}$. $N_i \phi_0$ ni las ϕ_i cumplen las condiciones de contorno.

La ecuación (1.8) queda reducida a:

$$\int_{\Gamma} \underline{\bar{v}}^T \underline{B}(\underline{u}^{(N)}) d\Gamma = 0 \quad (1.17)$$

A las funciones de ponderación no se les impone ninguna condición y por tanto se pueden elegir unas cualesquiera que permitan la integración.

Si el sistema (1.1a) se representa como sigue:

$$\underline{A}_1(\underline{u}) = \underline{p} \text{ en } \Omega \quad (1.1b)$$

$$\underline{B}'(\underline{u}) = \underline{q} \text{ en } \Gamma$$

lo que hay que pesar es el residuo en el contorno: $\underline{B}(\underline{u}) = \underline{B}'(\underline{u}) - \underline{q}$.

Según se tomen las funciones de peso se tienen distintas variantes del método.

- a) Colocación por puntos en el contorno.
- b) Colocación por subdominios en el contorno.
- c) Galerkin en el contorno.
- d) Mínimos cuadrados en el contorno.

Volviendo a considerar la ecuación (1.9):

$$\int_{\Omega} \underline{C}(\underline{v})^T \underline{D}(\underline{u}) d\Omega + \int_{\Gamma} \underline{E}(\underline{\bar{v}})^T \underline{F}(\underline{u}) d\Gamma = 0 \quad (1.9)$$

para todo $\underline{v} \in H_1$ en Ω , $\bar{\underline{v}} \in H_2$ en Γ y $\underline{u} \in H$, si se hace $\underline{u} = \underline{u}^{(N)} = \underline{\phi}_0 + \sum_1^N \underline{a}_i \underline{\phi}_i$ (1.18), donde si $D(\underline{u})$ es equivalente a $\underline{D}_1(\underline{u}) = \underline{p}_1$, $\underline{\phi}_0$ cumple $\underline{D}_1(\underline{\phi}_0) = \underline{p}_1$ y todas las $\underline{\phi}_i$ satisfacen que $\underline{D}_1(\underline{\phi}_i) = 0$.

El problema queda reducido a:

$$\int_{\Gamma} \underline{E}(\bar{\underline{v}})^T \underline{F}(\bar{\underline{u}}^{(N)}) d\Gamma = 0 \quad (1.19)$$

Utilizando esta expresiòn se tiene el planteamiento siguiente:

e) forma variacional del problema.

Segùn sea el tipo de funciones \underline{v} se tendrà un tipo de soluciòn de las màs arriba definidas.

3.2.2.2.- Las funciones de peso cumplen la ecuaciòn diferencial.

Si se parte de la ecuaciòn (1.9) de nuevo de tal forma que siendo $\underline{C}(\underline{v}) = \underline{C}_1(\underline{v}) + \underline{p}_2$ cumple:

$$\underline{C}_1(\underline{\phi}_0) + \underline{p}_2 = \underline{0}$$

$$\underline{C}_1(\underline{\phi}_i) = \underline{0} \quad i \ (i = 1, N)$$

Y los \underline{b} pueden estar prefijados, entonces (1.9) queda reducida a:

$$\int_{\Gamma} \underline{E}(\bar{\underline{v}}^{(N)}) \underline{F}(\underline{u}) d\Gamma = 0 \quad (1.21)$$

Partiendo de la ecuaciòn (1.10):

$$\int_{\Omega} \underline{u}^T \underline{A}(\underline{v}) d\Omega + \int_{\Gamma} \underline{G}(\underline{u})^T \underline{s}(\bar{\underline{v}}) d\Gamma - \int_{\Gamma} \underline{s}(\underline{u})^T \underline{G}(\bar{\underline{v}}) d\Gamma + \int_{\Gamma} \bar{\underline{v}}^T \underline{B}(\underline{u}) d\Gamma = 0 \quad (1.10)$$

para todo $\underline{v} \in H_1$ en Ω y, $\bar{\underline{v}} \in H_2$ en Γ y $\underline{u} \in H$.

Y con unas funciones pesantes del tipo:

$$\underline{v} = \bar{\underline{v}} \approx \underline{v}^{(N)} = \bar{\underline{v}}^{(N)} = \phi_0 + \sum_1^N b_i \phi_i \quad (1.22)$$

Cumpliendo las las restricciones siguientes:

$$(\underline{A}(\underline{v}) = \underline{A}_1(\underline{v}) + \underline{p})$$

$$\underline{A}_1(\phi_0) + \underline{p} = 0$$

$$\underline{A}_1(\phi_i) = 0 \quad i \quad (i=1, N)$$

donde los b_i pueden determinarse a priori.

De esta forma (1.10) queda reducida a:

$$\begin{aligned} & \int_{\Gamma} \underline{G}(\bar{\underline{u}})^T \underline{s}(\bar{\underline{v}}^{(N)}) d\Gamma - \int_{\Gamma} \underline{s}(\bar{\underline{u}})^T \underline{G}(\bar{\underline{v}}^{(N)}) d\Gamma + \\ & + \int_{\Gamma} \bar{\underline{v}}^{(N)T} \underline{B}(\bar{\underline{u}}) d\Gamma = 0 \end{aligned} \quad (1.23)$$

Si la función pesante es una solución fundamental aplicada al contorno, se tiene:

$$\underline{A}(\bar{\underline{v}}^{(N)}) = \delta_i$$

y entonces la ecuación (1.10) se reduce a:

$$\begin{aligned} & u_i + \int_{\Gamma} \underline{G}(\bar{\underline{u}})^T \underline{s}(\bar{\underline{v}}^{(N)}) d\Gamma - \int_{\Gamma} \underline{s}(\bar{\underline{u}})^T \underline{G}(\bar{\underline{v}}^{(N)}) d\Gamma + \\ & + \int_{\Gamma} \bar{\underline{v}}^{(N)T} \underline{B}(\bar{\underline{u}}) d\Gamma = 0 \end{aligned} \quad (1.24)$$

Para resolver (1.17), (1.19), (1.21), (1.23) y (1.24) se utiliza cualquiera de los métodos anteriores.

- a) Formulaciòn discretizada en el contorno. (Elementos de contorno).

Como en el caso del método de los elementos finitos y dado que las funciones soluciòn u pueden ser cualesquiera que permitan las integrales de (1.21), (1.23) y (1.24), se pueden emplear funciones a trozos que dependan de los grados de libertad de la funciòn en el contorno.

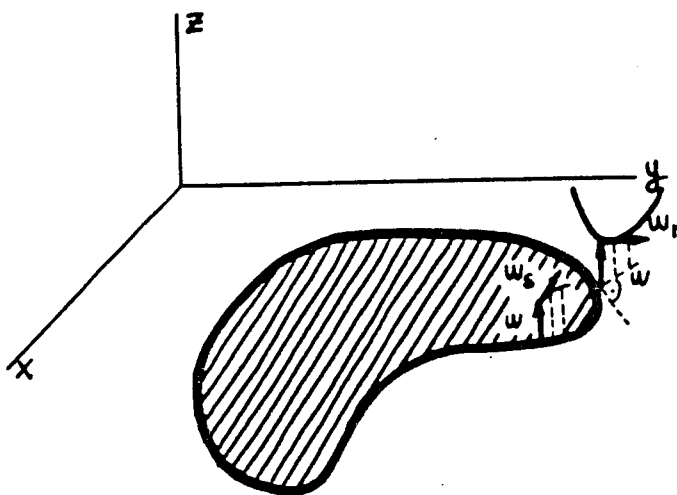


Figura 1.6

Para hallar el valor de la función solución en el dominio se utiliza una función $\bar{v}^{(N)}$ que sea solución fundamental en ese punto. Se obtiene una expresión semejante a (1.24).

En la tabla 1.1 se muestra un resumen de los métodos aquí expuestos:

Series ortogonales {

Navier

Levy

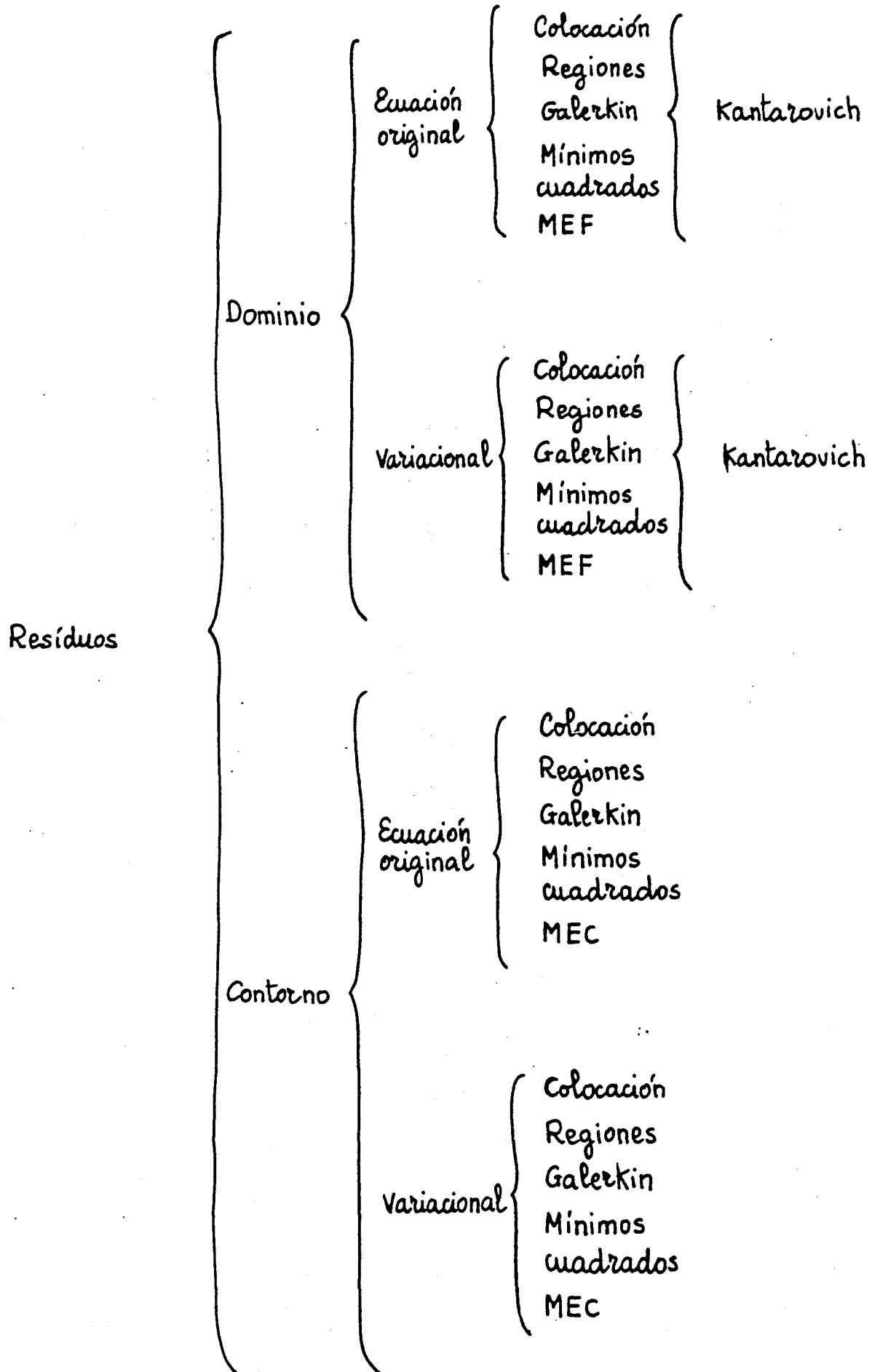


Tabla 1.1

4.- CARACTERISTICAS DEL METODO DE LOS ELEMENTOS FINITOS

El método de los elementos finitos representa una técnica de discretización bien fundamentada en la literatura. Aquí solo se comentan algunos aspectos de interés en el desarrollo de la familia de elementos simples C^1 , en particular los referentes a convergencia.

4.1.- Convergencia de los métodos de Ritz y Galerkin

La convergencia en estos métodos corresponde a una convergencia en energía:

$$a(\underline{u}, \underline{u}) = \int_{\Omega} \underline{u}^T \underline{A}_1(\underline{u}) d\Omega = \langle \underline{A}_1(\underline{u}), \underline{u} \rangle \quad (1.25)$$

A medida que va aumentando el número de funciones (ver 1.3) se va aumentando la base del subespacio S_E^h , y se obtiene una secuencia de soluciones aproximadas, para cada una de las cuales el error es ortogonal a la base de funciones. Si la base de funciones linealmente independiente, tiende a infinito el error es ortogonal a todas las funciones, luego tiende a 0.

La convergencia en la energía no implica la convergencia en la media o norma, ni la convergencia en cada punto.

En el caso en que el operador A sea positivo e inferiormente acotado, la convergencia en la energía implica la convergencia en la media.

$$\langle \underline{A}_1(\underline{u}^{(N)} - \underline{u}), (\underline{u}^{(N)} - \underline{u}) \rangle = C^2 (||\underline{u}^{(N)} - \underline{u}||)^2 \quad (1.26)$$

$$\epsilon > \langle \underline{A}_1(\underline{u}^{(N)} - \underline{u}), (\underline{u}^{(N)} - \underline{u}) \rangle$$

de donde:

$$||\underline{u}^{(N)} - \underline{u}|| < \sqrt{\frac{\varepsilon}{c^2}} \quad (1.27)$$

Para asegurar la convergencia en la energía, es decir que la serie de funciones ϕ_i en S_E^h al aumentar su número tienda a la solución exacta, se han de verificar las siguientes condiciones:

- 1.- Continuidad: si el problema que se está tratando es de orden "m", la continuidad a exigir entre dos elementos, a lo largo del lado común es "m-1", es decir, las funciones han de ser de clase C^{m-1} .
- 2.- Compleción. El subespacio S_E^h generado por las ϕ_i debe de ser completo respecto a la energía. Esto quiere decir que cualquier función admisible puede ser representada con un error (en la energía) tan pequeño como se quiera, con una división de elementos suficientemente fina. O lo que es lo mismo, todos los estados uniformes de la función \underline{u} y de las derivadas parciales de \underline{u} hasta el orden máximo "m" que aparecen en el problema deben de estar contenidos en la aproximación $\underline{u}^{(N)}$. En el caso de polinomios, esta condición se traduce en que $\underline{u}^{(N)}$ contenga en su desarrollo un polinomio completo de grado "m".

Estas condiciones se suelen llamar de deformación nula y de deformación constante, pues estos estados deben de estar recogidos en el desarrollo $\underline{u}^{(N)}$.

Existen dos técnicas para alcanzar la convergencia.

- a) Subdivisión del dominio en particiones que contienen a las anteriores (Refinamiento de malla).
- b) Incremento del grado de la expresión polinómica (Familia de elementos).

4.2.- Ventajas del método de los Elementos Finitos

La gran dificultad de los métodos no discretizados consiste en hallar las funciones ϕ_i (ver 1.3) que cumplan las condiciones de contorno. Estas condiciones son fáciles de satisfacer en el caso de los elementos finitos. Algunos de los grados de libertad correspondientes al contorno son valores especificados. A estos parámetros se les da, antes de resolver el sistema, el valor prefijado que tengan.

Además se amplía la forma de aumentar la aproximación de la solución. Como en los métodos no discretizados se puede ampliar el número de funciones básicas aproximantes, añadiendo más grados de libertad al elemento en uno de los sentidos siguientes:

-más nudos (Figura 1.7a).

-nudos con mayor número de grados de libertad. (Figura 1.7b).

Pero, por otra parte, se puede aumentar el número de gdl, acrecentando la subdivisión uniformemente, en el sentido siguiente:

- a) Todo punto del continuo puede ser contenido en un elemento arbitrariamente pequeño.

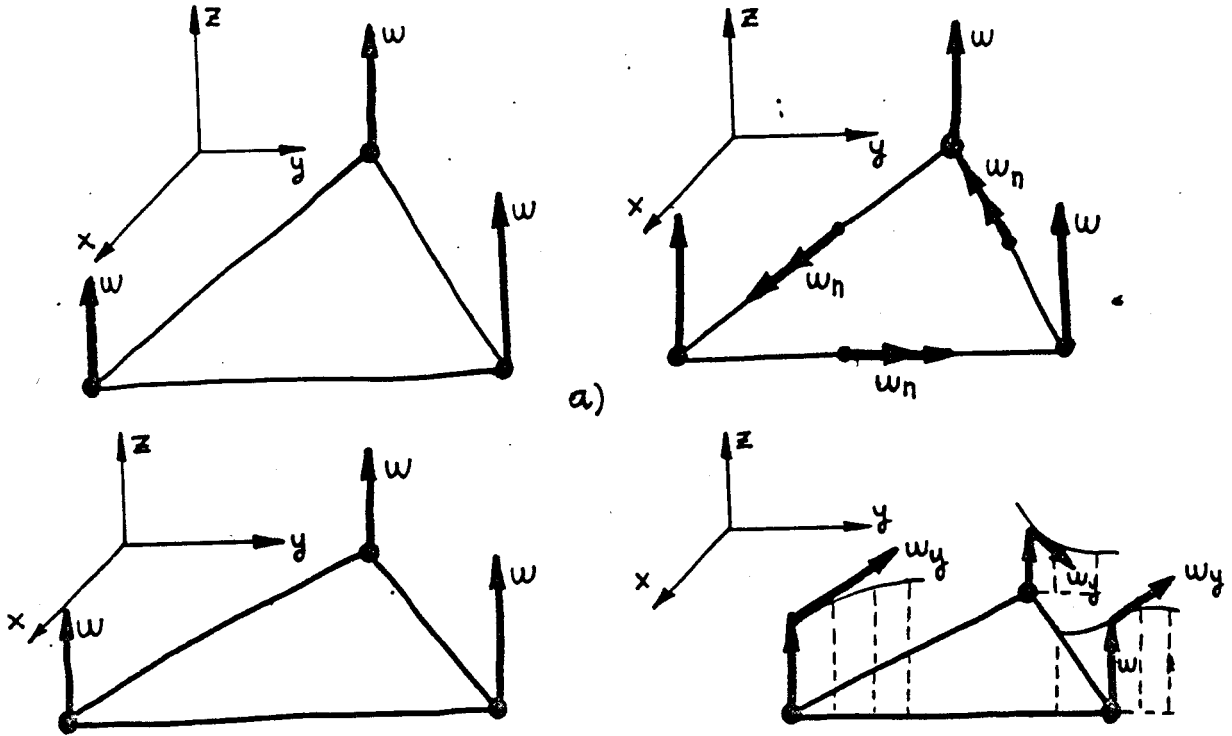


Figura 1.7

- b) Todas las mallas sucesivas estàn contenidas en las anteriores, excepto donde sea necesario adaptarse a un contorno curvo.
- c) La fórmula inicial de interpolación en un elemento no se modifica durante la subdivisión del elemento.

Es de destacar que los parámetros que se hallan en la dis-

cretización de la ecuación diferencial tienen un significado físico.

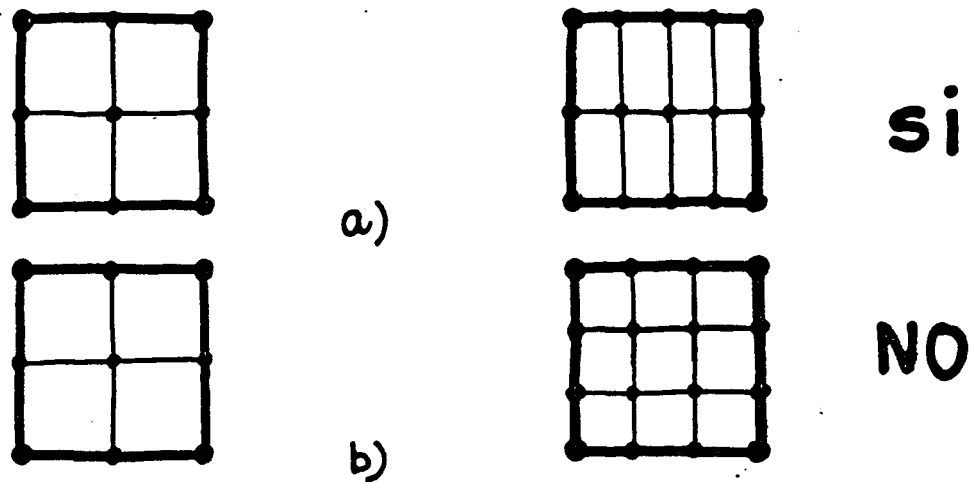


Figura 1.8

La obtención de una matriz en banda es muy importante desde el punto de vista de la resolución numérica del sistema de ecuaciones. Por una parte, la matriz en banda ocupa menos memoria que una matriz llena o completa, y, por otra, el número de operaciones necesarias para resolver el sistema puede ser considerablemente menor. Si n es el número de ecuaciones y m el semiancho de banda, el número de operaciones para resolver el sistema es $n m^2/2$, mientras que para una matriz completa de la misma magnitud es $n^3/6$. En la mayor parte de los casos prácticos este número es considerablemente mayor que el anterior. Es, por esto, muy importante tener en cuenta la numeración de los nudos. Normalmente, para obtener una numeración óptima o casi óptima basta la intuición y el buen sentido del analista, pero para casos difíciles o críticos existen algoritmos mediante los cuales el propio ordenador puede cambiar, optimizándola, una numeración arbitraria.

4.3.- Errores en el método de los elementos finitos

Si no se considera la variable tiempo los errores se pueden agrupar en cuatro tipos:⁴⁶

-de discretización.

-de integración numérica.

-de idealización.

-de redondeo.

a) Errores de discretización

Estos errores dependen de:

-forma de los elementos.

-tipo de funciones de interpolación.

-número y tamaño de los elementos.

-método de búsqueda de los coeficientes de las funciones aproximantes

b) Errores de integración numérica.

Este tipo de errores se comete al no calcular las integrales exactamente.

c) Errores de idealización.

Estos errores aparecen si no es posible representar exactamente el contorno del dominio (Γ). Hay una parte del recinto de

integración $\delta\Omega$ (Figura 1.9) que no se tiene en cuenta.

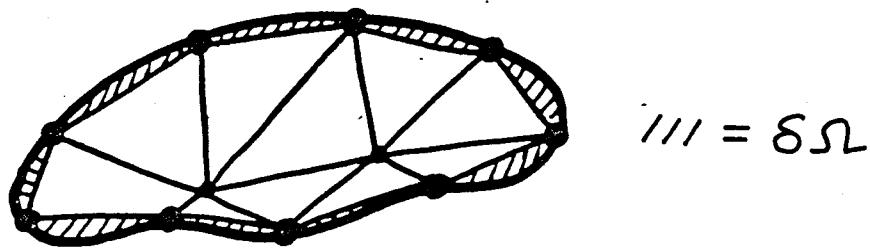


Figura 1.9

Estos errores se cometen también al representar las cargas que actúan sobre un elemento mediante fuerzas en los nudos según los grados de libertad en ellos considerados (Figura 1.10).

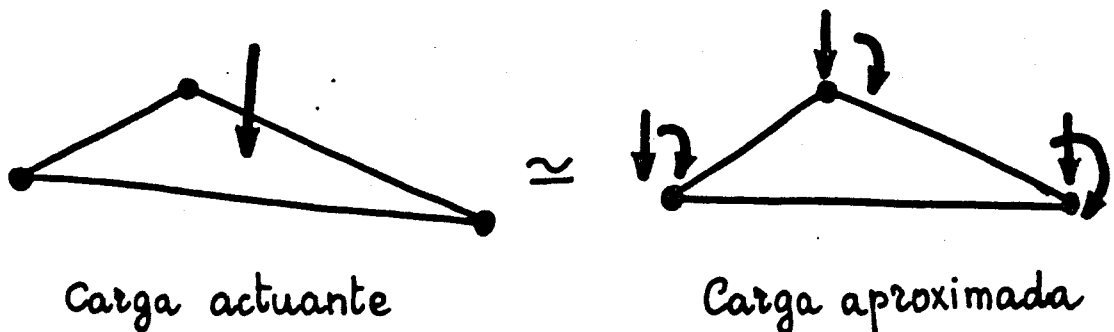


Figura 1.10

d) Errores de redondeo.

Se deben a que el computador sólo puede considerar un número limitado de cifras para cada variable.

A continuación, se comentan algunas de las características de los errores anteriores.

4.3.1.- Errores de discretización

Bajo ciertas condiciones, se puede demostrar que el error de interpolación es del orden del error de aproximación a la solución real.

Se llamará " h_e " a la mayor diagonal o al mayor lado del elemento " e ". Se define " h_e " como el diámetro más grande del círculo que puede inscribirse en el elemento " e ".

" h " y " ρ " son respectivamente los valores máximos y mínimo de h_e y ρ_e considerando todos los elementos de la malla.

Se definen además dos parámetros σ y γ :

$$\sigma = \frac{h}{\rho} \quad (1.28)$$

$$\gamma = \frac{\gamma}{\min h_e} \quad (1.29)$$

Si $\gamma = 1$ quiere decir que h_e es igual para todos los elementos y el mallado se llama "uniforme"; si se efectúa un refinamiento del mallado y existe una constante $\sigma_0 > 0$ tal que para una secuencia de mallas se verifica $\sigma \leq \sigma_0$, es decir, que está acotada la relación entre la máxima diagonal y el mínimo diámetro, el mallado se llama "cuasi-uniforme".

Si cada nudo del mallado amplio es también nudo del mallado fino y existe una constante μ tal que $h_e \leq \mu h_e$ para cada elemento, el refinamiento del mallado se dice "regular".

Con estas premisas y para funciones $\underline{u}(x)$ con suficiente grado de derivabilidad, aproximadas mediante un subespacio de elementos finitos S^h , con funciones básicas capaces de representar exactamente cualquier polinomio de grado K , puede demostrarse que se verifica:

$$\max_{x \in \Omega^e} \|D^s(\underline{u}(x) - \bar{u}^h(x))\| \leq C \frac{h^{k+1}}{\rho^s} \cdot \max_{x \in \Omega^e} \|D^{k+1} \underline{u}(x)\| \quad (1.30)$$

siendo C una constante y $\bar{u}^h(x)$ la función aproximada.

De la expresión (1.30) se deduce que, si se refina la discretización disminuyendo ρ pero sin variar h , la aproximación no sólo no mejora, sino que empeora. Asimismo se deduce la conveniencia de utilizar elementos triangulares y cuadriláteros que sean lo más parecidos posible, respectivamente, a un triángulo equilátero y a un cuadrado.

Para mallados regulares o cuasi-uniformes ρ está acotado en función de h y la expresión (1.30) puede expresarse como:

$$\max_{x \in \Omega^e} \|D^s(\underline{u}(x) - \bar{u}^h(x))\| \leq C h^{k+1-s} \cdot \max_{x \in \Omega^e} \|D^{k+1} \underline{u}(x)\| \quad (1.31)$$

De las expresiones (1.30) y (1.31) se deduce que el error aumenta con el valor de "s", es decir, que es mayor en las derivadas de orden superior que en la función y en las primeras derivadas: La última derivada para la que se puede garantizar la convergencia es la de orden "k", en la que el error varía con la primera potencia de h .

4.3.2.- Errores de integración numérica

Se ha comprobado experimentalmente que la utilización de un menor número de puntos de integración ocasiona un "debilitamiento" del carácter positivo definido de la matriz a invertir, produciéndose un error de signo contrario al de discretización. aun que así se obtienen resultados más aproximados a la solución exacta, sin embargo, se pierde el carácter monotónico de la convergencia.

El orden de integración mínimo será aquél que conserve la convergencia. Para ello se ha de poder reproducir cualquier valor constante arbitrario de las derivadas máximas que aparezcan. Ha de ser posible integrar exactamente el volumen del elemento.

4.3.3.- Errores de idealización

Como se ha dicho, se ocasionan al aproximar el contorno del dominio y las propias condiciones de contorno.

Según las estimaciones de Strang y Fix²⁹ se puede decir:

- 1.- Para polinomios de interpolación de grado uno el error de idealización es del mismo orden que el de discretización.
- 2.- Para polinomios de orden superior a uno, el orden del error de idealización es mayor en el caso de usar elementos de lados rectos que no se acoplen al recinto: sin embargo, estos errores de idealización son de orden superior al de discretización en el caso de elementos isoparamétricos.
- 3.- Si para la representación de las condiciones naturales de

contorno no homogèneas se utilizan funciones de interpolaciòn del mismo orden que en los elementos del dominio, se producen errores de orden superior al de discretizaciòn.

4.3.4.- Errores de redondeo

Los errores hasta ahora estudiados pueden hacerse tan pequeños como se quiera refinando la discretizaciòn. Sin embargo, los errores de redondeo dependen de una potencia negativa de "h", lo que implica que aumentan al disminuir el tamaño de los elementos (cuando disminuyen los demàs errores).

En general, los errores de redondeo no suelen ser significativos, pero hay casos en los que la informaciòn que màs interesa està en las ùltimas cifras que no se consideran.

Hay dos casos en que el error de redondeo puede tener importancia:

- a) Càlculo de las tensiones a partir de los desplazamientos, si la componente de movimiento de sòlido rìgido es mucho mayor que la del desplazamiento relativo de los nudos entre sì, que es el que produce las deformaciones y tensiones. Esta diferencia se puede dar por varias causas, como, por ejemplo, que se tenga una estructura rìgida unida a un soporte flexible o que los elementos sean muy pequeños y, por lo tanto, de gran rigidez.
- b) Resoluciòn del sistema de ecuaciones lineales en la que el error depende del nùmero de operaciones que se hacen sobre

los mismos datos y de la especial sensibilidad que la matriz pueda tener. El número de operaciones es proporcional al cubo de ecuaciones y la sensibilidad depende del parámetro llamado "condición numérica", que es igual al cociente entre el valor propio más grande y el más pequeño de la matriz. A veces se observa el valor del cociente entre el máximo y el mínimo pivotes de la eliminación Gaussiano, que es un sistema bastante conservador.

En general, si el operador diferencial es positivo definido e inferiormente acotado, el problema suele estar bien condicionado.

Además, el Método de los Elementos Finitos se caracteriza por la estabilidad numérica o buen condicionamiento de las ecuaciones que produce.

En elementos triangulares la condición numérica se deteriora mucho más con los ángulos pequeños que con las diferencias de tamaño entre elementos.

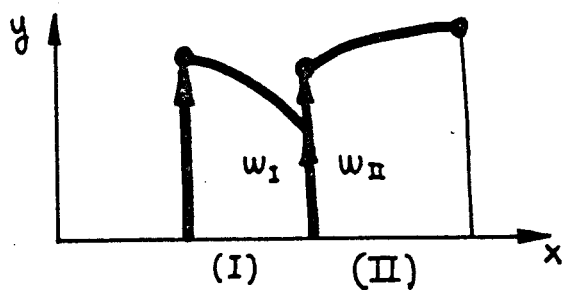
Como la condición numérica no depende del grado de los polinomios es de aconsejar que los elementos sean grandes y ricos (más grados de libertad) ya que así además se obtienen pequeños errores de discretización.

5.- CLASES DE PROBLEMAS QUE SE RESUELVEN CON ELEMENTOS DE CONTINUIDAD C^1

En los problemas de clase C^1 lo que se impone es que la función u y su derivada normal al lado ($\partial u / \partial n$) se encuentren

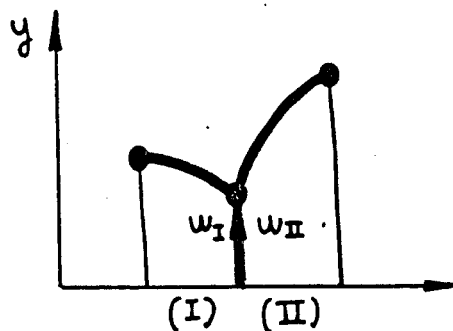
unívocamente especificadas a lo largo de los lados comunes a dos elementos.

En la figura (1.11), y para el caso monodimensional, se presentan algunos casos de continuidad.



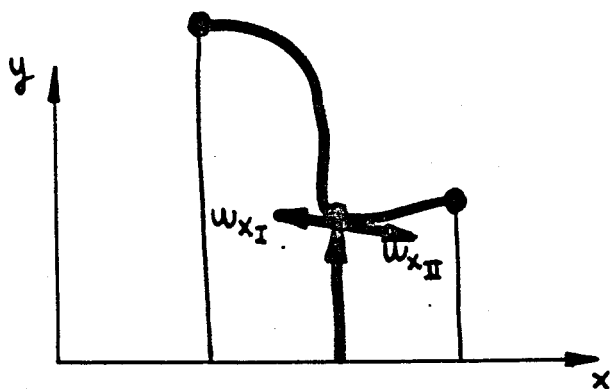
$$w_I \neq w_{II}$$

a) No hay continuidad



$$w_I = w_{II}$$

b) Continuidad C^0



c) Continuidad C^1 $w_I = w_{II}$
 $w_{xI} = w_{xII}$

Figura 1.11

Todos aquellos planteamientos que presenten derivadas segundas en el método integral necesitan, para obtener convergencia monotónica, que el problema se plantee en clase C^1 .

Este es el caso de las placas delgadas cumpliendo la hipótesis de Kirchoff; el dibujo de superficies; el flujo viscoso, y muchos otros problemas.

Así la ecuación variacional de la placa (tipo 1.9b) es:

$$\pi(w) = \frac{D}{2} \iint_{\Omega} \left\{ \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right)^2 \right\} + 2(2-\nu) \left\{ \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} \right)^2 - \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right\} dx dy$$

(1.31)

C A P I T U L O 2

PROBLEMA C¹. FLEXION
DE PLACAS DELGADAS

2.- PROBLEMA C¹. FLEXION DE PLACAS DELGADAS

2.1.- Modelo de placa delgada

Aquí sólo se presentan las ecuaciones finales en función de la elástica ω . La deducción e hipótesis iniciales se hacen en el apéndice 1.

Las expresiones de los momentos y cortantes por unidad de longitud son:

$$\begin{aligned}m_{11} &= -D(\omega_{,11} + \nu \omega_{,22}) \\m_{22} &= -D(\omega_{,22} + \nu \omega_{,11})\end{aligned}\quad (2.1)$$

$$m_{12} = m_{21} = -D(1-\nu)\omega_{,12}$$

$$D = \frac{E h^3}{12(1-\nu^2)} \quad \text{siendo } h \text{ el espesor de la placa.}$$

$$q_1 = -D(\omega_{,111} + \omega_{,122}) + G_2 \quad (2.2)$$

$$q_2 = -D(\omega_{,222} + \omega_{,112}) - G_1$$

Las reacciones de Kirchoff son:

$$r_1 = q_1 + m_{12,2}$$

$$r_2 = q_2 + m_{21,1}$$

La ecuación diferencial de la placa es:

$$\omega_{,1111} + 2 \omega_{,1122} + \omega_{,2222} = \frac{P^*}{D} \quad (2.3)$$

2.2.- Formulación en elementos finitos de la placa

2.2.1.- Planteamiento general

Se utiliza la notación y criterio de signos indicados en la figura 2.1.

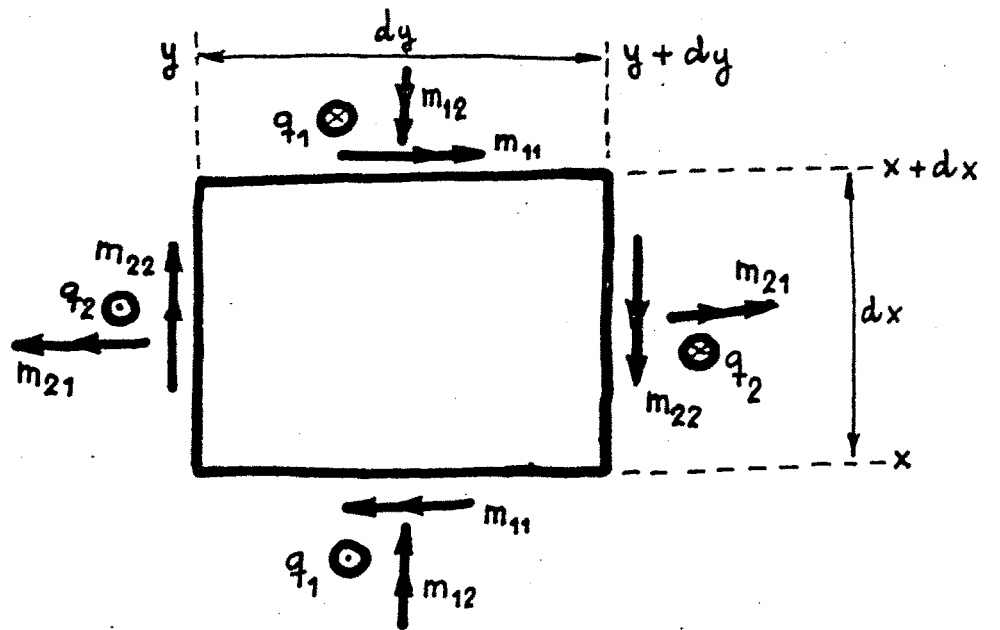
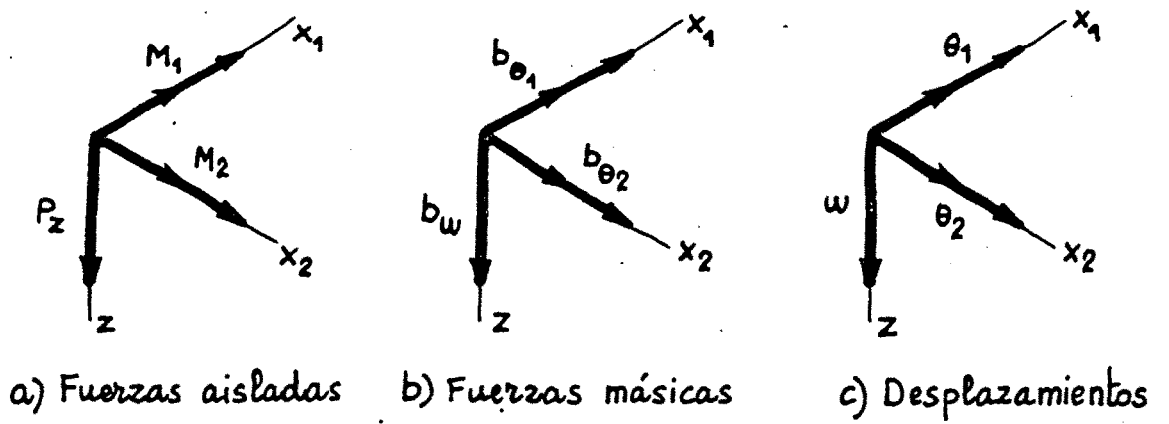


Figura 2.1

En un problema estructural se tiene el siguiente esquema de dependencia:

$$\begin{aligned} & \text{Fuerzas nodales } (\underline{P}_n) \rightarrow \text{Fuerzas actuantes } (\underline{P}, \underline{b}) \rightarrow \\ & \rightarrow \text{Tensiones } (\underline{\sigma}) \rightarrow \text{Deformaciones } (\underline{\varepsilon}) \rightarrow \quad (2.4) \\ & \rightarrow \text{Movimientos } (\underline{u}) \rightarrow \text{Grados de libertad } (u_i) \end{aligned}$$

Con la notación usada en la figura 2.1, se tiene:

$$\text{-vector de campo } \underline{u} = \begin{bmatrix} \omega \\ \theta_1 \\ \theta_2 \end{bmatrix}$$

$$\text{-vector deformación } \underline{\varepsilon} = \begin{bmatrix} K_{11} \\ K_{22} \\ K_{12} \end{bmatrix} \text{ con } K_{ij}$$

las curvaturas.

$$\text{-vector de tensiones } \underline{\sigma} = \begin{bmatrix} m_{11} \\ m_{22} \\ m_{12} \end{bmatrix}$$

$$\text{-vectores de fuerzas } \underline{P} = \begin{bmatrix} M_1 \\ M_2 \\ P \end{bmatrix}, \quad \underline{b} = \begin{bmatrix} b_\omega \\ b_{\theta x} \\ b_{\theta y} \end{bmatrix}$$

Hay que considerar además las condiciones de contorno, tanto esenciales: $\underline{u}_s = (\omega, \theta_n, \theta_t)^T$, como naturales

$\underline{P}_s = (P_\omega, P_{\theta n}, P_{\theta t})^T$, donde n y t indican, respectivamente, las direcciones normal y tangente. Puede haber también un estado de deformación inicial $\underline{\varepsilon}_0 = (K_{11_0}, K_{22_0}, K_{12_0})^T$

2.2.2.- Relaciones entre las distintas magnitudes

Como ya se ha indicado anteriormente el vector de campo ω se pone en función de los grados de libertad de los nudos:

$$\omega = \phi^i u_i \quad (2.5)$$

En el caso de no considerarse la deformación por cortante (Hipótesis de Kirchoff) se tiene:

$$\underline{u} = \begin{bmatrix} \omega \\ \frac{\partial \omega}{\partial x_2} \\ -\frac{\partial \omega}{\partial x_1} \end{bmatrix} \quad (2.6)$$

$$\underline{\varepsilon} = \begin{bmatrix} \frac{\partial^2 \omega}{\partial x_1^2} \\ \frac{\partial^2 \omega}{\partial x_2^2} \\ 2 \frac{\partial^2 \omega}{\partial x_1 \partial x_2} \end{bmatrix} \quad (2.7)$$

La ecuación constitutiva de la placa es:

$$\underline{\sigma} = \underline{D}(\underline{\varepsilon} - \underline{\varepsilon}_0) \quad (2.8)$$

donde \underline{D} es la matriz de elasticidad del material, que en el

caso de una placa isótropa tiene por expresión:

$$\underline{D} = \frac{Eh^3}{12(1-\nu^2)} \begin{bmatrix} 1 & \nu & 0 \\ \nu & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1-\nu}{2} \end{bmatrix} \quad (2.9)$$

con h espesor de la placa, E módulo de Elasticidad y ν el coeficiente de Poisson.

Finalmente la relación entre las fuerzas \underline{P} y las tensiones $\underline{\sigma}$ se hace imponiendo el equilibrio. Para esto se suele aplicar el teorema de los trabajos virtuales, quedando una fórmula del tipo (1.9).

Utilizando las relaciones anteriores se llega a una relación entre fuerzas nodales y desplazamientos en los nudos:

$$\underline{u} = \begin{bmatrix} \omega \\ \frac{\partial \omega}{\partial x_2} \\ -\frac{\partial \omega}{\partial x_1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \phi^i & u_i \\ \frac{\partial \phi^i}{\partial x_2} & u_i \\ -\frac{\partial \phi^i}{\partial x_1} & u_i \end{bmatrix} = \underline{\psi}^i \underline{u}_i \quad (2.10)$$

$$\underline{\epsilon} = - \begin{bmatrix} \frac{\partial^2 \omega}{\partial x_1^2} \\ \frac{\partial^2 \omega}{\partial x_2^2} \\ 2 \frac{\partial^2 \omega}{\partial x_1 \partial x_2} \end{bmatrix} = - \begin{bmatrix} \frac{\partial^2 \phi^i}{\partial x_1^2} \\ \frac{\partial^2 \phi^i}{\partial x_2^2} \\ 2 \frac{\partial^2 \phi^i}{\partial x_1 \partial x_2} \end{bmatrix} \underline{u}_i = \underline{B}^i \underline{u}_i \quad (2.11)$$

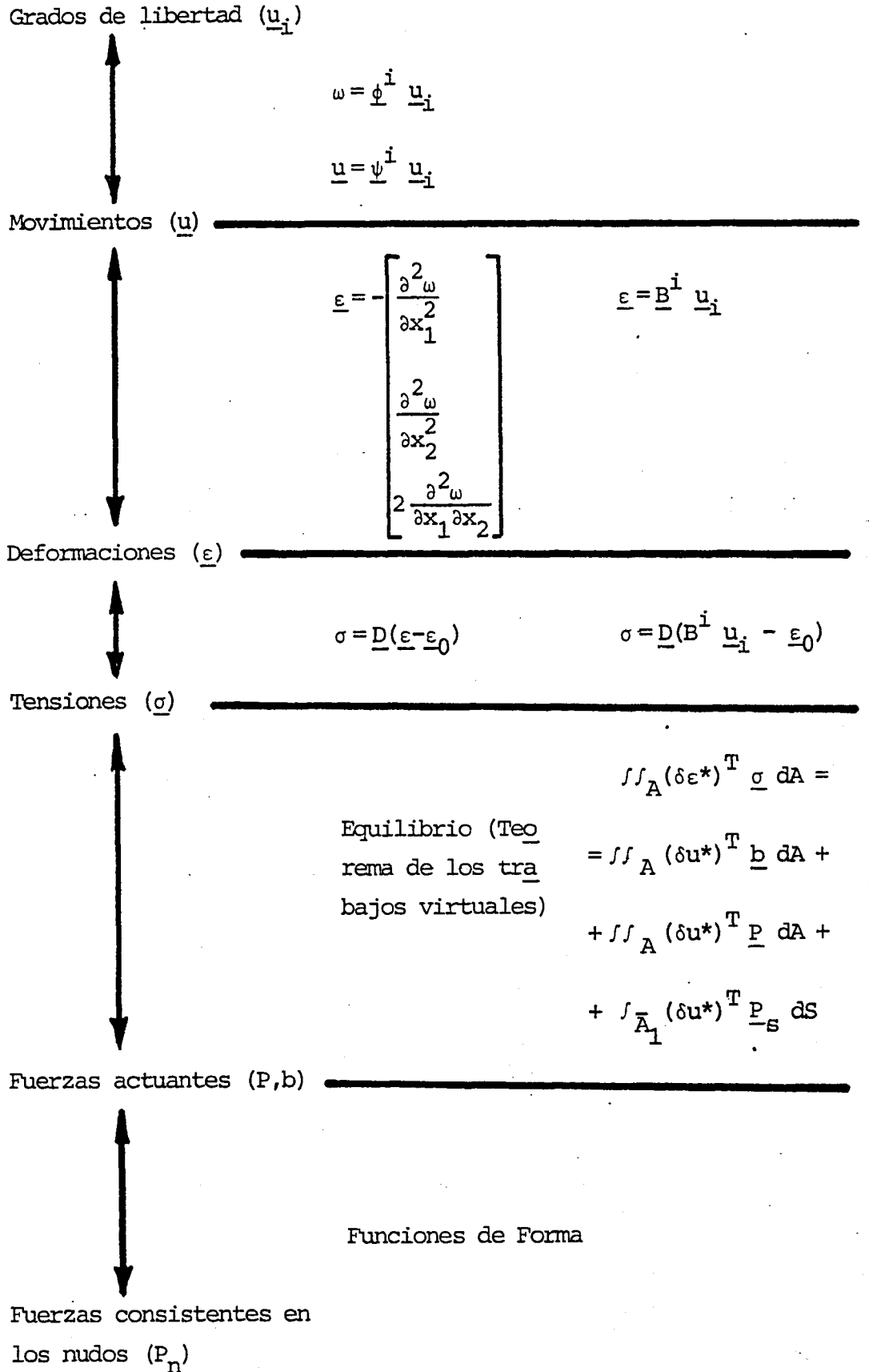


Figura 2.3

$$\underline{\sigma} = \underline{D} \underline{\varepsilon} = \underline{D} \underline{B}^i \underline{u}_i \quad (2.12)$$

Si $\delta u^* = (\partial \omega^*, \partial \theta_{x_1}^*, \partial \theta_{x_2}^*)^T$ es un vector de desplazamientos virtuales, se puede escribir:

$$\begin{aligned} \iint_A (\delta \underline{\varepsilon}^*)^T \underline{\sigma} dA &= \iint_A (\delta u^*)^T \underline{b} dA + \\ &+ \iint_A (\delta u^*)^T \underline{P} dA + \oint_{\bar{A}_1} (\delta u^*)^T \underline{P}_S dS \end{aligned} \quad (2.13)$$

donde A es el dominio y \bar{A}_1 la parte del contorno que tiene impuestas condiciones naturales.

En la figura 2.3 se hace un resumen de lo anterior.

Si en (2.13) se sustituyen las igualdades (2.10), (2.11) y (2.12), y los distintos elementos considerados tienen un dominio A_i ($A_i \in A$), se obtiene la expresión siguiente:

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^{m_i} (\Delta u_i)^T \{ \iint_{A_i} \{ (\underline{B}^i)^T \underline{D} \underline{B}^i \underline{u}_i - (\underline{B}^i)^T \underline{D} \underline{\varepsilon}_0 - \\ - (\underline{\psi}^i)^T \underline{b} - (\underline{\psi}^i)^T \underline{P} \} dA - \int_{\bar{A}_1} (\underline{\psi}^i)^T \underline{P}_S dS \} = 0 \end{aligned} \quad (2.14)$$

Y como los Δu_i son arbitrarios se ha de cumplir que su cofactor ha de ser nulo de donde se obtiene:

$$\underline{K} \underline{u} = \underline{P} \quad (2.15)$$

con

$$\underline{K} = \sum_{i=1}^{m_i} \iint_{A_i} (\underline{B}^i)^T \underline{D} \underline{B}^i dA \quad (2.16)$$

$$\underline{u} = \sum_{i=1}^{mi} \underline{u}_i \quad (2.17)$$

$$\begin{aligned} \underline{P} = & \sum_{i=1}^{mi} \iint_{A_i} ((\underline{B}^i)^T D \epsilon_0^i + (\psi^i)^T \underline{b} + (\psi^i)^T \underline{P}) dA + \\ & + \phi_{\bar{A}_1} (\psi^i)^T \underline{P}_S dS \end{aligned} \quad (2.18)$$

siendo Σ una suma booleana.

En la expresión (2.15) se imponen las condiciones de contorno especificadas.

2.3.- Elementos conformes en problemas de clase C^1 . Teorías de obtención. Estado del arte

Si las funciones de interpolación cumplen las exigencias de continuidad para que se puedan calcular las integrales de las ecuaciones (1.8), (1.9) y (1.10) se tienen elementos conformes.

Sin embargo, se han usado mucho elementos no conformes en la resolución de problemas C^1 . Se debe principalmente a la simplicidad de obtención de estos elementos y a la necesidad de no imponer demasiada continuidad entre ellos, y, en particular, cuando sólo se quieren utilizar las variables básicas estrictas del problema. En el caso de un problema C^1 estas variables son la función y sus derivadas primeras. (Figura 2.A).

Hay que tener en cuenta que esta técnica ha producido muy buenos resultados computacionales en algunos casos, incluso mejores que la de elementos conformes.

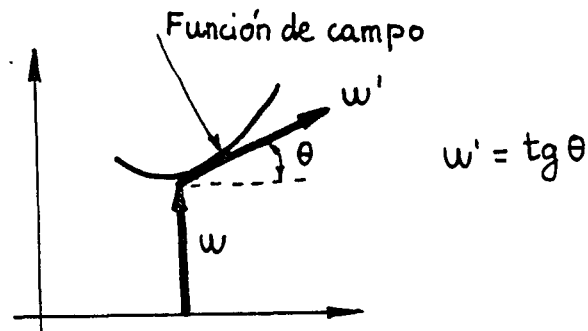


Figura 2.4.- Variables básicas estrictas (w, w') en el caso monodimensional

Para problemas C^1 se han seguido diversos caminos de resolución mediante elementos conformes. Aquí se va a resumir en cinco grandes grupos⁹³:

- 1.- Inmersión en un problema C^0 .
- 2.- Multiplicadores de Lagrange
- 3.- Utilización de funciones racionales.
- 4.- Hiper elementos.
- 5.- Funciones a trozos.

2.3.1- Inmersión en un problema C^0

Esta técnica consiste en rebajar la hipótesis de Kirchoff e incluir la deformación por cortante en la energía de deformación del elemento. Para ello se consideran independientes las deformaciones de flexión y cortante ($\theta_1, \theta_2, \alpha_1, \alpha_2$).

La expresión de la energía potencial total en este caso es:

$$V = \frac{1}{2} \iint_A \underline{\varepsilon}^T \underline{D} \underline{\varepsilon} \, dA + \frac{1}{2} \iint GK \left(\frac{\partial w}{\partial x_1} - \theta_{x_2} \right)^2 \, dA + \frac{1}{2} \iint GK_1 \left(\frac{\partial w}{\partial x_2} - \theta_{x_1} \right)^2 \, dA - \iint_A \underline{w} \underline{b} \, dA \quad (2.19)$$

o que desarrollada es:

$$\begin{aligned}
 V = & \frac{1}{2} \iint_A \{ D_x \left(\frac{\partial \theta x_1}{\partial x_2} \right)^2 - 2D_1 \frac{\partial \theta x_1}{\partial y_2} \frac{\partial \theta x_2}{\partial x_1} + D_y \left(\frac{\partial \theta x_2}{\partial x_1} \right)^2 + \\
 & + D_{xy} \left(\frac{\partial \theta x_1}{\partial x_1} - \frac{\partial \theta x_2}{\partial x_2} \right)^2 \} + \frac{G}{2} \iint_A \{ K_1 \left(\frac{\partial \omega}{\partial k_2} - \theta x_1 \right)^2 + \\
 & + K_2 \left(\frac{\partial \omega}{\partial x_1} - \theta x_2 \right)^2 \} dA - \iint_A \underline{\omega} \underline{b} dA \quad (2.19a)
 \end{aligned}$$

donde $G = \frac{E}{2(1+\nu)}$ (módulo transversal de cortante) y K_1 y K_2 son los factores de corrección del cortante.

En el caso de placa isótropa se tiene:

$$\begin{aligned}
 V = & \frac{Eh^3}{24(1-\nu^2)} \iint_A \left\{ \left(\frac{\partial \theta x_1}{\partial x_2} \right)^2 - 2\nu \frac{\partial \theta x_1}{\partial x_2} \frac{\partial \theta x_2}{\partial x_1} + \right. \\
 & \left. + \left(\frac{\partial \theta x_2}{\partial x_1} \right)^2 + \frac{1-\nu}{2} \left(\frac{\partial \theta x_1}{\partial x_1} - \frac{\partial \theta x_2}{\partial x_2} \right)^2 \right\} dA + \\
 & + \frac{Ehk}{4(1+\nu)} \iint_A \left\{ \left(\frac{\partial \omega}{\partial x_2} - \theta_{x_1} \right)^2 + \left(\frac{\partial \omega}{\partial x_1} + \theta x_2 \right)^2 \right\} dA - \iint_A \underline{\omega} \underline{b} dA \quad (2.19b)
 \end{aligned}$$

este último caso, por ser más fácil el razonamiento, la ecuación (2.19b) se reduce a:

$$(\alpha_1 \underline{k}_1 = \alpha_2 \underline{k}_2) \underline{u} + \underline{p} = 0 \quad (2.20)$$

Si la placa es de espesor pequeño, $\alpha_1 \ll \alpha_2$ y la ecuación queda reducida a:

$$\underline{k}_2 \underline{u} = -\underline{P}/\alpha_2 \quad (2.21)$$

α_2 muy grande (rigidez a esfuerzo cortante), queda:

$$\underline{k}_2 \underline{u} = \underline{0} \quad (2.21a)$$

ecuación que tiene la solución trivial $\underline{u} = \underline{0}$, a no ser que la matriz \underline{K}_2 sea singular. Este problema es el que ha dado en llamarse "Hourglass" y presenta dificultades, especialmente en el caso que se está estudiando de placas delgadas.

Esta objeción se puede obviar haciendo que la matriz \underline{K}_2 sea singular, de forma que el sistema (2.21a) tenga solución. Para ello se emplea la integración numérica reducida selectiva. Es decir, se utilizan menos puntos de integración que el número de variables independientes de forma que los coeficientes de \underline{K}_2 sean dependientes y la matriz sea singular.

Si lo que se resuelve es el sistema (2.20), entonces la matriz \underline{K}_1 se halla con el número adecuado de puntos de integración y \underline{K}_2 mediante integración reducida.

Lo que se consigue de esta forma es dar mayor peso a la matriz \underline{K}_1 de rigidez a flexión, que es lo que ocurre en realidad para placas delgadas, y se evita, así, la sobrevaloración del esfuerzo cortante, que produce una sobrerigidez ("locking effect").

Si se define aspecto de un elemento a la razón entre lado mayor del elemento y el espesor de la losa, para

estar seguros de que este método es efectivo hay que determinar experimentalmente el valor del aspecto límite para el computador que se esté utilizando; es decir, el valor a partir del cual la integral de la energía de deformación por cortante, evaluada con un solo punto de Gauss, enmascara no obstante, a la de flexión.

La sencillez y eficacia computacional de esta técnica es muy grande, por lo que se utiliza con gran profusión.

Otra forma de evitar el problema que aparece en las placas delgadas es utilizar la hipótesis⁴³ de Kirchoff discreta. Esta técnica desarrollada por Fried (1973) entre otros, consiste en introducir la condición de deformación de cortante nula en una serie de puntos del contorno del elemento. De esta forma se consigue que queden relacionadas la flecha (w), y los giros ($\theta_{x_1}, \theta_{x_2}$).

El método es efectivo, pero la programación en computador puede ser complicada.

2.3.2.- Multiplicadores de Lagrange

Como se ve en el resumen de la figura 2.3, los movimientos (w), deformaciones (ϵ) y tensiones (σ) están relacionados por ecuaciones que se introducen en la expresión del teorema de los trabajos virtuales (2.13).

$$\epsilon = \underline{B}^i \cdot \underline{u}_i \quad (2.11)$$

$$\sigma = D(\underline{\epsilon} - \underline{\epsilon}_0) \quad (2.8)$$

$$\iint_A (\delta \underline{\epsilon}^*)^T \underline{\sigma} \, dA = \iint_A (\delta \underline{u}^*)^T \underline{b} \, dA + \int_{\bar{A}_1} (\delta \underline{u}^*)^T \underline{p}_s \, dS$$

(2.13)

En la ecuación (2.13) se introducen además las condiciones de contorno $\omega = \bar{\omega}$, que se representarán por:

$$\underline{u} = \bar{\underline{u}}_s \quad \text{en} \quad A_2 \in A \quad (2.22)$$

Si en vez de incluir en (2.13) las relaciones (2.11) (2.8) y (2.22), se tratan como un problema de mínimos condicionados de (2.13), se tendrá:

$$\begin{aligned} & \iint_A (\delta \underline{\epsilon}^{*T}) \underline{\sigma} \, dA - \iint_A (\delta \underline{u}^{*T}) \underline{b} \, dA - \\ & - \int_{\bar{A}_1} (\delta \underline{u}^{*T}) \underline{p}_s \, dS + \lambda_1 \iint_A (\underline{\epsilon} - \underline{B}^i \underline{u}_i) \, dA + \\ & + \lambda_2 \iint_A (\underline{\sigma} - \underline{D}(\underline{\epsilon} - \underline{\epsilon}_0)) \, dA + \lambda_3 \int_{\bar{A}_2} (\underline{u} - \bar{\underline{u}}_s) \, dS \end{aligned} \quad (2.23)$$

Donde, ahora, $\underline{\sigma}$, $\underline{\epsilon}$ y \underline{u} varían independientemente. Este planteamiento evita el tener que imponer a (2.13) condiciones que a veces son difíciles de expresar, como sucede en un planteamiento en fuerzas del problema, que resulta, así, en general, más sencillo.

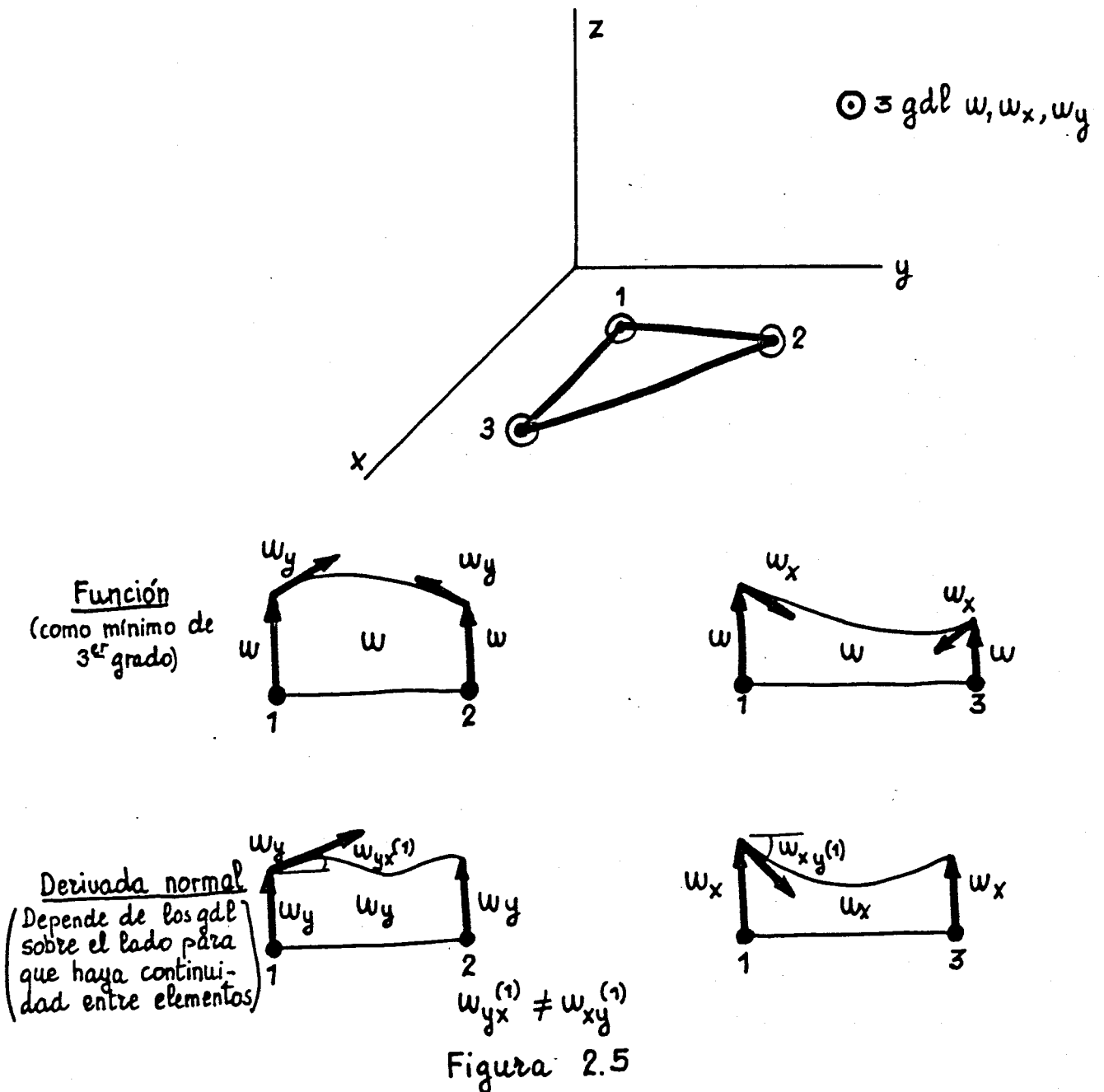
Según el tipo de variables que se consideren independientes, dónde se consideren independientes (dominio o contornos de elementos), y las integraciones por partes que se realicen, se tiene un planteamiento distinto del funcional (2.23), pero aquí no se va a indicar.

De todas formas, para que el problema no caiga dentro del problema C^1 en (2.23), habrá que integrar por partes aquellas integrales que contengan derivadas de orden superior al primero:

$$\iint_A (\underline{\epsilon} - \underline{B}^i \underline{u}_i) \, dA \quad (2.24)$$

2.3.3.- Utilización de polinomios con continuidad C^1

Según demostraron Irons y Drapper⁵⁹, no se pueden con- seguir elementos simples triangulares o cuadrangulares cu- yas funciones de forma sean un único polinomio en todo su do- minio y que cumplan la continuidad C^1 . Esta demostración se basa en que la segunda derivada cruzada no coincide según to- das las direcciones, lo que implica que la función no sea un polinomio. (Figura 2.5).



Para seguir utilizando polinomios, hay que conseguir que esa derivada segunda cruzada sea constante (hiperelementos), o considerar elementos simples añadiendo funciones racionales que hacen variar radialmente esa derivada, o tomar funciones a trozos. (Figura 2.6).

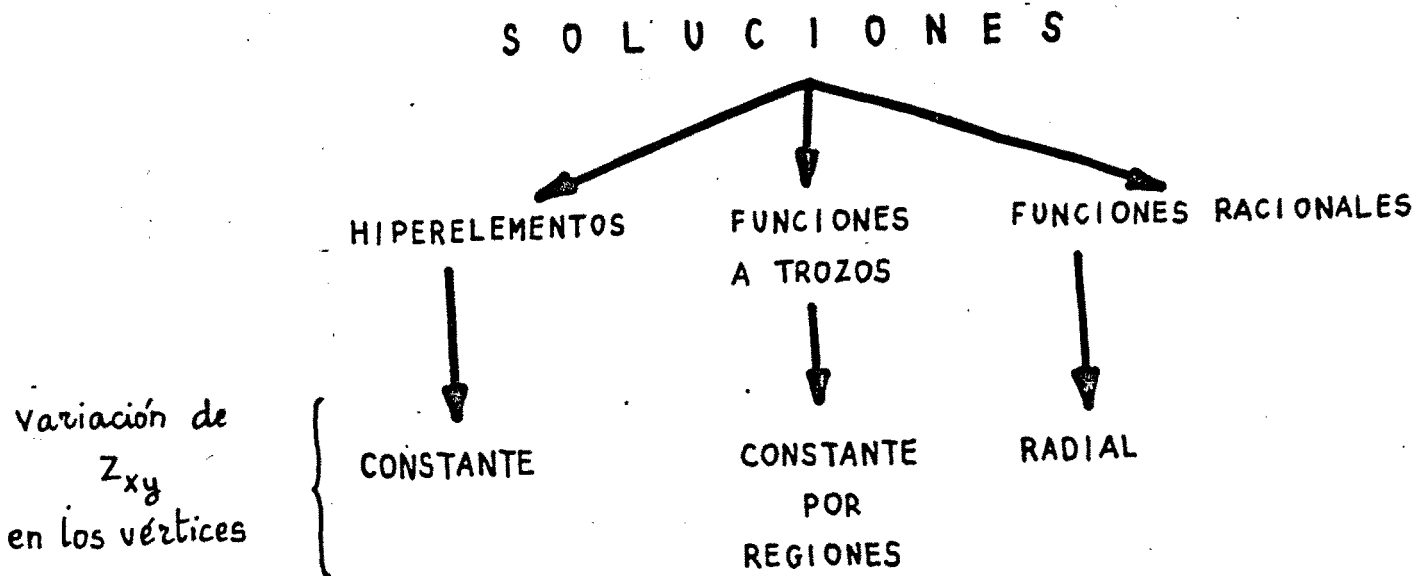


Figura 2.6

2.3.4. Utilización de funciones racionales

Para la explicación se considerará el caso de polinomios de tercer grado.

Según se puede ver en la figura 2.5, para un polinomio de tercer grado la función está definida para elementos simples. La función derivada normal, que será de segundo grado, necesita para su definición tres coeficientes y solo se tienen dos: las derivadas normales en los vértices.

La función:

$$\epsilon_1 = \frac{L_1 L_2^2 L_3^2 (1 + L_1)}{(L_1 + L_2)(L_1 + L_3)} \quad (2.25)$$

tiene la propiedad de ser cero su valor y el de la derivada normal a lo largo de los lados (1-2) y (1-3). Sin embargo, en el tercer lado (2-3) el valor de la función es cero y la pendiente normal tiene una variación parabólica. (Figura 2.7).

Si al polinomio de tercer grado se la añaden las funciones:

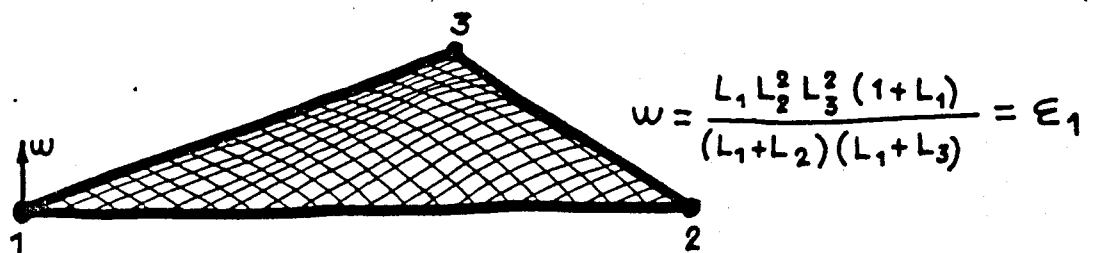


Figura 2.7

$$\epsilon_1 = \frac{L_1 L_2^2 L_3^2 (1 + L_1)}{(L_1 + L_2)(L_1 + L_3)} \quad (2.26)$$

$$\epsilon_2 = \frac{L_2 L_3^2 L_1^2 (1 + L_2)}{(L_2 + L_3)(L_2 + L_1)} \quad (2.27)$$

$$\epsilon_3 = \frac{L_3 L_1^2 L_2^2 (1 + L_3)}{(L_3 + L_1)(L_3 + L_2)} \quad (2.28)$$

se pueden fijar los valores de la derivada normal en todos los lados y obtener así un elemento conforme. El valor de la derivada normal se suele precisar en el centro de cada lado, dando lugar a un nudo con un grado de libertad. (Figura 2.8).

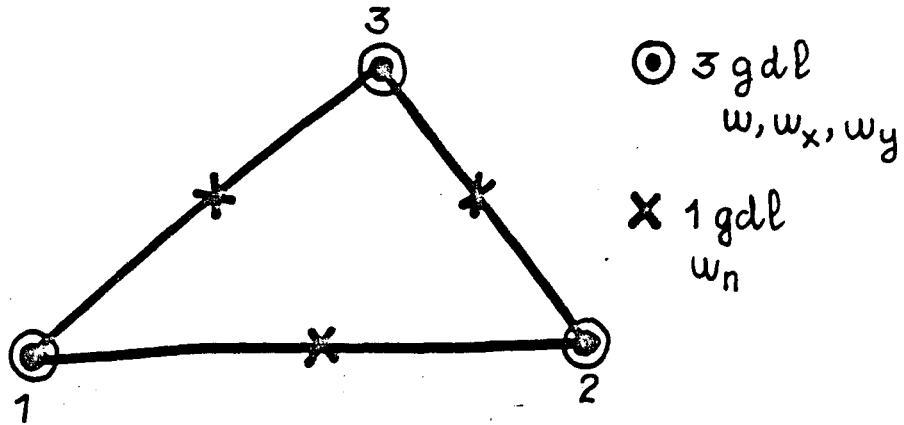


Figura 2.8

La función Z_{xy} en cada vértice varía según la dirección de aproximación.

El mismo razonamiento se puede seguir para funciones de forma que contengan polinomios completos de orden mayor al tercero.

2.3.5.- Hiperelementos

Este tipo de solución consiste en considerar en cada nudo más grados de libertad en los vértices, fijando un valor constante para la derivada cruzada Z_{xy} . En este caso se consigue continuidad C^1 mediante polinomios completos. Estos elementos que son de gran complejidad, una vez resueltos son muy manejables y de gran precisión. Tienen la posibilidad de formar familias jerárquicas que pasen gradualmente de unos elementos a otros con suave incremento de los grados de libertad, lo que asegura un comportamiento más parecido al real. Un estudio muy detallado sobre estos elemen

tos fue hecho por Díaz del Valle y Samartín³³ en 1980. En la figura 2.9 se presentan algunos de los elementos allí estudiados.

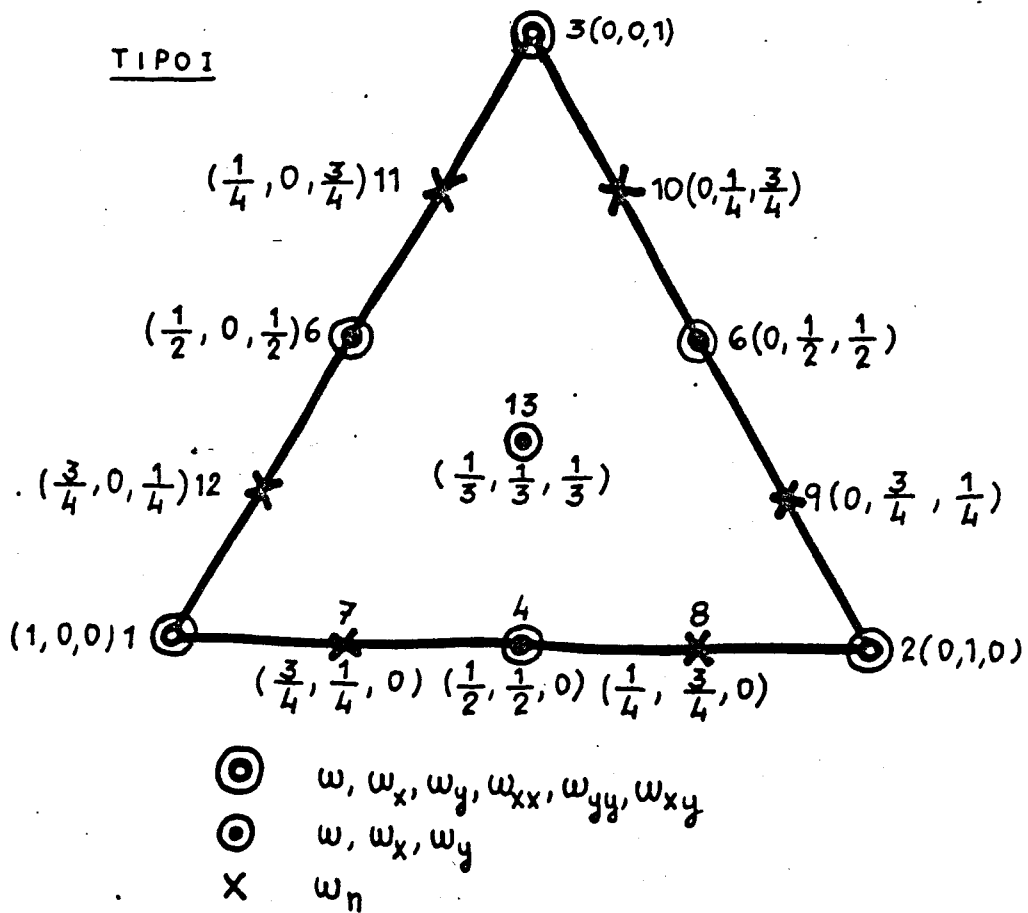


Figura 2.9

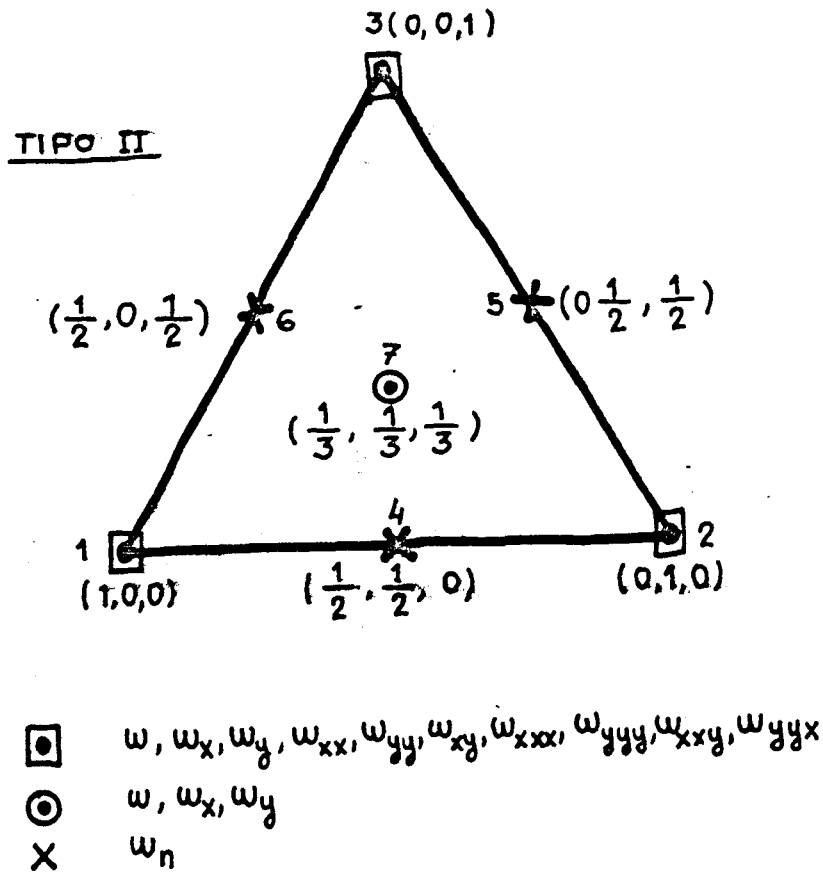


Figura 2.10

2.3.6.- Funciones a trozos

Esta solución aborda el problema de la variación de Z_{xy} en los vértices, tomando en ellos distintos polinomios. Se divide el elemento en tres subelementos o triángulos parciales (Figura 2.10), al introducir un nuevo nudo interior coincidente por simplicidad con el c. d. g.

En esencia lo que se hace es crear una función de forma para cada subelemento. Se ponen tantos gdl en el lado externo de forma que haya continuidad C^1 . Se eliminan los grados de libertad internos imponiendo por lo menos continuidad C^1 entre los subelementos.

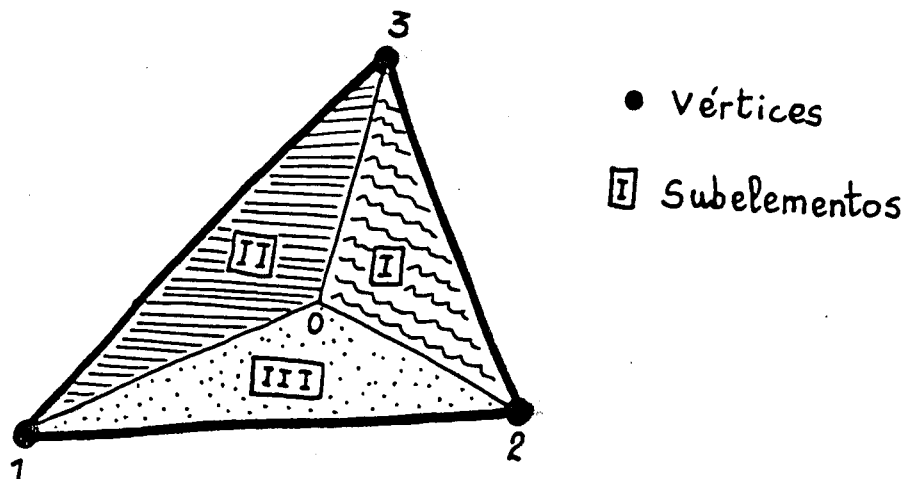


Figura 2.11

2.4.- Crítica

2.4.1.- Inmersión en un problema C^0

Ya se ha indicado el problema del Hourglass y la forma de evitarlo.

Aunque los puntos de integración son menos en la matriz de rigidez a cortante, hay que señalar la necesidad de una gran división para obtener buenos resultados.

Para casos de placas de muy pequeño espesor se dan problemas de mal condicionamiento de las matrices. Para saber si se va a dar o no dicho mal condicionamiento hay que atender al aspecto de los elementos.

Para estudiar la convergencia se utilizan "patch-test" especiales, ya que el criterio de imposición de curvatura constante no se puede dar.

La convergencia depende del tipo de malla utilizada.

En la extensión a láminas de revolución, este método ha tenido problemas.

2.4.2.- Multiplicadores de Lagrange

Aumenta mucho el número de incógnitas. Además complica el problema de resolución del sistema ya que las matrices que aparecen no son definido-positivas.

2.4.3.- Utilización de funciones racionales

Al no utilizarse polinomios completos, la convergencia empeora añadiendo esos términos de funciones racionales.

Es difícil la generalización a láminas y hay que considerar que los vértices son puntos singulares de la derivada segunda cruzada.

Al no ser polinomios todas las funciones la integración es más difícil y no se puede efectuar exactamente mediante integración numérica.

2.4.4.- Hiperelementos

Es difícil la extensión a láminas pues aparecen grados de libertad de complicado sentido físico.

Por el mismo motivo, las condiciones de contorno son de engorrosa imposición.

La interpretación física de los resultados es más complicada.

El cambio de material o de características geométricas de un elemento a otro no se puede reflejar ya que la curvatura es constante en los vértices.

2.4.5.- Funciones a trozos

El ensamblaje ha de hacerse a nivel de grados de libertad, ya que los nudos tienen distinto número de grados de libertad.

Su estudio completo se realiza más adelante por ser el objeto de esta Tesis.

CAPITULO 3

OBJETIVO DE LA TESIS

3.- OBJETIVO DE LA TESIS

3.1.- Familia de elementos simples y conformes

Se trata de obtener una familia jeràrquica de elementos finitos. Esta jerarquía de elementos finitos, que se ordena de menor a mayor complejidad, supone el hecho de que los elementos de rango superior incluyen a los de inferior. En particular, las funciones de forma constituyen polinomios completos de órdenes crecientes. Con esto se consigue el objetivo de poder utilizar funciones de forma más complejas con un mismo esquema de planteamiento del problema.

Como se ha indicado se utilizan como funciones de forma polinomios completos, y los grados de libertad van a ser tales que el elemento sea simple. Por consiguiente, sólo se consideran los grados de libertad correspondientes a la flecha y a los dos giros (w, w_n, w_s) en los vértices. Asimismo, se adoptan únicamente los grados de libertad función y giros normal y longitudinal (w, w_n, w_s) en los nudos de los lados. Es interesante señalar, en consecuencia con los estudios numéricos de (95), que la consideración de varios nudos en un lado, con alguno de los tres grados de libertad señalados, o de un solo nudo con mayor número de grados de libertad no modifica la aproximación del problema. No produce alteraciones tampoco el que en ese único nudo se consideren derivadas de orden superior al primero. (Figura 3.1).

La elección de elementos triangulares se debe al hecho de que su forma permite una adecuada adaptación a los recintos de forma complicada.

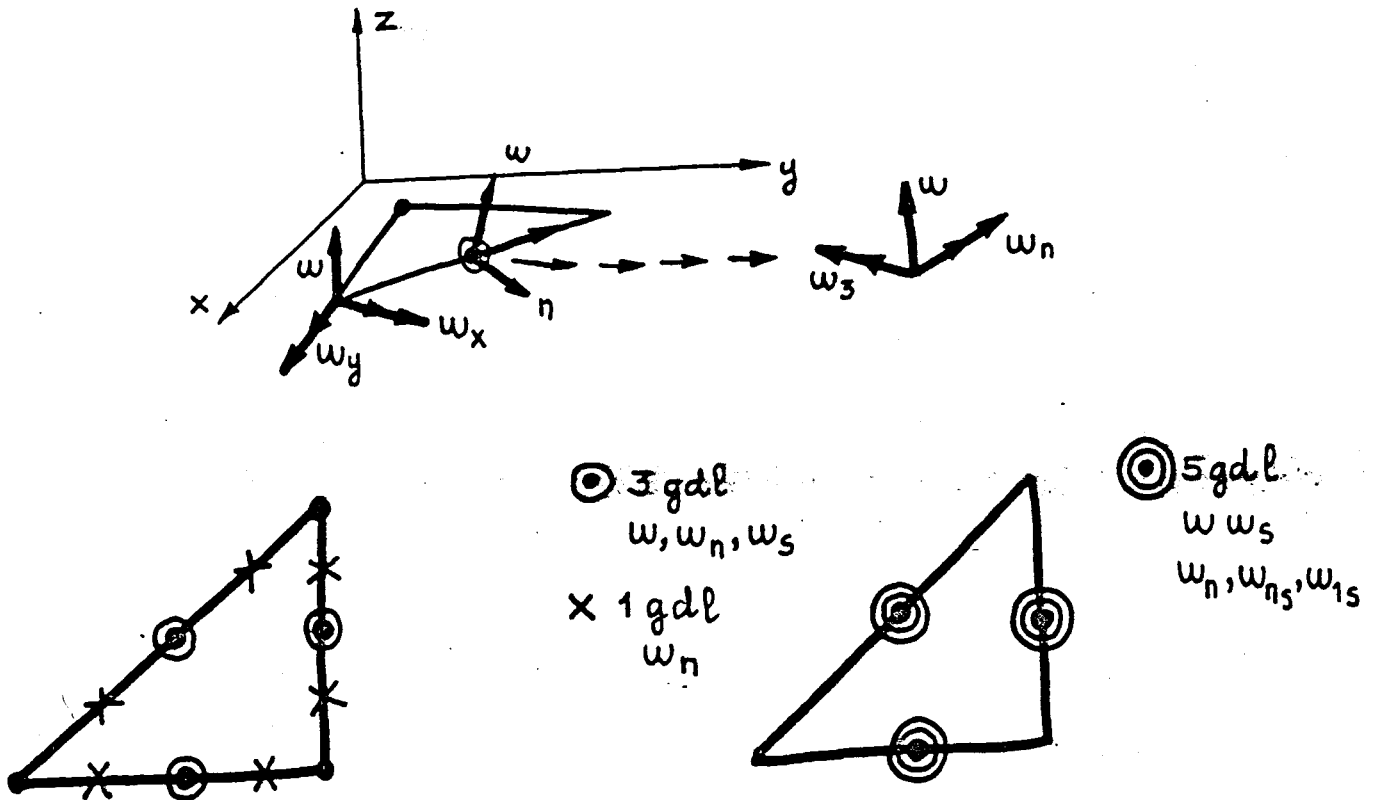


Figura 3.1.

3.2.- Interès e importància Las ventajas de este método son:

- La integración numérica es fácil al tratarse de polinomios.
- Los elementos son simples, pues la consideración de derivadas cruzadas en los lados no implica condiciones adicionales, ya que deben de ser continuas físicamente hablando. Esto hace que su extensión a estructuras laminares sea sencilla (simple adición de las matrices de extensión (laja) y flexión (placa)).

La imposición de continuidad C^1 a lo largo de los lados implica convergencia monotónica de la solución.

Contrariamente a lo que ocurre en los hiperelementos, las curvaturas no han de coincidir entre un elemento y otro, y, así, el cambio de material o geometría (espesor) de un elemento a otro no produce perturbaciones.

Es fácil la imposición de las condiciones de contorno, puesto que su sentido físico es sencillo.

No se añaden términos de grado superior al del mayor polinomio completo, ya que ello no mejora la bondad de la convergencia.

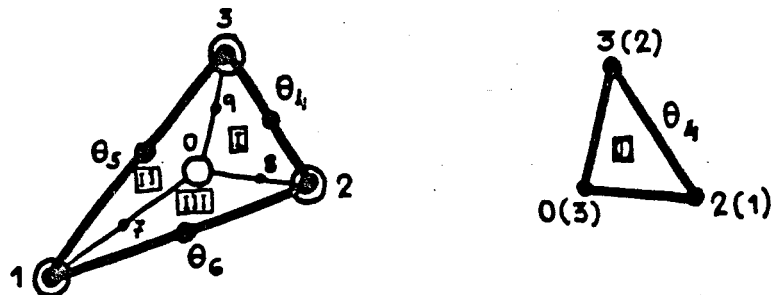
Se crea una familia jerárquica de elementos que permite la utilización de polinomios de diferente grado como funciones de interpolación. Con esto se permite que la transición entre elementos sea gradual. Por otra parte, se sabe que una función de mayor grado, a igualdad de gdl, produce mejores resultados.

3.3.- Resumen histórico

La idea de utilizar polinomios a trozos fue desarrollada por Clough y Tocher²⁴ (1965) en elementos triangulares y posteriormente extendida a cuadriláteros por Clough y Felippa²³ (1968).

Los elementos simples han sido muy utilizados y hay muchos tipos de elementos que siguen las técnicas indicadas en 2.3. Batoz y otros,¹⁰ hicieron un estudio sobre el DKT (teoría discreta de Kirchhoff), el HSM (modelo de teoría híbrida) y SRI (integración reducida selectiva), indicando las posibilidades de cada uno.

El elemento triangular de Clough y Felippa,³⁸ que utiliza coordenadas baricéntricas, se representa en la figura 3.2.



a) Subelementos constitutivos del triángulo

b) Numeración local del subelemento I

- ⊙ En los nudos 1, 2, 3 existen los grados de libertad (w, θ_x, θ_y) . En el centro de gravedad 0, existen los grados de libertad (w, θ_x, θ_y)
- En los puntos medios de los lados, los giros alrededor de los mismos $\theta_4, \theta_5, \theta_6$

Elemento triangular conforme de Clough y Felippa

Figura 3.2

La expresión de las flechas es:

$$\begin{bmatrix} w^{(1)} \\ w^{(2)} \\ w^{(3)} \end{bmatrix} = \left(\begin{bmatrix} \phi_e^{(1)} \\ \phi_e^{(2)} \\ \phi_e^{(3)} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \phi_0^{(1)} \\ \phi_0^{(2)} \\ \phi_0^{(3)} \end{bmatrix} \underline{\underline{L}} \right) \underline{\underline{r}} = \begin{bmatrix} \hat{\phi}^{(1)} \\ \hat{\phi}^{(2)} \\ \hat{\phi}^{(3)} \end{bmatrix} \underline{\underline{r}} \quad (3.1)$$

y la de las curvaturas es:

$$\underline{x}^{(i)} \begin{bmatrix} w_{xx}^{(i)} \\ w_{yy}^{(i)} \\ 2w_{xy}^{(i)} \end{bmatrix} = \underline{T}^{(1)} \underline{r} \quad (3.2)$$

Para el subelemento 3 la ecuación (3.1) da $w^{(3)} = \hat{\underline{\phi}}^{(3)} \underline{r}$ donde $\hat{\underline{\phi}}^{(3)}$ está compuesta por:

$$\hat{\underline{\phi}}^{(3)} = \hat{\phi}_{w1}^{(3)} \hat{\phi}_{\theta x1}^{(3)} \hat{\phi}_{\theta y1}^{(3)} \hat{\phi}_{w2}^{(3)} \hat{\phi}_{\theta x2}^{(3)} \hat{\phi}_{\theta y2}^{(3)} \hat{\phi}_{w3}^{(3)} \hat{\phi}_{\theta x3}^{(3)} \hat{\phi}_{\theta y3}^{(3)} \hat{\phi}_{\theta 4}^{(3)} \hat{\phi}_{\theta 5}^{(3)} \hat{\phi}_{\theta 6}^{(3)}$$

que, a su vez, se pueden expresar (en términos de dimensiones y coordenadas baricéntricas del triángulo completo) como sigue:

$$\begin{aligned} \hat{\phi}_{w1}^{(3)} &= L_1^2 (3-2L_1) + 6\mu_3 L_1 L_2 L_3 + L_3^2 \{3(\lambda_2 - \mu_3)L_1 + (2\mu_3 - \lambda_2)L_3 - 3\mu_3 L_2\} \\ \hat{\phi}_{\theta x1}^{(3)} &= L_1^2 (b_2 L_3 - b_3 L_2) + (b_1 - b_3 \mu_3) L_1 L_2 L_3 + \\ &+ \frac{1}{6} L_3^2 \{3(b_2 \lambda_2 + b_3 \mu_3 - 2b_1)L_1 + 3(b_3 \mu_3 - b_1)L_2 + (3b_1 - b_2 \lambda_2 - 2b_3 \mu_3)L_3\} \\ \hat{\phi}_{\theta w2}^{(3)} &= L_2^2 (3-2L_2) + 6\lambda_3 L_1 L_2 L_3 + L_3^2 \{3(\mu_1 - \lambda_3)L_2 + (2\lambda_3 - \mu_1)L_3 - 3\lambda_3 L_1\} \\ \hat{\phi}_{\theta x2}^{(3)} &= L_2^2 (b_3 L_1 - b_1 L_2) + (b_3 \lambda_3 - b_2) L_1 L_2 L_3 + \\ &+ \frac{1}{6} L_3^2 \{3(2b_2 - b_3 \lambda_3 - b_1 \mu_1)L_2 + 3(b_2 - b_3 \lambda_3)L_1 + (-3b_3 - b_1 \mu_1 + 2b_3 \lambda_3)L_3\} \\ \hat{\phi}_{w3}^{(3)} &= L_3^2 \{3(1+\mu_2)L_1 + 3(1+\lambda_1)L_2 + (1-\mu_2-\lambda_1)L_3\} \\ \hat{\phi}_{\theta x3}^{(3)} &= \frac{1}{6} L_3^2 \{3(3b_1 + b_2 + b_1 \lambda_1)L_2 + (b_2 \mu_2 - b_1 \lambda_1)L_3 - 3(b_1 + 3b_2 + b_2 \mu_2)L_1\} \\ \hat{\phi}_{\theta 4}^{(3)} &= -\frac{4A}{3\Gamma} \{6L_1 L_2 L_3 + L_3^2 (5L_2 - 3)\} \end{aligned} \quad (3.3)$$

$$\hat{\phi}_{\theta 5}^{(3)} = -\frac{4A}{3L_1}\{L_3^2(3L_2L_3)\} \quad ; \quad \hat{\phi}_{\theta 6}^{(3)} = -\frac{4A}{3L_2}\{L_3^2(3L_1-L_3)\}$$

Para obtener $\hat{\phi}_{\theta y_i}^{(3)}$ ($i = 1, 2, 3$) se cambian todas las b 's de la expresiòn $\hat{\phi}_{\theta x_i}^{(3)}$ por a 's.

Para otros subelementos se hace permutaciòn circular de los subìndices.

3.4.- Generalizaciòn de las funciones a trozos

3.4.1. Desarrollo analìtico

Utilizando la idea de Clough y Felippa³⁸ se planteò un elemento con polinomios de mayor grado, en este caso de grado quìntico. La expresiòn de la funciòn de interpolaciòn en cada subtriàngulo se indica a continuaciòn:

$$\begin{aligned} p = & \alpha_{500}L_1^5 + \alpha_{050}L_2^5 + \alpha_{005}L_3^5 + \alpha_{410}L_1^4L_2 + \alpha_{041}L_2^4L_3 + \\ & + \alpha_{104}L_1L_3^4 + \alpha_{014}L_2L_3^4 + \alpha_{401}L_1^4L_3 + \alpha_{140}L_1L_2^4 + \\ & + \alpha_{320}L_1^3L_2^2 + \alpha_{032}L_2^3L_3^2 + \alpha_{203}L_1^2L_3^3 + \alpha_{302}L_1^3L_3^2 + \\ & + \alpha_{230}L_1^2L_2^3 + \alpha_{311}L_1^3L_2L_3 + \alpha_{131}L_1L_2^2L_3 + \alpha_{113}L_1L_2L_3^3 + \\ & + \alpha_{221}L_1^2L_2^2L_3 + \alpha_{122}L_1L_2^2L_3^2 + \alpha_{212}L_1^2L_2L_3^2 \end{aligned} \quad (3.4)$$

Los grados de libertad considerados son los que se indican en la figura 3.3.

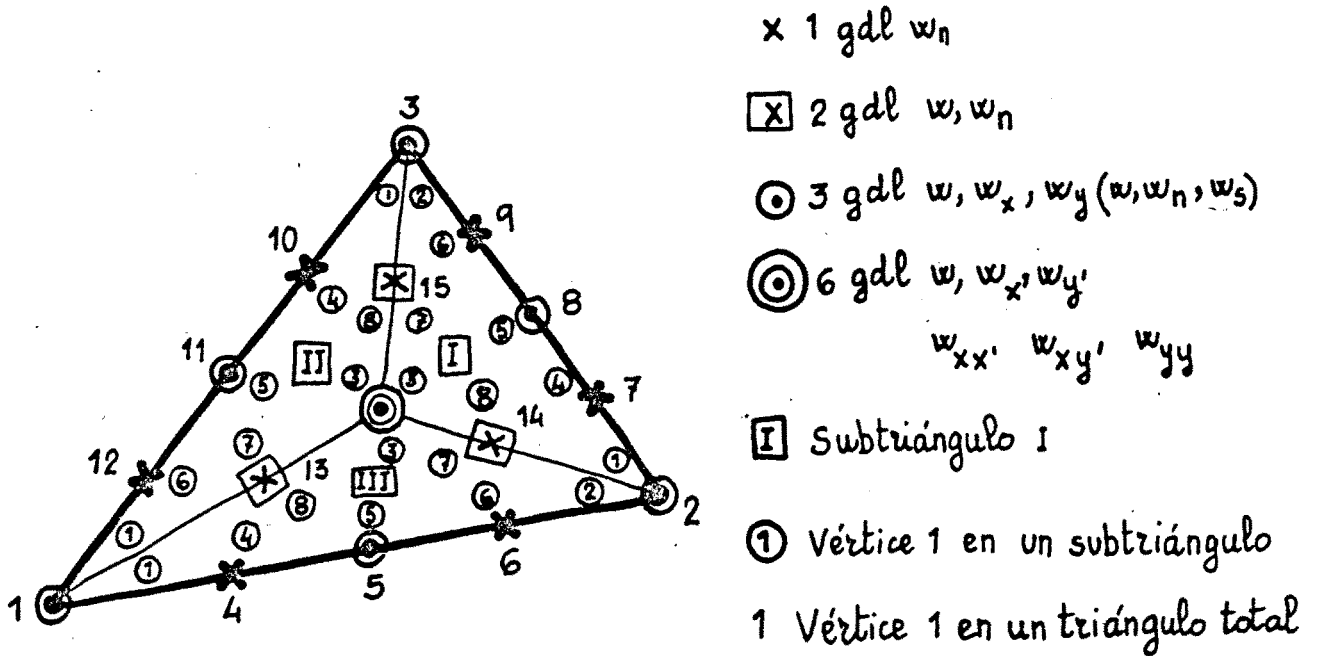


Figura 3.3

Como es habitual en el método de los elementos finitos, los coeficientes α_{ijk} de la expresión (3.4) se ponen en función de los grados de libertad considerados. Para ello se plantea un sistema de 21 ecuaciones con 21 incógnitas, que se indica en el apéndice 3. (Figura A.3.2).

Una vez resuelto el sistema (Figura A.3.3), se pasa a imponer la continuidad entre subelementos, ya que la derivada normal no coincide entre ellos por faltar una condición. (Figura 3.4).

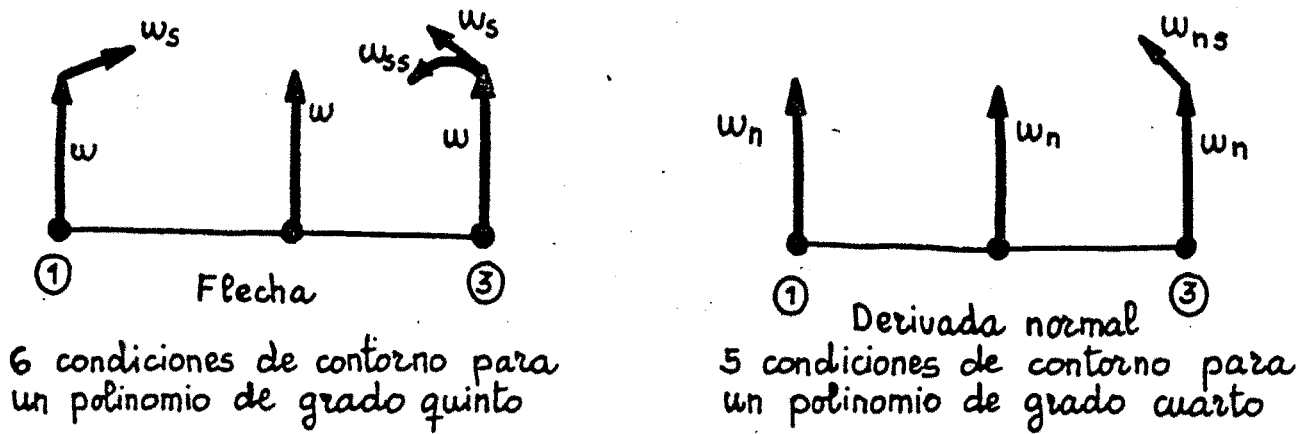


Figura 3.4.- Condiciones entre subelementos

Para imponer esa continuidad se igualan las derivadas w_{ns} en los vèrtices exteriores, eliminando tres de los grados de libertad del nudo central (baricentro) (w_{xx}, w_{xy}, w_{yy}).

En la figura 3.5 se indican, para el vèrtice 1 del triángulo completo, las dos magnitudes que se han de igualar

$$w_{ns}^{(1)} \overset{III}{2} = w_{ns}^{(2)} \overset{II}{1} \tag{3.5}$$

donde los índices representan lo que se senala en la figura 3.5.

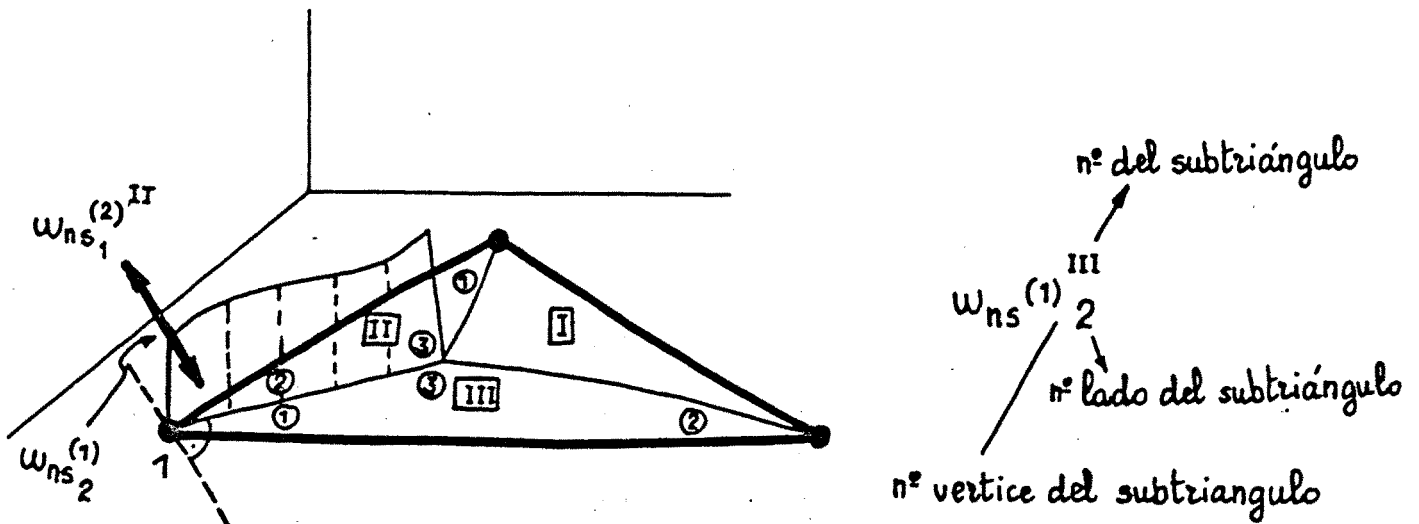


Figura 3.5

De esta forma se obtiene el sistema de 3 ecuaciones siguiente:

$$w_{ns}(1)_2^I - w_{ns}(2)_1^{III} = 0$$

$$w_{ns}(1)_2^{II} - w_{ns}(2)_1^I = 0 \tag{3.6}$$

$$w_{ns}(1)_2^{III} - w_{ns}(2)_1^{II} = 0$$

La resolución de este sistema ya no conduce a expresiones sencillas como el anterior, siendo preciso por lo tanto, la resolución numérica del sistema en el computador. (Figura A.3.4).

Por esta razón, se optó por hacer un planteamiento general, para cualquier grado de polinomio, y llevado a cabo totalmente en computador.

3.4.2.- Desarrollo numérico

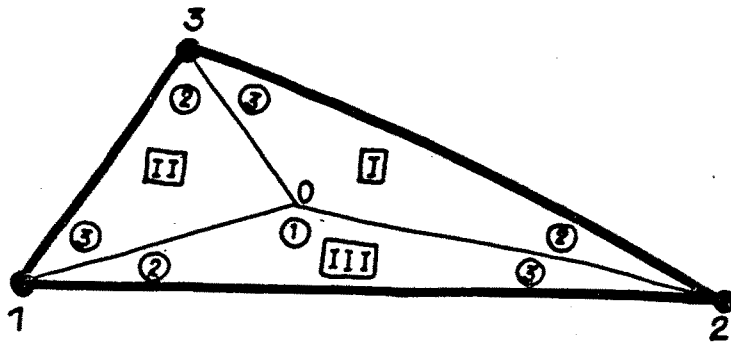


Figura 3.6

El elemento triangular de la figura 3.6, se considera - dividido en tres subtriángulos. El vértice interno es el centro de gravedad del triángulo completo. Se ha adoptado este punto por sencillez de formulación.

Se va a utilizar en cada subelemento una expresión polinómica de grado N . El número de coeficientes de esta expresión es $S(N+1)$ donde:

$$S(N+1) = \frac{(N+1)(N+2)}{2} \quad (3.7)$$

El tipo de grados de libertad y su situación en el subtriángulo se hizo en un principio como se indica en el apéndice número 4. Un ejemplo se puede ver en la figura 3.7 para el caso de $N=5$.

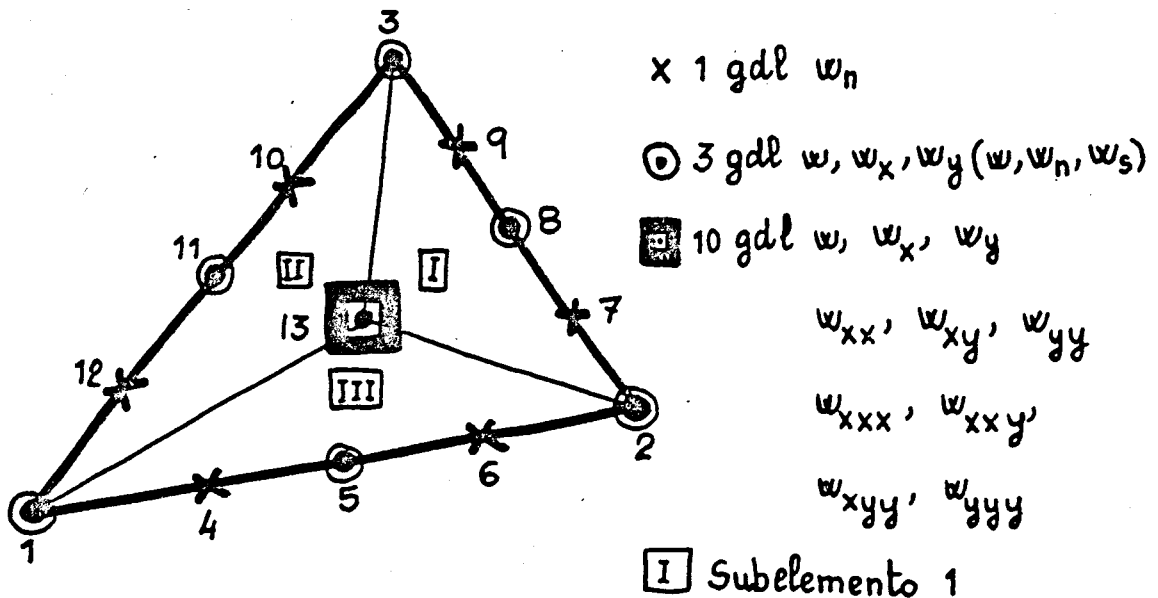


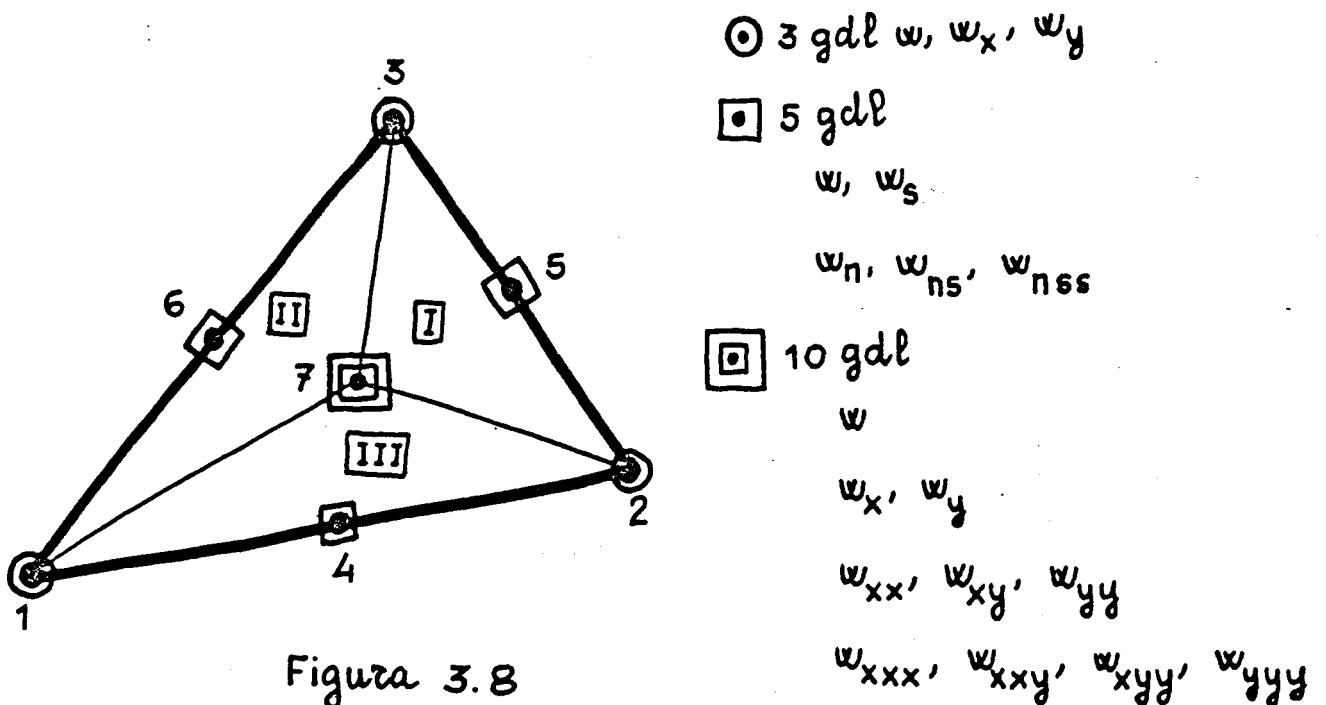
Figura 3.7

Con este planteamiento se pretendió no utilizar derivadas de orden superior al primero en los lados exteriores, para no violar la condición de continuidad C^1 .

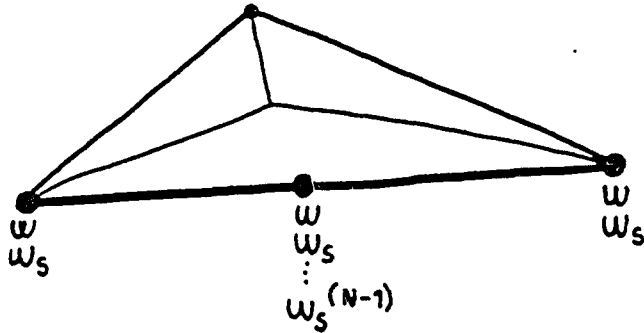
Los grados de libertad interiores se colocan en el vértice que es el centro de gravedad. Aunque las derivadas son de orden

superior al primero, no tienen importancia ya que se eliminan después bien al obligar a la continuidad C^1 entre subelementos, bien mediante condensación estática de la matriz de rigidez.

Se ha seguido la idea de Samartín⁹⁵ de concentrar los grados de libertad del lado exterior en un nudo, con vistas a facilitar la unión de unos elementos con otros, y sabiendo que eso no produce empeoramiento en la convergencia ni tampoco se obliga a una continuidad superior a la C^1 . Con este planteamiento el elemento considerado en la figura 3.7 queda como se indica en la figura 3.8. También se estudió la forma de utilizar nudos con grados de libertad que no implicaran derivadas superiores a las de primer orden. (Ver Apéndice 4).

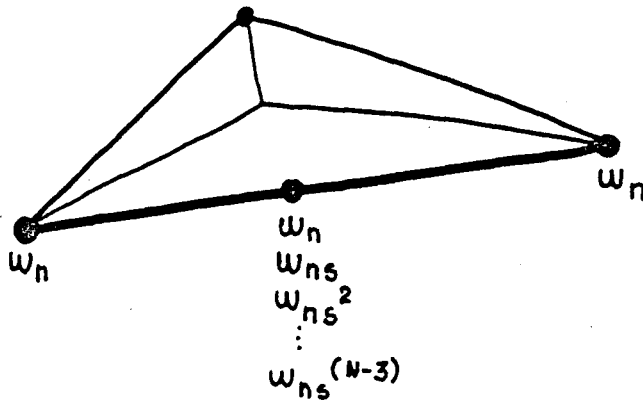


Flecha



nº grados de libertad = $2 + 2 + N - 4 + 1 = N + 1$
 nº de constantes de un polinomio de grado $N = N + 1$

Derivada normal



nº de grados de libertad = $1 + 1 + N - 3 + 1 = N$
 nº de constantes de un polinomio grado $N - 1 = N$
 Gdl en el nudo del lado = $(N - 4 + 1) + (N - 3 + 1) = 2N - 5$

Figura 3.9

Se puede comprobar que si se reúnen los grados de libertad de los lados en los vértices se impone una continuidad excesiva por lo que se opta por dejar en ellos solamente tres grados de libertad (w, w_x, w_y) .

Con este supuesto, y para que haya continuidad C^1 en los lados exteriores, se necesitan $2N - 5$ grados de libertad en los nudos de los lados. (Figura 3.9).

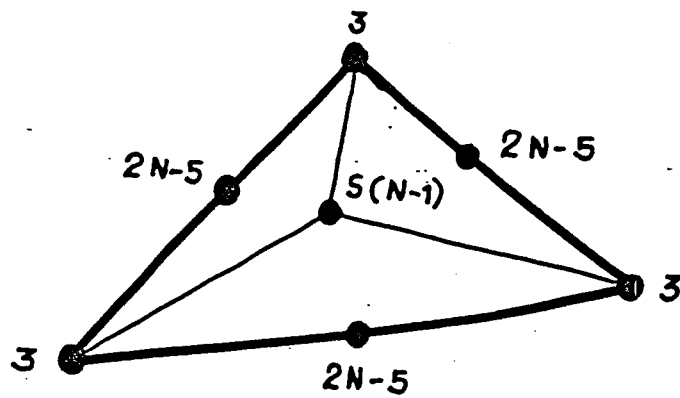


Figura 3.10

Entonces, en el nudo del centro de gravedad quedan los siguientes gdl:

$$\text{Número total de gdl: } S(N+1) = \frac{(N+1)(N+2)}{2}$$

$$\text{Número gdl en vértices: } 2 * 3$$

$$\text{Número gdl en lados: } (2N-5)$$

$$\begin{aligned} \text{Número gdl en cdg: } & \frac{(N+1)(N+2)}{2} - 2 \cdot 3 - (2N-5) = \\ & = \frac{(N-1)N}{2} = S(N-1) \end{aligned}$$

El elemento queda como se indica en la figura 3.10.

3.4.2.1.- Continuidad interna entre subelementos

A lo largo de los lados 2 y 3 de cada subelemento (Figura 3.6) no existe continuidad C^1 como se indica en la figura 3.11 para el caso de polinomios de grado 3.

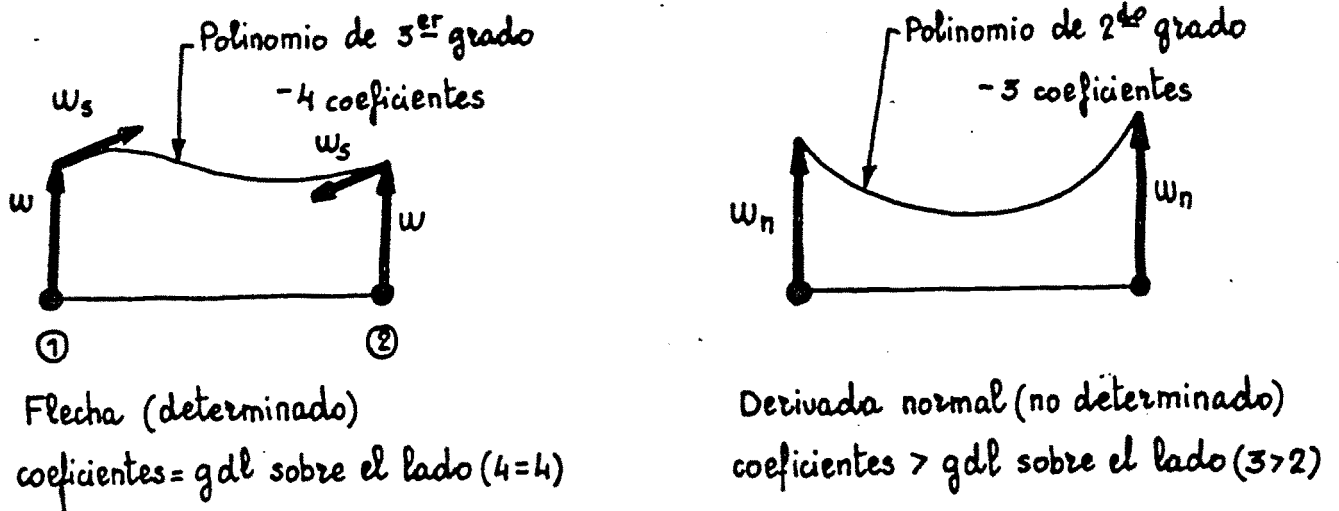


Figura 3.11.- Grado del polinomio 3

De un forma general, para un polinomio de grado N se tiene:

a- Flechas (Polinomio grado N)

gdl en el vértice interior $1 \times N-1$

gdl en el vértice exterior $2 \times \underline{\underline{1}}$

Total N+1

Se ve que el número de coeficientes (N+1) del polinomio de grado N, que representa la flecha sobre ese lado, es igual al número de condiciones (gdl sobre el lado N+1).

b- Derivadas normales (Polinomio de grado N-1)

gdl en el vértice interior	1	N-2
gdl en el vértice exterior	2	<u>1</u>
Total		N-1

Ahora el número de coeficientes (N) del polinomio de grado N que representa la derivada normal sobre el lado es mayor que el número de gdl sobre el mismo (N-1), por lo que queda un coeficiente sin determinar.

Para obligar a la continuidad interna hace falta imponer, sobre cada lado interno del elemento, una condición.

En el desarrollo de este trabajo se ha obligado a que la derivada normal en el centro de un lado interno sea igual a ambos lados, es decir, coincida en los dos subelementos que confluyen en dicho lado. (Figura 3.12).

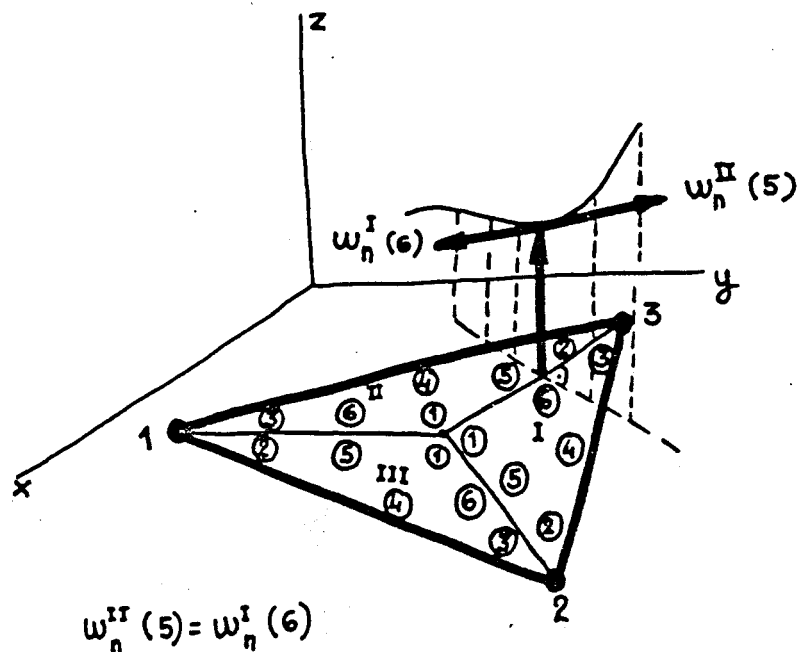
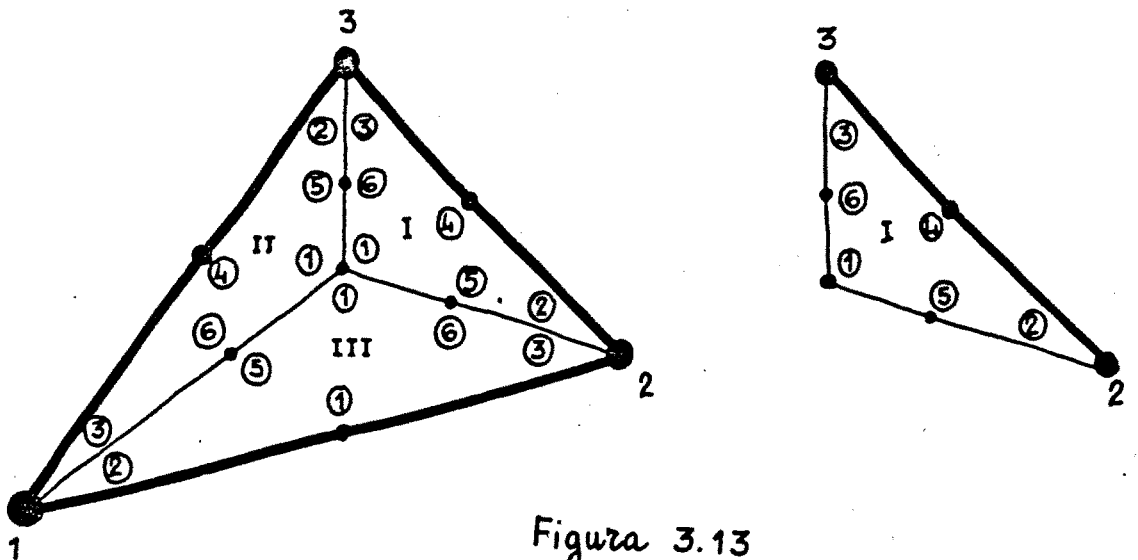


Figura 3.12

Como la derivada normal tiene un sentido distinto en cada subtriángulo, las tres condiciones que se imponen son las que se indican a continuación:

$$\begin{aligned}
 w_n^{\text{III}}(6) &= -w_n^{\text{I}}(5) \\
 w_n^{\text{I}}(6) &= -w_n^{\text{II}}(5) \\
 w_n^{\text{II}}(6) &= -w_n^{\text{III}}(5)
 \end{aligned}
 \tag{3.8}$$

donde los números romanos indican el subtriángulo y los números entre paréntesis la numeración interna de los nudos dentro de cada subtriángulo. (Figura 3.13).



Estas condiciones se podían haber impuesto en otros puntos que no fuesen el centro de los lados.

De la misma forma que se ha impuesto la continuidad interna C^1 , se podía pensar en una continuidad superior, pero aparecen problemas de superabundancia de condiciones al emplear sistemas del tipo (3.8) ampliados. Se observa que el determinante de ese sistema de ecuaciones ampliado es nulo.

3.4.2.2.- Expresiones utilizadas. Funciones de forma

El polinomio de grado N de $S(N+1)$, que representa el vector de campo w (flechas), se puede expresar como sigue (3.4):

$$w^{(1)} = \underline{L} \underline{\alpha}^{(i)} \quad (i = 1, 2, 3) \quad (3.9)$$

donde \underline{L} es un vector fila de $S(N+1)$ monomios del tipo:

$$L_1^i L_2^j L_3^k \quad (3.10)$$

con $i + j + k = N$ y L_1, L_2 y L_3 las coordenadas baricéntricas.

y $\alpha^{(i)}$ es un vector columna de $S(N+1)$ coeficientes en el subtriángulo i. (Ver Apéndice 3).

Si se particulariza la expresión (3.9) para cada uno de los gdl de un subtriángulo se obtiene:

$$\underline{d}^{(i)} = \underline{c}^{(i)} \underline{\alpha}^{(i)} \quad (i = 1, 2, 3) \quad (3.11)$$

donde \underline{d} es el vector columna que recoge todos los gdl del subtriángulo, y el superíndice (i) indica el número del subtriángulo.

Para cada subtriángulo se obtiene una expresión del tipo (3.11). De ellas se puede llegar, por inversión de la matriz \underline{C}^i , a la expresión:

$$\underline{a}^{(i)} = \underline{\bar{C}}^{(i)} \underline{d}^{(i)} \quad (i = 1, 2, 3) \quad (3.12)$$

El orden de los gdl en $\underline{d}^{(i)}$ se ha tomado del siguiente modo (tener en cuenta la notación del apéndice 2 y figura 3.14):

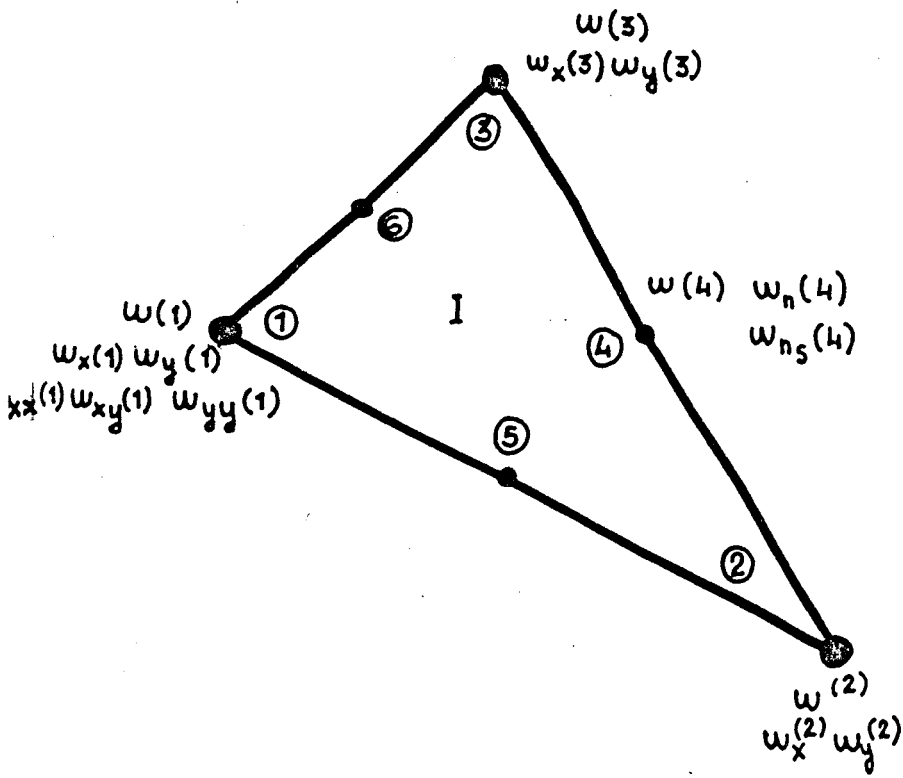
-S(N-1) filas correspondientes a los gdl $w, w_x, w_y \dots$ en el punto central 1 de coordenadas (1,0,0) y representados por las expresiones $p, \bar{p}_2, \bar{p}_3, \dots, \bar{p}_{S(N-1)}$ en (1,0,0).

-A continuación, seis gdl correspondientes a w, w_x y w_y de los vértices 2 y 3 de coordenadas (0,1,0) y (0,0,1):

$$\begin{array}{lll} p, \bar{p}_2, \bar{p}_3 & \text{en} & (0,1,0) \\ p, \bar{p}_2, \bar{p}_2 & \text{en} & (0,0,1) \end{array}$$

-Y, por último, 2N-5 gdl correspondientes a $w, w_s \dots w_{sN-4}$ $w_n, w_{sn} \dots w_{sN-3}$, que se pueden representar por:

$$p, \bar{p}_2, \bar{p}_4, \dots, \bar{p}_{s(N-4)+1}, \bar{p}_3, \bar{p}_6, \dots, \bar{p}_{s(N-2)+2}$$

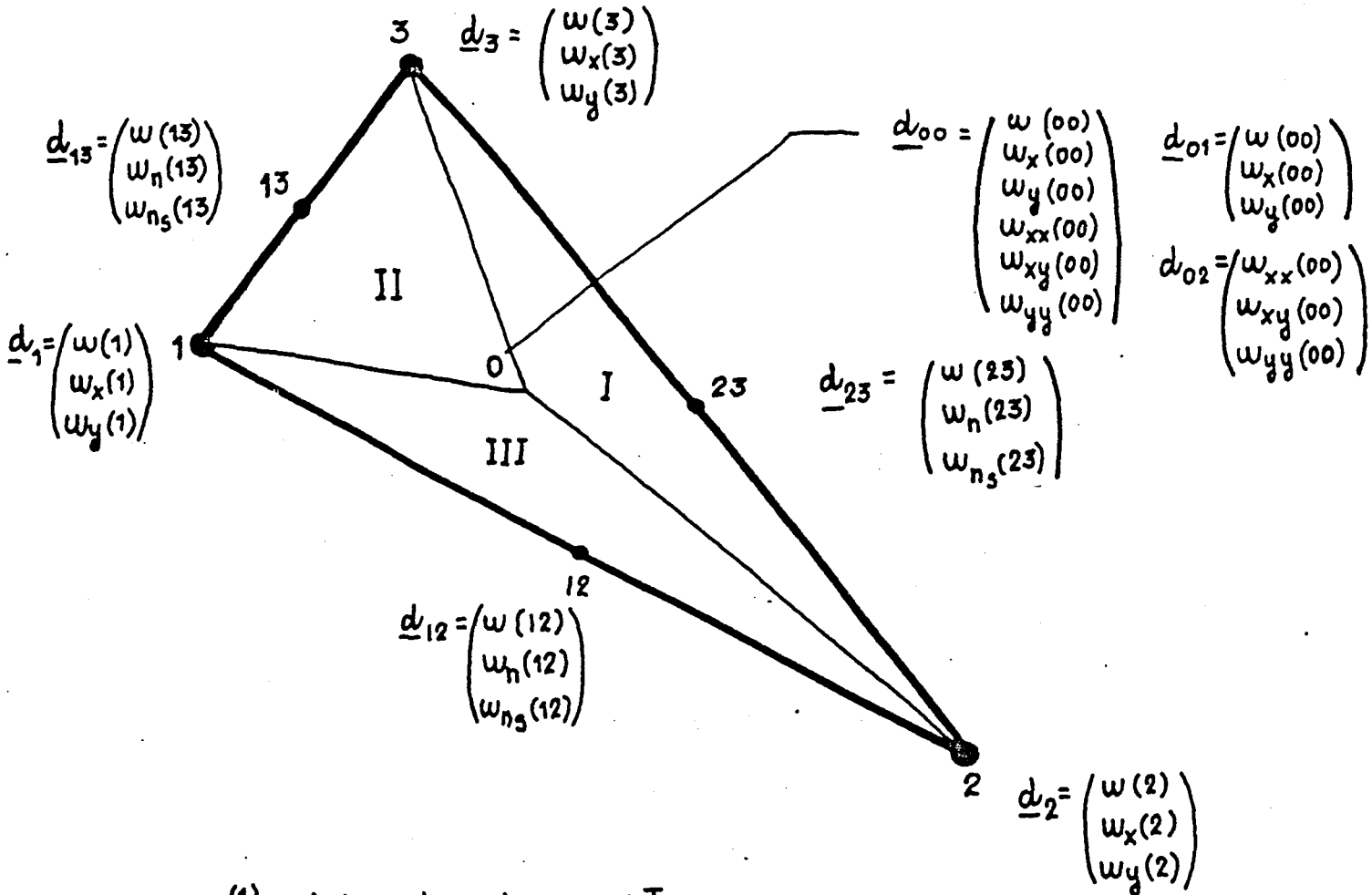


$$\underline{L} = \begin{pmatrix} L_1^4, L_2^0, L_3^0 \\ L_1^3, L_2^1, L_3^0 \\ L_1^2, L_2^2, L_3^1 \\ L_1^2, L_2^2, L_3^0 \\ L_1^2, L_2^1, L_3^1 \\ L_1^2, L_2^0, L_3^2 \\ L_1^1, L_2^3, L_3^0 \\ L_1^1, L_2^2, L_3^1 \\ L_1^1, L_2^1, L_3^2 \\ L_1^1, L_2^0, L_3^3 \\ L_1^0, L_2^4, L_3^0 \\ L_1^0, L_2^3, L_3^0 \\ L_1^0, L_2^2, L_3^2 \\ L_1^0, L_2^1, L_3^3 \\ L_1^0, L_2^0, L_3^4 \end{pmatrix}^T \quad \underline{d}^{(1)} = \begin{pmatrix} w(1) \\ w_x(1) \\ w_y(1) \\ w(2) \\ w_x(2) \\ w_y(2) \\ w(3) \\ w_x(3) \\ w_y(3) \\ w(4) \\ w_n(4) \\ w_{n_5}(4) \end{pmatrix}$$

Figura 3.14.- Vectores \underline{L} y $\underline{d}^{(1)}$ para grado 4

El sistema de ecuaciones (3.8) se puede expresar como sigue:

$$\begin{aligned} \underline{H}_5^{(1)} \underline{\alpha}^{(1)} + \underline{H}_6^{(3)} \underline{\alpha}^{(3)} &= \underline{0} \\ \underline{H}_5^{(2)} \underline{\alpha}^{(2)} + \underline{H}_6^{(1)} \underline{\alpha}^{(1)} &= \underline{0} \\ \underline{H}_5^{(3)} \underline{\alpha}^{(3)} + \underline{H}_6^{(2)} \underline{\alpha}^{(2)} &= \underline{0} \end{aligned} \quad (3.13)$$



$$\underline{d}^{(1)} = (\underline{d}_{00} \quad \underline{d}_{22} \quad \underline{d}_{33} \quad \underline{d}_{23})^T$$

$$\underline{d}^{(2)} = (\underline{d}_{00} \quad \underline{d}_{33} \quad \underline{d}_{11} \quad \underline{d}_{13})^T$$

$$\underline{d}^{(3)} = (\underline{d}_{00} \quad \underline{d}_{11} \quad \underline{d}_{22} \quad \underline{d}_{12})^T$$

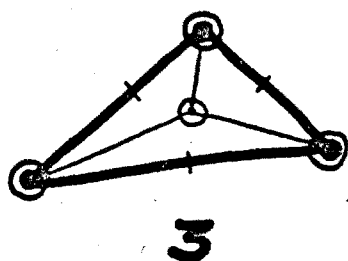
$$\underline{d} = (\underline{d}_{22} \quad \underline{d}_{33} \quad \underline{d}_{11} \quad \underline{d}_{23} \quad \underline{d}_{13} \quad \underline{d}_{12})$$

$$\underline{d}_1 = (\underline{d}_{02} \quad \underline{d}_{22} \quad \underline{d}_{33} \quad \underline{d}_{11} \quad \underline{d}_{23} \quad \underline{d}_{13} \quad \underline{d}_{12}) = (\underline{d}_{02} \quad \underline{d})$$

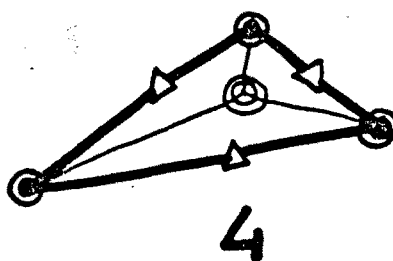
Figura 3.15.- Vectores de gdl para grado 4

Como quiera que los vectores $\underline{d}^{(1)}$, $\underline{d}^{(2)}$ y $\underline{d}^{(3)}$ tienen gdl comunes, se ha optado por poner todos ellos en función de uno solo que se llamará \underline{d}^* . Si se llama \underline{d}_{ij} a los gdl del nudo que está entre los i y j de numeración global, dicho vector completo estará compuesto como sigue. (Figura 3.16):

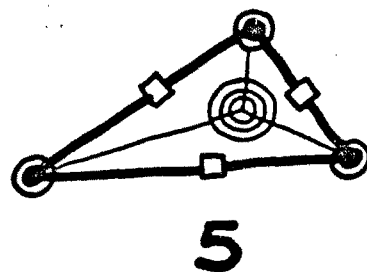
$$\begin{aligned} \underline{d}^* &= (\underline{d}_{00} \ \underline{d}_{22} \ \underline{d}_{33} \ \underline{d}_{11} \ \underline{d}_{23} \ \underline{d}_{13} \ \underline{d}_{12})^T = (\underline{d}_{00} \ \underline{d})^T = \\ &= (\underline{d}_{01} \ \underline{d}_1)^T \end{aligned} \quad (3.14)$$



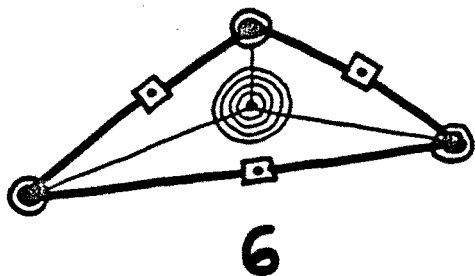
$n_1 = 15$
 $n_2 = 12$



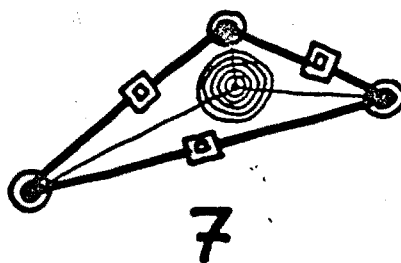
$n_1 = 24$
 $n_2 = 21$



$n_1 = 34$
 $n_2 = 31$



$n_1 = 45$
 $n_2 = 42$



$n_1 = 57$
 $n_2 = 54$

- 3 gdl
- ⊙ 6 gdl
- ⊗ 10 gdl
- ⊕ 15 gdl
- ⊖ 21 gdl

n_1 = número de gdl sin continuidad interna
 n_2 = número de gdl con continuidad interna
para mejor comprensión ver Figura 3.17

- 1 1 gdl
- △ 3 gdl
- 5 gdl
- ⊠ 7 gdl
- ⊡ 9 gdl

Figura 3.16

Para pasar a este tipo de notación, no hay más que ampliar con ceros las ecuaciones (3.12):

$$\underline{a}^{(i)} = \underline{\bar{c}}^{(i)} \quad \underline{d}^{(i)} = \underline{\bar{c}}^{(i)*} \quad \underline{d}^* = \begin{pmatrix} \underline{\bar{c}}_0^{(i)} & \underline{\bar{c}}_1^{(i)} \end{pmatrix} \begin{matrix} \underline{d}_{01} \\ \underline{d}_1 \end{matrix} \quad (3.15)$$

Utilizando la expresión anterior en el sistema (3.13), se obtiene:

$$\begin{aligned} \underline{H}_5^{(1)} \underline{\bar{c}}^{(1)*} \underline{d}^* + \underline{H}_6^{(3)} \underline{\bar{c}}^{(2)*} \underline{d}^* &= \underline{0} \\ \underline{H}_5^{(2)} \underline{\bar{c}}^{(2)*} \underline{d}^* + \underline{H}_6^{(1)} \underline{\bar{c}}^{(1)*} \underline{d}^* &= \underline{0} \\ \underline{H}_5^{(3)} \underline{\bar{c}}^{(3)*} \underline{d}^* + \underline{H}_6^{(2)} \underline{\bar{c}}^{(2)*} \underline{d}^* &= \underline{0} \end{aligned} \quad (3.16)$$

que, desglosada, toma la forma:

$$\begin{aligned} (\underline{H}_5^{(1)} \underline{\bar{c}}_0^{(1)} + \underline{H}_6^{(3)} \underline{\bar{c}}_0^{(3)}) \underline{d}_{01} + (\underline{H}_5^{(1)} \underline{\bar{c}}_1^{(1)} + \underline{H}_6^{(3)} \underline{\bar{c}}_1^{(2)}) \underline{d}_1 &= \underline{0} \\ (\underline{H}_5^{(2)} \underline{\bar{c}}_0^{(2)} + \underline{H}_6^{(1)} \underline{\bar{c}}_0^{(1)}) \underline{d}_{01} + (\underline{H}_5^{(2)} \underline{\bar{c}}_1^{(2)} + \underline{H}_6^{(1)} \underline{\bar{c}}_1^{(1)}) \underline{d}_1 &= \underline{0} \\ (\underline{H}_5^{(3)} \underline{\bar{c}}_0^{(3)} + \underline{H}_6^{(2)} \underline{\bar{c}}_0^{(2)}) \underline{d}_{01} + (\underline{H}_5^{(3)} \underline{\bar{c}}_1^{(3)} + \underline{H}_6^{(2)} \underline{\bar{c}}_1^{(2)}) \underline{d}_1 &= \underline{0} \end{aligned} \quad (3.17)$$

y condensandolo en dos matrices, queda:

$$\underline{H}_0 \underline{d}_{01} + \underline{H}_1 \underline{d}_1 = \underline{0} \quad (3.18)$$

de donde se puede despejar \underline{d}_{00} :

$$\underline{d}_{00} = -\underline{H}_0^{-1} \underline{H}_1 \underline{d}_1 = \underline{H} \underline{d}_1 \quad (3.19)$$

Habiendo eliminado los 3 gdl del centro de gravedad ($\underline{d}_{00} = (w(00), w_x(00), w_y(00))^T$), la expresión (3.15) se puede modificar como sigue:

$$\begin{aligned} \underline{\alpha}^{(i)} &= \underline{\bar{C}}_0^{(i)} \underline{d}_{01} + \underline{\bar{C}}_1^{(i)} \underline{d}_1 = \underline{\bar{C}}_0^{(i)} \underline{H} \underline{d}_1 + \underline{\bar{C}}_1^{(i)} \underline{d}_1 = \\ &= (\underline{\bar{C}}_0^{(1)} \underline{H} + \underline{\bar{C}}_1^{(i)}) \underline{d}_1 \end{aligned} \quad (3.20)$$

que se escribe de un modo compacto:

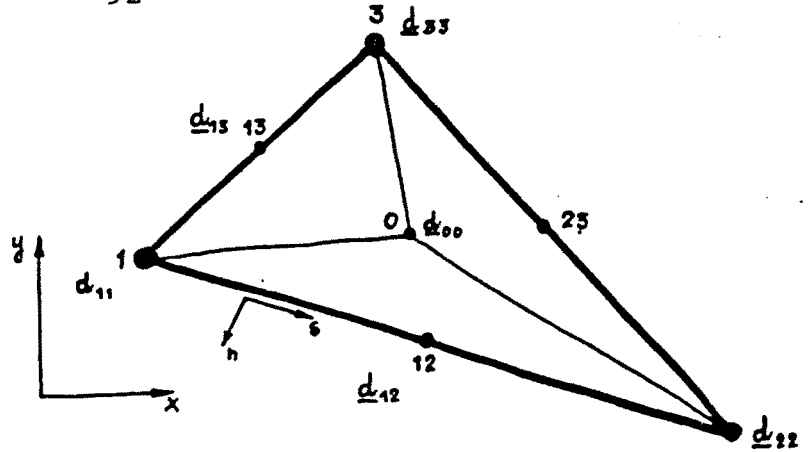
$$\underline{\alpha}^{(i)} = \underline{\bar{C}}^{(i)} \underline{d}_1 \quad (3.21)$$

La expresión (3.9) del vector de campo tiene ahora la forma:

$$\underline{w}^{(i)} = \underline{L} \alpha^{(i)} = \underline{L} \underline{\bar{C}}^{(i)} \underline{d}_1 \quad (i = 1, 2, 3) \quad (3.22)$$

El producto $\underline{L} \underline{\bar{C}}^{(i)}$ son las funciones de forma para cada uno de los subtriángulos.

En la figura 3.17 se indica el número de gdl para los elementos de polinomios de grados 3 a 7. En la figura 3.16 se presentan algunos de los elementos de la familia.



	3	4	5	6	7
$d_{ii} (i \neq 0)$	$(w w_x w_y)^T$				
$d_{00} = \begin{pmatrix} d_{01} \\ d_{02} \end{pmatrix} =$	$\begin{pmatrix} w \\ w_x \\ w_y \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} w \\ w_x \\ w_y \\ w_{xx} \\ w_{xy} \\ w_{yy} \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} w \\ w_x \\ w_y \\ w_{xx} \\ w_{xy} \\ w_{yy} \\ w_{xxx} \\ w_{xxy} \\ w_{xyx} \\ w_{yyy} \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} w \\ w_x \\ w_y \\ w_{xx} \\ w_{xy} \\ w_{yy} \\ w_{xxx} \\ w_{xxy} \\ w_{xyx} \\ w_{yyy} \\ w_{xxxx} \\ w_{xxxxy} \\ w_{xxxyy} \\ w_{xxyyy} \\ w_{xyyyy} \\ w_{yyyyy} \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} w \\ w_x \\ w_y \\ w_{xx} \\ w_{xy} \\ w_{yy} \\ w_{xxx} \\ w_{xxy} \\ w_{xyx} \\ w_{yyy} \\ w_{xxxx} \\ w_{xxxxy} \\ w_{xxxyy} \\ w_{xxyyy} \\ w_{xyyyy} \\ w_{yyyyy} \end{pmatrix}$
$d_{ij} (i \neq j)$	w_n	$\begin{pmatrix} w \\ w_n \\ w_{nn} \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} w \\ w_n \\ w_{n2} \\ w_{n3} \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} w \\ w_n \\ w_{n2} \\ w_{n3} \\ w_{n4} \\ w_{n5} \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} w \\ w_n \\ w_{n2} \\ w_{n3} \\ w_{n4} \\ w_{n5} \\ w_{n6} \\ w_{n7} \end{pmatrix}$
$N_1 =$ gdl en un nudo intermedio	1	3	5	7	9
$N_2 =$ gdl en el edg	3	6	10	15	21
$N_3 =$ gdl antes de continuidad interna	13	23	34	45	57
$N_4 =$ gdl despues de continuidad interna	12	20	31	42	54
$N_5 =$ gdl despues de condensar	12	17	24	30	36

Figura 3.17

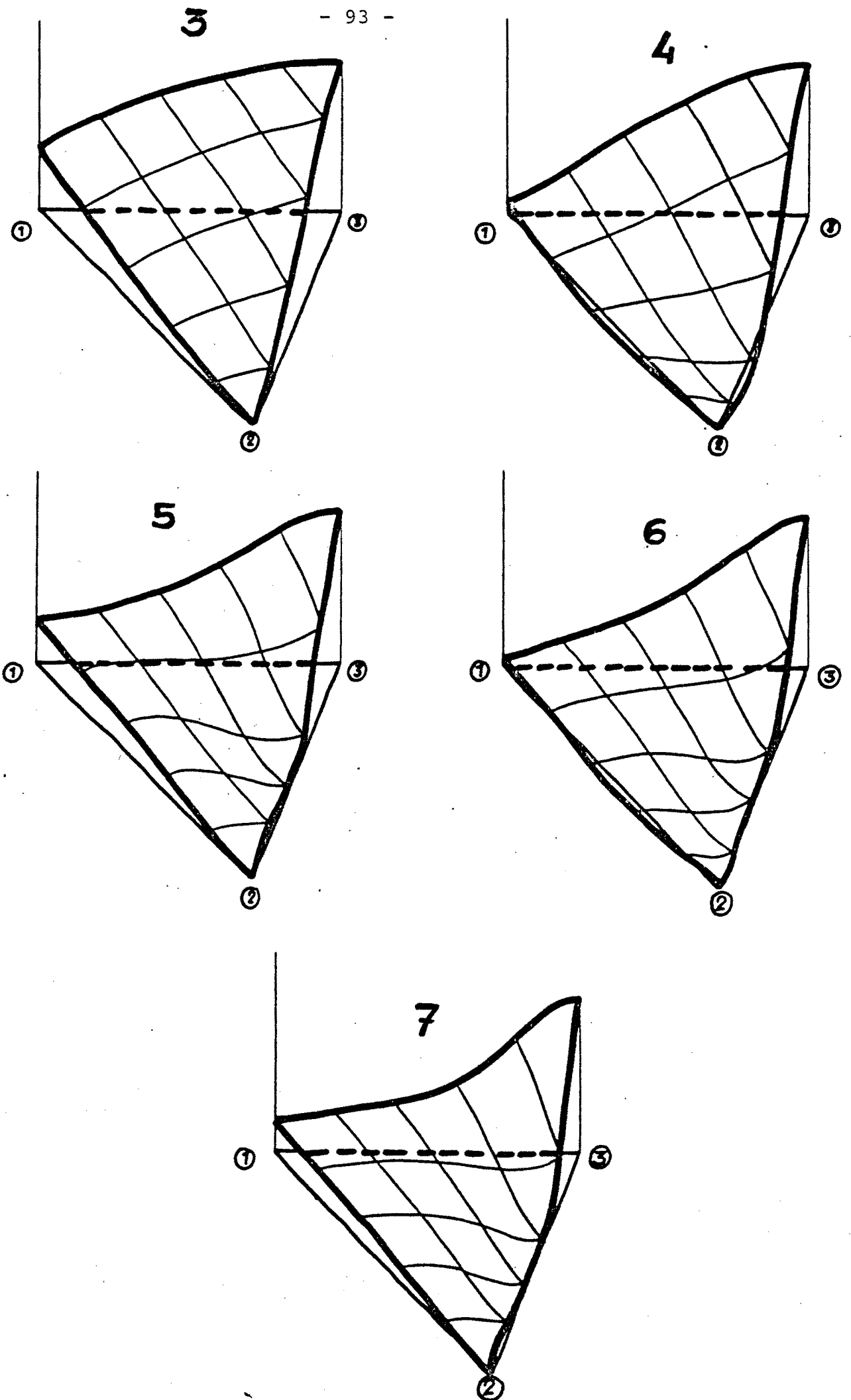


Figura 3.18

En la figura 3.18 se han dibujado, para los grados de polinomio 3 a 7, la función de forma referente al gdl flecha en el nudo 3 de numeración local, y para un subelemento.

3.4.2.3.- Matriz de rigidez y condensación estática

Según lo expuesto en el capítulo 2, la matriz de rigidez de cada elemento vendrá dada por (2.16):

$$\underline{k} = \sum_{i=1}^{m_i} \iint_{A_i} (\underline{B}^i)^T \underline{D} \underline{B}^i dA \quad (3.23)$$

y las fuerzas consistentes por (2.18):

$$\begin{aligned} \underline{p} = & \sum_{i=1}^{m_i} \iint_{A_i} (\underline{B}^i)^T \underline{D} \epsilon_0^i + (\psi^i)^T \underline{b} - (\psi^i)^T \underline{p} dA_i + \\ & + \phi_{\bar{A}_1} \bar{A}_i (\psi^i)^T \underline{p}_s \underline{d}_s \end{aligned} \quad (3.24)$$

siendo la expresión a que se llega del tipo:

$$\underline{p}_1 = \underline{k}_e \underline{d}_1 = \underline{k}_e \begin{bmatrix} \underline{d}_{02} \\ \underline{d} \end{bmatrix} \quad (3.25)$$

Como los grados de libertad no eliminados en el cdg - ($\underline{d}_{02} = (w_{xx}(00), w_{xy}(00), w_{yy}(00))^T$ para grado 4), no interesa tenerlos en cuenta en la resolución general del sistema, se ponen en función de los gdl del vector \underline{d} :

$$\begin{bmatrix} \underline{p}_{11} \\ \underline{p}_{12} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} k_{00} & k_{01} \\ k_{10} & k_{11} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \underline{d}_{02} \\ \underline{d} \end{bmatrix} \quad (3.26)$$

de donde se obtiene:

$$\underline{d}_{02} = k_{00}^{-1} (\underline{p}_{11} - k_{01} \underline{d}) \quad (3.27)$$

$$(\underline{p}_{12} - k_{10} k_{00}^{-1} \underline{p}_{11}) = (k_{11} - k_{10} k_{00}^{-1} k_{01}) \underline{d} \quad (3.28)$$

$$\underline{p} = \underline{k}_{ec} \underline{d} \quad (3.29)$$

Esta última expresión \underline{k}_{ec} es la que se utiliza, como matriz elemental condensada, para hallar mediante suma boolea na la matriz de rigidez global.

C A P I T U L O 4

PROGRAMA DE COMPUTADOR

4.- PROGRAMA DE COMPUTADOR

4.1.- Características y descripción general

El programa que sirve de soporte al método de cálculo se ha escrito fundamentalmente en lenguaje FORTRAN, con algunos procedimientos escritos en SPL (lenguaje de programación estructurada con organización en bloques, similar en ciertos aspectos al PASCAL).

Su desarrollo y ejecución se ha efectuado en un H.P. 3000 con 1024 K-bytes de memoria, disco de 120 Mgbytes y cinta de 1600 bpi.

Como el sistema operativo no permite un direccionamiento directo superior a 64 Kb., se ha hecho necesario utilizar la memoria virtual. Para ello se han utilizado dos subrutinas del sistema DMOVIN, DMOVOUT.

Todas las matrices principales tienen dimensionamiento variable, y en el caso de la matriz de rigidez global, su inversión se hace por bloques en el caso de que sea de una dimensión superior a 64 Kb.

El proceso seguido se puede dividir en dos grandes apartados:

-programa de elementos finitos.

-programa de cálculo de las funciones de forma.

y que a continuación se explican.

4.2.- Programa de elementos finitos

El proceso que se ha seguido es el común utilizado en los programas que utilizan el M.E.F. Como se han usado técnicas de memoria virtual, se han hecho necesarias subrutinas, que gestionen los segmentos de dicha memoria.

Además, y para agilizar el programa, se ha hecho uso de matrices de transferencia, cuyo significado se puede ver en el listado del programa que se adjunta en el apéndice 5.

Las matrices de rigidez y de resultados de cada elemento se graban en disco, para utilizarlas al final en la obtención de resultados. La integración es siempre numérica de tipo Gauss.⁶³ (Tabla 4.1).

Se puede utilizar en el programa una sola entrada de datos para varios estados de carga de una misma estructura.

En la figura 4.1 se indica el organigrama de este programa.

Orden de precisión	número puntos	Coeficientes de peso			L ₁	L ₂			L ₃			Multipli- cidad		
1	1	1-00000	00000	00000	0-33333	33333	33333	0-33333	33333	33333	0-33333	33333	33333	1
2	3	0-33333	33333	33333	0-66666	66666	66667	0-16666	66666	66667	0-16666	66666	66667	3
2	3	0-33333	33333	33333	0-50000	00000	00000	0-50000	00000	00000	0-00000	00000	00000	3
3	4	-0-56250	00000	00000	0-33333	33333	33333	0-33333	33333	33333	0-33333	33333	33333	1
		0-52083	33333	33333	0-60000	00000	00000	0-20000	00000	00000	0-20000	00000	00000	3
3	6	0-16666	66666	66667	0-65902	76223	74092	0-23193	33685	53031	0-10903	90090	72877	6
4	6	0-10995	17436	55322	0-81684	75729	80459	0-09157	62135	09771	0-09157	62135	09771	3
		0-22338	15896	78011	0-10810	30181	68070	0-44594	84909	15965	0-44594	84909	15965	3
4	7	0-37500	00000	00000	0-33333	33333	33333	0-33333	33333	33333	0-33333	33333	33333	1
		0-10416	66666	66667	0-73671	24989	68435	0-23793	23664	72434	0-02535	51345	59132	6
5	7	0-22500	00000	00000	0-33333	33333	33333	0-33333	33333	33333	0-33333	33333	33333	1
		0-12593	91805	44827	0-79742	69853	53087	0-10128	65073	23456	0-10128	65073	23456	3
		0-13239	41527	88506	0-47014	20641	05115	0-47014	20641	05115	0-05971	58717	89770	3
5	9	0-20595	05047	60887	0-12494	95032	33232	0-43752	52483	83384	0-43752	52483	83384	3
		0-06369	14142	86223	0-79711	26518	60071	0-16540	99273	89841	0-03747	74207	50088	6
6	12	0-05084	49063	70207	0-87382	19710	16996	0-06308	90144	91502	0-06308	90144	91502	3
		0-11678	62757	26379	0-50142	65096	58179	0-24928	67451	70910	0-24928	67451	70910	3
		0-08285	10756	18374	0-63650	24991	21399	0-31035	24510	33785	0-05314	50498	44816	6
7	13	-0-14957	00444	67670	0-33333	33333	33333	0-33333	33333	33333	0-33333	33333	33333	1
		0-17561	52574	33204	0-47930	80678	41923	0-26034	59660	79038	0-26034	59660	79038	3
		0-05334	72356	08839	0-86973	97941	95568	0-06513	01029	02216	0-06513	01029	02216	3
		0-07711	37608	90257	0-63844	41885	69809	0-31286	54960	04875	0-04869	03154	25316	6
7	15	0-05307	78017	90233	0-87013	89736	81670	0-06493	05131	59165	0-06493	05131	59165	3
		0-07085	30836	92136	0-28457	55842	49173	0-51703	99390	69325	0-19838	44766	81502	6
		0-06927	46820	79415	0-31355	91843	84932	0-04386	34717	92371	0-64257	73438	22697	6

Tabla 4.1

Orden de precisión	Número puntos	Coeficientes de peso			L ₁			L ₂			L ₃			Multipli- cidad
8	16	0-14431	56076	77787	0-33333	33333	33333	0-33333	33333	33333	0-33333	33333	33333	1
		0-10321	73705	34718	0-65886	13844	96478	0-17056	93077	51761	0-17056	93077	51761	3
		0-03245	84976	23198	0-89890	55433	65938	0-05054	72283	17031	0-05054	72283	17031	3
		0-09509	16342	67284	0-08141	48234	14554	0-45929	25882	92723	0-45929	25882	92723	3
		0-02723	03141	74435	0-00839	47774	09958	0-26311	28296	34638	0-72849	23929	55404	6
9	19	0-09713	57962	82799	0-33333	33333	33333	0-33333	33333	33333	0-33333	33333	33333	1
		0-03133	47002	27139	0-02063	49616	02524	0-48968	25191	98738	0-48968	25191	98738	3
		0-07782	75410	04774	0-12582	08170	14126	0-43708	95914	92937	0-43708	95914	92937	3
		0-07964	77389	27210	0-62359	29287	61934	0-18820	35356	19033	0-18820	35356	19033	3
		0-02557	76756	58698	0-91054	09732	11094	0-04472	95133	94453	0-04472	95133	94453	3
		0-04328	35393	77289	0-03683	84120	54736	0-22196	29891	60766	0-74119	85987	84498	6
9	21	0-05161	72025	69021	0-03696	03304	33378	0-48151	98347	83311	0-48151	98347	83311	3
		0-09408	00734	58356	0-19279	20403	64120	0-40360	39798	17940	0-40360	39798	17940	3
		0-02599	35710	32320	0-90962	19804	31246	0-04518	90097	84377	0-04518	90097	84377	3
		0-04546	95380	47619	0-13699	12012	64904	0-21829	00709	71381	0-64471	87277	63715	6
		0-03535	17050	89199	0-03042	43617	28820	0-22206	31655	37318	0-74751	24727	33862	6
10	25	0-07989	45047	41240	0-33333	33333	33333	0-33333	33333	33333	0-33333	33333	33333	1
		0-07112	38022	32377	0-14982	75787	95818	0-42508	62106	02091	0-42508	62106	02091	3
		0-00822	38186	90464	0-95338	22649	80000	0-02330	88675	10000	0-02330	88675	10000	3
		0-04543	05922	96170	0-14792	56262	09534	0-22376	69735	76973	0-62830	74002	13493	6
		0-03735	98562	34305	0-02994	60319	54171	0-35874	01418	64431	0-61131	38261	81398	6
		0-03088	66568	84564	0-03563	25595	87504	0-14329	53704	26867	0-82107	20699	85629	6
10	25	0-08174	33291	46286	0-33333	33333	33333	0-33333	33333	33333	0-33333	33333	33333	1
		0-04595	79636	04745	0-71567	77978	86872	0-14216	11010	56564	0-14216	11010	56564	3
		0-01335	29688	13150	0-93588	92535	66112	0-03205	53732	16944	0-03205	53732	16944	3
		0-06390	49063	96424	0-14813	28857	83821	0-32181	29952	88835	0-53005	41189	27344	6
		0-03418	46481	62959	0-02961	98894	88730	0-36914	67818	27811	0-60123	33286	83459	6
		0-02529	77577	07288	0-02836	76653	39938	0-16370	17337	37182	0-80793	06009	22880	6

Tabla 4.1 (continuación)

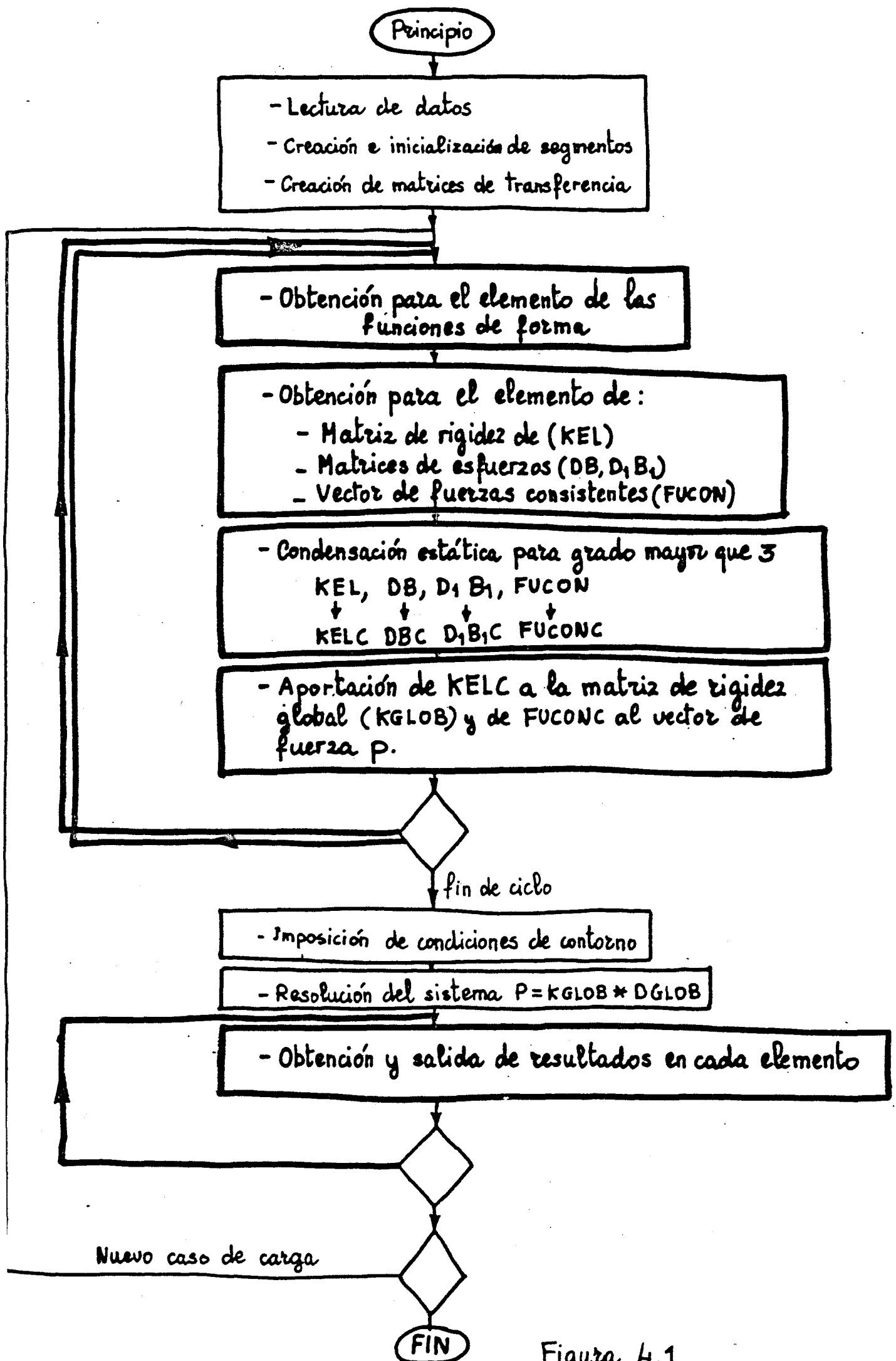


Figura 4.1

Si la carga es puntual, hay que tener en cuenta que se va a considerar tantas veces como a elementos pertenezca.

El tipo de cargas que se admiten son:

- puntuales en cualquier posición.
- Uniformes continuas.

4.3.- Funciones de forma

La parte del programa que obtiene las funciones de forma sigue el desarrollo hecho en el capítulo 3.

En la figura 4.2 se presenta el organigrama de este sub programa.

Las funciones de forma que se utilizan son polinomios de grado mayor o igual que 3. No se han utilizado polinomios de grado mayor que 7 por no tener los coeficientes de integración para esos grados, si bien se podía haber obviado este problema utilizando una subdivisión de los subelementos.

4.4.- Entrada de datos y salida de resultados

Se va a describir aquí la entrada de datos y salida de resultados. Para ello se sigue un planteamiento general y se particulariza para el caso de la figura 4.3.

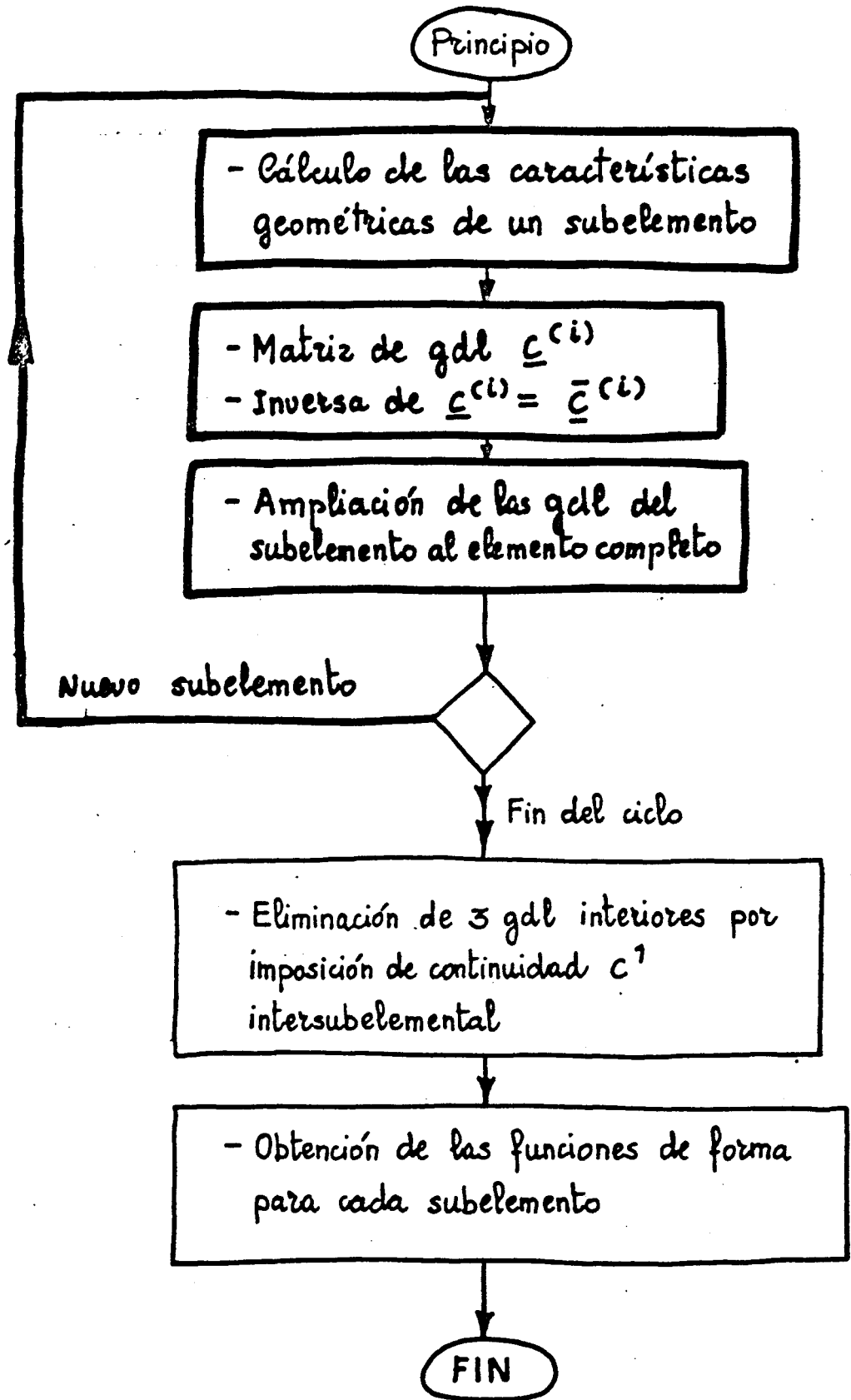
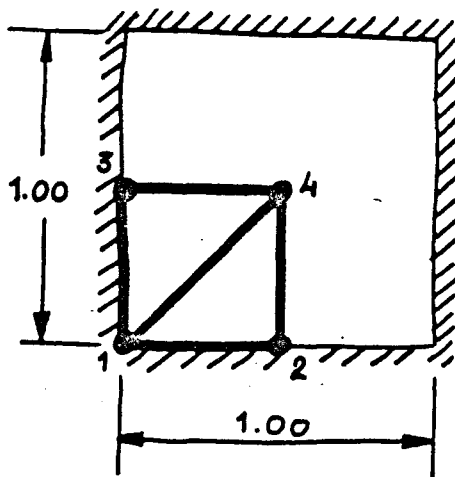


Figura 4.2



//// simple apoyo
Carga puntual en el nudo
4 de 1 T.
Módulo de elasticidad 10.92
Coeficiente de Poisson 0.3

Figura 4.3

4.4.1.- Entrada de datos

Hay que crear un fichero que contiene los records especificados por columnas que se indican en la tabla 4.2.

Como ilustración se puede ver en la tabla 4.3 la entrada de datos para el caso de la figura 4.3.

Además, y como comprobación, en la ejecución del programa aparece el listado de la figura 4.4.

TABLA 4.2

<i>Nº de record</i>	<i>Nº de columna</i>	<i>Especificación</i>
1	1-5	<i>Fichero de salida de resultados</i>
	6-10	<i>Fichero de entrada de datos</i>
	11-15	<i>Fichero interno de escritura de datos</i>
	21-25	<i>Fichero interno de escritura de datos</i>
	26-30	<i>Fichero de salidas intermedias</i>
	31-35	<i>Fichero de salidas intermedias</i>
	36-40	<i>Fichero de salidas intermedias</i>
	41-45	<i>Fichero de salidas intermedias</i>
	46-50	<i>Fichero de salidas intermedias</i>
	51-55	<i>Fichero de salidas intermedias</i>
56-60	<i>Fichero de salidas intermedias</i>	
2	1-5	<i>Variable interna igual a 1</i>
	6-10	<i>Variable interna igual a 2</i>
3.	1-5	<i>Número de vértices</i>
	6-10	<i>Número de elementos</i>
	11-15	<i>Número de casos de carga</i>
	16-20	<i>Número máximo de cargas puntuales</i>
	21-25	<i>Grado del polinomio</i>
	26-30	<i>Número de puntos de integración</i>
	31-35	<i>Número de nudos con apoyo especial</i>
	36-45	<i>Módulo de elasticidad</i>
46-55	<i>Coficiente de Poisson</i>	
4	1-5	<i>Número de condiciones de continuidad en cada lado interno</i>
5/-		<i>Hay un record por cada vértice</i>
	1-5	<i>Número de vértice</i>
	6-15	<i>Coordenada X de ese vértice</i>
	16-25	<i>Coordenada Y de ese vértice</i>
	26-35	<i>Espesor de la placa en ese vértice</i>

6/-		Hay uno por cada elemento
	1-5	Número del elemento
	6-10	Vértice primero del elemento
	11-15	Vértice segundo del elemento
	16-20	Vértice tercero del elemento
8/-		Uno por cada gdl en el cdg del elemento. Ver el orde en comentarios a la subrutina SIELAL:
	1-5	1 si ese gdl se elimina y 0 si no se elimina
9/-		Uno por cada condición tipo de continuidad impuesta en un lado interno
	1-5	Número de condición de continuidad
	6-10	Número de la derivada
	11-15	Número de lados en los que se impone la igualdad de la derivada anterior
10	1-5	Número de cargas puntuales
11/-		Si 10 no es 0. Uno por cada carga
	1-5	Número de vértice
	6-15	Carga en ese vértice dividida por el número de elementos de la malla que lo comparten
12	1-5	Número de cargas puntuales en puntos que no sean vértices
13/-		Si 12 no es 0. Uno por cada carga
	1-5	Número de la carga puntual
	6-15	Valor de la carga
	16-25	Coordenada X de la carga
	26-35	Coordenada Y de la carga
14	1-5	Número de elementos con carga uniforme
15/-		Si 14 no es 0. Uno por cada elemento cargado
	1-5	Número del elemento
	6-15	Carga uniforme en el elemento
16	1-5	Número de lados empotrados

17/-		<i>Si 16 no es 0. Uno por cada lado empotrado</i>
	1-5	<i>Primer nudo del lado empotrado</i>
	6-10	<i>Segundo nudo del lado empotrado</i>

18	1-5	<i>Número de lados apoyados</i>
----	-----	---------------------------------

19/-		<i>Si 18 no es 0. Uno por cada lado apoyado</i>
	1-5	<i>Primer nudo del lado apoyado</i>
	6-10	<i>Segundo nudo del lado apoyado</i>

20	1-5	<i>Número de nudos empotrados</i>
----	-----	-----------------------------------

21/-		<i>Si 20 no es 0. Uno por cada nudo empotrado</i>
	1-5	<i>Número del nudo empotrado</i>

22	1-5	<i>Número de nudos apoyados</i>
----	-----	---------------------------------

23/-		<i>Si 22 no es 0. Uno por cada nudo apoyado</i>
	1-5	<i>Número del nudo apoyado</i>

24/-		<i>Uno por cada nudo de apoyo especial</i>
	1-5	<i>Primer vértice del lado en que se encuentra el nudo</i>
	6-10	<i>Segundo vértice del lado en que se encuentra el nudo</i> <i>(si es un vértice coinciden los dos números)</i> <i>se utiliza el 0 si está libre y el 1 si coaccionado</i>
	11-15	<i>Primer grado de libertad</i>
	16-20	<i>Segundo grado de libertad</i>
	21-25	<i>Tercer grado de libertad</i>
	26-30	<i>Cuarto grado de libertad (éste y los siguientes si los</i> <i>hay, sólo se dan en los nudos intermedios de los lados)</i> <i>Ver explicación en el listado de la subrutina SUBID1</i>

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15
1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15
2	1	4	1	2	1	3	3	3	3	10.92		0.30		
3	4	2	1	3	3	3	3	3	10.92		0.30			
4	1													
5	1		0.			0.		1.0						
6	2		0.5			0.		1.0						
7	3		0.			0.5		1.0						
8	4		0.5			0.5		1.0						
9	1	1	2	4										
10	2	1	4	3										
11	1	1												
12	2	1												
13	3	1												
14	1	3	3											
15	1													
16	4		0.125											
17	0													
18	2													
19	1		0.											
20	2		0.											
21	0													
22	2													
23	1	2												
24	1	3												
25	0													
26	0													
27	2	4	1	1	1									
28	3	4	1	1	1									
29	4	4	0	1	1									

Tabla 4.3

GRADO DEL POLINOMIO	:	3
NUMERO DE PUNTOS DE INTEGRACION	:	3
NUMERO DE ELEMENTOS	:	2
NUMERO DE VERTICES	:	4
NUMERO DE NUDOS	:	9
NUMERO DE GDL TOTAL	:	17
NUMERO DE GDL EN UN ELEMENTO	:	12
SEMIANCHO DE BANDA	:	17
NUMERO DE GDL EN UN NUDO INTERMEDIO	:	1
NUMERO DE GDL EN EL CENTRO DEL TRIANGULO COMPLETO	:	3
MODULO DE ELASTICIDAD	:	10.92
COEFICIENTE DE POISSON	:	.3000
NUMERO DE CASOS DE CARGA	:	1
NUMERO MAXIMO DE CARGAS PUNTUALES	:	3
NUMERO DE NUDOS CON APOYO ESPECIAL	:	3
NUMERO MAXIMO DE NUDOS USADO	:	16
NUMERO DE CONDICIONES DE CONTINUIDAD POR LADO	:	1

COORDENADAS DE LOS NUDOS Y ESPESOR

NUDO	X	Y	ESPESOR
1	.0000E+00	.0000E+00	1.000
2	.5000	.0000E+00	1.000
3	.0000E+00	.5000	1.000
4	.5000	.5000	1.000

CONECTIVIDAD DE LOS ELEMENTOS

ELEMENTO	NUDO 1	NUDO 2	NUDO 3
1	1	2	4
2	1	4	3

NUMERO DE CASO DE CARGA 1

FUERZAS EN LOS NUDOS

Figura 4.4.

NUDO	CARGA
1	.0000E+00
2	.0000E+00
3	.0000E+00
4	.1250

CARGAS UNIFORMES

ELEMENTO	CARGA
1	.0000E+00
2	.0000E+00

MATRICES DE CONDICIONES DE APOYO

LADOS EMPOTRADOS

LE(I,J)=K (I,J=NUDOS DEL LADO)
(K=0 LIBRE;K=1 COACCIONADO)

I	J	1	2	3	4
1		0	0	0	0
2		0	0	0	0
3		0	0	0	0
4		0	0	0	0

LADOS APOYADOS

LA(I,J)=K (I,J=NUDOS DEL LADO)
(K=0 LIBRE;K=1 COACCIONADO)

I	J	1	2	3	4
1		0	1	1	0
2		1	0	0	0
3		1	0	0	0
4		0	0	0	0

NUDOS EMPOTRADOS

NE(I)=J (I=NUDO)
(J=0 LIBRE;J=1 COACCIONADO)

I	J	1
1		0
2		0
3		0
4		0

NUDOS APOYADOS

NA(I)=J (I=NUDO)
(J=0 LIBRE;J=1 COACCIONADO)

I	J	1
1		0
2		0

Figura 4.4 (continuación 1)

3 0
4 0

MATRIZ DE C.C. ESPECIALES

IDI(I,J)=K (I=NUMERO DE ORDEN ; J=1,2 VERTICES QUE DEFINEN EL NUDO ;)
 (J=3... GDL DEL NUDO)
 (K=0 LIBRE ; K=1 COACCIONADO)

I	J	1	2	3	4	5
1		2	4	1	1	1
2		3	4	1	1	1
3		4	4	0	1	1

MATRICES DE CONTINUIDAD

MATRIZ DE ELIMINACION

IEL(I)=K (I=NUMERO DE GDL CENTRAL W(=1);WX(=2);WY(=3)...)
 (K=0 NO SE ELIMINA)
 (K=1 SI SE ELIMINA)

I	J	1
1		1
2		1
3		1

MATRIZ DE CONDICIONES DE CONTINUIDAD

ICLAD(I,J)=K (I=NUMERO DE CONDICION DE LADO)
 (J=1 K=NUMERO DE LA DERIVADA)
 (J=2 K=NUMERO DE LADOS EN LOS QUE SE IMPONE ESA IGUALDAD)

I	J	1	2
1		3	3

Figura 4.4. (continuacion 2)

I	J	1	
1		.00000E+00	-.16875E+00
2		.00000E+00	.14063E-01
3		.31250E-01	-.52042E-17
4		.10417E-01	.12500E+00
5		.00000E+00	-.10417E-01
6		.00000E+00	-.23958E-01
7		.00000E+00	.43750E-01
8		.00000E+00	.36458E-02
9		.00000E+00	.31250E-02
10		.00000E+00	-.27083E-01
11		-.56379E-17	-.58926E-01
12		-.23438E-01	.00000E+00

NUMERO DE ELEMENTO : 1
 NUMERO DE VERTICE : 1

MATRIZ XMOM

I	J	1
1		-.17347E-17
2		.27756E-16
3		-.87500E-01

MATRIZ XCORT

I	J	1
1		.33307E-15
2		.50000E+00
3		.52736E-15
4		.67500E+00

NUMERO DE ELEMENTO : 1
 NUMERO DE VERTICE : 2

MATRIZ XMOM

I	J	1
1		-.27756E-16
2		-.76328E-16
3		.10408E-16

MATRIZ XCORT

I	J	1
1		-.11102E-15
2		.50000E+00
3		-.16653E-15
4		.67500E+00

NUMERO DE ELEMENTO : 1
 NUMERO DE VERTICE : 3

MATRIZ XMOM

I	J	1
1		.16250E+00
2		.16250E+00
3		.16468E-16

MATRIZ XCORT

I	J	1
1		

Figura 4.5

```

1      .44409E-15
2      .50000E+00
3      .69389E-15
4      .67500E+00

```

MATRICES DEL Y PEL

```

-----
I      J      1
1      .10417E-01      .12500E+00
2      .00000E+00      -.23958E-01
3      .00000E+00      -.10417E-01
4      .00000E+00      -.16875E+00
5      .31250E-01      -.26798E-16
6      .00000E+00      .14063E-01
7      .00000E+00      .43750E-01
8      .00000E+00      .31250E-02
9      .00000E+00      .36458E-02
10     .00000E+00      -.27083E-01
11     -.23438E-01      .57728E-16
12     .56379E-17      .58926E-01
NUMERO DE ELEMENTO :      2
NUMERO DE VERTICE  :      1

```

MATRIZ XMOM

```

-----
I      J      1
1      .11896E-16
2      .74457E-17
3      -.87500E-01

```

MATRIZ XCORT

```

-----
I      J      1
1      .50000E+00
2      .85042E-15
3      .67500E+00
4      .12897E-14
NUMERO DE ELEMENTO :      2
NUMERO DE VERTICE  :      2

```

MATRIZ XMOM

```

-----
I      J      1
1      .16250E+00
2      .16250E+00
3      .22954E-16

```

MATRIZ XCORT

```

-----
I      J      1
1      .50000E+00
2      .58114E-15
3      .67500E+00
4      .98721E-15
NUMERO DE ELEMENTO :      2
NUMERO DE VERTICE  :      3

```

MATRIZ XCOR

```

-----
I      J      1
1      .50000E+00
2      -.27756E-15
3      .67500E+00
4      -.24437E-15

```

MATRIZ XMOM

```

-----
I      J      1
1      -.13878E-16
2      .20817E-16
3      -.38164E-16

```

Figura 4.5 (continuación)

4.4.2.- Salida de resultados

En la figura 4.5 se da el listado de los resultados para el caso precedente. DEL es el vector de desplazamientos elementales y PEL el vector de fuerzas elementales correspondiente a aquellos desplazamientos. PEL se ha hallado utilizando la matriz de rigidez.

Si se tiene en cuenta la figura 4.6.

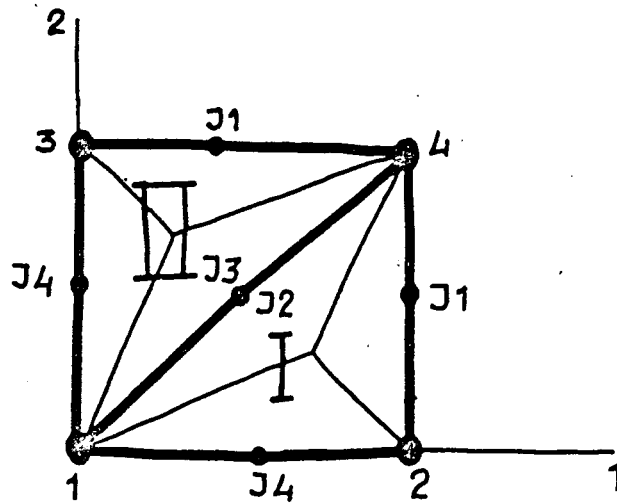


Figura 4.6

XMOM y XCORT son

$$XMOM = \begin{bmatrix} M_{11} \\ M_{22} \\ M_{12} \end{bmatrix}$$

$$XCORT = \begin{bmatrix} Q_1 \\ Q_2 \\ R_1 \end{bmatrix}$$

siguiendo la notación utilizada en el apéndice 1 . Además, hay que tener en cuenta que si un nudo corresponde a más de un elemento, se realiza la media que se tiene en la figura 4.7. Por otra parte, hay que señalar que los resultados de XMOM y XCORT son, a su vez, la media de los dos subelementos que confluyen en dicho vértice.

Los nudos que se significan por J, tienen la interpretación que se da en la figura 4.6.

Los MIJ son los momentos flectores y torsores. Los QI son los cortantes y los RI son las reacciones de Kirchhoff. Para interpretar los signos ver lo dicho en el apéndice 1.

		ELEMENTO 1		
		NUDO 1	NUDO 2	NUDO 4
FLECHA	W	.0000E+00	.0000E+00	.1042E-01
GIROS	WX	.0000E+00	.0000E+00	.0000E+00
	WY	.0000E+00	.3125E-01	.0000E+00
MOMENTOS	M11	.5081E-17	-.2776E-16	.1625
	M22	.1760E-16	-.7633E-16	.1625
	M12	-.8750E-01	.1041E-16	.1971E-16
CORTANTES	Q1	.2500	-.1110E-15	.2500
	Q2	.2500	.5000	.2500
	R1	.3375	-.1665E-15	.3375
	R2	.3375	.6750	.3375

		NUDO J 1	NUDO J 2	NUDO J 4
GIROS	WN	.0000E+00	-.5638E-17	-.2344E-01

		ELEMENTO 2		
		NUDO 1	NUDO 4	NUDO 3
FLECHA	W	.0000E+00	.1042E-01	.0000E+00
GIROS	WX	.0000E+00	.0000E+00	.3125E-01
	WY	.0000E+00	.0000E+00	.0000E+00
MOMENTOS	M11	.5081E-17	.1625	-.1388E-16
	M22	.1760E-16	.1625	.2082E-16
	M12	-.8750E-01	.1971E-16	-.3816E-16
CORTANTES	Q1	.2500	.2500	.5000
	Q2	.2500	.2500	-.2776E-15
	R1	.3375	.3375	.6750
	R2	.3375	.3375	-.2444E-15

		NUDO J 1	NUDO J 4	NUDO J 3
GIROS	WN	.0000E+00	-.2344E-01	.5638E-17

Figura 4.7

CAPITULO 5

EXPERIMENTACION NUMERICA

5.- EXPERIMENTACION NUMERICA

5.1.- Planteamiento general

Para poder hacer un estudio de la bondad del método utilizado, se han comparado los resultados obtenidos con distintas placas cuadradas isótropas, sometidas a distintos casos de carga y diversas condiciones de borde, (estos casos sencillos se encuentran tabulados y con resultados exactos).

Las condiciones de materiales consideradas son:

$$\text{Matriz de flexibilidad del material} = D \cdot \begin{bmatrix} 1 & \nu & 0 \\ \nu & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1-\nu}{2} \end{bmatrix}$$

donde

$$D = \frac{E h^3}{12(1-\nu^2)}$$

Para poder comparar con facilidad los resultados se han tomado como valores numéricos los siguientes:

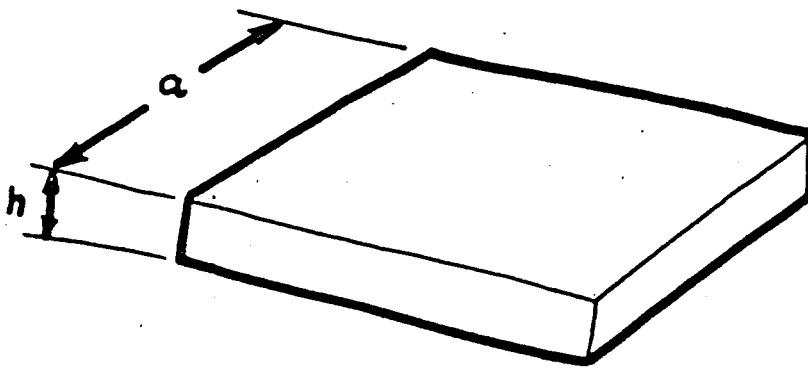
Coefficiente de Poisson $\nu = 0.30$

Módulo de Elasticidad $E = 10.92$

Espesor de la placa $h = 1.00$

Longitud del lado $a = 1.00$

de forma que el coeficiente D toma el valor 1.00 (figura 5.1).



$\nu = 0.30$
 $E = 10.92$
 $h = 1.00$
 $a = 1.00$

Figura 5.1

por las condiciones de simetría que existen se consideraran dos tipos de malla indicados en la figura 5.2.

En los resultados expuestos hay que tener en cuenta dos salvedades:

- Los esfuerzos infinitos que aparecen junto a la carga puntual no aparecen reflejados debido al método utilizado.
- Las reacciones de Kirchhoff R_1 y R_2 sólo tienen significado en el contorno.

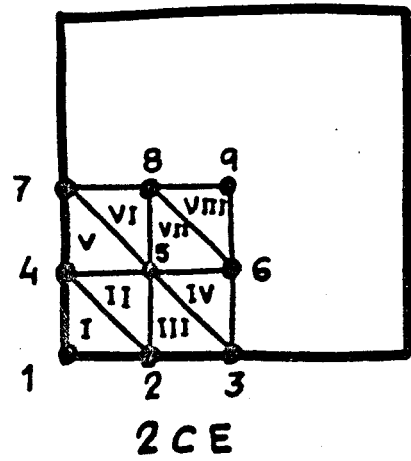
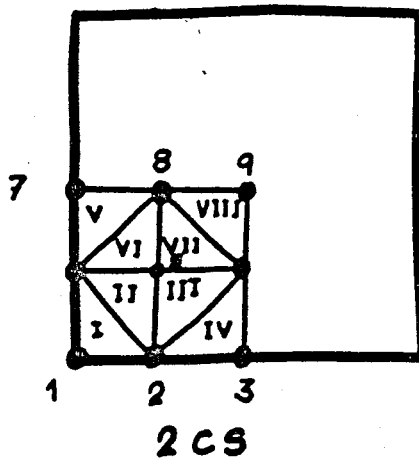
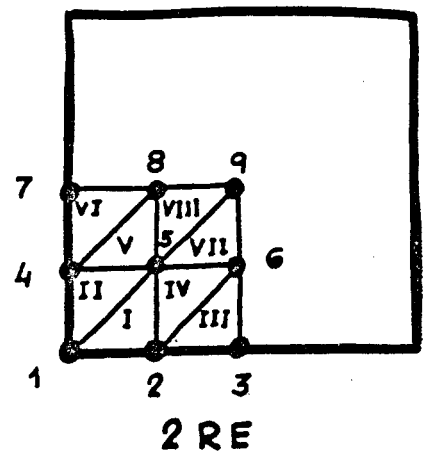
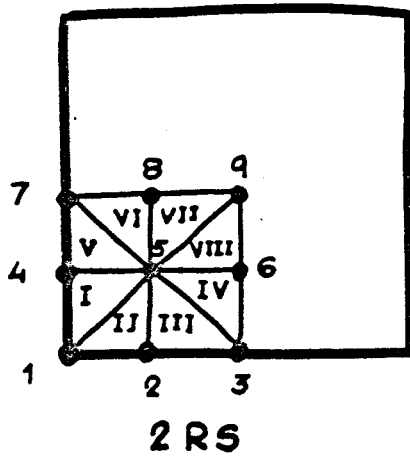
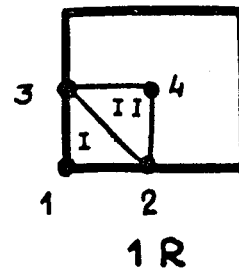
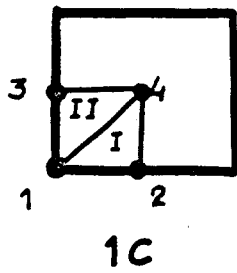
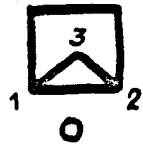


Figura 5.2

Hay que considerar, además, que para programas de elementos finitos se necesitan ordenadores de gran capacidad debido a los grandes sistemas que hay que resolver. Así pues, debido al computador utilizado, no se han podido presentar casos con mayor número de grados de libertad, ya sean debidos a una mayor discretización, o un grado de polinomio más grande.

Antes de comparar el tipo de malla, se van a utilizar las que en la figura 5.2 son designadas por 1R y 2RE, para casos de carga uniforme y puntual. El tipo de apoyo será empotrado en todo su contorno, apoyado en todo su contorno o apoyado en sus cuatro esquinas.

La simbología utilizada para cargas y apoyos es la señalada en la figura 5.3.

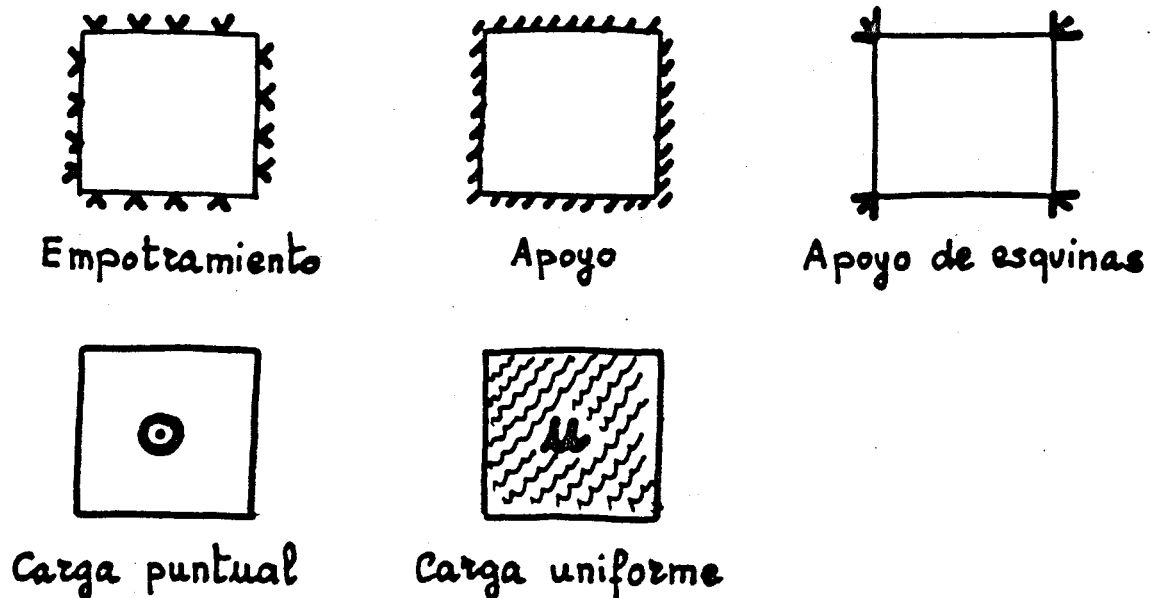


Figura 5.3

El orden de estudio es el que se plantea en la figura 5.4. Las distintas variantes se han dispuesto de menor a mayor dificultad.

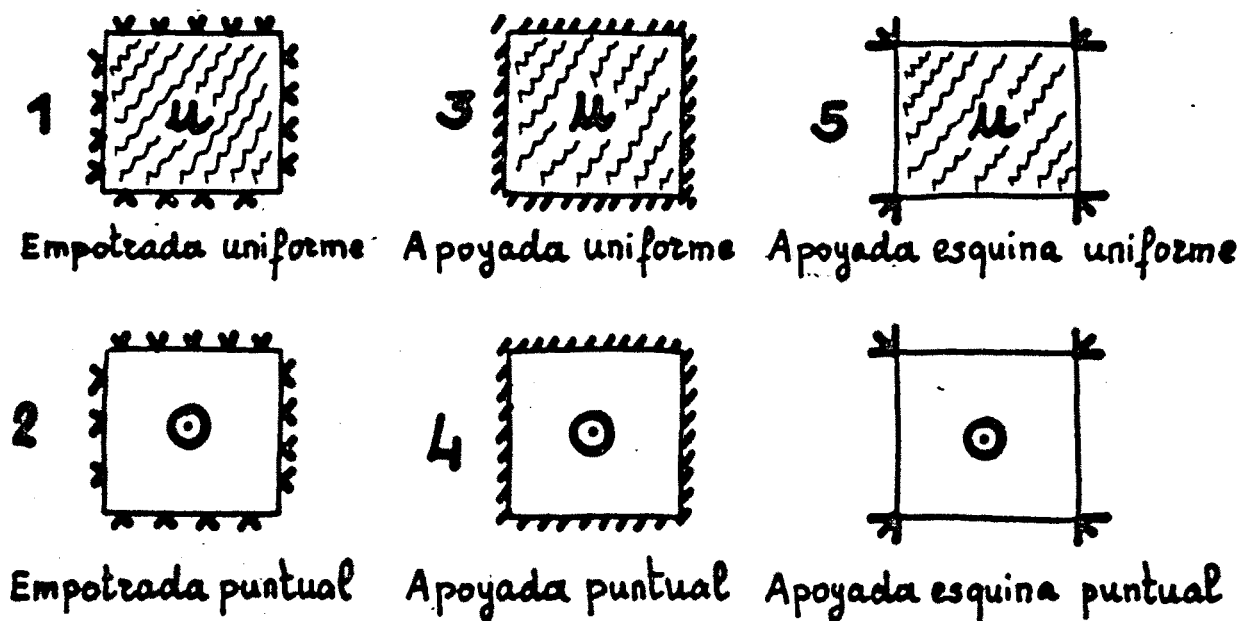


Figura 5.4

Los valores exactos utilizados se recuadran en las tablas, con fondo oscuro indicando su procedencia. Los datos que no se dan en esas referencias se han tomado de la publicación de Diaz del Valle y Samartín, que utilizan hiperelementos.

5.2.- Placa cuadrada empotrada en su contorno sometida a carga uniforme

En la tabla 5.1 se detallan los resultados obtenidos. Se puede observar unos errores de 0,5% (Flechas), 4,4% (Momentos) y 6.2% (Reacciones de Kirchhoff). (Evans³⁷).


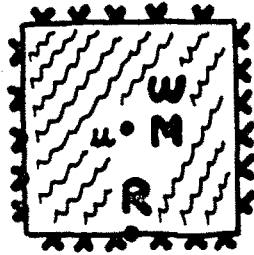
Placa cuadrada de lado a , empotrada en su contorno, con carga uniforme q										
		W : flecha en el centro $/(qa^4/D)$ M : momento flector en el centro $/(qa^2)$ M_1 : momento en centro lado según dirección 1/ qa^2 M_2 : momento en centro lado según dirección 2/ qa^2 Q : cortante en el centro del lado $/qa$ R : reacción de Kirchhoff en el centro del lado $/qa$				$NGL1$ = gdl totales $NGL2$ = gdl activos				
		GRADO	MALLA	NGL1	NGL2	W	M	M_1	M_2	Q
3	4	12	1	0.0007218	0.01126					
4		18	3	0.001310	0.03945					
5		24	5	0.001263	0.02382					
6		30	7	0.001263	0.02009					
7		36	9	0.001266	0.02425					
										4.9%
3	1R	17	2	0.0005422	0.01480	-0.003904	-0.01301	0.05205	0.04750	
4		27	6	0.0012921	0.03343	-0.01123	-0.03744	0.2221	0.2302	
5		37	10	0.001265	0.02466	-0.01511	-0.05038	0.4319	0.4540	
6		47	14	0.001263	0.02056	-0.01547	-0.05156	0.4515	0.4714	
7		57	18	0.001266	0.02410	-0.01546	-0.05152	0.4545	0.4672	
										0.48% 4.33%
3	2RE	43	16	0.001176	0.02296	-0.01015	-0.03383	0.1672	0.1418	
4		75	36	0.001265	0.02397	-0.01454	-0.04847	0.3612	0.3643	
										0.40% 3.77%
Exacto	Evans			0.00126	0.0231	-0.01540	-0.0513	0.4405	0.4403	

Tabla 5.1

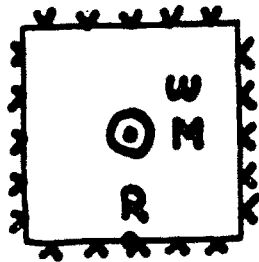


Flecha	0.5%
Momento centro	4.4%
Reacción kirchhoff	6.2%

Figura 5.5

5.3.- Placa cuadrada empotrada con carga puntual en el centro

En la tabla 5.2 se recogen los resultados. Los errores son -0.09% (Flechas), -2,07% (Momentos) y 17,25% (Reacciones de Kirchoff). (Young¹¹²).



Flecha	-0.09%
Momento	- 2.07%
Reacción de kirchhoff	17.25%

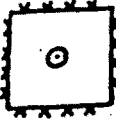
Figura 5.6

5.4.- Placa cuadrada simplemente apoyada y con carga uniforme

De lo que se expone en la tabla 5.3 se pueden ver los errores siguientes:

0% (Flechas), -0,38% (Momentos) y 2,55% (Reacciones de Kirchoff). (Timoshenko¹⁰²).

Placa cuadrada de lado a , empotrada en su contorno, carga puntual en el centro de valor P



W : flecha central $/(Pa^2/D)$
 M_1 : momento en el centro lado según dirección 1/P
 M_2 : momento en el centro lado según dirección 2/P
 Q : cortante en el centro del lado $/(P/a)$
 R : reacción de Kirchhoff en el centro del lado $/(P/a)$
 $NCL1$: número total de gdl.
 $NCL2$: número de gdl activos.

GRADO	MALLA	NCL1	NCL2	W	M_1	M_2	Q	R			
3	0	12	1	0.002016							
4		18	3	0.005332							
5		24	5	0.005509							
6		30	7	0.005552							
7		36	9	0.005592							
3		1R	17	2	0.001689	-0.01216	-0.04054	0.1622	0.1480		
4			27	6	0.005303	-0.03332	-0.111	0.2626	0.2793		
5	37		10	0.005548	-0.03799	-0.1266	0.8927	0.8420			
6	47		14	0.005562	-0.03672	-0.1224	0.6917	0.6973			
7	57		18	0.005595	-0.03848	-0.1283	0.9310	0.9384			
					-0.09%	-2.07%			17.25%		
Exacto	Young			0.00560	-0.0377	-0.1257	0.80021	0.80032			

Tabla 5.2

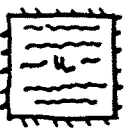
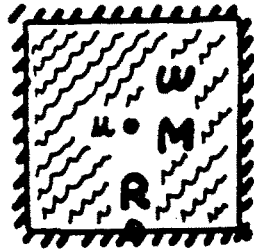
Placa cuadrada, simplemente apoyada carga uniforme q										
		W : flecha en el punto medio $/(qa^4/D)$ M : momento flector en el centro $/(qa^2)$ R_x : reacción de esquinas /qa Q : cortante en el centro del lado /qa R : reacción de Kirchhoff en el centro del lado /qa NGL1: número total de gdl NGL2: número de gdl activos								
		GRADO	MALLA	NGL1	NGL2	W	M	M_x	Q	R
3	0	12	4	0.003893	0.05362	-0.05854				
4		18	7	0.004284	0.06843	-0.06080				
5		24	10	0.004095	0.03619	-0.04300				
6		30	13	0.004189	0.06161	-0.02122				
7		36	16	0.004097	0.03703	-0.013194				
						-22.6%				
3	1R	17	6	0.004155	0.06185	-0.06982	0.1930	0.2632		
4		27	12	0.004081	0.05470	-0.07576	0.2206	0.2950		
5		37	18	0.004062	0.04647	-0.06748	0.3120	0.4312		
6		47	24	0.004063	0.04817	-0.06576	0.3355	0.4372		
7		57	30	0.004062	0.04772	-0.06538	0.3362	0.4307		
					0%	-0.38%		-0.53%	2.55%	
Exacto	Timoshenko			0.004062	0.0479	-0.065	0.338	0.420		

Tabla 5.3

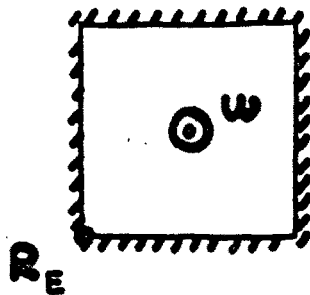


Flecha	0%
Momento	-0.38%
Reacción de Kizchhoff	2.55%

Figura 5.7

5.5.- Placa cuadrada simplemente apoyada y carga puntual

En la tabla 5.4 se puede ver que las desviaciones son: flecha (0,17%) y Reacciones de esquina (9.53%). (Timoshenko¹⁰²).



Flecha	0.17%
Reacción de esquina	0.53%

Figura 5.8

5.6.- Placa cuadrada simplemente apoyada en sus esquinas y carga uniforme

En la figura 5.9 se pueden ver los errores deducidos de la tabla 5.5. (Marcus⁶⁹).

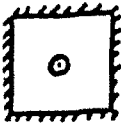
Placa cuadrada de lado a , apoyada en su contorno, carga puntual en el centro del valor P									
		<p> W: flecha en el centro $/(Pa/D)$ R_T: reacción de esquina $/P$ Q: cortante en el centro del lado $/(P/a)$ R: reacción de Kirchhoff en el centro del lado $/(P/a)$ NCL1: número total de gdl. NCL2: número de gdl activos. </p>							
		GRADO	MALLA	NCL1	NCL2	W	R_T	Q	R
3	4	12	4	0.01050	-0.18246				
4		18	7	0.01173	-0.09104				
5		24	10	0.01151	-0.11000				
6		30	13	0.01186	-0.00014				
7		36	16	0.01163	-0.06358				
					0.0022				
3		1R	17	6	0.01042	-0.17500	0.5000	0.6750	
4	27		12	0.01142	-0.11778	0.2323	0.4955		
5	37		18	0.01152	-0.14028	0.5921	0.8721		
6	47		24	0.01156	-0.10740	0.3104	0.5405		
7	57		30	0.01158	-0.13352	0.6312	0.8976		
				-0.172	9.532				
3	2RE	43	24	0.01128	-0.13664	0.3412	0.4944		
4		75	48	0.01154	-0.12394	0.4502	0.7025		
				-0.912	1.672				
Exacto	Timoshenk			0.01160	-0.1219	0.417	0.621		

Tabla 5.4

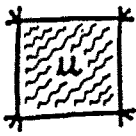
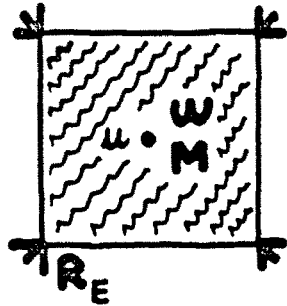
Placa cuadrada de lado "a", apoyada en sus cuatro esquinas, con carga uniforme q									
		<p>W : flecha en el centro $/(qa^4/D)$ M : momento en el centro $/(qa^2)$ W₁ : flecha en el centro del lado $/(qa^4/D)$ R_E : reacción de esquina $/(qa^2)$ NCL1: número total de gdl NCL2: número de gdl activos</p>							
		GRADO	MALLA	NCL1	NCL2	W	M	W ₁	R _E
3	4	12	6	0.02833	0.1374		0.16346		
4		18	10	0.02545	0.08725	0.01831	0.2082		
5		24	14	0.02642	0.1385	0.01843	0.2318		
6		30	18	0.02582	0.08588	0.01845	0.18140		
7		36	22	0.0262	0.1379	0.01851	0.18854		
3		18	17	11	0.0250	0.1212	0.01764	0.17256	
4	27		19	0.02550	0.1112	0.01774	0.2280		
5	37		27	0.02551	0.1114	0.01775	0.2334		
6	47		35	0.02551	0.1120	0.01775	0.2380		
7	57		43	0.02551	0.1116	0.01775	0.2410		
				2.45%	2.39%		-3.6%		
3	28E	43	33	0.02542	0.1071	0.01774	0.2146		
4		75	61	0.02551	0.1116	0.01775	0.2354		
Exacto	Marques			0.0249	0.109	0.0180	0.250		

Tabla 5.5

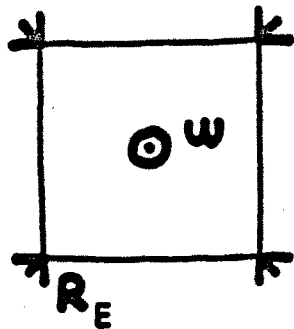


Flecha 2.45%
Momento 2.39%
Reacción de esquina -3.6%

Figura 5.9

5.7.- Placa cuadrada simplemente apoyada en sus esquinas y carga puntual

Los resultados y errores se resumen en la figura 5.10 y tabla 5.6. (SAPA-LCCT9³⁸).



Flecha 0.20%
Reacción de esquina -7%

Figura 5.10

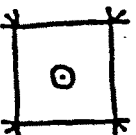
Placa cuadrada de lado "a", apoyada en sus cuatro esquinas, con carga puntual P en el centro											
		<p>W : flecha en el centro $/(Pa^2/D)$ W_1 : flecha en el centro del lado $/(Pa^2/D)$ M : momento en el centro $/P$ R_E : reacción de esquina $/(P/a)$ NCL1: número total de gdl NCL2: número de gdl activos</p>									
		GRADO	MALLA	NCL1	NCL2	W	W_1	M	R_E		
3	1R	12	6	0.04134			0.09770				
4		18	10	0.03854	0.02276		0.2390				
5		24	14	0.04010	0.02366		0.2186				
6		30	18	0.03930	0.02335		0.2120				
7		36	22	0.03790	0.02379		0.16082				
3		1R	17	11	0.03765	0.02282	0.2569	0.13612			
4			27	19	0.03891	0.02286	0.2067	0.2658			
5	37		27	0.03907	0.02291	0.2009	0.2100				
6	47		35	0.03911	0.02291	0.2038	0.2540				
7	57		43	0.03912	0.02291	0.2017	0.2260				
				0.201			-7%				
3	2RÉ	43	33	0.03866	0.02289	0.2288	0.2148				
4		75	61	0.03949	0.02397	0.1864	0.2356				
Exacto	SAP4-LCC79			0.03904	0.02284	0.16217	0.2430				

Tabla 5.6

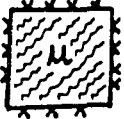
Placa cuadrada de lado a, empotrada en su contorno, carga uniforme q										
		W : flecha en el centro $/(qa^4/D)$ M : momento flector en el centro $/(qa^2)$ M ₁ : momento en centro lado según dirección 1/qa ² M ₂ : momento en centro lado según dirección 2/qa ² Q : cortante en el centro del lado /qa R : reacción de Kirchhoff en el centro del lado /qa				NCL1 = gdl totales NCL2 = gdl activos				
		GRADO	HALLA	NCL1	NCL2	W	M	M ₁	M ₂	Q
3	1C	17	2	0.0003024	0.009434	-0.0009979	-0.006078	0.01089	0.009616	
4		27	6	0.001235	0.01798	-0.01572	-0.04613	0.3404	0.3944	
5		37	10	0.001261	0.02665	-0.01675	-0.095465	0.5317	0.5737	
6		47	14	0.001265	0.02271	-0.01536	-0.05148	0.4477	0.4448	
7		57	18	0.001265	0.02287	-0.01537	-0.05126	0.4318	0.4327	
				0.40%	-1%			-1.98%	-1.73%	
3	2RS	43	16	0.001251	0.02638	-0.01240	-0.04001	0.1987	0.2233	
4		75	36	0.001264	0.02397	-0.01594	-0.05297	0.4634	0.4867	
				0.32%	3.77%			5.20%	10.54%	
3	2CS	43	16	0.001110	0.01905	-0.01017	-0.03388	0.1550	0.1495	
4		75	36	0.001265	0.02250	-0.01458	-0.04860	0.3636	0.3668	
				0.40%	-2.60%			-17%	-16.69%	
3	2CE	43	16	0.001110	0.01819	-0.01062	-0.03376	0.1605	0.1835	
4		75	36	0.001264	0.02268	-0.01592	-0.05194	0.4573	0.4793	
				0.32%	-1.82%			3.81%	8.86%	
Exacto	Evans			0.00126	0.0231	-0.01540	-0.0513	0.4405	0.4403	

Tabla 5.7

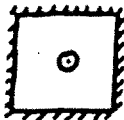
Placa cuadrada de lado a , apoyada en su contorno, con carga puntual P centrada										
		W : flecha en el centro $/(Pa/D)$ R_L : reacción de esquina $/P$ Q : cortante en el centro del lado $/(P/a)$ R : reacción de Kirchhoff en el centro del lado $/(P/a)$ NCL1: número total de gdl NCL2: número de gdl activos								
		GRADO	MALLA	NCL1	NCL2	W	R_L	Q	R	
3	1C	17	6	0.008890	-0.09970	0.2071	0.2752			
4		27	12	0.01134	-0.12172	0.4399	0.7619			
5		37	18	0.01134	-0.12196	1.019	1.406			
6		47	24	0.01158	-0.12188	-0.02237	0.1936			
7		57	30		0.01159	-0.12156	0.6095	0.7720		
					-0.09%	-0.28%				
3	2RS	43	24	0.01131	-0.13882	0.3556	0.5370			
4		75	48	0.01154	-0.12358	0.4731	0.7368			
				-0.52%	1.38%					
3	2CS	43	24	0.01108	-0.11236	0.3372	0.5495			
4		75	48	0.01154	-0.12198	0.4206	0.6672			
				-0.52%	0.07%					
3	2CE	43	24	0.01097	-0.11136	0.2523	0.4393			
4		75	48	0.01154	-0.13188	0.4946	0.7686			
				-0.52%	8.19%					
Exacta	Timoshenko			0.01160	-0.1219	0.417	0.621			

Tabla 5.8

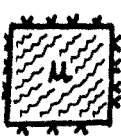
Placa cuadrada de lado a, empotrada en su contorno, con carga uniforme q				Comparación de errores			
		W : flecha en el centro $/(qa^4/D)$ M : momento flector en el centro $/(qa^2)$ M ₁ : momento en centro lado según dirección 1/qa ² M ₂ : momento en centro lado según dirección 2/qa ² Q : cortante en el centro lado /qa R : reacción de Kirchhoff en el centro del lado /qa		NGL1 = gdl totales NGL2 = gdl activos			
		GRADO	MALLA	NGL1	NGL2	W	M
7	1R	57	18	0.40%	3.77%	-18.00%	-17.26%
7	1C	57	18	0.40%	-1.00%	-1.98%	-1.73%
4	2RS	75	36	0.32%	3.77%	5.20%	10.54%
4	2RE	75	36	0.40%	3.77%	-18%	-17.26%
4	2CS	75	36	0.40%	-2.60%	-17%	-16.69%
4	2CE	75	36	0.32%	-1.82%	3.81%	8.86%

Tabla 5.9

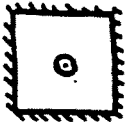
		Placa cuadrada de lado a, apoyada en su contorno, carga puntual en el centro del valor P				<u>Comparación de errores</u>			
		W : flecha en el centro (Pa/D) R _E : reacción de esquinas / P Q : cortante en el centro del lado (P/a) R : reacción de Kirchhoff en el centro del lado (P/a) NGL1 : número total de gdl. NGL2 : número de gdl activos.							
		GRADO	MALLA	NGL1	NGL2	W	R _E		
7	1R				-17%	9.53%			
7	1C				-0.09%	-0.28%			
4	2RS				-0.52%	1.38%			
4	2RE				-9.14%	1.67%			
4	2CS				-0.52%	0.07%			
4	2CE				-0.52%	1.67%			

Tabla 5.10

5.8.- Influencia del tipo de malla

Con la utilización de los valores de las tablas 5.1, 5.4, 5.7 y 5.8 se puede escribir la tabla 5.9. (Evans, Timos³⁷ henko¹⁰²).

Se deduce de la observación de la tabla anterior que producen mejores resultados las mallas tipo C, y en concreto las 1C y 2CE.

Lo mismo ocurre para el caso de placa apoyada, con carga puntual, como se deduce de la tabla 5.10.

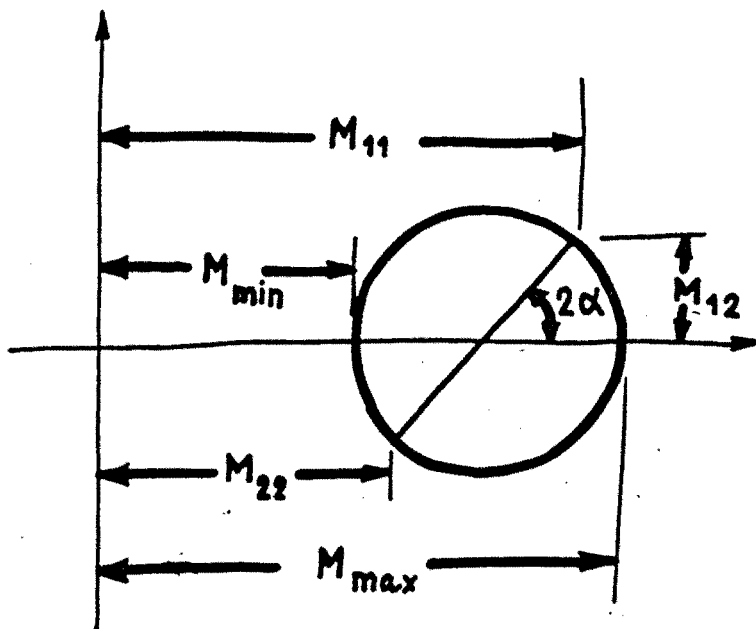
Hay que señalar que al ser elementos conformes la convergencia está asegurada para cualquier tipo de malla.

5.9.- Influencia del esviaje

Se van a estudiar placas oblicuas con ángulos de esviaje 30°, 45° y 60°. Las condiciones de sustentación van a ser simple apoyo en dos lados opuestos y libre en los otros dos, sometidas a carga uniforme.

Se ha considerado como módulo de Poisson ($\nu = 0.2$) y el módulo de elasticidad y el espesor de forma que el coeficiente D fuese 1.

Se han utilizado las fórmulas de Mörh (figura 5.11) para hallar los momentos principales y las direcciones principales.



$$M_{\max} = \frac{M_{11} + M_{22}}{2} + \sqrt{\left(\frac{M_{11} - M_{22}}{2}\right)^2 + M_{12}^2}$$

$$M_{\min} = \frac{M_{11} + M_{22}}{2} - \sqrt{\left(\frac{M_{11} - M_{22}}{2}\right)^2 + M_{12}^2}$$

$$\alpha = \frac{1}{2} \operatorname{arctg} \frac{2 M_{12}}{M_{11} - M_{22}}$$

Figura 5.11

5.9.1.- Placa esviada 30°

La losa tiene las dimensiones y discretización de la figura 5.12 ($a = 1$).

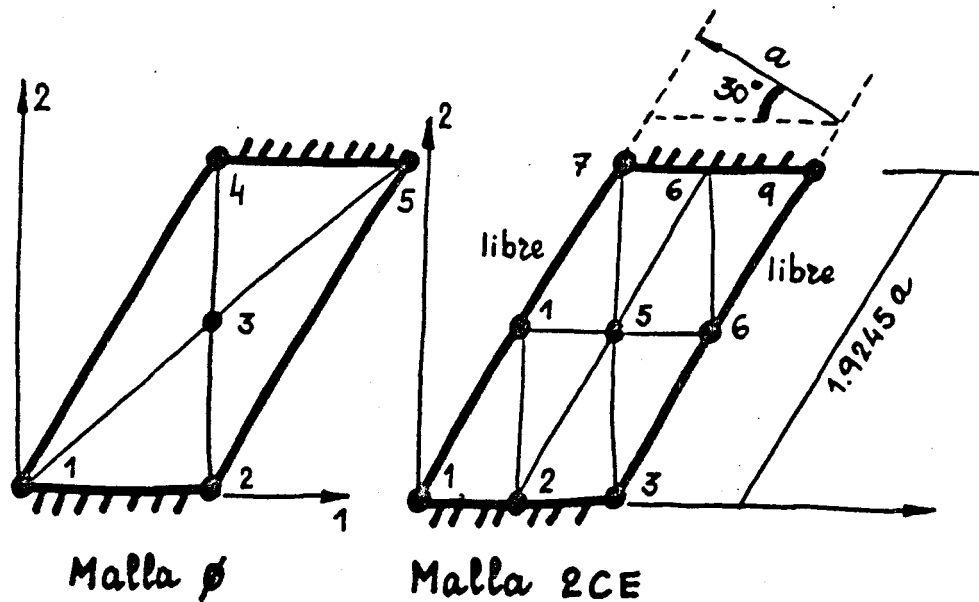


Figura 5.12


El resumen de resultados y errores se expresa en la ta
bla 5.11. (Jensen⁶¹).

En este caso se ve que se aproxima mejor elevando el grado de polinomio.

5.9.2.- Placa esviada 45°

En la figura 5.13 se dan las dimensiones ($a = 1$) y la discretización. En la tabla 5.12 los resultados. (Jensen⁶¹).

Placa oblicua 30°, apoyada en dos lados paralelos con carga uniforme q



W : flecha en el centro $/(qa^4/D)$

M : momento máximo en el centro $/(qa^2)$

θ_1 : giro según el eje 2

θ_2 : giro según el eje 1

M_1 : momento en el centro según la dirección 1 $/(qa^2)$

M_2 : momento en el centro según la dirección 2 $/(qa^2)$

M_{12} : momento torsor en el centro $/(qa^2)$

NGL1 : número total de gdl.

NGL2 : número de gdl activos.

GRADO	MALLA	NGL1	NGL2	W	M	θ_1	θ_2	M_1	M_2	M_{12}
6	4	71	57	0.1052 -11,07%	0.35329 4%	-0.266E-6	-0.1879E-5	0.03006	0.3522	0.01877
3	2X	43	31	0.1045	0.46850	0.241E-5	-0.127E-5	0.03693	0.3938	0.02578
4		75	59	0.1052 -11,07%	0.46789 27.14%	0.293E-4	-0.116E-4	0.03401	0.3545	0.22180
Exacto	Jensen			0.1183	0.368	0.164E-13	-0.208E-13	0.00154	0.36578	0.00463

Tabla 5.11


Placa oblicua 45° apoyada en dos lados paralelos, con carga uniforme q										
		W : flecha en el centro $/(qa^4/D)$ M : momento máximo en el centro $/(qa^2)$ e_1 : giro según el eje 2 e_2 : giro según el eje 1 M_1 : momento en el centro según la dirección 1 $/(qa^2)$ M_2 : momento en el centro según la dirección 2 $/(qa^2)$				M_{12} : momento torso en el centro $/(qa^2)$ NGL1: número total de gdl. NGL2: número de gdl activos.				
		GRADO	MALLA	NGL1	NGL2	W	M	e_1	e_2	M_1
6	4	71	57	0.06973 0.55X	0.29999 3.09X	-0.305E-6	0.114E-8	-0.02568	0.2896	0.05816
3	2CE	43	31	0.06642 -2.05X	0.29507 6.75X	0.145E-6	-0.283E-7	-0.03582	0.2881	0.04804
4				75	59	0.06935 -2.05X	0.31064 6.75X	0.248E-5	-0.197E-6	-0.02033
Exacto	Jensen			0.07080	0.291	0.143E-13	0.480E-13	-0.00603	0.29924	0.00533

Tabla 5.12

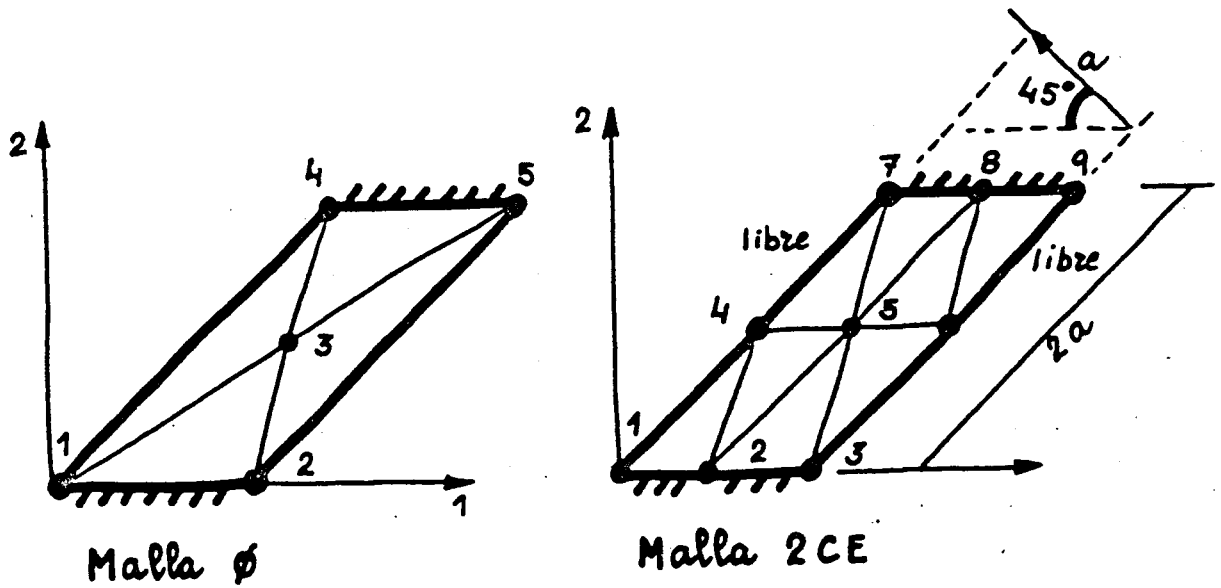


Figura 5.13

Como en el caso anterior se aproxima mejor elevando el grado del polinomio.

5.9.3.- Placa esviada 60°

Todos los datos y resultados se pueden ver en la figura 5.14 y en la tabla 5.13. (Jensen⁶¹).

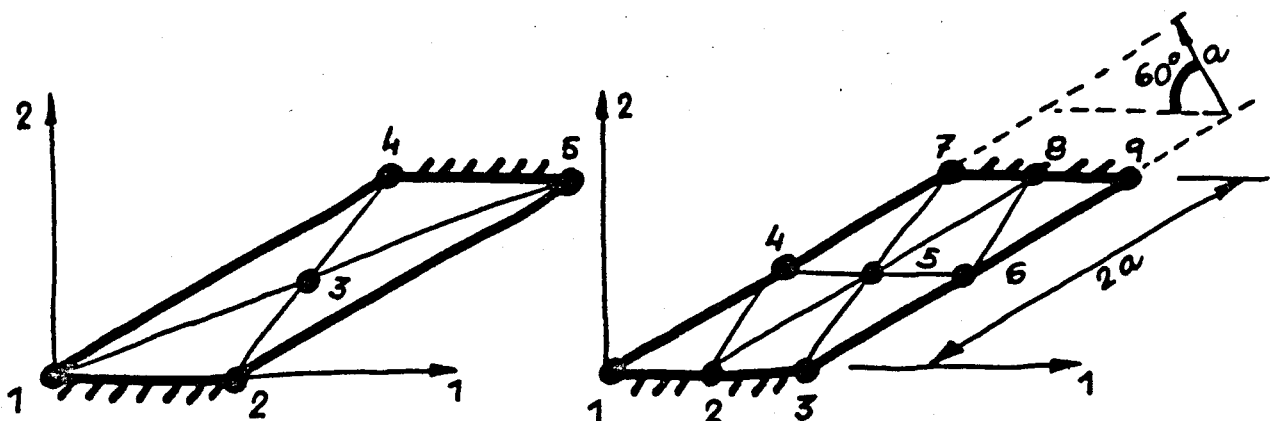


Figura 5.14

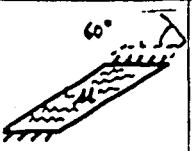
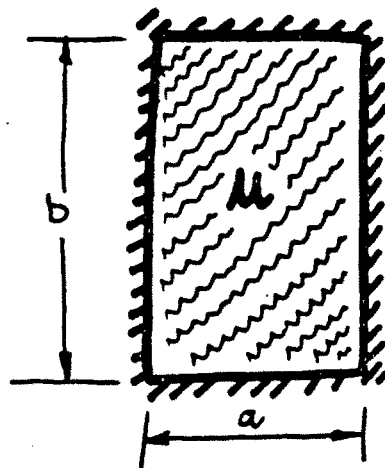
Placa oblicua 60° apoyada en dos lados paralelos con carga uniforme q										
		<p>W : flecha en el centro $/(qa^4/D)$ M : momento máximo en el centro $/(qa^2)$ θ_1 : giro según el eje 2 θ_2 : giro según el eje 1 M_1 : momento en el centro según la dirección 1 $/(qa^2)$ M_2 : momento en el centro según la dirección 2 $/(qa^2)$</p>				<p>M_{12} : momento torsor en el centro $/(qa^2)$ NCL1: número total de gdl. NCL2: número de gdl activas.</p>				
GRADO	MALLA	NCL1	NCL2	W	M	θ_1	θ_2	M_1	M_2	M_{12}
6	4	71	57	0.01768 -4.95%	0.1480 -10.84%	-0.426E-5	0.992E-6	-0.05182	0.1477	0.007786
3	2CE	43	31	0.01487	0.12848	-0.424E-6	0.256E-6	-0.02567	0.1276	0.01164
4		75	59	0.01742 -6.34%	0.16652 0.31%	-0.307E-5	0.622E-6	-0.03970	0.1662	0.008085
Exacto	Jensen			0.01860	0.166					

Tabla 5.13

Aquí, elevando el grado del polinomio se aproxima mejor en desplazamientos pero no en esfuerzos.

5.10.- Influencia del coeficiente de forma de los elementos

Se trata de experimentar cómo afecta el que dos de los lados del triángulo sean de tamaño sensiblemente mayor al otro. Para ello se ha estudiado tres casos, (Figura 5.15), de una losa simplemente apoyada y con carga uniforme.



1^{er} caso $\frac{b}{a} = 1.5$

2^{do} caso $\frac{b}{a} = 2.0$

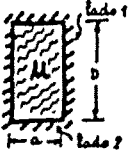
3^{er} caso $\frac{b}{a} = 3.0$

Figura 5.15

En las tablas 5.14, 5.15 y 5.16 se exponen los resultados de los casos en que la relación de lados es 1.5, 2.0 y 3.0 respectivamente. La discretización utilizada se expresa allí. Se ha utilizado un valor de ν igual a 0.3. (Timosenko¹⁰²).

Viendo los datos de las tablas anteriores se ve que el grado de aproximación es muy bueno, teniendo en cuenta la pequeña discretización hecha. En flechas y momentos la coincidencia es casi absoluta y en cortantes es menor, llegando en el caso más alargado a un error del 8%.

Placa rectangular ($b/a = 1.5$), simplemente apoyada con carga uniforme



W : flecha en el centro $/(q a^4/D)$
 M_{11} : momento central según la dirección 1/ (qa^2)
 M_{22} : momento central según la dirección 2/ (qa^2)
 Q_1 : cortante en centro del lado 1/ (qa)
 Q_2 : cortante en centro del lado 2/ (qa)
 R_1 : reacción de Kirchhoff en centro del lado 1/ (qa)

R_2 : reacción de Kirchhoff en centro del lado 2/ (qa)
 NGL1: número total de gdl
 NGL2: número de gdl activos

GRADO	MALLA	NGL1	NGL2	W	M ₁₁	M ₂₂	Q ₁	Q ₂	R ₁	R ₂
7	1R	57	30	0.007724	0.08092	0.09961	0.3906	0.3801	0.4641	0.5161
				0.05%	-0.34%		-7.86%		-4.51%	
3	2RE	43	24	0.007594	0.07365	0.04223	0.2293	0.1485	0.2808	0.2419
4		75	48	0.007724	0.08101	0.04989	0.4485	0.3477	0.5196	0.4764
				0.05%	-0.23%		5.78%		6.91%	
Exacto	Timoshenko			0.00772	0.0812	0.0498	0.424	0.363	0.486	0.480

Tabla 5.14

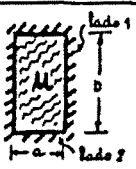
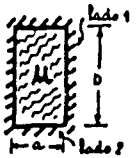
Placa rectangular (b/a=2.0), simplemente apoyada con carga uniforme q										
		<p>W : flecha en el centro $/(qa^4/D)$ M_{11} : momento central según la dirección 1/(qa^2) M_{22} : momento central según la dirección 2/(qa^2) Q_1 : cortante en centro del lado 1/(qa) Q_2 : cortante en centro del lado 2/(qa) R_1 : reacción de Kirchhoff en centro del lado 1/(qa)</p>				<p>R_2 : reacción de Kirchhoff en centro del lado 2/(qa) NCL1: número total de gdl NCL2: número de gdl activos</p>				
GRADO	MALLA	NCL1	NCL2	W	M_{11}	M_{22}	Q_1	Q_2	R_1	R_2
7	1R	57	30	0.01013 0X	0.1013 -0.39X	0.04601	0.3943 -15.2X	0.3954	0.4451 -11.51X	0.5475
3	2RE	43	24	0.009996	0.09480	0.03940	0.2841	0.1295	0.3200	0.2268
4		75	48	0.01013 0X	0.1016 -0.10X	0.04651	0.4990 7.31X	0.3249	0.5426 7.87X	0.4666
Exacto	Timoshenko			0.01013	0.1017	0.0464	0.465	0.370	0.503	0.496

Tabla 5.15

Placa rectangular (b/a=3.0), simplemente apoyada con carga uniforme q



W : flecha en el centro $/(qa^4/D)$

M_{11} : momento central según la dirección 1/ (qa^2)

M_{22} : momento central según la dirección 2/ (qa^2)

Q_1 : cortante en centro del lado 1/ (qa)

Q_2 : cortante en centro del lado 2/ (qa)

R_1 : reacción de Kirchhoff en centro del lado 1/ (qa)

R_2 : reacción de Kirchhoff en centro del lado 2/ (qa)

NGL1: número total de gdl

NGL2: número de gdl activos

GRADO	MALLA	NGL1	NGL2	W	M_{11}	M_{22}	Q_1	Q_2	R_1	R_2
7	1R	57	30	0.01223	0.1178	0.03970	0.3809	0.3806	0.4064	0.5385
				0X	-0.93X		-22.74X		-19.52X	
3	2RE	43	24	0.01221	0.1163	0.03757	0.3519	0.1006	0.3681	0.1852
4		75	48	0.01223	0.1189	0.04071	0.5346	0.2618	0.5469	0.4083
				0X	0X		-8.44X		8.30X	
Exacto	Timoshenko			0.01223	0.1189	0.0406	0.493	0.372	0.505	0.498

Tabla 5.16

5.11.- Aplicación al cálculo de tableros de puentes

Se va a estudiar un caso que pueda ilustrar las posibilidades del método expuesto. Se ha utilizado una discretización muy pequeña para el grado de polinomio utilizado (4), pero vale como ejemplo ilustrativo.

Se va a analizar un paso en bifurcación (puente "pantallón") de autopista, que se representa en la figura 5.16.

Algunos resultados se han expuesto en la figura 5.17.

Se ve que la aproximación es bastante buena ya que el polinomio utilizado por Díaz del Valle y Samartín³³ es de grado 7.

De todas formas si se efectúa el equilibrio estático se tiene:

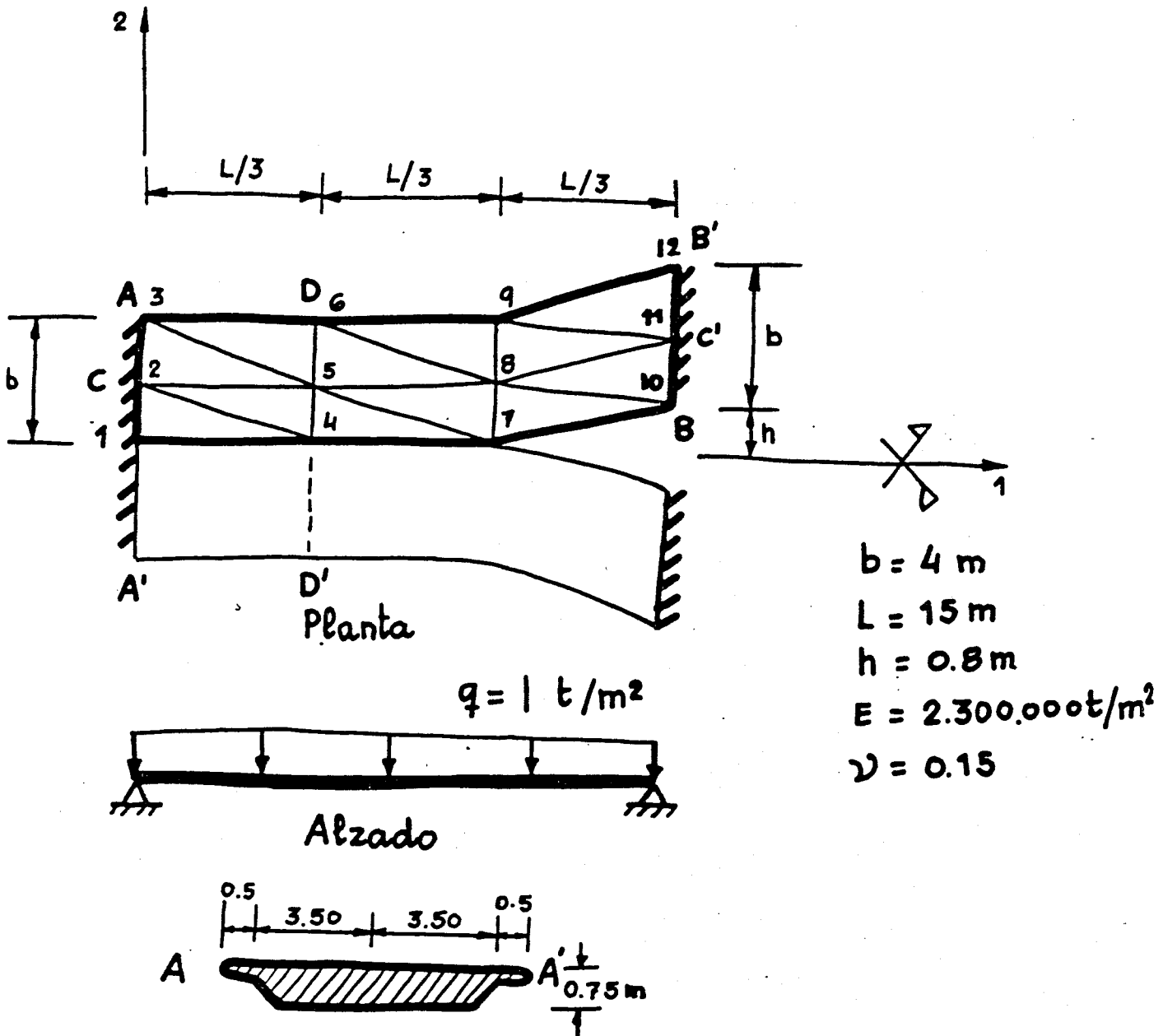
-Equilibrio de fuerzas verticales:

$$(5.59 + 6.23x^2 + 6.65) x^2 + (4.70 + 6.02x^2 + 6.37) x^2 = 95.62 t .$$

que frente a 120 t produce un error de un 40%

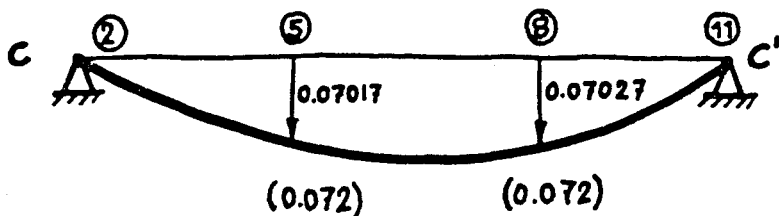
-Equilibrio de momentos en la sección DD.

$$M_{\text{ext}} = \frac{1}{2} q \left(\frac{L}{6}\right)^3 = 100 \text{ mxt}$$

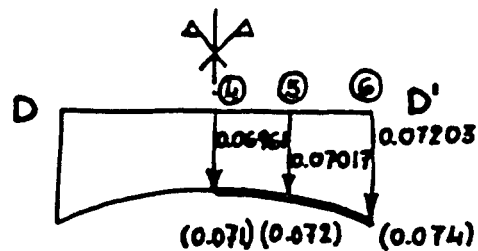


Sección transversal A-A'

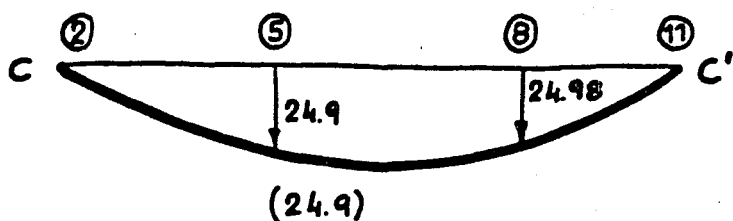
Figura 5.16.- Tablero bifurcación. Discretización en elementos



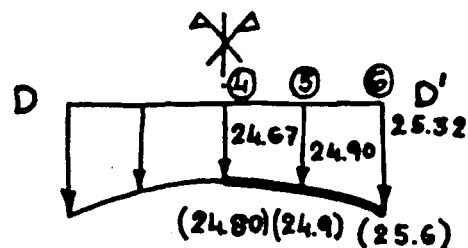
Flechas sección C-C'



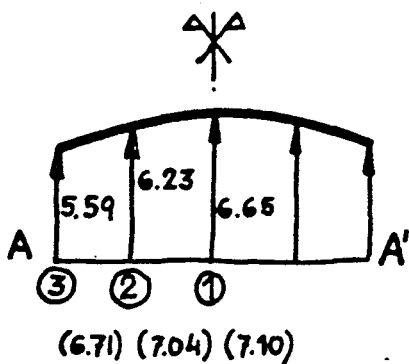
Flechas sección D-D'



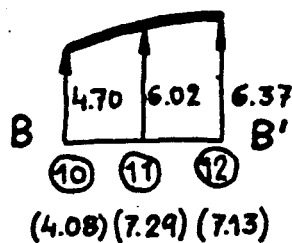
Momentos M_{11} en sección C-C'



Momentos M_{11} en sección D-D'



Reacción en A-A'



Reacción en B-B'

Figura 5.17.- Flechas, esfuerzos y reacciones. Entre paréntesis los valores de Díaz del Valle y Samartín³³. Dentro de un círculo la numeración de la malla.

$$M_{\text{reac}} = -49.40 \cdot 5 = -247.00 \text{ mxt}$$

que frente al integrado de 199.58 da un error del 26%.

Estos errores se deben a la débil discretización hecha.

5.12.- Comparación con otros elementos de flexión

Siguiendo la notación de la tabla 5.18 se van a presentar una serie de figuras comparando diversos elementos de flexión.

ELEMENTOS CUADRILATEROS

- 1.- Elemento ACM)12 gdl .
- 2.- Elemento LCCT-9(HCT). Dos triángulos LCCT-9 con 12 gdl exteriores.
- 3.- Elemento LCCT-12. Dos triángulos LCCT-12 con 16 gdl exteriores y 1 gdl interior.
- 4.- Q-19. 4 triángulos LCCT-11 con 12 gdl exteriores y 7 gdl interiores.
- 5.- Elemento de Fraejijs de Veubeké.³⁹ 16 gdl exteriores.
- 6.- Elemento de Hughes y Taylor.⁵⁷ 16 gdl exteriores.
- 7.- Bogner-Fox-Schmidt.¹⁶ 16 gdl exteriores.

ELEMENTOS TRIANGULARES

- 1.- Bazeley, Cheung, Irons y Zienkiewicz.¹² Elemento no conforme. 9 gdl exteriores.
 - 2.- Morley.⁷⁹ Triángulo de curvatura constante. 6 gdl exteriores.
 - 3.- Bazeley, Cheung, Irons y Zienkiewicz.¹² Elemento conforme. 9 gdl exteriores.
 - 4.- Clough y Tochter.²⁴ Elemento conforme. 9 gdl exteriores.
 - 5.- Felippa.³⁸ Elemento conforme. 12 gdl exteriores.
 - 6.- Hiper elemento de Diaz del Valle y Samartín.³³
 - 7.- Elemento simple de grado 7. (ES7)
-

TABLA 5.18.- Descripción de Elementos Finitos.

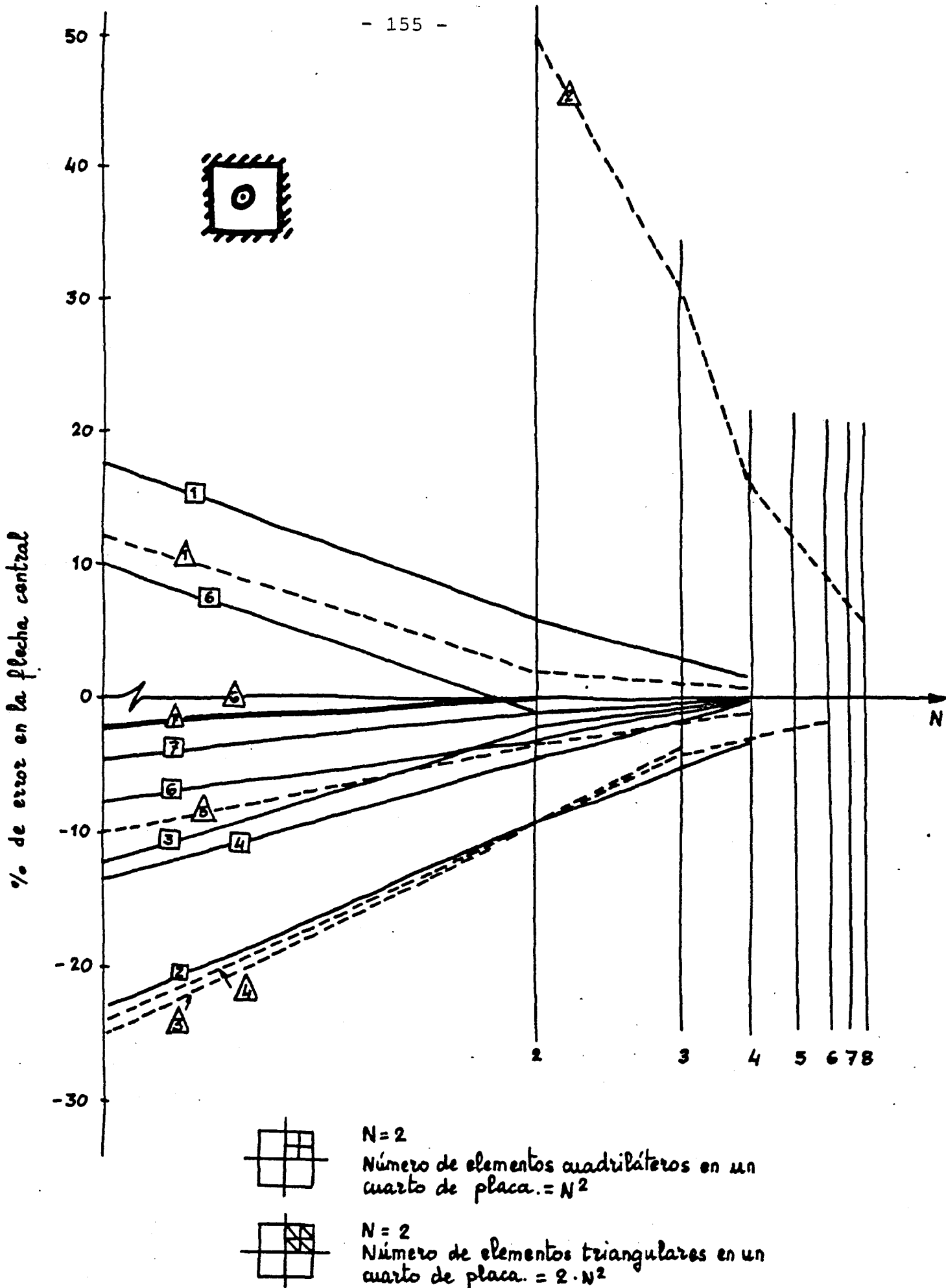


Figura 5.18.- Placa cuadrada simplemente apoyada bajo carga concentrada centrada. Comparación de la flecha en el centro en función del número de elementos utilizadas

En el caso anterior se ha comparado la velocidad de convergencia de los distintos tipos de elementos versus número de elementos en que se discretiza la placa, estimándose, sin embargo, que es más objetivo llevar a cabo esta comparación en función del número total de grados de libertad de toda la estructura. Por este motivo, se comparan los resultados obtenidos con el elemento simple de grado 7 y los calculados con los siguientes elementos:

- ACM (Adim, Clough y Melosh)²
- CF (Clough y Felippa)²³
- M (Melosh)⁷³
- P (Pappenfuss)⁸¹
- DV (Fraeijs de Veubeke)³⁹
- W (Wegmuller)¹⁰⁵
- B (Bogner, Fox y Schmit)⁶
- T1 (Díaz del Valle y Samartín)³³
- ES7 (Desarrollado en esta Tesis)

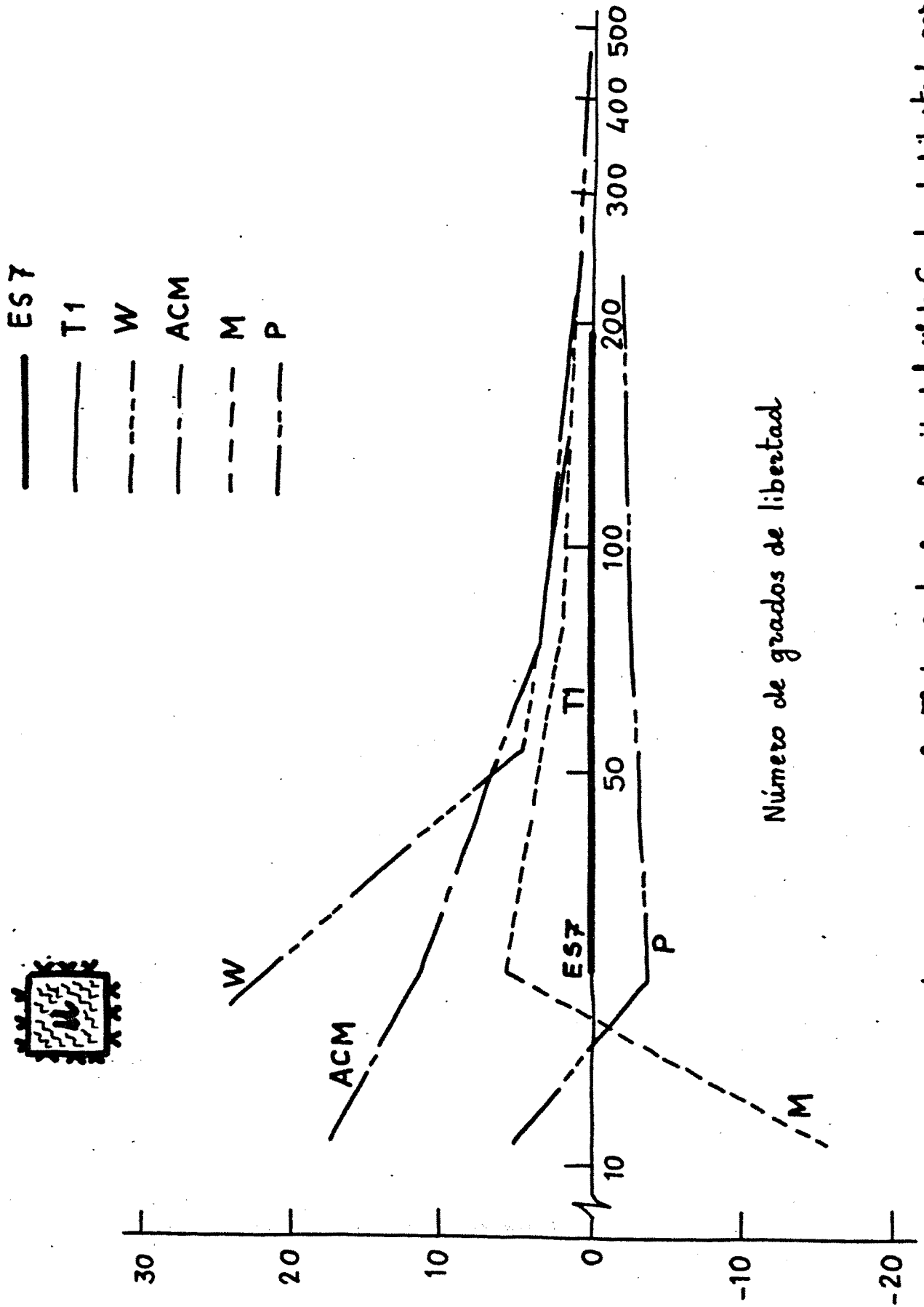


Figura 5.19.- Porcentaje de Error en la Flecha Central en función del N° de Grados de Libertad para el caso de Placa cuadrada empotrada en sus cuatro lados y sometida a carga uniforme

ES7

T1

W

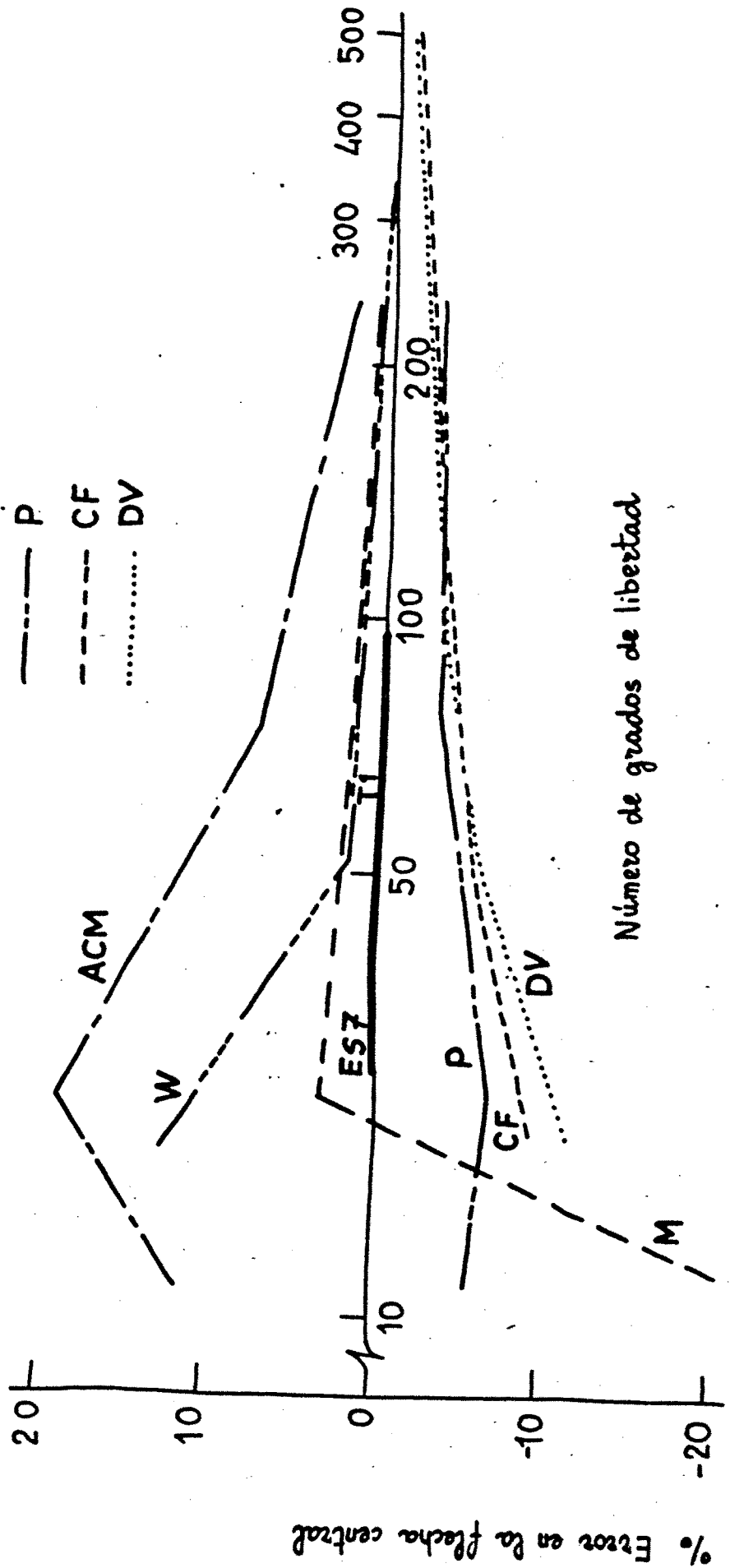
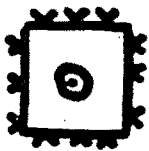
ACM

M

P

CF

DV



Número de grados de libertad

Figura 5.20.- Porcentaje de Error en la Flecha Central en función del N° de Grados de Libertad para el caso de placa cuadrada con lados empotrados y carga puntual en el centro

% Error en la flecha central

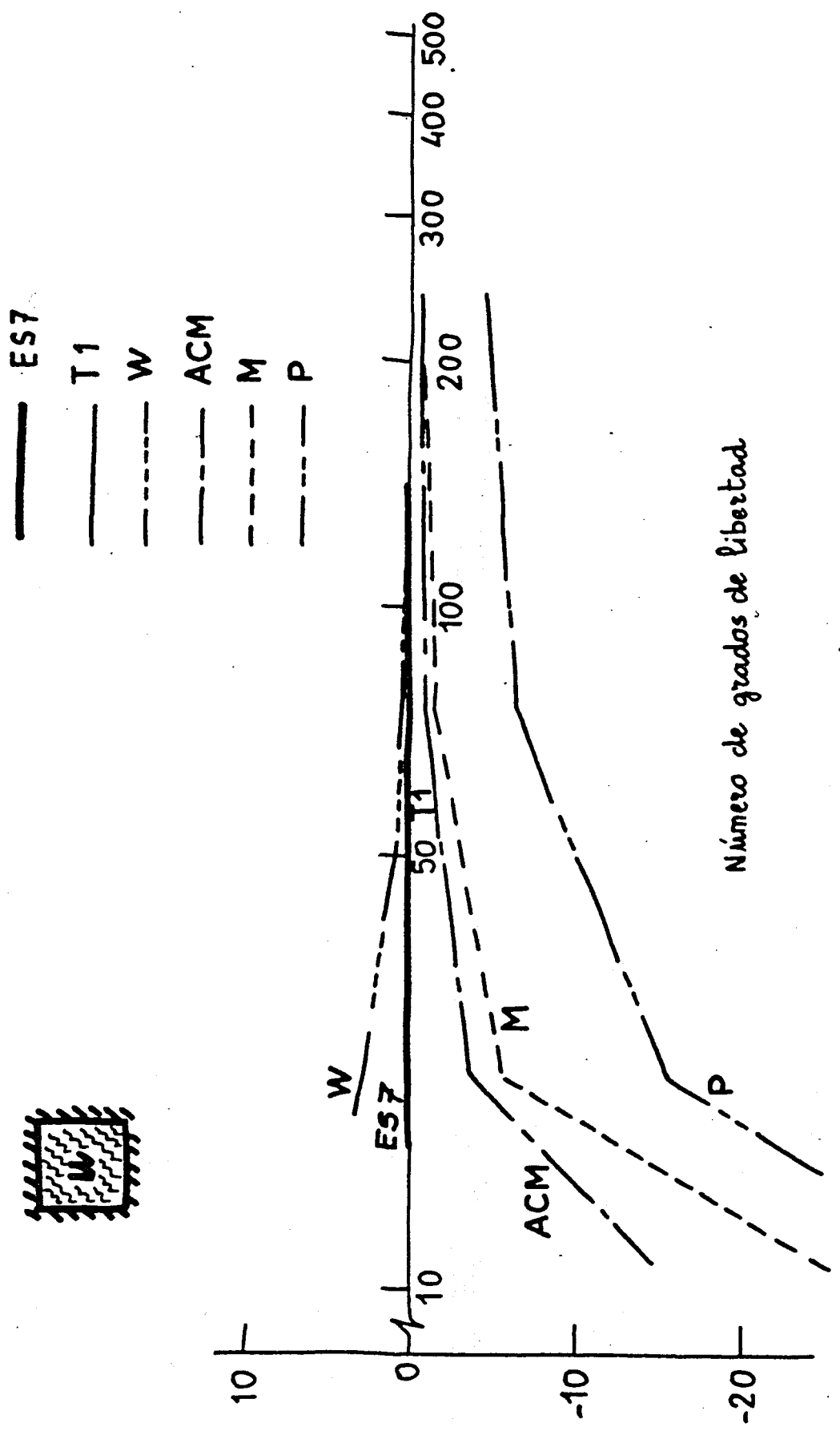


Figura 5.21.- Porcentaje de Error en la Flecha Central en función del N° de Grados de Libertad para el caso de Placa cuadrada simplemente apoyada y sometida a carga uniforme

% Error en la flecha central

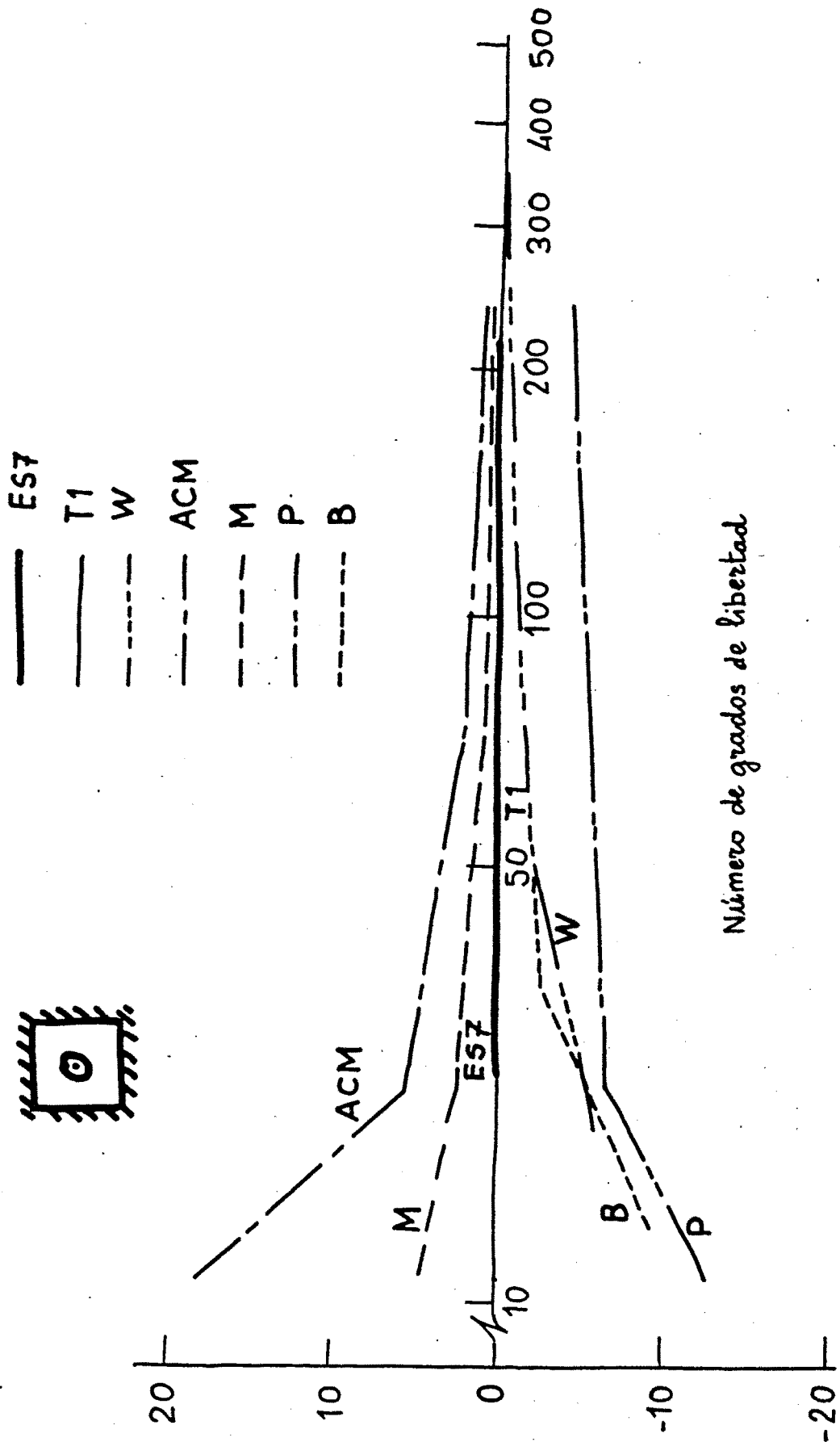
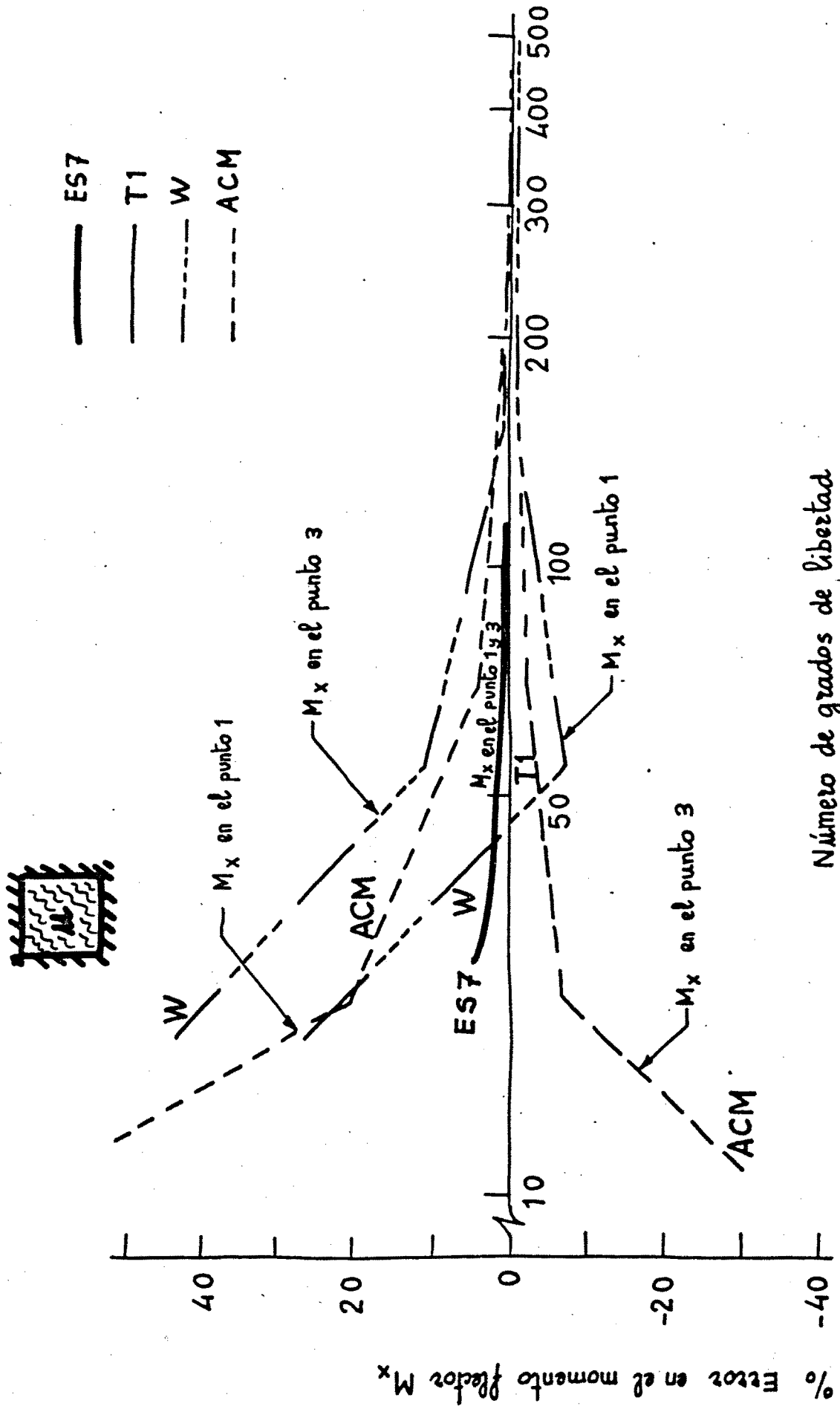


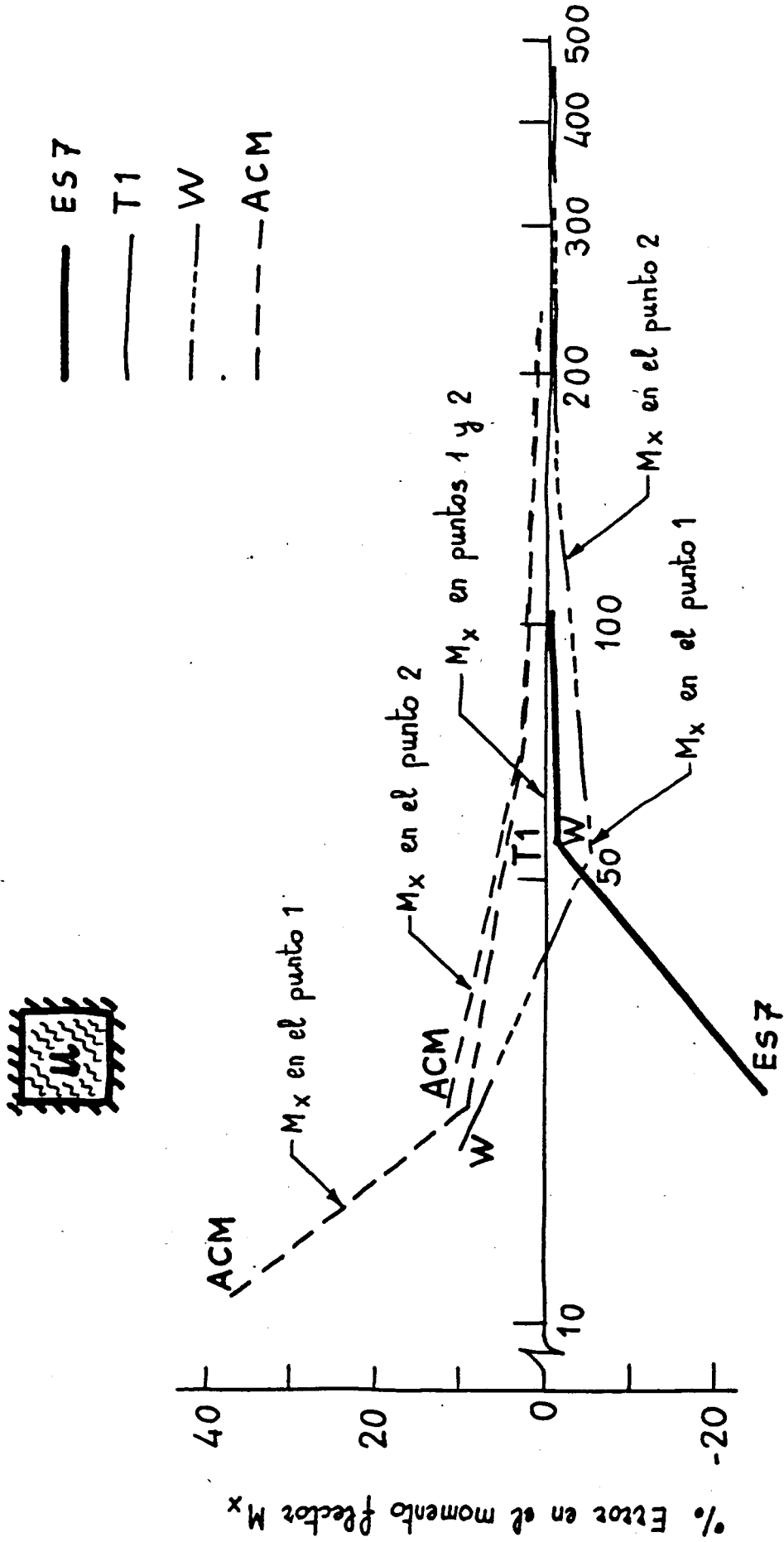
Figura 5.22.- Porcentaje de Error en la Flecha Central en función del N° de Grados de Libertad para el caso de Placa cuadrada con lados simplemente apoyados y carga puntual en el centro

% Error en la flecha central



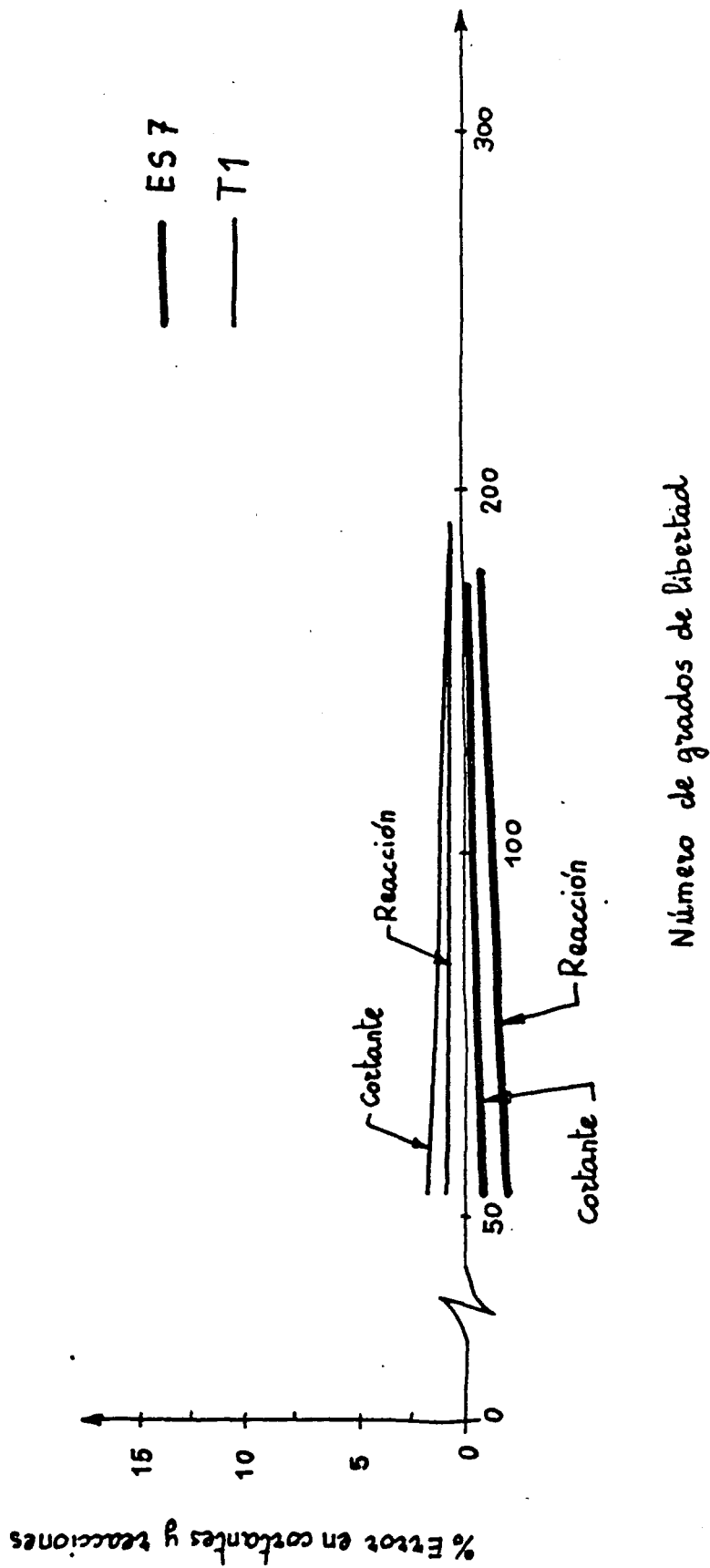
Número de grados de libertad

Figura 5.23.- Porcentaje de Error en el Momento flector M_x en función del N° de Grados de Libertad para el caso de Placa cuadrada con bordes empotrados y sometida a carga uniforme



Número de grados de libertad

Figura 5.24.- Porcentaje de Error en el Momento flector M_x en función del N° de Grados de Libertad para el caso de Placa cuadrada simplemente apoyada y sometida a carga uniforme



Número de grados de libertad

Figura 5.25.- Porcentaje de Error en los cortantes y reacciones en el punto medio del lado de una Placa cuadrada apoyada y sometida a carga uniforme.