Fundamentos de geometría pseudoconforme en *n* dimensiones

José María Planas Corbella

Fundamentos

de ~~[illegible]~~

Geometria pseudoconforme
de n dimensiones

Barcelona, Febrero de 1934

INTRODUCCION

En una serie de recientes trabajos, donde se estudian a fondo muchos problemas esenciales de la moderna teoría de las funciones de dos variables complejas, F. SEVERI ha establecido las bases de una fundamentación geométrica de aquella teoría; este camino ha sido explorado después minuciosamente por B. SEGRE, el cual ha obtenido también notables resultados.

Según este modo de ver, las propiedades fundamentales derivan de la representación real de los entes complejos, y especialmente de la manera de considerar el infinito del campo de variabilidad. Como ha demostrado SEVERI, lo más correcto es considerar el par de variables complejas (x,y) distendido sobre la V_4^6 de C. SEGRE (es decir, sobre la falda real de una V_4^6 de SEGRE de tipo elíptico) de un espacio de ocho dimensiones; esta variedad es, en efecto el modelo ~~xxxxxx~~ algébrico-topológico mínimo de dicho campo. Haciendo la proyección, en modo conveniente, de dicha variedad sobre un espacio plano de cuatro dimensiones S_4, obtenemos la representación de los puntos del plano proyectivo complejo por medio de los puntos reales de un S_4 euclídeo: en ésta forma, los puntos del infinito de aqual plano corresponden homeomórficamente a las rectas reales de una cierta congruencia lineal elíptica del espacio impropio de aquel S_4. Todas éstas consideraciones fueron ya hechas en una nota de B. SEGRE, donde se hace ver toda su importancia.

Me propongo en esta memoria estudiar estas questiones en toda su generalidad, extendiéndolas al caso de n variables. Inmediatamente se echa de ver que, salvo algunos conceptos fundamentales que se transportan inmediatamente con ligeros cambios, no se trata de extensiones banales:se presentan una gran riqueza y variedad de hechos nuevos,que demuestran la conveniencia de no limitarnos al caso n=2 si queremos llegar a poseer una visión completa de la teoría de funciones analíticas de varias variables.

Hay,además,cuestiones ya estudiadas en este último caso que adquieren nueva luz cuando se aumenta el numero de dimensiones del espacio ambiente. Un ejemplo elemental se nos presenta al considerar las llamadas superficies características (véase más adelante): una propiedad fundamental de éstas superficies,que demostraremos en el Capítulo III,es la reducción del número de dimensiones de sus espacios osculadores en puntos genéricos. Cosa que no tiene sentido,evidentemente,en un espacio de cuatro dimensiones. Dicho de otro modo:en éste ultimo espacio cualquier trozo regular de superficie analítica contiene un doble sistema conjugado de líneas,en el sentido de DUPIN:apenas se consideran,en cambio,superficies pertenecientes a espacios de más de cuatro dimensiones,ésto no ocurre ya en general:pero las superficies características gozan de dicha propiedad.

Las consideraciones fundamentales que aquí desarrollaremos se refieren a dos conceptos importantes que corresponden,en nuestra representación real de los entes complejos,a los de variedad analítica y transformación analítica del campo complejo: O sea, las variedades características y las transformaciones llamadas pseudoconformes por SEVERI.

Las propiedades que aquí estudiaremos tienen casi siempre carácter local,limitándonos a considerar trozos regulares de variedad.

Las variedades caracteristicas

Respecto a la denominación de variedad característica debemos hacer, para evitar posibles equívocos, alguna aclaración. Nosotros llamaremos V_{2k} caracterísitca a una variedad real de 2k dimensiones, del espacio S_{2n}, imagen real de una variedad analítica de k dimensiones del S_n complejo proyectivo. Ahora bien, en el caso n=2, k=1, esta noción coincide con la de superficie característica introducida por LEVI-CIVITA; pero no siempre es así.

LEVI-CIVITA, en una importante Memoria[1], extiende el teorema local de CAUCHY a las funciones de dos variables, demostrando que se pueden dar arbitrariamente (sin otra restricción que la analiticidad) sobre un trozo regular Σ de superficie real del espacio de cuatro dimensiones, los valores de una función holomorfa f(x,y) (x e y variables complejas) siendo por ellos unívocamente determinada la función en todo un entorno tetradimensional que comprenda a Σ en su interior. Se exceptúa el caso en que Σ sea un trozo de una de aquellas superficies que representan en S_{2n} una relación analítica entre x e y: superficies que, por tal motivo, se llamaron características.

El teorema se extiende a las funciones de n variables del siguiente modo: dada una función f=u+iv, analítica, del punto de un trozo regular Γ de una variedad real M_n, de n dimensiones, existe, en el entorno de 2n dimensiones de Γ, una y una sola función holomorfa U+iV que se reduce a f sobre Γ. Las variedades excepcionales, para las cuales cesa la validez del teorema, se pueden llamar características en éste orden de ideas, pero no son características en el sentido restringido dado por nosotros a ésta palabra, aunque están contenidas en variedades de tal clase.

Estudiaremos con detalle aquellas variedades excepcionales, caracterizándolas por sus propiedades geométricas esenciales, clasificándolas en especies, concepto invariante respecto a las transformaciones pseudoconformes, dando los sistemas de ecuaciones diferenciales que las caracterizan, y haciendo ver su importancia en el estudio de las funciones de varias variables.

Añadiremos que la mencionada clasificación de las V_n de S_{2n} no es más que un caso particular de una clasificación general de todas las variedades, hecha en el mismo orden de consideraciones.

Finalmente queremos hacer notar la importancia que, para la caracterización de los diversos tipos de variedad aludidos, tiene la consideración de la congruencia lineal elíptica del infinito, a que nos hemos referido anteriormente. Como veremos, aquellas consideraciones se extienden sin dificultad al caso de n variables. En tal caso, los puntos del infinito del campo complejo vienen representados por todas las rectas reales que se apoyan en dos S_{n-1} imaginarios conjugados independientes, del S_{2n-1} del infinito de S_{2n}. Las variedades características estan caracterizadas por el hecho de que sus espacios lineales tangentes se apoyan, lo mas íntimamente posible, en los citados S_{n-1}, directores de la congruencia. Y los restantes tipos de variedad que estudiaremos vendrán también caracterizados por la manera de comportarse proyectivamente, respecto de dicha congruencia, sus espacios tangentes.

Las transformaciones pseudoconformes

El otro concepto fundamental de que hemos hablado es el de transformación pseudoconforme. Una transformación analítica del campo complejo

(1) $$x'_i = f_i(x_1,\dots,x_n) \qquad i=1,\dots,n$$

cuyo jacobiano $J=\frac{\partial(f_1,\dots,f_n)}{\partial(x_1,\dots,x_n)}$ sea distinto de cero en un cierto dominio Ω corresponde en el campo real a una transformación, tambien analítica e invertible, cuyo jacobiano es el cuadrado del módulo de J. Respecto a la denominación de pseudoconforme, dada por SEVERI a esta clase de transformaciones[2], trans cribimos los siguientes parrafos del mismo autor:[3]

" Los modernos autores alemanes y franceses prefieren llamarlas analíticas: POINCARÉ, que por primera vez abordó su estudio, las llamó alguna vez (con ligero "abuso de lenguaje") conformes.

Me parece que ni la primera ni la segunda denominación convengan al caso, porque las (13) (las (1) escritas más arriba) son particulares transformaciones analíticas del ambiente real de cuatro dimensiones en el que se distiende el par (x,y): y porque no son generalmente conformes, por cuanto no conservan en modo absoluto los ángulos. Conservan únicamente aquellos ángulos que corresponden a orientaciones características: por lo cual yo he propuesto llamarlas pseudoconformes"

Se comprende la gran importancia que, en la teoria de funciones analíticas de varias variables, tienen estas transformaciones y las propiedades invariantes a que dan lugar.

Una propiedad fundamental inmediata de las transformaciones pseudoconformes es la de cambiar variedades características en variedades de la misma especie: pero las transformaciones que gozan de dicha propiedad forman un grupo más general.

Las transformaciones pseudoconformes vienen caracterizadas, en el caso de dos variables, por un gran número de propiedades, estudiadas por B.SEGRE en su interesante Memoria "Questioni geometriche legate colla teoria delle funzioni di due variabili complesse"[4], pags. 26-38.

Un tipo de variedad importantísimo es el de las transformadas pseudoconformes de los espacios lineales. Refiriéndonos al caso de dos variables complejas, las hipersuperficies transformadas pseudoconformes de los hiperplanos de S_4 han sido consideradas por vez primera por POINCARÉ, y después, con más extensión, por BERTIL ALMER, que las ha llamado <u>hiperplanoides</u>, demostrando con todo rigor que pueden caracterizarse por el hecho de ser lugar geométrico de una simple infinidad <u>analítica</u> de superficies características.

Ahora bien, al tratar de extender tales consideraciones al caso más general, observaremos que la conclusión anterior no es válida, por ejemplo, para las variedades de tres diemnsiones situadas en un espacio de seis, ocho, etc, dimensiones. Y, en general, para las V_{2k-1} de un S_{2n} si $n > k$. Es decir, una variedad de esta naturaleza que sea transformada pseudoconforme de un S_{2k-1} no es siempre lugar analítico de $V_{2(k-1)}$ características. Y ello es debido a que, relativamente al modo de comportarse, respecto a la citada congruencia lineal del infinito, los espacios lineales que no sean hiperplanos, se pueden distinguir un gran número de casos. Este es, substancialmente, el origen de la diversidad de los hechos que, como hemos advertido, se presentan apenas se hace $n=3$.

Las variedades lugar ∞^1 de variedades características son tipos particulares de la clasificación general a que anteriormente nos hemos referido.

Los hiperplanoides de S_4 han sido estudiados también por E.E.LEVI en otra importante Memoria[5], donde, considerándolos como lugar de superficies características, se demuestra que pueden caracterizarse por medio de una equación en derivadas parciales de segundo orden

(2) $$\mathfrak{L}(\varphi)=0$$

a la que debe satisfacer el primer miembro de la ecuación $\varphi=0$ de una tal variedad. La expresion diferencial $\mathfrak{L}$ es un invariante relativo para las transformaciones pseudoconformes, y presisamente se reproduce a menos del módulo de la transformación.

W. WIRTINGER, en su Memoria "Zur Formalentheorie der Funktionen von mehr komplexen Veränderlichen "(6) ha escrito los sistemas de ecuaciones, generalizaciones de la (2) que sirven para caracterizar a los hiperplanoides del S_{2n} considerados como variedades de nivel constante de las funciones biarmónicas, ésto es, de la parte real (o el coeficiente de i) de una función holomorfa de n variables.

Los cálculos, ya un poco extensos en el caso n=2, se complican bastante con el método adoptado por WIRTINGER. En el presente trabajo, con el metodo analítico que expondremos en breve, y desde el punto de vista geométrico que informa nuestras consideraciones, escribiremos dichas ecuaciones (que, como se verá, no coinciden exactamente con las de WIRTINGER) en el campo complejo, obteniéndolas de un modo muy sencillo. La comparación de nuestro resultado con el de WIRTINGER, nos hizo observar incidentalmente que las equaciones escritas por dicho autor no son todas algébricamente independientes, cosa difícil de observar con el examen directo de las mismas que, dada su complicación formal, son prácticamente inabordables. Además, la forma bajo la cual las obtendremos, nos permitirá dar algunas propiedades geométricas interesantes, y deducir las diversas caracterizaciones geométricas de los hiperplanoides, haciendo ver las relaciones que guardan entre sí. El carácter geométrico de la cuestión no es objeto de estudio en la memoria de Wirtinger, el cual se preocupa exclusivamente del punto de vista formal, en relación con las cuestiones que se presentan al tratar de extender el punto de vista de RIEMANN a las funciones de varias variables.

Lo dicho hasta ahora se refiere exclusivamente a los hiperplanoides. Faltaba todavia hacer un estudio de todas las variedades, de un número cualquiera de dimensiones en relación con el espacio ambiente, para tener una visión general. Con el método aludido hemos escrito las ecuaciones o sistemas que, en cada caso, determinan las variedades consideradas. Se obtienen asi nuevos invariantes pseudoconformes, quantitativos (análogos al de LEVI) y cualitativos, las especies en que serán clasificadas las variedades, y que ya hemos mencionado.

El método analitico a que nos referiamos es el llamado por SEVERI

Metodo de extensión de lo real a lo complejo

Se apoya sobre el principio general siguiente:

Para que una ecuación analítica

$$E(x_1, \ldots, x_m) = 0$$

se verifique para todos los valores complejos de las variables en el entorno de un punto real P, es necesario y suficiente que se verifique para todos los valores reales del entorno de P. Este lema se apoya en la propiedad más elemental de las series de potencias.

Visto lo cual, el principio general de extensión de lo real a lo complejo se puede resumir así: Sea E un ente analítico, real o complejo (una función, una variedad, una ecuación, etc.) dependiente de las variables reales $x_1, \ldots, x_{2n}$. Si se prolonga el ente E en el campo complejo, ésto es, tomando $x_1, \ldots, x_{2n}$ como variables complejas, y se efectúa después la transformación homográfica

$$(3) \qquad x_{2k-1} = \frac{z_k + \bar{z}_k}{2} \qquad x_{2k} = \frac{z_k - \bar{z}_k}{2i} \qquad (k = 1, 2, \dots, n)$$

se obtiene un ente $\mathcal{E}$ que es analítico en las variables complejas independientes $z_1, \bar{z}_1, \dots, z_n, \bar{z}_n$, y que, dando a estas variables los valores especiales, complejo-conjugados,

$$z_k = x_{2k-1} + i\, x_{2k} \qquad \bar{z}_k = x_{2k-1} - i\, x_{2k}$$

se reduce al ente E primeramente considerado.

Si una propiedad del ente E se expresa mediante una relación analítica

$$R(x_1, \dots, x_{2n}) = 0$$

ésta, en virtud del lema enunciado arriba, vale también en el campo complejo (se entiende, en una conveniente región) y, mediante las (3), se transformará en una relación

$$\mathcal{R}(z_1, \bar{z}_1, \dots, z_n, \bar{z}_n) = 0$$

analítica en las variables complejas $z_1, \dots, \bar{z}_n$, consideradas como independientes. Nosotros podemos operar con la relación $\mathcal{R}$, mientras no se olvide la analiticidad, y, en el momento oportuno, volver al campo real tomando para las $z_k, \bar{z}_k$, valores conjugados: todo lo cual es válido, en virtud del mencionado principio general.

La gran importancia del método depende, no ya de la comodidad que el uso de los pares de variables complejas conjugadas (que simplifica notablemente los cálculos y expresiones formales) lleva consigo, sino principalmente en poder considerar a dichas variables como indpendientes, operando asi libremente en el campo complejo.

Sea, por ejemplo, $f = u + iv$ una función compleja (u y v reales) de las variables reales $x_1, \dots, x_{2n}$, analítica en dichas variables. Haciendo la prolongación a lo complejo, y efectuada la transformación

(3), se obtiene una función F analítica en las variables $z_1, \dots, \bar{z}_n$. La f se puede considerar (en el sentido de DIRICHLET) como función de las variables complejas $z_1, \dots, z_n$. Si queremos expresar que f es <u>función holomorfa</u> de aquellas variables, bastará escribir que F depende solamente de ellas, lo que viene expresado por las ecuaciones

$$\frac{\partial F}{\partial \bar{z}_k} = 0 \qquad (k - 1, 2, \dots, n)$$

Si, en lugar de $z_k, \bar{z}_k$, ponemos los valores complejos conjugados $x_{2k-1} + i x_{2k}$, $x_{2k-1} - i x_{2k}$, obtendremos las conocidas ecuaciones de CAUCHY-RIEMANN en las u y v.

W. WIRTINGER, en el trabajo ya citado, hace uso con frecuencia de éste principio, sin enunciarlo explícitamente.

En ésta forma se obtienen fácilmente la ecuaciones (generalización de las de RIEMANN-BELTRAMI para las funciones de <u>variable compleja sobre una superficie</u>) que definen las funciones de n variables complejas sobre variedades de n+1, ..., 2n-1 dimensiones.

Finalmente, hemos de notar la importancia que, en esta clase de consideraciones, tiene nuestra ya citada clasificación en especies de las variedades de n dimensiones del espacio S_{2n}.

Se obtiene, en particular, en pocas líneas, el ciatdo teorema de LEVI-CIVITA en el caso general.

No podemos terminar éstas consideraciones generales sin hacer notar la influencia decisiva que la adopción del método de tránsito a lo complejo ha tenido en la resolución general, debida a SEVERI, del problema de DIRICHLET relativo a las funciones biarmónicas.(7)

NOTAS

(1) T. Levi-Civita: Sulle funzioni di due o più variabili complesse. "Rendic. della R. Accad. dei Lincei" serie V, t. 14, 1905.

(2) Vd. F. SEVERI: Contributi alla teoria delle funzioni biarmoniche. "Memorie della R. Accad. d'Italia" vol. II (1931)

(3) Risultati, vedute e problemi nella teoria delle funzioni analitiche di due variabili complesse. "Rendic. del Sem. Mat. della R. Univ. di Roma" vol VII, serie II, 1932

(4) "Rendic. del sem. Mat. della R. Univ. di Roma" vol. VII, serie II, 1932

(5) Studi sui punti singolari essenziali delle funzioni analitiche di due o più variabili complesse "Annali di Matematica" serie III, t. 17 (1910)

(6) "Mathematische Annalen" Bd. 97 (1926)

(7) Vd. SEVERI: Risoluzione generale del problema di Dirichlet per le funzioni biarmoniche. "Rendic. della R. Accad. dei Lincei" vol XIII, serie 6ª, 1° sem., fasc. II, 1931

C A P I T U L O I

LA VARIEDAD DE SEGRE Y LAS REPRESENTACIONES REALES DEL CONJUNTO DE LAS ENNUPLAS $(x_1,\dots,x_n)$

1. En la introducción nos hemos referido ya a la importancia que tiene la representación del campo de variabilidad en el estudio de las funciones de una o más variables complejas, y principalmente la manera de considerar el infinito, cuya elección permanece, a priori, arbitraria, en un orden de ideas puramente aritmético.

Es clásico que, en el caso de una sola variable $x=y+iz$, conviene proceder pensando la x variable sobre la recta proyectiva compleja. Y ésto por la oportunidad de considerar el valor $x=\infty$ del mismo modo que todos los demás, relativamente a las transformaciones biunívocas más simples, ésto es, las transformaciones lineales. El modelo real algébrico más simple, homeomorfo a la recta compleja proyectiva es una cuádrica real de puntos elípticos (una esfera, etc.) cuya proyección sobre el plano euclídeo nos da la representación de ARGAND-GAUSS, considerando la recta del infinito de aquel plano como un solo punto.

F. SEVERI ha hecho ver la conveniencia de considerar las cosas del mismo modo, en el caso de más variables, contrariamente a lo que han venido haciendo la mayor parte de los autores que, modernamente, se han venido ocupando de estas cuestiones.

Es decir, que el modo más perfecto de considerar el conjunto de las énnuplas $(x_1,\dots,x_n)$ es distender este conjunto sobre un S_n proyectivo. Los valores del infinito vienen representados en los puntos de un S_{n-1} de aquél espacio.

Si queremos una representación real, deberemos considerar la riemanniana del espacio proyectivo complejo de n dimensiones. Respecto a los caracteres topológicos de tal variedad, además de los generales a toda riemanniana de variedad algébrica, observamos que carece de torsión, y son para ella nulos los números de Betti de orden impar e iguales a cero los de orden par.[1]

El modelo algébrico más simple de la riemanniana en cuestión es la falda real de una $V_{2n}^{\binom{2n}{n}}$ de SEGRE de tipo elíptico, perteneciente a un espacio de $n(n+2)$ dimensiones.

En el caso de dos variables se trata de una variedad V de cuatro dimensiones, del espacio de ocho, que representa con sus puntos reales los puntos complejos del plano π. A las rectas de este plano corresponden sobre V cuádricas ordinarias. Si, desde el S_3 σ de una de tales cuádricas, que designaremos por Q, se proyecta la variedad sobre un S_4 real Σ (análogamente a como se hace la proyeccion estereografica de la esfera sobre el plano, en el caso de una sóla variable) se obtiene la representación, generalmente biunívoca, de los puntos del plano π en los puntos reales de Σ. Se exceptuan los puntos de Q, los cuales, proyectados mediante una consideración de límite, vienen a corresponder homeomórficamente a las rectas de una congruencia lineal elíptica del S_3 ω, interseccion de Σ con el S_4 tangente a la variedad que pasa por σ. Se puede suponer que Q sea imagen de la recta del infinito de π, y ω sea el espacio impropio de Σ. Entonces, los puntos impropios del plano complejo vienen representados biunívocamente por las rectas reales de una congruencia lineal elíptica, cuyas directrices pertenecen al S_3 del infinito, y son las dos rectas imaginarias conjugadas que en aquél espacio tienen por ecuaciones, respectivamente

$$\left.\begin{array}{l} x_1+ix_2=0 \\ x_3+ix_4=0 \end{array}\right\} \qquad \left.\begin{array}{l} x_1-ix_2=0 \\ x_3-ix_4=0 \end{array}\right\}$$

Todas estas consideraciones fueron hechas por Severi en sus "Conferencias de Geometría Algebrica"[2], y profundizadas después en una nota de B. SEGRE[3], limitándose al caso n=2.

2. Dtengámonos a estudiar con detalle el caso más general. Sean

$$x_i \quad ; \quad \bar{x}_i \qquad (i=0,1,\ldots,n)$$

las coordenadas proyectivas homogeneas de dos S_n complejos $\sigma_n, \bar{\sigma}_n$. Las ecuaciones

(1) $$\rho X_{lm} = x_l \bar{x}_m \qquad (l,m=0,1,\ldots,n)$$

nos dan una representación paramétrica de la variedad de SEGRE, tomando las X_{lm} como coordenadas proyectivas de un espacio de $(n+1)^2-1=n(n+2)$ dimensiones, que designaremos por Σ. Las (1) dicen que se trata de una variedad algebrica V de 2n dimensiones, cuyo orden es $\binom{2n}{n}$. Las mismas fórmulas establecen una correspondencia, biunívoca sin excepciones y continua (un homeomorfismo) entre los puntos de V y los pares de puntos de σ_n y $\bar{\sigma}_n$. V es, además, el modelo mínimo de tal conjunto, tanto desde el punto de vista de los homeomorfismos como desde el de las transformaciones birracionales (o sea del orden invariantivo considerado por SEVERI)[4].

La variedad contiene dos sistemas de S_n, cada uno de los cuales corresponde a los pares formados asociando a un punto de σ_n todos los puntos de $\bar{\sigma}_n$, y recíprocamente. Dos S_n del mismo sistema no se cortan, y, en cambio, dos S_n de sistemas opuestos se cortan en un punto: los S_n de un sistema vienen punteados proyectivamente por los del otro. En resumen, ambos sistemas se comportan como los dos sistemas de generatrices de una cuádrica, que es la variedad de SEGRE para n=1.

Hay dos tipos de variedad de SEGRE, correspondientes a los dos diversos tipos de cuádricas: el tipo hiperbólico, en el cual ambos sistemas estan formados por S_n <u>reales</u>, intersección de la variedad con el S_{2n} tangente en su punto común; en el tipo elíptico (que es el que nos interesa) esta intersección está formada por dos S_n imaginarios conjugados, que se cortan en un punto real de la variedad.

Como ya se ha observado, los S_n de cada uno de los dos sistemas corresponden biunívoca y continuamente a los puntos de σ_n (o de $\bar{\sigma}_n$): así es que, <u>en el caso elíptico</u>, se puede considerar el homeomorfismo que asocia a cada punto de σ_n <u>el unico punto real</u> del S_n correspondiente; de ahí se deduce que <u>la falda real de la variedad es homeomorfa a los puntos de σ_n</u>.

Ya dijimos precedentemente que esta representación goza de la propiedad de mínimo, ya topológica, ya algébricamente. No nos detenemos en ello que (juntamente con lo que precede) se encuentra desarrollado en los trabajos citados. Hemos hecho solamente un resumen, indispensable para las consideraciones que siguen, las cuales tienden a relacionar esta representación con la que se obtiene por medio de los puntos reales de un S_{2n} euclídeo, para hacer ver que una es proyección conveniente de la otra y principalmente para hallar, en esta última, la interpretación más justa del infinito, análogamente a lo que se ha dicho para n=2.

3. Consideremos la transformacion homográfica del espacio

$$\begin{aligned} x_{ll} &= x'_{ll} \\ x_{lm} &= x'_{lm} + i\,x'_{ml} \\ x_{ml} &= x'_{lm} - i\,x'_{ml} \end{aligned} \Bigg\} \quad l < m$$

mediante la cual las ecuaciones (1) se convierten (suprimiendo los índices a las X) en las

(2) $\rho X_{\ell\ell} = x_\ell \bar{x}_\ell \qquad \rho X_{\ell m} = x_\ell \bar{x}_m + \bar{x}_\ell x_m \qquad \rho X_{m\ell} = \frac{1}{i}(x_\ell \bar{x}_m - \bar{x}_\ell x_m) \qquad (\ell < m)$

Referidas a ejes coordenados reales, las (2) nos dan una variedad de SEGRE de tipo elíptico. Tomando

$$x_r = x'_r + i x''_r \qquad \bar{x}_r = x'_r - i x''_r$$

las ecuaciones

$$(3) \qquad \left.\begin{aligned} \rho X_{\ell\ell} &= x'^2_\ell + x''^2_\ell \\ \rho X_{\ell m} &= x'_\ell x'_m + x''_\ell x''_m \\ \rho X_{m\ell} &= x''_\ell x'_m - x'_\ell x''_m \end{aligned}\right\} (\ell < m)$$

representan, para valores reales de x'_r, x''_r, la falda real de nuestra variedad V, en correspondencia biunívoca con los puntos de σ_n.

Si queremos obtener los puntos de V que corresponden a los puntos reales~~a~~ de σ_n, basta ver que éstos son dobles en la correspondencia <u>de conjugación</u>,(5) que, sobre la ~~falda~~ hoja real de V, da una correspondencia involutoria representada en $S_{n(n+2)}$ por las ecuaciones

$$\rho X_{\ell\ell} = X'_{\ell\ell} \qquad \rho X_{\ell m} = X'_{\ell m} \qquad \rho X_{m\ell} = -X'_{m\ell}$$

y cuyos puntos dobles son las soluciones del sistema

$$(\rho - 1) X_{\ell\ell} = 0 \qquad (\rho - 1) X_{\ell m} = 0 \qquad (\rho + 1) X_{m\ell} = 0$$

Para $\rho = 1$ se obtiene $X_{m\ell} = 0$ ($l < m$); para $\rho = -1$, $X_{\ell\ell} = X_{\ell m} = 0$ ($l < m$); para $|\rho| \neq 1$ no hay solución geométrica. Se trata, pues, de una homografía involutoria, que tiene como espacios fundamentales

$$S_{\frac{n(n+1)}{2}} \quad \ldots\ldots \quad X'_{\ell\ell} = X'_{\ell m} = 0$$

$$S_{\frac{n(n+3)}{2}} \quad \ldots\ldots \quad X'_{m\ell} = 0$$

opuestos en la pirámide fundamental. El primero no tiene ningún punto real común con la variedad, el $S_{\frac{n(n+3)}{2}}$ opuesto Ω la corta, en cambio, en los puntos (correspondientes a $x''_\ell = 0$)

(4) $\rho X_{\ell\ell} = x'^2_\ell \quad ; \rho X_{\ell m} = x'_\ell x'_m \quad ; \rho X_{m\ell} = 0$

Se trata, pues, de una $V_n^{\binom{2n}{n}}$ de Ω, respresentada en éste espacio por las dos primeras ecuaciones (4), que nos muestran que la variedad (generalización en éste sentido de la superficie de VERONESE del S_5) es el modelo proyectivo, en Ω, del sistema lineal de las hipercuádricas de un S_n.

4. Volvamos a la representación (1) de la variedad de SEGRE y tomemos

$$x_0 = \bar{x}_0 = t \ ; \ x_i \ ; \ \bar{x}_i \qquad (i = 1, 2, \ldots, n)$$

como coordenadas homogéneas de un S_{2n}. Las ecuaciones (1) establecen una correspondencia algébrica entre la variedad de SEGRE y dicho S_{2n}. Las secciones hiperplanas de la variedad se representan sobre el S_{2n} en el sistema lineal de hipercuádricas

$$A t^2 + \left[\sum_1^n (C_h x_h + D_h \bar{x}_h)\right] t + \sum_1^n \sum_1^n C_{hk} x_h \bar{x}_k = 0 \tag{5}$$

que tiene por variedad base el par de S_{n-1}

$$\left.\begin{array}{l} x_h = 0 \\ t = 0 \end{array}\right\} \qquad \left.\begin{array}{l} \bar{x}_h = 0 \\ t = 0 \end{array}\right\}$$

contenidos en el hiperplano $t = 0$.

Del sistema (5) forma parte el siguiente

$$A t^2 + \left[\sum_1^n (C_h x_h + D_h \bar{x}_h)\right] t = 0$$

que se compone del hiperplano $t = 0$, como parte común, y de

$$A t + \sum_1^n (C_h x_h + D_h \bar{x}_h) = 0 \tag{6}$$

que es el sistema lineal de todos los hiperplanos de S_{2n}. Por consiguiente, éste sistema corresponderá proyectivamente a las secciones hiperplanas de la variedad con una radiación ∞^{2n} de hiperplanos del $S_{n(n+2)}$, ésto es, con los hiperplanos que pasan por un determinado S_{n^2-1} de aquel espacio. Y se podrán suponer situados el S_{n^2-1}

(que designaremos por ω) y el S_{2n} opuesto Ω en tal posición relativa que dicha correspondencia sea la proyección de V hecha desde ω sobre Ω . Solamente que, debiendo asociarse a todo hiperplano de Ω el t= 0,éste introduce excepciones a la biunivocidad de la correspondencia, debiendo ser homólogo de la parte común a todas aquellas secciones hiperplanas.

Todo lo cual es inmediato analíticamente, sin más que observar las ecuaciones escritas. Las (6) nos dicen, en efecto, que la radiación ω es

(7) $$A X_{00} + \sum_{1}^{n} (C_h X_{h0} + D_h X_{0h}) = 0$$

y ω será, por consiguiente, el espacio

(8) $$X_{00} = 0 \quad X_{h0} = 0 \quad X_{0h} = 0 \quad (h=1,2,\dots,n)$$

desde el cual se proyecta V en modo generalmente biunívoco sobre Ω . Y basta poner

(9) $$X_{00} = t \quad X_{h0} = x_h \quad X_{0h} = \bar{x}_h$$

para que Ω coincida con el S_{2n} primeramente considerado.

El espacio ω corta a V en otra V_{2n-2} ϕ del mismo tipo, que corresponde a los pares de puntos de los hiperplanos $x_0 = 0$, $\bar{x}_0 = 0$, de σ_n y $\bar{\sigma}_n$,y viene dada en ω por las ecuaciones

$$\rho X_{hk} = x_h \bar{x}_k \qquad (h,k=1,2,\dots,n)$$

El hiperplano $X_{00} = 0$ (que se proyecta en el t=o de Ω) corta a V en una variedad ψ compuesta de dos V_{2n-1} correspondientes, respectivamente, a los pares de puntos de los hiperplanos $x_0 = 0, \bar{x}_0 = 0$, con los espacios σ_n y $\bar{\sigma}_n$. Ambas variedades se cortan en la ϕ . Por lo tanto, $X_{00} = 0$ es tangente a V a lo largo de ϕ ,la cual, por esta razón, se proyecta excepcionalmente en los puntos del hiperplano t=0.

De esta manera se llega a establecer una correspondencia entre los elementos de σ_n y los elementos de Ω, generalmente biunívoca, con la sola excepcion de los puntos de un hiperplano de σ_n, a los que corresponden todos los puntos del hiperplano t=o de Ω.

5. Consideremos ahora la ecuación de un hiperplano σ_{n-1} de σ_n

(10) $$a_0 x_0 + \sum_1^n a_h x_h = 0$$

junto con la del conjugado $\bar{\sigma}_{n-1}$ de $\bar{\sigma}_n$

(11) $$\bar{a}_0 \bar{x}_0 + \sum_1^n \bar{a}_h \bar{x}_h = 0$$

(donde los coeficientes a_i y $\bar{a}_i$ son números complejos conjugados) Las ecuaciones

(11) $$\begin{cases} a_0 t + \sum_1^n a_h x_h = 0 \\ \bar{a}_0 t + \sum_1^n \bar{a}_h \bar{x}_h = 0 \end{cases}$$

representan en Ω el $S_{2(n-1)}$ $\sum$, imagen real de σ_{n-1} (o de $\bar{\sigma}_{n-1}$). La intersección de $\sum$ con el infinito es un S_{2n-3} real que, en éste espacio, tiene por ecuaciones

(12) $$\sum_1^n a_h x_h = 0 \qquad \sum_1^n \bar{a}_h \bar{x}_h = 0$$

que nos demuestran que dicho S_{2n-3} tiene en comun un S_{n-2} con cada uno de los dos S_{n-1} (imaginarios conjugados)

$$(t=0) \qquad \sigma \ldots x_h = 0 \qquad \bar{\sigma} \ldots \bar{x}_h = 0 \quad (h = 1, 2, \ldots, n)$$

Reciprocamente, las ecuaciones de un S_{2n-3} que se apoye, en dicha forma, sobre σ y $\bar{\sigma}$, se pueden siempre escribir en la forma (12) y representan entonces las intersecciones con el infinito de una doble infinidad (real) de S_{2n-2} de ecuaciones (11), representación de S_{n-1} de σ_n.

Por consiguiente, en éste modo de representación:

Los $S_{2(n-1)}$ reales de Ω que representan a los hiperplanos complejos de σ_n están caracterizados por el hecho de que sus S_{2n-3} del infinito son los S_{2n-3} reales de una congruencia lineal elíptica K, que tiene por espacios directores los dos S_{n-1} imaginarios conjugados s y $\bar{s}$.

En general, si

$$(13) \qquad a_0^{(j)} x_0 + \sum_1^n a_h^{(j)} x_h = 0 \qquad j = 1, 2, \dots, n-k$$

son las ecuaciones de un S_k de σ_n, las del S_k conjugado se pueden escribir siempre en la forma

$$(13') \qquad \bar{a}_0^{(j)} \bar{x}_0 + \sum_1^n \bar{a}_h^{(j)} \bar{x}_h = 0 \qquad j = 1, 2, \dots, n-k$$

y el espacio al infinito del S_{2k} que los representa en Ω es

$$(14) \qquad t = 0 \quad \sum_1^n a_h^{(j)} x_h = 0 \quad \sum_1^n \bar{a}_h^{(j)} \bar{x}_h = 0 \qquad (j = 1, 2, \dots, n-k)$$

ecuaciones que nos demuestran que se apoya en s y $\bar{s}$ segun S_{k-1}.
Y recíprocamente, el razonamiento se invierte como más arriba, pudiendo, pues, afirmarse en general que

Los S_{2k} reales que representan en Ω a los S_k complejos de σ_n vienen caracterizados por el hecho de sus S_{2k-1} del infinito son los S_{2k-1} reales de la congruencia K.

6. Efectuando ahora la transformación homográfica

$$x_h = y_h + i z_h \qquad \bar{x}_h = y_h - i z_h$$

y tomando como nuevas coordenadas y_h y z_h, dando valores reales a éstas coordenadas obtenemos la representación (generalización de la de ARGAND-GAUSS para una sóla variable) de los puntos complejos de

σ_n en los puntos reales de Ω . El espacio t= 0 se transforma en sí mismo y las rectas s y $\bar{s}$ serán las

$$(t=0) \qquad s \ldots\ y_k + i z_k = 0 \qquad \bar{s} \ldots\ y_k - i z_k = 0 \quad (k=1,2,\ldots,n)$$

Las ecuaciones del S_{2k} correspondiente al S_k (13) de σ_n serán

$$\begin{aligned} a_0 t + \sum_1^n a_k^{(j)} (y_k + i z_k) = 0 \\ \bar{a}_0 t + \sum_1^n \bar{a}_k^{(j)} (y_k - i z_n) = 0 \end{aligned} \qquad j = 1,2,\ldots,n-k$$

sistema equivalente al que se obtiene sumándolas y restándolas dos a dos, o sea separando la parte real de la imaginaria en las ecuaciones de S_k .

De los resultados encontrados en el párrafo precedente, y tomano el hiperplano t=o como hiperplano del infinito de un S_{2n} euclídeo, se llega a la siguiente conclusión general:

<u>Los puntos del campo de n variables complejas, supuestos distribuidos en un S_n euclideo-proyectivo, pueden distenderse sobre un S_{2n} real, en una correspondencia que es biunívoca sin excepciones en todo campo finito, y subordina correspondencias análogas entre los S_k subordinados a S_n y los S_{2k} de S_{2n}</u>.

<u>Las únicas excepciones a la biunivocidad de la correspondencia se refieren a los puntos del infinito de S_n , a los cuales corresponden biunívocamente las rectas del infinito de S_{2n} que se apoyan en los dos S_{n-1} , imaginarios conjugados independientes, que, en el hiperplano del infinito de S_{2n} tienen por ecuaciones</u>

$$s \ldots\ y_k + i z_k = 0 \qquad \bar{s} \ldots\ y_k - i z_k = 0 \quad (k=1,2,\ldots,n)$$

Los espacios s y $\bar{s}$ pertenecen, como espacios generadores del mismo sistema, a la cuádrica

$$\sum_1^n (y_k^2 + z_k^2) = 0$$

que constituye <u>el absoluto</u> de S_{2n}, en la métrica ordinaria.

NOTAS

(1) Vd. VAN DER WAERDEN: *Topologische Begründung des Kalküls der abzählenden Geometrie* "Math. Annalen" Bd. 102 (1930) y G. DE RHAM, *Sur l'analysis situs des variétés à n dimensions* "Journ. des Math. pures et appl." 9e série, t. X (1931).

(2) Roma, junio [illegible], 1930

(3) B. SEGRE: *Sobre algunas representaciones reales del plano complejo.* "Revista Matemática Hispano-Americana", junio 1928.

(4) Vd. las citadas "Conferenze di geometria algebrica".

(5) Es preferible esta traducción de la palabra italiana *coniugio*, a la de correspondencia *conjugada*, aplicable a otro concepto.