UNIVERSITAT DE BARCELONA

Fundamentos de geometría pseudoconforme en *n* dimensiones

José María Planas Corbella

les de segundo orden en las ϕ_i

$$\Delta_{hk}=0 \qquad \Delta_{\bar h \bar k}=0 \qquad \Delta_{h\bar k}=0$$

donde(como se ve con cálculos completamente análogos a los ya hechos precedentemente)

$$\Delta_{hk} \equiv \left(\phi^{(\bar x_n)}\right)^{n-1}\left[C_{hk}^{(\bar x_n)}\varphi^{(\bar x_n)}+\sum_{j=1}^{n-r} C_{hk}^{(\bar x_j)}\phi^{(\bar x_j)}\right]$$

y análogamente para $\Delta_{\bar h\bar k}$ y $\Delta_{h\bar k}$. Dividiendo por $\left(\phi^{(\bar x_n)}\right)^{n-1}$, que es distinto de cero, tenemos

$$(21)\qquad \begin{aligned}
\sum_{hk} &\equiv C_{hk}^{(\bar x_n)}\varphi^{(\bar x_n)}+\sum_1^{n-r} C_{hk}^{(\bar x_j)}\phi^{(\bar x_j)}=0\\
\sum_{\bar h\bar k} &\equiv C_{\bar h\bar k}^{(\bar x_n)}\varphi^{(\bar x_n)}+\sum_1^{n-r} C_{\bar h\bar k}^{(\bar x_j)}\phi^{(\bar x_j)}=0\\
\sum_{h\bar k} &\equiv C_{h\bar k}^{(\bar x_n)}\phi^{(\bar x_n)}+\sum_1^{n-r} C_{h\bar k}^{(\bar x_j)}\phi^{(\bar x_j)}=0
\end{aligned}$$

Se ve enseguida que las $\sum_{hk}$ son idénticamente nulas, por ser nulos los coeficientes C_{hk}. Las $\sum_{\bar h\bar k}$ son también idénticamente nulas(vease Observación 2ª al final del capitulo).

Para calcular $\sum_{h\bar k}$ basta observar que

$$X_{h\bar k} \equiv \left[\frac{\delta}{\delta x_k}\phi^{(\bar x_n)}\right]\frac{\partial\psi}{\partial\bar x_k}-\left[\frac{\delta}{\delta x_n}\phi^{(\bar x_k)}\right]\frac{\partial\psi}{\partial\bar x_n}$$

donde con el símbolo δ indicamos que se debe derivar totalmente con relacion a x_i, siendo x_{n-r+l} y $\bar x_{n-r+l}$ ($l=1,\dots,r$) funciones de $x_j,\bar x_j$ ($j=1,\dots,n-r$) y $\bar x_n$ definidas implícitamente por el sistema (14). Asi, las ecuaciones que caracterizan las variedades planoides que estamos considerando, se escribirán finalmente

$$(22)\qquad \sum_{h\bar k} \equiv \begin{vmatrix} \phi^{(\bar x_k)} & \phi^{(\bar x_n)} \\ \dfrac{\delta}{\delta x_k}\phi^{(\bar x_k)} & \dfrac{\delta}{\delta x_h}\phi^{(\bar x_n)}\end{vmatrix}=0$$

Como comprobación, podemos suponer que la variedad está contenida en un $S_{2(n-r+1)}$ característico; si éste es el espacio coordenado $x_{n-r+l}=0$ $\bar x_{n-r+l}=0$ ($l=1,\dots,r-1$), haciendo $\phi_{2l}\equiv x_{n-l+1}$, $\phi_{2l+1}=\bar x_{n-l+1}$, $\phi_1\equiv\phi$, se se encontrarán nuevamente, a menos de un factor diferente de cero, las mismas ecuaciones que caracterizan a los hiperplanoides.

5. Estudiaremos finalmente las variedades analíticas reales de un número par de dimensiones que son lugar geométrico de ∞^2 variedades características, dependientes analíticamente de dos parámetros reales α_1 y α_2 .

Supongamos que se trata de una $V_{2(n-r+1)}$ del S_{2n}, de ecuaciones

(23) $$\varphi_i(y_1, \dots, y_n; z_1, \dots, z_n) = 0 \qquad i = 1, 2, \dots, 2(r-1)$$

o, pasando a lo complejo

(24) $$\Phi_i(x_1, \dots, x_n; \bar{x}_1, \dots, \bar{x}_n) = 0 \qquad i = 1, 2, \dots, 2(r-1)$$

Para que esta variedad contenga ∞^2 variedades características dependientes analíticamente de dos parámetros reales, es necesario y basta que existan dos funciones ψ_1 y ψ_2, analíticas en las mismas variables y en los parámetros, de manera que el sistema (24), juntamente con el

(25) $$\psi_1 = 0 \qquad \psi_2 = 0$$

definan una $V_{2(n-r)}$ característica, cualesquiera que sean los valores de (α_1 , α_2) en un cierto campo. Pero, por la independencia de los parámetros, deberá ser

$$\frac{\partial(\psi_1, \psi_2)}{\partial(\alpha_1, \alpha_2)} \neq 0$$

de modo que al sistema (25) se podrá substituir otro de la forma

(26) $$\Psi_1(x_1, \dots, x_n; \bar{x}_1, \dots, \bar{x}_n) = \alpha_1$$

(27) $$\Psi_2(x_1, \dots, x_n; \bar{x}_1, \dots, \bar{x}_n) = \alpha_2$$

siendo Ψ_1 y Ψ_2 funciones analíticas.

Inmediatamente se ve que la condición antes enunciada equivale a lo siguiente: que las ecuaciones (24) y (26) representen una $V_{2(n-r+1)}$ <u>planoide</u>. Basta, por consiguiente, que nos aseguremos de las existencia de de una función ψ_1 que satisfaga a tal condición. En virtud de lo demostrado en el número anterior, se sabe que la función ψ_1 debe satisfacer al sistema

$$(28)\qquad \left\| \begin{matrix} \dfrac{\partial \phi_i}{\partial x_j}\,; & \dfrac{\partial \phi_i}{\partial x_{n-r+1}}, & \dots, & \dfrac{\partial \phi_i}{\partial x_n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \dfrac{\partial \psi}{\partial \bar{x}_j}\,; & \dfrac{\partial \psi}{\partial x_{n-r+1}}, & \dots, & \dfrac{\partial \psi}{\partial x_n} \end{matrix} \right\| = 0 \quad (i = 1, 2, \dots, 2r-2) \quad \left\| \begin{matrix} \dfrac{\partial \phi_i}{\partial \bar{x}_j}\,; & \dfrac{\partial \phi_i}{\partial \bar{x}_{n-r+1}}, & \dots, & \dfrac{\partial \phi_i}{\partial \bar{x}_n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \dfrac{\partial \psi}{\partial \bar{x}_j}\,; & \dfrac{\partial \psi}{\partial \bar{x}_{n-r+1}}, & \dots, & \dfrac{\partial \psi}{\partial \bar{x}_n} \end{matrix} \right\| = 0$$

$$j = 1, 2, \dots\dots, n-r$$

$$(29)\qquad Z_{h\bar{k}} \equiv \left| \begin{matrix} \phi^{(\bar{x}_k)} & \phi^{(\bar{x}_h)} \\ \dfrac{\delta}{\delta x_h}\phi^{(\bar{x}_k)} & \dfrac{\delta}{\delta x_k}\phi^{(\bar{x}_h)} \end{matrix} \right| = 0$$

$$(h, k = 1, 2, \dots\dots, n-r)$$

suponiendo que sean diferentes de cero las matrices jacobianas que convengan, como en el caso anterior.

Siempre que sea $r > 2$, en el sistema (28) hay ecuaciones que no dependen de ψ

$$(30)\qquad \left\| \frac{\partial \phi_i}{\partial x_j}\,; \frac{\partial \phi_i}{\partial x_{n-r+1}}, \dots, \frac{\partial \phi_i}{\partial x_n} \right\| = 0 \quad (i = 1, 2, \dots, 2r-2) \quad \left\| \frac{\partial \phi_i}{\partial \bar{x}_j}\,; \frac{\partial \phi_i}{\partial \bar{x}_{n-r+1}}, \dots, \frac{\partial \phi_i}{\partial \bar{x}_n} \right\| = 0$$

$$j = 1, 2, \dots, n-r$$

Tenemos, pues, en primer lugar, un sistema de condiciones <u>necesarias</u> de primer orden. El hecho de que tales ecuaciones no existan para $r=2$, tiene su interpretación geométrica, como veremos más adelante. Las demás condiciones de primer orden en ψ no son todas linealmente independientes. Suponiendo que sea, por ejemplo,

$$(31)\qquad \left\| \frac{\partial \phi_i}{\partial x_j}\,; \frac{\partial \phi_i}{\partial x_{n-r+1}}, \dots, \frac{\partial \phi_i}{\partial x_n} \right\| \neq 0 \quad (i = 1, 2, \dots, r) \quad \left\| \frac{\partial \phi_i}{\partial \bar{x}_j}\,; \frac{\partial \phi_i}{\partial \bar{x}_{n-r+1}}, \dots, \frac{\partial \phi_i}{\partial \bar{x}_n} \right\| \neq 0$$

las

$$(32)\qquad \frac{\partial(\phi_1, \phi_2, \dots, \phi_r, \psi)}{\partial(x_{n-r+1}, \dots, x_n, x_j)} = 0 \qquad \frac{\partial(\phi_1, \phi_2, \dots, \phi_r, \psi)}{\partial(\bar{x}_{n-r+1}, \dots, \bar{x}_n, \bar{x}_j)} = 0$$

$$j = 1, 2, \dots\dots, n-r$$

forman un sistema equivalente, con ecuaciones algébricamente independientes.

Debemos, pues, encontrar las condiciones necesarias y suficientes para la existencia de una función ψ que satisfaga al sistema formado por las (29) y (32). Pero, en virtud de las hipótesis hechas, y basándonos en las mismas (32), las (29) resultan independientes de ψ no dependiendo mas que de $\phi_1, \phi_2, \ldots, \phi_r$. Basta observar, en efecto, que ésto es verdad para las derivadas totales $\frac{\delta}{\delta x_h}\phi^{(\bar{x}_k)}, \frac{\delta}{\delta x_h}\phi^{(\bar{x}_n)}$. Téngase presente que, en el cálculo de éstas derivadas, se deben considerar las x_ℓ $(\ell = n-r+1, \ldots, n)$ y las $\bar{x}_m$ $(m = n-r+1, \ldots, n-1)$ como funciones de las restantes variables, obtenidas por la resolución del sistema formado por las (24) y la (26). Se tendrá, pues,

$$\frac{\delta}{\delta x_h}\phi^{(\bar{x}_k)} = \frac{\partial \phi^{(\bar{x}_k)}}{\partial x_h} + \sum_{n-r+1}^{n} \frac{\partial \phi^{(\bar{x}_k)}}{\partial x_\ell} \frac{\partial x_\ell}{\partial x_h} + \sum_{n-r+1}^{n-1} \frac{\partial \phi^{(\bar{x}_k)}}{\partial \bar{x}_m} \frac{\partial \bar{x}_m}{\partial x_h}$$

Pero el valor de $\frac{\partial \bar{x}_m}{\partial x_h}$ es

$$\frac{\partial(\phi_1, \phi_2, \ldots\ldots, \phi_{2r-2}, \psi)}{\partial(x_{n-r+1}, \ldots, x_n; \bar{x}_{n-r+1}, \ldots, \bar{x}_{\ell-1}, x_h, \bar{x}_{\ell+1}, \ldots, x_n)} : J ;$$

en virtud de las ecuaciones (32) todos los menores formados con las primeras r columnas y la que contiene las derivadas respecto de x_h, en el dividendo de la fórmula anterior, son nulas; por consiguiente

$$\frac{\partial \bar{x}_m}{\partial x_h} = 0 \qquad m = n-r+1, \ldots, n-1 \tag{33}$$

Tenemos, pues

$$\frac{\delta}{\delta x_h}\phi^{(\bar{x}_k)} = \frac{\partial \phi^{(\bar{x}_k)}}{\partial x_h} + \sum_{n-r+1}^{n} \frac{\partial \phi^{(\bar{x}_k)}}{\partial x_\ell} \frac{\partial x_\ell}{\partial x_h} \tag{34}$$

De las mismas ecuaciones (33) se deduce que, para la determinación de las derivadas parciales $\frac{\partial x_\ell}{\partial x_h}$ $(\ell = n-r+1, \ldots, n)$ es suficiente tener en cuenta las primeras ecuaciones (24). Se tiene, en efecto,

$$\frac{\partial x_\ell}{\partial x_h} = \frac{\partial(\phi_1, \phi_2, \ldots\ldots, \phi_r)}{\partial(x_{n-r+1}, \ldots, x_{\ell-1}, x_h, x_{\ell+1}, \ldots, x_n)} : \frac{\partial(\phi_1, \phi_2, \ldots, \phi_r)}{\partial(x_{n-r+1}, \ldots\ldots, x_n)}$$

no siendo nulo el divisor, por la condición (31). Sustituyendo en (34) se tendrá

$$(35)\qquad \frac{\delta}{\delta x_h}\varphi^{(\bar{x}_k)} = \frac{\partial \varphi^{(\bar{x}_k)}}{\partial x_h} + \sum_{n-r+1}^{n} \frac{\partial \varphi^{(\bar{x}_k)}}{\partial x_h} \frac{\dfrac{\partial(\phi_1, \phi_2, \ldots\ldots, \phi_r)}{\partial(x_h; x_{n-r+1}, \ldots, x_n)}}{\dfrac{\partial(\phi_1, \phi_2, \ldots\ldots, \phi_r)}{\partial(x_{n-r+1}, \ldots\ldots, x_n)}}(-1)^n$$

y como $\phi^{(\bar{x}_k)}$ no depende mas que de $\phi_1, \phi_2, \ldots, \phi_r$ (vd. nº 4) queda probado que la derivada total $\frac{\delta}{\delta x_h}\phi^{(\bar{x}_k)}$ no depende más que de aquellas funciones (o mejor, de sus derivadas primeras y segundas). Y lo mismo se dira para $\frac{\delta}{\delta x_h}\varphi^{(\bar{x}_n)}$.

Las condiciones (29) son, por consiguiente, nuevas condiciones <u>necesarias</u>. Vamos a demostrar que, <u>juntamente con las (30), son también suficientes</u> para la existencia de una solución no constante del sistema (32). Se puede suponer, como siempre, que ψ no dependa más que de las variables $x_1, \ldots, x_{n-r}; \bar{x}_1, \ldots, \bar{x}_{n-r}, \bar{x}_{n-1}$ y $\bar{x}_n$: basta resolver el sistema (24) con relación a las restantes variables

$$(36)\qquad \begin{aligned} x_l &= f_l\,(x_1, \ldots, x_{n-r}; \bar{x}_1, \ldots, \bar{x}_{n-r}, \bar{x}_{n-1}, \bar{x}_n) \quad l = n-r+1, \ldots, n \\ \bar{x}_m &= \bar{f}_m\,(x_1, \ldots, x_{n-r}; \bar{x}_1, \ldots, \bar{x}_{n-r}, \bar{x}_{n-1}, \bar{x}_n) \end{aligned}$$

y sustituir los valores hallados en la función ψ. Entonces las ecuaciones (32) toman la forma

$$(37)\qquad \begin{aligned} &X_h \equiv \frac{\partial \psi}{\partial x_h} = 0 \qquad (37') \qquad (h = 1, 2, \ldots, n-r) \\ &\bar{X}_h \equiv \phi^{(\bar{x}_n)}\frac{\partial \psi}{\partial \bar{x}_h} - \phi^{(\bar{x}_h)}\frac{\partial \psi}{\partial \bar{x}_n} + A_h \frac{\partial \psi}{\partial \bar{x}_{n-1}} \quad (37'') \quad A_h = \frac{\partial(\phi_1, \phi_2, \ldots\ldots, \phi_r)}{\partial(\bar{x}_h; \bar{x}_{n-r+1}, \ldots, \bar{x}_{n-2}, \bar{x}_n)} \end{aligned}$$

Formemos ahora las

$$X_{hk} = 0 \qquad X_{\bar{h}\bar{k}} = 0 \qquad X_{h\bar{k}} = 0$$

con la misma significación de siempre. Las X_{hk}, como se ve inmediatamente, son idénticamente nulas. Por lo que se refiere a las $X_{\bar{h}\bar{k}}$, observemos que el sistema (36'') admite la integral general

$$\psi = f\left[\cancel{\phi_1, \phi_2, \ldots, \phi_r ; x_1, \ldots, x_n}\right]$$

$$x_1, \ldots, x_{n-r} ; f_{n-r+1}, \ldots, f_n$$

donde f es una función analitica cualquiera. Lo cual se reconoce, sea directamente, sea observando que el sistema constituido por las segundas ecuaciones (32), en que las variables se consideren todas independientes, tiene la integral general

$$\psi = f\left[\phi_1, \phi_2, \ldots, \phi_r ; x_1, \ldots, x_n\right]$$

Si entre las variables se introducen las relaciones (24), entonces las ecuaciones (32'') se transforman en las (37''), las $\phi_1, \phi_2, \ldots, \phi_r$ se hacen idénticamente nulas, y las variables $x_{n-r+1}, \ldots, x_n$ se han de sustituir por sus expresiones (36). Admitiendo entonces el sistema (37'') una integral dependiente de $\bar{x}_1, \ldots, \bar{x}_{n-r}, \bar{x}_{n-1}, \bar{x}_n$, todos los determinantes de orden n-r + 2, formados con los coeficientes de las (37'') y todos los pares de ecuaciones $X_{\bar{h}\bar{k}}=0$, seran nulos.

Finalmente, en virtud de las ecuaciones (29) y (30), toda ecuación $X_{h\bar{k}}=0$ es consecuencia lineal de las $X_h=0$ y $X_{\bar{k}}=0$. Ya que se tiene

$$(38) \qquad X_{h\bar{k}} = \frac{\delta}{\delta x_h}\left[\phi^{(\bar{x}_n)}\right]\frac{\partial \psi}{\partial \bar{x}_k} - \frac{\delta}{\delta x_h}\left[\phi^{(\bar{x}_k)}\right]\frac{\partial \psi}{\partial \bar{x}_n} + \left[\frac{\delta}{\delta x_h}A_k\right]\frac{\partial \psi}{\partial \bar{x}_{n-1}}$$

donde $\frac{\delta}{\delta x_h}\phi^{(\bar{x}_n)}$ etc. vienen dadas, como en las (29), por las fórmulas(35). Téngase en cuenta, ademas, que la relación

$$(39) \qquad \begin{vmatrix} A_k & \phi^{(\bar{x}_n)} \\ \frac{\delta}{\delta x_h}A_k & \frac{\delta}{\delta x_h}\phi^{(\bar{x}_n)} \end{vmatrix} = 0$$

si no es idéntica, debe verificarse como consecuencia de las (29) y (30) (vease la Observación del final de capítulo). Se deduce de ello que la matriz

$$\begin{Vmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \phi^{(\bar{x}_n)} & -\phi^{(\bar{x}_k)} & A_k \\ 0 & \frac{\delta}{\delta x_h}\phi^{(\bar{x}_n)} & -\frac{\delta}{\delta x_h}\phi^{(\bar{x}_k)} & \frac{\delta}{\delta x_h}A_k \end{Vmatrix}$$

es nula;por consiguiente,la ecuacion (38) depende linealmente de las $X_h=0$ y $\bar{X}_k=0$, como queríamos.

Las consideraciones precedentes bastan para demostrar la existencia de una solución no constante del sistema (32). De todo lo cual se concluye que:

La condición necesaria y suficiente para que una $V_{2(n-r+1)}$ analítica,real,de un S_{2n} real,sea lugar geométrico de una doble infinidad analitica de $V_{2(n-r)}$ características,es que los primeros miembros de sus ecuaciones (24) satisfagan a los sistemas (29) y (30).

Volviendo a lo real,como los primeros miembros de las ecuaciones (29) y (30) son reales para valores complejos conjugados de las variables,tendremos un número igual de ecuaciones en las φ_i.

Obsérvese,finalmente,que las citadas ecuaciones se satisfacen siempre que la variedad es característica,cosa evidente *a priori*.

6. Podrían estudiarse tambien las variedades que son lugar de ∞^3, ∞^4,etc. variedades características. Las variedades estudiadas en los números 5 y 6 tienen evidentemente ésta propiedad,ya que toda variedad característica es lugar de ∞^2 variedades de la misma clase. El recíproco no es cierto,como se deduce de fáciles consideraciones sobre las transformaciones pseudoconformes. (v. cap. V).

No parece fácil,a primera vista,tratar analíticamente el problema de la determinación de todas aquellas variedades. Si quisiéramos,por ejemplo,tener las condiciones necesarias y suficientes para que la hipersuperficie

$$\phi(x_1,\ldots,x_n;\bar{x}_1,\ldots,\bar{x}_n)=0$$

sea lugar de ∞^3 V_{2n-4} características,deberíamos expresar que existe una solución no constante del sistema de ecuaciones

$$\frac{\partial(\varphi,\psi)}{\partial(\bar{x}_r,\bar{x}_s)}\frac{\partial}{\partial x_r}\frac{\partial(\varphi,\psi)}{\partial(\bar{x}_i,\bar{x}_s)}-\frac{\partial(\varphi,\psi)}{\partial(\bar{x}_i,\bar{x}_s)}\frac{\partial}{\partial x_r}\frac{\partial(\varphi,\psi)}{\partial(\bar{x}_r,\bar{x}_s)}=0$$

$$\frac{\partial(\varphi,\psi)}{\partial(x_r,x_s)}\frac{\partial}{\partial \bar{x}_r}\frac{\partial(\phi,\psi)}{\partial(x_i,x_s)}-\frac{\partial(\phi,\psi)}{\partial(x_i,x_s)}\frac{\partial}{\partial \bar{x}_r}\frac{\partial(\phi,\psi)}{\partial(x_r,x_s)}=0$$

las cuales son de segundo orden en la funcion incógnita ψ ;lo cual conducirá probablemente a un sistema de ecuaciones de orden más elevado y bastante complicadas,a las que debera satisfacer la ϕ .

OBSERVACIONES. 1ª Cuando se consideran,en el campo de las variables complejas $x_k,\bar{x}_k$,las ecuaciones de una variedad real,téngase presente que los primeros miembros deben ser reales dando valores complejos conjugados a aquellos pares de variables;y,por tanto,si una ecuación relativa a dicha variedad se verifica,debe verificarse también la que se obtiene cambiando cada variable por su conjugada,ecuación que podemos llamar <u>conjugada</u> de la anterior. Y así, por ejemplo,en las ecuaciones (6) del nº 2,en las (16) del nº 4,etc. hemos escrito,al lado de cada ecuación,la correspondiente conjugada. En el campo real,tales ecuaciones coinciden;pero,como en el tránsito a lo complejo,las variables se consideran todas independientes, no hay en éstos sistemas ecuaciones superabundantes,expresando la coexistencia de cada ecuación con la conjugada una condición esencial, ésto es,que son reales las variedades que se estudian.

Del mismo modo,juntamente con las ecuaciones diferenciales que hemos escrito para caracterizar los diversos tipos de variedades planoides,deben considerarse,<u>en el campo complejo</u>,las conjugadas:lo cual no ocurre,en cambio,en el campo real,coincidiendo cada ecuación con la conjugada.

2ª. En las ecuaciones diferenciales (9),(22),etc. se puede notar cierta disimetría relativa a las variables. Esto depende del hecho que, en cada caso, hemos resuelto las ecuaciones de la variedad que se estúdia respecto de un determinado grupo de variables. Se comprende que podría hacerse tal resolución respecto de otro grupo de variables, y se obtendrían otras tantas ecuaciones, análogas a las anteriores, en los nuevos grupos. Podría suceder que tal resolución no fuera posible, por ser nulas las matrices jacobianas correspondientes, pero en tal caso las ecuaciones en examen se verifican idénticamente. Excluido éste caso, las ecuaciones de cada uno de dichos grupos son suficientes: las demás, si no son idénticas, <u>deben verificarse como consecuencia de las primeras</u>.

Lo mismo puede decirse relativamente a las ϕ_i de los numeros 4 y 5. Aqui las ecuaciones, análogas a las escritas, en los diversos grupos de funciones ϕ_i, son consecuencia (las que no son idénticas) de las ecuaciones (16) y (22) en un caso, y de las (29) y (30) en el otro.

3ª. Para simplificar los cálculos de las expresiones $\sum_{\bar{\lambda}k}$ del nº 4, hay que tener en cuenta que las derivadas totales $\frac{\delta}{\delta x_h}\phi^{(\bar{x}_k)}$ etc. se expresan mediante fórmulas análogas a las (35). Pero, para convencerse de que las $\sum_{\bar{\lambda}k}$ son idénticamente nulas no es necesario hacer dicho cálculo: basta observar, en efecto, que el sistema constituido por las $\bar{X}_k = 0$ es, en dicho caso, completo, como se demuestra con consideraciones análogas a las que hemos hecho en el nº 5, y habida cuenta de que aquél sistema está formado por n-r ecuaciones en n-r+1 variables independientes.

NOTAS

(1) La denominación me ha sido sugerida por el prof. Severi.

(2) Vd. ALMER: Sur quelques problèmes de la théorie des fonctions analytiques de deux variables complexes. "Arkiv för math., fys. och astr." Upsala, t. 17, 1922-23.

(3) POINCARÉ: Les fonctions analytiques de deux variables et la représentation conforme. "Rendic. del Circ. Mat. di Palermo" t. 23 (1907).

(4) Esta propiedad no la hemos encontrado en los tratados de ecuaciones diferenciales que conocemos.

(5) Vd. nota (5) de la Introducción.

C A P I T U L O V

INTERPRETACION GEOMETRICA DE LOS RESUL TADOS DEL CAPITULO PRECEDENTE

1. Ya hemos definido, en la Introducción, las transformaciones pseudoconformes. Estas transformaciones están caracterizadas geométricamente por un gran número de interesantes propiedades, que pueden estudiarse, para $n=2$, en la memoria citada de B.SEGRE. Dejando para otro trabajo el estudio detallado de estas transformaciones en el caso general, nos limitaremos aqui a hacer ver como los resultados analiticos obtenidos en el anterior capítulo equivalen a sencillas propiedades geométricas, que son invariantes respecto al grupo de aquellas transformaciones.

Recuérdese que una transformación pseudoconforme se representa, en el campo ~~con~~ complejo, con ecuaciones del tipo

$$x'_r = f_r(x_1, \dots, x_n) \qquad r = 1, 2, \dots, n \tag{1}$$

donde

$$J \equiv \frac{\partial(f_1, f_2, \dots, f_n)}{\partial(x_1, x_2, \dots, x_n)} \neq 0$$

Introducidas las variables complejas $x_r, \bar{x}_r$, con el acostumbrado método de extensión, las ecuaciones de las transformación pseudoconforme (1) serán

$$\begin{aligned} x'_r &= f_r(x_1, \dots, x_n) \\ \bar{x}'_r &= \bar{f}_r(\bar{x}_1, \dots, \bar{x}_n) \end{aligned} \qquad r = 1, 2, \dots, n \tag{2}$$

donde se entiende que las $\bar{x}'_r$ toman valores complejos conjugados de los que toman las x'_r, cuando se dan a las variables $x_r, \bar{x}_r$, valores también conjugados. El jacobiano de las (2) es

$$J_1 \equiv J\bar{J} \neq 0$$

En el campo real, poniendo $x_r = y_r + iz_r$, $x'_r = y'_r + iz'_r$, se tendrán las ecuaciones

(3)
$$y'_r = \varphi_r(y_1, \ldots, y_n; z_1, \ldots, z_n) \qquad r = 1, 2, \ldots, n$$
$$z'_r = \psi_r(y_1, \ldots, y_n; z_1, \ldots, z_n)$$

siendo

$$\frac{\partial \varphi_r}{\partial y_s} = \frac{\partial \psi_r}{\partial z_s} \qquad \frac{\partial \varphi_r}{\partial z_s} = -\frac{\partial \psi_r}{\partial y_s}$$

El jacobiano será

$$J_2 \equiv |J|^2 \neq 0$$

2. De la definición de transformación pseudoconforme se desprende inmediatamente el teorema: <u>Toda transformación pseudoconforme cambia variedades características en variedades características.</u> Estas variedades forman, pues, una clase invariante respecto al grupo de las transformaciones pseudoconformes.

Se puede ver también que <u>toda V_{2k} característica es rtransformada pseudoconforme de un S_{2k} característico</u>. Sean, en efecto, las ecuaciones de la variedad

(4)
$$f_r(x_1, \ldots, x_n) = 0 \qquad r = 1, 2, \ldots, n-k$$

La matriz

$$\left\| \frac{\partial f_r}{\partial x_1}, \ldots, \frac{\partial f_r}{\partial x_n} \right\| \qquad (r = 1, 2, \ldots, n-k)$$

será diferente de cero. Entonces todas las transformaciones pseudoconformes

$$x'_i = f_i(x_1, \ldots, x_n) \qquad i = 1, 2, \ldots, n$$

(donde las $f_{n-k+1}, \ldots, f_n$ son funciones holomorfas tales que $\frac{\partial (f_i)}{\partial (x_i)} \neq 0$) cambian nuestra V_{2k} en el S_{2k} característico

(5)
$$x'_r = 0 \qquad r = 1, 2, \ldots, n-k$$

Es fácil ver que todos los S_{2k} característicos son pseudoconformemente equivalentes. El S_k característico

$$\sum_{s=1}^{n} a_{rs} x_s = 0 \qquad (r=1,2,\dots,n-k) \qquad \|a_{rs}\| \neq 0$$

se transforma en el espacio característico fundamental (5) mediante las transformaciones

$$x'_r = \sum_{s=1}^{n} a_{rs} x_s \qquad r=1,2,\dots,n-k$$

$$x'_h = f_h(x_1,\dots,x_n) \qquad h=n-k+1,\dots,n$$

con las hipótesis acostumbradas sobre las f_h. Se deduce de ello que toda variedad característica puede transformarse pseudoconformemente en un espacio lineal característico <u>prefijado</u>(del mismo número de dimensiones).

Todo lo cual demuestra la equivalencia de todas las variedades características (del mismo nº de dimensiones) respecto al grupo de las transformaciones pseudoconformes.

3. Las variedades <u>planoides</u>,estudiadas en el precedente capítulo,forman otra clase invariante:es,en efecto,evidente(en virtud del teorema del nº2) que toda variedad que sea lugar analítico de superficies características será cambiada,por cualquier transformación pseudoconforme,en otra variedad de la misma naturaleza.

Obsérvese que todo espacio lineal que contenga una infinidad de espacios característicos se transforma pseudoconformemente,en una variedad <u>planoide</u>,en general no lineal. Se puede precisar ésta observación con los siguientes teoremas:

a) <u>Las V_{2k+1} planoides de primera especie</u>(ésto es,las estudiadas en el cap. IV nº 4) <u>son las transformadas pseudoconformes de S_{2k+1} pertenecientes a S_{2k+2} característicos</u>. Supóngase,en efecto,que la variedad planoide esta engendrada por las ∞^1 variedades características

(6) $$f_r(x_1,\ldots,x_n;\alpha)=0 \qquad r=1,2,\ldots,n-k$$

conteniendo las f_r analíticamente el parámetro α en un cierto intervalo. En dicho intervalo, además, y en el entorno de un punto $(x_1^{(0)},\ldots,x_n^{(0)})$ no debe ser nula la matriz

$$\left\|\frac{\partial f_r}{\partial x_s}\right\|$$

Se podrá resolver una de las ecuaciones (6), por ejemplo la primera, respecto de α, y substituir el valor hallado en las demás; de modo que al sistema (6) vendrá a substituir, en dicho entorno, el

(7) $$\begin{aligned}&\varphi_1(x_1,\ldots,x_n)=\alpha\\ &\varphi_h(x_1,\ldots,x_n)=0 \qquad h=2,\ldots,n-k\end{aligned}$$

y se ve enseguida que, en el mismo entorno, será

$$\left\|\frac{\partial \varphi_r}{\partial x_s}\right\|\neq 0$$

de modo que podrán encontrarse, y en infinitos modos, k funciones $\varphi_{n-k+1},\ldots,\varphi_n$, holomorfas en el mismo, y tales que resulte

$$\frac{\partial(\varphi_1,\varphi_2,\ldots,\varphi_n)}{\partial(x_1,x_2,\ldots,x_n)}\neq 0$$

Entonces, las transformación pseudoconforme

$$x'_r=\varphi_r(x_1,\ldots,x_n) \qquad r=1,2,\ldots,n$$

cambia el sistema de las V_{2k} (7) en el sistema de S_{2k} característicos

$$x'_1=\alpha\quad,\ x'_2=0,\ldots,\ x'_{n-k}=0$$

cuyo lugar geométrico es el S_{2k+1}

$$x'_1=0\quad,\ x'_2=0,\ldots\ldots,\ x'_{n-k}=0$$

contenido en el S_{2k+2} caracteristico

$$x'_2=0,\ldots,\ x'_{n-k}=0$$

Recíprocamente, todo S_{2k+1} contenido en un S_{2k+2} característico es lugar ∞^1 de S_{2k} caracteristicos (basta recordar la propiedad de los espacios lineales característicos respecto a la congruencia K del infinito, considerada en el capitulo I) y se transforma, pues, pseudoconformemente, en una V_{2k+1} planoide de primera especie.

Vale, en particular, el teorema:

Todo hiperplanoide es transformado pseudoconforme de un hiperplano. Esta última propiedad ha sido indicada, para n=2, por POINCARÉ y precisada después por BERTIL ALMER, para el mismo caso.(1)

b) Las V_{2k} planoides de primera especie (cap. IV nº 5) son las transformadas pseudoconformes de S_{2k} situados en $S_{2(k+1)}$ característicos. En particular: Las V_{2n-2} planoides de primera especie son las transformadas pseudoconformes de los S_{2n-2}.

Se demuestra como el anterior.

Teoremas análogos valen para las variedades planoides de especie 2, 3, etc. Se tiene:

Las V_{2k+1} planoides de segunda especie (lugares ∞ de V_{2n-2} características) son las transformadas pseudoconformes de S_{2k+1} situados en S_{2k+4} característicos. Y así sucesivamente.

4. De los teoremas a) y b) que acabamos de demostrar se deduce inmediatamente que las V_{2k+1} y las V_{2k} planoides de primera especie son variedades situadas sobre V_{2k+2} características. Evidentemente, el recíproco no es cierto. Lo cual nos suministra una interpretación geométrica de las ecuaciones (16) y (30) del capítulo IV. En las hipótesis allí admitidas, por ejemplo en el nº 4), las ecuaciones (14) pueden ser resueltas respecto a las variables $x_{k+1}, \ldots, x_n; \bar{x}_{k+1}, \ldots, \bar{x}_{n-1}$ (haciendo n-r=k)

$$x_s = f_s(x_1, \ldots, x_k; \bar{x}_1, \ldots, \bar{x}_k, \bar{x}_n) \qquad s = k+1, \ldots, n$$

$$\bar{x}_s = \bar{f}_s(x_1, \ldots, x_k; \bar{x}_1, \ldots, \bar{x}_k, \bar{x}_n) \qquad s = k+1, \ldots, n-1$$

Las ecuaciones (16) equivalen a decir que

$$\frac{\partial \bar{f}_s}{\partial x_l} = 0 \qquad l = 1, 2, \ldots, k$$

o sea que la variedad considerada pertenece a la V_{2k+2} característica

$$\bar{x}_s = \bar{f}_s(\bar{x}_1, \dots, \bar{x}_k, \bar{x}_n) \qquad s = k+1, \dots, n-1$$

La condición enunciada equivale también a ésta otra: La variedad admite un S_{2k} característico tangente, en cada punto genérico. Condición que se prevé a priori necesaria para toda variedad planoide de primera especie, ya que, pasando por cada punto genérico de la misma una V_{2k} característica, el S_{2k} tangente a ésta, que es característico (cap. II), es también tangente a la variedad dada.

Se reconoce inmediatamente que toda V_{2k+1} situada sobre una V_{2k+2} caracteristica tiene, en todo punto genérico, un S_{2k} tangente característico. En efecto, una conveniente transformación pseudoconforme π cambiará la variedad dada V en otra V' perteneciente a un S_{2k+2} característico (nº 2); la V' admite S_{2k} característico tangente en cada punto genérico (ésto es, el determinado por el punto y los dos S_{k-1} alabeados, secciones del S_{2k+1}, tangente a V' en aquel punto, con los espacios σ_k y $\bar{\sigma}_k$ que el S_{2k+2} característico considerado tiene en común con los espacios σ y $\bar{\sigma}$, directores de la congruencia K del infinito). Ahora bien, las transformaciones pseudoconformes son transformaciones puntuales y derivables: los S_{2k} característicos tangentes a V' se cambiarán, por la transformacion pseudoconforme π^{-1}, en V_{2k} características tangentes a V, cuyos S_{2k} tangentes (característicos) serán, por consiguiente, tangentes a V.

Analíticamente, la condición enunciada se expresará escribiendo que el espacio lineal característico tangente, en cada punto genérico, a la V_{2k+1} dada por las ecuaciones (14) del capítulo IV, es un S_{2k}. Las ecuaciones de dicho espacio son

$$\sum_{j=1}^{n} \frac{\partial \phi_i}{\partial x_j}(X_j - x_j) = 0 \qquad \sum_{j=1}^{n} \frac{\partial \bar{\phi}_i}{\partial \bar{x}_j}(\bar{X}_j - \bar{x}_j) = 0$$
$$(i = 1, 2, \dots, 2(n-k)-1)$$

Y las condiciones necesarias y suficientes para que éstas ecuaciones sean las de un S_{2k} son precisamente las (16) de aquel capítulo. Lo cual confirma la equivalencia de ambas propiedades geométricas.

Las mismas consideraciones valen para las V_{2k} planoides. Y análogas para las variedades planoides de especie s: Una V_{2k+1} lugar ∞^{2s-1} de $V_{2(k-s+1)}$ características es un caso particular de variedad situada sobre una $V_{2(k+s)}$ característica(se debe suponer el espacio ambiente suficientemente amplio) propiedad equivalente a la de admitir,en cada punto,un $S_{2(k-s+1)}$ característico tangente. Etc.

El hecho,señalado en el capitulo IV,de que no existan,para los hiperplanoides y para la V_{2n-2} planoides,condiciones diferenciales de primer orden,encuentra aquí su explicacion:las V_{2n-1} y V_{2n-2} están situadas siempre en una V_n característica,que es el espacio ambiente.

5. Lo que hasta aquí se ha dicho demuestra la invariancia,respecto al grupo de las transformaciones pseudoconformes,de las dos propiedades (equivalentes) ahora estudiadas. Las variedades caracterizadas por dichas propiedades forman,pues,una nueva clase invariante,que tiene como caso particular las variedades planoides y las variedades características,y que viene caracterizada analíticamente por ecuaciones del tipo de las (16) o (30) del capitulo IV. Podemos llamarlas variedades semicaracterísticas.

Llegamos así a una clasificacion general de las variedades analíticas,desde el punto de vista pseudoconforme,en sucesivas clases invariantes,cada una de las cuales contiene a las que siguen:

a) V_{2k+1} α) Variedades analíticas generales. β) Variedades semicaracterísticas de especie s (s=1,2,...). Son las variedades situadas sobre $V_{2(k+s)}$ características,o las que admiten,en cada punto,un $S_{2(k-s+1)}$ característico tangente. γ) Variedades planoides de especie s. Clase particular de variedades semicaracterísticas de especie s,que contienen analíticamente ∞^{2s-1} variedades características. Son las transformadas pseudoconformes de los S_{2k+1} pertenecientes a $S_{2(k+1)}$ característicos.

b) V_{2k}. α) Variedades generales β) Variedades semicaracterísticas de especie s. γ) Variedades planoides de especie s. δ) Variedades características.

Las variedades características tienen su importancia en el estudio de las funciones de varias variables complejas consideradas sobre variedades analíticas cualesquiera;y,en particular,en un clásico teorema de LEVI-CIVITA (v. cap. VI)

6. La expresion diferencial $\mathcal{L}(\varphi)$ (cap. IV nº 3),cuya anulación es la condición necesaria y suficiente para que $\varphi = 0$ sea un hiperplanoide del S_4 ,es un invariante relativo respecto del grupo pseudoconforme,que se reproduce a menos del módulo de la transformación. Salvo las variedades que son lugar geométrico de superficies características,las cuales están caracterizadas por una sola expresión diferencial,analoga a la de LEVI,las demás variedades planoides de primera especie vienen dadas por varias ecuaciones diferenciales,cada una de las cuales no contiene todas las variables. Se obtendrán, en todo caso,expresiones simétricas invariantes,haciendo la suma de los cuadrados de sus primeros miembros.

(1) Vd. notas (2) y (3) del Cap. IV

CAPITULO VI

APLICACION A LAS FUNCIONES DE VARIAS VARIABLES COMPLEJAS DEFINIDAS SOBRE VARIEDADES ANALITICAS

1. Queremos, finalmente, dar una breve indicación de las aplicaciones que los conceptos expuestos en los capítulos precedentes tienen en el estudio de las funciones de varias variables complejas definidas sobre variedades analíticas, concepto importante, que extiende el de RIEMANN de función de variable compleja sobre una superficie. Algunos resultados interesantes sobre este argumento, desde un punto de vista formal, pueden leerse en la memoria, tantas veces citada, de WIRTINGER. Nosotros nos limitaremos a aquellas cuestiones que son aplicación inmediata de los conceptos geométricos expuestos en éste trabajo. Un estudio completo sobre la cuestión sería del mayor interés.

Una función (compleja) del punto de una variedadanalítica real V se llamara <u>función</u>(holomorfa) de las n variables $x_1, \ldots, x_n$ cuando sea sección ,sobre la variedad, de una función de aquellas variables, holomorfa en el espacio ambiente, o sea en un entorno 2n-dimensional que contenga V en su interior.

Operando sobre las variables $x_i, \bar{x}_i$,sean

$$(1) \qquad \phi_i(x_1, \ldots, x_n; \bar{x}_1, \ldots, \bar{x}_n) = 0 \qquad i = 1, 2, \ldots, n-t$$

las ecuaciones de una V_{n+t} real(t=1,...,n-1) del S_{2n}. Una función del punto de ésta variedad es una $F(x_1, \ldots, x_n; \bar{x}_1, \ldots, \bar{x}_n)$ (transformada, por el tránsito a lo complejo, de una funcion $u + iv$ <u>analitica</u> en las variables reales y_k, z_k) donde las variables $x_k, \bar{x}_k$ esten ligadas por las relaciones (1).

Cuáles son las condiciones que deben verificarse para que la f venga a ser, sobre nuestra V_{n+t}, función holomorfa de las x_k en el sentido que acabamos de precisar? Hemos de suponer, ante todo, que la variedad <u>no es semicaracterística</u> (v. capítulo precedente) ; entonces por lo menos uno de los menores máximos de la matriz

$$\left\| \frac{\partial \phi_i}{\partial \bar{x}_j} \right\| \qquad \begin{pmatrix} i = 1, 2, \dots, n-t \\ j = 1, 2, \dots, n \end{pmatrix}$$

será diferente de cero, por ejemplo

$$\frac{\partial(\phi_1, \phi_2, \dots, \phi_{n-t})}{\partial(\bar{x}_{t+1}, \dots \dots, \bar{x}_n)}$$

y se podrán poner las ecuaciones (1) en la forma

$$\bar{x}_{t+l} = \varphi_l(x_1, \dots, x_n; \bar{x}_1, \dots, \bar{x}_t) \qquad l = 1, 2, \dots, n-t$$

La f vendrá a ser, pues, sobre V y en el entorno de un punto genérico

$$f(x_1, \dots, x_n; \bar{x}_1, \dots, \bar{x}_t, \varphi_{t+1}, \dots, \varphi_n)$$

y a fin de que se reduzca a una función holomorfa de las variables x_k solamente, es preciso y basta que sea

$$\frac{\partial f}{\partial \bar{x}_j} = 0 \qquad j = 1, 2, \dots, t$$

condiciones que, hechos los cálculos, se escriben

$$(2) \qquad \frac{\partial(f, \phi_1, \dots, \phi_{n-t})}{\partial(\bar{x}_j; \bar{x}_{t+1}, \dots, \bar{x}_n)} = 0 \qquad j = 1, 2, \dots, t$$

2. Si se trata de una hipersuperficie

$$\phi(x_1, \dots, x_n; \bar{x}_1, \dots, \bar{x}_n) = 0$$

las ecuaciones (2) seran

$$(3) \qquad \frac{f_{\bar{x}_1}}{\phi_{\bar{x}_1}} = \frac{f_{\bar{x}_2}}{\phi_{\bar{x}_2}} = \dots = \frac{f_{\bar{x}_n}}{\phi_{\bar{x}_n}}$$

Para los hiperplanoides subsiste la propiedad siguiente:

<u>Los hiperplanoides son aquellas hipersuperficies para las cuales los coeficientes de la ecuacion del S_{2n-2} característico tangente</u>

escrita en la forma

$$X_n - x_n = \sum_{1}^{n-1} \alpha_i (X_i - x_i)$$

son, sobre la variedad misma, funciones holomorfas de las x_k.

En efecto; se tiene

$$\alpha_i = - \frac{\phi_{x_i}}{\phi_{x_n}}$$

Apliquemos las ecuaciones (3) a las α_i, y se tendrá

$$\frac{\partial(\phi, \alpha_i)}{\partial(\bar{x}_j, \bar{x}_n)} \equiv \begin{vmatrix} \phi_{x_j} & \phi_{x_n} \\ \frac{\partial}{\partial \bar{x}_j} \frac{\phi_{x_i}}{\phi_{x_n}} & \frac{\partial}{\partial \bar{x}_n} \frac{\phi_{x_i}}{\phi_{x_n}} \end{vmatrix} = 0 \qquad j = 1, 2, \ldots, n-1$$

que son precisamente las ecuaciones (9) del Capítulo IV (difiriendo los primeros miembros en un factor no nulo) que caracterizan a los hiperplanoides.

3. Si queremos definir una función de n variables complejas sobre una variedad V de n dimensiones, definida por las ecuaciones

$$(4) \qquad \phi_i (x_1, \ldots, x_n ; \bar{x}_1, \ldots, \bar{x}_n) = 0 \qquad i = 1, 2, \ldots, n$$

se han de distinguir dos casos:

1º La V no es semicaracterística, ésto es, el determinante

$$\Delta \equiv \begin{vmatrix} \frac{\partial \phi_1}{\partial \bar{x}_1}, \ldots, \frac{\partial \phi_1}{\partial \bar{x}_n} \\ \cdots\cdots\cdots \\ \frac{\partial \phi_n}{\partial \bar{x}_1}, \ldots, \frac{\partial \phi_n}{\partial \bar{x}_n} \end{vmatrix}$$

es distinto de cero. Entonces el sistema (4) se puede resolver en la forma

$$\bar{x}_k = \varphi_k (x_1, \ldots, x_n) \qquad k = 1, 2, \ldots, n$$

en el entorno de un punto regular, siendo las φ_k funciones analíticas. Dedúcese de ello que cualquier funcion u + iv, holomorfa en las y_k, z_k, será, sobre la variedad de n dimensiones considerada, función holomorfa de las variables $x_1, \ldots, x_n$, ya que, pasando a lo complejo, la función se convierte en

$$f\,(x_1, \ldots, x_n\,,\ \varphi_1, \ldots, \varphi_n)$$

2º El teorema no es válido, en cambio, si la variedad V es semicaracterística, es decir, si se verifica

$$(5) \qquad \Delta = 0$$

Este resultado constituye el conocido teorema de LEVI-CIVITA el cual lo habia demostrado, como se hace para el problema de CAUCHY para una sola variable, por medio de los teoremas de existencia de los sistemas de ecuaciones diferenciales. La idea de aplicar el método de tránsito a lo complejo es debida a SEVERI.

LEVI-CIVITA llama <u>características</u>[1] a las variedades excepcionales definidas por la ecuación (5) (que, en el campo real, se descompone en dos): variedades que nosotros hemos caracterizado por la sencilla propiedad geométrica de poseer, en cualquier punto genérico, un <u>plano</u> tangente característico, o por la propiedad equivalente de ser transformadads pseudoconformes de los S_n que pertenecen a S_{2n-2} característicos; ó también, lo que es lo mismo, por ser variedades situadas sobre V_{2n-2} características.

4. En el caso en que la variedad a considerar es semicaracterística, se definen fácilmente sobre ella funciones de un número conveniente de variables complejas, y se encuentran para éstas condiciones diferenciales analogas a las (2). Así, por ejemplo, sobre una V_3 semicaracteristica del S_6, definida por las ecuaciones $\phi_1 = 0$, $\phi_2 = 0$, $\phi_3 = 0$, f será función holomorfa de dos variables complejas si se verifica

$$\frac{\partial\,(f,\ \phi_1,\ \phi_2)}{\partial\,(\bar{x},\ \bar{y},\ \bar{z})} = 0 \qquad \frac{\partial\,(f,\ \phi_1,\ \phi_3)}{\partial\,(\bar{x},\ \bar{y},\ \bar{z})} = 0 \qquad \frac{\partial\,(f,\ \phi_2,\ \phi_3)}{\partial\,(\bar{x},\ \bar{y},\ \bar{z})} = 0$$

Basta una de estas condiciones, siendo las otras obvia consecuencia en virtud de la

$$\frac{\partial(\phi_1, \phi_2, \phi_3)}{\partial(x, y, z)} = 0$$

que expresa que la variedad es semicaracterística.

Se ha de observar que, en este caso, las variedades planoides tienen (con relación a la propiedad demostrada en el nº 2) respecto a las demás variedades semicaracterísticas, el mismo papel que los hiperplanoides respecto a las otras hipersuperficies del espacio, en el caso general. Lo cual se puede demostrar con facilidad, análogamente a como lo hemos hecho en aquél caso, aprovechando la forma sencilla y condensada que hemos podido dar en el capitulo IV a las ecuaciones diferenciales que sirven para caracterizar a las variedades planoides; pero también puede preverse como consecuencia de ser las variedades semicaracterísticas las transformadas pseudoconformes de variedades situadas en espacios lineales característicos de un número conveniente de dimensiones, y ser el concepto de variedad planoide invariante respecto a dichas transformaciones.

5. Consideraciones de este género han sido muy provechosas, en el caso n=2, para el estudio de las funciones biarmónicas y para la resolución general del problema de DIRICHLET relativo a estas funciones en el espacio de cuatro dimensiones, hecha por el profesor SEVERI. Esperamos que algunos de los resultados aquí obtenidos puedan tener alguna utilidad en la consideración de las cuestiones análogas que se presentan cuando se han de estudiar en general las funciones analíticas de n variables complejas.

(1) Vd. nota citada en la Introducción.

Indice