UNIVERSITAT AUTÒNOMA DE BARCELONA

Departament de Matemàtiques

Controlant la integral singular maximal

Memòria presentada per obtenir el grau de Doctora en Matemàtiques.

ANNA BOSCH CAMÓS

Juliol 2015

Certifico que aquesta memòria ha
estat realitzada per Anna Bosch Camós
i codirigida per mi.

Barcelona, juliol de 2015,

Joan Eugeni Mateu Bennassar

Certifico que aquesta memòria ha
estat realitzada per Anna Bosch Camós
i codirigida per mi.

Barcelona, juliol de 2015,

Joan Orobitg i Huguet

Qualsevol nit pot sortir el sol.
Jaume Sisa

Agraïments

El camí ha estat llarg, amb molts alts i baixos, però he tingut la sort de compartir-lo amb molta gent que m'ha mostrat el seu afecte. Han estat molts els companys de viatge, de la banda matemàtica o no, gent de sempre i gent que m'ha acompanyat un temps, gent nova que es converteix en imprescindible. A tots, moltes gràcies!

En primer lloc vull donar les gràcies als meus directors de tesi, en Joan Orobitg i en Joan Mateu. Gràcies per tota la paciència, per tot el que m'heu ensenyat, per les ganes de seguir i l'interès mostrat durant aquest temps, fins i tot quan jo semblava no tenir-ne. Per ser els meus "pares matemàtics" més enllà dels teoremes i les demostracions. Sense vosaltres no hagués estat possible. Un cop més, moltes gràcies!

A en Javier Duoandikoetxea, moltes gràcies per tot el que has aportat. Vas començar ajudant-nos amb alguns detalls, i vam seguir treballant al campus de Leioa durant uns mesos fantàstics. Gràcies per l'acolliment des de bon principi, i per l'amabilitat i interès mostrats. Sabes que me fui enamorada de Euskadi. Eskerrik asko!

A la resta de "família matemàtica", amb qui he pogut comentar els problemes, ja sigui al despatx o amb un cafè o una cervesa. Gràcies a en Joan Verdera, en Blesa, en Víctor Cruz, en Vasilis, l'Albert Clop i en Daniel Girela, per les converses i idees relacionades amb la meva tesi i per escoltar-me les cabòries matemàtiques quan ha fet falta.

A tots els companys de departament, de despatx, de congressos, d'estada. És impossible anomenar-vos a tots, però qualsevol dinar de carmanyola, descans pel cafè, viatge amb ferrocarril o amb bus cap a la universitat... han estat molt millor tenint-vos a tots al voltant. Molts de vosaltres us heu convertit en amics de veritat, gràcies.

A tots els professors que he tingut que m'han fet estimar les matemàtiques i tenir sempre ganes de saber-ne més. I especialment gràcies a en Josep Maria Palmada per ser qui em va despertar l'interès per fer la carrera, i per haver seguit ajudant-me després de l'institut. Gràcies per cada trobada i cada conversa per posar-nos al dia. Sempre en queda una de pendent!

A tota la gent amb qui he compartit aquests anys, són pocs els que en saben d'integrals singulars, però molts els que s'han interessat pel que estic fent. Moltes gràcies a tots aquells que heu confiat en mi més que jo mateixa. Gràcies per haver-me animat i, sobretot, gràcies per tots els bons moments viscuts! Moltes gràcies a la colla de Banyoles i a tots els altres amics del Pla de l'Estany, que no puc estar amb vosaltres tant com voldria. Gràcies a tots els amics que m'emporto de la universitat, especialment a la Marta i la Mònica per haver-hi estat en els bons i mals moments.

Gràcies a la gent de Tenerife, per haver-me fet veure la vida d'una altra manera. De forma especial, gracias Nacho, Jonay y Bego por haber seguido siempre conmigo. A tots els que vau fer que les meves estades a Bilbao fossin uns mesos genials, mila esker! I moltes gràcies a tota la gent amb la que he viscut aquesta vida barcelonina "non stop", els que ja formaven part de la meva vida i els que m'he anat trobant i retrobant pel camí. Gràcies als companys de carrera, d'universitat, de la Vila. Als companys de pis d'aquí i d'allà. A l'Óscar. Als amics incondicionals i als que han aparegut quan més ho necessitava. Gràcies als meus *lords* i als companys de Roquetes per haver fet que aquest final hagi estat més planer. Gràcies a tu, que estàs fullejant aquesta memòria.

I finalment gràcies a la meva família, per haver intentat entendre i acceptar el camí que he triat. Gràcies especialment a la Laia, per ser-hi sempre, en tot. Per ensenyar-me moltes coses tot i ser la germana petita. I un record per la iaia Quimeta i el *tiu* Miquel, que sempre es van interessar pel que estava fent i no ho han pogut veure acabar. Els dedico aquesta tesi.

Barcelona, estiu del 2015.

El treball presentat en aquesta tesi s'ha desenvolupat amb els següents suports financers:

Ministerio de Ciencia e Innovación, Gobierno de España

- Beca AP2007-01607 del programa FPU (Formación de Profesorado Universitario), 2008 – 2012.
- Projecte MTM2010-15657, Singular Integrals, Quasiconformal Mappins and PDE, 2010 – 2013.

AGAUR, Generalitat de Catalunya

- Projecte 2009SGR-000420, Grup d'Anàlisi Harmònica i Complexa, 2009 – 2014.

Univesidad del País Vasco / Euskal Herriko Unibertsitatea

- Contracte PIC (Personal Investigador Contratado), Departamento de Matemáticas, Facultad de Ciencia y Tecnología, UPV/EHU, setembre 2012 – desembre 2012.

Fundació Ferran Sunyer i Balaguer, Institut d'Estudis Catalans

- Borsa Ferran Sunyer i Balaguer per una estada de dos mesos al Departamento de Matemáticas de la UPV/EHU, abril 2013 – juny 2013.

Índex

Introducció

Els principals objectes d'estudi d'aquesta memòria són les integrals singulars. Aquests operadors van sorgir fa uns cent anys com a operadors auxiliars associats a l'estudi de les sèries de Fourier, principalment a la seva sumabilitat i a la teoria del potencial.

Les primeres integrals singulars que es van considerar eren al pla, com la funció conjugada, que és una integral singular al tor unidimensional, per això s'utilitzava l'anàlisi complexa per resoldre els problemes d'acotació d'aquestes integrals. En una segona fase, Antoni Zygmund i Alberto Calderón van aportar mètodes de variable real per estendre les integrals singulars en espais euclidians de dimensió superior. Posteriorment, Calderón proposà un programa on les àlgebres d'operadors integrals singulars eren una eina clau per entendre les equacions en derivades parcials amb coeficients no suaus. El principal operador utilitzat era l'integral de Cauchy sobre corbes Lipschitz. En aquest sentit és molt important el Teorema de Calderón (1977) que resol la Conjectura de Denjoy: un subconjunt compacte d'una corba rectificable és evitable si i només si té mesura de Hausdorff 1-dimensional igual a zero.

Les integrals singulars comencen a tenir un paper important en l'anàlisi matemàtica i comencen a despertar interès en altres àrees com la geometria i la topologia. Per poder aplicar les integrals singulars a moltes situacions d'anàlisi, Coifman i Weiss van establir un marc més general, el d'espais de tipus homogeni. Així, a finals del segle XX, principis del XXI, les integrals singulars tornen a l'anàlisi complexa amb l'èxit d'haver obtingut acotacions de l'integral de Cauchy sobre corbes Lipschitz, però ara són aquests operadors els que ajuden a l'anàlisi complexa.

Avui en dia la teoria de les integrals singulars ocupa una posició privilegiada en l'anàlisi matemàtic, essent molt importants en els estudis sobre la capacitat analítica i les aplicacions a les EDP's i a la mecànica de fluids, on apareixen integrals singulars de forma natural. També estan essent d'un gran interès les investigacions sobre la rectificabilitat i aquí és on sorgeix el problema de David i Semmes, encara obert en el cas general, que es pregunta si l'acotació $L^2(\mu)$ de les transformades de Riesz impliquen que la mesura μ és uniformement rectificable. Aquest problema actualment està resolt pel cas de la integral de Cauchy (Mattila-Melnikov-Verdera, 1996) i pel cas amb codimensió igual a 1 (Nazarov-Tolsa-Volberg, 2014).

En un intent de resoldre el problema de David i Semmes, Verdera va pensar que seria útil veure si l'acotació $L^2(\mu)$ de les transformades de Riesz impliquen l'existència de valors principals, perquè llavors semblava més senzill veure si l'existència de valors principals implicaven que la mesura μ fos uniformement rectificable. Aquest camí no va donar resultats positius pel problema de David i Semmes, però va obrir una nova línia d'estudi al plantejar que seria útil l'acotació de la norma de l'operador maximal per la norma de l'operador, que és en el sentit que s'ha treballat en aquesta memòria.

L'operador maximal amb el que es treballa és

$$T^{\star}f(x) = \sup_{\varepsilon>0} |T^{\varepsilon}f(x)|,$$

on $T^{\varepsilon}f(x)$ és la integral singular truncada a nivell ε (veure 0.6 al capítol de Preliminars).

Trobem una especial motivació en tres articles originats a partir d'aquesta idea. En el primer, de J. Mateu i J. Verdera del 2006, [MV], s'hi proven desigualtats puntuals pels casos particulars de la j-èssima transformada de Riesz i de la transformada de Beurling,

$$R_j f(x) = \text{v.p.} \int_{\mathbb{R}^n} f(x-y)\frac{y_j}{|y|^{n+1}}dy \quad \text{i} \quad Bf(z) = \frac{1}{\pi}\,\text{v.p.} \int_{\mathbb{C}} f(z-w)\frac{1}{w^2}dw.$$

Es fa notar per primer cop que les acotacions són diferents degut a la paritat del nucli de les respectives transformades. S'obtenen acotacions en norma L^p, $1 < p < \infty$, per les dues, i també en norma L^1 feble en el cas de la transformada de Beurling. Per la transformada de Riesz es demostra que no hi ha una acotació de la norma L^1 feble de $R_j^{\star}f$ en termes de $||R_j f||_1$.

A posteriori, en els articles de J. Mateu, J. Orobitg i J. Verdera de 2011, [MOV], i en [MOPV] de 2010 dels mateixos autors més C. Pérez, s'han provat acotacions puntuals com les esmentades per transformades de Riesz d'ordre superior,

$$Rf(x) = \text{v.p.} \int_{\mathbb{R}^n} f(x-y)\frac{P(y)}{|y|^{d+n}}dy,$$

on P és un polinomi homogeni harmònic de grau d. En el primer treball es tracta el cas d'operadors amb el nucli parell i en el segon es fa el mateix pels de nucli senar. Aquí és on la desigualtat de Cotlar pren protagonisme, ja que es fa notar que la desigualtat puntual pel cas parell és una millora d'aquesta. La desigualtat de Cotlar acota l'operador maximal de la següent forma:

$$T^{\star}f(x) \leq M(Tf)(x) + CMf(x),$$

on M és la funció maximal de Hardy-Littlewood,

$$Mf(x) = \sup_{r>0} \frac{1}{|B(0,r)|} \int_{B(0,r)} |f(x-y)|dy.$$

En [MOV] es demostra que, per les integrals singulars de Calderón-Zygmund de grau parell i amb nucli prou regular, l'acotació puntual de l'operador maximal pel mateix operador és equivalent a l'acotació en L^2 i al mateix temps a una condició algebraica sobre el nucli de la integral singular.

En el cas de les integrals de grau senar, en [MOPV], es veu que succeeix el mateix però en la desigualtat puntual necessitem la segona iterada de l'operador maximal de Hardy-Littlewood. Ja s'havia vist en [MV] que l'acotació sense iteració no funcionava en el cas de la transformada de Riesz.

A partir d'aquí, en el treball que ens ocupa, ens hem dedicat a estendre aquestes acotacions. En el primer capítol es resol una pregunta oberta que es planteja a [MOV]. Es demostra que l'acotació en L^p (i en L^p amb pesos) és també equivalent a la desigualtat puntual, no només amb $p = 2$. Aquests resultats estan reflectits en [BMO1].

En el segon capítol es treballa una altra pregunta plantejada al mateix article. Es tracta de veure si es pot relaxar la regularitat del nucli i que segueixi passant el mateix. Quan ens trobem a $\mathbb{R}^2$, donem una bona resposta fixant una diferenciabilitat inicial que ha de tenir el nucli. En el cas que la dimensió n és més gran que 2, tenim una resposta parcial, en el sentit de que aquesta regularitat inicial depèn del grau d'un cert polinomi que a la vegada depèn del nucli de l'operador. Això podria fer que s'hagués de demanar una diferenciabilitat molt gran. Però, això sí, finita.

El tercer capítol és una millora dels resultats obtinguts en el treball de fi de màster on vam donar un exemple pel qual no tenim acotació de la norma L^1 feble de la funció maximal en termes de la norma L^1 de l'operador. En el treball es presentava el cas d'un polinomi harmònic de grau 3 en el pla. Aquí s'explica com es pot generalitzar al cas d'operadors de qualsevol grau senar en el pla. Tot i això, degut a la difícil caracterització dels polinomis harmònics en dimensions superiors, ens ha quedat obert el problema a $\mathbb{R}^n$, per $n \geq 3$.

En l'últim capítol ens plantegem un problema proposat per J. Verdera. Considerem el mateix problema d'acotar puntualment l'operador maximal d'una integral singular pel mateix operador, però en aquest cas trunquem amb cubs en lloc de boles. Definim aquesta nova maximal com

$$T_S^\star f(x) = \sup_{\varepsilon>0} |T_Q^\varepsilon f(x)|,$$

on $T_Q^\varepsilon f(x)$ són les truncades respecte els $Q(x,\varepsilon)$, que són els cubs amb costats paral·lels als eixos, centrats en x i amb costats de longitud ε. Treballem el cas de la transformada de Beurling i veiem que per poder acotar ho hem de fer utilitzant la segona iterada del maximal de Hardy-Littlewood, i que no ho podem reemplaçar per la primera iteració. Aquests resultats estan reflectits en [BMO2].

Preliminars

Operadors de Calderón-Zygmund

En aquesta memòria treballem amb integrals singulars del tipus

$$Tf(x) = \text{v.p. } K(x) * f := \lim_{\varepsilon \to 0} \int_{|y|>\varepsilon} K(y) f(x-y) dy. \tag{0.1}$$

Tot i que es poden incloure en una definició mes general, observem que només treballarem amb integrals singulars determinades a partir de la convolució de la funció amb un nucli K, que definim de la següent forma

$$K(x) := \frac{\Omega\left(\frac{x}{|x|}\right)}{|x|^n} \tag{0.2}$$

on Ω està definida en S^{n-1}, és integrable amb mitjana zero. D'aquesta manera, Tf està definida per a funcions de la classe de Schwartz $\mathcal{S}$. Si, a més, suposem que Ω està, com a mínim, a $\mathcal{C}^1(S^{n-1})$, tenim que aquestes integrals singulars estan acotades de L^p a L^p i de L^1 a $L^{1,\infty}$ i així les podem anomenar operadors de Calderón-Zygmund. El que tenim és

Teorema. *Sigui T una integral singular de Calderón-Zygmund.*

(i) Si $f \in L^p$, llavors $||Tf||_{L^p} \leq C||f||_{L^p}$, o sigui que Tf també està en L^p, $1 < p < \infty$.

(ii) Si $f \in L^1$, llavors $||Tf||_{L^{1,\infty}} \leq C||f||_{L^1}$, és a dir, Tf està en L^1 dèbil, $L^{1,\infty}$.

Direm que un operador T és senar si el nucli (0.2) és senar, és a dir, si $\Omega(-x) = -\Omega(x)$, $x \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$. Equivalentment definim un operador parell si $\Omega(-x) = \Omega(x)$, $x \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$. La funció homogènia Ω té un desenvolupament en esfèrics harmònics

$$\Omega(x) = \sum_{j=1}^{\infty} P_j(x), \quad x \in S^{n-1}, \tag{0.3}$$

on els P_j són polinomis homogenis harmònics de grau j. Si l'operador és parell, la suma només conté polinomis de grau parell P_{2j}, si és senar, només polinomis P_{2j-1}. Habitualment considerarem $\Omega \in \mathcal{C}^\infty(S^{n-1})$. Ser infinitament diferenciable és equivalent $\sum_{j=1}^{\infty} j^M ||P_j||_\infty < \infty$ per a tota $M \geq 0$.

El primer exemple d'integral singular és la transformada de Hilbert. Donada una funció $f \in \mathcal{S}$, definim la seva transformada de Hilbert com

$$Hf = \frac{1}{\pi} \text{v.p.} \frac{1}{x} * f := \frac{1}{\pi} \lim_{\varepsilon \to 0} \int_{|y| > \varepsilon} \frac{f(x-y)}{y} dy. \tag{0.4}$$

Està ben definida ja que l'integral de $\frac{1}{y}$ és 0 en $\varepsilon < |y| < 1$.

A $\mathbb{R}^n$ definim la j-èssima transformada de Riesz R_j com aquella integral singular tal que a la banda de la transformada de Fourier compleix $\widehat{R_j(f)}(\xi) = -i\frac{\xi_j}{|\xi|}\widehat{f}(\xi)$. D'aquesta manera la j-èssima transformada de Riesz es caracteritza pel nucli [St, p. 57]

$$K_j(x) = \frac{\Gamma(\frac{n+1}{2})}{\pi^{\frac{n+1}{2}}} \frac{x_j}{|x|^{n+1}}.$$

Observem que la transformada de Hilbert és el cas particular d'aquesta transformada a la recta.

Aquests exemples són integrals singulars amb nucli senar. El primer exemple de nucli parell és la transformada de Beurling, que és l'anàleg de la transformada de Hilbert en variable complexa. Ve definida com

$$Bf(z) = \frac{1}{\pi} \text{v.p.} \int_{\mathbb{C}} f(z-w) \frac{1}{w^2} dw. \tag{0.5}$$

Observem que si $w = x + iy$, llavors $\dfrac{1}{w^2} = \dfrac{x^2 - y^2}{(x^2+y^2)^2} - i\dfrac{2xy}{(x^2+y^2)^2}$.

Considerem ara les integrals truncades

$$T^{\varepsilon} f(x) = \int_{|x-y| > \varepsilon} K(x-y) f(y) dy. \tag{0.6}$$

Les integrals singulars de Calderón-Zygmund satisfan

$$\lim_{\varepsilon \to 0} T^{\varepsilon} f(x) = Tf(x), \quad \text{g.p.t. } x \in \mathbb{R}^n.$$

Al llarg d'aquest treball, treballem amb els operadors maximals. Sigui T un operador de Calderón-Zygmund. L'operador maximal associat és

$$T^{\star} f(x) = \sup_{\varepsilon > 0} |T^{\varepsilon} f(x)|, \quad x \in \mathbb{R}^n.$$

Tenim que

Teorema. *Si T és un operador de Calderón-Zygmund, aleshores $T^{\star}$ és feble $(1,1)$ i fort (p,p), $1 < p < \infty$.*

En anàlisi matemàtica, l'estudi de la mitjana de les funcions surt de forma natural en moltes situacions. El seu estudi es simplifica amb la introducció de la funció maximal. Les funcions maximals són molt importants perquè controlen alguna informació quantitativa de la funció estudiada, encara que puguin ser més grans que aquesta. Així, definim la funció maximal de Hardy-Littlewood d'una funció integrable f com

$$Mf(x) = \sup_{r>0} \frac{1}{|B(0,r)|} \int_{B(0,r)} |f(x-y)|dy.$$

Es pot definir a partir de cubs en lloc de boles, i també les respectives funcions maximals no centrades, fent el suprem sobre totes les boles o cubs que contenen x. Degut a que la mesura de Lebesgue és una mesura doblant (és a dir, $|B(a,2r)| \leq 2^n|B(a,r)|$), obtenim que tots aquests operadors maximals són puntualment equivalents.

Ens interessarà controlar els operadors maximals. Una de les formes de control més conegudes és la *Desigualtat de Cotlar*:

$$T^\star f(x) \leq C\left(M(Tf)(x) + CMf(x)\right), x \in \mathbb{R}^n, \tag{0.7}$$

per a $f \in \mathcal{S}$. Aquesta desigualtat acota l'operador maximal de la integral singular per la maximal de Hardy-Littlewood composada amb T més la maximal de Hardy-Littlewood de la funció, llevat de constants. Es pot generalitzar de la següent manera.

Lema (e.g. [Du, p. 102])**.** *Si T és un operador de Calderón-Zygmund, aleshores*

$$T^\star f(x) \leq C_\nu \left(M(|Tf|^\nu)(x)^{\frac{1}{\nu}} + Mf(x)\right),$$

per a $0 < \nu \leq 1$, i per a $f \in \mathcal{C}_c^\infty$.

Si tenim una funció $m \in \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}^n \setminus \{0\})$, homogènia de grau 0, i T_m és l'operador definit a la banda de la transformada de Fourier com $(T_m(f))\widehat{\ } = m\widehat{f}$, aquest operador T no te perquè ser una integral singular del tipus (0.1). Però el podem escriure com un múltiple de l'identitat més una integral singular de Calderón-Zygmund. Per a una constant a i $f \in \mathcal{S}$,

$$T_m f = af + \text{v.p.}\ \frac{\Omega(x/|x|)}{|x|^n} * f,$$

on aquí $\Omega \in \mathcal{C}^\infty(S^{n-1})$. El conjunt d'operadors d'aquest tipus formen una àlgebra commutativa $\mathcal{A}$. I tenim que un element de $\mathcal{A}$ és invertible si i només si m no s'anul·la en S^{n-1}.

Aquest resultat també és vàlid si Ω està en algun espai de Sobolev. Es pot veure aquest resultat en l'article de Calderón [Ca]. Sigui a una constant i denotem per δ_0 la delta de Dirac a l'origen. Calderón i Zygmund van demostrar que si el nucli d'un operador T, que sigui invertible en $L^2(\mathbb{R}^n)$, és de la forma $a\delta_0 + K$, on K és homogènia de grau $-n$, amb mitjana zero sobre l'esfera S^{n-1} i està a l'espai de Sobolev $L_q^s(S^{n-1})$, per a algun $q > 1$ i $s \in \mathbb{N}$, aleshores el nucli de l'operador invers té la mateixa regularitat.

Multiplicadors

En aquesta tesi treballem sovint amb el paral·lelisme entre un operador i la seva funció m associada, com la que acabem d'esmentar. Aquesta funció s'anomena el multiplicador de Fourier de l'operador. L'espai de multiplicadors de L^p o de multiplicadors de Fourier de L^p es defineix de la següent manera via la transformada de Fourier. Donat $1 \leq p \leq \infty$ anomenem $\mathcal{M}_p(\mathbb{R}^n)$ a l'espai de totes les funcions acotades m de $\mathbb{R}^n$ tals que l'operador

$$T_m(f) = (\hat{f}\, m)^\vee, \quad f \in \mathcal{S},$$

està acotat en $L^p(\mathbb{R}^n)$ (o que està inicialment definit en un subespai dens de $L^p(\mathbb{R}^n)$ i té una extensió acotada en tot l'espai). Denotem per $(\cdot)^\vee$ la inversa de la transformada de Fourier. La norma de m en $\mathcal{M}_p(\mathbb{R}^n)$ està definida com la norma de l'operador lineal acotat $T_m : L^p(\mathbb{R}^n) \to L^p(\mathbb{R}^n)$,

$$||m||_{\mathcal{M}_p} = ||T_m||_{L^p \to L^p}.$$

Els elements de l'espai $\mathcal{M}_p(\mathbb{R}^n)$ s'anomenen multiplicadors (de Fourier) de L^p. Similarment, parlem dels multiplicadors de $L^p(\omega)$, quan ω és un pes.

És ben conegut que, degut al Teorema de Plancherel, $\mathcal{M}_2$, el conjunt dels multiplicadors L^2, és L^∞ i que $\mathcal{M}_1(\mathbb{R}^n)$ és el conjunt de les transformades de Fourier de les mesures de Borel finites en $\mathbb{R}^n$. També es demostra que una funció acotada m és un multiplicador de L^p si i només si és un multiplicador de $L^{p'}$, on p i p' són tals que $\frac{1}{p} + \frac{1}{p'} = 1$. I llavors, $||m||_{\mathcal{M}_p} = ||m||_{\mathcal{M}_{p'}}$, $1 < p < \infty$. De fet, tenim

$$\mathcal{M}_1 \subseteq \mathcal{M}_p \subseteq \mathcal{M}_q \subseteq \mathcal{M}_2 = L^\infty,$$

si $1 \leq p \leq q \leq 2$. La teoria bàsica de multiplicadors la podem trobar en [Du, Chapter 3, Chapter 8] i en [Gr1, Chapter 2], entre d'altres. Per exemple, en [Gr1, p. 366], podem trobar un teorema de Hörmander-Mihlin que ens dóna condicions suficients per ser multiplicador.

Teorema. *Sigui $m(\xi)$ una funció acotada en $\mathbb{R}^n \setminus \{0\}$ a valors complexos que satisfà una de les següents condicions:*

(a) Condició de Mihlin

$$|\partial_\xi^\alpha m(\xi)| \leq A|\xi|^{-|\alpha|}, \quad \textit{per a tots els multiíndexs } |\alpha| \leq \left[\frac{n}{2}\right] + 1.$$

(b) Condició de Hörmander

$$\sup_{R>0} R^{-n+2|\alpha|} \int_{R<|\xi|<2R} |\partial_{xi}^\alpha m(\xi)|^2 d\xi \leq A^2 < \infty, \quad \textit{per a tots els multiíndexs } |\alpha| \leq \left[\frac{n}{2}\right] + 1.$$

Aleshores, per a tot $1 < p < \infty$, $m \in \mathcal{M}_p(\mathbb{R}^n)$ i es satisfà

$$||m||_{\mathcal{M}_p} \leq C \max\left(p, (p-1)^{-1}\right) \left(A + ||m||_{L^\infty}\right).$$

A més a més, l'operador $f \mapsto (\widehat{f}m)^\vee$ va de $L^1(\mathbb{R}^n)$ a $L^{1,\infty}(\mathbb{R}^n)$ amb norma com a màxim un múltiple de $A + ||m||_{L^\infty}$.

També es poden caracteritzar els multiplicadors a partir del següent corol·lari del mateix teorema.

Corol·lari. *Siguin* $\{m_l\}_{l\in\mathbb{Z}}$ *funcions acotades en* $\mathbb{R}^n$ *amb les normes* L^∞ *acotades uniformement per una constant* A. *Suposem que*

$$\sup_{R>0} R^{-n+2|\alpha|} \sum_{l\in\mathbb{Z}} \int_{R<|\xi|<2R} |\partial_\xi^\alpha m_l(\xi)|^2 d\xi \leq A^2, \quad g.p.t. \ |\alpha| \leq \left[\frac{n}{2}\right] + 1.$$

Aleshores, per a alguna $C < \infty$ *i per a tota funció* f_k *tenim*

$$\left\| \left(\sum_{l\in\mathbb{Z}} |(\widehat{f}_l m_l)^\vee|^2 \right)^{\frac{1}{2}} \right\|_{L^p} \leq C(p + (p-1)^{-1}) A \left\| \left(\sum_{l\in\mathbb{Z}} |f_l|^2 \right)^{\frac{1}{2}} \right\|_{L^p}.$$

Els espais H^1 i BMO

La imatge per una integral singular d'una funció L^1 no és de L^1, en general. Però hi ha un subespai de L^1 tal que la seva imatge per integrals singulars està en L^1. S'anomena espai de Hardy i es pot definir a partir d'àtoms. Un àtom a és una funció a valors complexos definida a $\mathbb{R}^n$, amb suport en un cub Q i tal que

$$\int_Q a(x)dx = 0 \quad \text{i} \quad ||a||_\infty \leq \frac{1}{|Q|}.$$

Llavors, definim l'espai atòmic H^1_{at} com

$$H^1_{at}(\mathbb{R}^n) = \left\{ \sum_j \lambda_j a_j : a_j \text{ són àtoms }, \lambda_j \in \mathbb{C}, \sum_j |\lambda_j| < \infty \right\}.$$

És clar que H^1_{at} està contingut a L^1. Hi definim la norma

$$||f||_{H^1_{at}} = \inf \left\{ \sum_j |\lambda_j| : f = \sum \lambda_j a_j \right\}.$$

A partir de la definició hom pot veure que les integrals singulars estan acotades de H^1_{at} a L^1, és a dir,

$$||Tf||_1 \leq C||f||_{H^1_{at}}.$$

A més, l'espai H^1_{at} és el subespai més gran de L^1 pel qual això passa.

Una altra caracterització de l'espai de Hardy és la següent. Siguin $R_1, \ldots, R_n$ les transformades de Riesz a $\mathbb{R}^n$. Definim l'espai de Hardy H^1 com

$$H^1(\mathbb{R}^n) = \left\{ f \in L^1(\mathbb{R}^n) \ \text{ tals que } \ R_j f \in L^1(\mathbb{R}^n), \ 1 \leq j \leq n \right\}$$

amb la norma

$$||f||_{H^1} = ||f||_1 + \sum_{j=1}^{n} ||R_j f||_1.$$

Amb aquestes definicions es compleix que $H^1(\mathbb{R}^n) = H^1_{at}(\mathbb{R}^n)$ i les seves normes són equivalents. Per més informació sobre l'espai de Hardy vegeu, per exemple, [Du, Chapter 6], [Gr2, Chapter 7].

Un altre espai que utilitzem en aquesta memòria és l'espai BMO, que és el dual de l'espai de Hardy H^1. Sigui f una funció de $L^1_{loc}(\mathbb{R}^n)$ i Q un cub. La mitjana de f en Q és

$$f_Q = \frac{1}{|Q|} \int_Q f.$$

Així, definim la funció maximal *sharp* com

$$M^\sharp f(x) = \sup_{Q \ni x} \frac{1}{|Q|} \int_Q |f - f_Q|,$$

on el suprem es pren sobre tots els cubs Q que contenen x. Cadascuna d'aquestes integrals mesura l'oscil·lació mitjana de f en el cub Q. Llavors diem que f té oscil·lació mitjana acotada, és a dir, que pertany a l'espai BMO, si la funció $M^\sharp f$ està acotada.
A BMO definim la norma

$$||f||_{BMO} = ||M^\sharp f||_\infty.$$

No és ben bé una norma perquè qualsevol funció que és constant gairebé per tot té oscil·lació zero. Però pensem BMO com el quocient de l'espai definit anteriorment entre l'espai de les funcions constants. O sigui que dues funcions que difereixen en una constant són la mateixa funció a BMO.

Observem que $L^\infty \subset BMO$, però també tenim funcions no acotades a BMO, com per exemple $\log |x|$. És fàcil veure que si T és una integral singular i f una funció acotada a suport compacte, aleshores $Tf \in BMO$ i

$$||Tf||_{BMO} \leq C||f||_\infty. \tag{0.8}$$

Llavors, amb una descomposició adequada de la funció, veiem que si $f \in L^\infty$, també tenim $Tf \in BMO$ i es compleix (0.8).

Pesos

En el primer capítol treballarem amb els espais L^p amb pesos, $L^p(\omega)$. Es tracta de substituir la mesura de Lebesgue per la mesura ωdx, on ω és una funció no negativa, localment integrable. A aquestes funcions ω les anomenem pesos i, per a un conjunt mesurable E, es defineix $\omega(E) = \int_E \omega$.

Muckenhoupt va caracteritzar per quina classe de pesos tenim que la maximal de Hardy-Littlewood està acotada en $L^p(\omega)$. Aquests s'anomenen pesos de la classe A_p.

Definició. Direm que un pes és de la classe A_p, $1 < p < \infty$, si compleix la condició A_p

$$\left(\frac{1}{|Q|}\int_Q \omega\right)\left(\frac{1}{|Q|}\int_Q \omega^{1-p'}\right)^{p-1} \leq C,$$

on C és una constant independent de Q. Per a $p = 1$, la condició A_1 és

$$M\omega(x) \leq C\omega(x), \quad \text{g.p.t. } x \in \mathbb{R}^n.$$

Com a conseqüència tenim que qualsevol pes de la classe A_p és també de la classe A_q, si $1 \leq p < q$. També $\omega \in A_p$ si i només si $\omega^{1-p'} \in A_{p'}$, on p' és tal que $\frac{1}{p} + \frac{1}{p'} = 1$. I si tenim dos pesos ω_0 i ω_1 de la classe A_1, llavors $\omega_0\omega_1^{1-p} \in A_p$.

També es compleix la desigualtat forta amb pesos

$$||Mf||_{L^\infty(\omega)} \leq ||f||_{L^\infty(\omega)}.$$

El principal resultat de Muckenhoupt és

Teorema. *Si $1 < p < \infty$ aleshores M està acotat en $L^p(\omega)$ si i només si $\omega \in A_p$.*

Per més informació sobre aquest tema, hom pot mirar per exemple [Du, Chapter 7].

Motivació

Com ja hem comentat en la introducció, la nostra motivació prové especialment de [MV], [MOV] i [MOPV]. Al llarg d'aquesta memòria anirem utilitzant els resultats i alguns arguments que apareixen en els citats articles. Per això, farem aquí una revisió acurada dels teoremes que es demostren, sobretot en [MOV] i [MOPV], que abans només hem explicat breument.

En cadascun d'aquests dos articles es demostra un teorema, en el primer, pel cas d'operadors amb nucli parell, i en el segon, pels operadors senars. Els enunciem tot seguit.

Teorema 1 Sigui T un operador parell homogeni de Calderón-Zygmund amb nucli del tipus (0.2) en $\mathcal{C}^\infty(S^{n-1})$ i amb desenvolupament (0.3). Aleshores, són equivalents

(i) $T^\star f(x) \leq CM(Tf)(x)$, $x \in \mathbb{R}^n$.

(ii) $||T^\star f||_2 \leq C||Tf||_2$, $f \in L^2(\mathbb{R}^n)$.

(iii) L'operador T es pot factoritzar de la forma $T = R \circ U$, on U és un operador invertible en l'àlgebra d'operadors $\mathcal{A}$ i R és una transformada de Riesz d'ordre superior associada a un polinomi harmònic i homogeni P tal que divideix cada P_{2j} en el desenvolupament de Ω.

Observem que l'apartat (i) és una millora de la desigualtat de Cotlar. En el cas d'operadors amb nucli senar, aconseguim la mateixa acotació però amb M^2 en comptes de M, és a dir, la iterada de la funció maximal de Hardy-Littlewood.

Teorema 2 Sigui T un operador senar homogeni de Calderón-Zygmund amb nucli del tipus (0.2) en $\mathcal{C}^\infty(S^{n-1})$ i amb desenvolupament (0.3). Aleshores, són equivalents

(i) $T^\star f(x) \le CM^2(Tf)(x)$, $x \in \mathbb{R}^n$.

(ii) $||T^\star f||_2 \le C||Tf||_2$, $f \in L^2(\mathbb{R}^n)$.

(iii) L'operador T es pot factoritzar de la forma $T = R \circ U$, on U és un operador invertible en l'àlgebra d'operadors $\mathcal{A}$ i R és una transformada de Riesz d'ordre superior associada a un polinomi harmònic i homogeni P tal que divideix cada P_{2j+1} en el desenvolupament de Ω.

Ens centrarem en el cas parell, el Teorema 1. Observem que és obvi que la desigualtat puntual (i) implica l'acotació en norma 2 (ii). Llavors es tracta de provar que (iii) implica (i), cosa que anomenem condició suficient, i que (ii) implica (iii), que en direm la condició necessària. Es demostra en tres fases, primer es prova per una tranformada de Riesz d'ordre superior, després per un operador polinomial (considerem polinomials aquells que el seu desenvolupament en esfèrics harmònics és finit) i finalment es fa el cas general. Explicitem aquí la demostració de la condició suficient pel cas polinomial finit, ja que la necessitarem al llarg d'aquesta memòria. Pel cas general s'ha de treballar una mica amb les acotacions de les sèries infinites. La condició necessària està explicada en el primer capítol.

Demostració de la condició suficient del Teorema 1 pel cas polinomial

Suposem que T és un operador polinomial parell. Llavors podem escriure

$$|x|^{2N}\Omega(x) = P_2(x)|x|^{2N-2} + \cdots + P_{2j}(x)|x|^{2N-2j} + \cdots + P_{2N}(x),$$

on cada P_{2j} és un polinomi homogeni harmònic de grau $2j$, per a $1 \le j \le N$.

Aplicant invariància per translacions i dilatacions, reduïm la demostració a provar que

$$|T^1 f(0)| \le CM(Tf)(0), \tag{0.9}$$

on $T^1 f(0)$ és la integral truncada a nivell 1.

És un punt clau el fet d'obtenir una expressió pel nucli $K(x)$ fora de la bola unitat B. Per això, definim l'operador diferencial $Q(\partial)$ a partir del polinomi

$$Q(x) = \gamma_2 P_2(x)|x|^{2N-2} + \cdots + \gamma_{2j} P_{2j}(x)|x|^{2N-2j} + \cdots + \gamma_{2N} P_{2N}(x),$$

on $\gamma_k = i^{-k}\pi^{\frac{n}{2}}\dfrac{\Gamma(\frac{k}{2})}{\Gamma(\frac{n+k}{2})}$. Sigui $d = 2N$ i sigui E la solució fonamental estàndard de Δ^N. Fent transformada de Fourier a banda i banda veiem que

$$Q(\partial)E = \text{v.p. } K(x).$$

Considerem la funció

$$\varphi(x) = E(x)\chi_{\mathbb{R}^n\setminus\overline{B}}(x) + \left(A_0 + A_1|x|^2 + \cdots + A_{d-1}|x|^{2d-2}\right)\chi_B(x),$$

on B és la bola centrada en 0 i de radi 1 i les constants $A_0, A_1, \ldots, A_{d-1}$ estan escollides de forma que es pugui aplicar N vegades un operador diferencial de segon ordre. Llavors, per a algunes constants $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_{N-1}$,

$$\Delta^N \varphi = (\alpha_0 + \alpha_1 |x|^2 + \cdots + \alpha_{N-1}|x|^{2(N-1)})\chi_B(x) = b(x),$$

on l'última igualtat és la definició de b. Observem que b és una funció mesurable acotada amb suport a la bola B. Tenim

$$\varphi = E * \Delta^N \varphi,$$

i aplicant $Q(\partial)$ als dos costats obtenim

$$Q(\partial)\varphi = Q(\partial)E * \Delta^N \varphi = \text{v.p. } K(x) * b = T(b).$$

Per altra banda, per tal i com hem escollit φ, podem escriure

$$Q(\partial)\varphi = K(x)\chi_{\mathbb{R}^n \setminus \overline{B}} + Q(\partial)(A_0 + A_1|x|^2 + \cdots + A_{2N-1}|x|^{4N-2})(x)\chi_B(x).$$

Definim l'últim terme com $S(x) := -Q(\partial)(A_0 + A_1|x|^2 + \cdots + A_{2N-1}|x|^{4N-2})(x)$. Volem trobar una funció $\beta \in L^\infty(\mathbb{R}^n)$ que satisfaci el decaïment

$$|\beta(x)| \leq \frac{C}{|x|^{n+1}}, \quad |x| \geq 2 \tag{0.10}$$

i tal que

$$S(x)\chi_B(x) = T(\beta)(x). \tag{0.11}$$

Si tenim això, per la definició de $S(x)$ i per (0.11), obtenim

$$K(x)\chi_{\mathbb{R}^n \setminus \overline{B}}(x) = T(b)(x) + T(\beta)(x). \tag{0.12}$$

Per veure (0.9) posem $\gamma = b + \beta$ i argumentem de la següent manera. Per a $f \in L^p(\mathbb{R}^n)$, $1 \leq p < \infty$, tenim

$$\begin{aligned} T^1 f(0) &= \int \chi_{\mathbb{R}^n \setminus \overline{B}}(y) K(y) f(y) dy \\ &= \int T(\gamma)(y) f(y) dy \\ &= \int \gamma(y) T f(y) dy \\ &= \int_{2B} \gamma(y) T f(y) dy + \int_{\mathbb{R}^n \setminus 2B} \gamma(y) T f(y) dy. \end{aligned}$$

Llavors, aplicant el decaïment (0.10) a γ obtenim

$$\begin{aligned} |T^1 f(0)| &\leq C \left(||\gamma||_\infty \frac{1}{|2B|} \int_{2B} |Tf(y)| dy + \int_{\mathbb{R}^n \setminus 2B} \frac{|Tf(y)|}{|y|^{n+1}} dy \right) \\ &\leq C M(Tf)(0). \end{aligned}$$

Per tant hem de construir β que compleixi (0.10) i (0.11). Per això recorrerem a la hipòtesi que ens diu que $T = R \circ U$, que encara no l'havíem fet servir, i organitzarem l'argument en dos passos.

El primer pas consisteix en veure que existeix una funció $\beta_1 \in L^\infty(B)$ que compleix $\int \beta_1(x)dx = 0$ i tal que

$$S(x)\chi_B(x) = R(\beta_1)(x). \tag{0.13}$$

Necessitem una forma explícita per $S(x)$ que s'obté utilitzant el següent lema, que és una conseqüència immediata d'una fórmula de Lyons i Zumbrun [LZ].

Lema 3 Sigui P_{2j} un polinomi homogeni harmònic de grau $2j$ i sigui k un enter no negatiu. Llavors

$$P_{2j}(\partial)(|x|^{2k}) = 2^{2j}\frac{k!}{(k-2j)!}P_{2j}(x)|x|^{2(k-2j)}, \quad \text{si } \ 2j \le k,$$

i

$$P_{2j}(\partial)(|x|^{2k}) = 0, \quad \text{si } \ 2j > k.$$

Per altra banda, fent un càlcul rutinari obtenim

$$\Delta^j(|x|^{2k}) = 4^j\frac{j!k!}{(k-j)!}\binom{\frac{n}{2}+k-1}{j}|x|^{2(k-j)}, \quad \text{si } \ k \ge j, \tag{0.14}$$

i també

$$\Delta^j(|x|^{2k}) = 0, \quad \text{si } \ k < j. \tag{0.15}$$

A partir de les definicions de $Q(x)$ i de $S(x)$ i utilitzant el Lema 3, (0.14) i (0.15), tenim

$$S(x) = \sum_{j=1}^{N-1}\sum_{k=j}^{N-1} c_{jk}P_{2j}(x)|x|^{2(k-j)}.$$

Així doncs, és suficient veure que es compleix (0.13) reemplaçant $S(x)$ per $P_{2j}(x)|x|^{2k}$ per a $1 \le j \le N$ i per a cada enter k no negatiu. La idea és trobar una funció ψ adequada tal que

$$P(\partial)\psi(x) = P_{2j}(x)|x|^{2k}\chi_B(x). \tag{0.16}$$

Efectivament, si això es compleix i $2d$ és el grau de P, llavors

$$\psi = E * \Delta^d\psi,$$

ja que E és la solució fonamental de Δ^d i ψ és prou bona. Aleshores

$$P(\partial)\psi = P(\partial)E * \Delta^d\psi = C\text{v.p. } \frac{P(x)}{|x|^{n+2d}} * \Delta^d\psi = R(\beta_1),$$

si $\beta_1 = C\Delta^d\psi$. O sigui que s'ha de resoldre 0.16 de tal forma que $\Delta^d\psi$ tingui suport a B, sigui una funció de Lipschitz en B i tingui integral zero. Fent càlculs amb transformades de Fourier, entre d'altres tècniques, obtenim

$$\psi(x) = Q_{2j-2d}(\partial)\sum_{\nu=0}^{k} a_{jk\nu}\Delta^{k-\nu}\left((1-|x|^2)^{2j+2k-\nu}\chi_B(x)\right).$$

Observem que ψ restringida a B és un polinomi que s'anul·la en ∂B fins a ordre $2d$ i que val zero fora de B. Per tant, $\Delta^d\psi$ té suport en B i la seva restricció en B és un polinomi amb integral zero. Això completa el primer pas de la construcció de β.

En el segon pas comencem utilitzant la hipòtesi $T = R \circ U$. Tenim

$$R(\beta_1) = T(U^{-1}\beta_1).$$

Si anomenem

$$\beta = U^{-1}\beta_1,$$

només ens queda veure que

$$\beta \in L^\infty(\mathbb{R}^n) \tag{0.17}$$

i que, per a alguna constant positiva C,

$$|\beta(x)| \leq \frac{C}{|x|^{n+1}}, \quad |x| \geq 2. \tag{0.18}$$

Com que U^{-1} és de l'àlgebra $\mathcal{A}$, podem escriure $U^{-1} = \lambda I + V$, per a algun número real λ i per a algun operador homogeni de Calderón-Zygmund V de nucli $\mathcal{C}^\infty$. Llavors

$$\beta = \lambda\beta_1 + V(\beta_1).$$

Per tant, β_1 té suport a B i té integral zero en B. Això és suficient per tenir el decaïment (0.18). De fet, si anomenem $L(x)$ al nucli de V i suposem que $|x| \geq 2$, llavors

$$\begin{aligned} V(\beta_1)(x) &= \int L(x-y)\beta_1(y)dy \\ &= \int \left(L(x-y) - L(x)\right)\beta_1(y)dy. \end{aligned}$$

Així,

$$\begin{aligned} |V(\beta_1)(x)| &\leq \int |\left(L(x-y) - L(x)\right)||\beta_1(y)|dy, \\ &\leq C\int \frac{|y|}{|x|^{n+1}}|\beta_1(y)|dy, \\ &= \frac{C}{|x|^{n+1}}. \end{aligned}$$

L'acotació de β és un tema una mica més delicat, però surt directament del següent lema aplicat a l'operador V i a la funció β_1. És aquí on utilitzem que β_1 satisfà una condició de Lipschitz.

Tenim que $||T||_{CZ} \equiv ||K||_{CZ} = ||\Omega||_\infty + ||\,|x|\nabla\Omega(x)||_\infty$ i prenem la notació estàndard per la constant de Lipschitz minimal d'una funció Lipschitz f en B, és a dir,

$$||f||_{Lip(1,B)} = \sup\left\{\frac{|f(x) - f(y)|}{|x-y|} \,:\, x, y \in B, x \neq y\right\} < \infty.$$

Lema 4 Sigui T una integral singular homogènia amb nucli $K(x) = \frac{\Omega(x)}{|x|^n}$, on Ω és una funció homogènia parell de grau 0, contínuament diferenciable i amb integral zero en l'esfera unitat. Aleshores

$$||T(f\chi_B)||_{L^\infty(\mathbb{R}^n)} \leq C||K||_{CZ} \left(||f||_{L^\infty(B)} + ||f||_{Lip(1,B)}\right),$$

on C és una constant positiva que només depèn de n.

Es pot veure la demostració en [MOV, p.1442].

Així queda completa la construcció de β i tenim acabada la demostració pels operadors polinomials.

Nota. La nostra notació i terminologia són estàndards. En tots els arguments d'aquesta memòria utilitzarem la notació usual amb la que denotem per C una constant positiva, independent dels paràmetres rellevants involucrats, i que pot variar d'un pas al següent. També, $A \approx B$ vol dir que les dues quantitats A i B satisfan la relació $C^{-1}A \leq B \leq CA$, per a alguna constant $C \geq 1$.

Capítol 1

Estimacions en L^p

En aquest capítol continuem l'estudi, iniciat en els treballs [MOV] i [MOPV], del problema de controlar l'integral singular maximal $T^\star f$ per la mateixa integral singular Tf. Tenim que T és un operador homogeni de Calderón-Zygmund amb nucli $\mathcal{C}^\infty$ de convolució. Considerem dues formes de control, una amb la norma amb pesos $L^p(\omega)$ i l'altra via les acotacions puntuals de $T^\star f$ per $M(Tf)$ o $M^2(Tf)$, on M és l'operador maximal de Hardy-Littlewood i $M^2 = M \circ M$ és la seva iterada.

La novetat respecte els dos treballs anteriors mencionats és que aquí p és diferent de 2 i que l'espai L^p és amb pesos.

El nostre resultat és el següent. Comencem amb el cas d'operadors de nucli parell.

Teorema 1.1. *Sigui T un operador homogeni de Calderón-Zygmund amb nucli $\mathcal{C}^\infty$ parell (0.2). Llavors, són equivalents:*

(a) $T^\star f(x) \leq CM(Tf)(x)$, *per a tot* $x \in \mathbb{R}^n$.

(b) Si $p \in (1, \infty)$ *i* $\omega \in A_p$, *aleshores*

$$||T^\star f||_{L^p(\omega)} \leq C||Tf||_{L^p(\omega)}, \qquad \text{per a tota } f \in L^p(\omega).$$

(c) Suposem que el desenvolupament de Ω en esfèrics harmònics és

$$\Omega(x) = \sum_{j=j_0}^{\infty} P_{2j}(x), \quad P_{2j_0} \neq 0\,.$$

Llavors, per a cada j existeix un polinomi homogeni Q_{2j-2j_0} de grau $2j-2j_0$ tal que $P_{2j} = P_{2j_0}Q_{2j-2j_0}$ i $\sum_{j=j_0}^{\infty} \gamma_{2j} Q_{2j-2j_0}(\xi) \neq 0$, $\xi \in S^{n-1}$. Aquí, per a cada enter positiu k tenim

$$\gamma_k = i^{-k}\pi^{\frac{n}{2}} \frac{\Gamma(\frac{k}{2})}{\Gamma(\frac{n+k}{2})}. \tag{1.1}$$

(d) $||T^\star f||_{1,\infty} \leq C||Tf||_1$, *per a tota* $f \in H^1(\mathbb{R}^n)$.

Recordem que $||g||_{1,\infty}$ denota la norma L^1 dèbil de g.

Per aconseguir el mateix resultat però per a nuclis senars, haurem de canviar l'operador maximal de Hardy-Littlewood per la seva iterada.

Teorema 1.2. *Sigui T un operador homogeni de Calderón-Zygmund amb nucli $\mathcal{C}^\infty$ senar* (0.2)*. Llavors, són equivalents:*

(a) $T^\star f(x) \leq CM^2(Tf)(x)$*, per a tot* $x \in \mathbb{R}^n$.

(b) Si $p \in (1,\infty)$ *i* $\omega \in A_p$ *llavors*

$$||T^\star f||_{L^p(\omega)} \leq C||Tf||_{L^p(\omega)}, \qquad \textit{per a tota } f \in L^p(\omega).$$

(c) Suposem que el desenvolupament de Ω *en esfèrics harmònics és*

$$\Omega(x) = \sum_{j=j_0}^{\infty} P_{2j+1}(x), \quad P_{2j_0+1} \neq 0\,.$$

Aleshores, per a cada j *existeix un polinomi homogeni* Q_{2j-2j_0} *de grau* $2j-2j_0$ *tal que* $P_{2j+1} = P_{2j_0+1}\, Q_{2j-2j_0}$ *i* $\sum_{j=j_0}^{\infty} \gamma_{2j+1} Q_{2j-2j_0}(\xi) \neq 0$*,* $\xi \in S^{n-1}$*, i* γ_{2j+1} *com a* (1.1).

És clar, tant al Teorema 1.1 com al Teorema 1.2, que la condició *(a)* implica *(b)* és una conseqüència de l'acotació de l'operador maximal de Hardy-Littlewood en els espais L^p amb pesos. La prova de *(c)* implica *(a)* en el Teorema 1.1 està feta en [MOV] i la mateixa implicació del Teorema 1.2 està provada a [MOPV]. Llavors el que s'ha de veure és que *(b)* implica *(c)* en els dos teoremes (i $(d) \Rightarrow (c)$ en el Teorema 1.1). Un dels punts claus de la demostració de la implicació $(b) \Rightarrow (c)$ pel cas $p = 2$ i $\omega = 1$ en [MOV] i [MOPV] és l'ús del Teorema de Plancherel per aconseguir una desigualtat puntual amb la que treballar. Per a $p \neq 2$ aconseguirem la mateixa desigualtat utilitzant propietats de la transformada de Fourier dels nuclis com a multiplicadors de L^p.

En primer lloc, treballem amb els multiplicadors de Fourier. Necessitem algunes eines per controlar les seves normes (veure el Lema 1.3). En la Secció 1.2 es prova $(b) \Rightarrow (c)$, per a operadors polinomials. El cas general es tracta a la Secció 1.3.

1.1 Multiplicadors

Necessitem més eines de multiplicadors a part del que s'ha explicat en els Preliminars.

Sigui $0 \leq \phi \leq 1$ una funció suau tal que $\phi(\xi) = 1$ si $|\xi| \leq \frac{1}{2}$, i $\phi(\xi) = 0$ si $|\xi| \geq 1$. Fixat $\xi_0 \in \mathbb{R}^n$, definim $\phi_\delta(\xi) = \phi(\frac{\xi-\xi_0}{\delta})$. Considerem $m \in L^\infty$ tal que m és contínua en un entorn de ξ_0 i amb $m(\xi_0) = 0$. Pel Teorema de Plancherel, és clar que la norma de $m\phi_\delta$ en $\mathcal{M}_2$ s'acosta a zero quan $\delta \to 0$. Ens preguntem si tenim el mateix en el cas de que m sigui un multiplicador L^p. Imposant certa regularitat a m, tenim una resposta positiva.

Lema 1.3. *Sigui* $\xi_0 \in \mathbb{R}^n$, $0 < \delta \leq \delta_0$ *i* $m \in \mathcal{M}_p \cap \mathcal{C}^n(B(\xi_0, \delta_0))$ *amb* $m(\xi_0) = 0$*. Sigui* $\phi \in \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}^n)$*,* $0 \leq \phi \leq 1$ *tal que* $\phi(\xi) = 1$ *si* $|\xi| \leq \frac{1}{2}$*, i* $\phi(\xi) = 0$ *si* $|\xi| \geq 1$*. Posem* $\phi_\delta(\xi) = \phi(\frac{\xi-\xi_0}{\delta})$ *i sigui* $T_{m\phi_\delta}$ *l'operador amb multiplicador* $m\phi_\delta$*.*

1. *Si* $\omega \in A_p$*,* $1 < p < \infty$*, llavors* $||T_{m\phi_\delta}||_{L^p(\omega)\to L^p(\omega)} \longrightarrow 0$*, si* $\delta \to 0$*.*
2. $||T_{m\phi_\delta}||_{L^1\to L^{1,\infty}} \longrightarrow 0$*, si* $\delta \to 0$*.*
3. $||T_{m\phi_\delta}||_{H^1\to L^1} \longrightarrow 0$*, si* $\delta \to 0$*.*

Per demostrar el Lema 1.3 utilitzarem aquest teorema de Kurtz i Wheeden. Seguint [KW], direm que una funció m pertany a la classe $M(s,l)$ si

$$m_{s,l} := \sup_{R>0} \left(R^{s|\alpha|-n} \int_{R<|x|<2R} |D^\alpha m(x)|^s \, dx \right)^{1/s} < +\infty, \text{ per a tot } |\alpha| \leq l, \tag{1.2}$$

on s és un número real més gran o igual que 1, l és un enter positiu i $\alpha = (\alpha_1, \ldots, \alpha_n)$ és un multiíndex d'enters no negatius.

Teorema 1.4 ([KW, p. 344])**.** *Sigui* $1 < s \leq 2$ *i* $m \in M(s,n)$*.*

1. *Si* $1 < p < \infty$ *i* $\omega \in A_p$*, aleshores existeix una constant* C*, independent de* f*, tal que*
$$||T_m f||_{L^p(\omega)} \leq C||f||_{L^p(\omega)}.$$
2. *Existeix una constant* C*, independent de* f *i de* λ*, tal que*
$$|\{x \in \mathbb{R}^n : |T_m f(x)| > \lambda\}| \leq \frac{C}{\lambda}\|f\|_{L^1}, \quad \lambda > 0.$$
3. *Existeix una constant* C*, independent de* f*, tal que*
$$||T_m f||_{L^1} \leq C||f||_{H^1}.$$

Analitzant la demostració veiem que, en tots els casos, la constant C que apareix en *1*, *2* i *3* del teorema previ depèn linealment de la constant $m_{s,n}$ definida a (1.2). Recalquem també que si $\omega = 1$ la prova es pot adaptar al cas $H^1 \to L^1$, i així obtenim l'apartat *3* que no està escrit explícitament en [KW].

Per la demostració del Teorema 1.4, seguim el mateix argument que a l'article mencionat. Triem una partició de la unitat

$$\sum_{j=-\infty}^{+\infty} \varphi(2^{-j}x) = 1, \quad x \neq 0,$$

on φ és una funció no negativa, infinitament diferenciable, suportada a $\frac{1}{2} < |x| < 2$. Sigui $m_j(x) = m(x)\varphi(2^{-j}x)$, tal que

$$m(x) = \sum_{j=-\infty}^{+\infty} m_j(x), \quad x \neq 0.$$

Observem que $m_j(x)$ té suport a $2^{j-1} < |x| < 2^{j+1}$ i que si $m \in M(s,n)$ i $|\alpha| \leq n$, llavors

$$\left(\int_{\mathbb{R}^n} |D^\alpha m_j(x)|^s\right)^{1/s} \leq C_m (2^j)^{\frac{n}{s}-|\alpha|}, \tag{1.3}$$

on denotem per C_m una constant independent de j que depèn linealment de $m_{s,n}$. Com és habitual, C_m pot ser diferent a cada pas de la demostració, pero sempre depèn linealment de $m_{s,n}$ i és independent de variables rellevants que s'estiguin considerant.
Observem també que $m_j \in L^1 \cap L^\infty$. Definim $k_j(x)$ com $k_j(x) := m_j^\vee(x)$, i sigui

$$m^N(x) = \sum_{j=-N}^{N} m_j(x), \quad K_N(x) = (m^N)^\vee(x) = \sum_{j=-N}^{N} k_j(x).$$

Així doncs, $||m^N||_\infty \leq C$, uniformement en N, i $m^N(x) \longrightarrow m(x)$, $x \neq 0$, si $N \to \infty$. Definim $T_N f$ com $T_N f := (m^N \widehat{f})^\vee$, i així $T_N = f * K_N$ per a $f \in L^2$.
Necessitem demostrar un lema previ que mostra com les condicions sobre m es traslladen a condicions sobre K_N.

Lema 1.5. *Sigui $1 < s \leq 2$, $m \in M(s,n)$, i sigui K_N com a dalt. Si d és un enter tal que $0 < d \leq n$, $1 < t \leq s$, $\frac{n}{t} < d < \frac{n}{t} + 1$, i $1 \leq p \leq t'$, on t' és tal que $\frac{1}{t} + \frac{1}{t'} = 1$, llavors*

$$\left(\int_{R<|x|<2R} |K_N(x-y) - K_N(x)|^p dx\right)^{\frac{1}{p}} \leq C_m R^{-d+\frac{n}{p}-\frac{n}{t'}} |y|^{d-\frac{n}{t}},$$

per a tot $|y| < \frac{R}{2}$, amb C_m independent de N, R i y.

Prova del Lema 1.5. Recordem que $K_N(x) = \sum_{j=-N}^{N} k_j(x)$, així doncs

$$\left(\int_{R<|x|<2R} |K_N(x-y) - K_N(x)|^p dx\right)^{\frac{1}{p}} \leq \sum_j \left(\int_{R<|x|<2R} |k_j(x-y) - k_j(x)|^p dx\right)^{\frac{1}{p}}.$$

Acotem la integral de la diferència dels k_j's:

$$\begin{aligned}
&\left(\int_{R<|x|<2R} |k_j(x-y) - k_j(x)|^p dx\right)^{\frac{1}{p}} \\
&= \left(\int_{R<|x|<2R} |\{m_j(x)(e^{ix\cdot y} - 1)\}^\vee|^p dx\right)^{\frac{1}{p}} \\
&\leq C R^{-d} \left(\int_{R<|x|<2R} ||x|^d \{m_j(x)(e^{ix\cdot y} - 1)\}^\vee|^p dx\right)^{\frac{1}{p}} \\
&\leq C R^{\frac{n}{p}-d} \sum_{|\alpha|=d} \left(R^{-n} \int_{R<|x|<2R} |x^\alpha \{m_j(x)(e^{ix\cdot y} - 1)\}^\vee|^p dx\right)^{\frac{1}{p}}
\end{aligned}$$

$$\leq CR^{\frac{n}{p}-d}\sum_{|\alpha|=d}\left(R^{-n}\int_{R<|x|<2R}|\{D^{\alpha}[m_j(x)(e^{ix\cdot y}-1)]\}^{\vee}|^p\right)^{\frac{1}{p}}$$
$$\leq CR^{\frac{n}{p}-d}\sum_{|\alpha|=d}\left(R^{-n}\int_{R<|x|<2R}|\{D^{\alpha}[m_j(x)(e^{ix\cdot y}-1)]\}^{\vee}|^{t'}\right)^{\frac{1}{t'}}$$
$$\leq CR^{\frac{n}{p}-d-\frac{n}{t'}}\sum_{|\alpha|=d}\left(\int_{\mathbb{R}^n}|D^{\alpha}[m_j(x)(e^{ix\cdot y}-1)]|^t dx\right)^{\frac{1}{t}}$$
$$\leq CR^{\frac{n}{p}-d-\frac{n}{t'}}\sum_{|\beta|+|\gamma|=d}\left(\int_{\mathbb{R}^n}|D^{\beta}m_j(x)D^{\gamma}(e^{ix\cdot y}-1)|^t dx\right)^{\frac{1}{t}},$$

on hem utilitzat que $(m_j)^{\vee}=k_j$, la desigualtat de Hölder i el Teorema de Hausdorff-Young. Considerem primer el cas en que $|\gamma|=0$ i $|\beta|=d$. Com que $|e^{ix\cdot y}-1|\leq |x||y|$ i utilitzant la cota (1.3),

$$\begin{aligned}\left(\int_{\mathbb{R}^n}|(D^{\beta}m_j(x))(e^{ix\cdot y}-1)|^t dx\right)^{\frac{1}{t}} &\leq \left(\int_{\mathbb{R}^n}||x||y|D^{\beta}m_j(x)|^t dx\right)^{\frac{1}{t}}\\ &\leq C_m 2^j|y|(2^j)^{\frac{n}{t}-d}\\ &= C_m|y|(2^j)^{\frac{n}{t}-d+1}.\end{aligned}$$

Si $|\gamma|>0$, llavors $|\beta|=d-|\gamma|$ i $|D^{\gamma}(e^{ix\cdot y}-1)|\leq |y|^{|\gamma|}$, per tant

$$\begin{aligned}\left(\int_{\mathbb{R}^n}|D^{\beta}m_j(x)D^{\gamma}(e^{ix\cdot y}-1)|^t dx\right)^{\frac{1}{t}} &\leq \left(\int_{\mathbb{R}^n}||y|^{|\gamma|}D^{\beta}m_j(x)|^t dx\right)^{\frac{1}{t}}\\ &\leq C_m|y|^{|\gamma|}(2^j)^{\frac{n}{t}-|\beta|}\\ &= C_m|y|^{|\gamma|}(2^j)^{\frac{n}{t}-d+|\gamma|}.\end{aligned}$$

Amb les dues cotes, tenim

$$\left(\int_{R<|x|<2R}|k_j(x-y)-k_j(x)|^p dx\right)^{\frac{1}{p}}\leq C_m R^{\frac{n}{p}-d-\frac{n}{t'}}\sum_{\iota=1}^{d}|y|^{\iota}(2^j)^{\frac{n}{t}-d+\iota}.$$

Observem que si $2^j\leq |y|^{-1}$,

$$|y|^m(2^j)^{\frac{n}{t}-d+m}\leq |y|(2^j)^{\frac{n}{t}-d+1},$$

llavors per a $|y|\leq 2^{-j}$ l'estimació queda

$$\left(\int_{R<|x|<2R}|k_j(x-y)-k_j(x)|^p dx\right)^{\frac{1}{p}}\leq C_m R^{\frac{n}{p}-d-\frac{n}{t'}}|y|(2^j)^{\frac{n}{t}-d+1}.$$

Per als altres valors de j, aquesta cota no és prou bona. En necessitem una altra. Així,

$$\begin{aligned}
&\left(\int_{R<|x|<2R} |k_j(x-y)-k_j(x)|^p dx\right)^{\frac{1}{p}}\\
&\leq \left(\int_{R<|x|<2R} |k_j(x-y)|^p dx\right)^{\frac{1}{p}} + \left(\int_{R<|x|<2R} |k_j(x)|^p dx\right)^{\frac{1}{p}}\\
&\leq 2\left(\int_{\frac{R}{2}<|x|<\frac{5R}{2}} |k_j(x)|^p dx\right)^{\frac{1}{p}},
\end{aligned}$$

ja que $|y| < \frac{R}{2}$ i $R < |x| < 2R$ implica que $\frac{R}{2} < |x-y| < \frac{5R}{2}$.

Sigui d un enter tal que $0 < d \leq n$ i $1 < t \leq s$ tal que $p \leq t'$. És fàcil veure que $m \in M(t,d)$ amb $m_{t,d} \leq C m_{s,n}$. Sigui $x^\alpha = x_1^{\alpha_1} \cdots x_n^{\alpha_n}$. Llavors

$$\begin{aligned}
\left(\int_{\frac{R}{2}<|x|<\frac{5R}{2}} |k_j(x)|^p dx\right)^{\frac{1}{p}} &\leq CR^{-d}\left(\int_{\frac{R}{2}<|x|<\frac{5R}{2}} ||x|^d k_j(x)|^p dx\right)^{\frac{1}{p}}\\
&\leq CR^{-d}\sum_{|\alpha|=d}\left(\int_{\frac{R}{2}<|x|<\frac{5R}{2}} |x^\alpha k_j(x)|^p dx\right)^{\frac{1}{p}}\\
&= CR^{-d+\frac{n}{p}}\sum_{|\alpha|=d}\left(R^{-n}\int_{\frac{R}{2}<|x|<\frac{5R}{2}} |(D^\alpha m_j)^\vee(x)|^p dx\right)^{\frac{1}{p}}\\
&\leq CR^{-d+\frac{n}{p}}\sum_{|\alpha|=d}\left(R^{-n}\int_{\frac{R}{2}<|x|<\frac{5R}{2}} |(D^\alpha m_j)^\vee(x)|^{t'} dx\right)^{\frac{1}{t'}}\\
&\leq CR^{-d+\frac{n}{p}-\frac{n}{t'}}\sum_{|\alpha|=d}\left(\int_{\mathbb{R}^n} |(D^\alpha m_j)(x)|^t dx\right)^{\frac{1}{t}}\\
&\leq C_m R^{-d+\frac{n}{p}-\frac{n}{t'}}(2^j)^{\frac{n}{t}-d},
\end{aligned} \tag{1.4}$$

argumentant com abans.

Utilitzant aquestes estimacions, obtenim el resultat que volíem

$$\begin{aligned}
&\left(\int_{R<|x|<2R} |K_N(x-y)-K_N(x)|^p dx\right)^{\frac{1}{p}}\\
&\leq C_m \sum_{2^j \leq |y|^{-1}} R^{\frac{n}{p}-d-\frac{n}{t'}}|y|(2^j)^{\frac{n}{t}-d+1} + C_m \sum_{2^j \geq |y|^{-1}} R^{\frac{n}{p}-d-\frac{n}{t'}}(2^j)^{\frac{n}{t}-d}\\
&\leq C_m R^{\frac{n}{p}-d-\frac{n}{t'}}|y|^{d-\frac{n}{t}},
\end{aligned}$$

on $\frac{n}{t} < d < \frac{n}{t} + 1$. □

Observació 1. També tenim que

$$\left(\int_{R<|x|<2R} |K_N(x)|^p dx \right)^{\frac{1}{p}} \leq C_m R^{\frac{n}{p}-n}.$$

Això s'obté de (1.4) amb $d = n$ i la cota

$$\left(\int_{R<|x|<2R} |k_j(x)|^p dx \right)^{\frac{1}{p}} \leq C_m 2^{jn} R^{\frac{n}{p}},$$

que és una conseqüència de $|k_j(x)| = |(m_j)^{\vee}(x)| \leq ||m_j||_1 \leq C_m 2^{jn}$.

Observació 2. Amb les mateixes suposicions, podem reemplaçar el domini d'integració en el Lema 1.5 per $\{x \in \mathbb{R}^n : R < |x|\}$, és a dir,

$$\left(\int_{R<|x|} |K_N(x-y) - K_N(x)|^p \right)^{\frac{1}{p}} \leq C_m R^{-d+\frac{n}{p}-\frac{n}{t'}} |y|^{d-\frac{n}{t}}.$$

Observació 3. Triem $t \leq s$ tal que $\frac{n}{t} < n < \frac{n}{t} + 1$. Per l'Observació 2 amb $p = 1$ i $R = 2|y|$, tenim

$$\int_{|x|>2|y|} |K_N(x-y) - K_N(x)| dx \leq C_m (2|y|)^{-\frac{n}{t'}} |y|^{n-\frac{n}{t}} = C_m.$$

Aleshores, els nuclis K_N satisfan la condició de Hörmander uniformement en N

$$\int_{|x|>2|y|} |K(x-y) - K(x)| dx \leq C_m, \quad \text{per a tot } y \neq 0,$$

i així $T_N f = K_N * f$ està acotat en L^p, uniformement en N, si $1 < p < \infty$.
Per a $f \in \mathcal{S}$ tenim $Tf = (m\widehat{f})^{\vee}$. Llavors

$$||Tf - T_N f||_{\infty} \leq ||(m - m^N)\widehat{f}||_1 \longrightarrow 0$$

ja que m^N convergeix puntualment i afitadament a m. Llavors, aplicant el Lema de Fatou, obtenim

$$||Tf||_p \leq C_m ||f||_p,$$

si $f \in \mathcal{S}$, on C_m és una cota uniforme per T_N en L^p. El resultat s'estén a totes les $f \in L^p$ per continuïtat.

Per demostrar el Teorema 1.4 necessitem tres resultats que són ben coneguts.

Lema 1.6. *Si $0 < r < p < \infty$ i $\omega \in A_{p/r}$, llavors*

$$||M_r(f)||_{p,\omega} \leq C ||f||_{p,\omega},$$

on $M_r(f)(x) := (M(f^r))^{1/r}(x)$ i M és l'operador maximal de Hardy-Littlewood.

Lema 1.7. *Sigui*

$$f^\sharp(x) = \sup_{Q \ni x} \frac{1}{Q} \int_Q |f(y) - f_Q| dy,$$

on $f_Q = |Q|^{-1} \int_Q f(z)dz$. *Sigui* $0 < p < \infty$ *i* $\omega \in A_\infty$. *Llavors*

$$||M(f)||_{L^p(\omega)} \leq C ||f^\sharp||_{L^p(\omega)}$$

amb C *independent de* f.

Lema 1.8. *Sigui* $1 < r \leq q < \infty$ *i siguin* ω_0 *i* ω_1 *dos pesos positius. Si* T *és un operador lineal acotat de* $L^r(\omega_0)$ *a ell mateix i de* $L^q(\omega_1)$ *a ell mateix, llavors* T *és acotat de* $L^p(\omega)$ *a ell mateix per a* $r \leq p \leq q$ *i* $\omega = \omega_0^t \omega_1^{1-t}$, *amb* $t = \frac{q-p}{q-r}$ *si* $r \neq q$ *i* $0 \leq t \leq 1$ *si* $r = q$.

El Lema 1.6 és un corol·lari immediat dels resultats que trobem al treball de Muckenhoupt [Mu]. El Lema 1.7 està demostrat en l'article de Córdoba i Fefferman [CF]. I el Lema 1.8 és un cas especial d'interpolació amb canvi de mesures que està provat a [SW1].

Prova del Teorema 1.4. Per veure l'apartat 1, fixem $p > 1$ i $\omega \in A_p$. Triem un $r \leq s$ tal que $\frac{n}{r}$ no sigui un enter, $1 < r < p$ i $\omega \in A_{p/r}$. Existeix un enter $d \leq n$ tal que $\frac{n}{r} < d < \frac{n}{r} + 1$. Veurem que

$$(T_N f)^\sharp(x) \leq C_m M_r f(x) \tag{1.5}$$

amb C independent de f i de N. Fixem $x \in \mathbb{R}^n$ i sigui Q un cub centrat en x amb diàmetre δ. Escrivim

$$f(y) = f_0(y) + \sum_{j=1}^{\infty} f_j(y),$$

on

$$f_0(y) = f(y)\chi(\{y \in \mathbb{R}^n : |x-y| \leq 2\delta\})$$

i

$$f_j(y) = f(y)\chi(\{y \in \mathbb{R}^n : 2^j\delta < |x-y| \leq 2^{j+1}\delta\}), \quad j = 1, 2 \ldots$$

Pels $y \in Q$,

$$(K_N * f)(y) = (K_N * f_0)(y) + \sum_{j=1}^{\infty} (K_N * f_j)(y).$$

Utilitzant la desigualtat de Hölder's i l'Observació 3, per a qualsevol $q > 1$ tenim

$$\begin{aligned} \frac{1}{|Q|} \int_Q |(K_N * f_0)| dy &\leq \left(\frac{1}{|Q|} \int_Q |(K_N * f_0)(y)|^q dy \right)^{\frac{1}{q}} \\ &\leq C_m \frac{||f_0||_q}{|Q|^{\frac{1}{q}}} \\ &\leq C_m M_q(f)(x), \end{aligned}$$

amb C independent de N. Per a qualsevol j,

$$(K_N * f_j)(y) = (K_N * f_j)(x) + \int \{K_N(y-z) - K_N(x-z)\} f_j(z)dz.$$

Anomenem c_j al primer terme de la banda dreta, i ε_j al segon. Fixem-nos que c_j és independent de y i

$$\begin{aligned}
|\varepsilon_j| &\leq \int_{2^j\delta<|x-z|\leq 2^{j+1}\delta} |K_N(y-z) - K_N(x-z)||f(z)|dz \\
&\leq \left(\int_{2^j\delta<|x-z|\leq 2^{j+1}\delta} |K_N(y-z) - K_N(x-z)|^{r'} dz \right)^{\frac{1}{r'}} \left(\int_{|x-z|\leq 2^{j+1}\delta} |f(z)|^r dz \right)^{\frac{1}{r}} \\
&\leq C_m |x-y|^{d-\frac{n}{r}} (2^j\delta)^{-d} (2^{j+1}\delta)^{\frac{n}{r}} \left[(2^{j+1}\delta)^{-n} \int_{|x-z|\leq 2^{j+1}\delta} |f(z)|^r dz \right]^{\frac{1}{r}} \\
&\leq C_m (2^j)^{\frac{n}{r}-d} M_r(f)(x),
\end{aligned}$$

on hem aplicat el Lema 1.5 amb $p = r'$ i $t = r$ i hem utilitzat que $|x-y| < \delta$. Per tant,

$$\begin{aligned}
\frac{1}{|Q|}\int_Q \left| (K_N * f)(y) - \sum_{j=1}^{\infty} c_j \right| dy &= \frac{1}{|Q|}\int_Q \left| \sum_{j=0}^{\infty} (K_N * f_j)(y) - \sum_{j=1}^{\infty} c_j \right| dy \\
&\leq \frac{1}{|Q|} |(K_N * f_0)(y)|dy + \sum_{j=1}^{\infty} \frac{1}{|Q|}\int_Q |(K_N * f_j)(y) - c_j|dy \\
&\leq C_m M_r(f)(x) + C_m \sum_{j=1}^{\infty} (2^j)^{\frac{n}{r}-d} M_r(f)(x) \\
&= C_m M_r(f)(x),
\end{aligned}$$

ja que $\frac{n}{r} - d < 0$. Aquesta estimació és certa per a qualsevol cub amb centre en x, o sigui que tenim (1.5). Utilitzant el Lema 1.7 en el segon pas, 1.5 en el tercer, i 1.6 en l'última desigualtat, obtenim

$$||(K_N * f)||_{L^p(\omega)} \leq ||M(K_N * f)||_{L^p(\omega)} \leq C||(K_N * f)^\sharp||_{L^p(\omega)} \leq C_m ||M_r(f)||_{L^p(\omega)} \leq C_m ||f||_{L^p(\omega)}$$

uniformement en N. Argumentant com en l'Observació 3, tenim

$$||Tf||_{L^p(\omega)} = ||(K * f)||_{L^p(\omega)} \leq C_m ||f||_{L^p(\omega)},$$

tal i com volíem.

Per la demostració de l'ítem 2, fixem una funció $f \in L^1$ no negativa i un $\lambda > 0$. Aplicant la descomposició de Calderón-Zygmund a f, obtenim una successió de cubs disjunts $\{Q_k\}$ i unes funcions g i b, tals que $f(x) = g(x) + b(x)$, que satisfan

(i) $|Q_k| \leq \frac{C}{\lambda} \int_{Q_k} f(y)dy$,

(ii) $||g||_2^2 \le \lambda ||f||_1$,

(iii) $b(y) = f(y) - \frac{1}{|Q_k|}\int_{Q_k} f(z)dz$ si $y \in Q_k$, $\mathrm{supp}(b) \subset \cup Q_k$ i $\int_{Q_k} b(y)dy = 0$.

Aleshores,

$$|\{x \in \mathbb{R}^n : |T_N f(x)| > 2\lambda\}| \le |\{x \in \mathbb{R}^n : |T_N g(x) > \lambda|\}| + |\{x \in \mathbb{R}^n : |T_N b(x) > \lambda|\}|.$$

Apliquem l'apartat 1 del Teorema 1.4 al primer terme de la banda dreta amb $\omega = 1$. Llavors, utilitzant (ii), obtenim

$$|\{x \in \mathbb{R}^n : |T_N g(x)| > \lambda\}| \le \frac{C_m}{\lambda^2}||g||_2^2 \le \frac{C_m}{\lambda}||f||_1.$$

Sigui $2Q_k$ el cub amb el mateix centre que Q_k i costat doble. Alehores, utilitzant (i), tenim

$$\begin{aligned} |\cup 2Q_k| &\le \sum |2Q_k| \le C \sum |Q_k| \\ &\le C \sum \frac{C}{\lambda}\int_{Q_k} f(y)dy \le \frac{C}{\lambda}||f||_1. \end{aligned}$$

Així doncs, només ens falta veure que

$$|\{x \notin \cup 2Q_k : |T_N b(x)| > \lambda\}| \le \frac{C}{\lambda}||f||_1.$$

Siguin y_k i δ_k el centre i el diàmetre de Q_k, respectivament. Llavors

$$\begin{aligned} \int_{x\notin \cup 2Q_k} |T_N b(x)|dx &= \int_{x\notin\cup 2Q_k} \left|\int_{\mathbb{R}^n} K_N(x-y)b(y)dy\right| dx \\ &= \int_{x\notin\cup 2Q_k} \left|\sum_k \int_{Q_k} K_N(x-y)b(y)dy\right| dx \\ &= \int_{x\notin\cup 2Q_k} \left|\sum_k \int_{Q_k} [K_N(x-y) - K_N(x-y_k)]b(y)dy]\right| dx \\ &\le \sum_k \int_{Q_k} \left(\int_{x\notin 2Q_k} |K_N(x-y) - K_N(x-y_k)|dx\right) |b(y)|dy. \end{aligned}$$

Veurem que la integral interior està acotada per una constant independent de k. Aleshores, utilitzant (iii),

$$\begin{aligned} |\{x \notin \cup 2Q_k : |T_N b(x)| > \lambda\}| &\le \frac{1}{\lambda}\int_{x\notin\cup 2Q_k} |T_N b(x)|dx \\ &\le \frac{C}{\lambda}\sum \int_{Q_k} f(x)dx + \frac{C}{\lambda}\sum \int_{Q_k}\left(\frac{1}{|Q_k|}\int_{Q_k} f(z)dz\right)dx \\ &\le \frac{C}{\lambda}||f||_1 + \frac{C}{\lambda}\sum\int_{Q_k} f(z)dz \\ &\le \frac{2C}{\lambda}||f||_1. \end{aligned}$$

Per tant,

$$|\{x \in \mathbb{R}^n : |T_N f(x)| > \lambda\}| \leq \frac{C}{\lambda}||f||_1, \tag{1.6}$$

amb una constant independent de N, de f i de λ. Si $f \in \mathcal{S}$, podem escriure $f = f^+ - f^-$, on f^+ i f^- són de L^1 i no negatives. Llavors la desigualtat es compleix per a $f \in \mathcal{S}$. Aleshores

$$\begin{aligned} |\{x \in \mathbb{R}^n : |Tf(x)| > \lambda\}| &\leq |\{x \in \mathbb{R}^n : |T_N f(x)| + |Tf(x) - T_N f(x)| > \lambda\}| \\ &\leq |\{x \in \mathbb{R}^n : |T_N f(x)| > \frac{\lambda}{2}\}| + |\{x \in \mathbb{R}^n : |Tf(x) - T_N f(x)| > \frac{\lambda}{2}\}|. \end{aligned}$$

Com que $T_N f$ convergeix uniformement a Tf si $f \in \mathcal{S}$, i escollint N prou gran, el segon terme de la banda dreta és zero. Llavors, aplicant (1.6),

$$|\{x \in \mathbb{R}^n : |Tf(x)| > \lambda\}| \leq \frac{C_m}{\lambda}||f||_1,$$

si $f \in \mathcal{S}$, que es pot estendre a L^1.

Per completar la demostració del segon apartat, hem de veure que

$$\int_{x \notin 2Q_k} |K_N(x-y) - K_N(x-y_k)| dx \leq C_m,$$

si $y \in Q_k$, amb C_m independent de k i de N.

Triem $r \leq s$ tal que $\frac{n}{r} < n < \frac{n}{r} + 1$. Veiem que si $x \notin 2Q_k$, es compleix que $|x - y_k| > 2\delta_k$. Llavors, utilitzant el 1.5 amb $w = 1$, $p = r'$ i $t = r$, tenim per a $y \in Q_k$

$$\begin{aligned} &\int_{|x-y_k|>2\delta_k} |K_N(x-y) - K_N(x-y_k)| dx \\ &= \sum_{j=1}^{\infty} \int_{2^j\delta_k<|x-y_k|\leq 2^{j+1}\delta_k} |K_N(x-y) - K_N(x-y_k)| dx \\ &\leq C \sum_{j=1}^{\infty} \left(\int_{2^j\delta_k<|x-y_k|\leq 2^{j+1}\delta_k} |K_N(x-y) - K_N(x-y_k)|^{r'} dx \right)^{\frac{1}{r'}} \\ &\leq C_m \sum_{j=1}^{\infty} (2^j)^{-n} \\ &\leq C_m, \end{aligned}$$

amb C_m independent de k i N.

Ara, per demostrar l'ítem 3, notem que per l'Observació 1 tenim que K_N satisfà les condicions de mida

$$\sup_{R>0} \int_{R\leq|x|\leq 2R} |K_N(x)| dx \leq C_m < \infty \tag{1.7}$$

i

$$\sup_{0<R<\infty} \frac{1}{R} \int_{|x|\le R} |K_N(x)||x|dx \le C_m < \infty. \tag{1.8}$$

Amb (1.7) i com que T_N està acotat uniformement en L^2, podem aplicar [Gr1, Prop. 4.4.4.] que diu que K_N satisfà la condició de cancel·lació

$$\sup_{0<R_1<R_2<\infty} \left| \int_{R_1<|x|<R_2} K_N(x)dx \right| \le C_m < \infty. \tag{1.9}$$

Ara, com que K_N satisfà (1.8), (1.9) i, per l'Observació 3 també la condició de Hörmander

$$\sup_{y\neq 0} \int_{|x|>2|y|} |K(x-y) - K(x)|dx \le C_m < \infty,$$

podem aplicar [Gr2, Thm 6.7.1] i obtenim que

$$||T_N f||_{L^1} \le C_m ||f||_{H^1}, \quad \text{si } f \in H^1(\mathbb{R}^n),$$

on C_m només depèn de les tres condicions anteriors i de la dimensió n. Aleshores, argumentant com a l'Observació 3, com que m^N convergeix puntualment i acotadament a m, acoseguim el resultat que volem

$$||Tf||_{L^1} \le C_m ||f||_{H^1}, \quad \text{si } f \in H^1(\mathbb{R}^n).$$

□

Prova del Lema 1.3. Utilitzant el Teorema 1.4 només hem de veure que el multiplicador $m\phi_\delta$ està en $M(s,n)$ per a algun $1 < s \le 2$, i la constant $m_{s,n}$ tendeix a 0 quan δ tendeix a 0.

Suposem que $\xi_0 \neq 0$ i que $\delta < \delta_0$ és prou petit. Utilitzant la fórmula de Leibniz, per a $|\alpha| \le n$ tenim

$$\begin{aligned}
&\sup_{R>0} \left(R^{s|\alpha|-n} \int_{R<|\xi|<2R} |D^\alpha(m\phi_\delta)(\xi)|^s \, d\xi \right)^{1/s} \\
&= \sup_{R>0} \left(R^{s|\alpha|-n} \int_{\{R<|\xi|<2R\}\cap B(\xi_0,\delta)} |D^\alpha(m\phi_\delta)(\xi)|^s \, d\xi \right)^{1/s} \\
&\le C|\xi_0|^{|\alpha|-\frac{n}{s}} \left(\int_{B(\xi_0,\delta)} |D^\alpha(m\phi_\delta)(\xi)|^s \, d\xi \right)^{1/s} \\
&\le C|\xi_0|^{|\alpha|-\frac{n}{s}} \left(\sum_{\beta_i\le\alpha_i,\, 1\le i\le n} \binom{\alpha_1}{\beta_1}\binom{\alpha_2}{\beta_2}\cdots\binom{\alpha_n}{\beta_n} \int_{B(\xi_0,\delta)} |D^{\alpha-\beta}(m)(\xi) D^\beta(\phi_\delta)(\xi)|^s \, d\xi \right)^{1/s}.
\end{aligned}$$

Ara acotarem cada terme de la suma anterior. Per fer-ho considerarem diferents casos. En tots ells farem servir que per a qualsevol multiíndex α tenim que $|D^\alpha\phi_\delta(\xi)| \lesssim \frac{1}{\delta^{|\alpha|}}$ i que el mòdul de continuïtat de m, que denotem $\omega(m,\xi_0,\delta)$, satisfà $\omega(m,\xi_0,\delta) \le C\delta$.

Cas 1. $|\alpha| = n$. Per a $\beta = \alpha$ es té

$$\begin{aligned}\int_{B(\xi_0,\delta)} |D^{\alpha-\beta}(m)(\xi)D^\beta(\phi_\delta)(\xi)|^s\,d\xi &= \int_{B(\xi_0,\delta)} |m(\xi)|^s|D^\alpha(\phi_\delta)(\xi)|^s\,d\xi\\ &\le C\frac{1}{\delta^{ns}}|\omega(m,\xi_0,\delta)|^s\delta^n\\ &\le C\delta^{s+n-ns}\end{aligned}$$

i aquest terme tendeix a 0 quan δ tendeix a 0 prenent $1 < s < \frac{n}{n-1}$. Pels altres termes, o sigui quan $\alpha \ne \beta$, tenim

$$\begin{aligned}\int_{B(\xi_0,\delta)} |D^{\alpha-\beta}(m)(\xi)D^\beta(\phi_\delta)(\xi)|^s d\xi &\le C\frac{1}{\delta^{|\beta|s}}\delta^n\\ &= C\delta^{n-s|\beta|}\\ &\le C\delta^{s+n-ns},\end{aligned}$$

on les derivades de m estan acotades per una constant, i l'última desigualtat es compleix si δ és prou petit. Així doncs, si $1 < s < \frac{n}{n-1}$, aquest terme tendeix a 0 quan δ tendeix a 0.

Cas 2. $|\alpha| = k < n$. Si $|\beta| = |\alpha|$, utilitzant l'acotació del mòdul de continuïtat de m tenim

$$\begin{aligned}\int_{B(\xi_0,\delta)} |D^{\alpha-\beta}(m)(\xi)D^\beta(\phi_\delta)(\xi)|^s\,d\xi &= \int_{B(\xi_0,\delta)} |m(\xi)|^s|D^\alpha(\phi_\delta)(\xi)|^s d\xi\\ &\le C\frac{1}{\delta^{ks}}|\omega(m,\xi_0,\delta)|^s\delta^n\\ &= C\delta^{s+n-ks}\\ &\le C\delta^{s+n-ns}\end{aligned}$$

i altre cop, aquest terme tendeix a 0 quan δ tendeix 0, per a $1 < s < \frac{n}{n-1}$.

Finalment, si $|\beta| < |\alpha|$, obtenim la mateixa cota.

$$\begin{aligned}\int_{B(\xi_0,\delta)} |D^{\alpha-\beta}(m)(\xi)D^\beta(\phi_\delta)(\xi)|^s d\xi &\le C\frac{1}{\delta^{|\beta|s}}\delta^n\\ &= C\delta^{n-s|\beta|}\\ &\le C\delta^{s+n-ns}.\end{aligned}$$

Quan $\xi_0 = 0$ tenim

$$\begin{aligned}&\sup_{R>0}\left(R^{s|\alpha|-n}\int_{R<|\xi|<2R}|D^\alpha(m\phi_\delta)(\xi)|^s d\xi\right)^{1/s}\\ &= \sup_{\delta\ge R>0}\left(R^{s|\alpha|-n}\int_{R<|\xi|<2R}|D^\alpha(m\phi_\delta)(\xi)|^s d\xi\right)^{1/s}.\end{aligned}$$

Observem que si $|\alpha| > 0$, $D^\alpha \phi_\delta$ viu a $\{\delta/2 \le |\xi| \le \delta\}$. Aleshores, càlculs similars completen la demostració. □

Per demostrar el primer cas del Lema 1.3 hi ha un altre argument fet per J. Duoandikoetxea. Li agraïm que ens donés la idea pel següent lema. De fet, només ens fa falta suposar que el multiplicador m és continu.

Lema 1.9. *Siguin $\xi_0 \in \mathbb{R}^n$, $0 < \delta \le \delta_0$, $1 < q < 2$ i $m \in \mathcal{M}_q \cap \mathcal{C}(B(\xi_0, \delta_0))$ amb $m(\xi_0) = 0$. Posem $\phi_\delta(\xi)$ com abans i sigui $T_{m\phi_\delta}$ l'operador amb multiplicador $m\phi_\delta$.*

(a) Per a tot $p \in (q, 2)$ tenim

$$\|T_{m\phi_\delta}\|_{L^p \to L^p} \longrightarrow 0, \quad \text{quan } \delta \to 0.$$

(b) Sigui $\omega \in A_p$ amb $p \in (q, 2)$ i sigui $s > 1$ tal que $\omega^s \in A_p$. Si m és un multiplicador $L^p(\omega^s)$, aleshores

$$\|T_{m\phi_\delta}\|_{L^p(\omega) \to L^p(\omega)} \longrightarrow 0, \quad \text{quan } \delta \to 0.$$

Nota. És clar que tenim un resultat similar per a $2 < p < q$.

Demostració. Observem que $||T_{m\phi_\delta}||_{L^2 \to L^2} = \|m\phi_\delta\|_\infty = \varepsilon(\delta)$ i $\varepsilon(\delta) \to 0$ quan $\delta \to 0$ ja que m és contínua en ξ_0. Per altra banda, $\|m\phi_\delta\|_{\mathcal{M}_q} \le \|\phi_\delta^\vee\|_{L^1} \|m\|_{\mathcal{M}_q} = C\|m\|_{\mathcal{M}_q}$, on C és una constant independent de δ. O sigui que per a tot $\delta > 0$

$$\|T_{m\phi_\delta} f\|_q \le M\|f\|_q.$$

Llavors, aplicant el Teorema de Riesz-Thorin (e.g. [Gr1, p. 34]), per a tot $p \in (q, 2)$ ($\frac{1}{p} = \frac{1-\theta}{2} + \frac{\theta}{q}$) tenim

$$\|T_{m\phi_\delta} f\|_p \le M^{1-\theta} \varepsilon(\delta)^\theta \|f\|_p = \varepsilon_1(\delta)\|f\|_p, \tag{1.10}$$

on $\varepsilon_1(\delta) \to 0$ quan $\delta \to 0$ i (a) queda demostrat. Per veure (b), com que $\omega^s \in A_p$ i ϕ_δ és una funció de $\mathcal{C}^\infty$ a suport compacte, veiem que

$$\|T_{m\phi_\delta} f\|_{L^p(\omega^s)} \le C\|f\|_{L^p(\omega^s)}, \tag{1.11}$$

on es pot comprovar que C és una constant independent de δ. Finalment, per (1.10) i (1.11), aplicant el Teorema d'interpolació de Stein-Weiss amb canvi de mesura (e.g. [BeL, p. 115]), obtenim

$$\|T_{m\phi_\delta} f\|_{L^p(\omega)} \le C^{1/s} \varepsilon_1(\delta)^{1-1/s} \|f\|_{L^p(\omega)}$$

tal i com volíem. □

Ens preguntem si és possible obtenir acotació en la norma $L^q(\omega)$ amb les mateixes suposicions que en el Lema 1.9, o sigui, si també és veritat $\|T_{m\phi_\delta}\|_{L^q(\omega) \to L^q(\omega)} \longrightarrow 0$ quan $\delta \to 0$.

1.2 El cas polinomial finit

Tal i com hem remarcat al principi del capítol, per tenir una demostració completa dels Teoremes 1.1 i 1.2 només queda veure que *(b)* implica *(c)* (i *(d)* implica *(c)* en el Teorema 1.1). El procediment per aconseguir-ho segueix essencialment els arguments utilitzats en [MOV] i [MOPV] i que ja hem detallat en els Preliminars. La principal dificultat que hem de treballar és que per a $p \neq 2$, no podem aplicar el Teorema de Plancherel. El que fem és reemplaçar-lo per un argument relacionat amb els multiplicadors de Fourier.

1.2.1 El cas parell

Comencem amb la prova de que *(b)* implica *(c)* en el Teorema 1.1 pel cas en que $\omega = 1$. Després veurem com adaptar aquesta demostració al cas amb pesos, al cas d'operadors amb nucli senar i al cas L^1 dèbil. Així, suposem que T és un operador polinomial parell amb nucli

$$K(x) = \frac{\Omega(x)}{|x|^n} = \frac{P_2(x)}{|x|^{2+n}} + \frac{P_4(x)}{|x|^{4+n}} + \cdots + \frac{P_{2N}(x)}{|x|^{2N+n}}, \quad x \neq 0,$$

on P_{2j} és un polinomi homogeni harmònic de grau $2j$. Cada terme té per multiplicador (veure [St, p. 73])

$$\left(\text{v.p. } \frac{P_{2j}(x)}{|x|^{2j+n}}\right)^{\wedge}(\xi) = \gamma_{2j} \frac{P_{2j}(\xi)}{|\xi|^{2j+n}}.$$

Llavors,

$$\widehat{\text{v.p. } K}(\xi) = \frac{Q(\xi)}{|\xi|^{2N}}, \qquad \xi \neq 0,$$

on Q és el polinomi homogeni de grau $2N$ definit per

$$Q(x) = \gamma_2 P_2(x)|x|^{2N-2} + \cdots + \gamma_{2j} P_{2j}(x)|x|^{2n-2j} + \cdots + \gamma_{2N} P_{2N}(x). \tag{1.12}$$

Volem obtenir una expressió oportuna per la funció $K(x)\chi_{\mathbb{R}^n \setminus \overline{B}}$, el nucli K fora de la bola unitat B (veure (1.14)). Per aconseguir-la, ens trobem en la següent situació. Tenim una funció φ definida per una fórmula diferent en B que en $\mathbb{R}^n \setminus \overline{B}$, tal que és diferenciable fins a ordre N en $B \cup (\mathbb{R}^n \setminus \overline{B})$ i que les seves derivades fins a ordre $N-1$ s'estenen contínuament fins a ∂B. El tema és comparar les derivades en el sentit de les distribucions d'ordre N amb les expressions que s'obtenen en B i en $\mathbb{R}^n \setminus \overline{B}$ prenent derivades ordinàries. Necessitem una lema tècnic prou simple que enunciem sense prova.

Lema 1.10 ([MOV, p. 1435])**.** *Sigui φ una funció radial de la forma*

$$\varphi(x) = \varphi_1(|x|)\chi_B(x) + \varphi_2(|x|)\chi_{\mathbb{R}^n \setminus \overline{B}}(x),$$

on φ_1 és continuament diferenciable en $[0,1)$ i φ_2 en $(1,\infty)$. Sigui L un operador lineal diferencial de segon ordre a coeficients constants. Llavors la distribució $L\varphi$ satisfà

$$L\varphi = L\varphi(x)\chi_B(x) + L\varphi(x)\chi_{\mathbb{R}^n \setminus \overline{B}}(x),$$

si φ_1, φ_1', φ_2 i φ_2' s'estenen contínuament al punt 1 i les dues condicions

$$\varphi_1(1) = \varphi_2(1), \quad \varphi_1'(1) = \varphi_2'(1)$$

es compleixen.

Considerem l'operador diferencial $Q(\partial)$ definit pel polinomi $Q(x)$ en (1.12), i sigui E la solució fonamental estàndard de l'N-èssima potència del Laplacià, Δ^N. Llavors tenim $Q(\partial)E = \text{v.p. } K(x)$, que es pot comprovar prenent la transformada de Fourier a banda i banda de la igualtat. Tenim l'expressió $E(x) = |x|^{2N-n}(a(n,N) + b(n,N)\log|x|^2)$ (e.g. [MOV, p. 1464]), on ara no són importants els valors de $a(n,N)$ i $b(n,N)$, només fem notar que és una funció radial. Considerem la funció

$$\varphi(x) = E(x)\chi_{\mathbb{R}^n\setminus\overline{B}}(x) + (A_0 + A_1|x|^2 + \cdots + A_{2N-1}|x|^{4N-2})\chi_B(x),$$

on B és la bola oberta de radi 1 centrada a l'origen i les constants $A_0, A_1, \ldots, A_{2N-1}$ estan escollides de la manera següent. Com que $\varphi(x)$ és radial, el mateix és cert per a $\Delta^j\varphi$ si j és un enter positiu. Així doncs, per poder aplicar N cops el Lema 1.10, es necessiten $2N$ condicions, que determinen de forma única $A_0, A_1, \ldots, A_{2N-1}$. O sigui que per unes constants $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_{N-1}$,

$$\Delta^N\varphi = (\alpha_0 + \alpha_1|x|^2 + \cdots \alpha_{N-1}|x|^{2(N-1)})\chi_B(x) = b(x), \tag{1.13}$$

on l'última identitat és la definició de b. Remarquem que b és una funció acotada suportada a la bola unitat i que només depèn de N i no del nucli K. Com que

$$\varphi = E * \Delta^N\varphi,$$

derivant a ambdós costats de la igualtat obtenim

$$Q(\partial)\varphi = Q(\partial)E * \Delta^N\varphi = \text{v.p. } K(x) * b = T(b).$$

Per altra banda, aplicant el Lema 1.10 tenim,

$$Q(\partial)\varphi = K(x)\chi_{\mathbb{R}^n\setminus\overline{B}}(x) + Q(\partial)(A_0 + A_1|x|^2 + \cdots + A_{2N-1}|x|^{4N-2})(x)\chi_B(x).$$

Escrivim

$$S(x) := -Q(\partial)(A_0 + A_1|x|^2 + \cdots + A_{2N-1}|x|^{4N-2})(x),$$

i obtenim

$$K(x)\chi_{\mathbb{R}^n\setminus\overline{B}}(x) = T(b)(x) + S(x)\chi_B(x). \tag{1.14}$$

Observem que S serà nul quan Q sigui un polinomi harmònic (veure [MOV, p. 1437]). Conseqüentment

$$T^1 f = T(b) * f + S\chi_B * f.$$

Estem suposant que es compleix l'estimació L^p entre T^* i T. Com que l'operador truncat a nivell 1, T^1, òbviament està controlat per T^*, tenim

$$\begin{aligned} \|S\chi_B * f\|_p &\le \|T^1 f\|_p + \|Tb * f\|_p \\ &\le \|T^* f\|_p + \|b * Tf\|_p \\ &\le C\|Tf\|_p + \|b\|_1\|Tf\|_p \\ &= C\|Tf\|_p, \end{aligned} \tag{1.15}$$

així doncs, per a qualsevol $f \in L^p$

$$\|S\chi_B * f\|_p \leq C\|\text{v.p. } K * f\|_p. \tag{1.16}$$

Si $p = 2$, podem utilitzar Plancherel i aquesta desigualtat L^2 es transforma en una desigualtat puntual entre els multiplicadors de Fourier:

$$|\widehat{S\chi_B}(\xi)| \leq C|\widehat{\text{v.p. } K}(\xi)| = \frac{Q(\xi)}{|\xi|^{2N}}, \quad \xi \neq 0. \tag{1.17}$$

Si $p \neq 2$ hem de recòrrer als multiplicadors de Fourier per obtenir (1.17). Observem que els multiplicadors amb els que treballem, $\widehat{S\chi_B}$ i $\widehat{\text{v.p. } K}$, estan en $\mathcal{C}^\infty \setminus \{0\}$ i en $\mathcal{M}_p$. Sigui $\xi_0 \neq 0$, escrivim

$$\begin{aligned}
\widehat{S\chi_B}(\xi) &= \widehat{S\chi_B}(\xi)(\xi_0) + E_1(\xi) \quad &&\text{with} \quad E_1(\xi) = \widehat{S\chi_B}(\xi) - \widehat{S\chi_B}(\xi_0)\\
\widehat{\text{v.p. } K}(\xi) &= \widehat{\text{v.p. } K}(\xi_0) + E_2(\xi) \quad &&\text{with} \quad E_2(\xi) = \widehat{\text{v.p. } K}(\xi) - \widehat{\text{v.p. } K}(\xi_0)
\end{aligned}$$

i llavors

$$\|\text{v.p. } K * f\|_p \leq |\widehat{\text{v.p. } K}(\xi_0)|\, \|f\|_p + \|T_{E_2} f\|_p, \tag{1.18}$$

$$\|S\chi_B * f\|_p \geq |\widehat{S\chi_B}(\xi_0)|\, \|f\|_p - \|T_{E_1} f\|_p, \tag{1.19}$$

on T_{E_i} denota l'operador amb multiplicador E_i $(i = 1, 2)$. Utilitzant (1.19), (1.16) i (1.18) consecutivament, obtenim

$$\begin{aligned}
|\widehat{S\chi_B}(\xi_0)|\, \|f\|_p - \|T_{E_1} f\|_p &\leq \|S\chi_B * f\|_p\\
&\leq C\|\text{v.p. } K * f\|_p\\
&\leq C(|\widehat{\text{v.p. } K}(\xi_0)|\, \|f\|_p + \|T_{E_2} f\|_p)
\end{aligned}$$

i aleshores

$$|\widehat{S\chi_B}(\xi_0)| \leq C \left(|\widehat{\text{v.p. } K}(\xi_0)| + \frac{||T_{E_2} f||_p}{||f||_p} + \frac{||T_{E_1} f||_p}{||f||_p} \right), \quad \xi_0 \neq 0. \tag{1.20}$$

Ara, prenent funcions adequades en (1.20) obtenim la desigualtat puntual. Sigui $\phi_\delta(\xi) = \phi(\frac{\xi-\xi_0}{\delta})$ com al Lema 1.3 i definim $g_\delta \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ com $\widehat{g_\delta}(\xi) = \phi_\delta(\xi)$. Llavors $T_{E_j} g_\delta = T_{E_j}(g_{2\delta} * g_\delta) = T_{E_j \phi_{2\delta}}(g_\delta)$, ja que $\phi_{2\delta} = 1$ en el suport de ϕ_δ. Canviant f per g_δ en (1.20) tenim que

$$\begin{aligned}
|\widehat{S\chi_B}(\xi_0)| &\leq C \left(|\widehat{\text{v.p. } K}(\xi_0)| + \frac{\|T_{E_2\phi_{2\delta}} g_\delta\|_p}{||g_\delta||_p} + \frac{\|T_{E_1\phi_{2\delta}} g_\delta\|_p}{||g_\delta||_p} \right)\\
&\leq C \left(|\widehat{\text{v.p. } K}(\xi_0)| + \|T_{E_2\phi_{2\delta}}\|_{L^p \to L^p} + \|T_{E_1\phi_{2\delta}}\|_{L^p \to L^p} \right).
\end{aligned}$$

Aplicant el Lema 1.3 als multipliadors E_j veiem que els dos últims termes tendeixen a zero quan δ tendeix a zero. Així, per a $\omega = 1$, tenim (1.17). Aquesta desigualtat puntual entre multiplicadors de Fourier ens dóna relacions interessants entre els conjunts de zeros de Q i de P_{2j}. Per a $f \in \mathbb{R}^n$, sigui $Z(f)$ el conjunt de zeros de f, $Z(f) = \{x \in \mathbb{R}^n : f(x) = 0\}$.

Lema 1.11 (Lema dels Conjunts de Zeros)**.**

$$Z(Q) \subset Z(P_{2j}), \quad 1 \leq j \leq N.$$

Per la demostració necessitem el següent resultat previ que és una fórmula de Lyons i Zumbrun [LZ].

Lema 1.12. *Sigui L un polinomi homogeni de grau l, i sigui f una funció suau d'una variable. Llavors*

$$L(\partial)f(r) = \sum_{\nu \geq 0} \frac{1}{2^\nu \nu!} \Delta^\nu L(x) \left(\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \right)^{l-\nu} f(r), \quad r = |x|.$$

Demostració del Lema 1.11. Per (22) de [MOV, p. 1439], S es pot expressar com

$$S(x) = \sum_{l=N+1}^{2N-1} \sum_{j=1}^{l-N} c_{lj} P_{2j}(x) |x|^{2(l-N-j)}.$$

Tenim (veure [Gr2]) que $\widehat{\chi} = G_{\frac{n}{2}}$, on

$$G_m(\xi) := \frac{J_m(\xi)}{|\xi|^m}, \quad \xi \in \mathbb{R}^n, \quad m > 0,$$

i J_m és la funció de Bessel d'ordre m. Pel Lema 1.12,

$$\begin{aligned} \widehat{S\chi_B}(\xi) &= S(\iota\partial)\widehat{\chi_B}(\xi) \\ &= \sum_{l=N+1}^{2N-1} \sum_{j=1}^{l-N} c_{lj} (-1)^{l-N} P_{2j}(\partial) \Delta^{l-N-j} G_m(\xi) \\ &= \sum_{l=N+1}^{2N-1} \sum_{j=1}^{l-N} \sum_{k=0}^{l-N-j} c_{l,j,k} P_{2j}(\xi) |\xi|^{2(l-N-j-k)} G_{m+2l-2N-k}(\xi). \end{aligned} \tag{1.21}$$

La funció $G_p(\xi)$ és, per a cada $p \geq 0$, una funció radial que és la restricció d'una funció entera a l'eix positiu real (veure [Gr2]). Posem $\xi = r\xi_0$, $|\xi_0| = 1$, $r \geq 0$. Llavors

$$\widehat{S\chi_B}(r\xi_0) = \sum_{p=1}^{\infty} a_{2p}(\xi_0) r^{2p}, \tag{1.22}$$

i la sèrie de potències té radi de convergència infinit per a cada ξ_0. Sigui $Q(\xi_0) = 0$. Llavors, per (1.17), $\widehat{S\chi_B}(r\xi_0) = 0$ per a cada $r \geq 0$, i aleshores $a_{2p}(\xi_0) = 0$ per a cada $p \geq 1$. Per a $p = 1$, tenim $a_2(\xi_0) = P_2(\xi_0) C_2$, on

$$C_2 = \sum_{l=N+1}^{2N-1} c_{l,1,l-N-1} G_{m+l-N+1}(0).$$

Pel següent lema, $C_2 \neq 0$, obtenim que $P_2(\xi_0) = 0$. Farem una demostració per inducció. La nostra hipòtesi és $P_2(\xi_0) = \ldots = P_{j(j-1)}(\xi_0) = 0$. Llavors, si $j \leq N-1$, $a_{2j}(\xi_0) = P_{2j}(\xi_0)C_{2j}$, on

$$C_{2j} = \sum_{l=N+j}^{2N-1} c_{l,j,l-N-j} G_{m+l-N+j}(0).$$

Com que $C_{2j} \neq 0$, $P_{2j}(\xi_0) = 0$, $1 \leq j \leq N-1$. Tenim

$$0 = Q(\xi_0) = \sum_{j=1}^{N} \gamma_{2j} P_{2j}(\xi_0),$$

i aleshores també obtenim que $P_{2N}(\xi_0) = 0$. $\square$

Per provar el Lema 1.11 completament, necessitem el següent:

Lema 1.13 ([MOV, p. 1458])**.**

$$C_{2j} = \frac{-\pi^{\frac{n}{2}}}{V_n 2^{\frac{n}{2}} \Gamma(\frac{n}{2}+1)} \frac{(-1)^j}{j 4^j \Gamma(2j+\frac{n}{2})}, \qquad 1 \leq j \leq N-1.$$

És ben conegut el següent resultat.

Lema 1.14 (Lema de Dimensió)**.** *Si f és una funció contínua a valors reals en $\mathbb{R}^n$ que canvia de signe, llavors $H^{n-1}(Z(f)) > 0$, on H^{n-1} és la mesura de Hausdorff de dimensió $n-1$. En particular, la dimensió de Hausdorff de $Z(f)$ és, com a mínim, $n-1$.*

Demostració. Suposem, sense pèrdua de generalitat, que $f(0) > 0$ i $f(p) < 0$, on $p = (0, \ldots, 0, 1)$. Per a $\epsilon > 0$ prou petit tenim que $f(x) > 0$ si $|x| < \epsilon$ i $f(x) < 0$ si $|x - p| < \epsilon$. Posem $B = \{x \in \mathbb{R}^n : x_n = 0 \quad \text{i} \quad |x| < \epsilon\}$. Fent servir el Teorema de Bolzano tenim que, per cada $x \in B$, f s'anul·la a algun punt del segment $(x_1, \ldots, x_{n-1}, t)$, $0 \leq t \leq 1$. Així doncs, la projecció ortogonal del conjunt $Z(f)$ en l'hiperplà $\{x : x_n = 0\}$ conté B, i llavors $H^{n-1}(Z(f)) \geq H^{n-1}(B) > 0$. $\square$

Veiem ara un lema algebraic que juga un paper principal.

Lema 1.15 (Lema de Divisió)**.** *Siguin F i G polinomis en $\mathbb{R}[x_1, \ldots, x_n]$. Suposem que G és irreductible i que $H^{n-1}(Z(F) \cap Z(G)) > 0$. Llavors existeix un polinomi H en $\mathbb{R}[x_1, \ldots, x_n]$ tal que $F = GH$.*

Demostració. Sigui $V(P)$ la hipersuperfície complexa $\{z \in \mathbb{C} : P(z) = 0\}$ d'un polinomi P. Per hipòtesi, $V(F) \cap V(G)$ no és buit. Si $V(G)$ no està contingut en $V(F)$, llavors la dimensió complexa de $V(G) \cap V(F)$ no és més gran de $n-2$ (veure [Ku, 3.2 p. 131]). Com que la dimensió real d'una varietat és menor o igual que la dimensió complexa, concluïm que $Z(G) \cap Z(F)$ té dimensió real menor o igual que $n-2$, cosa que contradiu el fet de que té mesura de Hausdorff $(n-1)$-dimensional positiva. Així doncs, $V(G) \subset V(F)$, i aleshores $F = GH$ per algun polinomi H en $\mathbb{C}[x_1, \ldots, x_n]$. Com que F i G tenen coeficients reals, tenim el mateix per H. $\square$

Ara procedim a acabar la demostració de (b) implica (c) si $\omega = 1$.

Sigui j_0 el primer índex positiu tal que P_{2j_0} no és idènticament zero. Veurem que P_{2j_0} divideix a cada P_{2j} per a $j_0 \leq j \leq N$. Com que $\mathbb{R}[x_1, \ldots, x_n]$ és un domini de factorització única, podem expressar P_{2j_0} com a producte de factors irreductibles, als que anomenem R_k, $1 \leq k \leq M$, i que també són homogenis. És clar que $Z(P_{2j_0}) = \cup_k Z(R_k)$, i aleshores

$$Z(Q) = \bigcup_k (Z(Q) \cap Z(R_k)).$$

Q canvia de signe perquè té integral 0 sobre l'esfera. Llavors, pel Lema de Dimensió (Lema 1.14), hi ha com a mínim un k tal que $H^{n-1}(Z(Q) \cap Z(R_k)) > 0$. Canviem notació per suposar que $k = 1$. Llavors R_1 divideix Q, pel Lema de Divisió 1.15. També podem aplicar el Lema de Divisó a R_1 i P_{2j} per a cada $j_0 \leq j \leq N$, ja que $Z(Q) \cap Z(R_1) \subset Z(P_{2j}) \cap Z(R_1)$ pel Lema dels Conjunts de Zeros (Lema 1.11). Per tant, R_1 també divideix cada P_{2j} per a $j_0 \leq j \leq N$. Posem

$$Q = R_1 Q_1 \quad \text{i} \quad P_{2j} = R_1 P_{2j,1}, \quad j_0 \leq j \leq N$$

per certs polinomis homogenis Q_1 i $P_{2j,1}$.
Si $M = 1$, ja estem. Si no, repetirem tants cops com puguem el mateix procés de divisió. Reescrivim la desigualtat (1.17) utilitzant 1.22 de la següent manera

$$\left| \sum_{p-1}^{\infty} a_{2p}(\xi_0) r^{2p} \right| \leq C|Q(\xi_0)|, \quad 0 < r. \tag{1.23}$$

Per la definició dels coeficients a_{2p} i 1.21, existeixen números reals $\mu_j(p)$ tals que

$$a_{2p}(\xi_0) = \sum_{j=j_0}^{N-1} \mu_j(p) P_{2j}(\xi_0),$$

i llavors

$$\begin{aligned} a_{2p}(\xi_0) &= R_1(\xi_0) \sum_{j=j_0}^{N-1} \mu_j(p) P_{2j,1}(\xi_0) \\ &= R_1(\xi_0) a_{2p,1}(\xi_0), \end{aligned}$$

on a l'última identitat definim $a_{2p,1}(\xi_0)$. En 1.23 podem simplificar el factor comú $R_1(\xi_0)$ i obtenim

$$\left| \sum_{p=1}^{\infty} a_{2p,1}(\xi_0) r^{2p} \right| \leq C|Q_1(\xi_0)|, \quad 0 < r.$$

Ara podem començar el segon pas del procés de divisió. Si $Q_1(\xi_0) = 0$, llavors $a_{2p,1}(\xi_0) = 0$ per a cada $p \geq 1$. Per tant, com a la prova del Lema dels Conjunts de Zeros,

$$Z(Q_1) \subset Z(P_{2j,1}), \quad j_0 \leq j \leq N.$$

Per aplicar el Lema de Divisió ens hem d'assegurar que el conjunt de zeros de Q_1 és prou gran. Pel Lema de Dimensió, és suficient veure que Q_1 canvia de signe. Recordem que assumim que M és més gran que 1, o sigui que el grau de R_1 és menor que $2j_0$. Considerant els desenvolupaments en esfèrics harmònics de R_1 i Q, veiem que són ortogonals en $L^2(d\sigma)$ (veure [St, p. 69]). Així doncs

$$0 = \int R_1(\xi)Q(\xi)d\sigma(\xi) = \int R_1^2(\xi)Q_1(\xi)d\sigma(\xi),$$

és a dir, Q_1 canvia de signe.
Com que $P_{2j_0,1} = \prod_{k=2}^{M} R_k$, concluïm que un dels R_k, diem-li R_2, divideix els $P_{2j,1}$, $j_0 \leq j \leq N$. Un argument per inducció ens mostra que P_{2j_0} divideix P_{2j}, $j_0 \leq j \leq N$. Al pas k-èssim, observem que $Q = \prod_{l=1}^{k} R_l Q_k$ i

$$0 = \int \prod_{l=1}^{k} R_l(\xi)Q(\xi)d\sigma(\xi) = \int \prod_{l=1}^{k} R_l^2(\xi)Q_k(\xi)d\sigma(\xi),$$

per tant, Q_k canvia de signe. També és important remarcar que

$$a_{2p,k}(\xi_0) = \sum_{j=j_0}^{N-1} \mu_j(p)P_{2j,k}(\xi_0), \qquad 1 \leq k \leq M.$$

Així doncs, al pas M-èssim, obtenim

$$a_{2j_0,M}(\xi_0) = C_{2j_0} \neq 0, \qquad \text{si } p = j_0.$$

Tenim $P_{2j} = P_{2j_0}Q_{2j-2j_0}$ per a alguns polinomis homogenis Q_{2j-2j_0} de grau $2j - 2j_0$, i llavors

$$\begin{aligned} Q(\xi) &= \sum_{j=j_0}^{N} \gamma_{2j} P_{2j}(\xi)|\xi|^{2N-2j} \\ &= P_{2j_0}(\xi) \sum_{j=j_0}^{N} \gamma_{2j} Q_{2j-2j_0}(\xi)|\xi|^{2N-2j}. \end{aligned}$$

Per (1.23) i la definició dels coeficients $a_{2p-M}(\xi_0)$, per a $|\xi_0| = 1$ i $0 < r$, obtenim

$$\left| \sum_{p=j_0}^{\infty} a_{2p,M}(\xi_0)r^{2p} \right| \leq C \left| \sum_{j=j_0}^{N} \gamma_{2j} Q_{2j-2j_0}(\xi_0) \right|, \qquad 0 < r.$$

Utilitzant $a_{2j_0,M}(\xi_0) = C_{2j_0} \neq 0$, concluïm que

$$\sum_{j=j_0}^{N} \gamma_{2j} Q_{2j-2j_0}(\xi_0) \neq 0, \qquad |\xi_0| = 1,$$

cosa que completa la prova de b implica c en el Teorema 1.1 pel cas polinomial amb $\omega = 1$.

Pel cas amb pesos hem d'anar amb compte amb les desigualtats que trobem en (1.15). En general, la desigualtat $\|f * F\|_{L^p(\omega)} \leq C\|f\|_1\|F\|_{L^p(\omega)}$ no es satisfà. Això vol dir que no podem controlar $\|b * Tf\|_{L^p(\omega)}$ per constant vegades $\|b\|_1\|Tf\|_{L^p(\omega)}$. De totes maneres, en el cas parell b és una funció acotada suportada a la bola unitat, o sigui que

$$|(b * Tf)(x)| = \left|\int_{|x-y|<1} b(x-y)Tf(y)\,dy\right| \leq CM(Tf)(x).$$

A més

$$\|b * Tf\|_{L^p(\omega)} \leq C\|Tf\|_{L^p(\omega)},$$

ja que $\omega \in A_p$. So, $\|S\chi_B * f\|_{L^p(\omega)} \leq C\|\text{v.p. } K * f\|_{L^p(\omega)}$ i procedint com abans obtenim

$$\begin{aligned}
|\widehat{S\chi_B}(\xi_0)| &\leq C\left(|\widehat{\text{v.p. } K}(\xi_0)| + \frac{\|T_{E_2\phi_{2\delta}}g_\delta\|_{L^p(\omega)}}{\|g_\delta\|_{L^p(\omega)}} + \frac{\|T_{E_1\phi_{2\delta}}g_\delta\|_{L^p(\omega)}}{\|g_\delta\|_{L^p(\omega)}}\right) \\
&\leq C\left(|\widehat{\text{v.p. } K}(\xi_0)| + \|T_{E_2\phi_{2\delta}}\|_{L^p(\omega)\to L^p(\omega)} + \|T_{E_1\phi_{2\delta}}\|_{L^p(\omega)\to L^p(\omega)}\right).
\end{aligned}$$

Aplicant altre cop el Lema 1.3, obtenim la desigualtat (1.17).

Falta veure que *(d)* implica *(c)* en el Teorema 1.1. Per aconseguir aquesta implicació, hem d'analitzar algunes propietats de les funcions g_δ. Primer de tot, fem notar que $g_\delta(x) = e^{ix\xi_0}\delta^n g(\delta x)$ on $\hat{g} = \phi$. O sigui que està clar que les normes $\|g_\delta\|_1 = \|g\|_1$ i $\|g_\delta\|_{1,\infty} = \|g\|_{1,\infty}$ no depenen del paràmetre $\delta > 0$. Quan $\delta < |\xi_0|$, com que $\int g_\delta(x)\,dx = \phi_\delta(0) = 0$ i $g_\delta \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$, tenim que $g_\delta \in H^1$. Però s'han de fer alguns càlculs per comprovar que $\|g_\delta\|_{H^1} \leq C$ amb constant C independent de δ.

Lema 1.16. *Si* $0 < \delta < |\xi_0|$, $\|g_\delta\|_{H^1} \leq C$ *amb constant* C *independent de* δ.

Demostració. Tenim $g_\delta(x) = e^{ix\xi_0}\delta^n g(\delta x)$ amb $g \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ i $\int g_\delta = 0$. Posem $F_0^\delta(x) = \chi_{B(0,\delta^{-1})}(x)$ i, per a $j \geq 1$, $F_j^\delta(x) = \chi_{B(0,2^j\delta^{-1})}(x) - \chi_{B(0,2^{j-1}\delta^{-1})}(x)$. Fem notar que $\sum_{j=0}^\infty F_j^\delta(x) \equiv 1$. Considerem la descomposició atòmica de g_δ

$$\begin{aligned}
g_\delta(x) &= \sum_{j=0}^\infty (g_\delta(x) - c_j^\delta)F_j^\delta(x) + \sum_{j=0}^\infty [(c_j^\delta + d_j^\delta)F_j^\delta(x) - d_{j+1}^\delta F_{j+1}^\delta(x)] \\
&:= \sum_{j=0}^\infty a_j^\delta(x) \;+\; \sum_{j=0}^\infty A_j^\delta(x),
\end{aligned}$$

on $c_j^\delta = \dfrac{\int g_\delta F_j^\delta}{\int F_j^\delta}$, $d_0^\delta = 0$ i $d_{j+1}^\delta = \dfrac{\int g_\delta(F_0^\delta + \cdots + F_j^\delta)}{\int F_{j+1}^\delta}$, de forma que $\int a_j^\delta(x)\,dx = \int A_j^\delta(x)\,dx = 0$. Veiem que a_j^δ té suport en la bola $B(0, 2^j\delta^{-1})$ i A_j^δ té suport en $B(0, 2^{j+1}\delta^{-1})$.

Com que $g \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ tenim $(1 + |z|^{n+1})|g(z)| \leq C$. Llavors

$$|g_\delta(x)F_j^\delta(x)| = \delta^n|g(\delta x)|F_j^\delta(x) \leq \delta^n \sup_{|z|\sim 2^j}|g(z)| \leq C\left(\frac{\delta}{2^j}\right)^n 2^{-j} = \frac{C2^{-j}}{|B(0, 2^j\delta^{-1})|}$$

i, per tant,

$$|c_j^\delta| = \left| \frac{\int g_\delta F_j^\delta}{\int F_j^\delta} \right| \leq \frac{C2^{-j}}{|B(0, 2^j \delta^{-1})|}.$$

Per altra banda, $\int g_\delta (F_0^\delta + \cdots + F_j^\delta) = \int_{|x| \geq 2^j \delta^{-1}} g_\delta(x)\, dx$, ja que $\int g_\delta = 0$, i llavors

$$d_{j+1}^\delta = \frac{\int_{|x|\geq 2^j\delta^{-1}} g_\delta(x)\, dx}{\int F_{j+1}^\delta} \leq \frac{\int_{|z|\geq 2^j} |g(z)|\, dz}{|B(0, 2^{j+1}\delta^{-1})|} \leq \frac{C2^{-j}}{|B(0, 2^{j+1}\delta^{-1})|}.$$

Conseqüentment

$$\|a_j^\delta\|_{H^1} \leq \frac{C}{2^j} \qquad \text{i} \qquad \|A_j^\delta\|_{H^1} \leq \frac{C}{2^j}.$$

Així doncs, per a tot $\delta \in (0, |\xi_0|)$, $\|g_\delta\|_{H^1} \leq C$ tal i com havíem dit. □

Finalment, per a funcions f de l'espai de Hardy H^1, i utilitzant altre cop (1.14), tenim

$$\begin{aligned} \|S\chi_B * f\|_{1,\infty} &\leq 2(\|T^1 f\|_{1,\infty} + \|Tb * f\|_{1,\infty}) \\ &\leq C(\|T^* f\|_{1,\infty} + \|b * Tf\|_1) \\ &\leq C\|Tf\|_1 + \|b\|_1 \|Tf\|_1) \\ &= C\|Tf\|_1 = C\|\text{v.p. } K * f\|_1. \end{aligned}$$

Prenem $\xi_0 \neq 0$ i utilitzem la mateixa notació que abans. Així tenim

$$||\text{v.p. } K * f||_1 \leq |\widehat{\text{v.p. } K}(\xi_0)|\, ||f||_1 + ||T_{E_2} f||_1,$$
$$||S\chi_B * f||_{1,\infty} \geq \frac{1}{2} |\widehat{S\chi_B}(\xi_0)|\, ||f||_{1,\infty} - ||T_{E_1} f||_{1,\infty}$$

i conseqüentment

$$|\widehat{S\chi_B}(\xi_0)| \leq C \left(|\widehat{\text{v.p. } K}(\xi_0)| \frac{\|f\|_1}{\|f\|_{1,\infty}} + \frac{\|T_{E_2} f\|_1}{\|f\|_{1,\infty}} + \frac{\|T_{E_1} f\|_{1,\infty}}{\|f\|_{1,\infty}} \right), \quad \xi_0 \neq 0.$$

Reemplaçant f per g_δ i utilitzant les propietats de g_δ (és a dir, $\|g_\delta\|_1 = \|g\|_1$, $\|g_\delta\|_{1,\infty} = \|g\|_{1,\infty}$ i el Lema 1.16) obtenim

$$\begin{aligned} |\widehat{S\chi_B}(\xi_0)| &\leq C\left(|\widehat{\text{v.p. } K}(\xi_0)| \frac{\|g_\delta\|_1}{\|g_\delta\|_{1,\infty}} + \frac{\|T_{E_2 \phi_{2\delta}} g_\delta\|_1}{\|g_\delta\|_{1,\infty}} + \frac{\|T_{E_1 \phi_{2\delta}} g_\delta\|_{1,\infty}}{\|g_\delta\|_{1,\infty}} \right) \\ &\leq C\left(|\widehat{\text{v.p. } K}(\xi_0)| \frac{\|g\|_1}{\|g\|_{1,\infty}} + \frac{\|T_{E_2\phi_{2\delta}}\|_{H^1 \to L^1} \|g_\delta\|_{H^1}}{\|g_\delta\|_{1,\infty}} + \frac{\|T_{E_1 \phi_{2\delta}}\|_{L^1 \to L^{1,\infty}} \|g_\delta\|_1}{\|g_\delta\|_{1,\infty}} \right) \\ &\leq C\left(|\widehat{\text{v.p. } K}(\xi_0)| + \|T_{E_2 \phi_{2\delta}}\|_{H^1 \to L^1} + \|T_{E_1 \phi_{2\delta}}\|_{L^1 \to L^{1,\infty}} \right) \end{aligned}$$

i per tant, aplicant el Lema 1.3 al costat dret d'aquesta desigualtat, obtenim

$$|\widehat{S\chi_B}(\xi_0)| \leq C |\widehat{\text{v.p. } K}(\xi_0)| \quad \xi_0 \neq 0$$

tal i com volíem.

1.2.2 El cas senar

La demostració de *(b)* implica *(c)* en el Teorema 1.2 es pot fer més o menys de la mateixa manera. L'única diferència significant, pel fet de que ara tenim un polinomi senar, la trobem en la funció b de (1.14), que ara no té suport a la bola unitat, però és una funció BMO que satisfà el decaïment $|b(x)| \leq C|x|^{-n-1}$ si $|x| > 2$ (veure [MOPV, section 4]). De totes maneres, $b \in L^1$ i el seguit de desigualtats (1.15) segueix essent vàlid pel cas en el que $\omega = 1$.
Per altra banda, per a qualsevol ω de la classe de Muckenhoupt, argumentant com en [MOPV, p. 3675] escrivim

$$\begin{aligned}|(b * Tf)(x)| &= \left| \int_{|x-y|<2} (b(x-y) - b_{B(0,2)}) Tf(y)\, dy \right| \\ &\quad + |b_{B(0,2)}| \int_{|x-y|<2} |Tf(y)|\, dy + \int_{|x-y|>2} |b(x-y)|\, |Tf(y)|\, dy \\ &= I + II + III,\end{aligned}$$

on $b_{B(0,2)} = |B(0,2)|^{-1} \int_{B(0,2)} b$. Per acotar el terme local I hem utilitzat la desigualtat de Hölder generalitzada i l'equivalència puntual $M_{L(\log L)} f(x) \simeq M^2 f(x)$ ([Pe, p. 304]) per tenir

$$|I| \leq C\|b\|_{\mathrm{BMO}} \|Tf\|_{L(\log L), B(x,2)} \leq CM^2(Tf)(x).$$

Observem que $b_{B(0,2)}$ és una constant dimensinal. Per tant

$$|II| \leq CM(Tf)(x).$$

Finalment, gràcies al decaïment de b obtenim

$$|III| \leq C \int_{|x-y|>2} \frac{|Tf(y)|}{|x-y|^{n+1}}\, dy \leq CM(Tf)(x),$$

utilitzant un argument estàndard que consisteix en acotar la integral sobre l'anell $\{2^k \leq |x-y| < 2^{k+1}\}$. Així doncs,

$$|(b * Tf)(x)| \leq CM^2(Tf)(x). \tag{1.24}$$

Aleshores obtenim

$$\|b * Tf\|_{L^p(\omega)} \leq C\|Tf\|_{L^p(\omega)},$$

ja que $\omega \in A_p$. Llavors, $\|S\chi_B * f\|_{L^p(\omega)} \leq C\|\text{v.p. } K * f\|_{L^p(\omega)}$ i obtenim (1.17).

1.3 El cas general

En el nostre procediment pel cas polinomial, la funció b ha tingut un paper clau. Ens aporta una manera idònia d'expressar la funció $K(x)\chi_{\mathbb{R}^n \setminus \overline{B}}$, on K és el nucli de l'operador T. Tal com hem comentat abans, b només depèn del grau del polinomi homogeni i de l'espai $\mathbb{R}^n$. En el cas parell $2N$

(veure (1.13)), $b = b_{2N}$ és la restricció d'un polinomi de grau $2N-2$ sobre la bola unitat. En el cas senar $2N+1$, b_{2N+1} és una funció BMO amb un cert decaïment a l'infinit. Fins ara, no hem posat atenció a la mida dels paràmetres que apareixen en la definició de b perquè el grau del polinomi (fos $2N$ o $2N+1$) era fixat. Ara, en aqueta secció, necessitem un control de la norma L^1, L^∞ or BMO de b, així com el seu decaïment a l'infinit. Resumim tot el que necessitem en el següent lema.

Lema 1.17. *Existeix una constant C depenent només de n tal que*

(i) $|\widehat{b_{2N}}(\xi)| \le C \quad$ *i* $\quad |\widehat{b_{2N+1}}(\xi)| \le C, \quad \xi \in \mathbb{R}^n.$

(ii) $\|b_{2N}\|_{L^\infty(B)} \le C(2N)^{2n+2} \quad$ *i* $\quad \|\nabla b_{2N}\|_{L^\infty(B)} \le C(2N)^{2n+4}.$

(iii) $\|b_{2N+1}\|_{\mathrm{BMO}} \le C(2N+1)^{2n} \quad$ *i* $\quad \|b_{2N+1}\|_{L^2} \le C(2N+1)^{2n}.$

(iv) *Si* $|x| > 2 \quad$ *llavors* $\quad |b_{2N+1}(x)| \le C(2N+1)^{2n}|x|^{-n-1}.$

Demostració. Els punts *(i)*, *(ii)* i *(iii)* estan provats en [MOV, Lemma 8] i [MOPV, Lemma 5]. Només falta demostrar *(iv)*.

Recordem que σ denota la mesura de superfície normalitzada en S^{n-1}, i sigui $h_1, \ldots, h_d$ una base ortonormal del subespai de $L^2(d\sigma)$ que consisteix en tots els polinomis homogenis i harmònics de grau $2N+1$. Tal i com és ben conegut, $d \simeq (2N+1)^{n-2}$. Com a la prova del Lema 6 de [MOV] tenim $h_1^2 + \cdots + h_d^2 = d$, en S^{n-1}. Posem

$$H_j(x) = \frac{1}{\gamma_{2N+1}\sqrt{d}}\, h_j(x), \quad x \in \mathbb{R}^n\,,$$

i sigui S_j la transformada de Riesz d'ordre superior amb nucli $K_j(x) = H_j(x)/|x|^{2N+1+n}$. El multiplicador de Fourier de S_j^2 és

$$\frac{1}{d}\,\frac{h_j(\xi)^2}{|\xi|^{4N+2}}, \quad 0 \ne \xi \in \mathbb{R}^n\,,$$

i, per tant,

$$\sum_{j=1}^{d} S_j^2 = \mathrm{Id}\,. \tag{1.25}$$

Utilitzem altre cop (1.14), però ara el segon terme de la part de la dreta es fa zero perquè cada h_j és harmònic (veure [MOV], p.1437). Obtenim

$$K_j(x)\,\chi_{\mathbb{R}^n \setminus \overline{B}}(x) = S_j(b_{2N+1})(x), \quad x \in \mathbb{R}^n, \quad 1 \le j \le d\,,$$

i, llavors, per (1.25)

$$b_{2N+1} = \sum_{j=1}^{d} S_j\left(K_j(x)\,\chi_{\mathbb{R}^n \setminus \overline{B}}(x)\right)\,. \tag{1.26}$$

Per tant posem

$$\begin{aligned}\sum_{j=1}^{d} S_j\left(K_j(x)\,\chi_{\mathbb{R}^n\setminus\overline{B}}(x)\right) &= \sum_{j=1}^{d} S_j * S_j - \sum_{j=1}^{d} S_j\left(K_j(x)\,\chi_B(x)\right)\\ &= \delta_0 - \sum_{j=1}^{d} S_j\left(K_j(x)\,\chi_B(x)\right),\end{aligned}$$

on δ_0 és la delta de Dirac a l'origen. Si $|x|>2$, llavors

$$\begin{aligned}S_j(K_j(y)\,\chi_B(y))(x) &= \lim_{\varepsilon\to 0}\int_{\varepsilon<|y|<1} K_j(x-y)K_j(y)\,dy\\ &= \lim_{\varepsilon\to 0}\int_{\varepsilon<|y|<1} (K_j(x-y)-K_j(x))K_j(y)\,dy.\end{aligned}$$

En aquesta situació,

$$|K_j(x-y)-K_j(x)| \le C\frac{|y|}{|x|^{n+1}}\left(\|H_j\|_\infty(2N+1)+\|\nabla H_j\|_\infty\right),$$

així doncs

$$|S_j(K_j(y)\,\chi_B(y))(x)| \le C\frac{\|H_j\|_\infty(2N+1)+\|\nabla H_j\|_\infty}{|x|^{n+1}}\int_{|y|<1}\frac{\|H_j\|_\infty}{|y|^{n-1}}\,dy$$

on les normes del suprem es prenen en S^{n-1}. És clar que

$$\|H_j\|_\infty = \frac{1}{\gamma_{2N+1}}\left\|\frac{h_j}{\sqrt{d}}\right\|_\infty \le \frac{1}{\gamma_{2N+1}} \simeq (2N+1)^{n/2}.$$

Per l'estimació del gradient de H_j utilitzem la desigualtat [St, p. 276]

$$\|\nabla H_j\|_\infty \le C\,(2N+1)^{n/2+1}\,\|H_j\|_2,$$

on la norma L^2 es pren respecte de $d\sigma$. Com que els h_j són un sistema ortonormal,

$$\|H_j\|_2 = \frac{1}{\sqrt{d}\,\gamma_{2N+1}} \simeq \frac{(2N+1)^{n/2}}{(2N+1)^{(n-2)/2}} \simeq 2N+1.$$

Ajuntant les desigualtats anteriors obtenim, quan $|x|>2$,

$$|S_j(K_j(y)\,\chi_B(y))(x)| \le C\frac{(2N+1)^{n+2}}{|x|^{n+1}}$$

i finalment

$$|b_{2N+1}(x)| \le Cd\frac{(2N+1)^{n+2}}{|x|^{n+1}} \le C\frac{(2N+1)^{2n}}{|x|^{n+1}},$$

tal i com havíem dit. □

Ara, el nucli de l'operador $Tf = \text{v.p. } K * f$ és del tipus $K(x) = \frac{\Omega(x)}{|x|^n}$, on Ω és una funció homogènia de grau 0 i tal que $\Omega \in C^\infty(S^{n-1})$, amb integral zero sobre l'esfera. Llavors, $\Omega(x) = \sum_{j\geq 1}^{\infty} \frac{P_{2j}(x)}{|x|^{2j}}$ amb P_{2j} polinomis homogenis harmònics de grau $2j$ si T és un operador parell, i $\Omega(x) = \sum_{j\geq 0}^{\infty} \frac{P_{2j+1}(x)}{|x|^{2j+1}}$ amb P_{2j+1} polinomis homogenis harmònics de grau $2j+1$ si T és un operador senar. L'estratègia consisteix en passar al cas polinomial prenent sumes parcials de les sèries anteriors. Posem, per a cada $N \geq 1$, $K_N(x) = \frac{\Omega_N(x)}{|x|^n}$, on $\Omega_N(x) = \sum_{j=1}^{N} \frac{P_{2j}(x)}{|x|^{2j}}$ (o $\Omega_N(x) = \sum_{j=0}^{N} \frac{P_{2j+1}(x)}{|x|^{2j+1}}$ en el cas senar), i sigui T_N l'operador amb nucli K_N.

1.3.1 El cas parell

Comencem considerant la implicació *(b)* implica *(c)* en el Teorema 1.1 quan $\omega = 1$, o sigui que, T és parell i la nostra hipòtesi és $\|T^\star f\|_p \leq C\|Tf\|_p$, $f \in L^p(\mathbb{R}^n)$. En aquest marc, la dificultat és que no hi ha cap manera òbvia d'obtenir la desigualtat

$$\|T_N^\star f\|_p \leq C\|T_N f\|_p, \quad f \in L^p(\mathbb{R}^n). \tag{1.27}$$

En comptes d'això, intentem aconseguir (1.27) amb $\|T_N f\|_p$ reemplaçat per $\|Tf\|_p$ a la banda dreta més un terme addicional que es fa petit quan N tendeix a ∞. Comencem escrivint

$$\begin{aligned} \|T_N^1 f\|_p &\leq \|T^1 f\|_p + \|T^1 f - T_N^1 f\|_p \\ &\leq C\|Tf\|_p + \|\sum_{j>N} \frac{P_{2j}(x)}{|x|^{2j+n}} \chi_{\overline{B}^c} * f\|_p. \end{aligned} \tag{1.28}$$

Per (1.14), i perquè cada P_{2j} és harmònic, existeix una funció acotada b_{2j} amb suport a la bola B tal que

$$\frac{P_{2j}(x)}{|x|^{2j+n}} \chi_{\overline{B}^c}(x) = \text{v.p. } \frac{P_{2j}(x)}{|x|^{2j+n}} * b_{2j}.$$

Pel Lema 1.17 *(ii)*, tenim que $\|b_{2j}\|_{L^1} \leq C\|b_{2j}\|_{L^\infty(B)} \leq C(2j)^{2n+2}$, i així

$$\begin{aligned} \|\sum_{j>N} \frac{P_{2j}(x)}{|x|^{2j+n}} \chi_{\overline{B}^c} * f\|_p &= \|\sum_{j>N} \text{v.p. } \frac{P_{2j}(x)}{|x|^{2j+n}} * b_{2j} * f\|_p \\ &\leq \sum_{j>N} \|\frac{P_{2j}(x)}{|x|^{2j+n}}\|_{L^p \to L^p} \|b_{2j} * f\|_p \\ &\leq \sum_{j>N} \|\frac{P_{2j}(x)}{|x|^{2j+n}}\|_{L^p \to L^p} \|b_{2j}\|_1 \|f\|_p \\ &\leq C\|f\|_p \sum_{j>N} \|\frac{P_{2j}(x)}{|x|^{2j+n}}\|_{L^p \to L^p} (2j)^{2n+2} \\ &\leq C\|f\|_p \sum_{j>N} (\|P_{2j}\|_\infty + \|\nabla P_{2j}\|_\infty)(2j)^{2n+2}. \end{aligned} \tag{1.29}$$

L'última desigualtat segueix d'una coneguda estimació pels operadors Calderón-Zygmund (e.g. [Gr1, Theorem 4.3.3]). Per altra banda,

$$K_N(x)\chi_{\mathbb{R}^n\setminus\overline{B}}(x) = T_N(b_{2N})(x) + S_N(x)\chi_B(x)$$

i llavors

$$T_N^1 f = \text{v.p. } K_N * b_{2N} * f + S_N\chi_B * f.$$

Per tant, per a cada $f \in L^p(\mathbb{R}^n)$, utilitzant (1.28) i (1.29), tenim la desigualtat L^p

$$\begin{aligned}\|S_N\chi_B * f\|_p &\le \|T_N^1 f\|_p + \|\text{v.p. } K_N * b_{2N} * f\|_p \\ &\le C\left(\|Tf\|_p + \|f\|_p \sum_{j>N}(\|P_{2j}\|_\infty + \|\nabla P_{2j}\|_\infty)(2j)^{2n+2} + \|\text{v.p. } K_N * b_{2N} * f\|_p\right).\end{aligned}$$

Recalquem que els multiplicadors correponents $\widehat{S_N\chi_B}$, $\widehat{\text{v.p. } K}$ i v.p. $\widehat{K_N * b_{2N}} = \widehat{\text{v.p. } K_N}\widehat{b_{2N}}$ són a $\mathcal{C}^\infty \setminus \{0\}$ i a $\mathcal{M}_p$. Així doncs, procedint com en el cas polinomial i aplicant el Lema 1.3 obtenim l'acotació puntual per a $\xi \neq 0$

$$|\widehat{S_N\chi_B}(\xi)| \le C\left(|\widehat{\text{v.p. } K}(\xi)| + |(\widehat{\text{v.p. } K_N} \cdot \widehat{b_{2N}})(\xi)| + \sum_{j>N}(\|P_{2j}\|_\infty + \|\nabla P_{2j}\|_\infty)(2j)^{2n+2}\right) \tag{1.30}$$

$$\le C\left(|\widehat{\text{v.p. } K}(\xi)| + |\widehat{\text{v.p. } K_N}(\xi)| + \sum_{j>N}(\|P_{2j}\|_\infty + \|\nabla P_{2j}\|_\infty)(2j)^{2n+2}\right), \tag{1.31}$$

on a l'últim pas hem utilitzat el Lema 1.17 *(i)*, és a dir, $|\widehat{b_{2N}}(\xi)| \le C$, per a $\xi \in \mathbb{R}^n$.

Ara la idea és fer tendir N a ∞ a la desigualtat anterior. Per la definició de K_N i utilitzant el fet de que $\sum_{j=1}^\infty j^M \|P_j\|_\infty < \infty$, el terme de la banda dreta convergeix a $C|\widehat{\text{v.p. } K}(\xi)|$. La següent tasca és clarificar com convergeix la banda esquerra.

Posem $\xi = r\xi_0$, amb $|\xi_0| = 1$ i $r > 0$. Reescrivim (1.22) amb S reemplaçat per S_N i a_{2p} per a_{2p}^N:

$$\widehat{S_N\chi_B}(r\xi_0) = \sum_{p=1}^\infty a_{2p}^N(\xi_0) r^{2p}.$$

Remarquem que, per a un p fixat, la successió dels a_{2p}^N s'estabilitza per N prou gran. Aquest fet depèn d'un càlcul laboriós de vàries constants (veure [MOV, p. 1463]). Tenim

Lema 1.18. *Si $p+1 \le N$, llavors $a_{2p}^N = a_{2p}^{p+1}$.*

Si $p \ge 1$ i $p+1 \le N$, posem $a_{2p} = a_{2p}^N$. Necessitem una acotació pels a_{2p}^N (vegeu també [MOV, p. 1463]).

Lema 1.19. *Per a una constant C que només depèn de n, tenim*

$$|a_{2p}| \leq \frac{C}{(p-1)!4^p} \sum_{j=1}^{p} ||P_{2j}||_\infty, \qquad 1 \leq p \leq N-1$$

i

$$|a_{2p}^N| \leq \frac{C}{4^p} \binom{\frac{n}{2}+N-1}{N-1} \sum_{j=1}^{N-1} ||P_{2j}||_\infty, \qquad 1 < N \leq p.$$

Hem de veure que per a cada ξ_0 de l'esfera, la successió $S_N\chi_B(r\xi_0)$ convergeix uniformement en $0 \leq r \leq 1$. Per a $1 \leq N \leq M$,

$$\begin{aligned}|\widehat{S_N\chi_B}(r\xi_0) - \widehat{S_M\chi_B}(r\xi_0)| &\leq \sum_{p\geq N} |a_{2p}^N| r^{2p} + \sum_{p=N}^{M-1} |a_{2p}| r^{2p} + \sum_{p\geq M} |a_{2p}^M| r^{2p} \\ &\leq C\left(\frac{1}{4^N}\binom{\frac{n}{2}+N-1}{N-1} + \sum_{p\geq N}\frac{1}{(p-1)!4^p}\right)\sum_{j=1}^{\infty} ||P_{2j}||_\infty,\end{aligned}$$

que és clar que tendeix a 0 quan N tendeix a ∞. Fent tendir N a ∞ en (1.30), obtenim

$$\left|\sum_{p=1}^{\infty} a_{2p}(\xi_0) r^{2p}\right| \leq C|\widehat{\text{v.p. } K}(\xi_0)|, \qquad 0 \leq r \leq 1, \qquad |\xi_0| = 1.$$

En aquest punt podrem seguir la prova que hem presentat a la secció prèvia, perquè els coeficients a_{2p}^N s'estabilitzen. Això permet que argumentem com en el cas polinomial. L'única diferència recau en el fet de que ara tractem amb sumes infinites, però no topem amb problemes de convergència.

Aquest argument que hem explicat pel cas parell i per $\omega = 1$, també és vàlid pels altres casos, després de tenir en compte els detalls que llistem aquí.

Per provar que *(b)* implica *(c)* en el Teorema 1.1 per a qualsevol $\omega \in A_p$, hauríem d'utilitzar

$$\|b_{2j} * f\|_{L^p(\omega)} \leq C\|b_{2j}\|_{L^\infty(B)}\|Mf\|_{L^p(\omega)} \leq C(2j)^{2n+2}\|f\|_{L^p(\omega)}$$

per obtenir la desigualtat anàloga a (1.29).

Per poder demostrar que *(d)* implica *(c)* en el Teorema 1.1, fem notar que si $c_j > 0$ i $\sum_{j=1}^{\infty} c_j = 1$, llavors $\|\sum g_j\|_{1,\infty} \le \sum c_j^{-1}\|g_j\|_{1,\infty}$. Tenim

$$\begin{aligned}
\|\sum_{j>N}\frac{P_{2j}(x)}{|x|^{2j+n}}\chi_{\overline{B}^c} * f\|_{1,\infty} &= \|\sum_{j>N}\text{v.p. }\frac{P_{2j}(x)}{|x|^{2j+n}} * b_{2j} * f\|_{1,\infty} \\
&\le \sum_{j>N} j^2\|\text{v.p. }\frac{P_{2j}(x)}{|x|^{2j+n}} * b_{2j} * f\|_{1,\infty} \\
&\le \sum_{j>N} j^2\|\frac{P_{2j}(x)}{|x|^{2j+n}}\|_{L^1\to L^{1,\infty}}\|b_{2j} * f\|_1 \\
&\le \sum_{j>N} j^2\|\frac{P_{2j}(x)}{|x|^{2j+n}}\|_{L^1\to L^{1,\infty}}\|b_{2j}\|_1\|f\|_1 \\
&\le C\|f\|_1\sum_{j>N} j^2\|\frac{P_{2j}(x)}{|x|^{2j+n}}\|_{L^1\to L^{1,\infty}}(2j)^{2n+2} \\
&\le C\|f\|_1\sum_{j>N}(\|P_{2j}\|_\infty + \|\nabla P_{2j}\|_\infty)(2j)^{2n+4},
\end{aligned}$$

i, per tant, per a totes les funcions $f \in H^1(\mathbb{R}^n)$,

$$\begin{aligned}
\|S_N\chi_B * f\|_{1,\infty} &\le 2(\|T_N^1 f\|_{1,\infty} + \|\text{v.p. }K_N * b_{2N} * f\|_{1,\infty}) \\
&\le 4(\|T^1 f\|_{1,\infty} + \|\sum_{j>N}\frac{P_{2j}(x)}{|x|^{2j+n}}\chi_{\overline{B}^c} * f\|_{1,\infty}) + 2\|\text{v.p. }K_N * b_{2N} * f\|_{1,\infty}) \\
&\le C(\|Tf\|_1 + \|f\|_1\sum_{j>N}(\|P_{2j}\|_\infty + \|\nabla P_{2j}\|_\infty)(2j)^{2n+4} \\
&\qquad + \|\text{v.p. }K_N * b_{2N} * f\|_{1,\infty}).
\end{aligned}$$

Un altre cop, utilitzant el Lema 1.3, el Lema 1.16 i el Lema 1.17, obtenim, per a $\xi \ne 0$,

$$|\widehat{S_N\chi_B}(\xi)| \le C\left(|\widehat{\text{v.p. }K}(\xi)| + |\widehat{\text{v.p. }K_N}(\xi)| + \sum_{j>N}(\|P_{2j}\|_\infty + \|\nabla P_{2j}\|_\infty)(2j)^{2n+4}\right)$$

tal i com volíem.

1.3.2 El cas senar

La implicació $(b) \Rightarrow (c)$ del Teorema 1.2 es pot adaptar de la següent manera. T és senar i les funcions b_{2j+1} són de BMO. Pel Lema 1.17, tenim que $\|\widehat{b_{2j+1}}\|_\infty \le C$, $\|b_{2j+1}\|_{\text{BMO}} \le C(2j+1)^{2n}$ i $\|b_{2j+1}\|_2 \le C(2j+1)^{2n}$. A més a més, $|b_{2j+1}(x)| \le C(2j+1)^{2n}|x|^{-n-1}$ si $|x| > 2$. Aleshores, procedint de la mateixa manera que en la demostració de (1.24), obtenim

$$\|b_{2j+1} * f\|_{L^p(\omega)} \le C(2j+1)^{2n}\|f\|_{L^p(\omega)}$$

i, per tant, tenim la desigualtat anàloga a (1.29).

Capítol 2

Relaxant la regularitat del nucli

El principal objectiu d'aquest capítol és relaxar les condicions del nucli en els Teoremes 1 i 2 de la secció de Preliminars. Més concretament, demostrarem el següent

Teorema 2.1. *Els Teoremes 1 i 2 són certs quan* Ω *és una funció homogènia de grau* 0 *que satisfà la propietat de cancel·lació* $\int_{|x|=1} \Omega(x) d\sigma(x) = 0$ *i tal que la seva restricció a l'esfera unitària* S^{n-1} *és de la classe* $\mathcal{C}^{\alpha}(S^{n-1})$*, per a algun* α *finit que depèn de la dimensió* n *i del grau de* d *del primer polinomi en la descomposició de* Ω *en esfèrics harmònics.*

Ens centrarem en el cas d'operadors amb nucli parell, degut a que en el cas senar es procediria de manera anàloga. Primer veurem la demostració de que la condició algebraica (iii) del Teorema 1 implica la desigualtat puntual (i) del Teorema 1 per a dimensions superiors ($n \geq 3$). Llavors provarem el mateix resultat a $\mathbb{R}^2$, veient que α no depèn del grau del primer polinomi en la descomposició de Ω en esfèrics harmònics. En la Secció 2.3 veurem que el nostre mètode no ens permet prescindir de la dependència en el grau del primer polinomi quan $n \geq 4$. A la Secció 2.4 ens queda provar que (ii) del Teorema 1 implica (iii) del Teorema 1.

Els procediments que utilitzem ens porten a demanar un cert grau de diferenciabilitat α, que quedarà fixat al final de cada secció.

2.1 Demostració de (iii) $\Longrightarrow$ (i) a $\mathbb{R}^n$, $n \geq 3$, cas parell

Comencem aclarint alguns fets sobre el desenvolupament de Ω en esfèrics harmònics quan $\Omega \in \mathcal{C}^{\alpha}(S^{n-1})$,

$$\Omega(x) = \sum_{j=1}^{\infty} P_j(x), \quad x \in S^{n-1},$$

on cada P_j és un polinomi homogeni harmònic de grau j. Es compleix la següent identitat ([St, p. 70])

$$\sum_{j\geq 1} (j(j+n-2))^r ||P_j||_2^2 = (-1)^r \int_{S^{n-1}} \Delta_S^r \Omega \, \Omega d\sigma,$$

per a $r \leq \frac{\alpha}{2}$ (ja que només podem derivar α cops), on Δ_S denota el Laplacià esfèric. Si $Y(x)$ és una funció definida a l'esfera, llavors $\Delta_S Y(x)$ és la restricció a S^{n-1} del Laplacià ordinari aplicat a $\widetilde{Y}(x)$, on $\widetilde{Y}(x)$ és l'extensió homogènia de grau zero de $Y(x)$ a un entorn de l'esfera.

Llavors, utilitzant la desigualtat de Hölder,

$$\sum_{j\geq 1}(j(j+n-2))^r||P_j||_2^2 \leq ||\Delta_S^r\Omega||_2||\Omega||_2,$$

per a $r \leq \frac{\alpha}{2}$, on la norma L^2 es pren respecte de $d\sigma$. Aleshores, utilitzant la desigualtat de Schwarz's

$$\sum_{j\geq 1} j^M||P_j||_2 < \infty, \quad \text{si} \quad M \leq \frac{\alpha}{2} - 1. \tag{2.1}$$

Volem veure que també tenim una acotació per a la norma del suprem $\sum_{j\geq 1} j^M||P_j||_\infty < \infty$, per a un cert rang de M's. El lema següent ens dóna una acotació de la norma $||\cdot||_\infty$ en termes de la norma $||\cdot||_2$ per a polinomis homogenis.

Lema 2.2.

(i) Per a qualsevol polinomi homogeni Q de grau q, $||Q||_\infty \leq Cq^{\frac{n-1}{2}}||Q||_2$, on C és un a constant positiva que només depèn de n.

(ii) A més, si el polinomi Q és homogeni i harmònic, tenim una cota millor, $||Q||_\infty \leq Cq^{\frac{n-2}{2}}||Q||_2$.

Demostració.

(i) Està provat, per exemple en [MOV, p. 1446].

(ii) La diferència està en que el subespai de $L^2(d\sigma)$ de totes les restriccions a S^{n-1} de tots els polinomis homogenis de grau q té dimensió $\binom{n+q-1}{q} \simeq q^{n-1}$, però si prenem polinomis homogenis i harmònics, la dimensió del subespai és de l'ordre de q^{n-2} (e.g. [SW2, p. 139-140]).

□

Utilitzant el Lema 2.2 i (2.1), obtenim

$$\sum_{j\geq 1} j^M||P_j||_\infty \leq C\sum_{j\geq 1} j^{M+\frac{n-2}{2}}||P_j||_2 < \infty, \quad \text{si } M \leq \frac{\alpha - n}{2}. \tag{2.2}$$

Recordem que ara treballem amb un operador homogeni de Calderón-Zygmund de grau parell, o sigui que el desenvolupament d'Ω en esfèrics harmònics només conté polinomis de grau parell. Així tenim

$$\Omega(x) = \sum_{j\geq 1} P_{2j}(x), \tag{2.3}$$

on P_{2j} és el polinomi de grau $2j$.

Per hipòtesi, hi ha un polinomi homogeni i harmònic P de grau $2d$ que divideix cadascun dels altres P_{2j}. D'una altra forma, $P_{2j} = PQ_{2j-2d}$, on Q_{2j-2d} és un polinomi homogeni de grau $2j-2d$. Estem interessats en com la convergència de $\sum P_{2j}$ es transmet a $\sum Q_{2j-2d}$. Comencem veient com és la convergència $\sum_{j\geq d} j^M ||Q_{2j-2d}||_\infty$.

En el següent lema que podem trobar en [MOV, Lemma 7] veiem que, quan dividim dos polinomis homogenis, la norma del suprem (en S^{n-1}) del quocient està controlada per la norma del suprem del divident.

Lema 2.3. *Sigui P un polinomi homogeni harmònic que no és idènticament zero. Si d és el grau de P, llavors existeix un ε positiu depenent de d, i una constant C positiva depenent de P i de la dimensió de l'espai n, tals que*

$$||Q||_\infty \leq Cq^{(2(n-1))/\varepsilon} ||PQ||_\infty,$$

per a tot polinomi homogeni Q de grau q.

Demostració. Suposem que per a algun ε positiu,

$$\int_{|x|=1} \frac{1}{|P(x)|^\varepsilon} d\sigma(x) < \infty. \tag{2.4}$$

Llavors, utilitzant el lema previ 2.2 i la desigualtat de Schwarz,

$$\begin{aligned}
||Q||_\infty &\leq Cq^{(n-1)/2}||Q||_2 \\
&\leq Cq^{(n-1)/2} \left(\int_{|x|=1} \frac{1}{|P(x)|^\varepsilon} d\sigma(x) \right)^{1/4} \left(\int_{|x|=1} |P(x)|^\varepsilon |Q|^4 d\sigma(x) \right)^{1/4} \\
&\leq Cq^{(n-1)/2}||PQ||_\infty^{\varepsilon/4} \left(\int_{|x|=1} |Q|^{4-\varepsilon} d\sigma(x) \right)^{1/4} \\
&\leq Cq^{(n-1)/2}||PQ||_\infty^{\varepsilon/4} ||Q||_\infty^{1-\varepsilon/4}.
\end{aligned}$$

Així, $||Q||_\infty^{\varepsilon/4} \leq Cq^{(n-1)/2}||PQ||_\infty^{\varepsilon/4}$, i obtenim el resultat desitjat.
Només queda provar (2.4). Per un conegut resultat de Ricci i Stein ([RS]), $|P(x)|$ és un pes de la classe A^∞. A més, si $\varepsilon d < 1$, llavors

$$\int_{|x|<1} \frac{1}{|P(x)|^\varepsilon} dx \leq C(\varepsilon, d) \left(\int_{|x|<1} |P(x)| dx \right)^{-\varepsilon} < \infty.$$

Com que P és un polinomi homogeni, fent el canvi a coordenades esfèriques es compleix (2.4). $\square$

És important remarcar que l'exponent de q depèn del grau del polinomi P. Veurem que aquesta dependència canvia les condicions que hem d'imposar a la diferenciabilitat del nucli K. Com provarem més endavant a la Secció 2.2, en el cas planar podem evitar aquesta dificultat pel fet de que estem aplicant el Lema 2.3 a polinomis P que són homogenis però també harmònics. En el pla, els polinomis homogenis i harmònics descomposen en producte de polinomis de grau 1. Això fa que a $\mathbb{R}^2$ tinguem un millor resultat, no tenim la dependència amb el grau de P. A la Secció 2.3 veurem que a $\mathbb{R}^n$, amb $n \geq 4$, no podem evitar aquesta dependència amb el grau de P, i intuïm que tenim el mateix problema a $\mathbb{R}^3$.

Utilitzant el Lema 2.3, veurem la convergència de les sèries de Q_{2j-2d}'s a partir de la convergència de les sèries de P_{2j}'s. Recordem que estem al cas parell i que P és un polinomi harmònic de grau $2d$ que divideix tots els polinomis P_{2j}. Denotem $M_0 = 2(n-1)/\varepsilon$, per $\varepsilon < \frac{1}{2d}$, i tenim

$$||Q_{2j-2d}||_\infty \leq C(n,P)(2j-2d)^{M_0}||P_{2j}||_\infty$$

o sigui que

$$\sum_{j\geq d} j^M ||Q_{2j-2d}||_\infty \leq C(n,P)\sum_{j\geq 1} j^{M+M_0}||P_{2j}||_\infty < \infty,$$

per a $M + M_0 \leq \frac{\alpha-n}{2}$, és a dir, per a $M \leq \frac{\alpha-n}{2} - \frac{2(n-1)}{\varepsilon}$, i com que $\varepsilon < \frac{1}{2d}$, obtenim

$$\sum_{j\geq d} j^M ||Q_{2j-2d}||_\infty < \infty, \quad \text{si } M < \frac{\alpha-n}{2} - 4d(n-1).$$

Volem traslladar aquesta convergència a $\sum_j Q_{2j-2d}$. Observem com a partir de

$$\sum_j j^M ||Q_{2j-2d}||_\infty < \infty, \quad \text{per a tot } M < \frac{\alpha-n}{2} - 4d(n-1),$$

podem garantir que

$$\mathcal{Q} := \sum_j Q_{2j-2d} \in \mathcal{C}^{S_0}, \quad \text{si } S_0 < \frac{\frac{\alpha-n}{2} - 4d(n-1)}{2},$$

és a dir, $\mathcal{Q}$ és la restricció a S^{n-1} d'una funció $\widetilde{\mathcal{Q}}$ de classe $\mathcal{C}^{S_0}$ a un entorn de S^{n-1}. Si $\frac{3}{4} < |x| < \frac{5}{4}$, sigui

$$\widetilde{\mathcal{Q}}(x) = \mathcal{Q}\left(\frac{x}{|x|}\right) = \sum_j Q_{2j-2d}\left(\frac{x}{|x|}\right).$$

És obvi que la condició $\sum_j ||Q_{2j-2d}||_\infty < \infty$ ens dóna la continuïtat de $\widetilde{\mathcal{Q}}$. Vegem com podem assegurar que $\widetilde{\mathcal{Q}} \in \mathcal{C}^1$. Considerem la derivada parcial de cada terme

$$\begin{aligned}
\partial_{x_i}\left(Q_{2j-2d}\left(\frac{x}{|x|}\right)\right) &= \partial_{x_i}\left(|x|^{2d-2j}Q_{2j-2d}(x)\right) \\
&= -(j-d)\frac{|x|^{2d-2j}}{|x|^2}2x_iQ_{2j-2d}(x) + |x|^{2d-2j}\left(\partial_{x_i}Q_{2j-2d}\right)(x) \\
&= -(j-d)\frac{2x_i}{|x|^2}Q_{2j-2d}\left(\frac{x}{|x|}\right) + \frac{1}{|x|}\left(\partial_{x_i}Q_{2j-2d}\right)\left(\frac{x}{|x|}\right).
\end{aligned}$$

Recordem la desigualtat de Bernstein-Markov per a polinomis a la bola unitat (e.g. [Sa])

$$||\partial_{x_i} P||_{L^\infty(B)} \leq (\mathrm{grau}\, P)^2 ||P||_{L^\infty(B)}.$$

Aleshores

$$\begin{aligned} ||\partial_{x_i} Q_{2j-2d}(\cdot)||_{L^\infty\left(\frac{3}{4}<|x|<\frac{5}{4}\right)} &\leq 2(j-d)\frac{4}{3}||Q_{2j-2d}||_{L^\infty(S^{n-1})} + (j-d)^2\frac{4}{3}||Q_{2j-2d}||_{L^\infty(S^{n-1})} \\ &\leq 4(j-d)^2||Q_{2j-2d}||_{L^\infty(S^{n-1})}. \end{aligned}$$

Per tant, de la condició $\sum j^2 ||Q_{2j-2d}||_\infty < \infty$ obtenim que $\widetilde{\mathcal{Q}} \in \mathcal{C}^1(S^{n-1})$. Iterant aquest procediment, tenim que

$$\sum j^{2k} ||Q_{2j-2d}||_\infty < \infty \quad \text{implica que} \quad \widetilde{\mathcal{Q}} \in \mathcal{C}^k(S^{n-1}). \tag{2.5}$$

Aplicant-ho a les nostres sumes, obtenim que $\sum_j Q_{2j-2d}$ és convergent en $\mathcal{C}^M$, per a tot $M < \frac{\alpha-n}{4} - 2d(n-1)$.

Per hipòtesi, $T = R \circ U$, on R és la transformada de Riesz d'ordre superior associada a P. El multiplicador de Fourier de T és

$$\sum_{j=d}^{\infty} \gamma_{2j} \frac{P_{2j}(\xi)}{|\xi|^{2j}} = \gamma_{2d} \frac{P(\xi)}{|\xi|^{2d}} \sum_{j \geq d} \frac{\gamma_{2j}}{\gamma_{2d}} \frac{Q_{2j-2d}(\xi)}{|\xi|^{2j-2d}}, \quad \xi \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}.$$

Llavors tenim que el multiplicador de Fourier de U és

$$\mu(\xi) = \gamma_{2d}^{-1} \sum_{j \geq d} \gamma_{2j} \frac{Q_{2j-2d}(\xi)}{|\xi|^{2j-2d}},$$

on $\gamma_{2j} \simeq (2j)^{-n/2}$ [SW2, p. 226]. Com que $\sum_{j \geq d} j^{M-\frac{n}{2}} ||Q_{2j-2d}||_\infty < \infty$ si $M - \frac{n}{2} < \frac{\alpha-n}{2} - 4d(n-1)$, tenim que la sèrie en la definició de $\mu(\xi)$ és convergent en $\mathcal{C}^M(S^{n-1})$ per a $M < \frac{\alpha}{4} - 2d(n-1)$.

Si prenem una suma parcial amb N prou gran de la sèrie (2.3), obtenim un operador polinomial T_N amb nucli

$$K_N(x) = \sum_{j=d}^{N} \frac{P_{2j}(x)}{|x|^{2j+n}}, \quad x \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}.$$

Quan $N \geq d$, considerem

$$\mu_N(\xi) = \gamma_{2d}^{-1} \sum_{j=d}^{N} \gamma_{2j} \frac{Q_{2j-2d}(\xi)}{|\xi|^{2j-2d}}, \quad \xi \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}.$$

Aleshores, $T_N = R \circ U_N$, on U_N és l'operador amb multiplicador de Fourier $\mu_N(\xi)$. Com que μ és invertible, tenim que $\widehat{\mu}(\xi) \neq 0$, aleshores prenem N prou gran per tal que $\mu_N(\xi)$ no s'anul·li a l'esfera S^{n-1}.

Com que T_N satisfà la condició (*iii*) del Teorema 1, podem aplicar els resultats del cas polinomial. En particular,

$$K_N(x)\chi_{\mathbb{R}^n\setminus\overline{B}}(x) = T_N(b_N)(x) + T_N(\beta_N)(x),$$

on b_N i β_N són com b i β del cas polinomial que hem esmentat als Preliminars (veure 0.12). Volem fer un argument de compacitat, pel qual necessitem acotacions uniformes en N. Utilitzarem el lema següent que podem trobar a [MOV, p. 1449].

Lema 2.4. *Existeix una constant C que nomes depèn de n tal que*

(i) $|\widehat{b_N}(\xi)| \leq C$, $\xi \in \mathbb{R}^n$;

(ii) $||b_N||_{L^\infty(B)} \leq C(2N)^{2n+2}$;

(iii) $||\nabla b_N||_{L^\infty(B)} \leq C(2N)^{2n+4}$.

Ara volem veure que podem trobar una funció γ en $L^\infty(\mathbb{R}^n)$ tal que

$$K(x)\chi_{\mathbb{R}^n\setminus\overline{B}}(x) = T(\gamma)(x), \quad x \in \mathbb{R}^n.$$

Això està explicat als Preliminars pels operadors polinomials, però la cota que trobàvem per $||\gamma||_{L^\infty(\mathbb{R}^n)}$ depenia del grau del polinomi que defineix l'operador, o sigui que no ens val pel cas general.

Escrivim

$$K(x)\chi_{\mathbb{R}^n\setminus\overline{B}}(x) = \sum_{j\geq 1} \frac{P_{2j}(x)}{|x|^{2j+n}}\chi_{\mathbb{R}^n\setminus\overline{B}}(x) = \sum_{j\geq 1} T_j(b_j)(x),$$

on T_j és la transformada de Riesz d'ordre superior amb nucli $P_{2j}(x)/|x|^{2j+n}$ i b_j és la funció que apareix quan escrivim

$$\frac{P_{2j}(x)}{|x|^{2j+n}}\chi_{\mathbb{R}^n\setminus\overline{B}}(x) = T_j(b_j)(x).$$

Recordem que cada b_j és una funció mesurable acotada amb suport a la bola B. El multiplicador de Fourier de T_j és

$$\gamma_{2j}\frac{P_{2j}(\xi)}{|\xi|^{2j}} = \gamma_{2d}\frac{P(\xi)}{|\xi|^{2d}}\frac{\gamma_{2j}}{\gamma_{2d}}\frac{Q_{2j-2d}(\xi)}{|\xi|^{2j-2d}}, \quad \xi \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}.$$

Definim S_j com l'operador que té el següent multiplicador de Fourier:

$$\frac{\gamma_{2j}}{\gamma_{2d}}\frac{Q_{2j-2d}(\xi)}{|\xi|^{2j-2d}}, \quad \xi \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}.$$

Com que $T_j = R \circ S_j$ i $T = R \circ U$, tenim

$$\begin{aligned} K(x)\chi_{\mathbb{R}^n \setminus \overline{B}}(x) &= \sum_{j \geq d} (R \circ S_j)(b_j) \\ &= \sum_{j \geq d} T\left((U^{-1} \circ S_j)(b_j)\right) \\ &= T\left(\sum_{j \geq d} (U^{-1} \circ S_j)(b_j)\right). \end{aligned}$$

L'última identitat es compleix per la convergència absoluta de la sèrie $\sum_{j \geq d}(U^{-1} \circ S_j)(b_j)$ en $L^2(\mathbb{R}^n)$. I això surt de l'acotació

$$\begin{aligned} \sum_{j \geq d} ||(U^{-1} \circ S_j)(b_j)||_2 &\leq C \sum_{j \geq d} ||Q_{2j-2d}||_\infty ||b_j||_{L^2(\mathbb{R}^n)} \\ &\leq \sum_{j \geq d} ||Q_{2j-2d}||_\infty ||b_j||_{L^\infty(B)} \\ &\leq C \sum_{j \geq d} (2j)^{2n+2} ||Q_{2j-2d}||_\infty < \infty, \end{aligned}$$

on l'última igualtat es compleix si $2n + 2 < \frac{\alpha - n}{2} - 4d(n-1)$. D'aquesta condició obtenim una primera restricció per la diferenciabilitat de Ω. Ens diu que necessitem

$$\alpha > 5n + 4 + 8d(n-1), \tag{2.6}$$

on n és la dimensió de l'espai $\mathbb{R}^n$ i $2d$ és el grau del polinomi P que divideix tots els altres.

Ara veurem que $\sum_{j \geq d}(U^{-1} \circ S_j)(b_j)$ convergeix uniformement en $\mathbb{R}^n$ cap a una funció γ, i llavors ja tindrem $K(x)\chi_{\mathbb{R}^n \setminus \overline{B}}(x) = T(\gamma)(x)$, per a $x \in \mathbb{R}^n$.

Observem que $U^{-1} \circ S_j$ no és necessàriament un operador de Calderón-Zygmund, perquè la integral sobre l'esfera pot no anul·lar-se. Però podem escriure $U^{-1} \circ S_j = c_j I + V_j$, on

$$c_j = \frac{\gamma_{2j}}{\gamma_{2d}} \int_{S^{n-1}} \mu(\xi)^{-1} Q_{2j-2d}(\xi) d\sigma(\xi)$$

i V_j és un operador de Calderón-Zygmund, que té multiplicador

$$\mu(\xi)^{-1} \frac{\gamma_{2j}}{\gamma_{2d}} \frac{Q_{2j-2d}(\xi)}{|\xi|^{2j-2d}} - c_j.$$

Remarquem que el multiplicador μ^{-1} associat a l'operador U^{-1} està en $\mathcal{C}^M$ si $M < \frac{\alpha}{4} - 2d(n-1)$, ja que té la mateixa diferenciabilitat que μ. Aleshores, el multiplicador de V_j també està en $\mathcal{C}^M$ pel mateix rang de M's.

Ara

$$\sum_{j\geq d}(U^{-1}\circ S_j)(b_j)=\sum_{j\geq d}c_jb_j+\sum_{j\geq d}V_j(b_j),$$

i la primera sèrie no té dificultat ja que, pel Lema 2.4,

$$\sum_{j\geq d}|c_j|||b_j||_{L^\infty(B)}\leq C\sum_{j\geq d}(2j)^{-n/2}(2j)^{2n+2}||Q_{2j-2d}||_\infty<\infty,$$

si $-\frac{n}{2}+2n+2<\frac{\alpha-n}{2}-4d(n-1)$. D'aquí treiem una altra condició per la regularitat inicial α,

$$\alpha>4n+4+8d(n-1). \tag{2.7}$$

La segona sèrie porta una mica més de feina. Pels Lemes 4 i 2.4, tenim

$$\begin{aligned}||V_j(b_j)||_{L^\infty(\mathbb{R}^n)}\leq&C||V_j||_{CZ}\left(||b_j||_{L^\infty(B)}+||\nabla b_j||_{L^\infty(B)}\right)\\ \leq& C(2j)^{2n+4}||V_j||_{CZ}.\end{aligned}$$

Per acotar la constant de Calderón-Zygmund del nucli de l'operador V_j no farem servir una expressió del nucli, ja que no la tenim. Però com que coneixem el multiplicador de V_j, acotarem l'operador en termes del seu respectiu multiplicador. Necessitem el següent lema que és el Lema 9 de [MOV, p. 1452].

Lema 2.5. *Sigui V un operador homogeni de Calderón-Zygmund amb multiplicador de Fourier m. Llavors, existeix una constant C que depèn nomes de n, tal que*

$$||V||_{CZ}\leq C||\Delta_S^{n+3}m||_2^{1/2}||m||_2^{1/2},$$

on Δ_S és el Laplacià esfèric i la norma L^2 es pren respecte $d\sigma$.

Per la demostració, podem seguir [MOV]. És important remarcar que necessitem la desigualtat

$$|\partial^\alpha\mu_N^{-1}(\xi)|\leq C,\quad |\xi|=1,\quad 0\leq|\alpha|\leq 2(n+3),$$

amb C que només depengui de n i μ, i que no depengui de N. Recordem que el multiplicador de V_j ve donat per la següent expressió,

$$\mu(\xi)^{-1}\,\frac{\gamma_{2j}}{\gamma_{2d}}\frac{Q_{2j-2d}(\xi)}{|\xi|^{2j-2d}}-c_j$$

i que la sèrie de la definició de $\mu(\xi)$ està en $\mathcal{C}^M$ si $M<\frac{\alpha}{4}-2d(n-1)$. Llavors, el nucli de V_j té aquesta mateixa diferenciabilitat i veiem que necessitem $2(n+3)<\frac{\alpha}{4}-2d(n-1)$, obtenint així una nova condició per a α,

$$\alpha>8n+24+8d(n-1). \tag{2.8}$$

Ara, utilitzant el Lema 2.5, per estimar la norma de Calderón-Zygmund de V_j és suficient acotar la norma L^2 del seu multiplicador i les seves $2(n+3)$ derivades. O sigui que només hem de fixar-nos en la norma $L^2(d\sigma)$ de ∇^kQ_{2j-2d} per a $0\leq k\leq 2(n+3)$. De fet, acotarem la norma L^∞ utilitzant un argument d'inducció. Considerem primer, doncs, el cas $k = 0$.

Recordem que $P_{2j} = PQ_{2j-2d}$ on P és un polinomi de grau $2d$. Pel Lema 2.3,

$$\begin{aligned}
||Q_{2j-2d}||_\infty &\leq C(2j-2d)^{\frac{2(n-1)}{\varepsilon}}||PQ_{2j-2d}||_\infty \\
&\leq C(2j-2d)^{\frac{2(n-1)}{\varepsilon}}(2j)^{\frac{n-2}{2}}||P_{2j}||_2 \\
&= Cj^{\frac{2(n-1)}{\varepsilon}+\frac{n-2}{2}}||P_{2j}||_2,
\end{aligned}$$

on hem utilitzat el Lema 2.2 a la segona desigualtat, i tenim que ε és tal que $\varepsilon < \frac{1}{2d}$.

Fem el cas $k = 1$. Primer farem servir el Lema 2.3 i que $\nabla P_{2j} = \nabla PQ_{2j-2d} + P\nabla Q_{2j-2d}$.

$$\begin{aligned}
||\nabla Q_{2j-2d}||_\infty &\leq C(2j-2d-1)^{\frac{2(n-1)}{\varepsilon}}||P\nabla Q_{2j-2d}||_\infty \\
&\leq Cj^{\frac{2(n-1)}{\varepsilon}}(||\nabla P_{2j}||_\infty + ||\nabla PQ_{2j-2d}||_\infty) \\
&\leq Cj^{\frac{2(n-1)}{\varepsilon}}(||\nabla P_{2j}||_\infty + ||Q_{2j-2d}||_\infty) \\
&\leq Cj^{\frac{2(n-1)}{\varepsilon}}\left((2j)^{\frac{n}{2}+1}||P_{2j}||_2 + j^{\frac{2(n-1)}{\varepsilon}+\frac{n-2}{2}}||P_{2j}||_2\right) \\
&\leq Cj^{\frac{2(n-1)}{\varepsilon}+\frac{2(n-1)}{\varepsilon}+\frac{n-2}{2}}||P_{2j}||_2,
\end{aligned}$$

També hem utilitzat el cas anterior ($k = 0$) i la següent desigualtat que podem trobar a [St, p. 276]:

$$||\nabla^\alpha P_{2j}||_\infty \leq (2j)^{\frac{n}{2}+\alpha}||P_{2j}||_2.$$

De la mateixa manera obtenim

$$||\nabla^k Q_{2j-2d}||_\infty \leq Cj^{\frac{2(k+1)(n-1)}{\varepsilon}+\frac{n-2}{2}}||P_{2j}||_2, \quad \text{per a} \quad \varepsilon < \frac{1}{2d},$$

per a tota $0 \leq k \leq 2(n+3)$.

Finalment obtenim

$$\begin{aligned}
\sum ||V_j(b_j)||_{L^\infty(\mathbb{R}^n)} &\leq C\sum(2j)^{2n+4}||V_j||_{CZ} \\
&\leq C\sum(2j)^{2n+4}||m||_2^{1/2}||\Delta_S^{n+3}m||_2^{1/2} \\
&\leq C\sum(2j)^{2n+4}\left(j^{-n/2}||Q_{2j-2d}||_\infty\right)^{1/2} \\
&\qquad\qquad \cdot\left(j^{-n/2}\sum_{k=0}^{2n+6}\binom{2n+6}{k}||\nabla^k Q_{2j-2d}||_\infty\right)^{1/2} \\
&\leq C\sum(2j)^{2n+4}\left(j^{-n/2}j^{\frac{2(n-1)}{\varepsilon}+\frac{n-2}{2}}||P_{2j}||_2\right)^{1/2} \\
&\qquad\qquad \cdot\left(j^{-n/2}\sum_{k=0}^{2n+6}j^{\frac{2(k+1)(n-1)}{\varepsilon}+\frac{n-2}{2}}||P_{2j}||_2\right)^{1/2} \\
&= C\sum j^{3n+\frac{2(n-1)}{\varepsilon}+\frac{13}{2}}||P_{2j}||_2 < \infty
\end{aligned}$$

si $3n + \frac{2(n-1)}{\varepsilon} + \frac{13}{2} \leq \frac{\alpha}{2} - 1$, utilitzant (2.1). Recordem que això és per a tot $\varepsilon < \frac{1}{2d}$ i aplicant-ho obtenim una última condició per la diferenciabilitat α del nucli de l'operador inicial,

$$\alpha > 6n + 15 + 8d(n-1), \tag{2.9}$$

on remarquem que n és la dimensió de l'espai i d és el grau del primer polinomi en la descomposició del nucli. Perquè es compleixin les quatre condicions (2.6), (2.7), (2.8) i (2.9) que cal demanar per α, és suficient que passi la tercera que hem obtingut. Així concluïm que la sèrie

$$\sum_{j\geq d} (U^{-1} \circ S_j)(b_j)$$

convergeix uniformement en $\mathbb{R}^n$ si es compleix la restricció

$$\alpha > 8n + 24 + 8d(n-1)$$

per a la diferenciabilitat inicial del nucli. I així hem provat que existeix una funció γ en $L^\infty(\mathbb{R}^n)$ tal que

$$K(x)\chi_{\mathbb{R}^n \setminus \overline{B}}(x) = T(\gamma)(x).$$

Ara, per acabar la demostració de la condició suficient, ens falta veure un argument de compacitat.

En el cas polinomial es veu que

$$K_N(x)\chi_{\mathbb{R}^n \setminus \overline{B}} = T_N(b_N)(x) + T_N(\beta_N)$$

i acabem de veure que també tenim

$$K_N(x)\chi_{\mathbb{R}^n \setminus \overline{B}} = T_N(\gamma_N)(x), \quad \text{with } \gamma_N = \sum_{j=d}^{N} (U_N^{-1} \circ S_j)(b_j).$$

Amb la regularitat que imposem, tenim $|\partial^\alpha \mu_N^{-1}(\xi)| \leq C$ si $|\xi| = 1$ i $0 \leq |\alpha| \leq 2(n+3)$, amb C que només depèn de n i μ, o sigui que podem aplicar a T_N l'estimació de la norma del suprem de γ en $\mathbb{R}^n$, i així obtenim una acotació uniforme per $||\gamma_N||_{L^\infty(\mathbb{R}^n)}$. Com que T_N és injectiu, obtenim que $b_N + \beta_N = \gamma_N$. Aleshores, $b_N + \beta_N$ està uniformement acotada en $L^\infty(\mathbb{R}^n)$.

Per la definició de γ_N i aplicant els càlculs fets en el cas polinomial, obtenim el següent decaïment

$$|\gamma_N(x)| \leq \frac{C}{|x|^{n+1}}, \quad \text{si } |x| \geq 2,$$

cosa que no podíem obtenir directament de la construcció de γ.

Anem a aconseguir propietats d'acotació i de decaïment per a γ.

Tenim

$$\widehat{\gamma_N}(\xi) = \sum_{j=d}^{N} \frac{1}{\mu_N(\xi)} \frac{\gamma_{2j}}{\gamma_{2d}} \frac{Q_{2j-2d}(\xi)}{|\xi|^{2j-2d}} \widehat{b_j}(\xi),$$

aplicant el Lema 2.4 obtenim

$$\begin{aligned} ||\widehat{\gamma_N}||_{L^\infty(\mathbb{R}^n)} &\leq C \sum_{j=d}^{N} ||Q_{2j-2d}||_\infty \\ &\leq C \sum_{j=d}^{\infty} ||Q_{2j-2d}||_\infty \\ &\leq C, \end{aligned}$$

on C no depèn de N i a l'última desigualtat estem aplicant que $\sum_{j=d}^{\infty} j^M ||Q_{2j-2d}||_\infty < \infty$, si $M = 0$.
En el cas polinomial, s'ha definit una funció acotada $\beta_{1,N}$ suportada a la bola B tal que $\beta_N = U_N^{-1}(\beta_{1,N})$ i que satisfà $\int \beta_{1,N} dx = 0$. Llavors

$$\widehat{\beta_{1,N}} = \mu_N \widehat{\beta_N} = \mu_N(\widehat{\gamma_N} - \widehat{b_N}),$$

aplicant el Lema 2.4 obtenim

$$||\widehat{\beta_{1,N}}||_{L^\infty(\mathbb{R}^n)} \leq C.$$

Així doncs, passant a una subsucceció i fent tendir N a infinit, podem assumir que

$$\widehat{b_N} \longrightarrow a_0 \quad \text{i} \quad \widehat{\beta_{1,N}} \longrightarrow a_1$$

dèbil $\star$ en $L^\infty(\mathbb{R}^n)$, per tant, aplicant la transformada de Fourier $\mathcal{F}$,

$$b_N \longrightarrow \Phi_0 = \mathcal{F}^{-1}(a_0) \quad \text{i} \quad \beta_{1,N} \longrightarrow \Phi_1 = \mathcal{F}^{-1}(a_1),$$

en la topologia dèbil de les distribucions temperades, on Φ_0 i Φ_1 són distribucions amb suport a $\overline{B}$, ja que són límits debils de funcions suportades a $\overline{B}$. Llavors

$$\langle \Phi_1, 1 \rangle = \lim_{N \to \infty} \int \beta_{1,N}(x) dx = 0. \tag{2.10}$$

Volem mostrar les propietats de convergència de la successió de β_N's. Com que $\widehat{\beta_N}(\xi) = \mu_N^{-1}(\xi)\widehat{\beta_{1,N}}(\xi)$ i $\mu_N^{-1}(\xi) \longrightarrow \mu^{-1}(\xi)$ amb convergència acotada puntualment en $\mathbb{R}^n \setminus \{0\}$, llavors $\widehat{\beta_N} \longrightarrow \mu^{-1} a_1$ en la topologia dèbil $\star$ de $L^\infty(\mathbb{R}^n)$. I aplicant $\mathcal{F}$, $\beta_N \longrightarrow U^{-1}(\Phi_1)$ en la topologia dèbil $\star$ de les distribucions temperades. Recordem que tenim $b_N + \beta_N = \gamma_N$, per tant, fent tendir N a infinit, obtenim

$$\Phi_0 + U^{-1}(\Phi_1) = \gamma.$$

Ara només resta provar el decaïment

$$|\gamma(x)| \leq \frac{C}{|x|^{n+1}}, \quad \text{si } |x| \geq 2.$$

Recordem que Φ_0 i Φ_1 tenen suport en $\overline{B}$ i $U^{-1}(\Phi_1) = \lambda\Phi_1 + V(\Phi_1)$, on λ és un nombre real i V un operador suau i homogeni de Calderón-Zygmund. És a dir, hem de veure el decaïment per a $V(\Phi_1)$. Anomenem L al nucli de V. Regularitzant Φ_1 i utilitzant (2.10), obtenim

$$V(\Phi_1)(x) = \langle \Phi_1, L(x-y)\rangle = \langle \Phi_1, L(x-y) - L(x)\rangle,$$

per a una x fixada tal que $|x| \geq 2$. Cada funció φ infinitament diferenciable en $\mathbb{R}^n$, amb $supp(\varphi) \subset \frac{3}{2}B$, és d'ordre 0 ja que

$$\begin{aligned}
|\langle \Phi_1, \varphi\rangle| &= |\langle a_1, \mathcal{F}^{-1}(\varphi)\rangle| \\
&\leq C||\mathcal{F}^{-1}(\varphi)||_\infty \\
&\leq C||\varphi||_{L^1(\mathbb{R}^n)} \\
&\leq C||\varphi||_{L^\infty(\frac{3}{2}B)},
\end{aligned}$$

on a la primera desigualtat hem utilitzat que la funció φ satisfà

$$\begin{aligned}
|\langle a_1, \varphi\rangle| &= \lim_{N\to\infty} |\langle \beta_{1,N}, \varphi\rangle| \\
&\leq ||\widehat{\beta_{1,N}}||_\infty ||\varphi||_\infty \\
&\leq C||\varphi||_\infty .
\end{aligned}$$

Per tant, no necessitem cap condició extra, amb una sola derivada en fem prou. Ho apliquem a L, que és el nucli d'un operador de Calderón-Zygmund, i obtenim el decaïment que volíem

$$\begin{aligned}
|L(x-y) - L(x)| &\leq C|y||\nabla L(z)| \\
&\leq C|y|\frac{1}{|x|^{n+1}} \\
&\leq \frac{C}{|x|^{n+1}}, \qquad \text{si } |x| \geq 2,
\end{aligned}$$

perquè $|z| = C|x|$ i $|y| \leq \frac{3}{2}$. I això completa la prova de la condició suficient pel cas general, és a dir, hem demostrat que si tenim $\Omega \in \mathcal{C}^\alpha$, per a $\alpha > 8n + 24 + 8d(n-1)$, en un operador que descomposa com $T = R \circ U$, llavors tenim la desigualtat puntual $T^\star f(x) \leq CM(Tf)(x)$, $x \in \mathbb{R}^n$.

2.2 Demostració de $(iii) \Longrightarrow (i)$ a $\mathbb{R}^2$, cas parell

Quan considerem el mateix problema però al pla, és a dir, amb $n = 2$, obtenim un resultat millor. Aconseguim que el resultat final no depengui del grau $2d$ del primer polinomi en la descomposició del nucli Ω.

Teorema 2.6. *El Teorema 1 és cert quan Ω és una funció homogènia de grau 0 que satisfà la propietat de cancel·lació $\int_{|x|=1} \Omega(x)d\sigma(x) = 0$ i tal que la seva restricció a l'esfera unitària S^1 és de la classe $\mathcal{C}^\alpha(S^1)$, per a $\alpha > 46$.*

Per veure-ho, seguim exactament la secció anterior fins que obtenim (2.2), és a dir,

$$\sum_{j\geq 1} j^M ||P_j||_\infty < \infty$$

per a tota $M \leq \frac{\alpha-n}{2}$, és a dir, $M \leq \frac{\alpha}{2} - 1$ en $\mathbb{R}^2$. Volem obtenir un resultat similar per la suma dels polinomis Q_{2j-2d}. Escrivim un lema anàleg al Lema 2.3, però en aquest cas necessitem que P sigui també harmònic, que ho és ja que en tot el nostre argument P és el primer polinomi de la descomposició del nucli, el que divideix tots els altres. I aquest és harmònic, a més d'homogeni.

Lema 2.7. *Sigui P un polinomi homogeni harmònic que no és idènticament zero. Aleshores existeix una constant positiva C que només depèn de P tal que*

$$||Q||_\infty \leq C q^{\frac{2}{\varepsilon}} ||PQ||_\infty,$$

per a tot $\varepsilon < 1$ i per a cada polinomi homogeni Q de grau q.

Demostració. Tot polinomi P homogeni i harmònic descomposa al pla en polinomis de grau 1. Així, tenim que

$$\int_{|x|=1} \frac{1}{|P(x)|^\varepsilon} d\sigma(x) = \int_{|x|=1} \frac{1}{|\prod_{j=1}^d (a_j x_1 + b_j x_2)|^\varepsilon} d\sigma(x) < \infty, \quad \forall \varepsilon < 1.$$

Aleshores, pel Lema 2.2 i la desigualtat de Schwarz,

$$\begin{aligned} ||Q||_\infty &\leq C q^{\frac{1}{2}} ||Q||_2 \\ &\leq C q^{\frac{1}{2}} \left(\int_{|x|=1} \frac{1}{|P(x)|^\varepsilon} d\sigma(x) \right)^{\frac{1}{4}} \left(\int_{|x|=1} |P(x)|^\varepsilon |Q(x)|^4 d\sigma(x) \right) \\ &\leq C q^{\frac{1}{2}} ||PQ||_\infty^{\frac{\varepsilon}{4}} \left(\int_{|x|=1} |Q(x)|^{4-\varepsilon} d\sigma(x) \right) \\ &\leq C q^{\frac{1}{2}} ||PQ||_\infty^{\frac{\varepsilon}{4}} ||Q||_\infty^{1-\frac{\varepsilon}{4}}. \end{aligned}$$

I, així doncs, obtenim el resultat que volíem. □

Ara tenim

$$||Q_{2j-2d}||_\infty \leq C(2j-2d)^{\frac{2}{\varepsilon}} ||P_{2j}||_\infty$$

i llavors

$$\sum_{j\geq d} ||Q_{2j-2d}||_\infty \leq C \sum_{j\geq 1} (j)^{M+\frac{2}{\varepsilon}} ||P_{2j}||_\infty < \infty,$$

si $M + \frac{2}{\varepsilon} \leq \frac{\alpha}{2} - 1$. Com que ε és qualsevol número positiu tal que $\varepsilon < 1$, obtenim

$$\sum_{j\geq d} j^M ||Q_{2j-2d}||_\infty, \quad \text{si } M < \frac{\alpha}{2} - 3,$$

i aleshores, per (2.5), $\sum_j Q_{2j-2d}$ és convergent en $\mathcal{C}^M$, per a tot $M < \frac{\alpha-6}{4}$.

Com en el cas n-dimensional, el multiplicador associat a l'operador U és

$$\mu(\xi) = \gamma_{2d}^{-1} \sum_{j \geq d} \gamma_{2j} \frac{Q_{2j-2d}(\xi)}{|\xi|^{2j-2d}},$$

on ara tenim $\gamma_{2j} \simeq (2j)^{-1}$. Com que $\sum_{j \geq d} j^{M-1} ||Q_{2j-2d}||_\infty < \infty$ si $M - 1 < \frac{\alpha}{2} - 3$, la sèrie en la definició de μ és convergent en $\mathcal{C}^M$ per a $M < \frac{\alpha}{2} - 2$. Òbviament, com en el cas general, aquesta és la mateixa diferenciabilitat que té μ^{-1}.

Recordem que volem veure que existeix una funció γ de $L^\infty(\mathbb{R}^2)$ tal que

$$K(x)\chi_{\mathbb{R}^2 \setminus \overline{B}}(x) = T(\gamma)(x), \qquad \text{si } x \in \mathbb{R}^2.$$

Seguint els arguments de la Secció 2.1, obtenim

$$K(x)\chi_{\mathbb{R}^2 \setminus \overline{B}}(x) = T\left(\sum_{j \geq d} (U^{-1} \circ S_j)(b_j) \right)(x).$$

Per escriure-ho així, necessitem que la sèrie convergeixi absolutament en $L^2(\mathbb{R}^2)$. Per això necessitem $2n+2 = 6 < \frac{\alpha}{2} - 3$. Així doncs, obtenim una primera condició per la regularitat del nucli, $\alpha > 18$.

Veurem que $\sum_{j \geq d} (U^{-1} \circ S_j)(b_j)$ convergeix uniformement en $\mathbb{R}^2$ cap a una funció γ. Escrivim $U^{-1} \circ S_j = c_j I + V_j$ on V_j és l'operador de Calderón-Zygmund associat al multiplicador

$$\mu(\xi)^{-1} \frac{\gamma_{2j}}{\gamma_{2d}} \frac{Q_{2j-2d}(\xi)}{|\xi|^{2j-2d}} - c_j,$$

on $c_j = \frac{\gamma_{2j}}{\gamma_{2d}} \int_{S^{n-1}} \mu(\xi)^{-1} Q_{2j-2d}(\xi) d\sigma(\xi)$. Recalquem que el multiplicador de V_j és de $\mathcal{C}^M$ per a tota $M < \frac{\alpha-6}{4}$. Ara tenim

$$\sum_{j \geq d} (U^{-2} \circ S_j)(b_j) = \sum_{j \geq d} c_j b_j + \sum_{j \geq d} V_j(b_j).$$

Per la primera sèrie utilitzem el Lema 2.4 per obtenir

$$\sum_{j \geq} |c_j| ||b_j||_{L^\infty(B)} \leq C \sum_{j \geq d} (2j)^{-1} (2j)^6 ||Q_{2j-2d}||_\infty < \infty$$

si $5 < \frac{\alpha}{2} - 3$, és a dir, si $\alpha > 16$.
Per la segona sèrie, recordem que acotem la norma L^∞ de V_j per la norma de Calderón-Zygmund, i aquesta per la norma L^2 d'algunes derivades del multiplicador associat (vegeu el Lema 2.5 de la Secció 2.1). Seguint aquest argument, necessitem acotar $||\nabla^k Q_{2j-2d}||_\infty$, per a $0 \leq k \leq 2(n+3)$, és

a dir, per a $0 \leq k \leq 10$. Veiem que ens fa falta $10 < \frac{\alpha-6}{4}$, és a dir, $\alpha > 46$.
Repetim l'argument d'inducció. Recordem que $P_{2j} = PQ_{2j-2d}$. Llavors, per a $k = 0$,

$$\begin{aligned}
||Q_{2j-2d}||_\infty &\leq C(2j-2d)^{2/\varepsilon}||PQ_{2j-2d}||_\infty \\
&\leq Cj^{2/\varepsilon}||P_{2j}||_2 \\
&= j^{\frac{2}{\varepsilon}}||P_{2j}||_2,
\end{aligned}$$

on a la primera desigualtat utititzem el Lema 2.3 i a la segona, el Lema 2.2. Llavors, per a $k = 1$,

$$\begin{aligned}
||\nabla Q_{2j-2d}||_\infty &\leq Cj^{2/\varepsilon}||P\nabla Q_{2j-2d}||_\infty \\
&\leq Cj^{2/\varepsilon}\left(||\nabla P_{2j}||_\infty + ||Q_{2j-2d}||_\infty\right) \\
&\leq Cj^{2/\varepsilon}\left(j^2||P_{2j}||_2 + j^{\frac{2}{\varepsilon}}||P_{2j}||_2\right) \\
&\leq Cj^{2/\varepsilon}j^{\frac{2}{\varepsilon}}||P_{2j}||_2 \\
&\leq Cj^{\frac{2}{\varepsilon}+\frac{2}{\varepsilon}},
\end{aligned}$$

on a la primera desigualtat també usem el Lema 2.3, a la segona utilitzem que $P_{2j} = PQ_{2j-2d}$ i, així, $\nabla P_{2j} = \nabla PQ_{2j-2d} + P\nabla Q_{2j-2d}$, i al tercer pas apliquem el primer cas, quan $k = 0$, i també [St, p. 276].
Utilitzant inducció obtenim

$$||\nabla^k Q_{2j-2d}||_\infty \leq Cj^{(k+1)\frac{2}{\varepsilon}}||P_{2j}||_2,$$

per a $0 \leq k \leq 10$.
Llavors podem escriure

$$\begin{aligned}
\sum_{j\geq d}||V_j(b_j)||_{L^\infty(\mathbb{R}^2)} &\leq C\sum_{j\geq d}(2j)^8||V_j||_{CZ} \\
&\leq C\sum_{j\geq d}j^8\left(j^{-1}j^{\frac{2}{\varepsilon}}||P_{2j}||_2\right)^{1/2}\left(j^{-1}\sum_{k=0}^{10}j^{(k+1)\frac{2}{\varepsilon}}||P_{2j}||_2\right)^{1/2} \\
&\leq C\sum_{j\geq d}j^{13+\frac{2}{\varepsilon}}||P_{2j}||_2 < \infty, \quad \text{si } 13 + \frac{2}{\varepsilon} \leq \frac{\alpha}{2} - 1,
\end{aligned}$$

i sabent que $\varepsilon < 1$, obtenim que és convergent si $\alpha > 32$, i aquesta és una tercera restricció per la regularitat inicial del nucli. Hem vist que hem de demanar que α sigui més gran que 18, que 16, que 46 i que 33. Per tant, necessitem $\alpha > 46$. Així garantim l'existència de la funció γ i només queda un argument de compacitat que es pot seguir exactament de la Secció 2.1.

2.3 Contraexemple del Lema 2.3 per a dimensions superiors

Veurem que en $\mathbb{R}^n$, amb $n \geq 4$, la desigualtat

$$||Q||_\infty \leq Cq^{\frac{n-1}{\varepsilon}}||PQ||_\infty$$

no és certa si ε no depèn de d, el grau del polinomi P. Per comoditat ens restringim a $\mathbb{R}^4$.

Prenem polinomis P i Q de la manera següent:

$$P := P_d(z) = Re\, z^d \quad \text{and} \quad Q := Q_s(\omega) = Re\, \omega^s,$$

on $z = x_1 + ix_2 \equiv (x_1, x_2)$, $\omega = x_3 + ix_4 \equiv (x_3, x_4)$. És clar que $||Q_s||_\infty = 1$. Pel càlcul de $||P_d Q_s||_\infty$ prenem

$$\begin{aligned}
||P_d Q_s||_\infty &= \max_{x_1^2+x_2^2+x_3^2+x_4^2=1} |P_d Q_s(x)| \\
&\leq \max_{x_3^2+x_4^2\leq 1} \left(|Q_s(x_3, x_4)| \max_{x_1^2+x_2^2\leq 1-x_3^2-x_4^2} |P(x_1, x_2)| \right) \\
&\leq \max_{|\omega|^2\leq 1} \left(\left(|\omega|^2\right)^{\frac{s}{2}} \max_{|z|^2\leq 1-|\omega|^2} \left(|z|^2\right)^{\frac{d}{2}} \right) \\
&= \max_{|\omega|^2\leq 1} |\omega|^s \left(1 - |\omega|^2\right)^{d/2} \\
&= \sqrt{\frac{s}{s+d}}^{\,s} \left(1 - \frac{s}{s+d}\right)^{d/2} \\
&= \left(\frac{s}{s+d}\right)^{s/2} \left(\frac{d}{s+d}\right)^{d/2}.
\end{aligned}$$

Ara suposem que d està fixat i que s és gran. Introduïm un terme A i veiem que ha de dependre forçosament de d. La desigualtat inicial és

$$||Q_s||_\infty \leq C s^A ||P_d Q_s||_\infty.$$

Aplicant el càlcul previ

$$1 \leq C s^A \left(\frac{s}{s+d}\right)^{s/2} \left(\frac{d}{s+d}\right)^{d/2}.$$

Llavors tenim

$$\begin{aligned}
C s^A &\geq \left(\frac{s+d}{s}\right)^{s/2} (s+d)^{d/2} \frac{1}{d^{d/2}} \\
&\gtrsim s^{d/2} \frac{1}{d^{d/2}}.
\end{aligned}$$

I perquè això sigui veritat per a qualsevol s gran, A ha de dependre de d.

2.4 Demostració de $(ii) \Longrightarrow (iii)$, cas parell

En aquesta secció volem veure que l'acotació L^2 entre l'operator T i el seu maximal $T^\star$ implica la condició algebraica $T = R \circ U$.

Recordem que en aquest capítol el nucli és

$$K(x) = \frac{\Omega(x)}{|x|^n}$$

amb Ω homogènia de grau 0, la seva integral s'anul·la sobre l'esfera i és α-diferenciable en l'esfera, per a algun α finit. Podem escriure-ho com

$$\Omega(x) = \sum_{j\geq 1}^{\infty} \frac{P_{2j}(x)}{|x|^{2j}},$$

on cada P_{2j} és un polinomi harmònic homogeni de grau $2j$.
L'estratègia que fem servir en aquesta prova consisteix en passar al cas polinomial fixant-nos en una suma parcial. Considerem, com habitualment, $T^1 f$ el truncat a nivell 1. Llavors, sumant i restant $T^1 f$ i utilitzant la desigualtat triangular,

$$\begin{aligned} ||T^1_N f||_2 &\leq ||T^1 f||_2 + ||T^1 f - T^1_N f||_2 \\ &\leq C||Tf||_2 + ||\sum_{j>N} \frac{P_{2j}(x)}{|x|^{2j+n}} \chi_{\mathbb{R}^n\setminus\overline{B}} * f||_2, \end{aligned}$$

on a la segona desigualtat hem utilitzat la definició de l'operador maximal i la hipòtesi d'acotació, és a dir, $||T^1 f||_2 \leq ||T^\star f||_2 \leq C||Tf||_2$.
Recordem que per a cada j existeix una funció b_j suportada a la bola B tal que

$$\frac{P_{2j}(x)}{|x|^{2j+n}} \chi_{\mathbb{R}^n\setminus\overline{B}}(x) = \text{v.p. } \frac{P_{2j}(x)}{|x|^{2j+n}} * b_j.$$

Aleshores,

$$\begin{aligned} ||\sum_{j>N} \frac{P_{2j}(x)}{|x|^{2j+n}} \chi_{\mathbb{R}^n\setminus\overline{B}} * f||_2 &= ||\sum_{j>N} \text{v.p. } \frac{P_{2j}(x)}{|x|^{2j+n}} * b_j * f||_2 \\ &\leq C\left(\sum_{j>N} ||P_{2j}||_\infty\right) ||f||_2, \end{aligned}$$

on fem servir el Teorema de Plancherel i la part del Lema 2.4 que diu que $||\widehat{b_j}||_{L^\infty}$ està acotat uniformement en j.
També podem escriure

$$T^1_N f = K_N \chi_{\mathbb{R}^n\setminus\overline{B}} * f = K_N * b_N * f + S_N \chi_B * f.$$

Llavors, per a $f \in L^2(\mathbb{R}^n)$,

$$\begin{aligned}
||S_N \chi_B * f||_2 &\leq ||T_N^1 f||_2 + ||K_N * f * b_N||_2 \\
&\leq C||Tf||_2 + C \left(\sum_{j>N} ||P_{2j}||_\infty \right) ||f||_2 + ||K_N * f * b_N||_2 \\
&\leq C||Tf||_2 + ||Tf * b_N||_2 + C \left(\sum_{j>N} ||P_{2j}||_\infty \right) ||f||_2 \\
&\leq C||Tf||_2 + C \left(\sum_{j>N} ||P_{2j}||_\infty \right) ||f||_2,
\end{aligned}$$

on a l'última desigualtat utilitzem altre cop el Lema 2.4 (i).
Aplicant Plancherel obtenim la següent acotació puntual

$$|\widehat{S_N \chi_B}(\xi)| \leq C|\widehat{\text{v.p. } K}(\xi)| + C \left(\sum_{j>N} ||P_{2j}||_\infty \right), \quad \text{si } \xi \neq 0. \tag{2.11}$$

Fent tendir N a infinit, tenim la desigualtat puntual

$$|\sum_{p=1}^{\infty} a_{2p}(\xi_0) r^{2p}| \leq C|\widehat{\text{v.p. } K}(\xi_0)|,$$

per a $0 \leq r \leq 1$ i $|\xi_0| = 1$. Aquest és un bon equivalent a la desigualtat (57) del cas polinomial en [MOV, p. 1457], des d'on es pot seguir l'argument per obtenir el resultat desitjat.

Remarquem que només hem necessitat $\sum_{j>N} j^M ||P_{2j}||_\infty < \infty$, amb $M = 0$.

Capítol 3

Necessitat de la maximal iterada en el cas senar

Com ja hem comentat en els Preliminars, si R és un operador de Riesz d'ordre superior tenim les desigualtats puntuals

$$R^{\star}f(x) \leq CM(Rf)(x), \quad \text{quan } R \text{ és d'ordre parell,}$$

$$\text{i} \quad R^{\star}f(x) \leq CM^2(Rf)(x), \quad \text{quan } R \text{ és d'ordre senar.}$$

Així en el cas parell també es té la desigualtat

$$||R^{\star}f||_{1,\infty} \leq C||Rf||_1.$$

En [MV] també es demostra que en el cas dels transformadors de Riesz no hi ha una acotació de la norma L^1 feble de $R_j^{\star}f$ en termes de $\|R_jf\|_1$. Més precisament el que es demostra és
Teorema 2 [MV]. *Donades j, $1 \leq j \leq n$, i una constant positiva C, existeix una funció $f \in L^1(\mathbb{R}^n)$ tal que*

$$\|R_j^{\star}f\|_{1,\infty} \geq C\|R_jf\|_1.$$

En aquest capítol provem que, en el cas d'ordre senar, un resultat anàlog al dels transformadors de Riesz del Teorema 2 de [MV] és cert.
Conjectura. *Sigui*

$$Tf(x) = v.p. \int_{\mathbb{R}^n} f(x-y)\frac{P(y)}{|y|^{d+n}}dy,$$

on P és un polinomi harmònic homogeni de grau senar d. Donada $C > 0$ constant, $\exists f \in L^1(\mathbb{R}^n)$ tal que

$$\|T^{\star}f\|_{1,\infty} \geq C\|Tf\|_1.$$

En les següents seccions provarem que la conjectura és certa $\mathbb{R}^2$. Primer de tot, donem l'exemple pel cas de grau 3 i després explicarem com obtenim el mateix resultat per a $d = 5, 7 \ldots$

3.1 Exemple de grau 3 a $\mathbb{R}^2$

Volem demostrar el següent

Teorema 3.1. *Sigui*

$$Rf(x) = v.p. \int_{\mathbb{R}^2} f(x-y) \frac{3y_1^2 y_2 - y_2^3}{|y|^5} dy.$$

Donada $C > 0$ *constant,* $\exists f \in L^1(\mathbb{R}^2)$ *tal que* $\|R^\star f\|_{1,\infty} \geq C\|Rf\|_1$.

Només cal fer-ho per aquest polinomi perquè tots els de grau 3 són invariants excepte per rotacions.

Per veure-ho, necessitarem els anàlogs als Lemes 5, 6 i 7 que s'usen en l'article [MV]. Gràcies als següents càlculs fets en l'article [MOPV], aquests lemes queden generalitzats a qualsevol polinomi harmònic de grau senar, o sigui que també ens serveix pel cas concret que volem estudiar.

Encara que ens hem restringit a $\mathbb{R}^2$, plantegem el problema i la resolució a $\mathbb{R}^n$, $n \geq 2$, així podem identificar quins passos ens caldria escatir per tal d'obtenir l'exemple a $\mathbb{R}^n$. En [MOPV] es prova que existeix una funció b tal que $K(x)\chi_{\overline{B}^c}(x) = T(b)(x)$, si T és una transformada de Riesz senar d'ordre superior, on B és la bola de radi 1 centrada en el 0. Aquesta funció b no és de L^∞ a suport compacte com en el cas de grau parell, però es demostra que $b \in BMO$ i que $|b(x)| \leq c|x|^{-n-1}$ si $|x| > 2$.

Considerem en $\overline{B}^c$ una soluciò fonamental (concreta) E de l'operador pseudodiferencial $(-\Delta)^{\frac{1}{2}}\Delta^N$, que es pot prendre radial, i en B un polinomi $A_0 + A_1|x|^2 + \ldots + A_{2N}|x|^{4N}$, on les constants estan escollides de tal forma que $\varphi(x) = E(x)\chi_{\overline{B}^c}(x) + (A_0 + A_1|x|^2 + \ldots + A_{2N}|x|^{4N})\chi_B(x)$ sigui una funció contínua i diferenciable $2N$ vegades en $B \cup \overline{B}^c$, i que s'estengui contínuament en ∂B. D'aquesta manera podem derivar fins a $2N+1$ vegades fent-ho a cada una de les dues parts per separat i tornant a sumar. Observem que com a operadors pseudodiferencials tenim $(-\Delta)^{\frac{1}{2}} = \sum_j \partial_j R_j$, així

$$\begin{aligned}
(-\Delta)^{\frac{1}{2}}\Delta^N\varphi &= (-\Delta)^{\frac{1}{2}} \left(\frac{c_n}{|x|^{n-1}}\chi_{B^c}(x) + (\alpha_0 + \alpha_1|x|^2 + \ldots + \alpha_N|x|^{2N})\chi_B(x) \right) \\
&= \sum_{j=1}^n R_j \Bigg(c_n \frac{x_j}{|x|^{n+1}}\chi_{B^c}(x) + (\beta_1 x_j + \beta_2 x_j|x|^2 + \ldots \\
&\quad + \beta_N x_j |x|^{2N-2})\chi_B(x) \Bigg) := b(x),
\end{aligned}$$

on la darrera identitat defineix a b.

Tenim $\varphi = E \star (-\Delta)^{\frac{1}{2}}\Delta^N\varphi$. Sigui P el polinomi harmònic homogeni de grau senar $d \geq 1$ tal que el nucli de l'integral singular és $K(x) = \frac{P(x)}{|x|^{n+d}}$. El prenem com un operador diferencial i derivem a banda i banda la igualtat anterior:

$$P(\partial)\varphi = P(\partial)E \star (-\Delta)^{\frac{1}{2}}\Delta^N\varphi.$$

Fent transformada de Fourier i utilitzant que $\left(\text{v.p. } \frac{P(x)}{|x|^{n+d}}\right)^{\widehat{}}(\xi) = c_d \frac{P(\xi)}{|\xi|^d}$, per a una constant c_d, (veure [St, p. 73]) obtenim que

$$P(\partial)E = c_d \quad \text{v.p. } \frac{P(x)}{|x|^{n+d}}$$

i aleshores

$$P(\partial)\varphi = c_d T(b), \text{ per una altra constant } c_d.$$

Per calcular $P(\partial)\varphi$ derivem tal com s'ha comentat i obtenim el que volíem veure

$$\begin{aligned} P(\partial)\varphi &= c_d K(x)\chi_{\overline{B}^c} + P(\partial)(A_0 + A_1|x|^2 + \ldots + A_{d-1}|x|^{2d-2})(x)\chi_B(x) \\ &= c_d K(x)\chi_{\overline{B}^c}, \end{aligned}$$

ja que $P(\partial)(|x|^{2j}) = 0$, $1 \le j \le d-1$. Notem que tot i que només estem derivant d vegades, $P(\partial)$ anul·la els polinomis fins a grau $2d-2$ (veure Lema 3 dels Preliminars).

Hem d'estudiar les singularitats de la funció b. Per això enunciem i demostrem el següent lema que és una generalització del Lema 5 de [MV]. Definim

$$b^1(x) = c_n \sum_{j=1}^{n} R_j \left(\frac{x_j}{|x|^{n+1}} \chi_{B^c}(x) \right) = c_n \sum_{j=1}^{n} R_j \left(K_j \chi_{B^c}(x)\right),$$

$$b^2(x) = \sum_{j=1}^{n} R_j \left((\beta_1 x_j + \beta_2 x_j |x|^2 + \ldots + \beta_N x_j |x|^{2N-2}) \chi_B(x) \right),$$

on c_n és tal que, com abans, $\widehat{I_1}(\xi) = \widehat{\frac{c_n}{|x|^{n-1}}}(\xi) = \frac{1}{|\xi|}$. És a dir, tenim $b(x) = b^1(x) + b^2(x)$.

Lema 3.2. *Es compleix*

$$b(x) = b_0(x) + c_0 p(x), \;\; x \in \mathbb{R}^n$$

amb c_0 *una constant no nul·la,* $|b_0(x)| \le C$ *i* $p(x) = \displaystyle\int_{|y|=1} \frac{1}{|x-y|^{n-1}} d\sigma(y).$

També necessitem el Lema 6 del mateix article.

Lema 3.3. *Denotem* $d(x) = ||x|-1|$. *Si* $d(x) \le \frac{1}{2}$, *llavors*

$$\int_{|y|=1} \frac{d\sigma(x)}{|x-y|^{n-1}} \simeq \log \frac{1}{d(x)}.$$

La demostració de 3.3 és senzilla i es pot trobar a l'article de referència ([MV]).

Demostració del Lema 3.2. Distingim dos casos. Primer suposem $|x| < 1$.

Mirem què passa amb $b^1(x)$. Considerem la següent forma diferencial:

$$\omega_j = (-1)^{j-1} dx_1 \wedge dx_2 \wedge \ldots \wedge dx_{j-1} \wedge dx_{j+1} \wedge \ldots \wedge dx_n.$$

Apliquem Green-Stokes sobre el domini B^c i obtenim

$$\int_{|y|=1} \frac{1}{|x-y|^{n-1}} \frac{y_j}{|y|^{n+1}} \omega_j = \int_{|y|>1} \partial_j \left(\frac{1}{|x-y|^{n-1}} \frac{y_j}{|y|^{n+1}} \right) dy =$$
$$= \int_{|y|>1} (1-n) \frac{x_j - y_j}{|x-y|^{n+1}} \frac{y_j}{|y|^{n+1}} dy + \int_{|y|>1} \frac{1}{|x-y|^{n-1}} \frac{|y|^2 - (n+1) y_j^2}{|y|^3} dy.$$

Sumant de 1 fins a j i reordenant, tenim

$$b^1(x) = \frac{c_n}{1-n} \int_{|y|=1} \frac{1}{|x-y|^{n-1}} \sum_{j=1}^{n} y_j \omega_j + \frac{n c_n}{1-n} \int_{|y|>1} \frac{1}{|x-y|^{n-1}} \frac{1}{|y|^{n+1}} dy$$

La forma $\sum_{j=1}^n y_j \omega_j$ és invariant per rotacions, és a dir, és igual a $\alpha d\sigma$, per a una constant $\alpha \neq 0$. A més, veiem que el segon terme de la part dreta de la igualtat és acotat. És fàcil veure-ho partint el domini d'integració en dues parts segons si $|x-y| < 1$ o $|x-y| > 1$. Obtenim

$$\begin{aligned}
&\int_{|y|>1} \frac{1}{|x-y|^{n-1}} \frac{1}{|y|^{n+1}} dy = \\
&= \int_{\substack{|y|>1 \\ |x-y|<1}} \frac{1}{|x-y|^{n-1}} \frac{1}{|y|^{n+1}} dy + \int_{\substack{|y|>1 \\ |x-y|>1}} \frac{1}{|x-y|^{n-1}} \frac{1}{|y|^{n+1}} dy \\
&\leq \int_{|x-y|<1} \frac{1}{|x-y|^{n-1}} \frac{1}{|y|^{n+1}} dy + \int_{|y|>1} \frac{1}{|x-y|^{n-1}} \frac{1}{|y|^{n+1}} dy \\
&\leq \int_{|x-y|<1} \frac{1}{|x-y|^{n-1}} dy + \int_{|y|>1} \frac{1}{|y|^{n+1}} dy \\
&\leq C.
\end{aligned}$$

Escrivim

$$b_0^{11}(x) := \frac{n c_n}{1-n} \int_{|y|>1} \frac{1}{|x-y|^{n-1}} \frac{1}{|y|^{n+1}} dy$$

i tenim que

$$b^1(x) = \frac{\alpha c_n}{1-n} \int_{|y|=1} \frac{1}{|x-y|^{n-1}} d\sigma + b_0^{11}(x).$$

Mirem ara què passa amb $b^2(x)$. Aplicarem Green-Stokes sobre el domini $B \setminus B(x,\varepsilon)$. Hem de treure una petita bola al voltant de x, $B(x,\varepsilon)$, per evitar singularitats. Obtenim

$$\begin{aligned}
&\int_{|y|=1} \frac{1}{|x-y|^{n-1}} (\beta_1 y_j + \beta_2 y_j |y|^2 + \ldots + \beta_N y_j |y|^{2N-2}) \omega_j \\
&\quad - \int_{|x-y|=\varepsilon} \frac{1}{|x-y|^{n-1}} (\beta_1 y_j + \beta_2 y_j |y|^2 + \ldots + \beta_N y_j |y|^{2N-2}) \omega_j \\
&= \int_{\substack{|y|<1 \\ |x-y|>\varepsilon}} (1-n) \frac{x_j - y_j}{|x-y|^{n+1}} (\beta_1 y_j + \beta_2 y_j |y|^2 + \ldots + \beta_N y_j |y|^{2N-2}) dy \\
&\quad + \int_{\substack{|y|<1 \\ |x-y|>\varepsilon}} \frac{1}{|x-y|^{n-1}} \partial_j (\beta_1 y_j + \beta_2 y_j |y|^2 + \ldots + \beta_N y_j |y|^{2N-2}) dy.
\end{aligned}$$

Ara, sumant des de 1 fins a j i reordenant tenim:

$$\begin{aligned}
(1-n)\sum_{j=1}^{n}\int_{\substack{|y|<1\\|x-y|>\varepsilon}} &\frac{x_j-y_j}{|x-y|^{n+1}}(\beta_1 y_j+\beta_2 y_j|y|^2+\ldots+\beta_N y_j|y|^{2N-2})dy = \\
&= \int_{|y|=1}\frac{1}{|x-y|^{n-1}}(\beta_1+\beta_2+\ldots+\beta_N)\sum_{j=1}^{n} y_j\omega_j \\
&- \frac{1}{\varepsilon^{n-1}}\int_{|x-y|=\varepsilon}(\beta_1+\beta_2|y|^2+\ldots+\beta_N|y|^{2N-2})\sum_{j=1}^{n} y_j\omega_j \\
&- \sum_{j=1}^{n}\int_{\substack{|y|<1\\|x-y|>\varepsilon}}\frac{1}{|x-y|^{n-1}}\partial_j(\beta_1 y_j+\beta_2 y_j|y|^2+\ldots+\beta_N y_j|y|^{2N-2})dy.
\end{aligned}$$

Fent tendir ε a zero, passant $(1-n)$ dividint a l'altre costat i considerant, com abans, $\sum_{j=1}^{n} y_j\omega_j = \alpha d\sigma$ es té

$$b^2(x) = \frac{\alpha(\beta_1+\beta_2+\ldots+\beta_N)}{1-n}\int_{|y|=1}\frac{1}{|x-y|^{n-1}}d\sigma + b_0^{21}(x), \text{ amb } b_0^{21}(x) \text{ acotat.}$$

Aquest b_0^{21} inclou el segon i el tercer terme de la identitat anterior quan ε tendeix a 0. El tercer terme de la identitat anterior és acotat ja que la derivada d'un polinomi és un polinomi i, per tant, acotat en $\{|y|<1\}$. Quan fem tendir $\varepsilon \to 0$, el segon terme queda acotat.

$$\frac{\alpha}{\varepsilon^{n-1}}\int_{|x-y|=\varepsilon}\left(\beta_1+\beta_2|y|^2+\ldots+\beta_N|y|^{2N-2}\right)d\sigma \overset{\varepsilon\to 0}{\longrightarrow} \alpha\omega_{n-1}\left(\beta_1+\beta_2|x|^1+\ldots+\beta_N|x|^{2N-2}\right).$$

Així doncs, per a $|x|<1$,

$$\begin{aligned}
b(x) &= b^1(x)+b^2(x) \\
&= \frac{\alpha}{1-n}(c_n+\beta_1+\beta_2+\ldots+\beta_N)\int_{|y|=1}\frac{1}{|x-y|^{n-1}}d\sigma + b_0^{11}(x)+b_0^{21}(x),
\end{aligned}$$

amb $b_0^{11}(x)+b_0^{21}(x) \leq C$.

Falta veure que la constant $c_0 = \frac{\alpha}{1-n}(c_n+\beta_1+\beta_2+\ldots+\beta_N)$ és no nul·la. Sabem que $\frac{\alpha}{1-n} \neq 0$. Falta veure què passa amb $c_n+\beta_1+\beta_2+\ldots+\beta_N$.

Tenim que $c_n = \frac{1}{\pi^{\frac{n}{2}-1}}\frac{\Gamma\left(\frac{n-1}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)}$ i les constants β_j, $j=1,\ldots,N$, es poden calcular a partir de l'article [MOPV].

En la demostració de que $\exists b$ tal que $K(x)\chi_{\overline{B}^c}(x) = T(b)(x)$, veiem que les β_j's surten del polinomi $A_0+A_1|x|^2+\ldots+A_{2N}|x|^{4N}$. En el mateix article tenim calculades les A_j's. Adaptant-les a la nostra notació són:

$$A_{j+N} = c_n\frac{(-1)^{j+2N}\binom{j+\frac{n-3}{2}}{j}\binom{N+\frac{n-1}{2}}{N-j}}{(2N)!\binom{j+N}{N}}$$

Ara només cal posar β_j en funció d'aquestes constants. Sabent que

$$\Delta^N\left(|x|^{2(N+i)}\right) = \frac{4^N N!(N+i)!}{i!}\binom{\frac{n}{2}+N+i-1}{N}|x|^{2i}, \qquad \text{si} \quad i=0,\dots,N,$$

i $\Delta^N\left(|x|^{2K}\right)=0$ si $K<N$, apliquem Δ^N al polinomi inicial,

$$\begin{aligned}&\Delta^N(A_0+A_1|x|^2+\ldots+A_{2N}|x|^{4N}) = \\ &= \alpha_0+\alpha_1|x|^2+\ldots+\alpha_N|x|^{2N}.\end{aligned}$$

Obtenim $\alpha_j = A_{j+N}\frac{4^N N!(N+j)!}{j!}\binom{\frac{n}{2}+N+j-1}{N}$. Ara, s'aplica l'operador pseudodiferencial $(-\Delta)^{\frac{1}{2}}$, usant que $(-\Delta)^{\frac{1}{2}}(F) := \sum_{j=1}^n R_j\partial_j(F)$. Tenim

$$\begin{aligned}\partial_j(\alpha_0+\alpha_1|x|^2+\ldots+\alpha_N|x|^{2N} &= \alpha_1 2x_j+\alpha_2 2|x|^2 2x_j+\ldots+\alpha_N N|x|^{2N-2}2x_j \\ &= \beta_1 x_j+\beta_2 x_j|x|^2+\ldots+\beta_N x_j|x|^{2N-2}.\end{aligned}$$

Per tant, $\beta_j = 2j\alpha_j = 2jA_{j+N}\frac{4^N N!(N+j)!}{j!}\binom{\frac{n}{2}+N+j-1}{N}$. I, finalment,

$$\beta_j = c_n\frac{(-1)^{j+2N}\binom{j+\frac{n-3}{2}}{j}\binom{N+\frac{n-1}{2}}{N-j}}{(2N)!\binom{j+N}{N}}\,\frac{2j4^N N!(N+j)!}{j!}\binom{N+\frac{n-2}{2}+j}{N}.$$

Com que podem treure $c_n\neq 0$ factor comú, el que hem de veure és

$$\frac{4^N(N!)^2}{(2N)!}\sum_{j=1}^N(-1)^j\binom{j+\frac{n-3}{2}}{j}\binom{N+\frac{n-1}{2}}{N-j}\binom{N+\frac{n-2}{2}+j}{N}2j\neq -1.$$

En el cas que n=2, tenim la suma

$$\frac{4^N(N!)^2}{(2N)!}\sum_{j=1}^N(-1)^j\binom{j+\frac{-1}{2}}{j}\binom{N+\frac{1}{2}}{N-j}\binom{N+j}{N}2j\neq -1.$$

Amb l'ajuda del programa *Maple* obtenim que aquesta suma és igual a $(2N+1)(-1)^N-1$, que òbviament és diferent de -1.

Suposem ara $|x|>1$. Veurem que obtenim exactament el mateix. Com abans, primer mirem què passa amb $b^1(x)$. Aplicant Green-Stokes al domini $B^c\setminus B(x,\varepsilon)$ tenim

$$\begin{aligned}&\sum_{j=1}^n\int_{|y|=1}\frac{1}{|x-y|^{n-1}}\frac{y_j}{|y|^{n+1}}\omega_j+\alpha\int_{|x-y|=\varepsilon}\frac{1}{|x-y|^{n-1}}\frac{1}{|x-y|^{n-1}}\frac{1}{|y|^{n+1}}d\sigma \\ &\qquad = \frac{1-n}{c_n}\sum_{j=1}^n\int_{\substack{|y|>1\\|x-y|>\varepsilon}}\frac{x_j-y_j}{|x-y|^{n+1}}\frac{y_j}{|y|^{n+1}}dy+n\int_{\substack{|y|>1\\|x-y|>\varepsilon}}\frac{1}{|x-y|^{n-1}}\frac{1}{|y|^{n+1}}dy\end{aligned}$$

que reordenant i fent tendir $\varepsilon \to 0$ ens queda

$$b^1(x) = \frac{c_n \alpha}{1-n} \int_{|y|=1} \frac{1}{|x-y|^{n-1}} d\sigma + b_0^{12}, \qquad \text{amb } b_0^{12} \text{ acotat.}$$

El terme acotat surt afitant com abans

$$n \int_{\substack{|y|>1 \\ |x-y|>\varepsilon}} \frac{1}{|x-y|^{n-1}} \frac{1}{|y|^{n+1}} dy \leq n \int_{|y|>1} \frac{1}{|x-y|^{n-1}} \frac{1}{|y|^{n+1}} dy \leq C,$$

i considerant el límit

$$\lim_{\varepsilon \to 0} \alpha \int_{|x-y|=\varepsilon} \frac{1}{|x-y|^{n-1}} \frac{1}{|y|^{n+1}} d\sigma = \lim_{\varepsilon \to 0} \frac{\alpha}{\varepsilon^{n-1}} \frac{\omega_{n-1}}{|x|^{n+1}} \varepsilon^{n-1} \leq \alpha \omega_{n-1}.$$

Apliquem ara Green-Stokes al domini B.

$$\begin{aligned} &\sum_{j=1^n} \int_{|y|=1} \frac{1}{|x-y|^{n-1}} (\beta_1 y_j + \beta_2 y_j |y|^2 + \ldots + \beta_N y_j |y|^{2N-2}) \omega_j = \\ &= \sum_{j=1^n} \int |y| < 1 (1-n) \frac{x_j - y_j}{|x-y|^{n+1}} (\beta_1 y_j + \beta_2 y_j |y|^2 + \ldots + \beta_N y_j |y|^{2N-2}) dy \\ &\quad + \sum_{j=1^n} \int |y| < 1 \frac{1}{|x-y|^{n-1}} \partial_j (\beta_1 y_j + \beta_2 y_j |y|^2 + \ldots + \beta_N y_j |y|^{2N-2}) dy. \end{aligned}$$

Com abans, tenim que el segon terme de la part dreta de la identitat és acotat, i l'anomenem b_0^{22}. Així, obtenim

$$b^2(x) = \frac{\alpha}{1-n} \int_{|y|=1} \frac{1}{|x-y|^{n-1}} (\beta_1 y_j + \beta_2 y_j |y|^2 + \ldots + \beta_N y_j |y|^{2N-2}) d\sigma + b_0^{22}.$$

Aleshores, per a $|x| > 1$ tenim exactament el mateix que per a $|x| < 1$:

$$\begin{aligned} b(x) &= b^1(x) + b^2(x) \\ &= \frac{\alpha}{1-n} (c_n + \beta_1 + \beta_2 + \ldots + \beta_N) \int_{|y|=1} \frac{1}{|x-y|^{n-1}} d\sigma + b_0^{12}(x) + b_0^{22}(x), \end{aligned}$$

amb $b_0^{12}(x) + b_0^{22}(x) \leq C$, i com que ja hem vist que $\frac{\alpha}{1-n}(c_n + \beta_1 + \beta_2 + \ldots + \beta_N) \neq 0$, ja tenim el resultat desitjat. $\square$

Ara ja tenim totes les eines necessàries per provar el Teorema 3.1.

Demostració del Teorema 3.1. Seguirem un esquema semblant al de la demostració del Teorema 2 de l'article [MV].

Definim una funció $f(x, y)$ a trossos de la manera següent:

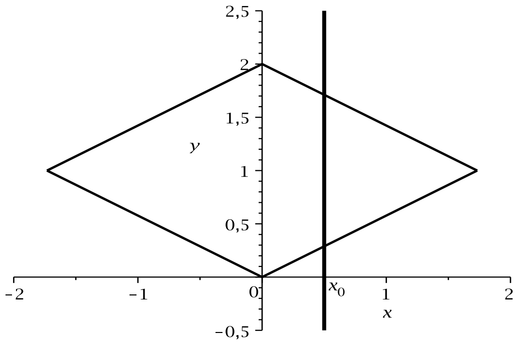
$f(x,y) = 0$ si $x < -\sqrt{3}$, $x > \sqrt{3}$.

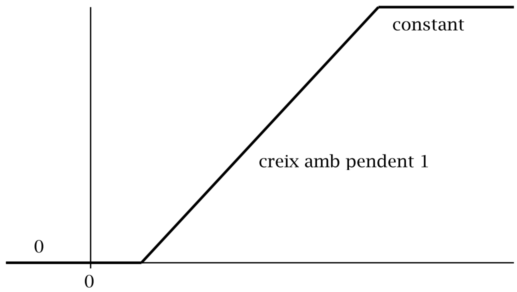
Per a $-\sqrt{3} \leq x \leq 0$,

$$f(x,y) = \begin{cases} 0 & \text{si } y \leq \frac{-1}{\sqrt{3}}x \\ y + \frac{1}{\sqrt{3}x} & \text{si } \frac{-1}{\sqrt{3}x} < y < \frac{1}{\sqrt{3}}x + 2 \\ \frac{2}{\sqrt{3}}x + 2 & \text{si } y \geq \frac{1}{\sqrt{3}}x + 2. \end{cases}$$

Per a $0 < x \leq \sqrt{3}$,

$$f(x,y) = \begin{cases} 0 & \text{si } y \leq \frac{1}{\sqrt{3}}x \\ y - \frac{1}{\sqrt{3}}x & \text{si } \frac{1}{\sqrt{3}} < y < \frac{-1}{\sqrt{3}}x + 2 \\ \frac{-2}{\sqrt{3}}x + 2 & \text{si } y \geq \frac{-1}{\sqrt{3}}x + 2. \end{cases}$$





Nota. En el primer dibuix veiem la regió que delimita els salts de la funció. En l'altre, podem veure el que passa per a una x_0 concreta.

Prenem $f(x,y)$ i la traslladem -2 unitats respecte y. Anomenem g a la funció traslladada, $g(x,y) = f(x, y+2)$. Ara, definim $F(x,y) = f(x,y) - g(x,y)$. Hem obtingut una funció a suport compacte. Considerem μ la mesura definida per F, és a dir, $\mu(A) = \int_A F(x,y)dxdy$.

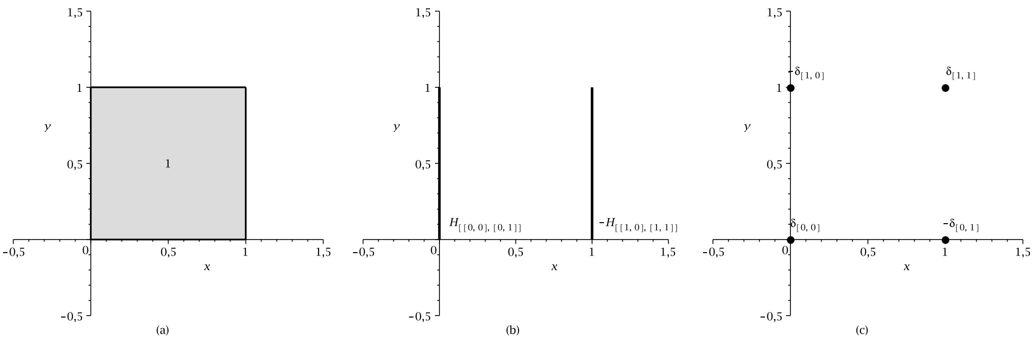
Posem el polinomi $P(x,y)$ descomposat en factors primers: $P(x,y) = y(\sqrt{3}x - y)(\sqrt{3}x + y)$.

Nota. Sigui L un operador diferencial del tipus $Lf = a\partial_x f + b\partial_y f$. Aleshores podem escriure'l com $Lf = \sqrt{a^2+b^2}D_{\frac{(a,b)}{\sqrt{a^2+b^2}}}f$, ja que D és lineal.

Considerem P com un operador diferencial. Per poder fer servir l'observació anterior escrivim $P(x,y) = 4y(\frac{\sqrt{3}}{2}x - \frac{y}{2})(\frac{\sqrt{3}}{2}x + \frac{y}{2})$.

Nota. Farem les derivades en el sentit de les distribucions seguint el següent exemple.

Sigui Q el quadrat amb vèrtexs en $(0,0)$, $(0,1)$, $(1,0)$ i $(1,1)$. Definim $f(x,y) = \chi_Q(x,y) = \begin{cases} 1 \text{ si } (x,y)\in Q \\ 0 \text{ si } (x,y)\notin Q \end{cases}$. Considerem μ la mesura definida per f: $\mu(A) = \int_{A\cap Q} 1dxdy$. Volem calcular $\partial_x\mu$.



Nota. En (a) veiem la funció φ, en (b) tenim $\partial_x\varphi$, i en (c) veiem què s'obté en fer $\partial_y\partial_x\varphi$.

$$
\begin{aligned}
\langle \partial_x\mu, \varphi\rangle &= \langle -\mu, \partial_x\varphi\rangle = -\int_Q \partial_x\varphi dxdy = -\int_0^1\int_0^1 \partial_x\varphi dxdy \\
&= -\int_0^1 \left(\varphi\right]_0^1\Big) dy = -\int_0^1 (\varphi(1,y) - \varphi(0,y))\, dy \\
&= \langle \mathcal{H}^1_{[(0,0),(0,1)]} - \mathcal{H}^1_{[(1,0),(1,1)]}, \varphi\rangle.
\end{aligned}
$$

Aleshores,

$$\partial_x\mu = \mathcal{H}^1_{[(0,0),(0,1)]} - \mathcal{H}^1_{[(1,0),(1,1)]},$$

on $\mathcal{H}^1_{[m,n]}$ =mesura de longitud en el segment $\overline{mn}$.

Fent el mateix obtindríem que $\partial_y\partial_x\mu = \delta_{(0,0)} + \delta_{(1,1)} - \delta_{(0,1)} - \delta_{(1,0)}$.

Doncs ara ja podem fer,

$$P(\partial)\mu = 4P_1(\partial)P_2(\partial)\frac{\partial\mu}{\partial y} = 4P_1(\partial)P_2(\partial)\mu_1 = 4P_2(\partial)\mu_2 = 4(\delta_a + \delta_b + \delta_c - \delta_d - \delta_e - \delta_f),$$

on

$$P_1(x,y) = \frac{\sqrt{3}}{2}x + \frac{y}{2},$$

$$P_2(x,y) = \frac{\sqrt{3}}{2}x - \frac{y}{2},$$

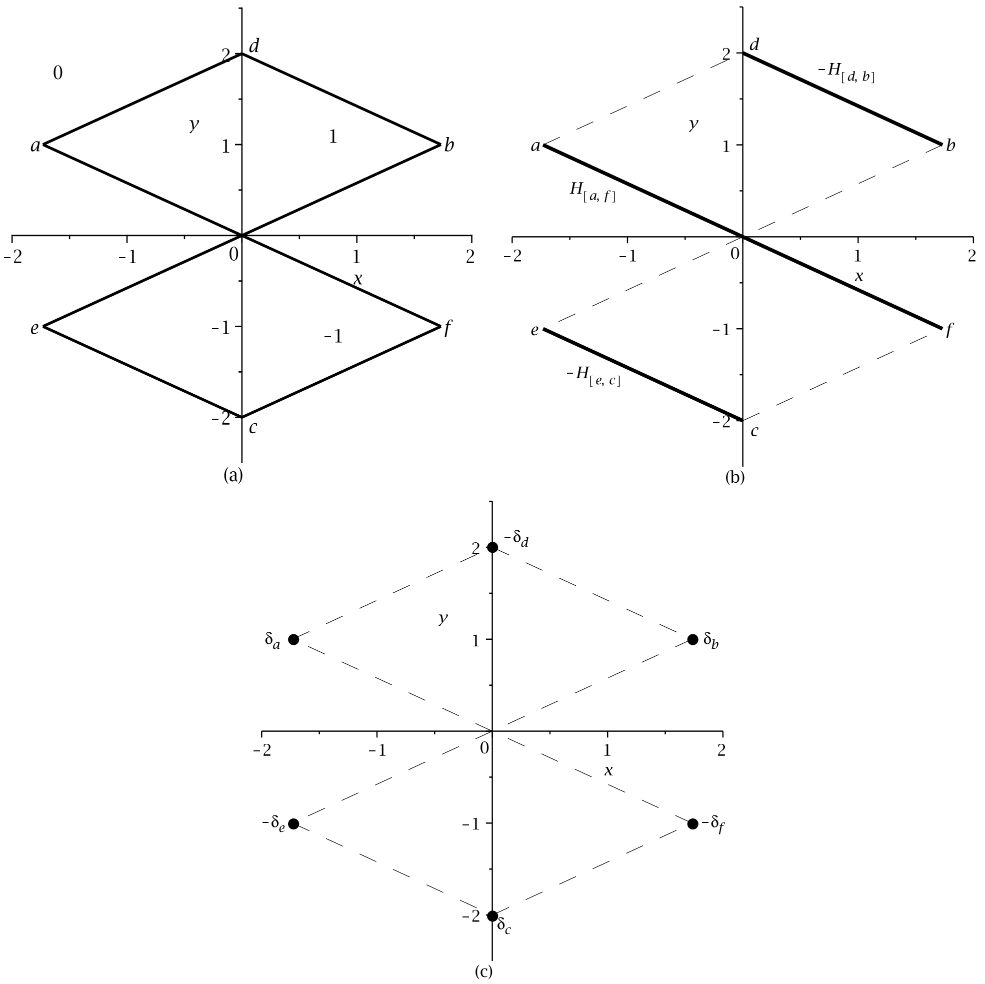
$$\mu_1(A) = m_{|Q_1} - m_{|Q_2} = \int_{A\cap Q_1} dxdy - \int_{A\cap Q_2} dxdy,$$

$$\mu_2(A) = \mathcal{H}^1_{[a,f]} - \mathcal{H}^1_{[d,b]} - \mathcal{H}^1_{[e,c]},$$

amb

$$a = (-\sqrt{3}, 1), b = (\sqrt{3}, 1), c = (0, -2), d = (0, 2), e = (-\sqrt{3}, -1), f = (\sqrt{3}, 1),$$

Q_1 ='rombe delimitat pels punts d, a, b i $(0,0)$' i Q_2 ='rombe delimitat pels punts c, e, f i $(0,0)$'.



Nota. En (a) tenim $\frac{\partial \mu}{\partial y}$, en (b) $P_1(\partial)\frac{\partial \mu}{\partial y}$, i en (c) veiem el que obtenim en fer $P_2(\partial)P_1(\partial)\frac{\partial \mu}{\partial y}$.

Per altra banda, podem posar μ com

$$\mu = \frac{1}{2\pi}\left(\frac{1}{|x|} \star \sum_{j=1}^{2} R_j(\partial_j \mu)\right).$$

Això es veu fent transformada de Fourier a banda i banda:

$$\begin{aligned} &\frac{1}{2\pi}\left(\frac{1}{|x|}\star\sum_{j=1}^{2}R_j(\partial_j\mu)\right)^{\widehat{}}(\xi)=\frac{1}{2\pi}\widehat{\frac{1}{|x|}}\left(\sum_{j=1}^{2}R_j(\partial_j\mu)\right)^{\widehat{}}(\xi)=\\ =\;&\frac{1}{2\pi}\frac{1}{\xi}\sum_{j=1}^{2}(-i)\frac{\xi_j}{|\xi|}2\pi i\xi_j\widehat{\mu}(\xi)=\sum_{j=1}^{2}\frac{\xi_j^2}{|\xi|^2}\widehat{\mu}(\xi)=\widehat{\mu}(\xi). \end{aligned}$$

Com a l'article [MOPV], considerem E una solució fonamental de l'operador pseudodiferencial $(-\Delta)^{\frac{1}{2}}\Delta$, que es pot prendre com una solució de $\Delta E=\frac{1}{|x|}$. Doncs, ara,

$$\mu=\frac{1}{2\pi}\left(\Delta E\star\sum_{j=1}^{2}R_j(\partial_j\mu)\right)=\frac{1}{2\pi}\left(E\star\sum_{j=1}^{2}\Delta(R_j(\partial_j\mu))\right),$$

i aplicant l'operador diferencial obtenim

$$P(\partial)\mu=\frac{1}{2\pi}\left(P(\partial)E\star\sum_{j=1}^{2}\Delta(R_j(\partial_j\mu))\right)=cR\left(\sum_{j=1}^{2}\Delta(R_j(\partial_j\mu))\right),$$

on a la segona igualtat calculem $P(\partial)E$ fent transformada de Fourier

$$\widehat{P(\partial)E}(\xi)=P(i\xi)\widehat{E}(\xi)=i\frac{P(\xi)}{|\xi|^d}=c\left(\text{v.p. }\frac{P(x)}{|x|^{n+d}}\right)^{\widehat{}}(\xi).$$

Si definim $T:=c\sum_{j=1}^{2}\Delta(R_j(\partial_j\mu))$, hem obtingut

$$4(\delta_a+\delta_b+\delta_c-\delta_d-\delta_e-\delta_f)=R(T).$$

Sigui φ una funció no negativa, contínuament diferenciable, a suport compacte contingut a la bola unitat B, i tal que $\int\varphi=1$, i considerem $\varphi_\varepsilon(x)=\frac{1}{\varepsilon^2}\varphi\left(\frac{x}{\varepsilon}\right)$.

Convolucionant la igualtat anterior amb φ_ε

$$4(\varphi_\varepsilon(x-a)+\varphi_\varepsilon(x-b)+\varphi_\varepsilon(x-c)-\varphi_\varepsilon(x-d)-\varphi_\varepsilon(x-e)-\varphi_\varepsilon(x-f))=R(T\star\varphi_\varepsilon).$$

Definim $f_\varepsilon:=T\star\varphi_\varepsilon$. Llavors, prenent normes

$$\begin{aligned} \|R(f_\varepsilon)\|_1 &\le 4\int|\varphi_\varepsilon(x-a)|+4\int|\varphi_\varepsilon(x-b)|+4\int|\varphi_\varepsilon(x-c)|\\ &+4\int|\varphi_\varepsilon(x-d)|+4\int|\varphi_\varepsilon(x-e)|+4\int|\varphi_\varepsilon(x-f)|\\ &=24. \end{aligned}$$

Doncs si veiem que $\|R^\star f_\varepsilon\|_{1,\infty}:=\|sup_{\delta>0}|R^\delta f_\varepsilon|\|_{1,\infty}$ creix molt, f_ε serà la funció que buscàvem i ja haurem acabat.

Això ho podem fer ja que $\mu \star \Delta\partial_j\varphi_\varepsilon \in L^\infty(\mathbb{R}^2)$ a suport compacte i integral 0, i això vol dir que és una funció de $H^1(\mathbb{R}^2)$ (de fet és múltiple d'un àtom) i aleshores $f_\varepsilon = c\sum_{j=1}^2 R_j(\mu \star \Delta\partial_j\varphi_\varepsilon) \in L^1(\mathbb{R}^2)$.

Als càlculs que hem fet al principi s'ha demostrat que existeix una funció b tal que $K(x)\chi_{\overline{B}^c}(x) = T(b)(x)$. En el cas que estem estudiant, on $d = 3$, $n = 2$ i $N = 1$, la forma exacta per b és:

$$b(x) = \sum_{j=1}^{2} R_j\left(c_n \frac{x_j}{|x|^3}\chi_{B^C}(x) + \beta_j x_j \chi_B(x)\right).$$

Dilatant obtenim

$$R(b_\delta)(x) = K(x)\chi_{(\delta B)^C}(x),$$

on $\delta B =$ bola de centre $(0,0)$ i radi δ, $b_\delta(x) = \frac{1}{\delta^2} b\left(\frac{x}{\delta}\right)$.

Doncs, ara,

$$\begin{aligned}
R^\delta(T)(x) &= \int_{|x-y|>\delta} T(y)K(x-y)dy = \int_{\mathbb{R}^2} T(y)K(x-y)\chi_{(\delta B)^C}(x-y)dy \\
&= (T \star R(b_\delta))(x) = -(b_\delta \star R(T))(x) \\
&= 4b_\delta \star (\delta_d + \delta_e + \delta_f - \delta_a - \delta_b - \delta_c)(x) \\
&= 4(b_\delta(x-d) + b_\delta(x-e) + b_\delta(x-f) \\
&\quad - b_\delta(x-a) - b_\delta(x-b) - b_\delta(x-c)).
\end{aligned}$$

Convolucionant aquesta última identitat amb φ_ε:

$$R^\delta(f_\varepsilon)(x) = (4(b_\delta(x-d) + b_\delta(x-e) + b_\delta(x-f) - b_\delta(x-a) - b_\delta(x-b) - b_\delta(x-c)) \star \varphi_\varepsilon)(x).$$

Per veure que $\|R^\star f_\varepsilon\|_{1,\infty}$ es fa gran, només ens falta un lema que també trobem a [MV] (la demostració és senzilla i es troba allà). Haurem de treballar amb la part no acotada de la funció b_δ. Necessitem una definició prèvia:

Anomenem p_δ a la part no acotada de b_δ, és a dir, amb la notació del Lema 3.2 tenim

$$b_\delta = \frac{1}{\delta^2} b\left(\frac{x}{\delta}\right) = \frac{1}{\delta^2} b_0\left(\frac{x}{\delta}\right) + \frac{1}{\delta^2} c_0 p\left(\frac{x}{\delta}\right),$$

o sigui que

$$p_\delta = \frac{1}{\delta^2} p\left(\frac{x}{\delta}\right) = \frac{1}{\delta^2}\int_{|y|=1} \frac{1}{\left|\frac{x}{\delta} - y\right|^{n-1}} d\sigma(y).$$

Lema 3.4. *Existeix una constant $C \geq 1$ tal que, per a $\varepsilon > 0$ prou petit, tenim*

$$\begin{aligned}
(p_\delta \star \varphi_\varepsilon)(x) &\geq \frac{1}{C}\frac{1}{\delta^n}\log\frac{\delta}{\varepsilon}, && \textit{si } \operatorname{dist}(x, \partial B(0,\delta)) < 2\varepsilon\delta, \\
(p_\delta \star \varphi_\varepsilon)(x) &\leq \frac{1}{C}\frac{1}{\delta^n}\log\frac{\delta}{\operatorname{dist}(x,\partial B(0,\delta))}, && \textit{si } 2\varepsilon\delta < \operatorname{dist}(x, \partial B(0,\delta)) \leq \tfrac{\delta}{2}.
\end{aligned}$$

Considerem K un con amb vèrtex a d i eix a la part positiva de l'eix de les y's.

Prenem $x \in K$. Posem $\delta = |x-d|$. Volem aplicar la segona desigualtat del Lema 3.4 canviant x per $x-a$, $x-b$, $x-c$, $x-e$ i $x-f$. Fem-ho per a $x-a$. Això és:

$$(p_\delta \star \varphi_\varepsilon)(x-a) \leq \frac{1}{C}\frac{1}{\delta^2}\log\frac{\delta}{\operatorname{dist}(x-a,\partial B(0,\delta))}$$

si $2\varepsilon\delta < \operatorname{dist}(x-a,\partial B(0,\delta)) \leq \frac{\delta}{2}$.

Tenim que $\operatorname{dist}(x-a,\partial B(0,\delta)) = |x-a|-\delta$. Doncs hem de veure que $2\varepsilon\delta < |x-a|-\delta \leq \frac{\delta}{2}$.

La segona desigualtat es compleix si $\delta \geq 4$:

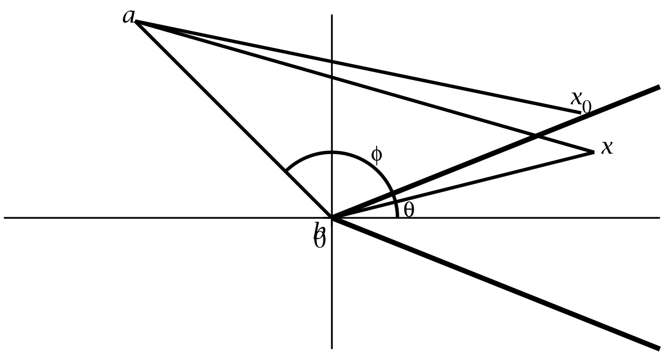
$$|x-a| = |x-d+d-a| \leq |x-d|+|d-a| = \delta+2 \leq \delta+\frac{\delta}{2}.$$

Pel punt b, com que $|d-b|=2$, també ens va bé $\delta \geq 4$. Però $|d-e|=|d-f|=2\sqrt{3}$, i llavors necessitem $\delta \geq 4\sqrt{3}$. I, fent-ho amb l'últim punt que ens queda, veiem que fa falta $\delta \geq 8$, ja que $|d-c|=4$. Doncs prenem aquesta última δ, així se'ns compleix per a tots els punts.

Perquè es compleixi la primera desigualtat, hem d'escollir una obertura idònia per K.

Observem el següent fet general:

Suposem que tenim un con amb vèrtex en un punt b i obertura $\theta < \pi/2$. Suposem també un punt exterior a i un punt x qualsevol del con, amb a i x en el mateix semiplà definit per l'eix del con. Sigui ϕ l'angle que es forma entre la recta que uneix a i b i la generatriu del con que es troba en el mateix semiplà. El punt a ha de ser tal que $\phi > \pi/2$.



Suposem x_0 sobre la generatriu en qüestió.

Aplicant el teorema del cosinus en el triangle definit per a, b i x_0 tenim

$$|x_0 - a|^2 = |x_0 - b|^2 + |b - a|^2 - 2|x_0 - b||b - a| \cos \phi.$$

Per altra banda, tenim que

$$(|x_0 - b| - \cos \phi |b - a|)^2 = |x_0 - b|^2 + (\cos \phi)^2 |b - a|^2 - 2 \cos \phi |x_0 - b||b - a|.$$

Com que $\cos \phi \in [0, 1]$, llavors $(\cos \phi)^2 \in [0, 1]$ i aleshores $(\cos \phi)^2 |b - a|^2 \leq |b - a|^2$. Així obtenim

$$(|x_0 - b| - \cos \phi |b - a|)^2 \leq |x_0 - a|^2,$$

i fent l'arrel a banda i banda (tot va bé perquè els dos valors són positius) obtenim que:

$$|x_0 - a| - |x_0 - b| \geq |cos\phi||b - a|.$$

Ara, si x no està sobre la generatriu també es compleix aquest resultat, perquè l'anterior estudiat és el pitjor dels casos. Ja que si x és un punt del con i x_0 un punt sobre la generatriu que estan a la mateixa distància de b, llavors tenim que

$$|x - b| = |x_0 - b| \text{ però } |x - a| \geq |x_0 - a|$$

i aleshores

$$|x - a| - |x - b| \geq |x_0 - a| - |x_0 - b| \geq |cos\phi||b - a|.$$

Ens guardem aquest resultat i seguim amb la demostració.

Denotem θ_i, per a $i = a, b, c, e, f$, com l'angle entre la recta que uneix el punt i amb d i la generatriu de K que està al mateix semiplà que i respecte l'eix del con. Sabem que θ_i ha de ser més gran que $\pi/2$, ja que necessitem que $cos\theta_i$ sigui negatiu. Però si $\theta_a > \pi/2$, llavors $\theta_i > \pi/2$, per a $i = b, c, e, f$. Fixem doncs, per exemple, $\theta_a = \frac{3}{5}\pi$. Llavors l'obertura del con serà $\theta = \pi - \frac{\pi}{3} - \frac{3}{5}\pi = \frac{1}{15}\pi > 0$ i tot té sentit.

Usant l'observació anterior, tenim que, per a $i = a, b, c, e, f$,

$$|x - i| - \delta \geq |cos\theta_i||d - i| \geq |cos\theta_a||d - a| \geq \frac{3}{5}.$$

La desigualtat que volíem era $2\varepsilon\delta < |x - i| - \delta$. Això es compleix si $2\varepsilon\delta < \frac{3}{5}$, o sigui, si $\delta < \frac{3}{10\varepsilon}$. Ara ja estem en les hipòtesis que volíem.

Prenem normes de la igualtat que teníem i usant els lemes 3.3 i 3.4:

$$\begin{aligned}
|R^\delta(f_\varepsilon)(x)| &= |(4(b_\delta(x-d) + b_\delta(x-e) + b_\delta(x-f) \\
&\quad -b_\delta(x-a) - b_\delta(x-b) - b_\delta(x-c)) \star \varphi_\varepsilon)(x)| \\
&\geq \frac{1}{C}|((p_\delta(x-d) + p_\delta(x-e) + p_\delta(x-f) \\
&\quad -p_\delta(x-a) - p_\delta(x-b) - p_\delta(x-c)) \star \varphi_\varepsilon)(x)| - C \\
&\geq \frac{1}{\delta^2}(\frac{1}{C}\log\frac{\delta}{\varepsilon} - C\log\frac{\delta}{\operatorname{dist}(x-e, \partial B(0,\delta))} \\
&\quad -C\log\frac{\delta}{\operatorname{dist}(x-f, \partial B(0,\delta))} - C\log\frac{\delta}{\operatorname{dist}(x-a, \partial B(0,\delta))} \\
&\quad -C\log\frac{\delta}{\operatorname{dist}(x-b, \partial B(0,\delta))} - C\log\frac{\delta}{\operatorname{dist}(x-c, \partial B(0,\delta))} - C).
\end{aligned}$$

Com que $\operatorname{dist}(x - i, \partial B(0, \delta)) = |x - i| - \delta > \frac{3}{5}$,

$$\begin{aligned}
|R^\delta(f_\varepsilon)(x)| &\geq \frac{1}{\delta^2}\left(\frac{1}{C}\log\frac{\delta}{\varepsilon} - 5C\log\frac{5\delta}{3} - C\right) \\
&= \frac{1}{\delta^2}\left(\frac{1}{C}\log\delta + \frac{1}{C}\log\frac{1}{\varepsilon} - C\log\frac{5}{3} - C\log\delta - C\right) \\
&\geq \frac{1}{\delta^2}\left(\frac{1}{2C}\log\frac{1}{\varepsilon} - 2C\log\delta - 6C\right) \\
&\geq \frac{1}{\delta^2}\left(\frac{1}{C}\log\frac{1}{\varepsilon} - C\log\delta\right),
\end{aligned}$$

on a l'última desigualtat hem redefinit la constant, és a dir, C:=2C, i hem suposat ε prou petit.

Ara, si posem $\delta \leq \varepsilon^{-\eta}$, on $\eta = \frac{1}{2C^2}$, tenim

$$log\delta \leq \log\varepsilon^{-\eta} \Rightarrow \log\delta \leq \frac{1}{2C^2}\log\frac{1}{\varepsilon} \Rightarrow C\log\delta \leq \frac{1}{2C}\log\frac{1}{\varepsilon},$$

i concluïm que

$$|R^{\delta}(f_{\varepsilon})(x)| \geq \frac{1}{C}\frac{1}{|x-d|^2}\log\frac{1}{\varepsilon},$$

si $x \in K$, $8 \leq |x-b| = \delta \leq \varepsilon^{-\eta}$, i per a ε prou petit per tal que $\varepsilon^{-\eta} \leq \frac{3}{10\varepsilon}$.

Denotem la mesura de Lebesgue d'un conjunt E com $|E|$. Per a ε prou petit i usant la desigualtat anterior, obtenim

$$\begin{aligned}\left|\left\{x \in \mathbb{R}^2 : R^{\star} f_{\varepsilon} > 1\right\}\right| &\geq \left|\left\{x \in K : 8 \leq |x-b| \leq \varepsilon^{-\eta} \text{ i } \frac{1}{C}\frac{1}{|x-d|^2}\log\frac{1}{\varepsilon} > 1\right\}\right| \\ &= \left|\left\{x \in K : 8 \leq |x-b| \leq \varepsilon^{-\eta} \text{ i } |x-d| < \left(\frac{1}{C}\log\frac{1}{\varepsilon}\right)^{\frac{1}{2}}\right\}\right|.\end{aligned}$$

Si ε compleix

$$\left(\frac{1}{C}\log\frac{1}{\varepsilon}\right)^{\frac{1}{2}} \leq \varepsilon^{-\eta},$$

llavors

$$\left|\left\{x \in \mathbb{R}^2 : R^{\star} f_{\varepsilon} > 1\right\}\right| \geq \left|\left\{x \in K : 8 \leq |x-b| \leq \left(\frac{1}{C}\log\frac{1}{\varepsilon}\right)^{\frac{1}{2}}\right\}\right|.$$

Prenent ε prou petit, podem fer que $16 \leq \left(\frac{1}{C}\log\frac{1}{\varepsilon}\right)^{\frac{1}{2}}$. Aleshores,

$$\left|\left\{x \in \mathbb{R}^2 : R^{\star} f_{\varepsilon} > 1\right\}\right| \geq \frac{1}{C}\log\frac{1}{\varepsilon},$$

o sigui que

$$\|R^{\star} f_{\varepsilon}\|_{1,\infty} \geq \frac{1}{C}\log\frac{1}{\varepsilon},$$

és a dir, $\|R^{\star} f_{\varepsilon}\|_{1,\infty}$ creix molt, tal com volíem, i ja tenim el teorema demostrat. □

3.2 Casos més generals

Volem veure que per a qualsevol enter d senar passa el mateix, és a dir,

Teorema 3.5. *Sigui*

$$Rf(x) = v.p. \int_{\mathbb{R}^2} f(x-y)\frac{P(y)}{|y^{d+2}|}dy,$$

on P és un polinomi homogeni i harmònic de grau d senar. Donada $C > 0$ constant, $\exists f \in L^1(\mathbb{R}^2)$ tal que

$$\|R^{\star} f\|_{1,\infty} \geq C\|Rf\|_1.$$

Un pas essencial en la demostració del Teorema 3.1 és haver trobat una funció F contínua a suport compacte tal que l'actuació de l'operador diferencial $P(\partial)$ sobre F és igual a una suma finita de deltes de Dirac, és a dir,

$$R(T) = \sum_{j=1}^{M} c_j \delta_{a_j}, \text{ amb } M \text{ finit,}$$

com a la secció anterior que hem obtingut $R(T) = 4(\delta_a + \delta_b + \delta_c - \delta_d - \delta_e - \delta_f)$. De fet, si donat un operador de Riesz d'ordre $2N+1$, amb polinomi harmònic homogeni associat P_{2N+1}, sabéssim trobar una funció F_{2N+1} contínua a suport compacte tal que $P_{2N+1}(\partial)(F)$ fos una suma finita de deltes de Dirac aleshores obtindríem l'anàleg del Teorema 3.1 per aquest operador de Riesz d'ordre superior.

A $\mathbb{R}^2$ és fàcil comprovar que això és possible. La raó principal és que al pla tot polinomi harmònic homogeni de grau d descompon en producte de d polinomis de grau 1. A més, cadascun d'aquests polinomis de grau 1 correspon a una direcció i les d direccions estan uniformement distribuïdes. Acabem de veure que quan $d = 3$ podem construir una funció F_3 amb les propietats desitjades. De manera recurrent podem construir F_d en el cas $d > 3$. Veiem-ho. Fixat el polinomi $P_d = \prod_{j=1}^{d} Q_j$ escollim els tres primers factors, és a dir, 3 direccions, i sabem obtenir una funció F_3 tal que $\prod_{j=1}^{3} Q_j(\partial)(F_3)$ és igual a una suma finita de deltes de Dirac. Sigui v_4 la direcció unitària associada al polimoni (de grau 1) Q_4. És clar, integrant sobre totes rectes de vector director v_4, que sabem trobat una funció contínua G_4 tal que $D_{v_4} G_4 = F_3$, però G_4 no té suport compacte. Escollim $\lambda > 0$ prou gran, per exemple igual al diàmetre del suport de la funció F_3. Aleshores, definim $F_4(x) = G_4(x) - G_4(x - \lambda v_4)$ que ja té suport compacte. Observeu que $\prod_{j=1}^{4} Q_j(\partial)(F_4) = \prod_{j=1}^{3} Q_j(\partial)(F_3) - \prod_{j=1}^{3} Q_j(\partial)(F_3)(\cdot - \lambda v_4)$ i així obtenim el doble de deltes de Dirac que al pas anterior, però l'important és que n'és un nombre finit. Reiterant aquest procediment aconseguim el resultat esperat.

Nota. En el cas $n \geq 3$ caldrà aportar alguna nova idea.

Capítol 4

La transformada de Beurling associada a quadrats

Sabem que la desigualtat de Cotlar millorada

$$B^*f(z) \le CM(Bf)(z), \quad z \in \mathbb{C}, \tag{4.1}$$

es compleix per a la transformada de Beurling B definida en (0.5). Fixem-nos que en la definició de l'operador truncat $T^\varepsilon f$, el nucli K té suport fora de la bola de radi ε. És natural considerar també les truncades fora d'un cub de costat ε. És a dir, sigui $Q(x,\varepsilon)$ el cub amb costats paral·lels als eixos, centrat en x i amb costats de longitud ε, llavors definim

$$T_Q^\varepsilon f(x) = \int_{y \notin Q(0,\varepsilon)} f(x-y)K(y)\,dy = \int_{y \notin Q(x,\varepsilon)} f(y)K(x-y)\,dy,$$

i considerem l'integral singular maximal associada

$$T_S^* f(x) = \sup_{\varepsilon>0} |T_Q^\varepsilon f(x)|, \quad x \in \mathbb{R}^n.$$

Amb arguments simples de geometria és fàcil veure que

$$\begin{aligned} T_Q^\varepsilon f(x) &= T^{\sqrt{n}\varepsilon/2} f(x) + \int_{B(0,\sqrt{n}\varepsilon/2)\setminus Q(0,\varepsilon)} f(x-y)K(y)\,dy, \\ T^\varepsilon f(x) &= T_Q^{2\varepsilon} f(x) + \int_{Q(0,2\varepsilon)\setminus B(0,\varepsilon)} f(x-y)K(y)\,dy, \end{aligned}$$

i, per tant,

$$\begin{aligned} T_S^* f(x) &\le T^* f(x) + CM(f)(x), \\ T^* f(x) &\le T_S^* f(x) + CM(f)(x). \end{aligned}$$

Conseqüentment, des del punt de vista de la teoria L^p, els operadors maximals T^* i T_S^* són equivalents. El problema que abordem aquí és l'estudi de les desigualtats puntuals que relacionen $T_S^* f(x)$

amb $Tf(x)$ com en (4.1). En aquest capítol donem una resposta per la transformada de Beurling i per les seves k-èssimes iteracions $B^k = B \circ \cdots \circ B$. Abans de tot això, veiem alguns fets sobre aquesta transformada. El multiplicador de Fourier de B és $\frac{\bar{\xi}}{\xi}$, o sigui, $\widehat{Bf}(\xi) = \frac{\bar{\xi}}{\xi}\hat{f}(\xi)$, i llavors tenim que B és una isometria a $L^2(\mathbb{C})$. El nucli b_k de l'iteració B^k es pot calcular explícitament, per exemple, via un argument de transformada de Fourier (veure [St, p. 73]), i s'obté

$$b_k(z) = \frac{(-1)^k k}{\pi} \frac{\bar{z}^{k-1}}{z^{k+1}}, \quad z \neq 0.$$

Similarment aconseguim el nucli de l'operador invers, $(B^k)^{-1}$, que és precisament el nucli conjugat:

$$\frac{(-1)^k k}{\pi} \frac{z^{k-1}}{\bar{z}^{k+1}}.$$

En aquest capítol demostrem el següent.

Teorema 4.1.

(a) Si k és senar, aleshores

$$(B^k)^*_S f(z) \leq C M^2(B^k f)(z), \quad z \in \mathbb{C},$$

on C és una constant que només depèn de k i $M^2 = M \circ M$ és l'operador maximal iterat.

(b) Si k és parell, per a qualsevol constant positiva C, per a tot $z \in \mathbb{C}$ i per a tot enter positiu j existeix una funció f en $L^2(\mathbb{C})$ tal que

$$(B^k)^*_S f(z) \geq C M^j(B^k f)(z),$$

on $M^j = M \circ \cdots \circ M$ és la j-èssima iterada de M.

Observem que a la banda dreta de la desigualtat de Cotlar millorada ((4.1)) tenim l'operador maximal, però en (a) del Teorema 4.1 hi apareix la M^2, la iterada de la funció maximal de Hardy-Littlewood. El motiu d'això és que, per a k senar, $(B^k)^{-1}(b_k \chi_{\mathbb{C}\setminus B(0,1)})$ és una funció acotada a suport compacte, en canvi $(B^k)^{-1}(b_k \chi_{\mathbb{C}\setminus Q(0,1)})$ és una funció BMO no acotada amb suport no acotat. També donarem un exemple en el que provarem que en l'apartat (a) del teorema anterior per a $k = 1$ no podem reemplaçar l'operador maximal de Hardy–Littlewood iterat $M^2 = M \circ M$ per M. Creiem que hi ha exemples similars per poder veure l'optimalitat per a tots els casos $k = 3, 5, \ldots$ La propietat (b) del teorema també val per a la transformada de Cauchy sobre el graf d'una funció Lipschitz (veure [Gi]).

4.1 Demostració del Teorema 4.1

Procedirem com a [MOPV]. Comencem sense tenir en compte la paritat de k, quan calgui ja distingirem el cas parell del senar. Fent servir la invariància per translacions i dilatacions, podem reduir la prova a

$$|(B^k)^2_Q f(0)| \leq C M^2(B^k f)(0), \tag{4.2}$$

on $(B^k)^2_Q f(0)$ és la integral truncada a nivell 2. Denotem el quadrat $Q(0,2) = [-1,1] \times [-1,1]$ per Q_0. Com és habitual, χ_E denota la funció característica del conjunt E. La idea és obtenir una identitat de la forma

$$b_k(z)\chi_{\mathbb{C}\setminus Q_0}(z) = B^k(a_k)(z),$$

per a alguna funció a_k. Com que B^k és un operador invertible, tenim

$$a_k = (B^k)^{-1}(b_k\, \chi_{\mathbb{C}\setminus Q_0})$$

i aleshores $a_k \in \mathrm{BMO}(\mathbb{C})$. Veurem que si k és senar tenim el decaïment

$$|a_k(z)| \leq \frac{C_k}{|z|^3}, \quad \text{si } |z| > 3. \tag{4.3}$$

Abans de provar-ho, veurem com (4.3) implica (a) del Teorema 4.1. Argumentem com en [MOPV, p. 3675]. Per a tota $f \in L^2(\mathbb{C})$ tenim

$$\begin{aligned}
(B^k)^2_Q f(0) &= \int_{z \notin Q_0} f(z) b_k(-z)\, dz = \int f(z) b_k(z) \chi_{\mathbb{C}\setminus Q_0}(z)\, dz \\
&= \int f(z) B^k(a_k)(z)\, dz = \int B^k f(z) a_k(z)\, dz \\
&= \int_{|z|<3} B^k f(z)(a_k(z) - (a_k)_{B(0,3)})\, dz \\
&\quad + (a_k)_{B(0,3)} \int_{|z|<3} B^k f(z)\, dz + \int_{|z|>3} B^k f(z) a_k(z)\, dz \\
&:= I + II + III,
\end{aligned} \tag{4.4}$$

on $(a_k)_{B(0,3)} = |B(0,3)|^{-1} \int_{B(0,3)} a_k(z)\, dz$. Per acotar el terme I utilitzem la desigualtat de Hölder generalitzada i l'equivalència puntual $M_{L(\log L)} f(x) \approx M^2 f(x)$ (e.g., [Pe, p. 304]) per obtenir

$$|I| \leq C \|a_k\|_{\mathrm{BMO}} \|B^k f\|_{L(\log L), B(0,3)} \leq C M^2(B^k f)(0).$$

És clar que,

$$|II| \leq C M(B^k f)(0).$$

Finalment, del decaïment d'a_k obtenim

$$|III| \leq C \int_{|z|>3} \frac{|B^k f(z)|}{|z|^3}\, dy \leq C M(B^k f)(0),$$

utilitzant un argument estàndard que consisteix en acotar la integral en l'anell $\{3^j \leq |z| < 3^{j+1}\}$. Per tant, aconseguim (4.2) i la part (a) del Teorema 4.1 queda provada. Veiem ara el decaïment que no hem demostrat. Expressem a_k com

$$\begin{aligned}
a_k &= (B^k)^{-1}(b_k\, \chi_{\mathbb{C}\setminus Q_0}) = (B^k)^{-1}(b_k - b_k \chi_{Q_0}) \\
&= \delta_0 - (B^k)^{-1}(b_k \chi_{Q_0}),
\end{aligned}$$

on δ_0 és la delta de Dirac a l'origen. Hem de determinar el decaïment de $(B^k)^{-1}(b_k\chi_{Q_0})(z)$ quan $|z|>3$:

$$\begin{aligned}(B^k)^{-1}(b_k\chi_{Q_0})(z) &= \lim_{\varepsilon\to 0}\int_{\varepsilon<|w|}\overline{b_k(z-w)}(b_k\chi_{Q_0})(w)\,dw\\ &= \lim_{\varepsilon\to 0}\int_{\varepsilon<|w|}(\overline{b_k(z-w)}-\overline{b_k(z)})(b_k\chi_{Q_0})(w)\,dw\\ &\qquad\qquad + \overline{b_k(z)}\lim_{\varepsilon\to 0}\int_{\varepsilon<|w|}(b_k\chi_{Q_0})(w)\,dw\\ &= \lim_{\varepsilon\to 0}\int_{\varepsilon<|w|}(\overline{b_k(z-w)}-\overline{b_k(z)})(b_k\chi_{Q_0})(w)\,dw+\overline{b_k(z)}B^k(\chi_{Q_0})(0)\\ &:= I_k+II_k.\end{aligned}\tag{4.5}$$

Per una banda, com que

$$|\overline{b_k(z-w)}-\overline{b_k(z)}|\le\frac{C|w|}{|z|^3},\quad |z|>3,\quad |w|\le\sqrt{2},$$

obtenim

$$|I_k|\le C\int_{w\in Q_0}\frac{|w|}{|z|^3}\frac{1}{|w|^2}\,dw=\frac{C}{|z|^3}.$$

Per altra banda, comprovarem en el següent lema que quan k és senar $B^k(\chi_{Q_0})(0)=0$. Llavors $II_k=0$ i tenim el decaïment (4.3).

Lema. *Sigui Q un quadrat qualsevol, amb costats paral·lels als eixos, centrat al 0. Llavors*

(a) $\overline{(B^k\chi_Q)(z)}=(B^k\chi_Q)(\bar z)$.

(b) $(B^k\chi_Q)(iz)=(-1)^k(B^k\chi_Q)(z)$.

(c) $(B^k\chi_Q)(0)=0$ *si k és senar, i* $(B^k\chi_Q)(0)\neq 0$ *si k és parell.*

Demostració. És fàcil provar (a) i (b). Considerem la simetria del domini respecte el conjugat i respecte la rotació d'angle $\pi/2$:

$$\begin{aligned}\overline{(B^k\chi_Q)(z)} &= \text{v.p.}\int_Q\overline{b_k(z-w)}\,dw=\text{v.p.}\int_Q b_k(\bar z-\bar w)\,dw\\ &= \text{v.p.}\int_Q b_k(\bar z-w)\,dw=(B^k\chi_Q)(\bar z)\end{aligned}$$

i

$$\begin{aligned}(B^k\chi_Q)(iz) &= \text{v.p.}\int_Q b_k(iz-w)\,dw=\text{v.p.}\int_Q b_k(iz-iw)\,dw\\ &= (-i)^{2k}\,\text{v.p.}\int_Q b_k(z-w)\,dw=(-1)^k(B^k\chi_Q)(z).\end{aligned}$$

Per (b), quan k és senar, tenim $(B^k\chi_Q)(0) = -(B^k\chi_Q)(0)$ i llavors $(B^k\chi_Q)(0) = 0$. Per aconseguir $(B^k\chi_Q)(0) \neq 0$ per a k parell, hem de treballar una mica més. Posem $k = 2j$ i per simplificar agafem $Q = Q_0$. Llavors

$$\begin{aligned}(B^{2j}\chi_{Q_0})(0) &= \text{v.p.} \int_{Q_0} b_{2j}(w)\,dw = \int_{Q_0\setminus B(0,1)} b_{2j}(w)\,dw \\ &= 4\int_E b_{2j}(w)\,dw = 4\,\frac{2j}{\pi}\int_E \frac{\bar{w}^{2j-1}}{w^{2j+1}}\,dw,\end{aligned}$$

on $E = \{w \in Q_0 \setminus B(0,1) : \operatorname{Re} w > 0 \text{ i } \operatorname{Im} w > 0\}$. La segona identitat l'aconseguim per la cancel·lació dels nuclis i la tercera perquè $b_{2j}(w) = b_{2j}(iw)$. Així doncs, fent el canvi a coordenades polars $w = re^{i\theta}$, amb $1 \leq r \leq \sqrt{2}$ i $\theta(r) \leq \theta \leq \frac{\pi}{2} - \theta(r)$, $\theta(r) = \arccos(\frac{1}{r})$, tenim

$$\begin{aligned}(B^{2j}\chi_{Q_0})(0) &= 4\frac{2j}{\pi}\int_1^{\sqrt{2}}\int_{\theta(r)}^{\frac{\pi}{2}-\theta(r)} \frac{(re^{-i\theta})^{2j-1}}{(re^{i\theta})^{2j+1}}\,d\theta\, r\,dr \\ &= 4\frac{2j}{\pi}\int_1^{\sqrt{2}}\int_{\theta(r)}^{\frac{\pi}{2}-\theta(r)} e^{-i\theta 4j}\,d\theta\,\frac{dr}{r} \\ &= \frac{-4}{\pi}\int_1^{\sqrt{2}} \sin(\theta(r)4j)\,\frac{dr}{r}.\end{aligned}$$

Expressant $\sin(\theta(r)4j)$ en termes de $\sin(\theta(r))$ i $\cos(\theta(r))$ i substituint $\sin(\theta(r)) = \frac{\sqrt{r^2-1}}{r}$ i $\cos(\theta(r)) = 1/r$ obtenim

$$\begin{aligned}(B^{2j}\chi_{Q_0})(0) &= \frac{-4}{\pi}\sum_{m=0}^{2j-1}(-1)^m\binom{4j}{2m+1}\int_1^{\sqrt{2}} \frac{1}{r^{4j}}(r^2-1)^{\frac{2m+1}{2}}\,\frac{dr}{r} \\ &= \frac{-4}{\pi}\sum_{m=0}^{2j-1}(-1)^m\binom{4j}{2m+1}\int_0^1 \frac{x^{2m+2}}{(x^2+1)^{2j+1}}\,dx \qquad (4.6)\\ &:= \frac{-4}{\pi}\int_0^1 F_j(x)\,dx.\end{aligned}$$

Integrant per parts tants cops com sigui necessari, fàcilment obtenim, per a alguns $a, b \in \mathbb{Q}$,

$$\int_0^1 \frac{x^{2m+2}}{(x^2+1)^{2j+1}}\,dx = a + b\frac{\pi}{4} \neq 0.$$

Encara que cada factor en (4.6) és diferent de zero, pot haver-hi cancelacions en la suma en m. Comprovarem que $(B^{2j}\chi_{Q_0})(0) \neq 0$ provant que una primitiva de $F_j(x)$ és una funció racional $R_j(x)$, a coeficients enters, menys $\arctan(x)$. Aleshores tenim

$$\int_0^1 F_j(x)\,dx = R_j(1) - R_j(0) - \frac{\pi}{4} \neq 0,$$

perquè $R_j(1) - R_j(0)$ és un número racional.

Donat $n < d$, definim

$$I(d, 2n) := \int \frac{x^{2n}}{(x^2+1)^d}\, dx.$$

No és necessari fixar la constant de la primitiva perquè estem avaluant una integral definida. Integrant per parts tenim

$$I(d, 2n) = \frac{-x^{2n-1}}{2(d-1)(x^2+1)^{d-1}} + \frac{2n-1}{2(d-1)} I(d-1, 2(n-1)).$$

Iterant el procediment obtenim

$$I(d, 2n) = \frac{(2n-1)!}{2^{n-1}(n-1)!} \frac{(d-n-1)!}{2^n(d-1)!} I(d-n, 0) + R(x), \tag{4.7}$$

on $R(x)$ és una funció racional definida en $\mathbb{R}$ i $R(0) = 0$. Donat $k \geq 2$ fàcilment s'obté

$$I(k, 0) = \frac{(2k-3)!}{2^{2k-3}(k-1)!(k-2)!} I(1, 0) + R(x). \tag{4.8}$$

Ara, utilitzant (4.6) i també (4.7) i (4.8),

$$\begin{aligned}\int F_j(x)\, dx = I(1,0) \Bigg\{ & \left(\sum_{m=0}^{2j-2} (-1)^m \binom{4j}{2m+1} \frac{(2m+1)!(4j-2m-3)!}{m!(2j)!(2j-m-2)!2^{4j-2}} \right) \\ & - \frac{(4j)!}{(2j-1)!(2j)!2^{4j-1}} \Bigg\} + R_j(x).\end{aligned}$$

Després d'alguns càlculs (vegeu l'apèndix a la Secció 4.3), obtenim exactament el que volíem,

$$\left(\sum_{m=0}^{2j-2} (-1)^m \binom{4j}{2m+1} \frac{(2m+1)!(4j-2m-3)!}{m!(2j)!(2j-m-2)!2^{4j-2}} \right) - \frac{(4j)!}{(2j-1)!(2j)!2^{4j-1}} = -1, \tag{4.9}$$

és a dir,

$$\int F_j(x)\, dx = -I(1,0) + R_j(x) = -\arctan(x) + R_j(x).$$

□

Demostrem ara l'apartat (b) del teorema. Recordem que ara k és parell. Per (4.4) es té que

$$|(B^k)^2_Q f(0)| \lesssim M^j(B^k f)(0)$$

si i només si

$$|III| \lesssim M^j(B^k f)(0). \tag{4.10}$$

Per (4.5), quan $|z| > 3$,

$$a_k(z) = \overline{b_k(z)}(B^k \chi_{Q_0})(0) + O\left(\frac{1}{|z|^3}\right) := \alpha_k \frac{z^{k-1}}{\bar{z}^{k+1}} + O\left(\frac{1}{|z|^3}\right),$$

on α_k és una constant diferent de zero que depèn de k. Conseqüentment, (4.10) es satisfà si i només si

$$\left| \int_{|z|>3} \frac{z^{k-1}}{\bar{z}^{k+1}} B^k f(z)\, dz \right| \lesssim M^j(B^k f)(0), \quad f \in L^2.$$

Com que B^k és invertible en L^2, això és equivalent a

$$\left| \int_{|z|>3} \frac{z^{k-1}}{\bar{z}^{k+1}} G(z)\, dz \right| \lesssim M^j(G)(0), \quad G \in L^2. \tag{4.11}$$

Però (4.11) és fals. De fet, sigui G una funció a suport compacte i $0 \leq G \leq 1$. Òbviament, $M^j(G) \leq 1$. Per altra banda, com que $\frac{z^{k-1}}{\bar{z}^{k+1}} \chi_{B(0,3)^c}(x)$ no és de $L^1(\mathbb{C})$, podem aconseguir que la banda esquerra de (4.11) sigui tan gran com vulguem.

4.2 Contraexemple

En aquesta secció veiem que la condició (a) del teorema és òptima per a $k = 1$. Més concretament, veurem que existeix una funció f tal que per a cada constant $C > 0$ existeix un punt $z \in \mathbb{C}$ amb el que es compleix

$$B_S^* f(z) > CM(Bf)(z). \tag{4.12}$$

Triem $f := B^{-1}(\chi_{Q_0})$. Per a $|z| > 2$ es té $M(Bf)(z) = M(\chi_{Q_0})(z) \approx \frac{1}{|z|^2}$. Llavors, en lloc d'obtenir la desigualtat (4.12) és suficient provar que per a algun z tenim

$$B_S^* f(z) \geq C \frac{\log |z|}{|z|^2}. \tag{4.13}$$

Per a $m > 2$ (per exemple, $m = 5$), prenem $\alpha \gg m$, posem $z = \alpha + i\alpha$ i considerem l'operador truncat

$$(B)_Q^{2(\alpha+m)} f(z) = \frac{-1}{\pi} \int_{w \notin Q(z, 2(\alpha+m))} \frac{f(w)}{(z-w)^2}\, dw.$$

Per la definició, $B_Q^* f(z) \geq |(B)_Q^{2(\alpha+m)} f(z)|$ i llavors tindrem (4.13) si veiem que

$$|(B)_Q^{2(\alpha+m)} f(z)| \gtrsim \frac{\log |z|}{|z|^2}. \tag{4.14}$$

La idea és descomposar $(B)_Q^{2(\alpha+m)} f(z)$ com una suma de certs termes. Tots els termes, excepte un, es podran acotar per $C|z|^{-2}$ i el terme excepcional serà de l'ordre $|z|^{-2} \log |z|$. Comencem escrivint la igualtat

$$(B)_Q^{2(\alpha+m)} f(z) = B^{\sqrt{2}(\alpha+m)} f(z) - \frac{1}{\pi} \int_E \frac{f(w)}{(w-z)^2}\, dw,$$

on E és el conjunt $B(z, \sqrt{2}(\alpha + m)) \setminus Q(z, 2(\alpha + m))$. Per la desigualtat puntual (4.1), el primer terme està acotat per $\frac{C}{|z|^2}$ i només ens ocupem del segon. Posem $E = A_1 \cup A_2 \cup B$ on (vegeu Figura 1)

$$\begin{aligned} A_1 &:= \{w \in E : \operatorname{Re}(w - z) < 0, \operatorname{Im}(w - z) < 0 \text{ and } \operatorname{Im}(w + m + im) > 0\}, \\ A_2 &:= \{w \in E : \operatorname{Re}(w - z) < 0, \operatorname{Im}(w - z) < 0 \text{ and } \operatorname{Im}(w + m + im) < 0\}, \\ B &:= E \setminus (A_1 \cup A_2). \end{aligned}$$

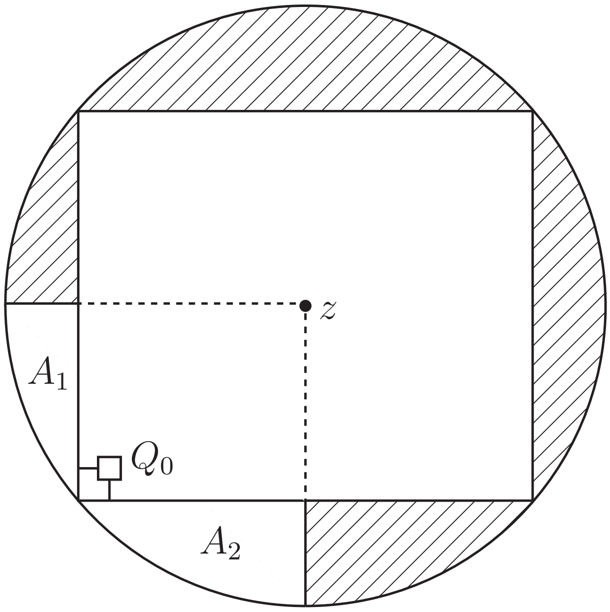


Figura 1

Aleshores

$$\int_E \frac{f(w)}{(w - z)^2}\, dw = \int_{A_1 \bigcup A_2} \frac{f(w)}{(w - z)^2}\, dw + \int_B \frac{f(w)}{(\xi - z)^2}\, dw.$$

En B tenim $|f(w)| = |B^{-1}(\chi_{Q_0})(w)| \leq \frac{C}{|w|^2}$ i llavors

$$\left| \int_B \frac{f(w)}{(w - z)^2}\, dw \right| \leq \int_B \frac{C}{|w - z|^2 |w|^2}\, dw \leq \frac{C|B|}{|z|^4} = \frac{C}{|z|^2}.$$

O sigui que per provar (4.14) ens queda veure que

$$\left| \int_{A_1 \cup A_2} \frac{f(w)}{(w - z)^2}\, dw \right| \geq C \frac{\log |z|}{|z|^2}. \tag{4.15}$$

Per a qualsevol $w \in A_1 \cup A_2$ escrivim

$$f(w) = \frac{-1}{\pi} \int_{Q_0} \frac{1}{(\overline{w - \xi})^2}\, d\xi = \frac{-1}{\pi} \frac{|Q_o|}{\overline{w}^2} - \frac{1}{\pi} \int_{Q_0} \left(\frac{1}{(\overline{w - \xi})^2} - \frac{1}{\overline{w}^2} \right) d\xi.$$

Per la propietat del valor mitjà, l'última integral en la igualtat anterior està acotada per $\frac{C}{|w|^3}$. Així doncs, uns càlculs simples ens donen

$$\left|\int_{A_1\cup A_2}\left(f(w)+\frac{1}{\pi}\frac{|Q_0|}{\bar{w}^2}\right)\frac{1}{(w-z)^2}\,dw\right| \le C\int_{A_1\cup A_2}\frac{1}{|w|^3}\frac{1}{|w-z|^2}\,dw \le \frac{C}{|z|^2}.$$

Conseqüentment, la desigualtat (4.15) es satisfà si i només si

$$\left|\int_{A_1\cup A_2}\frac{1}{(z-w)^2}\frac{1}{\overline{w}^2}\,dw\right| \ge C\frac{\log|z|}{|z|^2}. \tag{4.16}$$

Observem que, per la simetria dels conjunts, $w\in A_1$ si i només si $i\overline{w}\in A_2$. Llavors la integral en (4.16) es pot escriure com

$$\int_{A_1}\left(\frac{1}{(z-w)^2}\frac{1}{\overline{w}^2}+\frac{1}{(z-i\overline{w})^2}\frac{1}{(iw)^2}\right)dw.$$

Posem $A_1^- = \{w\in A_1 : \operatorname{Im}(w)<0\}$, $A_1^+ = \{w\in A_1 : \bar{w}\in A_1^-\}$ i sigui $D = A_1\setminus(A_1^+\cup A_1^-)$ (vegeu Figura 2).

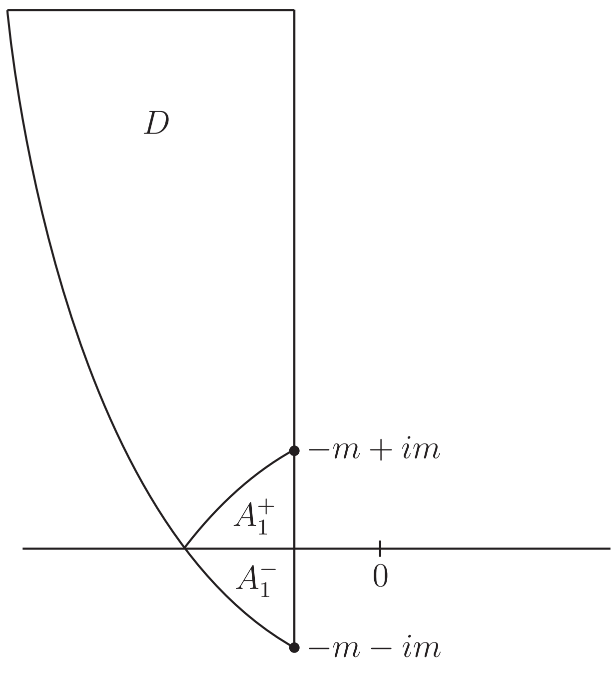


Figura 2

Primer de tot veiem que la integral sobre $A_1^+\cup A_1^-$ està acotada per $\frac{C}{|z|^2}$. Utilitzant un canvi de variables en la integral sobre A_1^-, podem veure que la integral sobre $A_1^+\cup A_1^-$ és

$$\int_{A_1^+}\left(\frac{1}{(z-\overline{w})^2}-\frac{1}{(z-i\overline{w})^2}\right)\frac{1}{w^2}\,dw+\int_{A_1^+}\left(\frac{1}{(z-w)^2}-\frac{1}{(z-iw)^2}\right)\frac{1}{\overline{w}^2}\,dw := I+II.$$

Acotarem $|I|$ i $|II|$ per $\frac{C}{|z|^2}$. En efecte,

$$|I| = \left| \int_{A_1^+} \frac{-2\overline{w}^2 + \overline{w}(2z - 2iz)}{w^2(z-\overline{w})^2(z-i\overline{w})^2}\, dw \right| \leq \frac{C}{|z|^4} \int_{A_1^+} \left(1 + \frac{|z|}{|w|}\right) dw \leq \frac{Cm}{|z|^3} \leq \frac{C}{|z|^2},$$

on a la primera desigualtat hem utilitzat que $|z-\overline{w}| = |z-i\overline{w}| \approx |z|$, i a la segona $\int_{A_1^+} |w|^{-1} \leq Cm$. Utilitzant càlculs similars pel segon terme, obtenim

$$|II| = \left| \int_{A_1^+} \frac{-2w^2 + w(2z - 2iz)}{\overline{w}^2(z-w)^2(z-iw)^2}\, dw \right| \leq \frac{C}{|z|^2}.$$

O sigui que només ens queda calcular la integral sobre D, que podem dividir altre cop en dos termes,

$$\int_D \left(\frac{1}{(z-w)^2}\frac{1}{\overline{w}^2} - \frac{1}{(z-i\overline{w})^2}\frac{1}{w^2} \right) dw \; = \int_D \frac{1}{(z-w)^2}\left(\frac{1}{\overline{w}^2} - \frac{1}{w^2}\right) dw$$
$$+ \int_D \frac{1}{w^2}\left(\frac{1}{(z-w)^2} - \frac{1}{(z-i\overline{w})^2} \right) dw := III + IV.$$

Observem que si $w \in D$ llavors $|z-\overline{w}| = |z-i\overline{w}| \approx |z|$ i $m \leq |w| \leq 3|z|$. Operem com abans amb el terme $|IV|$. De fet tenim

$$|IV| = \int_D \frac{2z(w-i\overline{w}) - \overline{w}^2 - w^2}{w^2(z-w)^2(z-i\overline{w})^2}\, dw \leq \int_D \frac{2|w|^2 + 4|z||w|}{|w|^2|z-w|^2|z-i\overline{w}|^2}\, dw$$
$$\leq \frac{C}{|z|^4} \int_D \left(1 + \frac{|z|}{|w|}\right) dw \leq \frac{C|D|}{|z|^4} + \frac{C}{|z|^3}\int_m^{3|z|} 1\, dr \leq \frac{C}{|z|^2}.$$

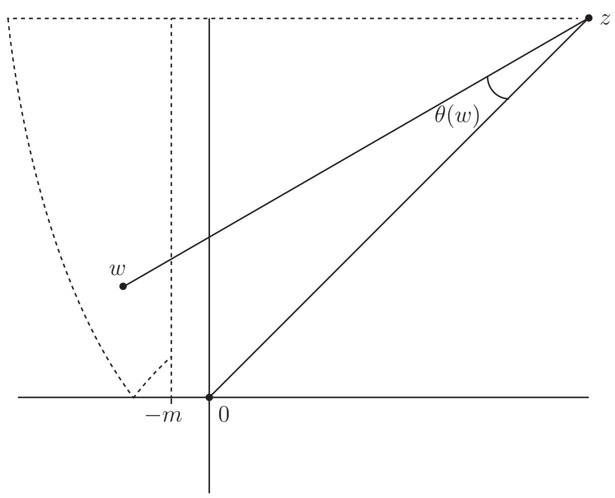


Figura 3

Finalment el terme III és el que farà que funcioni el contraexemple. Per a $w \in D$ (vegeu Figura 3) escrivim $w - z = R(w)e^{i(\frac{5\pi}{4} - \theta(w))}$ on $R(w) = |w - z| \approx |z|$ i $0 \leq \theta(w) \leq \frac{\pi}{4}$. Així doncs, $i(w-z)^{-2} = -e^{i2\theta(w)}(R(w))^{-2}$. Llavors tenim

$$\begin{aligned} III &= 2i \int_D \frac{1}{(z-w)^2} \frac{\operatorname{Im} w^2}{|w|^4}\, dw = -2 \int_D \frac{e^{i2\theta(w)}}{R^2(w)} \frac{\operatorname{Im} w^2}{|w|^4}\, dw \\ &= -2 \int_D \frac{(\cos 2\theta(w) + i \sin 2\theta(w))}{R^2(w)} \frac{\operatorname{Im} w^2}{|w|^4}\, dw. \end{aligned}$$

Com que $\cos 2\theta(w) \geq 0$ i $\operatorname{Im} w^2 \leq 0$,

$$|\operatorname{Re} III| = 2 \int_D \frac{\cos 2\theta(w)}{R^2(w)} \frac{|\operatorname{Im} w^2|}{|w|^4}\, dw \geq \frac{C}{|z|^2} \int_D \cos 2\theta(w) \frac{|\operatorname{Im} w^2|}{|w|^4}\, dw.$$

Fixem $\delta > 0$ i posem

$$\widetilde{D} := \{w \in D \,:\, \cos 2\theta(w) > \delta\} \cap \left\{w \in \mathbb{C} : \frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{100} \leq \arg w \leq \pi - \frac{\pi}{100}\right\}.$$

Llavors, si $w \in \widetilde{D}$ tenim $|\operatorname{Im} w| \geq |w| \frac{\beta}{\sqrt{1+\beta^2}} \geq \frac{\beta|w|}{2}$, on $\beta = \tan \frac{\pi}{50}$. Observem que la mesura de Lebesgue de $\widetilde{D}$ és comparable a la mesura de Lebesgue de D. Finalment, utilitzant coordenades polars obtenim

$$|\operatorname{Re} III| \geq C \frac{\delta\beta}{|z|^2} \int_{\widetilde{D}} \frac{1}{|w|^2}\, dw \geq C \frac{\delta\beta}{|z|^2} \int_{4m}^{|z|/10} \frac{dr}{r} \geq C \frac{\delta\beta}{|z|^2} \log |z|,$$

que ens dóna (4.16) i el contraexemple.

4.3 Càlculs combinatoris

En aquesta secció provarem la identitat (4.9). Per aconseguir-la, escriurem el terme de la banda esquerra de (4.9) d'una altra forma. Ho posem com

$$\begin{aligned} &\left(\sum_{m=0}^{2j-2} (-1)^m \binom{4j}{2m+1} \frac{(2m+1)!(4j-2m-3)!}{m!(2j)!(2j-m-2)!2^{4j-2}} \right) - \frac{(4j)!}{(2j-1)!(2j)!2^{4j-1}} \\ &\qquad = \frac{(4j)!}{(2j)!(2j-1)!2^{4j-1}} \sum_{m=0}^{2j-1} (-1)^m \binom{2j-1}{m} \frac{1}{4j-2m-1} \\ &\qquad := \frac{(4j)!}{(2j)!(2j-1)!2^{4j-1}}\, S, \end{aligned}$$

on a l'última identitat definim S. Llavors, només falta provar que

$$S = -\frac{(4j)!}{(2j)!(2j-1)!2^{4j-1}}. \tag{4.17}$$

Utilitzant dues vegades el següent fet trivial

$$\sum_{m=0}^{2j-1}(-1)^m\binom{2j-1}{m} = (1-1)^{2j-1} = 0,$$

tenim

$$\begin{aligned}
S &= \sum_{m=0}^{2j-1}(-1)^m\binom{2j-1}{m}\left(\frac{1}{4j-2m-1}-1\right) \\
&= (-1)2(2j-1)\sum_{m=0}^{2j-2}(-1)^m\binom{2j-1}{m}\frac{1}{4j-2m-1} \\
&= (-1)2(2j-1)\sum_{m=0}^{2j-2}(-1)^m\binom{2j-1}{m}\left(\frac{1}{4j-2m-1}-\frac{1}{3}\right) \\
&= (-1)^2 2^2(2j-1)(2j-2)\sum_{m=0}^{2j-3}(-1)^m\binom{2j-1}{m}\frac{1}{4j-2m-1}.
\end{aligned}$$

Iterant aquest procés $(2j-1)$ vegades, obtenim (4.17), i llavors (4.9) queda demostrat.

Bibliografia

[BeL] J. Bergh, J. Löfström, *Interpolation spaces. An introduction*, Grundlehren der Mathematischen Wissenschaften **223**, Springer-Verlag, Berlin-New York, 1976.

[BMO1] A. Bosch-Camós, J. Mateu, J. Orobitg, *L^p estimates for the maximal singular integral in terms of the singular integral*, J. Analyse Math. **126** (2015), 287–306.

[BMO2] A. Bosch-Camós, J. Mateu, J. Orobitg, *The maximal Beurling transform associated with squares*, Ann. Acad. Sci. Fenn. **40** (2015), 215–226.

[Ca] A. P. Calderón, *Algebras of singular integral operators*, Proc. Sympos. Pure Math. (1966), 18–55.

[CF] A. Córdoba, C. Fefferman, *A weighted norm inequality for singular integrals*, Studia Math. **57** (1976), 97–101.

[Du] J. Duoandikoetxea, *Fourier Analysis*, Graduate Studies in Mathematics **29**, American Mathematical Society, Providence, RI, 2001.

[Gi] D. Girela-Sarrión, *Counterexamples to some pointwise estimates of the maximal Cauchy transform in terms of the Cauchy transform*, Ann. Acad. Sci. Fenn. Math. **38** (2) (2013), 657–675.

[Gr1] L. Grafakos, *Classical Fourier Analysis*, Graduate Texts in Mathematics **249**, Springer Verlag, Berlin, Second Edition, 2008.

[Gr2] L. Grafakos, *Modern Fourier Analysis*, Graduate Texts in Mathematics **250**, Springer Verlag, Berlin, Second Edition, 2008.

[Ku] E. Kunz, *Introduction to Commutative Algebra and Algebraic Geometry*, Birkhäuser, Boston, MA, 1985.

[KW] D. S. Kurtz, R. L. Wheeden, *Results on Weighted norm inequalities for multipliers*, Trans. Amer. Math. Soc. **255** (1979), 343–362.

[LZ] R. Lyons, K. Zumbrun, *Homogeneous partial derivatives of radial functions*, Proc. Amer. Math. Soc. **121** (1994), 315–316.

[MOPV] J. Mateu, J. Orobitg, C. Perez, J. Verdera, *New estimates for the maximal singular integral*, Int. Math. Res. Not. **19** (2010), 3658–3722.

[MOV] J. Mateu, J. Orobitg, J. Verdera, *Estimates for the maximal singular integral in terms of the singular integral: the case of even kernels*, Ann. of Math. **174** (2011), 1429–1483.

[MV] J. Mateu, J. Verdera, *L^p and weak L^1 estimates for the maximal Riesz transform and the maximal Beurling transform*, Math. Res. Lett. **13** (2006), 957–966.

[Mu] B. Muckenhoupt, *Weighted norm inequalities for the Hardy maximal function*, Trans. Amer. Math. Soc. **165** (1972), 207–226.

[Pe] C. Pérez, *Weighted norm inequalities for singular integral operators*, J. London Math. Soc. **49** (1994), 296–308.

[RS] F. Ricci, E. M. Stein, *Harmonic analysis on nilpotent groups and singular integrals. I. Oscillatory integrals*, J. Funct. Anal. **73** (1987), 179–194.

[Sa] Y. Sarantopoulos, *Bounds on the derivatives of polynomials on Banach spaces*, Math. Proc. Cambridge Philos. Soc. **110** (1991), 307-–312.

[St] E. M. Stein, *Singular integrals and differentiability properties of functions*, Princeton University Press, Princeton, 1970.

[SW1] E. M. Stein, G. Weiss, *Interpolation of operators with change of measures*, Trans. Amer. Math. Soc. **87** (1958), 159–172.

[SW2] E. M. Stein and G. Weiss, *Introduction to Fourier Analysis on Euclidean Spaces*, Princeton University Press, Princeton, 1971.