UNIVERSITAT DE BARCELONA

Fundamentos de geometría pseudoconforme en *n* dimensiones

José María Planas Corbella

C A P I T U L O II

LAS VARIEDADES CARACTERISTICAS DE S_{2n} - CARACTERIZACION ANALITICA Y PROPIEDADES PROYECTIVO-DIFERENCIALES DEL ENTORNO DE 1^{er} ORDEN.

1. Llamaremos variedad característica a toda variedad real de un S_{2n} que sea imagen, en la representación considerada en el capítulo precedente, de una variedad analitica del S_n complejo.

Por variedad analítica del S_n σ, entendemos una variedad representable en σ con ecuaciones del tipo

$$(1) \qquad f_i(x_1, \dots, x_n; t_1, \dots, t_k) = 0 \qquad i = 1, 2, \dots, n$$

donde $x_1, \dots, x_n$. son coordenadas de σ; $t_1, \dots, t_k$ parámetros complejos; y las f_i son funciones analíticas, ésto es, desarrollables en series de potencias de las variables (x_h, t_j) convergentes alrededor de cada punto de un cierto campo.

Estudiaremos solamente problemas en pequeño; nos vamos a referir, pues, no a la variedad analítica en todo su campo de existencia, sino soalmente al entorno de un punto regular. Supondremos que

$$\frac{\partial(f_1, f_2, \dots, f_n)}{\partial(x_1, x_2, \dots, x_n)} \neq 0$$

en el entorno considerado, así que las ecuaciones (1) se puedan resolver en la forma paramétrica

$$(2) \qquad x_h = \varphi_h(t_1, \dots, t_k) \qquad h = 1, 2, \dots, n$$

siendo las φ_h funciones unívocas holomorfas de las t_j. Además, si los ejes coordenados están en posición genérica respecto del citado entorno (lo cual puede conseguirse con una conveniente rotación pseudoconforme de los ~~m~~mismos) se podrán tomar como parámetros k de las coordenadas, de modo que las ecuaciones de la variedad tomen la forma particular

$$(3) \qquad x_h = \varphi_h(x_1, \ldots, x_k) \qquad h = k+1, \ldots, n$$

o tambien implícitamente

$$(4) \qquad f_h(x_1, \ldots, x_n) = 0 \qquad h = 1, \ldots, n-k$$

con
$$\frac{\partial(f_1, \ldots, f_{n-k})}{\partial(x_{k+1}, \ldots, x_n)} \neq 0 .$$

No repetiremos, de ahora en adelante, éstas observaciones, suponiendo que serán verificadas las anteriores hipótesis siempre que tengamos necesidad de ellio.

Sea, en una cualquiera de las representaciones de V_k,

$$x_h = y_h + i z_h \qquad t_j = u_j + i v_j$$

separando la parte real de la imaginaria, obtendremos las ecuaciones (paramétricas, implícitas o explícitas) de una V_{2k} real de S_{2n}, que hemos llamado <u>característica</u>.

2. En particular, los S_{2k} característicos serán los espacios lineales reales de S_{2n}, imágenes de los S_k de S_n. Por todo lo que se ha dicho en el capítulo anterior, tenemos que

<u>Los espacios lineales característicos son aquellos, y únicamente aquellos, que se apoyan, del modo mas íntimo posible, en la congruencia K del espacio del infinito de S_{2n}</u>.

3. Queremos encontrar ahora las condiciones analíticas a que deben satisfacer las variedades características, en los diversos modos de representación. Conviene, para ello, hacer uso del método de extensión a lo complejo (vease Introducción).

Antepongamos un lema general.

Sean dadas 2(n-k) ecuaciones analíticas en las 2n variables **rea-les** $x'_1, \ldots, x'_{2m}$

$$(5) \qquad \begin{aligned} &\varphi_1(x'_1, \ldots, x'_{2m}) = 0 \\ &\text{- - - - - - - - - - -} \\ &\varphi_{2(m-k)}(x'_1, \ldots, x'_{2m}) = 0 \end{aligned}$$

suponiendo que el jacobiano

$$\frac{\partial(\varphi_1, \ldots, \varphi_{2(m-k)})}{\partial(x'_{2k+1}, \ldots, x'_{2m})}$$

sea distinto de cero en una región R del $S_{2m}(x'_1, \ldots, x'_{2n})$. Resolviendo las (5) se obtendrán las variables $x'_{2k+1}, \ldots, x'_{2m}$ en función de las $x'_1, \ldots, x'_{2k}$. Se trata de encontrar las condiciones a que deben satisfacer las φ para que <u>s</u> de las variables complejas

$$x_{k+r} = x'_{2(k+r)-1} + i\, x'_{2(k+r)} \qquad r = 1, 2, \ldots, m-k$$

vengan a resultar, de éste modo, funciones holomorfas de las

$$x_j = x'_{2j-1} + i\, x'_{2j} \qquad j = 1, 2, \ldots, k$$

Si se efectúa el tránsito de lo real a lo complejo, las ecuaciones (5) se transforman en las

$$(6) \qquad \begin{aligned} &\Phi_1(x_1, \ldots, x_m;\ \bar{x}_1, \ldots, \bar{x}_m) = 0 \\ &\cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot \\ &\Phi_{2(m-k)}(x_1, \ldots, x_m;\ \bar{x}_1, \ldots, \bar{x}_m) = 0 \end{aligned}$$

Supongamos que las <u>s</u> variables citadas son

$$x_{k+1}, x_{k+2}, \ldots, x_{k+s}$$

El lema general es el siguiente:

Las condiciones pedidas, necesarias y suficientes, consisten en la anulación de las k matrices jacobianas

$$\left\| \frac{\partial \phi_i}{\partial x_j};\ \frac{\partial \phi_i}{\partial x_{k+1}}, \ldots, \frac{\partial \phi_i}{\partial x_m};\ \frac{\partial \phi_i}{\partial \bar{x}_{k+s+1}}, \ldots, \frac{\partial \phi_i}{\partial \bar{x}_m} \right\|$$

$$i = 1, 2, \ldots, 2(m-k)$$

(para j=1,2,...,k).

En efecto, para que las x_r ($r=k+1,\ldots,k+s$) sean funciones holomorfas de las x_j ($j=1,\ldots,k$), sabemos (véase Introducción nº 4) que es necesario y suficiente que se verifique

(7) $$\frac{\partial x_r}{\partial \bar{x}_j}=0 \qquad \begin{matrix} r=k+1,\ldots,k+s \\ j=1,2,\ldots,k \end{matrix}$$

y, por consiguiente, se tendrá también (ya que las ϕ_i son reales para valores complejos conjugados de las x)

(7') $$\frac{\partial \bar{x}_r}{\partial x_j}=0 \qquad \begin{matrix} r=k+1,\ldots,k+s \\ j=1,\ldots,k \end{matrix}$$

En las ecuaciones (7) y (7') se entiende que las $x_r, \bar{x}_r$, se han obtenido de la resolución del sistema (6) respecto de las variables x_l, $\bar{x}_l$ ($l=k+1,\ldots,m$). Esta resolución es siempre posible, con las hipótesis hechas sobre las ecuaciones (5).

Derivemos las (6) respecto a x_j ($j=1,\ldots,k$). Resultará, en virtud de las (7')

$$\begin{aligned} \frac{\partial \phi_i}{\partial x_j} + \frac{\partial \phi_i}{\partial x_{k+1}}\frac{\partial x_{k+1}}{\partial x_j} + \cdots + \frac{\partial \phi_i}{\partial x_m}\frac{\partial x_m}{\partial x_j} + & \qquad i=1,2,\ldots,m-k \\ + \frac{\partial \phi_i}{\partial \bar{x}_{k+s+1}}\frac{\partial \bar{x}_{k+s+1}}{\partial x_j} + \cdots + \frac{\partial \phi_i}{\partial \bar{x}_m}\frac{\partial \bar{x}_m}{\partial x_j} = 0 & \qquad j=1,2,\ldots,k \end{aligned}$$

Pero la condición necesaria y suficiente para la compatibilidad de estas ecuaciones es que sea

(8) $$\left\| \frac{\partial \phi_i}{\partial x_j}; \frac{\partial \phi_i}{\partial x_{k+1}}, \ldots, \frac{\partial \phi_i}{\partial x_m}; \frac{\partial \phi_i}{\partial \bar{x}_{k+s+1}}, \ldots, \frac{\partial \phi_i}{\partial \bar{x}_m} \right\| = 0$$

$$i=1,2,\ldots,m-k$$

para $j=1,\ldots,k$; como queríamos demostrar.

Las ecuaciones (8) se pueden escribir también en la forma

(8') $$\left\| \frac{\partial \phi_i}{\partial \bar{x}_j}; \frac{\partial \phi_i}{\partial \bar{x}_{k+1}}, \ldots, \frac{\partial \phi_i}{\partial \bar{x}_m}; \frac{\partial \phi_i}{\partial x_{k+s+1}}, \ldots, \frac{\partial \phi_i}{\partial x_m} \right\| = 0$$

Las condiciones pedidas para las funciones φ_i se escribirán volviendo a lo real; es decir, haciendo $x_h = x'_{2h-1} + ix'_{2h}$, $\bar{x}_h = x'_{2h-1} - ix_{2h}$, y separando después la parte real de la imaginaria

4. Sean ahora

$$(9) \qquad \varphi_i(x'_1, \ldots, x'_{2n}; u_1, \ldots, u_{2k}) = 0 \qquad i = 1, 2, \ldots, 2n$$

2n ecuaciones analíticas en las variables reales $x'_1, \ldots, x'_{2n}$ y en los parámetros reales $u_1, \ldots, u_{2k}$. Queremos saber cuáles son las condiciones necesarias y suficientes para que las (9) representen una V_{2k} característica. Lo que equivale a decir: que, en una región suficientemente pequeña, 2(n-k) de las x (por ejemplo $x'_{2k+1}, \ldots, x'_{2n}$) se puedan expresar como funciones de las restantes x (resolviendo las (9)) en tal forma que las

$$x_r = x_{2r-1} + ix_{2r} \qquad (r = k+1, \ldots, n)$$

resulten funciones holomorfas de las $x_j = x_{2j-1} + ix_{2j}$ $(j=1, \ldots, k)$. Poniendo $t_l = u_{2l-1} + iu_{2l}$, $\bar{t}_l = u_{2l-1} - iu_{2l}$, el lema precedente nos dice que

<u>Condición necesaria y suficiente para que las ecuaciones (9) representan una variedad característica es que, en el entorno de cada punto genérico, se verifiquen las ecuaciones siguientes:</u>

$$(10) \qquad \left\| \frac{\partial \phi_i}{\partial x_j}; \frac{\partial \phi_i}{\partial x_{k+1}}, \ldots, \frac{\partial \phi_i}{\partial x_n}; \frac{\partial \phi_i}{\partial t_1}, \ldots, \frac{\partial \phi_i}{\partial t_k}; \frac{\partial \phi_i}{\partial \bar{t}_1}, \ldots, \frac{\partial \phi_i}{\partial \bar{t}_k} \right\| = 0$$
$$i = 1, 2, \ldots, 2n$$

<u>para $j=1, \ldots, k$</u>; siendo las ϕ_i las transformadas, como de costumbre, de las φ_i, mediante el tránsito a lo complejo.

5. Supongamos que las ecuaciones de la variedad vengan dadas en la forma paramétrica explícita

$$(11) \qquad x'_i = f_i(u_1, \ldots, u_{2k})$$

Entonces se puede escribir

$$(12) \qquad \varphi_i \equiv x'_i - f_i$$

Efectuado el tránsito a lo complejo, las (11) se convertirán, pues, en las

$$(13)\quad \begin{cases} \Phi_{2r-1}(x_1,\dots,x_n;\bar{x}_1,\dots,\bar{x}_n|t_1,\dots,t_k;\bar{t}_1,\dots,\bar{t}_k) \equiv \dfrac{x_r+\bar{x}_r}{2} - f_{2r-1}\left(\dfrac{t_1+\bar{t}_1}{2},\dots,\dfrac{t_k-\bar{t}_k}{2i}\right) \\ \Phi_{2r}(x_1,\dots,x_n;\bar{x}_1,\dots,\bar{x}_n|t_1,\dots,t_k;\bar{t}_1,\dots,\bar{t}_k) \equiv \dfrac{x_r-\bar{x}_r}{2i} - f_{2r}\left(\dfrac{t_1+\bar{t}_1}{2},\dots,\dfrac{t_k-\bar{t}_k}{2i}\right) \end{cases} \quad (r=1,2,\dots,n)$$

Debemos hacer uso de las condiciones (10), habida cuenta de que, en el presente caso, se tiene

$$\frac{\partial \phi_{2r-1}}{\partial x_j} = \frac{1}{2}\frac{\partial(x_r+\bar{x}_r)}{\partial x_j} = \begin{cases} 0 & \text{si } j\neq r \\ \frac{1}{2} & \text{si } j=r \end{cases} \qquad \frac{\partial \phi_{2r-1}}{\partial t_\gamma} = -\frac{1}{2}\frac{\partial f_{2r-1}}{\partial u_{2\gamma-1}} + \frac{i}{2}\frac{\partial f_{2r-1}}{\partial u_{2\gamma}}$$

$$\frac{\partial \phi_{2r}}{\partial x_j} = -\frac{i}{2}\frac{\partial(x_r-\bar{x}_r)}{\partial x_j} = \begin{cases} 0 & \text{si } j\neq r \\ -\frac{i}{2} & \text{si } j=r \end{cases} \qquad \frac{\partial \phi_{2r}}{\partial t_\gamma} = -\frac{1}{2}\frac{\partial f_{2r}}{\partial u_{2\gamma-1}} - \frac{i}{2}\frac{\partial f_{2r}}{\partial u_{2\gamma}}$$

de modo que dichas ecuaciones toman la forma

$$(14)\quad \left\| \begin{array}{l} 0;\ 0\ 0\dots 0;\ -f_{11}+if_{12},\dots,-f_{1,2k-1}+if_{1,2k};\ -f_{11}-if_{12},\dots,-f_{1,2k-1}-if_{1,2k} \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ 1;\ 0\ 0\dots 0;\ -f_{2j-1,1}+if_{2j-1,2},\dots,-f_{2j-1,2k-1}+if_{2j-1,2k};\ -f_{2j-1,1}-if_{2j-1,2},\dots,-f_{2j-1,2k-1}-if_{2j-1,2k} \\ -i;\ 0\ 0\dots 0;\ -f_{2j,1}+if_{2j,2},\dots,-f_{2j,2k-1}+if_{2j,2k};\ -f_{2j,1}-if_{2j,2},\dots,-f_{2j,2k-1}-if_{2j,2k} \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ 0;\ 1\ 0\dots 0;\ -f_{k+1,1}+if_{k+1,2}\ \dots\dots\dots\dots,-f_{k+1,2k-1}-if_{k+1,2k} \\ 0;\ -i\ 0\dots 0;\ -f_{k+2,1}+if_{k+2,2}\ \dots\dots\dots\dots,-f_{k+2,2k-1}-if_{k+2,2k} \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ 0;\ 0\ 0\dots 1;\ -f_{2n-1,1}+if_{2n-1,2}\ \dots\dots\dots\dots,-f_{2n-1,2k-1}+if_{2n-1,2k} \\ 0;\ 0\ 0\dots -i;\ -f_{2n,1}+if_{2n,2}\ \dots\dots\dots\dots,-f_{2n,2k-1}+if_{2n,2k} \end{array} \right\| =$$

$$f_{pq} = \frac{\partial f_p}{\partial u_q} \qquad (j=1,2,\dots,k)$$

En la matriz (14) podemos sumar a la columna n-k+2l la n-k+2l+1 (para l=1,...,k) y observamos entonces que la que viene a ocupar éste último lugar puede descomponerse en suma de dos columnas, una de las cuales es proporcional a la anterior: suprimiendo esta última, resulta

$$(15)\qquad \left\| \begin{array}{c;cccc;cccc} 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & f_{11}, & f_{12}, & \dots, & f_{1,2k} \\ \hdashline 1 & 0 & 0 & \dots & 0 & f_{2j-1,1} & & \dots & f_{2j-1,2k} \\ -i & 0 & 0 & \dots & 0 & f_{2j,1} & & \dots & f_{2j,2k} \\ \hdashline 0 & 1 & 0 & \dots & 0 & f_{k+1,1} & & \dots & f_{k+1,2k} \\ 0 & -i & 0 & \dots & 0 & f_{k+2,1} & & \dots & f_{k+2,2k} \\ \hdashline 0 & 0 & 0 & \dots & 1 & f_{2n-1,1} & & \dots & f_{2n-1,2k} \\ 0 & 0 & 0 & \dots & -i & f_{2n,1} & & \dots & f_{2n,2k} \end{array} \right\| = 0 \qquad (j = 1, 2, \dots, k)$$

Veamos la forma que toman estas ecuaciones, desarrollándolas para valores particulares de n y k. Observemos que, siempre que nos sea cómodo, podemos substituir sus primeros miembros por los imaginarios conjugados, poniendo $-i$ en lugar de i.

En el caso $n=3$, k puede tomar los valores 1 y 2.

1º) $n=3$, $k=1$. Se trata de una superficie de S_6, representada én este espacio por la ecuaciones

$$(16)\qquad x_i = f_i\,(u,v) \qquad i = 1, 2, \dots, 6$$

Poniendo

$$x = x_1 + i x_2 \qquad y = x_3 + i x_4 \qquad z = x_5 + i x_6$$

$$F_r = f_{2r-1} + i f_{2r} \qquad (r = 1, 2, 3)$$

dichas ecuaciones se pueden también escribir complejamente

$$(17)\qquad x = F_1(u,v) \qquad y = F_2(u,v) \qquad z = F_3(u,v)$$

y las ecuaiones (15) se reducen en este caso a

$$\left\| \begin{array}{ccccc} 1 & 0 & 0 & f_{11} & f_{12} \\ i & 0 & 0 & f_{21} & f_{22} \\ 0 & 1 & 0 & f_{31} & f_{32} \\ 0 & i & 0 & f_{41} & f_{42} \\ 0 & 0 & 1 & f_{51} & f_{52} \\ 0 & 0 & i & f_{61} & f_{62} \end{array} \right\| = 0$$

de las cuales, sumando a las filas pares las impares multiplicadas por i, se deducen las

$$\left\| \begin{array}{ccccc} 0 & 0 & 0 & F_{11} & F_{12} \\ i & 0 & 0 & f_{21} & f_{22} \\ 0 & 0 & 0 & F_{21} & F_{22} \\ 0 & i & 0 & f_{41} & f_{42} \\ 0 & 0 & 0 & F_{31} & F_{32} \\ 0 & 0 & i & f_{61} & f_{62} \end{array} \right\| = 0$$

sistema equivalente al de las dos ecuaciones independientes

(18) $$\frac{\partial(F_1, F_2)}{\partial(u,v)} = 0 \qquad \frac{\partial(F_1, F_3)}{\partial(u,v)} = 0$$

de las cuales es consecuencia la $\frac{\partial(F_2, F_3)}{\partial(u,v)} = 0$

Las (18) son, pues, las condiciones necesarias y suficientes para que las (17) equivalgan a establecer dos relaciones analíticas entre x, y, z. Dichas ecuaciones se satisfacen evidentemente (como puede preverse <u>a priori</u>) cuando las F sean funciones monogéneas de la $t=u+iv$; la condición de monogeneidad se puede ecribir, en efecto

$$\frac{\partial F_k}{\partial v} = i\,\frac{\partial F_k}{\partial u} \qquad (k=1,2,3)$$

Si u y v son dos de las coordenadas, por ejemplo x_1 y x_2, entonces las mismas (18) son las condiciones de monogeneidad de F_2 y F_3 consideradas como funciones de x.

2º) n=3, k=2. Las ecuaciones

(19) $$x_i = f_i(u_1, u_2, u_3, u_4) \qquad i=1,2,\ldots,6$$

representan en S_6 una V_4, que se puede escribir en el campo complejo

(20) $$x = F_1(t_1, t_2) \qquad y = F_2(t_1, t_2) \qquad z = F_3(t_1, t_2)$$

con notaciones análogas a las del caso anterior.

Las (15) se reducen a dos ecuaciones

$$\begin{vmatrix} 1 & 0 & f_{11} & \ldots & f_{14} \\ i & 0 & f_{21} & \ldots & f_{24} \\ 0 & 0 & f_{31} & \ldots & f_{34} \\ 0 & 0 & f_{41} & \ldots & f_{44} \\ 0 & 1 & f_{51} & \ldots & f_{54} \\ 0 & i & f_{61} & \ldots & f_{64} \end{vmatrix} = 0 \qquad \begin{vmatrix} 1 & 0 & f_{11} & \ldots & f_{14} \\ i & 0 & f_{21} & \ldots & f_{24} \\ 0 & 1 & f_{31} & \ldots & f_{34} \\ 0 & i & f_{41} & \ldots & f_{44} \\ 0 & 0 & f_{51} & \ldots & f_{54} \\ 0 & 0 & f_{61} & \ldots & f_{64} \end{vmatrix} = 0$$

de las cuales se deducen las

(21) $$\frac{\partial(F_1, F_2, F_3)}{\partial(u_i, u_j, u_l)} = 0 \qquad (i,j,l=1,2,3,4)$$

necesarias y suficientes para que las (19) representen una V_4 característica,o las (20) una superficie analítica del espacio complejo de tres dimensiones.

6. Sean

$$x_i = f_i(u,v) \qquad i = 1,2,3,4$$

las ecuaiones de una superficie analítica real del S_4. Escribiendo, como de costumbre

$$F_1 = f_1 + i f_2 \qquad F_2 = f_3 + i f_4$$

y aplicando también a este caso los resultados del nº 4,se obtiene, como condición necesaria y suficiente para que aquella superficie sea característica,la siguiente

$$\frac{\partial(F_1,F_2)}{\partial(u,v)} = 0$$

encontrada por vez primera por SEVERI por otro camino[1]. B. SEGRE ha dado también de ella otra demostración en su citada Memoria "Questioni geometriche legate colla teoria delle funzioni di due variabili complesse".

7. Observemos que las ecuaciones (10) del nº4 expresan también que son característicos los espacios tangentes a la variedad (9) definidos por las ecuaciones

$$\sum_{r=1}^{2n}(X_r - x_r)\frac{\partial\varphi_i}{\partial x_r} + \sum_{s=1}^{2k}(U_s - u_s)\frac{\partial\varphi_i}{\partial u_s} = 0 \qquad (i = 1,2,\ldots,2n)$$

Llegamos así a la importante caracterización proyectiva de las variedades características(ya enunciada por B. SEGRE para n=2[2]):

<u>Las variedades características están caracterizadas por el hecho de ser característicos los espacios tangentes en sus puntos genéricos.</u>

NOTAS

(1) SEVERI, *Sur une propiété fondamentale des fonctions analytiques de plusieurs variables*. "Comptes Rendus" t. 192 (1931) pag. 596.

(2) Vd. loc. cit. en la nota (3) del Capítulo I.

C A P I T U L O III

PROPIEDADES DIFERENCIALES DE SEGUNDO ORDEN

1. Antepongamos algunas consideraciones sobre los espacios osculadores a una variedad analítica;dado que,encontrándose ya en un antiguo trabajo de DEL PEZZO,son generalmente poco conocidas. Las propiedades que siguen valen igualmente en el campo real y en el complejo.

Consideremos,en primer lugar,una superficie analítica perteneciente a un espacio de más de cuatro dimensiones. Se sabe que el plano tangente a la superficie en uno de sus puntos genéricos es el que contiene las tangentes a todas las lineas regulares pertenecientes a la superficie,que salen del punto considerado. Si,en lugar de las tanegantes, se consideran los planos osculadores a todas aquellas líneas, se reconoce que dichos planos llenan,en general,una variedad cónica de cuatro dimensiones,cuyo espacio lineal de pertenencia es un espacio de cinco dimensiones. Este es el espacio que DEL PEZZO llama primer espacio osculador a la superficie en el punto considerado. BOMPIANI lo llama tambien espacio 2-tangente.

El primer espacio osculador en un punto P de la superficie F es también el espacio lineal mínimo que contiene todo el entorno de segundo orden de P. Es decir,que,si F viene representado paramétricamente por medio de las ecuaciones

$$x_i = f_i(u,v)$$

el espacio lineal determinado por el punto P de coordenadas x ,y por los cinco puntos

$$P_u\left(\frac{\partial x_i}{\partial u}\right),\ P_v\left(\frac{\partial x_i}{\partial v}\right),\ P_{uu}\left(\frac{\partial^2 x_i}{\partial u^2}\right),\ P_{uv}\left(\frac{\partial^2 x_i}{\partial u\,\partial v}\right),\ P_{vv}\left(\frac{\partial^2 x_i}{\partial v^2}\right)$$

es, precisamente, el primer espacio osculador.

Existirán también los espacios osculadores 2º, 3º, etc. de dimensiones, respectivamente, 9, 14, etc. El espacio osculador (n-1)-ésimo (o espacio n-tangente) tiene $\frac{n(n+3)}{2}-1$ dimensiones.

Las precedentes definiciones y propiedades se extienden evidentemente a variedades analíticas de cualquier número de dimensiones. El primer espacio osculador, en un punto P, a una V_n cuyo espacio ambiente sea suficientemente amplio, es el $S_{\frac{n(n+3)}{2}}$ de pertenencia de la variedad lugar de todos los planos osculadores a las líneas regulares de V_n que salen de P. Este es el espacio lineal mínimo que contiene todo el entorno de segundo orden de V_n en P. Y así sucesivamente.

2. Examinemos ahora lo que sucede con los espacios osculadores de una V_{2r} $\mathfrak{F}$ (perteneciente a un ambiente suficientemente amplio) imagen de la V_r F, analítica, definida por las ecuaciones paramétricas

$$x_k = f_k(t_1, t_2, \ldots, t_r) \qquad k = 1, 2, \ldots, n$$

donde nos limitamos a considerar el entorno de un punto P en el cual las f_k son funciones unívocas holomorfas de las t. Escribamos

$$x_k = y_k + i z_k \qquad t_j = u_{2j-1} + i u_{2j}$$

y además

$$f_k(t_1, t_2, \ldots, t_r) = \varphi_k(u_1, \ldots, u_{2r}) + i \psi_k(u_1, \ldots, u_{2r})$$

Las ecuaciones de $\mathfrak{F}$ se podrán, pues, escribir

$$y_k = \varphi_k(u_1, \ldots, u_{2r})$$
$$z_k = \psi_k(u_1, \ldots, u_{2r})$$

siendo las φ_k, ψ_k funciones analíticas reales de los parámetros reales $u_1, \ldots, u_{2r}$, que satisfacen dos a dos, en el entorno considerado, a las ecuaciones

$$(3) \qquad \frac{\partial \varphi_k}{\partial u_{2j-1}} = \frac{\partial \psi_k}{\partial u_{2j}} \qquad\qquad \frac{\partial \varphi_k}{\partial u_{2j}} = -\frac{\partial \psi_k}{\partial u_{2j-1}}$$

y, cada una de ellas separadamente, al sistema

$$(4) \qquad \begin{aligned} &\frac{\partial^2}{\partial u_{2j-1}\,\partial u_{2l-1}} + \frac{\partial^2}{\partial u_{2j}\,\partial u_{2l}} = 0 \\ &\frac{\partial^2}{\partial u_{2j}\,\partial u_{2l-1}} + \frac{\partial^2}{\partial u_{2j-1}\,\partial u_{2l}} = 0 \end{aligned} \qquad j \leq l \quad (j, l = 1, 2, \ldots, r)$$

obtenido del

$$(5) \qquad \begin{aligned} &\frac{\partial^2 \varphi_k}{\partial u_{2j-1}\,\partial u_{2l-1}} = \frac{\partial^2 \psi_k}{\partial u_{2j}\,\partial u_{2l-1}} \qquad &\frac{\partial^2 \psi_k}{\partial u_{2j}\,\partial u_{2l-1}} = -\frac{\partial^2 \psi_k}{\partial u_{2j-1}\,\partial u_{2l-1}} \\ &\frac{\partial^2 \varphi_k}{\partial u_{2j-1}\,\partial u_{2l}} = \frac{\partial^2 \psi_k}{\partial u_{2j}\,\partial u_{2l}} \qquad &\frac{\partial^2 \varphi_k}{\partial u_{2j}\,\partial u_{2l}} = -\frac{\partial^2 \psi_k}{\partial u_{2j-1}\,\partial u_{2l}} \end{aligned}$$

cuyas ecuaciones se obtienen derivando las (3)

Para comodidad de escritura, si P es un punto de F, cuyas coordenadas son x_k, indicaremos con P_j el punto cuyas coordenadas son $\frac{\partial x_k}{\partial t_j}$ y con P_{jl} el de coordenadas $\frac{\partial^2 x_k}{\partial t_j \partial t_l}$. Analogamente en el espacio real, si $\mathcal{P}$ es el punto correspondiente, de coordenadas y_k, z_k, de $\mathcal{F}$, $\mathcal{P}_j$ será el punto de coordenadas $\frac{\partial y_k}{\partial u_j}$, $\frac{\partial z_k}{\partial u_j}$ y $\mathcal{P}_{jl}$ el de coordenadas $\frac{\partial^2 y_k}{\partial u_j u_l}$, $\frac{\partial^2 z_k}{\partial u_j \partial u_l}$.

El $S_{\frac{n(n+3)}{2}}$ ω osculador a F en P está determinado por los puntos

$$P, \; P_j, \; P_{jl} \quad (j \leq l \; ; \; j, l = 1, 2, \ldots, r)$$

de modo que sus ecuaciones paramétricas serán

$$(6) \qquad X_k = x_k + \sum_j \lambda_j \frac{\partial x_k}{\partial t_j} + \sum_{jl} \lambda_{jl} \frac{\partial^2 x_k}{\partial t_j \partial t_l} \qquad (k = 1, 2, \ldots, n)$$

siendo $\lambda_j = \mu_j + i\nu_j$ y $\lambda_{jl} = \mu_{jl} + i\nu_{jl}$ parámetros complejos. Separando la parte real de la imaginaria, se obtienen las ecuaciones del $S_{n(n+3)}$ Ω, característico, imagen real de ω

$$(7)\qquad \begin{aligned} Y_k &= y_k + \sum_j \left(\mu_j \frac{\partial \varphi_k}{\partial u_{2l-1}} - \nu_j \frac{\partial \psi_k}{\partial u_{2l-1}}\right) + \sum_{jl} \left(\mu_{jl} \frac{\partial^2 \varphi_k}{\partial u_{2j-1}\partial u_{2l-1}} - \nu_{jl} \frac{\partial^2 \psi_k}{\partial u_{2j-1}\partial u_{2l-1}}\right) \\ Z_k &= z_k + \sum_j \left(\mu_j \frac{\partial \psi_k}{\partial u_{2l-1}} + \nu_j \frac{\partial \varphi_k}{\partial u_{2l-1}}\right) + \sum_{jl} \left(\mu_{jl} \frac{\partial^2 \psi_k}{\partial u_{2j-1}\partial u_{2l-1}} + \nu_{jl} \frac{\partial^2 \varphi_k}{\partial u_{2j-1}\partial u_{2l-1}}\right) \end{aligned}$$

que nos dicen que Ω es el espacio determinado por los puntos, linealmente independientes

$$(8)\qquad \mathcal{P},\ \mathcal{P}_{2j-1},\ \mathcal{Q}_{2j-1}\left(-\frac{\partial \psi_k}{\partial u_{2j-1}}, \frac{\partial \varphi_k}{\partial u_{2j-1}}\right),\ \mathcal{P}_{2j-1,2l-1},\ \mathcal{Q}_{2j-1,2l-1}\left(-\frac{\partial^2 \psi_k}{\partial u_{2j-1}\partial u_{2l-1}}, \frac{\partial^2 \varphi_k}{\partial u_{2j-1}\partial u_{2l-1}}\right)$$

Por otra parte, los puntos que determinan el espacio Ω_1 osculador a $\mathcal{F}$ en $\mathcal{P}$ son

$$\mathcal{P},\ \mathcal{P}_\lambda,\ \mathcal{P}_{\lambda\mu}\quad (\lambda \leq \mu \quad \lambda,\mu = 1, 2, \dots, 2r)$$

Ahora, de estos puntos coinciden con los anteriores $\mathcal{P}, \mathcal{P}_\lambda, \mathcal{P}_{2j-1,2l-1}, \mathcal{P}_{2j,2l-1}$ ya que se tiene

$$\mathcal{P}_{2j} \equiv \mathcal{Q}_{2j-1} \qquad \mathcal{P}_{2j,2l-1} \equiv \mathcal{Q}_{2j-1,2l-1}$$

en virtud de las relaciones (5); y los restantes puntos $\mathcal{P}_{2j-1,2l}, \mathcal{P}_{2j,2l}$ pertenecen al mismo espacio lineal de los primeros, por ser sus coordenadas combinaciones lineales de las de aquellos, como nos demuestran las (4). Por consiguiente Ω_1 coincide con Ω.

Concluimos, pues, con el siguiente teorema:

Las variedades características gozan de la propiedad de que sus espacios osculadores en puntos genéricos tienen un número de dimensiones reducido a $r(r+3)$ (en lugar de $r(2r+3)$ como en el caso general).

Además, dichos espacios osculadores son característicos, como imágenes reales de los espacios osculadores a las variedades correspondientes del campo complejo.

3. El hecho de la reducción del número de las dimensiones de los espacios osculadores a una V_{2r} característica depende, pues, substancialmente, de las ecuaciones (4) a que satisfacen las coordenadas de un punto de la variedad, consideradas como funciones de $2r$ pará-

metros reales, escogidos convenientemente. En general, todas las variedades de 2r dimensiones, de un espacio suficientemente amplio, que gozan de tal propiedad, están caracterizadas analíticamente por medio de un sistema de r^2 ecuaciones (linealmente independientes) lineales y homogéneas, en las derivadas parciales de segundo orden. De éstas ecuaciones se deducirán, por derivaciones sucesivas, sistemas de orden más elevado, que expresarán la reducción del número de las dimensiones de los sucesivos espacios.

Asi, por ejemplo, el segundo, tercero, cuarto, etc. espacios osculadores a una superficie característica tienen, respectivamente, las dimensiones 6, 8, 10, tec. en lugar de 9, 14, 20 etc.

4. Las superficies de un hiperespacio ($n \geq 5$) caracterizadas por la propiedad de que, en cada punto genérico, el primer espacio osculador se reduce a un S_4, han sido estudiadas por C. SEGRE[1]. La propiedad geométrica que las define equivale analíticamente, como hemos dicho, al hecho de que las coordenadas del punto, consideradas como funciones de dos parámetros reales, satisfacen a una ecuación lineal entre las derivadas parciales de segundo orden

$$A f_{uu} + 2B f_{uv} + C f_{vv} + D f_u + E f_v + F f = 0 \tag{9}$$

que, en nuestro caso, es la clásica laplaciana

$$f_{uu} + f_{vv} = 0 \tag{10}$$

Una interesante propiedad (que puede verse en la Memoria citada de C. SEGRE) de las superficies aquí consideradas, es la siguiente: la ecuación

$$C\, du^2 - 2B\, du\, dv + A\, dv^2 = 0 \tag{11}$$

define, sobre la superficie, un doble sistema conjugado de líneas (en el sentido de DUPIN, ésto es, que las tangentes a las líneas de uno de los sistemas a lo largo de una línea cualquiera del otro forman una superficie desarrollable). Estas líneas se llaman <u>características</u>; dado un punto de la superficie, los pares de tangentes a las secciones hiperplanas para las cuales dicho punto es doble, forman los pares de una involución, cuyos rayos dobles son, precisamente, las tangentes a las características. Todo lo dicho en el caso en que la ecuacion (9) sea del tipo <u>no parabólico</u>, que es el único que nos interesa.

Para las superficies características observamos que, reduciéndose la ecuacion (9) a la (10), es A=C, B=0, y aquél doble sistema conjugado esta formado por las integrales de la ecuación

(12) $$du^2 + dv^2 = 0$$

que, en éste caso, <u>son las líneas de longitud nula</u>. En efecto, éstas últimas se definen mediante la ecuación

(13) $$ds^2 = \mathcal{E}\,du^2 + 2\mathcal{F}\,du\,dv + \mathcal{G}\,dv^2 = 0$$

pero se tiene, en virtud de las condiciones de monogeneidad de f_k,

$$\mathcal{E} = \sum_k \left[\left(\frac{\partial \varphi_k}{\partial u}\right)^2 + \left(\frac{\partial \psi_k}{\partial u}\right)^2\right] = \sum_k \left[\left(\frac{\partial \psi_k}{\partial v}\right)^2 + \left(\frac{\partial \varphi_k}{\partial v}\right)^2\right] = \mathcal{G}$$

$$\mathcal{F} = \sum_k \left[\frac{\partial \varphi_k}{\partial u}\frac{\partial \varphi_k}{\partial v} + \frac{\partial \psi_k}{\partial u}\frac{\partial \psi_k}{\partial v}\right] = 0$$

y la ecuación (13) se reduce a la (11). Y de ahí la importante consecuencia

<u>Las superficies características son superficies de área mínima.</u>

Esta propiedad, relativamente a las superficies características de un S_4, fué demostrada la primera vez por KOMMERELL[2], con los principios del cálculo de las variaciones. Otra demostración sintética, muy elegante, también relativa al caso n=2, puede verse en la tantas veces citada Memoria de B. SEGRE. Las consideraciones que preceden tienden a hacer ver cómo el considerar las superficies características en espacios más amplios arroja nueva luz sobre algunas de sus propiedades intrínsecas.

Se puede observar que, si movemos rígidamente una superficie caracteristica, en general no conservará éste carácter, porque hay movimientos rígidos que no son pseudoconformes, es decir, no corresponden a transformaciones analíticas del campo complejo. Lo cual nos dice que las superficies características no son todas las de área minima. De las consideraciones que hace B. SEGRE en el nº de la memoria citada se deduce, sin embargo, que las superficies de área minima de un espacio de cuatro dimensiones son las superficies características y sus transformadas por movimientos rígidos. Es de suponer que la misma propiedad subsista en un hiperespacio cualquiera; pero, en todo caso, las consideraciones citadas de B. SEGRE no se extienden tal como están.

NOTAS

(1) Vd. C. SEGRE: Su una classe di superficie degli iperspazi, legata colle equazioni lineari alle derivate parziali del secondo ordine. "Atti della R. A. dell Sc. di Torino", t. 42, 1907.

(2) K. KOMMERELL: Riemannsche Flächen im ebene Raum von vier Dimensionen. "Mathematische Annalen" Bd. 60, 1905.

CAPITULO IV

LAS VARIEDADES PLANOIDES

1. Llamaremos variedad <u>planoide</u>[1] a una variedad real de S_{2n} que sea lugar analítico de infinitas variedades características. En este Capítulo estudiaremos solamente tales variedades con relación a la precedente definición;más adelante veremos la importancia que tienen desde el punto de vista de las transformaciones pseudoconformes y para el estudio de las funciones de varias variables complejas sobre variedades analíticas.

2. Las variedades planoides más importantes son las hipersuperficies lugar analítico de ∞^1 variedades características. Las llamaremos <u>hiperplanoides</u>,denominación debida a BERTIL ALMER,[2] que las estudió en el caso n=2:el primero que se ocupó de tales hipersuperficies de un S_4 fué POINCARÉ,[3] como ya dijimos en la Introducción.

Para obtener las condiciones analíticas que caracterizan a los hiperplanoides nos será nuevamente muy útil la extensión a lo complejo. Sea

$$\varphi(y_1, y_2, \dots, y_n ; z_1, z_2, \dots, z_n) = 0 \tag{1}$$

la ecuación de una hipersuperficie analítica(real) de S_{2n}. Para que sea lugar geométrico de una simple infinidad analítica de V_{2n-2} características,es necesario y suficiente que se pueda encontrar una familia de hipersuperficies analíticas y dependientes analíticamente de un parámetro real

$$\varphi_1(y_1, \dots, y_n ; z_1, \dots, z_n ; \alpha) = 0 \tag{2}$$

de modo que, para todo valor de dicho parámetro en un cierto intervalo (α_0 , α_1) las ecuaciones (1) y (2) definan una $V_{2(n-1)}$ característica. Observemos, en primer lugar, que debera ser $\psi'_\alpha \neq 0$, de modo que la ecuacion (2) podra escribirse, en un intervalo conveniente de α , en la forma

(3) $$\alpha = \psi_1$$

Hagamos el tránsito de lo real a lo complejo, escribiendo, como siempre, $x_i = y_i + iz_i$, $\bar{x}_i = y_i - iz_i$, y sean Φ y Ψ las transformadas de φ y ψ_1 ; serán funciones analíticas en las 2n variables $x_i, \bar{x}_i$, consideradas como independientes. Para que una ecuacion $\phi = 0$ represente una hipersuperficie real del $S_{2n}(x_1, \dots, x_{2n})$ es necesario y suficiente que la función ϕ sea real siempre que se substituyan $x_i, \bar{x}_i$, por pares de números complejos conjugados. En tal caso se tiene que las derivadas parciales $\phi_{x_i}, \phi_{\bar{x}_i}$; $\phi_{x_i x_j}, \phi_{\bar{x}_i \bar{x}_j}$ etc. son también complejo-conjugadas.

Dicho esto, tengamos en cuenta que, tratándose del entorno de un punto ordinario, no serán nulas todas las derivadas parciales de ϕ : podemos suponer, por ejemplo, $\phi_{x_n} \neq 0$ (y entonces se tendrá también $\phi_{\bar{x}_n} \neq 0$). Podemos, pues, resolver la ecuación

(4) $$\phi\,(x_1, \dots, x_n ; \bar{x}_1, \dots, \bar{x}_n) = 0$$

respecto a x_n y substituir y substituir el valor hallado en la ψ ; entonces la condición pedida se podrá enunciar así: que de la ecuación (4) y la

(5) $$\psi\,(x_1, \dots, x_n ; \bar{x}_1, \dots, \bar{x}_n) = \alpha$$

se pueda, cualquiera que sea α en el expresado intervalo, deducir la x_n como función analítica de las $x_1, \dots, x_{n-1}$, y la $\bar{x}_n$ como función también analítica de las $\bar{x}_1, \dots, \bar{x}_{n-1}$. En virtud del lema demostrado en el capítulo II deberán, pues, subsistir las relaciones

$$(6) \qquad X_j \equiv \frac{\partial(\phi,\psi)}{\partial(x_j,x_n)} = 0 \qquad \bar{X}_j \equiv \frac{\partial(\phi,\psi)}{\partial(\bar{x}_j,\bar{x}_n)} = 0 \quad (j=1,\dots,n-1)$$

El sistema (6), lineal, homogéneo y de primer orden en las derivadas parciales de ψ, deberá (por las condiciones del problema) admitir una solución <u>no constante</u>. Para lo cual, es preciso y basta que dicho sistema (formado por 2n-2 ecuaciones en 2n-1 variables) sea completo; es decir, que todas las ecuaciones

$$(7) \qquad \begin{aligned} X_{hk} &\equiv X_h[X_k(\psi)] - X_k[X_h(\psi)] = 0 \\ X_{\bar{h}\bar{k}} &\equiv \bar{X}_h[\bar{X}_k(\psi)] - \bar{X}_k[\bar{X}_h(\psi)] = 0 \\ X_{h\bar{k}} &\equiv X_h[\bar{X}_k(\psi)] - \bar{X}_k[X_h(\psi)] = 0 \end{aligned}$$

que, como es sabido, son lineales, homogéneas y de primer orden, y admiten todas las inetgrales del sistema (6), deben ser consecuencia <u>lineal</u> de las (6).

Debemos, pues, igualar a cero todos los determinantes de orden 2n-1 formados con los coeficientes de las 2n-2 ecuaciones (6) y cada una de las (7). Para no repetir los cálculos, designaremos con $C_{hk}^{x_i}$ $C_{\bar{h}\bar{k}}^{x_i}$ ... los coeficientes de x_i en $X_{hk}, X_{\bar{h}\bar{k}}, \dots$ Y análogo significado tendran $C_{hk}^{\bar{x}_i}, C_{\bar{h}\bar{k}}^{\bar{x}_i}$, etc. Entonces, uno cualquiera de dichos determinantes se puede escribir (teniendo en cuenta que $\psi_{x_n} = 0$)

$$\Delta_{hk} = \begin{vmatrix} \phi_{x_n} & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & \phi_{x_n} & \dots & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & \phi_{x_n} & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \dots & 0 & \phi_{\bar{x}_n} & 0 & \dots & 0 & -\phi_{\bar{x}_1} \\ 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & \phi_{\bar{x}_n} & \dots & 0 & -\phi_{\bar{x}_2} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & \dots & \phi_{\bar{x}_n} & -\phi_{\bar{x}_{n-1}} \\ C_{hk}^{x_1} & C_{hk}^{x_2} & \dots & C_{hk}^{x_{n-1}} & C_{hk}^{\bar{x}_1} & C_{hk}^{\bar{x}_2} & \dots & C_{hk}^{\bar{x}_{n-1}} & C_{hk}^{\bar{x}_n} \end{vmatrix} =$$

$$=\phi_{x_n}^{n-1}\begin{vmatrix} \phi_{\bar{x}_n} & 0 & \dots & 0 & -\phi_{\bar{x}_1} \\ 0 & \phi_{\bar{x}_n} & \dots & 0 & -\phi_{\bar{x}_2} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & \dots & \phi_{\bar{x}_n} & -\phi_{\bar{x}_{n-1}} \\ C_{hk}^{\bar{x}_1} & C_{hk}^{\bar{x}_2} & \dots & C_{hk}^{\bar{x}_{n-1}} & C_{hk}^{\bar{x}_n} \end{vmatrix} = \phi_{x_n}^{n-1}\,\phi_{\bar{x}_n}^{n-2}\sum_{i=1}^{n} C_{hk}^{\bar{x}_i}\,\phi_{\bar{x}_i}$$

y expresiones analogas obtendremos para $\Delta_{\bar{h}\bar{k}}$ y $\Delta_{h\bar{k}}$. Tendremos, por lo tanto, el sistema

$$\Delta_{hk} = 0 \qquad \Delta_{\bar{h}\bar{k}} = 0 \qquad \Delta_{h\bar{k}} = 0$$

pero, como hemos supuesto que ϕ_{x_n} y $\phi_{\bar{x}_n}$ eran diferentes de cero, resultará

$$\Sigma_{hk} \equiv \sum_{1}^{n} C_{hk}^{\bar{x}_i}\,\phi_{\bar{x}_i} = 0$$
$$\Sigma_{\bar{h}\bar{k}} \equiv \sum_{1}^{n} C_{\bar{h}\bar{k}}^{\bar{x}_i}\,\phi_{\bar{x}_i} = 0$$
$$\Sigma_{h\bar{k}} \equiv \sum_{1}^{n} C_{h\bar{k}}^{\bar{x}_i}\,\phi_{\bar{x}_i} = 0$$

Ahora es fácil ver que Σ_{hk} y $\Sigma_{\bar{h}\bar{k}}$, cualesquiera que sean h y k, son idénticamente nulas. Se tiene, en efecto, para Σ_{hk}

$$C_{hk}^{\bar{x}_i} \equiv 0$$

y para $\Sigma_{\bar{h}\bar{k}}$

$$C_{\bar{h}\bar{k}}^{\bar{x}_h} = \phi_{\bar{x}_n}\,\phi_{\bar{x}_k\bar{x}_n} - \phi_{\bar{x}_k}\,\phi_{\bar{x}_n\bar{x}_n}$$
$$C_{\bar{h}\bar{k}}^{\bar{x}_k} = \phi_{\bar{x}_h}\,\phi_{\bar{x}_n\bar{x}_n} - \phi_{\bar{x}_n}\,\phi_{\bar{x}_h\bar{x}_n}$$
$$C_{\bar{h}\bar{k}}^{\bar{x}_n} = \phi_{\bar{x}_k}\,\phi_{\bar{x}_h\bar{x}_n} - \phi_{\bar{x}_h}\,\phi_{\bar{x}_k\bar{x}_n}$$

siendo nulas las $C_{\bar{h}\bar{k}}$ correspondientes a ápices distintos de $\bar{x}_h$, $\bar{x}_k$ y $\bar{x}_n$; por consiguiente

$$\Sigma_{\bar{h}\bar{k}} \equiv 0$$

Nos quedan solamente, en definitiva, como condiciones necesarias y suficientes para la existencia de una funcion ψ que satisfaga a las condiciones impuestas, las $(n-1)^2$ ecuaciones

$$\Sigma_{h\bar{k}} = 0 \qquad (h, k = 1, 2, \dots, n-1)$$

Es interesante ver la forma que toman estas ecuaciones. Se tiene

$$X_{h\bar{k}} \equiv \phi_{x_n}\left[\left(\phi_{x_h\bar{x}_n} - \phi_{x_n\bar{x}_n}\frac{\phi_{x_h}}{\phi_{x_n}}\right)\frac{\partial\psi}{\partial\bar{x}_k} - \left(\phi_{x_h\bar{x}_k} - \phi_{\bar{x}_k x_n}\frac{\phi_{x_h}}{\phi_{x_n}}\right)\frac{\partial\psi}{\partial\bar{x}_n}\right]$$

por tanto

$$\mathcal{C}_{h\bar{k}}^{\bar{x}_k} \equiv \phi_{\bar{x}_n}\,\phi_{x_h\bar{x}_n} - \phi_{x_h}\,\phi_{x_n\bar{x}_n}$$

$$\mathcal{C}_{h\bar{k}}^{\bar{x}_n} \equiv \phi_{x_h}\,\phi_{\bar{x}_k x_n} - \phi_{x_n}\,\phi_{x_h\bar{x}_k}$$

$$\mathcal{C}_{h\bar{k}}^{\bar{x}_i} \equiv 0 \qquad (i \neq k \quad i \neq n)$$

Obtenemos así

$$(9) \qquad \sum\nolimits_{h\bar{k}}(\phi) \equiv \phi_{\bar{x}_k}(\phi_{x_n}\phi_{x_h\bar{x}_n} - \phi_{x_h}\phi_{x_n\bar{x}_n}) + \phi_{\bar{x}_n}(\phi_{x_h}\phi_{\bar{x}_k x_n} - \phi_{x_n}\phi_{x_h\bar{x}_k}) = 0$$

Las $\sum_{h\bar{k}}$ son reales para valores complejos conjugados de las variables. Se tendrán, pues, en el campo real, para caracterizar a los hiperplanoides, otras tantas ecuaciones de segundo orden

$$(10) \qquad \mathcal{D}_{h\bar{k}}(\psi) = 0 \qquad (h, k = 1, 2, \dots, n-1)$$

W. WIRTINGER, en su citada Memoria "Zur Formalentheorie der Funktionen von mehr komplexen Veränderlichen" escribe las ecuaciones diferenciales que caracterizan a las hipersuperficies de nivel constante de las funciones biarmónicas: hipersuperficies que no son otras que los hiperplanoides, como veremos más adelante. Pero las citadas ecuaciones están escritas en el campo real y representando paramétricamente la variedad: los cálculos resultan bastante complicados y la forma de las ecuaciones las hace difíciles de estudiar en la práctica. Los resultados obtenidos en éste párrafo nos hacen ver las ventajas del método de extensión a lo complejo. Y la forma bajo la cual hemos obtenido dichas ecuaciones nos permitirá deducir algunas propiedades interesantes (v. cap. V y VI).

OBSERVACION. El número de las ecuaciones deducidas por WIRTINGER es mayor que el de las obtenidas aquí: lo cual no obsta para que ambos sistemas puedan ser equivalentes. Pero se puede observar que las ecuaciones de WIRTINGER no son todas algébricamente independientes. En efecto, dichas ecuaciones se deducen, en la memoria citada, como condiciones necesarias y suficientes para que una cierta forma diferencial admita un multiplicador. Ahora bien, supongamos que dicha forma sea

$$\sum_{i=1}^{n} P_i \, dx_i$$

las condiciones para que admita un factor integrante son, como se sabe, las siguientes:

$$\text{(a)} \qquad R_{ijk} \equiv P_i Q_{jk} + P_j Q_{ki} + P_k Q_{ij} = 0$$

donde se ha supuesto, para abreviar la escritura

$$Q_{mn} = \frac{\partial P_m}{\partial x_n} - \frac{\partial P_n}{\partial x_m}$$

pudiendo variar los índices i, j, k desde 1 hasta n, siendo, por ejemplo, $i < j < k$.

Entre los primeros miembros de las (a) se verifican las identidades

$$\text{(b)} \qquad P_i R_{jkl} \equiv R_{ijk} \cdot P_l - R_{ijl} \cdot P_k + P_{ikl} \cdot P_j$$

que nos demuestran que parte aquellas ecuaciones son consecuencia algébrica de las otras, como habíamos dicho.[4]

3. Para n=2 se tiene el único caso h=k=1, y el sistema (9) se reduce a la única ecuación

$$\text{(11)} \qquad \sum(\phi) \equiv \phi_{x\bar{x}} \phi_y \phi_{\bar{y}} + \phi_{y\bar{y}} \phi_x \phi_{\bar{x}} - \phi_{\bar{x}y} \phi_x \phi_{\bar{y}} - \phi_{x\bar{y}} \phi_{\bar{x}} \phi_y = 0$$

Su primer miembro es idéntico, en el campo real, a menos del factor numérico 16, a la expresión

$$\mathcal{L}(\varphi) \equiv \left[\left(\frac{\partial\varphi}{\partial x_1}\right)^2 + \left(\frac{\partial\varphi}{\partial x_2}\right)^2\right]\left(\frac{\partial^2\varphi}{\partial y_1^2} + \frac{\partial^2\varphi}{\partial y_2^2}\right) + \left[\left(\frac{\partial\varphi}{\partial y_1}\right)^2 + \left(\frac{\partial\varphi}{\partial y_2}\right)^2\right]\left(\frac{\partial^2\varphi}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2\varphi}{\partial x_2^2}\right) -$$

$$\text{(12)} \quad - 2\left(\frac{\partial\varphi}{\partial x_1}\frac{\partial\varphi}{\partial y_1} + \frac{\partial\varphi}{\partial x_2}\frac{\partial\varphi}{\partial y_2}\right)\left(\frac{\partial^2\varphi}{\partial x_1 \partial y_1} - \frac{\partial^2\varphi}{\partial x_2 \partial y_2}\right) - 2\left(\frac{\partial\varphi}{\partial x_1}\frac{\partial\varphi}{\partial y_2} - \frac{\partial\varphi}{\partial x_2}\frac{\partial\varphi}{\partial y_1}\right)\left(\frac{\partial^2\varphi}{\partial x_1 \partial y_2} - \frac{\partial^2\varphi}{\partial x_2 \partial y_1}\right)$$

encontrada por E.E. LEVI en sus trabajos sobre el conjunto de los puntos singulares de las funciones analíticas de dos variables.[5] Aún en éste caso resulta alguna complicación, si se hacen los cálculos en el campo real.

WIRTINGER fué el primero que, en la memoria citada, hizo ver la identidad formal de $\sum(\phi)$ con $\frac{1}{16}\mathcal{L}(\varphi)$.

Los primeros miembros de las ecuaciones (10) resultan, para h=k, expresiones análogas a la de LEVI.

4. El mismo método nos servirá para el estudio de las variedades planoides de un número cualquiera (impar) de dimensiones.

Sea una $V_{2(n-r)+1}$; sus ecuaciones

$$\varphi_i\,(y_1,\ldots,y_n;\,z_1,\ldots,z_n)=0 \qquad i=1,\ldots,2r-1 \tag{13}$$

se convierten, con el tránsito a lo complejo, en las

$$\phi_i\,(x_1,\ldots,x_n;\,\bar{x}_1,\ldots,\bar{x}_n)=0 \qquad i=1,\ldots,2r-1 \tag{14}$$

Que dicha variedad contiene una simple infinidad analítica de $V_{2(n-r)}$ características, quiere decir que existirá una función ψ en las mismas variables, real para valores complejos conjugados de ellas, y tal que el sistema formado por la (14) y la $\psi=\alpha$, represente una $V_{2(n-r)}$ característica para todos los valores de α en un cierto intervalo. Como se sabe, es necesario y suficiente que, supuesto

$$J \equiv \frac{\partial(\phi_1,\phi_2,\ldots\ldots,\phi_{2r-1},\psi)}{\partial(x_{n-r+1},\ldots,x_n;\,\bar{x}_{n-r+1},\ldots,\bar{x}_n)} \neq 0 \tag{15}$$

sean nulas las matrices jacobianas

$$\left\|\begin{matrix}\frac{\partial\phi_i}{\partial x_j}; & \frac{\partial\phi_i}{\partial x_{n-r+1}}, & \ldots, & \frac{\partial\phi_i}{\partial x_n}\\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots\\ \psi_{x_j}; & \psi_{x_{n-r+1}}, & \ldots, & \psi_{x_n}\end{matrix}\right\| (i=1,\ldots,2r-1) \left\|\begin{matrix}\frac{\partial\phi_i}{\partial \bar{x}_j}; & \frac{\partial\varphi_i}{\partial \bar{x}_{n-r+1}}, & \ldots, & \frac{\partial\phi_i}{\partial \bar{x}_n}\\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots\\ \psi_{\bar{x}_j}; & \psi_{\bar{x}_{n-r+1}}, & \ldots, & \psi_{\bar{x}_n}\end{matrix}\right\|$$

$$(j=1,2,\ldots,n-r)$$

Las ecuaciones diferenciales que resultan se pueden dividir en dos grupos. Las que expresan la anulación de las matrices obtenidas suprimiendo en las precedentes las últimas filas

$$(16)\qquad \left\| \frac{\partial \varphi_i}{\partial x_j} ; \frac{\partial \varphi_i}{\partial x_{n-r+1}}, \ldots, \frac{\partial \varphi_i}{\partial x_n} \right\| = 0 \quad (i = 1, \ldots, r-1) \quad \left\| \frac{\partial \varphi_i}{\partial \bar{x}_j} ; \frac{\partial \varphi_i}{\partial \bar{x}_{n-r+1}}, \ldots, \frac{\partial \varphi_i}{\partial \bar{x}_n} \right\| = 0$$
$$(j = 1, 2, \ldots, n-r)$$

son ecuaciones intrínsecas (que contienen únicamente las derivadas de ϕ_i) y nos dan ya un sistema de condiciones necesarias, de primer orden. Para los hiperplanoides no hemos encontrado tales ecuaciones de primer orden, hecho cuya interpretación geométrica se verá en el capítulo V.

Las restantes condiciones en ψ se pueden escribir

$$(16')\qquad X_j^{(h)} \equiv \frac{\partial(\varphi_1, \varphi_2, \ldots, \varphi_{r-1}, \varphi_{r+h}, \psi)}{\partial(x_j ; x_{n-r+1}, \ldots, x_n)} = 0 \qquad h = 0, 1, \ldots, r-1$$

$$\bar{X}_j^{(h)} \equiv \frac{\partial(\varphi_1, \varphi_2, \ldots, \varphi_{r-1}, \varphi_{r+h}, \psi)}{\partial(\bar{x}_j ; \bar{x}_{n-r+1}, \ldots, \bar{x}_n)} = 0 \qquad j = 1, 2, \ldots, n-r$$

Debemos substituir éste sistema por otro equivalente, cuyas ecuaciones sean algébricamente independientes entre ellas y con las (16); por ejemplo

$$(17)\qquad X_j^{(0)} \equiv \frac{\partial(\varphi_1, \varphi_2, \ldots, \phi_r, \psi)}{\partial(x_j ; x_{n-r+1}, \ldots, x_n)} = 0 \ ; \ \bar{X}_j^{(0)} \equiv \frac{\partial(\phi_1, \phi_2, \ldots, \varphi_r, \psi)}{\partial(\bar{x}_j ; \bar{x}_{n-r+1}, \ldots, \bar{x}_n)} = 0$$
$$j = 1, 2, \ldots, n-r$$

suponiendo que sea

$$(18)\qquad \left\| \frac{\partial \phi_i}{\partial x_j} ; \frac{\partial \varphi_i}{\partial x_{n-r+1}}, \ldots, \frac{\partial \phi_i}{\partial x_n} \right\| \neq 0 \qquad i = 1, 2, \ldots, r$$

Podemos suponer que ψ depende solamente de $2(n-r)+1$ variables (por ej. $x_1, \ldots, x_{n-r}; \bar{x}_1, \ldots, \bar{x}_{n-r}, \bar{x}_n$), lo cual se obtiene resolviendo las ecuaciones (14) con relación a las variables restantes, y substituyendo los valores hallados en ψ. Para que ésto sea posible es preciso que sea

$$(19) \qquad J_1 \equiv \frac{\partial(\varphi_1, \varphi_2, \ldots\ldots, \varphi_{2r-1})}{\partial(x_{n-r+1}, \ldots, x_n; \bar{x}_{n-r+1}, \ldots, \bar{x}_{n-1})} \neq 0$$

Pero J_1 es uno de los menores máximos del jacobiano J,que hemos supuesto diferente de cero;la condición (19) se puede,por lo tanto,suponer siempre verificada.

Hecho esto,las primeras ecuaciones (17) toman la forma

$$X_j \equiv X_j^{(0)} \equiv \frac{\partial(\varphi_1, \varphi_2, \ldots, \varphi_r)}{\partial(x_{n-r+1}, \ldots, x_n)} \frac{\partial \psi}{\partial x_j} = 0 \qquad j = 1, \ldots, n-r$$

Pero,en virtud de las (18) debe ser

$$\frac{\partial(\varphi_1, \varphi_2, \ldots, \varphi_r)}{\partial(x_{n-r+1}, \ldots, x_n)} \neq 0$$

queda,pues,solamente

$$(20) \qquad X_j \equiv \frac{\partial \psi}{\partial x_j} = 0 \qquad (j = 1, 2, \ldots, n-r)$$

Las segundas ecuaciones (17) se escribirán

$$\bar{X}_j \equiv \frac{\partial(\varphi_1, \varphi_2, \ldots, \varphi_r)}{\partial(\bar{x}_{n-r+1}, \ldots, \bar{x}_n)} \frac{\partial \psi}{\partial \bar{x}_j} \pm \frac{\partial(\varphi_1, \varphi_2, \ldots, \varphi_r)}{\partial(\bar{x}_j; \bar{x}_{n-r+1}, \ldots, \bar{x}_{n-1})} \frac{\partial \psi}{\partial \bar{x}_n} = 0 \qquad (j = 1, 2, \ldots, n-r)$$

o también,con una notación de significado evidente

$$(20') \qquad \bar{X}_j \equiv \Phi^{(\bar{x}_n)} \frac{\partial \psi}{\partial \bar{x}_j} - \Phi^{(\bar{x}_j)} \frac{\partial \psi}{\partial \bar{x}_n} = 0$$

Ahora bien,las condiciones para la existencia de una función que verifique las (20) y (20') son las que expresan que es completo el sistema formado por éstas ecuaciones:es decir,las que expresan que todas las ecuaciones

$$X_{hk} = 0 \qquad X_{\bar{h}\bar{k}} = 0 \qquad X_{h\bar{k}} = 0$$

(cuyos primeros miembros están formados con las mismas operaciones que en el caso precedente) son consecuencia lineal de las (20) y (20'). Conservando análogas notaciones que las del nº2, se llega,en la misma forma,a un sistema de ecuaciones en las derivadas parcia-