Universitat Autònoma de Barcelona

Fórmulas integrales de curvatura y foliaciones de Lie

Eduardo Gallego Gómez

Memoria presentada para aspirar al grado de Doctor en Ciencias Matemáticas.

Departament de Matemàtiques.
Universitat Autònoma de Barcelona.

Bellaterra, Mayo de 1990

CERTIFICO que la present memòria ha estat realitzada per Eduardo Gallego Gómez, i dirigida per mi, al Departament de Matemàtiques de la Universitat Autònoma de Barcelona.

Bellaterra, Maig de 1990

Dr. Agustí Reventós Tarrida

A Patricia

Indice

Introducción

Esta memoria está dividida en dos partes en principio independientes. La primera de ellas trata de las llamadas fórmulas integrales de curvatura y la segunda de las foliaciones de Lie.

Fórmulas integrales de curvatura

El origen lejano de este tipo de fórmulas se encuentra en el teorema de Gauss–Bonnet, en el que se ve cómo la integral de la "curvatura" de la variedad es un invariante topológico.

Cuando sobre una variedad tenemos una foliación, además de poder considerar las diferentes curvaturas sobre la misma, podemos considerar también las curvaturas de las hojas y preguntarnos si sus integrales dan lugar o no a algún tipo de invariantes asociados a la variedad. En esta línea, uno de los primeros resultados que aparece en la literatura es el de Asimov (cf. [AS 78]). Si M es una variedad riemanniana compacta, conexa, sin borde y de dimensión $n+1$ sobre la cual se tiene una foliación $\mathcal{F}$ transversalmente orientable y de codimensión 1, Asimov demostró que, si además M tiene curvatura seccional constante c, entonces

$$\frac{1}{\mathrm{vol}(M)}\int_M K = \begin{cases} 0 & \text{si } n \text{ es impar} \\ 2^n c^{n/2} \Big/ \binom{n}{n/2} & \text{si } n \text{ es par} \end{cases} \tag{0.1}$$

donde la función $K : M \to \mathbf{R}$ denota la curvatura de Lipschitz–Killing (de Gauss si $n=2$, cf. [TH 64]) de la hoja F_x de $\mathcal{F}$ que pasa por x con respecto de la métrica de Riemann inducida por su inclusión en M.

Posteriormente, Brito, Langevin y Rosenberg (cf. [Bl 84]) generalizaron este resultado dando fórmulas integrales, no sólo para la curvatura K, sino también para las funciones simétricas elementales de curvatura, aunque trabajando todavía con foliaciones de codimensión 1 y variedades de curvatura seccional constante. Más concretamente, sea ∇ la conexión de Levi–Civita asociada a la métrica en M. Consideramos en cada punto x de la variedad el endomorfismo

$$\begin{array}{ccc} T_xM & \xrightarrow{A_x} & T_xM \\ y & \longmapsto & (\nabla_y N)(x), \end{array}$$

donde N es un campo vectorial unitario y normal a la foliación $\mathcal{F}$. Para cada k entre 0 y n, la k-ésima función simétrica de curvatura σ_k se define mediante la expresión

$$\det(I + tA_x) = \sum_{k=0}^{n} \sigma_k t^k.$$

Cuando M es compacta, orientable, sin borde y con curvatura seccional constante c, se tiene la fórmula integral siguiente:

$$\frac{1}{\mathrm{vol}(M)} \int_M \sigma_k = \begin{cases} c^{k/2} \binom{n/2}{k/2} & \text{si } n \text{ y } k \text{ son pares} \\ 0 & \text{en los otros casos} \end{cases} \tag{0.2}$$

A la vista de las anteriores relaciones, 0.1 y 0.2, hemos considerado natural el planteamiento de las siguientes cuestiones:

1. ¿Es posible eliminar la hipótesis de integrabilidad? Es decir, ¿qué ocurre si se consideran campos de planos en vez de foliaciones en la variedad M?

2. ¿Es posible eliminar la hipótesis sobre la codimensión de la foliación y tratar el caso de codimensión arbitraria?

3. ¿Qué ocurre al estudiar las fórmulas en el supuesto de variedades M con curvatura seccional no necesariamente constante ?

En esta memoria hemos contestado a estas tres preguntas obteniendo fórmulas integrales de curvatura, al estilo de 0.1 y 0.2, para distribuciones no necesariamente integrables, de codimensión arbitraria y sobre variedades cuya métrica no tenga por que ser de curvatura seccional constante.

Concretamente, hemos obtenido los siguientes resultados:

Teorema 0.1 *Sea (M,g) variedad riemanniana orientada, compacta y sin borde. Si $\mathcal{F}$ es un campo de p-planos en M y $\mathcal{H}$ el campo ortogonal a $\mathcal{F}$, entonces se tienen la fórmulas integrales siguientes*

1.

$$\frac{1}{2}\int_M \tau_M = \frac{1}{2}\int_M(\tau_{\mathcal{F}} + \tau_{\mathcal{H}}) + 2\int_M(\sigma_{2,\mathcal{F}} + \sigma_{2,\mathcal{H}}) + 2\int_M(\|A_{\mathcal{F}}\|^2 + \|A_{\mathcal{H}}\|^2) \tag{0.3}$$

2.

$$\frac{1}{2}\int_M \tau_M = \frac{1}{2}\int_M(\tau'_{\mathcal{F}}+\tau'_{\mathcal{H}})+\int_M(\sigma_{2,\mathcal{F}}+\sigma_{2,\mathcal{H}})+\int_M(\|A_{\mathcal{F}}\|^2+\|A_{\mathcal{H}}\|^2) \tag{0.4}$$

donde τ_M es la curvatura escalar de la variedad, $\tau_{\mathcal{F}}$ y $\tau_{\mathcal{H}}$ las curvaturas escalares extrínsecas de los campos de planos y $\tau'_{\mathcal{F}}$ y $\tau'_{\mathcal{H}}$ la curvaturas escalares intrínsecas (i.e. las obtenidas al restringir la métrica de M a $\mathcal{F}$ y $\mathcal{H}$ respectivamente).

Otra fórmula interesante surge al introducir la curvatura escalar mixta τ_m, definida en M a través de la relación

$$\tau_M = \tau_{\mathcal{F}} + 2\tau_m + \tau_{\mathcal{H}};$$

entonces deducimos que

Teorema 0.2 *Sea (M,g) variedad riemanniana orientada compacta y sin borde. Si $\mathcal{F}$ es un campo de p-planos en M y $\mathcal{H}$ el campo ortogonal a $\mathcal{F}$, entonces se tiene la fórmula integral*

$$\frac{1}{2}\int_M \tau_m = \int_M(\sigma_{2,\mathcal{F}} + \sigma_{2,\mathcal{H}}) + \int_M(\|A_{\mathcal{F}}\|^2 + \|A_{\mathcal{H}}\|^2) \tag{0.5}$$

Hay que hacer notar que las fórmulas 0.3, 0.4 y 0.5 provienen de integrar ciertas relaciones entre formas diferenciales de M (cf. 2.17, 2.18 y 2.22) en las cuales aparece un término exacto que desaparece al integrar sobre variedades compactas sin borde.

De entre las consecuencias derivadas de las fórmulas destacamos, en primer lugar, dos situaciones geométricas límite, cuando $\mathcal{F}$ es de codimensión 1 — corolario 0.1 — y cuando M tiene curvatura seccional constante — corolario 0.2 — :

Corolario 0.1 *Si (M,g) es una variedad riemanniana compacta, orientada y sin borde y $\mathcal{F}$ es un campo de planos orientable y de codimensión 1 en M, entonces*

$$\frac{1}{2}\int_M \mathrm{Ric}(N,N) = \int_M \sigma_{2,\mathcal{F}} + \int_M \|A_{\mathcal{F}}\|^2 \tag{0.6}$$

siendo N un campo unitario y normal a $\mathcal{F}$.

Corolario 0.2 *Si (M,g) es una variedad riemanniana compacta, orientada, sin borde y con curvatura seccional constante k y $\mathcal{F}$ es un campo de planos orientable y $\mathcal{H}$ su ortogonal, tenemos la fórmula integral siguiente*

$$\frac{1}{2}pqk\cdot \mathrm{vol}(M) = \int_M(\sigma_{2,\mathcal{F}} + \sigma_{2,\mathcal{H}}) + \int_M(\|A_{\mathcal{F}}\|^2 + \|A_{\mathcal{H}}\|^2) \tag{0.7}$$

donde $\dim\mathcal{F} = p$ *y* $\dim\mathcal{H} = q$.

Nótese que, cuando $\mathcal{F}$ es integrable y de codimensión 1, recuperamos la fórmula de Brito–Langevin–Rosenberg para σ_2.

Entre otras consecuencias (cf. pág. 66) destacamos las siguientes.

- Respecto a campos totalmente geodésicos:

Proposición 0.1 *Sea (M,g) una variedad riemanniana orientada, compacta y sin borde y $\mathcal{F}$ y $\mathcal{H}$ campos de planos ortogonales y complementarios.*

1. *Si τ_m es no positiva y es negativa en algún punto de M, $\mathcal{F}$ y $\mathcal{H}$ no pueden ser campos totalmente geodésicos.*

2. *En particular, si M tiene curvatura seccional no positiva y es negativa en algún punto, la afirmación 1 sigue siendo cierta.*

3. *Si $\tau_m \leq 0$ y los campos de planos son totalmente geodésicos, éstos deben ser integrables y τ_m idénticamente nula .*

- Respecto a foliaciones minimales:

Proposición 0.2 *Sea $\mathcal{F}$ una foliación minimal de codimensión uno sobre una variedad riemanniana M, orientada, compacta y sin borde cumpliendo que* $\mathrm{Ric} \geq 0$. *Entonces, $\mathcal{F}$ es totalmente geodésica.*

- Respecto a foliaciones riemannianas:

Proposición 0.3 *Sea M una variedad riemanniana, compacta y sin borde*

1. *Si $\mathcal{F}$ es una foliación totalmente geodésica y riemanniana en M tal que $\tau_m > 0$, entonces el campo ortogonal $\mathcal{H}$ no puede ser integrable.*

2. *Si M tiene curvatura escalar negativa, entonces no existen foliaciones riemannianas totalmente geodésicas en M.*

Proposición 0.4 *No existen flujos riemannianos sobre una variedad cuya métrica tenga curvatura de Ricci negativa.*

No olvidemos sin embargo, que, a pesar de la generalización conseguida, no hemos obtenido información sobre otras funciones simétricas de curvatura diferentes de σ_2. Es este un problema abierto por el momento.

Para llegar a los resultados que se acaban de enunciar hemos utilizado la teoría introducida por Albert en [AL 83] y [AL 78]. Esta consiste en asociar a cada distribución de p-planos $\mathcal{F}$ un álgebra de Weil truncada $\widehat{W}^*_{pq}$ (cf. págs. 38 y 43) y un morfismo básico (cf. prop. 2.3) entre los elementos básicos de dicha álgebra y el complejo de formas diferenciales sobre M.

Al considerar el álgebra trivial $\widehat{W}^*_{n0}$, tenemos el diagrama conmutativo

$$\begin{array}{ccc} B\widehat{W}^*_{n0} & \xrightarrow{j} & B\widehat{W}^*_{pq} \\ B\varphi_M \searrow & & \swarrow B\varphi_{\mathcal{F}} \\ & A(M) & \end{array} \tag{0.8}$$

y tomando el elemento de $\widehat{W}^*_{n0}$

$$\alpha = \sum_{i<j} (-1)^{i+j+1} \Omega^i_{0j} \wedge \theta^1_0 \wedge \ldots \wedge \hat{\theta}^i_0 \wedge \ldots \wedge \hat{\theta}^j_0 \wedge \ldots \wedge \theta^n_0$$

deducimos que (cf. las proposiciones 2.5 y 2.4 y el teorema 2.2)

Teorema 0.3 *La forma α es básica y se tiene que*

$$B\varphi_M \cdot \alpha = \frac{1}{2}\tau_M \cdot \nu$$

$$B\varphi_{\mathcal{F}} \cdot j(\alpha) = \left[\frac{1}{2}(\tau_{\mathcal{F}} + \tau_{\mathcal{H}}) + 2(\sigma_{2,\mathcal{F}} + \sigma_{2,\mathcal{H}} + \|A_{\mathcal{F}}\|^2 + \|A_{\mathcal{H}}\|^2)\right] \nu + d\zeta$$

A partir de aquí, y por la conmutatividad del diagrama 0.8 aplicada a la forma α, se obtienen los resultados anteriores.

Foliaciones de Lie

La segunda parte de la memoria, desarrollada en el capítulo 3, aborda un tema independiente al anterior, que se enmarca en el ámbito de las foliaciones con estructura transversa.

Entre la clase de foliaciones con estructura transversa destacan las foliaciones de Lie. Este tipo de foliaciones han sido estudiadas por varios autores, principalmente por Fedida (cf. [FE 71]). Además del interés que tienen por si mismas, la importancia de su estudio ha aumentado por el hecho de que aparecen de forma natural en la clasificación de las foliaciones riemannianas desarrollada por Molino (cf. [MO 82]) .

Cada foliación de Lie tiene asociadas dos álgebras de Lie, el álgebra de Lie $\mathfrak{g}$ del grupo sobre el cual la foliación está modelada y el álgebra de Lie estructural $\mathfrak{h}$. Esta última es el álgebra de Lie transversa de la foliación de Lie que se obtiene al restringir $\mathcal{F}$ a la adherencia de cualquiera de sus hojas. En particular, $\mathfrak{h}$ es una subálgebra de $\mathfrak{g}$. Hay que resaltar el hecho de que, mientras $\mathfrak{h}$ es un álgebra asociada a $\mathcal{F}$ de forma canónica, el álgebra de Lie $\mathfrak{g}$ no lo está.

Así pues, una cuestión interesante es la de conocer qué pares de álgebras de Lie, $(\mathfrak{g}, \mathfrak{h})$, con $\mathfrak{h}$ subálgebra de $\mathfrak{g}$, pueden aparecer como álgebras transversa y estructural respectivamente de una foliación de Lie $\mathcal{F}$ en una variedad *compacta* M.

Parece natural pensar que la estructura de las álgebras consideradas (nilpotentes, resolubles, etc.) tendrá un papel importante en este problema. Una manera de empezar a vislumbrar dicho papel es estudiar el problema en dimensiones bajas.

En este trabajo estudiamos el siguiente caso particular: dada un álgebra de Lie $\mathfrak{g}$ de dimensión 3 y un entero q entre 0 y 3, ¿existe alguna variedad compacta dotada de un flujo de Lie $\mathcal{F}$ con álgebra transversa $\mathfrak{g}$ y álgebra estructural de dimensión q? Para simplificar, y según sea la respuesta, diremos que el par $(\mathfrak{g}, q)$ es o no realizable.

Usando la clasificación de las álgebras de Lie de dimensión 3 y el hecho de que el álgebra estructural de un flujo de Lie es abeliana (cf. [CA 84]) vemos directamente que algunos pares no son realizables. Por ejemplo, $(\mathfrak{sl}(2), 2)$ y $(\mathfrak{so}(3), 2)$ no son realizables pues las álgebras $\mathfrak{sl}(2)$ y $\mathfrak{so}(3)$ no admiten subálgebras abelianas de dimensión 2. Sin embargo, en algunos casos, la obstrucción a la realización de determinados pares radica en la compacidad de la variedad y no solo en razones puramente algebraicas. Por ejemplo, el caso (Afín, 0) no es realizable (cf. pág. 80).

En la sección 3.1 damos una clasificación de las álgebras de Lie de dimensión 3 en 6 familias $\mathfrak{g}_1, \ldots, \mathfrak{g}_6$ y en dos familias, $\mathfrak{g}_7$ (parametrizada por $k \in \mathbb{R}$ con $k \neq 0$) y $\mathfrak{g}_8$ (parametrizada por un $h \in \mathbb{R}$ con $h^2 < 4$). En función de esta clasificación obtenemos los siguientes resultados (cf. sección 3.3):

Teorema 0.4 *Si el álgebra estructural $\mathfrak{h}$ de $\mathcal{F}$ es cero, i.e. $\mathcal{F}$ es una foliación con hojas compactas, entonces $\mathfrak{g}_1$, $\mathfrak{g}_2$, $\mathfrak{g}_3$ y $\mathfrak{g}_4$ son álgebras realizables mientras que $\mathfrak{g}_5$ y $\mathfrak{g}_6$ no son realizables. El álgebra $\mathfrak{g}_7$ es realizable si y solo si $k = -1$ y $\mathfrak{g}_8$ si y solo si $h = 0$.*

Teorema 0.5 *Si el álgebra estructural* $\mathfrak{h}$ *de* $\mathcal{F}$ *tiene dimensión 1, entonces* $\mathfrak{g}_1$, $\mathfrak{g}_2$, $\mathfrak{g}_3$, $\mathfrak{g}_4$ *y* $\mathfrak{g}_5$ *son álgebras realizables.* $\mathfrak{g}_6$ *y* $\mathfrak{g}_7$ *no son realizables y el álgebra* $\mathfrak{g}_8$ *con* $h = 0$ *es realizable.*

De momento no se conoce ninguna realización del álgebra $\mathfrak{g}_8$ cuando $h \neq 0$ y el álgebra estructural es de dimensión 1.

En el siguiente resultado es remarcable el hecho de que la realización del par $(\mathfrak{g}_7, 2)$ depende del valor que toma el parámetro k. De hecho tenemos que

Teorema 0.6 *Si el álgebra de Lie estructural* $\mathfrak{h}$ *de* $\mathcal{F}$ *tiene dimensión 2 entonces* $\mathfrak{g}_1$, $\mathfrak{g}_5$ *y* $\mathfrak{g}_8$ *cuando* $h = 0$ *son álgebras realizables mientras que* $\mathfrak{g}_2$, $\mathfrak{g}_3$, $\mathfrak{g}_4$, $\mathfrak{g}_6$ *y* $\mathfrak{g}_7$ *con* $k \in \mathbb{Q}$ *no son realizables.*

Como complemento a este teorema daremos un ejemplo de realización de $\mathfrak{g}_7$ con k irracional (cf. pág. 108).

Por último, nótese que el problema de caracterizar los valores de k para los cuales $\mathfrak{g}_7$ es realizable y el caso del álgebra $\mathfrak{g}_8$ son problemas todavía abiertos.

Este trabajo ha sido posible gracias a la colaboración de mucha gente.

Aziz El-Kacimi me introdujo en los trabajos de Albert que dieron pie a la realización de la primera parte de esta tesis. Marcel Nicolau —y el mismo Aziz— apuntó algunos ejemplos que aparecen en la realización de foliaciones de Lie y me animó constantemente. En este mismo problema, Pierre Molino siempre mostró un profundo interés y con sus críticas positivas nos alentó a continuar. Pere Ara nos ayudó con la Teoría de Galois. Con Manuel Barros, discutimos algunos problemas que se podrían tratar con las fórmulas integrales y seguro que algún día volvemos a ellos. Larry Conlon me enseñó algo de lo mucho que sabe sobre foliaciones. Gilbert Hector siempre propone cuestiones interesantes y te contagia su ritmo de trabajo. Miquel Llabrés empezó con un tema —flujos de Lie— que aquí proseguimos.

A todos ellos, así como a los miembros del *Departament de Matemàtiques* de la U.A.B., mi más sincero agradecimeinto.

Aún hay más, mucha más gente a la cual debo agradecer el ánimo que me han dado y la paciencia que han tenido. A mis padres, que decían, "bueno,

tú sabrás lo que quieres decir", a mis amigos, que a veces han querido saber lo que hacía y luego se han arrepentido y sobretodo a Imma por lo que me quiere y lo mucho que me ha ayudado. A Patricia —a quién va dedicada esta tesis— por sus grandes risotadas y por trivializar lo enrevesado.

Finalmente, y con un énfasis especial, quiero agradecer a Agustí Reventós, el director de esta tesis, quien con su vivo entusiasmo me introdujo en el mundo de la Geometría Diferencial y sin el cual el trabajo que teneis entre las manos no hubiera sido posible.

Capítulo 1

Preliminares

En este capítulo se introducirán la mayor parte de las definiciones y la notación utilizadas a lo largo de esta memoria. También se repasarán algunos resultados "clásicos" en Geometría Diferencial y Teoría de Foliaciones.

Mientras no se especifique lo contrario, todos los objetos tratados en este capítulo se considerarán de clase $\mathcal{C}^\infty$.

1.1 Generalidades

Foliaciones

Una foliación de dimensión p en una variedad diferenciable M de dimensión n es, *a grosso modo* una partición de M en subvariedades de dimensión p llamadas hojas (pues localmente se apilan como las hojas de un libro). Un primer ejemplo simple de foliación se obtiene al considerar $\mathbf{R}^n = \mathbf{R}^p \times \mathbf{R}^{n-p}$ como la reunión de los p-planos de la forma $\mathbf{R}^p \times \{c\}$ con $c \in \mathbf{R}^{n-p}$.

Daremos definiciones más rigurosas de lo que es una foliación. La primera de ellas se basa en la existencia de un determinado tipo de atlas en la variedad M.

Definición 1.1 *Sea M una variedad de dimensión n. Una foliación de clase*

C^r de dimensión p en M es un atlas maximal $\mathcal{F}$ de clase C^r con las propiedades siguientes:

1. *Si $(U,\varphi) \in \mathcal{F}$, entonces $\varphi(U) = U_1 \times U_2 \subset \mathbb{R}^p \times \mathbb{R}^{n-p}$, siendo U_1 y U_2 discos abiertos en $\mathbb{R}^p$ y $\mathbb{R}^{n-p}$ respectivamente.*

2. *Si (U,φ) y (V,ψ) son de $\mathcal{F}$ y tales que $U \cap V \neq \emptyset$, entonces los cambios de coordenadas son de la forma*

$$\psi \circ \varphi^{-1}(x,y) = (f(x,y), g(y))$$

Diremos que $n-p$ es la codimensión de la foliación $\mathcal{F}$ y lo denotaremos por codim $\mathcal{F} = n - p$.

De ahora en adelante consideraremos unicamente foliaciones de clase C^∞. Las cartas $(U,\varphi) \in \mathcal{F}$ se denominarán *cartas foliadas* o *cartas adaptadas* a la foliación $\mathcal{F}$. Los conjuntos de la forma $\varphi^{-1}(U_1 \times \{c\})$ con $c \in U_2$ son las *placas de U* o simplemente *placas de $\mathcal{F}$*. Un *camino de placas* de $\mathcal{F}$ es una sucesión de $\alpha_1, \ldots, \alpha_q$ placas de $\mathcal{F}$ tales que $\alpha_j \cap \alpha_{j+1} \neq \emptyset$ para todo $j \in \{1, \ldots, q-1\}$. Definimos en M la siguiente relación de equivalencia: "$p \sim q$ si existe un camino de placas $\alpha_1, \ldots, \alpha_q$ con $p \in \alpha_1$ y $q \in \alpha_q$". Las clases de equivalencia para esta relación son las *hojas* de $\mathcal{F}$.

Toda hoja F de la foliación $\mathcal{F}$ admite una estructura de variedad diferenciable inducida por las cartas foliadas. Un atlas para esta estructura viene dado por los pares $(\alpha, \overline{\varphi})$ siendo $\alpha \subset F$ una placa de U y $\overline{\varphi} = g|_\alpha$. Esta estructura se denomina *estructura diferenciable intrínseca* de F. Podemos resumir algunas de las propiedades de las hojas en el siguiente teorema.

Teorema 1.1 *Sea M una variedad foliada por una foliación $\mathcal{F}$ de dimensión p. Cada hoja F de $\mathcal{F}$ admite una estructura de variedad diferenciable de dimensión p, denominada* estructura intrínseca, *de tal forma que los dominios de las cartas locales son las placas de $\mathcal{F}$. La aplicación $i : F \longrightarrow M$ definida por $i(x) = x$ es una inmersión inyectiva y diferenciable considerando en F la estructura de variedad intrínseca. F es subvariedad de M si y solo si la aplicación i es un "imbedding".*

NOTA: Una aplicación es una *inmersión* si su aplicación tangente es inyectiva en todo punto. Diremos que una inmersión $f : N \longrightarrow M$ es un *imbedding* si $f : N \longrightarrow f(N) \subset M$ es un homeomorfismo considerando en $f(N)$ la topología inducida por M. Un subconjunto $N \subset M$ es una *subvariedad* de dimensión p si para todo $x \in N$ hay una carta local (U, φ) tal que $\varphi(U) = V \times W$ donde $0 \in V \subset \mathbf{R}^p$, $0 \in W \subset \mathbf{R}^{n-p}$ y V, W son bolas euclidianas tales que $\varphi(N \cap U) = V \times \{0\}$.

La estructura transversa juega un papel importante en la teoría de foliaciones. La siguiente definición de variedad foliada pone mayor énfasis en dicha estructura.

Definición 1.2 *Una foliación $\mathcal{F}$ de codimensión q de M viene definida por una colección maximal de pares (U_α, f_α), $\alpha \in A$, donde U_α son abiertos de M y las f_α son submersiones $f_\alpha : U_\alpha \longrightarrow T$ sobre una cierta variedad T de dimensión q que satisfacen:*

1. $\displaystyle\bigcup_{\alpha \in A} U_\alpha = M$,
2. *si $U_\alpha \cap U_\beta \neq \emptyset$, existe un difeomorfismo local $g_{\alpha\beta}$ de T tal que en $U_\alpha \cap U_\beta$ se cumple $f_\alpha = g_{\alpha\beta} \circ f_\beta$.*

Las f_α se llaman aplicaciones distinguidas *de $\mathcal{F}$.*

Campos de planos

Ciertas propiedades de las variedades foliadas son susceptibles de generalización sustituyendo la foliación por un campo de p-planos. Algunos de los resultados que se expondrán en capítulos posteriores hacen referencia a este tipo de estructura geométrica.

Definición 1.3 *Sea M una variedad diferenciable de dimensión n. Dado un entero $p \leq n$, una* distribución p-dimesional *o* campo de p-planos P *consiste en asociar a cada $x \in M$ un subespacio p-dimensional P_x de T_xM, espacio tangente de M en x.*

Usando el lenguaje de fibrados, P es un subfibrado del fibrado tangente TM de M. Un campo de planos P es diferenciable si para cada $x \in M$

existe un entorno abierto U de x y p campos vectoriales $X_1, \ldots, X_p$ en U cuyos valores en cada punto $y \in U$ generan P_y.

Diremos que un campo X de M es ***tangente*** a P si su valor en cada $x \in M$, $X(x)$, pertenece a P_x. El conjunto $\mathcal{X}_P$ de los campos vectoriales tangentes a P es un submódulo del módulo $\mathcal{X}(M)$ de los campos vectoriales sobre el anillo $\mathcal{C}^\infty(M)$ de funciones diferenciables.

Sea $\mathcal{F}$ una foliación en M. Para cada $x \in M$ consideremos una carta foliada (U, φ) cuyo dominio contenga a x y sean $\varphi = (x_1, \ldots, x_p, y_1, \ldots, y_q)$ las funciones coordenadas. Sea P_x el subespacio de T_xM generado por los campos coordenados $\partial/\partial x_1|_x, \ldots, \partial/\partial x_p|_x$. Debido a la forma de los cambios de coordenadas en los atlas foliados, este subespacio no depende de la carta foliada elegida. Diremos que P es el campo de planos asociado a la foliación $\mathcal{F}$.

Definición 1.4 *Un campo de p-planos es* completamente integrable *si y solo si es el campo de planos asociado a una foliación.*

El Teorema de Frobenius caracteriza las distribuciones completamente integrables en términos del paréntesis de Lie para campos de vectores.

Teorema 1.2 *Sea P un campo de planos en la variedad M. Entonces P es completamente integrable si y solo si el submódulo asociado $\mathcal{X}_P$ es una subálgebra de Lie de $\mathcal{X}(M)$, es decir, si $[X, Y] \in \mathcal{X}_P$ para todo $X, Y \in \mathcal{X}_P$.*

Por lo tanto, toda foliación tiene asociado un campo de planos pero no todo campo de planos define una foliación. Tómese como ejemplo la distribución en $\mathbf{R}^3$ dada por los campos $\partial/\partial x$ y $x\partial/\partial y + \partial/\partial z$.

Obsérvese que todo campo P de 1-planos es completamente integrable y que un tal campo no viene dado necesariamente por un campo vectorial de M; esto solo será así cuando P sea orientable.

Orientación

Definición 1.5 *Diremos que el campo de p-planos es orientable si hay un recubrimiento por abiertos $\{U_\alpha\}$ de M de manera que la restricción de P a* *cada U_α esté definida por campos $X_1^\alpha, \cdots, X_p^\alpha$ y que, si $x \in U_\alpha \cap U_\beta$, la matriz que cambia de $X_1^\alpha, \cdots, X_p^\alpha$ a $X_1^\beta, \cdots, X_p^\beta$ tiene determinante positivo.*

NOTA: Si pensamos en los campos de planos como subfibrados vectoriales de TM la orientabilidad es equivalente a la existencia de representaciones coordenadas $(U_\alpha, \varphi_\alpha)$ cuyas funciones de transición $g_{\alpha\beta} = \varphi_{\alpha,x}^{-1} \circ \varphi_{\beta,x}$ tienen determinante positivo.

Puesto que todo espacio vectorial admite dos orientaciones, un campo de p-planos admite también dos orientaciones (según la orientación que se tome en P_x). El *recubrimiento doble orientable* de M asociado a P se define como

$$\widetilde{M} = \{(x, \mathcal{O}) : x \in M \text{ y } \mathcal{O} \text{ es una de las dos orientaciones de } P_x\}.$$

Entonces $\pi : \widetilde{M} \longrightarrow M$ es un recubrimiento de dos hojas. Si $\pi^*(P)$ es el campo de planos *elevado* a $\widetilde{M}$ por π, tenemos el siguiente resultado:

Teorema 1.3 *Supongamos M conexa y P un campo de p-planos en M. Sea $(\widetilde{M}, \pi)$ el recubrimiento doble orientable de P. Entonces*

1. *$\pi^*(P)$ es orientable,*
2. *$\widetilde{M}$ es conexa si y solo si P es no orientable.*

Como consecuencia se tiene que

Corolario 1.1 *Si M es simplemente conexa, entonces todo campo de p-planos es orientable ($1 \leq p \leq dimM$). En particular M es orientable.*

Un campo de $(n-p)$-planos Q es *complementario* o *transverso* al campo P si en cualquier $x \in M$ se tiene que $P_x + Q_x = T_xM$. Por ejemplo, si en M tenemos una métrica riemanniana, el campo de planos ortogonal definido por $P_x^\perp = \{v \in T_xM : < v, w >= 0 \ \forall w \in P_x\}$ es complementario a P.

Definición 1.6 *El campo de planos P es* transversalmente orientable *si existe un campo complementario a P y orientable.*

Obsérvese que si P es transversalmente orientable, todo campo de planos complementario es orientable.

El siguiente teorema resume las relaciones entre la orientabilidad de P, su orientabilidad transversa y la orientabilidad de la variedad ambiente M.

Teorema 1.4 *Sea P un campo de p-planos en M. Son ciertas las propiedades siguientes:*

1. *Si P es orientable y transversalmente orientable, entonces M es orientable.*

2. *Si M es orientable, entonces P es transversalmente orientable si y solo si es orientable.*

Hasta ahora hemos tratado la orientación únicamente para campos de planos; veamos el caso de las foliaciones.

Definición 1.7 *Una foliacion $\mathcal{F}$ es orientable si lo es el campo de planos asociado. Análogamente,una foliación $\mathcal{F}$ es transversalmente orientable si lo es el campo de planos asociado.*

Si $\mathcal{F}$ es no orientable (resp. transversalmente orientable), en el doble recubrimiento orientable $\widetilde{M}$ podemos obtener una foliación orientable (resp. transversalmente orientable) mediante la elevación del campo de planos $T\mathcal{F}$ asociado a $\mathcal{F}$.

Cuando el campo de planos P define una foliación $\mathcal{F}$, la orientabilidad transversa se puede considerar en términos de las aplicaciones distinguidas $f_\alpha : U_\alpha \longrightarrow \mathbf{R}^n$ (como las f_α son locales siempre podemos tomar como variedad transversa $T = \mathbf{R}^n$).

Teorema 1.5 *Sea $\mathcal{F}$ una foliación. Entonces $\mathcal{F}$ es transversalmente orientable si y solo si existe (U_α, f_α) de manera que funciones de transición $g_{\alpha\beta}$ tales que $f_\alpha = g_{\alpha\beta} \circ f_\beta$ conservan la orientación canónica de $\mathbf{R}^n$ (es decir, $\det(T_x g_{\alpha\beta}) > 0$, $\forall x$).*

1.2 Curvatura y campos de planos

Variedades riemannianas

En este apartado (M, g) será una variedad riemanniana de dimensión n, $\mathcal{F}$ un campo de p-planos y $\mathcal{H} = \mathcal{F}^{\perp}$ el campo de $(n-p)$-planos ortogonal a $\mathcal{F}$.

Si $\{e_1, \ldots, e_n\}$ es una base ortonormal local en M, $\{\theta^1, \ldots, \theta^n\}$ denotará su base dual. Las formas de conexión y de curvatura asociadas a la conexión de Levi–Civita de g las denotaremos por ω^i_j y Ω^i_j respectivamente. Si la base $\{e_1, \ldots, e_n\}$ está definida en un abierto U, $X \in \mathcal{X}(U)$ y ∇ es la derivación covariante asociada a g, tenemos que:

$$\omega^i_j(X) = g(\nabla_X e_j, e_i)$$

$$\Omega^i_j = \frac{1}{2}\sum_{k,l} R^i_{jkl}\, \theta^k \wedge \theta^l$$

siendo R^i_{jkl} las componentes en la base ortonormal local $\{e_1, \ldots e_n\}$ del tensor de Riemann

$$R(X,Y)Z = \nabla_X \nabla_Y Z - \nabla_Y \nabla_X Z - \nabla_{[X,Y]} Z.$$

Las formas θ^i, ω^j_i y Ω^j_i satisfacen las *ecuaciones de estructura*

$$d\theta^i = -\sum_{k=1}^{n} \omega^i_k \wedge \theta^k$$
$$\Omega^i_j = d\omega^i_j + \sum_{k=1}^{n} \omega^i_k \wedge \omega^k_j$$

Las aplicaciones

$$h : TM \longrightarrow \mathcal{F}$$
$$v : TM \longrightarrow \mathcal{H}$$

denotan las proyecciones ortogonales de TM en los campos de planos $\mathcal{F}$ y $\mathcal{H}$ (pensados como subfibrados de TM).

Diremos que la base local $\{e_1, \ldots, e_n\}$ es *adaptada* a $\mathcal{F}$ y $\mathcal{H}$ si e_A pertenece a $\mathcal{F}$ para $1 \leq A \leq p$ y e_α pertenece a $\mathcal{H}$ para $p+1 \leq \alpha \leq n$. Con respecto a los índices, seguiremos la norma de que las letras latinas minúsculas varían de 1 a $n = \dim M$, las latinas mayúsculas de 1 a $p = \dim \mathcal{F}$ y las griegas minúsculas de $p+1$ a n.

Si X, Y, Z son campos vectoriales pertenecientes a $\mathcal{F}$, definimos:

$$\begin{aligned} \nabla'_X Y &= h(\nabla_X Y) \\ R'(X,Y)Z &= \nabla'_X \nabla'_Y Z - \nabla'_Y \nabla'_X Z - \nabla'_{[X,Y]} Z \\ \alpha(X,Y) &= v(\nabla_X Y) \end{aligned}$$

Sean $v, w \in T_xM$, si $\|v, w\| = g(v,v)g(w,w) - g(v,w)^2$, entonces

$$k(v,w) = \frac{g(R(v,w)w,v)}{\|v,w\|}$$

es la *curvatura seccional* del plano generado por v y w en $x \in M$ y si v y w son vectores pertenecientes al campo de planos $\mathcal{F}$,

$$k'(v,w) = \frac{g(R'(v,w)w,v)}{\|v,w\|}$$

es la *curvatura seccional inducida* por g en $\mathcal{F}$. Sean v y w de nuevo vectores de T_xM, entonces

$$\mathrm{Ric}(v,w) = \sum_{i=1}^{n} g(R(e_i,v)w,e_i) \tag{1.1}$$

es el *tensor de Ricci.*

Si $k_{ij} = k(e_i, e_j)$ y $k'_{AB} = k'(e_A, e_B)$, definimos las siguientes *curvaturas escalares*:

$$\tau_M = \sum_{i,j=1}^{n} k_{ij}$$

$$\tau_{\mathcal{F}} = \sum_{A,B=1}^{p} k_{AB} \qquad\qquad \tau'_{\mathcal{F}} = \sum_{A,B=1}^{p} k'_{AB}$$

Si $\tau_{\mathcal{H}}$ y $\tau'_{\mathcal{H}}$ se definen de forma análoga, se tiene que

$$\tau_M = \tau_{\mathcal{F}} + 2\tau_m + \tau_{\mathcal{H}}$$

siendo $\tau_m = \sum_{A,\alpha} k_{A\alpha}$ la *curvatura escalar mixta.*

Diremos que la variedad riemanniana M tiene *curvatura constante* si para cualquier X e Y vectores unitarios, el valor de $k(X, Y)$ es constante. En este caso el tensor de Riemann satisface la relación

$$R(X,Y)Z = k(g(Z,Y)X - g(Z,X)Y)$$

con $k \in \mathbf{R}$ constante. Siguiendo [RE 83], definimos los tensores de integrabilidad y fundamental asociados al campo de planos $\mathcal{F}$.

Definición 1.8 *Si X e Y son campos vectoriales de $\mathcal{F}$, y V y W campos vectoriales de $\mathcal{H}$, el* tensor fundamental *$S_{\mathcal{F}}$ del campo de planos $\mathcal{F}$ viene definido por las relaciones:*

$$\left.\begin{array}{rcl} S_{\mathcal{F}}(X,Y) & = & \frac{1}{2}v(\nabla_X Y + \nabla_Y X) \\ S_{\mathcal{F}}(V,\cdot) & = & 0 \\ g(S_{\mathcal{F}}(X,V),W) & = & 0 \\ g(S_{\mathcal{F}}(X,V),Y) & = & g(S_{\mathcal{F}}(X,Y),V) \end{array}\right\}$$

NOTA: Si $\mathcal{F}$ es integrable y X e Y son tangentes a la foliación definida por $\mathcal{F}$ para cualquier campo normal N, se cumple

$$g(S_{\mathcal{F}}(X_x, Y_x), N) = -g(\nabla_{X_x} N, Y_x),$$

que es la segunda forma fundamental (salvo quizá el signo) respecto a N de la hoja de $\mathcal{F}$ que pasa por x.

Definición 1.9 *Si X e Y son campos vectoriales de $\mathcal{F}$, y V y W campos vectoriales de $\mathcal{H}$, el* tensor de integrabilidad *$A_{\mathcal{F}}$ del campo de planos $\mathcal{F}$ viene definido por las relaciones:*

$$\left.\begin{array}{rcl} A_{\mathcal{F}}(X,Y) & = & \frac{1}{2}v(\nabla_X Y - \nabla_Y X) \\ A_{\mathcal{F}}(V,\cdot) & = & 0 \\ g(A_{\mathcal{F}}(X,V),W) & = & 0 \\ g(A_{\mathcal{F}}(X,V),Y) & = & g(A_{\mathcal{F}}(X,Y),V) \end{array}\right\}$$

Para el campo normal $\mathcal{H}$, los tensores $S_{\mathcal{H}}$ y $A_{\mathcal{H}}$ se definen de forma análoga.

Si $A_{\mathcal{F}}(e_A, e_B) = \sum_{\alpha=p+1}^{n} a_{AB}^{\alpha} \cdot e_\alpha$ y $S_{\mathcal{F}}^{\alpha}(v,w) = g(S_{\mathcal{F}}(v,w), e_\alpha)$ para v y w tangentes a $\mathcal{F}$, definimos $\|A_{\mathcal{F}}\|^2$ y $\sigma_{2,\mathcal{F}}$ como

$$\|A_{\mathcal{F}}\|^2 = \sum_{A<B} (a_{AB}^{\alpha})^2$$
$$\sigma_{2,\mathcal{F}} = \frac{1}{2} \sum_{\alpha} \{(\mathrm{tr} S_{\mathcal{F}}^{\alpha})^2 - \mathrm{tr}(S_{\mathcal{F}}^{\alpha})^2\}$$

Obsérvese que $\|A_{\mathcal{F}}\|^2 = 0$ si y solo si $\mathcal{F}$ define una foliación. En ese caso $\sigma_{2,\mathcal{F}}$ es la *segunda función simétrica de curvatura.* Nótese también que estas definiciones no dependen de la base ortonormal adaptada elegida.

Campos de planos especiales

Definición 1.10 *Un campo de planos $\mathcal{F}$ en una variedad riemanniana (M,g) es* totalmente geodésico *si toda geodésica tangente a $\mathcal{F}$ en un punto se mantiene tangente a lo largo de su recorrido.*

Diremos que una foliación $\mathcal{F}$ es totalmente geodésica si lo es el campo de planos asociado.

En el caso de subvariedades, esta propiedad es equivalente a la anulación de la segunda forma fundamental sin embargo; para campos de planos la situación es diferente.

Definición 1.11 *Diremos que un campo vectorial X de M es* foliado *o* básico *respecto el campo de planos $\mathcal{F}$ si, para todo $Y \in \mathcal{X}_{\mathcal{F}}$, el paréntesis de Lie $[X,Y]$ también pertenece a $\mathcal{X}_{\mathcal{F}}$.*

Si $\mathcal{L}(M,\mathcal{F})$ es el conjunto de campos foliados, $\mathcal{L}(M,\mathcal{F})$ es una subálgebra de Lie de $\mathcal{X}(M)$.

La siguiente proposición resume algunas de las características de los campos foliados

Proposición 1.1 *Sea $X \in \mathcal{X}(M)$. Las siguientes propiedades son equivalentes*

1. *X es foliado respecto $\mathcal{F}$.*

2. *El grupo uniparamétrico local asociado a X deja $\mathcal{F}$ invariante (es decir, si ϕ_t es dicho grupo, $\phi_{t*}\mathcal{F} = \mathcal{F}$).*

3. *Si $\mathcal{F}$ es integrable y $(x,y) = (x_1, \ldots, x_p, y_1, \ldots, y_q)$ son las funciones coordenadas en una cierta carta foliada, entonces*

$$X = \sum_{i=1}^{p} f(x,y)\frac{\partial}{\partial x_i} + \sum_{j=1}^{q} g(y)\frac{\partial}{\partial y_j}$$

Entre geodesibilidad y tensor fundamental tenemos la siguiente relación.

Proposición 1.2 *Sea $\mathcal{F}$ un campo de planos en una variedad riemanniana (M,g).*

1. *Si $\mathcal{F}$ es totalmente geodésico, su tensor fundamental es nulo en todo punto.*

2. *Si el tensor fundamental es siempre nulo, entonces para X e Y campos tangentes a $\mathcal{F}$ y foliados con respecto a $\mathcal{H}$ y Z, campo tangente a $\mathcal{H}$, se cumple que*
$$Z \cdot g(X,Y) = 0$$
Si además $\mathcal{H}$ es integrable, entonces $\mathcal{F}$ es totalmente geodésico.

Otro tipo de campos de planos que será objeto de nuestro interés son los campos *minimales* y *umbilicales.*

Definición 1.12 *El vector* curvatura media *asociado a $\mathcal{F}$ es*

$$H_{\mathcal{F}} = \frac{1}{p} \sum_{\alpha=p+1}^{n} \operatorname{tr}(S^\alpha) \cdot e_\alpha$$

El vector curvatura media *asociado a $\mathcal{H}$, $H_{\mathcal{H}}$, se define de forma similar.*

Definición 1.13

1. *El campo de planos $\mathcal{F}$ es* minimal *si $H_{\mathcal{F}} \equiv 0$ (es decir, $\mathrm{tr}(S^{\alpha}) \equiv 0$ para todo α).*

2. *$\mathcal{F}$ es* umbilical *si para X e Y vectores cualesquiera de $\mathcal{F}$, se tiene que*

$$S_{\mathcal{F}}(X,Y) = g(X,Y) \cdot H$$

(es decir, $S^{\alpha} = \lambda I$ para cierta constante real λ).

1.3 Fibrados principales y conexiones

Fibrados principales

Definición 1.14 *Un* fibrado principal *diferenciable P sobre una variedad diferenciable M con* grupo estructural *G es un espacio fibrado localmente trivial $p : P \longrightarrow M$ con fibra el grupo de Lie G y definido por un atlas $(U_{\alpha}, \varphi_{\alpha})$ para el cual los cambios de coordenadas $\varphi_{\alpha}^{-1} \circ \varphi_{\beta}$ son de la forma*

$$(x, g) \mapsto (x, g_{\alpha\beta}(x) \cdot g),$$

siendo $g_{\alpha\beta} : U_{\alpha} \cap U_{\beta} \longrightarrow G$ una aplicación diferenciable.

Las operaciones de G por la derecha en los productos $U_{\alpha} \times G$ son compatibles con los cambios de cartas, por tanto determinan una acción diferenciable y libre R_g de G sobre P cuyas órbitas son las fibras de P. El grupo G se denomina *grupo estructural* del fibrado principal y las aplicaciones $g_{\alpha\beta}$ *funciones de transición* asociadas al atlas $(U_{\alpha}, \varphi_{\alpha})$.
NOTA: Una acción R_g es libre si el hecho de que $R_g(x) = x$ para algún x implica $g = e$.

Diremos que un $X \in T_x P$ es un *vector vertical* si $p_*(X) = 0$. Entonces el *espacio vertical* en $x \in P$ es el espacio tangente a la órbita de la acción R de G sobre P que pasa por x.

Definición 1.15 *Sea X un vector del álgebra de Lie $\mathfrak{g}$ de G. El campo inducido por la acción de grupo uniparamético $\exp(tX)$ se denomina* campo fundamental *asociado a X y se denotará por X^*.*

Sean $p : P \longrightarrow M$ y $p' : P' \longrightarrow M'$ fibrados principales con grupos estructurales G y G' respectivamente. Un *morfismo* f de P' en P consiste en una aplicación $f' : P' \longrightarrow P$ y un morfismo de grupos $f'' : G' \longrightarrow G$ tales que $f'(z'g') = f'(z')f''(g')$ para todo $z' \in P'$ y $g' \in G'$. Utilizaremos la letra f para cada una de las tres aplicaciones involucradas en esta última definición. Todo morfismo de fibrados envía fibras a fibras y por tanto induce una aplicación de M' en M que también denotaremos por f.

Diremos que f es una *inmersión* si $f : P' \longrightarrow P$ es un "imbedding" y $f : G' \longrightarrow G$ es inyectiva. Si f es una inmersión entonces la aplicación asociada $f : M' \longrightarrow M$ es un "imbedding". Identificando P' con $f(P')$, G' con $f(G')$ y M' con $f(M')$, diremos que P' es un *subfibrado* de P. En el caso de que $M' = M$, la aplicación $f : M' \longrightarrow M$ es la identidad; entonces diremos que f es una *reducción* del grupo estructural G de P al grupo G' y que P' es el *fibrado reducido*. Dado un fibrado principal P con grupo estructural G y G' un subgrupo de G diremos que P es *reducible* a G' si existe un fibrado reducido P' con grupo estructural G'.

El siguiente resultado relaciona la reducibilidad de un fibrado principal con sus funciones de transición $g_{\alpha\beta}$.

Proposición 1.3 *El grupo estructural G de un fibrado principal P es reducible al subgrupo de Lie G' si y solo si existe un atlas $(U_\alpha, \varphi_\alpha)$ trivializador de P cuyas funciones de transición $g_{\alpha\beta}$ toman valores en G'.*

En el siguiente apartado veremos algunos ejemplos de reducciones del grupo estructural de un fibrado.

Fibrados de referencias

Sea $p : E \longrightarrow M$ un fibrado vectorial de rango n (es decir, la dimesión de las fibras $p^{-1}(x)$ es n).

Definición 1.16 *Una* referencia *z de E en $x \in M$ consiste en dar una base $\{X_1, \ldots, X_n\}$ de $E_x = p^{-1}(x)$.*

Pensaremos la referencia z como un isomorfismo lineal

$$z : \mathbb{R}^p \longrightarrow E_x$$

tal que si $\{e_1, \ldots, e_n\}$ es la base canónica de $\mathbf{R}^p$, $z(e_i) = X_i$.

El grupo de Lie $\mathrm{Gl}(n, \mathbf{R})$ de las matrices reales $n \times n$ no singulares opera por traslaciones a la derecha sobre el conjunto de las referencias de E. Concretamente, si z es una referencia y g es un elemento del grupo, la composición $z \circ g$, denotada por $R_g(z) = zg$, define una acción de $\mathrm{Gl}(p, \mathbf{R})$ sobre el conjunto de referencias.

El conjunto de referencias de E, que denotaremos por $L(E)$, tiene estructura de fibrado principal sobre M con grupo estructural $\mathrm{Gl}(p, \mathbf{R})$. $L(E)$ se denominará fibrado de las *referencias lineales* de E.

Obsérvese que el grupo estructural de $L(E)$ se puede reducir a $\mathbf{O}(p, \mathbf{R})$, grupo de las matrices ortogonales $n \times n$. Para ello bastará tomar una métrica de Riemann en el fibrado vectorial E y considerar las referencias ortonormales con respecto a esa métrica.

A lo largo de esta introducción nos centraremos en dos fibrados de referencias particulares:

- Si $E = TM$, cada elemento de $L(E)$ es una base del espacio tangente T_xM. Este fibrado lo denotaremos por $L(M)$ y se llamará fibrado de las *referencias lineales tangentes* de la variedad M. La reducción de $L(M)$ al grupo ortogonal la denotaremos por $O(M)$ y se llamará fibrado de las *referencias ortonormales tangentes* de M.

- Sea $(M, \mathcal{F})$ una variedad foliada de $\mathrm{codim}(\mathcal{F}) = q$ y $Q = TM/\mathcal{F}$ (pensando $\mathcal{F}$ como el fibrado tangente a la foliación) el fibrado de los vectores transversos a $\mathcal{F}$ o *fibrado transverso* a $\mathcal{F}$. Entonces, cada elemento de $L(Q)$ es una base $\{\overline{X_1}, \cdots, \overline{X_q}\}$ del espacio vectorial cociente $T_xM/\mathcal{F}_x$. Este fibrado lo denotaremos por $L(M, \mathcal{F})$ y se llamará fibrado de las *referencias transversas* de $\mathcal{F}$.

Conexiones lineales

Sea M una variedad diferenciable de dimensión n y $p : L(M) \longrightarrow M$ el fibrado de las referencias tangentes de M.

Definición 1.17 *La* forma fundamental *de $L(M)$ es la* 1*-forma θ con valores en $\mathbf{R}^n$ definida por*

$$\theta(X_z) = z^{-1}(p_*(X_z))$$

siendo $z \in L(M)$ y $X_z \in T_zL(M)$.

La forma θ es *tensorial*, lo cual significa que se anula sobre los vectores verticales y que es *equivariante* por la acción del grupo $\mathrm{Gl}(n, \mathbf{R})$ sobre $\mathbf{R}^n$ en el sentido siguiente

$$\theta \circ R_g^* = g^{-1} \circ \theta \quad \forall g \in \mathrm{Gl}(n, \mathbf{R}).$$

Consideremos una sección local de $L(M)$ dada por la aplicación

$$\begin{array}{rcl} \sigma : U & \longrightarrow & L(M) \\ x & \longmapsto & (e_1(x), \ldots, e_n(x)) \end{array}$$

Si $\{e_1, \ldots, e_n\}$ es la base canónica de $\mathbf{R}^n$ y ponemos $\theta = \sum_i \theta^i \cdot e_i$, entonces las 1-formas $\sigma^*(\theta^1), \ldots, \sigma^*(\theta^n)$ son la base dual de la base local que la aplicación σ define en U.

Definición 1.18 *Una* conexión lineal *en $L(M)$ es una distribución H suplementaria a la distribución vertical e invariante por las traslaciones a la derecha R_g.*

Los vectores de H se denominan *vectores horizontales.* Dar una conexión lineal es equivalente a dar una 1-forma ω a valores en $\mathfrak{gl}(n, \mathbf{R})$, álgebra de Lie del grupo $\mathrm{Gl}(n, \mathbf{R})$, cumpliendo que

a) $\omega(z, X^*) = X$ para todo $z \in L(M)$ y X^* campo fundamental,

b) ω es *equivariante* por la acción de $\mathrm{Gl}(n, \mathbf{R})$ sobre $\mathfrak{gl}(n, \mathbf{R})$ en el sentido siguiente

$$\omega \circ R_g^* = \mathrm{Ad}(g^{-1}) \circ \omega \quad \forall g \in \mathrm{Gl}(n, \mathbf{R}^n)$$

Entonces tenemos que $X_z \in H_z$ si y solo si $\omega(X_z) = 0$.

Definición 1.19 *La* curvatura *de la conexión ω es la 2-forma Ω con valores en $\mathfrak{gl}(n, \mathbf{R})$ definida por*

$$\Omega = d\omega + \frac{1}{2}[\omega, \omega]$$

y siendo $[\omega, \omega](X, Y) = [\omega(X), \omega(Y)]$.

La curvatura es nula cuando uno de sus argumentos es vertical y, de la misma forma que ω, es equivariante por la acción de $\mathrm{Gl}(n, \mathbf{R})$ sobre $\mathfrak{gl}(n, \mathbf{R})$, es decir

$$\Omega \circ R_g^* = \mathrm{Ad}(g^{-1}) \circ \Omega \quad \forall g \in \mathrm{Gl}(n, \mathbf{R}^n)$$

Además, Ω es nula si y solo si la distribución H que define la conexión es completamente integrable, esto es, si H define una foliación horizontal.

Definición 1.20 *La* torsión *de la conexión ω es la 2-forma Θ con valores en $\mathbf{R}^n$ y definida por:*

$$\Theta = d\theta + \omega \wedge \theta$$

donde

$$(\omega \wedge \theta)(X, Y) = \frac{1}{2}\{\omega(X)\theta(Y) - \omega(Y)\theta(X)\}$$

La torsión se anula si uno de sus argumentos es vertical y es equivariante en el mismo sentido que lo es la forma fundamental θ

$$\Theta \circ R_g^* = g^{-1} \circ \Theta \quad \forall g \in \mathrm{Gl}(n, \mathbf{R}).$$

Además de las ecuaciones utilizadas para definirlas, la formas de curvatura y torsión satisfacen las denominadas ecuaciones de Bianchi. Si $D\varphi = d\varphi \circ h$, siendo h la proyección sobre el espacio anulado por ω (espacio horizontal), entonces

$$\begin{aligned} D\Omega &= 0 \\ D\Theta &= \Omega \wedge \theta. \end{aligned}$$

Sea P un subfibrado del fibrado de las referencias $L(M)$ con grupo estructural $G \subset \mathrm{Gl}(n, \mathbf{R})$ de álgebra de Lie $\mathfrak{g}$ y H_P una conexión en P. Mediante traslaciones a la izquierda en $L(M)$, es posible definir una conexión H en $L(M)$ de manera que si ω es la 1-forma que define H y ω_P la que define H_P, ω coincide con ω_P al restringirla al fibrado principal P.

Recíprocamente

Definición 1.21 *Diremos que una conexión H en $L(M)$ es* adaptada *a la reducción $P \subset L(M)$ si en cada $z \in P$ se tiene que $H_z \subset T_z P$.*

Por tanto, si ω es la forma que define la conexión H, al restringirla a P toma valores en el álgebra de Lie $\mathfrak{g}$ de G.

De entre las conexiones en $L(M)$ son particularmente interesantes las conexiones métricas.

Definición 1.22 *Una conexión en $L(M)$ es* métrica *si viene determinada por una conexión en el fibrado reducido de las referencias ortonormales $O(M)$.*

Ya hemos dicho que dar una reducción de $L(M)$ a $O(M)$ es equivalente a dar una métrica riemanniana en M. Se tiene el siguiente teorema.

Teorema 1.6 *Toda variedad Riemanniana admite en $L(M)$ una única conexión métrica con torsión no nula. Esta conexión es la denominada* conexión riemanniana *o de* Levi-Civita *de (M, g).*

NOTA 1: Por lo tanto, el fibrado $O(M)$ admite una única conexión con torsión nula.

NOTA 2: Sean $\omega = \sum_{i,j} \omega^i_j \cdot E^j_i$ y $\Omega = \sum_{i,j} \Omega^i_j \cdot E^j_i$ las formas de conexión y curvatura relativas a la conexión de Levi-Civita en la variedad riemanniana (M,g) siendo E^j_i la base canónica del álgebra de Lie $\mathfrak{o}(n, \mathbb{R})$. Si $\tilde{\omega}^i_j$ y $\tilde{\Omega}^i_j$ son las formas locales definidas en una variedad riemanniana a partir de la derivada covariante y el tensor de Riemann asociados a la métrica (ver página 7) y $\sigma : U \longrightarrow O(M)$ la sección local que en cada $x \in M$ nos da la base $\{e_1(x), \ldots, e_n(x)\}$ utilizada para definir dichas formas, entonces $\sigma^*(\omega^i_j) = \tilde{\omega}^i_j$ y $\sigma^*(\Omega^i_j) = \tilde{\Omega}^i_j$.

G–estructuras transversas

Sea $(M, \mathcal{F})$ una variedad foliada con $\mathcal{F}$ de codimensión q y $L(M, \mathcal{F})$ el fibrado de las referencias transversas. Recordemos que una referencia transversa en $x \in M$ es una base $\{\overline{X}_1, \cdots \overline{X}_q\}$ que se considerará como un isomorfismo lineal

$$z : \mathbb{R}^q \longrightarrow Q_x.$$

tal que si $\{e_1, \ldots, e_q\}$ es la base canónica de $\mathbf{R}^q$, $z(e_i) = \overline{X}_i$.

Las nociones de *campo fundamental*, *conexión* y *curvatura* se definen como en $L(M)$, así como la noción de *conexión adaptada* a un subfibrado principal.

Definición 1.23 *La* forma fundamental *de $L(M, \mathcal{F})$ es la 1-forma θ_T con valores en $\mathbf{R}^q$ definida por*

$$\theta_T(X_z) = z^{-1}(\overline{p_{*z}(X_z)})$$

siendo p la proyección de $L(M, \mathcal{F})$ en M, $z \in L(M, \mathcal{F})$ y $X_z \in T_z L(M, \mathcal{F})$.

Al igual que θ en $L(M)$, θ_T se anula sobre los vectores verticales de $L(M, \mathcal{F})$ y es una forma equivariante respecto la acción de $\mathrm{Gl}(q, \mathbf{R})$ sobre $\mathbf{R}^n$.

Definición 1.24 *La* torsión *Θ_T de una conexión ω_T sobre $L(M, \mathcal{F})$ es la 2-forma con valores en $\mathbf{R}^q$ definida por:*

$$\Theta_T = d\theta_T + \omega_T \wedge \theta_T$$

siendo

$$(\omega_T \wedge \theta_T)(X, Y) = \frac{1}{2}\{\omega_T(X)\theta_T(Y) - \omega_T(Y)\theta_T(X)\}.$$

La siguiente proposición define de forma natural una foliación asociada a $\mathcal{F}$ en $L(M, \mathcal{F})$.

Proposición 1.4 *Sea $(M, \mathcal{F})$ una variedad foliada con* $\dim(\mathcal{F}) = p$*; el campo de planos p-dimensional definido en $L(M, \mathcal{F})$ por*

$$P_{Tz} = \{X_z \in T_z L(M, \mathcal{F}) \ : \ i_{X_z}\theta_T = i_{X_z} d\theta_T = 0\}$$

es completamente integrable. La foliación definida por esta distribución se denomina foliación elevada *$\mathcal{F}_T$ y es invariante por traslaciones a la derecha. La proyección $p : L(M, \mathcal{F}) \longrightarrow M$ envía hojas de $\mathcal{F}_T$ a hojas de $\mathcal{F}$. Además, si F_T es una hoja de la foliación elevada y F una hoja de $\mathcal{F}$, la proyección $p : F_T \longrightarrow F$ es una aplicación de recubrimiento.*

Sea G un subgrupo de Lie de $\mathbf{Gl}(q,\mathbf{R})$ con álgebra de Lie $\mathfrak{g}$ y E_T un subfibrado principal de $L(M,\mathcal{F})$ con grupo estructural G.

Definición 1.25 *Diremos que E_T define una G-*estructura transversa *en la variedad foliada $(M,\mathcal{F})$ si para cada $z \in E_T$ el espacio tangente T_zE_T contiene a P_{Tz}, espacio tangente de la hoja de la foliación elevada $\mathcal{F}_T$ que pasa por z.*

Obsérvese que en una G-estructura transversa E_T, la distribución P_T define de nuevo una foliación denominada *foliación elevada* en E_T.

EJEMPLOS:

1. Si $G = \mathbf{Gl}^+(q,\mathbf{R})$ es el grupo de las matrices $q \times q$ con determinante positivo, entonces una G-estructura transversa en $(M,\mathcal{F})$ es una *orientación transversa* de la foliación $\mathcal{F}$.
2. Si $G = \{e\}$, una G-estructura transversa se denomina *paralelismo transverso* y una foliación que admita una $\{e\}$-estructura transversa *foliación transversalmente paralelizable.* Un paralelismo transverso en $(M,\mathcal{F})$ viene dado por q campos básicos y globales $\{X_1,\ldots,X_q\}$ tales que $\{\overline{X}_1,\ldots,\overline{X}_q\}$ son linealmente independientes en cada punto.
3. Si $G = \mathbf{O}(q,\mathbf{R})$, entonces una G-estructura transversa se denomina *estructura Riemanniana transversa* y una foliación que admita una tal G-estructura se denomina *foliación Riemanniana.* Este tipo de foliaciones serán tratadas más extensamente en el apartado siguiente.

1.4 Estructuras transversas

En esta sección trataremos algunos aspectos relativos a dos tipos de foliaciones con estructura transversa: foliaciones de Lie y foliaciones riemannianas.

Foliaciones de Lie

Definición 1.26 *Sea G un grupo de Lie conexo y simplemente conexo. Diremos que una foliación $\mathcal{F}$ en la variedad diferenciable M es una G-*foliación de Lie $\mathcal{F}$ *si existe una colección maximal de pares (U_α, f_α), $\alpha \in A$, donde U_α son abiertos de M y $f_\alpha : U_\alpha \longrightarrow G$ aplicaciones distinguidas tales que*

1. $\cup_{\alpha \in A} U_\alpha = M$,
2. *si $U_\alpha \cap U_\beta \neq \emptyset$, existen aplicaciones localmente constantes*

$$g_{\alpha\beta} : U_\alpha \cap U_\beta \longrightarrow G$$

de manera que $f_\alpha = L_{g_{\alpha\beta}} \circ f_\beta$, siendo L_z la traslación a la izquierda en el grupo G.

NOTA 1: Puesto que G es conexo y simplemente conexo, si $\mathfrak{g}$ es el álgebra de Lie de G, hablaremos indistintamente de *G-foliaciones de Lie* o de *$\mathfrak{g}$-foliaciones de Lie.*

NOTA 2: Consideremos en M una métrica riemanniana g y sea $\mathcal{F}^\perp = \mathcal{H}$ el fibrado normal a la foliación $\mathcal{F}$ con respecto a dicha métrica. Las aplicaciones distinguidas f_α definen isomorfismos

$$f_{\alpha *} : \mathcal{F}_x^\perp \longrightarrow T_{f_\alpha(x)}G.$$

Si $\{e_1, \ldots, e_q\}$ es una base del álgebra de Lie $\mathfrak{g} \subset \mathcal{X}(M)$ de G, los campos

$$X_i(x) = (f_{\alpha *}^{-1})_{f_\alpha(x)} \cdot e_i$$

están bien definidos y dan lugar a un paralelismo transverso en $(M, \mathcal{F})$. Por tanto, toda foliación de Lie es transversalmente paralelizable.

De hecho, $(M, \mathcal{F})$ admite una estructura de $\mathfrak{g}$-foliación de Lie si existe una $\{e\}$-estructura transversa en el fibrado de las referencias transversas a $\mathcal{F}$, $L(M, \mathcal{F})$, de manera que el paralelismo transverso asociado $\{\overline{X}_1, \ldots, \overline{X}_q\}$ admita una estructura de álgebra de Lie isomorfa a $\mathfrak{g}$.

Proposición 1.5 *Si G es un grupo de Lie conexo y simplemente conexo y M una variedad diferenciable, tener una G-foliación de Lie $\mathcal{F}$ en M es equivalente a tener* *a) un recubrimiento* $\pi : \widetilde{M} \longrightarrow M$,

b) un morfismo de grupos $h : \pi_1(M) \longrightarrow G$ *y*

c) una submersión $\phi : \widetilde{M} \longrightarrow G$

con las siguientes propiedades:

1. ϕ *es* equivariante *por* h, *es decir, si* $\alpha \in \mathrm{Aut}(\pi)$ *entonces* $\phi(\alpha(x)) = h(\alpha) \cdot \phi(x)$,

2. *la* foliación elevada $\widetilde{\mathcal{F}} = \pi^*(\mathcal{F})$ *está definida por la submersión* ϕ *(o sea, las hojas de* $\widetilde{\mathcal{F}}$ *son las componentes conexas de las subvariedades* $\phi^{-1}(x)$*).*

La terna $(\widetilde{M}, h, \phi)$ *se denomina* desarrollo *de la foliación de Lie* $\mathcal{F}$. *Dos desarrollos* $(\widetilde{M}, h_i, \varphi_i)$, $i = 1, 2$, *definen la misma* G*-foliación de Lie si y solo si existe un* $g \in G$ *tal que* $h_2 = gh_1g^{-1}$ *y* $\phi_2 = g\phi_1$.

Corolario 1.2 *Sea* $\mathcal{F}$ *una* $\mathfrak{g}$*-foliación de Lie sobre la variedad* M. *Entonces existe una* 1*-forma* ω *con valores en* $\mathfrak{g}$ *satisfaciendo*

$$1.\quad \ker(\omega) = \mathcal{F}$$

$$2.\quad d\omega + \frac{1}{2}[\omega, \omega] = 0$$

Si α es la forma de Maurer–Cartan del grupo conexo y simplemente conexo asociado a $\mathfrak{g}$, la 1-forma ω se obtiene proyectando mediante la aplicación recubridora π la 1-forma $\phi^*(\alpha)$.

La siguiente proposición es el recíproco del corolario anterior

Proposición 1.6 *Sea* ω *una* 1*-forma sobre la variedad* M *con valores en el álgebra de Lie* $\mathfrak{g}$ *y que satisface las propiedades siguientes:*

$$1.\quad \omega_x : T_xM \longrightarrow \mathfrak{g} \quad \textit{es exhaustiva.}$$

$$2.\quad d\omega + \frac{1}{2}[\omega, \omega] = 0.$$

Entonces ω *determina una* $\mathfrak{g}$*-foliación de Lie* $\mathcal{F}$ *tal que* $\mathcal{F}_x = \ker(\omega_x)$.

Además, dos 1*-formas* ω_1 *y* ω_2 *con las propiedades anteriores definen la misma* $\mathfrak{g}$*-foliación de Lie si y solo si existe un* $g \in G$ *tal que* $\omega_2 = \mathrm{ad}_g \omega_1$.

NOTA: Al ser ω exhaustiva, podemos obtener un paralelismo transverso en $(M, \mathcal{F})$ considerando campos que se proyectan mediante ω sobre una base del álgebra $\mathfrak{g}$.

Teorema 1.7 (de estructura de las foliaciones de Lie, cf. [FE 71]) *Considerese una* $\mathfrak{g}$*-foliación de Lie* $\mathcal{F}$ *sobre una variedad compacta* M, $(\widetilde{M}, h, \phi)$ *un desarrollo de* $\mathcal{F}$ *y* G *el grupo conexo y simplemente conexo con álgebra de Lie* $\mathfrak{g}$, *entonces:*

a) $\phi : \widetilde{M} \longrightarrow G$ *es una fibración con fibras conexas,*

b) si $H = h(\pi_1(M))$, *las adherencias de las hojas de* $\mathcal{F}$ *son las fibras de un fibrado localmente trivial* $p : M \longrightarrow G/\overline{H}$. *Además, si* F *es una hoja de* $\mathcal{F}$, *la foliación inducida por* $\mathcal{F}$ *en* $\overline{F}$ *es una* K*-foliación de Lie donde* K *es la componente conexa de* $\overline{H}$ *que contiene el elemento neutro de* G.

El grupo H *se denomina* grupo de holonomía global *de* $\mathcal{F}$.

En particular tenemos que si M es conexa y $\mathcal{F}$ tiene una hoja compacta, todas las hojas de $\mathcal{F}$ son compactas y, de la misma manera, si $\mathcal{F}$ tiene una hoja densa, todas sus hojas son densas.

Como consecuencia resulta el siguiente teorema de estructura para las foliaciones transversalmente paralelizables.

Teorema 1.8 (cf. [MO 82]) *Sea* $\mathcal{F}$ *una foliación transversalmente paralelizable sobre una variedad compacta y conexa* M. *Entonces las adherencias de las hojas de* $\mathcal{F}$ *son las fibras de un fibrado localmente trivial* $\pi : M \longrightarrow W$. *En cada fibra de* π, *la foliación inducida por* $\mathcal{F}$ *es una* $\mathfrak{h}$*-foliación de Lie con hojas densas, donde* $\mathfrak{h}$ *es un invariante algebraico de la foliación* $\mathcal{F}$ *denominado* álgebra de Lie estructural.

La variedad W se denomina *variedad básica* y la proyección π *fibración básica*. La foliación dada por las fibras de π la denotaremos por $\mathcal{F}$.

Utilizaremos también algunas propiedades cohomológicas de las foliaciones de Lie.

Definición 1.27 *Sea $(M, \mathcal{F})$ una variedad foliada. Diremos que una forma diferencial α de M es* básica *con respecto a $\mathcal{F}$ si $i_X\alpha = 0 = i_X d\alpha$ para todo campo X perteneciente a $\mathcal{F}$.*

La cohomología de este complejo se denomina *cohomología básica* de $(M, \mathcal{F})$ y la denotamos por $H^*(M, \mathcal{F})$.

Definición 1.28 *Si $H^*(M, \mathcal{F}) \neq 0$ diremos que la foliación $\mathcal{F}$ es* homológicamente orientable *o* unimodular.

Recuérdese que un álgebra de Lie $\mathfrak{g}$ es *unimodular* si $\mathrm{tr}(\mathrm{ad}(h)) = 0$ para cualquier $h \in \mathfrak{g}$. Entonces tenemos

Teorema 1.9 (cf. [LR 88]) *Sea $\mathcal{F}$ una $\mathfrak{g}$-foliación de Lie unimodular en una variedad compacta M. Entonces el álgebra de Lie $\mathfrak{g}$ es unimodular.*

Foliaciones riemannianas

Definición 1.29 *Sea $(M, \mathcal{F})$ una variedad foliada de codimensión q. Diremos que $\mathcal{F}$ es una foliación riemanniana si existe una colección maximal de pares (U_α, f_α), $\alpha \in A$, donde U_α son abiertos de M y f_α aplicaciones distinguidas de U_α sobre una variedad riemanniana N de dimensión q tales que:*

1. $\cup_{\alpha \in A} U_\alpha = M$,
2. *las funciones de transición $g_{\alpha\beta}$ tales que $f_\alpha = g_{\alpha\beta} \circ f_\beta$ son isometrías locales de N.*

En las condiciones de la definición, la métrica riemanniana en N y la descomposición de TM en suma directa de los fibrados tangente, $\mathcal{F}$, y transverso, $\mathcal{H}$, a la foliación nos permiten construir una métrica riemanniana g en M con las propiedades siguientes:

a) $\mathcal{F}$ y $\mathcal{H}$ son ortogonales

b) $f_{\alpha *}|_{\mathcal{H}_x} : \mathcal{H}_x \longrightarrow T_{f_\alpha(x)}N$ es una isometría.

Entonces, si X e Y son campos foliados en una abierto $U \subset M$ y normales a $\mathcal{F}$, la función local $g(X,Y)$ es básica.

Esta propiedad justifica la siguiente definición:

Definición 1.30 *Sea $(M, \mathcal{F})$ una variedad foliada de codimensión q. Una métrica riemanniana g en M diremos que es* casi–fibrada *o* "bundle–like" *con respecto a $\mathcal{F}$ si, para cualesquiera $X, Y \in \mathcal{X}(U)$ básicos y normales a $\mathcal{F}|U$, la función $g(X,Y)$ es básica en U.*

Si $(x_1, \ldots, x_p, y_1, \ldots, y_q)$ son coordenadas locales adaptadas a la foliación $\mathcal{F}$ en un abierto U de M y las formas $\omega_i = dx_i - \sum \alpha_{ij} dy_j$ definen el fibrado normal $\mathcal{H}$, entonces la métrica g se puede escribir de la forma

$$\sum_{i,j} a_{ij}(x,y)\omega_i \otimes \omega_j + \sum_{i,j} b_{ij}(y) dy_i \otimes dy_j.$$

El siguiente resultado hace referencia a una propiedad importante del campo de planos normal a una foliación riemanniana.

Proposición 1.7 *Si $\mathcal{F}$ es una foliación riemanniana en la variedad M, entonces el campo de planos normal $\mathcal{F}^\perp = \mathcal{H}$ es totalmente geodésico.*

Capítulo 2

Fórmulas integrales de curvatura

Sea M una variedad riemanniana compacta, conexa, sin borde y de dimensión $n+1$ sobre la cual se ha dado una foliación $\mathcal{F}$ transversalmente orientable de codimensión 1. Asimov demostró (cf. [AS 78]) que si M tiene curvatura seccional constante c, entonces:

$$\frac{1}{\mathrm{vol}(M)}\int_M K = \begin{cases} 0 & \text{si } n \text{ es impar} \\ 2^n c^{n/2} \Big/ \begin{pmatrix} n \\ n/2 \end{pmatrix} & \text{si } n \text{ es par} \end{cases} \tag{2.1}$$

donde la función $K : M \to \mathbb{R}$ denota la curvatura de Lipschitz–Killing (de Gauss si n=2, cf. [TH 64]) de la hoja F_x de $\mathcal{F}$ que pasa por el punto x de M y sobre la cual se ha considerado la métrica de Riemann inducida por la inclusión en M.

Posteriomente, en [Bl 84], Brito, Langevin y Rosenberg generalizaron este resultado dando fórmulas integrales no solo para la curvatura de Gauss, sino también para las funciones simétricas elementales de curvatura. En concreto, sea ∇ la conexión riemanniana en M inducida por la métrica; en un punto $x \in M$ podemos considerar el endomorfismo

$$\begin{array}{ccc} T_xM & \xrightarrow{A_x} & T_xM \\ y & \longmapsto & (\nabla_y N)(x) \end{array}$$

donde N es un campo vectorial unitario y normal a la foliación $\mathcal{F}$. La k-ésima función simétrica de curvatura σ_k con $k = 0, 1, \ldots, n$ se define mediante la expresión

$$\det(I + tA_x) = \sum_{k=0}^{n} \sigma_k t^k.$$

Entonces, cf. [Bl 84], si la variedad M es compacta, orientable, sin borde y con curvatura seccional constante c, se cumple la fórmula integral

$$\frac{1}{\mathrm{vol}(M)} \int_M \sigma_k = \begin{cases} c^{k/2} \binom{n/2}{k/2} & \text{si } n \text{ y } k \text{ son pares} \\ 0 & \text{en los otros casos} \end{cases} \tag{2.2}$$

Veamos, aunque solo sea de pasada, los métodos utilizados para la demostración de estas fórmulas integrales. En primer lugar se considera una referencia ortonormal local $\{e_1, e_2, \ldots, e_n, e_{n+1}\}$ *adaptada* a la foliación $\mathcal{F}$, esto quiere decir que los vectores $e_1, \ldots, e_n$ son tangentes a $\mathcal{F}$ mientras que e_{n+1} es un vector normal unitario. Sea $\{\theta^1, \ldots, \theta^{n+1}\}$ la base dual asociada a esa referencia y ω_j^i las formas de conexión relativas a la conexión riemanniana en M (cf. 7).

Si definimos las n-formas η_i mediante la relación

$$(\theta^1 - t\omega_{n+1}^1) \wedge \cdots \wedge (\theta^n + t\omega_{n+1}^n) = \sum_{i=0}^{n} \eta_i t^i,$$

se tienen los siguientes resultados

Lema 2.1 *Las n-formas η_i no dependen de la referencia adaptada elegida y por tanto son formas globales sobre M.*

Lema 2.2 *Se cumple que*

$$\eta_i \wedge \theta^{n+1} = \sigma_i \theta^1 \wedge \cdots \wedge \theta^{n+1}$$

Lema 2.3 *Si la variedad riemanniana M tiene curvatura seccional constante c entonces*

$$d\eta_i = (-1)^{n+1}[(i+1)\eta_{i+1} - c(n-i+1)\eta_{i-1}] \wedge \theta^{n+1}$$

siendo $\eta_{-1} = 0 = \eta_{n+1}$.

Como consecuencia de estos lemas se obtiene el teorema siguiente

Teorema 2.1 *Si i es impar, la forma $\eta_i \wedge \theta^{n+1}$ es exacta y si i es par, la forma*

$$\eta_i \wedge \theta^{n+1} - c^{i/2}\frac{n(n-2)\cdots(n-i+2)}{2\cdot 4\cdots i}\theta^1 \wedge \cdots \wedge \theta^{n+1}$$

es exacta.

Como corolario inmediato del teorema resultan las formulas integrales 2.2 antes citadas.

Obsérvese que en el esquema de la demostración que aquí hemos expuesto es fundamental la hipótesis relativa a la curvatura de M.

A la vista de las fórmulas 2.1 y 2.2, es natural plantearse las siguientes cuestiones:

1. ¿Es posible eliminar la hipótesis de integrabilidad? Es decir, ¿qué ocurre al considerar campos de planos en vez de foliaciones sobre la variedad M?

2. ¿Es posible eliminar la hipótesis sobre la codimensión de la foliación?

3. ¿Qué ocurre al estudiar las fórmulas en el caso de variedades M con curvatura seccional no necesariamente constante ?

El propósito de este capítulo es intentar dar respuesta a estas preguntas. Como ejemplo de los resultados que se obtendrán tenemos la siguiente fórmula integral

$$\frac{1}{2}\int_M \tau'_m = \int_M \sigma_{2,\mathcal{F}} + \int_M \sigma_{2,\mathcal{H}} + \int_M \|A_{\mathcal{F}}\|^2 + \int_M \|A_{\mathcal{H}}\|^2$$

donde (cf. pág. 10) $\sigma_{2,\mathcal{F}}$ y $\sigma_{2,\mathcal{H}}$ son las segundas formas simétricas de curvatura asociadas a campos de planos ortogonales $\mathcal{F}$ y $\mathcal{H}$, $A_{\mathcal{F}}$ y $A_{\mathcal{H}}$ los tensores de integrabilidad y τ'_m la curvatura mixta. Obsérvese que no exigimos ninguna de las tres hipótesis anteriormente citadas.

Para empezar el capítulo, introduciremos en primer lugar algunas de las técnicas utilizadas en la demostración de este tipo de fórmulas, basadas fundamentalmente en los artículos de Albert [AL 83] y [AL 78].

2.1 G–DG–álgebras

Recordemos que un *álgebra* A sobre $\mathbf{R}$ es un espacio vectorial real junto a una aplicación bilineal $A \times A \longrightarrow A$ denominada *producto*. Diremos que el álgebra A es *graduada* si hay una descomposición $A = \sum_{p \geq 0} A^p$ de manera que los subespacios A^p cumplan que

$$A^p \cdot A^q \subset A^{p+q}.$$

Una *derivación* en A es una aplicación lineal $D : A \longrightarrow A$ satisfaciendo que

$$D(xy) = D(x)y + xD(y).$$

y una aplicación lineal $\alpha : A \longrightarrow A$ en un álgebra graduada será una *antiderivación* si

$$\alpha(xy) = \alpha(x)y + (-1)^p x\alpha(y)$$

cuando x es un elemento de A^p e y un elemento cualquiera de A.

Un álgebra graduada A con una antiderivación $d : A \longrightarrow A$ tal que

$$\text{a)} \quad d(A^p) \subset A^{p+1} \qquad \text{b)} \quad d^2 = 0$$

se denomina *álgebra diferencial graduada*.

Definición 2.1 *Sea A un álgebra diferencial graduada y G un grupo de Lie con álgebra de Lie $\mathfrak{g}$. Se dice que A es una G–DG–*álgebra *si existe una antiderivación*

$$i(X) : A^* \longrightarrow A^{*-1} \quad X \in \mathfrak{g}$$

y automorfismos

$$\rho(g) : A \longrightarrow A \quad g \in G$$

(nótese que $i(X)$ reduce el grado una unidad) tales que:

1. $i(X)^2 = 0 \quad \forall X \in \mathfrak{g}$.

2. $\rho(gg') = \rho(g)\rho(g') \quad \forall g, g' \in G$.

3. $\rho(g)i(X)\rho(g^{-1}) = i(\mathrm{Ad}(g)X) \quad , X \in \mathfrak{g}$ *y* $g \in G$.

4. $\mathcal{L}_X = i(X) \circ d + d \circ i(X), \quad X \in \mathfrak{g}$ *siendo* $\mathcal{L}_X$ *la acción infinitesimal asociada a* ρ
$$\mathcal{L}_X = \left.\frac{d}{dt}\right|_{t=0} \rho(exp(tX)), \quad \forall X \in \mathfrak{g}.$$

OBSERVACIÓN: Más general es la noción de *$\mathfrak{g}$-DG-álgebra.* Un álgebra diferencial graduada A es una $\mathfrak{g}$-DG-álgebra si hay derivaciones

$$\begin{array}{lcll} i(X) : A^* & \longrightarrow & A^{*-1} & \quad X \in \mathfrak{g} \\ \mathcal{L}_X : A & \longrightarrow & A & \quad X \in \mathfrak{g} \end{array}$$

tales que

$$\left.\begin{array}{ll} 1. & i(X)^2 = 0 \\ 2. & \mathcal{L}_{[X,Y]} = [\mathcal{L}_X, \mathcal{L}_Y] \\ 3. & [\mathcal{L}_X, i(X)] = i([X,Y]) \\ 4. & \mathcal{L}_X = i(X) \circ d + d \circ i(X) \end{array}\right\} \quad \forall X, Y \in \mathfrak{g}$$

Nótese que toda G-DG-álgebra es de forma natural una $\mathfrak{g}$-DG-álgebra; en cambio el recíproco no es necesariamente cierto (lo es por ejemplo si suponemos G simplemente conexo, pues en este caso nos es posible integrar la acción $\mathcal{L}_X$).

EJEMPLOS: Veamos dos ejemplos típicos de G-DG-álgebras.

1. El modelo geométrico para el concepto de G-DG-álgebra es el complejo de las formas diferenciales $A(P)$ de un fibrado principal P con grupo estructural G. Para todo ω de $A(P)$ consideramos
$$\left.\begin{array}{rcl} i(X)\omega & = & i(X^*)\omega \\ \rho(g)\omega & = & R_g^* \cdot \omega \end{array}\right\}$$

donde X^* es el campo fundamental asociado a X y R_g es la acción del grupo estructural G sobre P (cf. pag. 12). En este caso la derivación $\mathcal{L}_X\omega$ coincide con la habitual derivada de Lie $\mathcal{L}_{X^*}\omega$ en P.

Es fácil comprobar que con estas definiciones de i y ρ el complejo $A(P)$ posee una estructura de G–DG–álgebra.

2. Si $\mathfrak{g}$ es un álgebra de Lie, el álgebra exterior $\bigwedge^* \mathfrak{g}^*$ tiene estructura de álgebra diferencial graduada. Para ello basta pensar en cada elemento ω de $\mathfrak{g}^*$ como una forma invariante por la izquierda en G, el grupo conexo y simplemente conexo asociado a $\mathfrak{g}$, y definir la diferencial en $\bigwedge^* \mathfrak{g}^*$ a partir de la diferencial en el complejo $A_I(G)$ de las formas invariantes por la izquierda en G.

   Poniendo
$$\left.\begin{array}{rcl} i(X)\alpha & = & \alpha(X) \\ \rho(g)\alpha & = & \mathrm{Ad}(g^{-1})^*\alpha \end{array}\right\} \quad \alpha \in \bigwedge^1 \mathfrak{g}^*$$
   tenemos que
$$\mathcal{L}_X\alpha = -(\mathrm{ad}X)^*\alpha$$
   con lo cual $\bigwedge^* \mathfrak{g}^*$ tiene estructura de G–DG–álgebra.

Definición 2.2 *Sean A_1 y A_2 G-DG-álgebras. Diremos que una aplicación $\varphi : A_1 \longrightarrow A_2$ es un morfismo de G-DG-álgebras si*

1. *Es morfismo de álgebras diferenciales graduadas.*
2. $\varphi(\rho_1(g)\cdot a) = \rho_2(g)\cdot\varphi(a)$.
3. $\varphi(i_1(X)\cdot a) = i_2(X)\cdot\varphi(a)$.

Definición 2.3 *Sea E un espacio vectorial real, G un grupo y*
$$\sigma : G \longrightarrow \mathrm{Gl}(E)$$
*una representación de G en el grupo de automorfismos de E. Entonces diremos que el par (E,σ) es un G-*módulo.

Si G es un grupo de Lie, la aplicación diferencial de la representación σ la denotaremos por

$$\overline{\sigma} : \mathfrak{g} \longrightarrow \mathfrak{gl}(E).$$

EJEMPLO: Dado un grupo de Lie G, su álgebra de Lie $\mathfrak{g}$ admite una estructura canónica de G-móduulo con las aplicaciones

$$\sigma = \mathrm{Ad} : G \longrightarrow \mathbf{Gl}(\mathfrak{g}) \quad \text{y} \quad \overline{\sigma} = \mathrm{ad} : \mathfrak{g} \longrightarrow \mathfrak{gl}(\mathfrak{g}).$$

Definición 2.4 *Si (E, σ) y (E', σ') son G-módulos, diremos que una aplicación lineal $f : E \to E'$ es un* morfismo de G-módulos *si*

$$f(\sigma(g)v) = \sigma'(g)f(v)$$

para cualesquiera g de G, y v de E.

Supongamos E, E' y E'' G-módulos y el morfismo de G-módulos

$$E \otimes E' \xrightarrow{<\cdot,\cdot>} E''.$$

Si A es una G–DG–álgebrra se define el *producto exterior* entre $A \otimes E$ y $A \otimes E'$ relativo al morfismo $< \cdot, \cdot >$ como

$$(u \otimes e) \wedge (v \otimes e') = u \wedge u \otimes < e, e' >$$

donde la $\wedge$ en la parte derecha de la igualdad es el producto de álgebra definido en A.

EJEMPLOS: Posteriormennte utilizaremos los siguientes casos particulares:

1. Si $\mathfrak{g}$ es el álgebra dee Lie del grupo G y consideramos la estructura de G-módulo dada en el ejemplo anterior, la aplicación

$$\begin{array}{ccc} \mathfrak{g} \otimes \mathfrak{g} & \longrightarrow & \mathfrak{g} \\ x \otimes y & \longmapsto & [x, y] \end{array}$$

es un morfismo de G-módulos. Entonces, si A es una G–DG–álgebra, en $A \otimes \mathfrak{g}$ se tiene el producto exterior

$$(u \otimes x) \wedge (v \otimes y) = u \wedge v \otimes [x, y] \qquad (2.3)$$

2. Si (E,σ) es un G-módulo y $\mathfrak{g}$ es el álgebra de Lie de G, la aplicación

$$\begin{aligned} \mathfrak{g}\otimes E &\longrightarrow E \\ x\otimes e &\longmapsto \overline{\sigma}(x)e, \end{aligned}$$

con $\overline{\sigma}:\mathfrak{g}\to\mathfrak{gl}(E)$ la aplicación diferencial de σ, es un morfismo de G-módulos. Entonces, si A es una G–DG–álgebra consideraremos el producto exterior

$$(u\otimes x)\wedge(v\otimes e) \;=\; u\wedge v\otimes\overline{\sigma}(x)e \qquad (2.4)$$

Sean A una G–DG–álgebra y E un G-módulo. Sobre el producto tensorial $A\otimes E$ consideraremos los operadores

$$\begin{aligned} i_X : A^p\otimes E &\longrightarrow A^{p-1}\otimes E \\ d : A^p\otimes E &\longrightarrow A^{p+1}\otimes E \\ \mathcal{L}_X^E : A^p\otimes E &\longrightarrow A^p\otimes E \end{aligned}$$

definidos por

$$i_X(\alpha\otimes e)=i_X\alpha\otimes e, \qquad d(\alpha\otimes e)=d\alpha\otimes e$$

$$\mathcal{L}_X^E(\alpha\otimes e)=L_X\alpha\otimes e+\alpha\otimes\overline{\sigma}(X)e$$

Definición 2.5 *Si G es un grupo de Lie conexo, E un G-módulo, A una G-DG-álgebra y ξ un elemento de $A^p\otimes E$, diremos que*

1. *ξ es* invariante *en $A\otimes E$ si $\mathcal{L}_X^E\xi=0$ para todo X de $\mathfrak{g}$.*
2. *ξ es* semi-básico *en $A\otimes E$ si $i(X)\xi=0$ para todo X de $\mathfrak{g}$.*
3. *ξ es* básico *en $A\otimes E$ si es invariante y semi-básico.*

El conjunto de los elementos invariantes, semi-básicos y básicos en $A\otimes E$ los denotaremos por

$$I^*(A\otimes E),\quad SB^*(A\otimes E)\quad \text{y}\quad B^*(A\otimes E)$$

respectivamente.

EJEMPLO: Sea $SO(M)$ el fibrado principal de las referencias ortonormales directas en una variedad riemanniana (M, g) orientada, θ la forma fundamental de $SO(M)$ y ω y Ω las formas de conexión y curvatura asociadas a la métrica g, entonces, θ es un elemento de $SO(M) \otimes \mathbf{R}^n$ mientras que ω y Ω son elementos de $SO(M) \otimes \mathfrak{so}((, \mathbf{R})n)$.

Las formas fundamental y de curvatura se anulan sobre los campos verticales (i.e. campos tangentes a la fibra de $SO(M)$), y por tanto son elementos semibásicos.

La forma de conexión satisface que

$$i(X)\omega = X$$

pues $\omega(X^*) = X$ donde X^* es el campo fundamental asociado a $X \in \mathfrak{so}(n, \mathbf{R})$.

Sabemos que son ciertas la relaciones

$$R_g^* \cdot \theta = g^{-1}\theta \quad R_g^* \cdot \omega = Ad(g^{-1})\omega \quad R_g^* \cdot \Omega = Ad(g^{-1})\Omega$$

de las cuales que deduce que

$$\mathcal{L}_X\theta = \mathcal{L}_X\omega = \mathcal{L}_X\Omega = 0.$$

Por tanto tenemos que

$$\theta \in B^1(A(SO(M)) \otimes \mathbf{R}^n)$$

$$\omega \in I^1(A(SO(M)) \otimes \mathfrak{so}(n, \mathbf{R}))$$

$$\Omega \in B^2(A(SO(M)) \otimes \mathfrak{so}(n, \mathbf{R}))$$

2.2 El álgebra universal

Sea (E, σ) un G-módulo con G grupo de Lie. Denotaremos por $\tilde{G}$ el *producto semidirecto* $G \times_\sigma E$ (extensión afín de G definida por la representación σ) cuya estructura de grupo de Lie viene dada por el producto

$$(g, e) \cdot (g', e') = (g \cdot g', \sigma(g)e' + e).$$

Su álgebra de Lie la denotamos por $\tilde{\mathfrak{g}}$ y es igual a $\mathfrak{g} \oplus E$ con el paréntesis

$$[(x,e),(y,f)] = ([x,y], \overline{\sigma}(x)e - \overline{\sigma}(y)f).$$

El *álgebra de Weil* de $\tilde{G}$ se define como

$$W(\tilde{G}) = \bigwedge^* \tilde{\mathfrak{g}}^* \otimes S^* \tilde{\mathfrak{g}}^*$$

donde $\bigwedge^* \tilde{\mathfrak{g}}^*$ es el álgebra exterior de $\tilde{\mathfrak{g}}^*$ y $S^* \tilde{\mathfrak{g}}^*$ el álgebra simétrica. El producto de álgebra en $W(\tilde{G})$ es el inducido por los productos $\wedge$ y $\vee$ en $\bigwedge^* \tilde{\mathfrak{g}}^*$ y $S^* \tilde{\mathfrak{g}}^*$. Podemos poner

$$W(\tilde{G}) = \bigoplus_{p,q,r,s} \bigwedge^p \mathfrak{g}^* \otimes \bigwedge^q E^* \otimes S^r \mathfrak{g}^* \otimes S^s E^*.$$

El álgebra $W(\tilde{G})$ es graduada, siendo los elementos de $\bigwedge^p \mathfrak{g}^*$ y $\bigwedge^p E^*$ de grado p y los de $S^r \mathfrak{g}^*$ y $S^r E^*$ de grado $2r$, entonces los elementos de grado m de $W(\tilde{G})$ son aquellos

$$a \otimes b \otimes c \otimes d \in \bigwedge^p \mathfrak{g}^* \otimes \bigwedge^q E^* \otimes S^r \mathfrak{g}^* \otimes S^s E^*.$$

tales que $p + q + 2(r + s) = m$.

Proposición 2.1 (cf. [KA 75]) *$W(\tilde{G})$ admite una estructura de $\tilde{G}$-DG-álgebra.*

Veamos como son $i(X)$, ρ, $\mathcal{L}_X$ y la diferencial d en $W(\tilde{G})$.

Si $\alpha \in \bigwedge^1 \tilde{\mathfrak{g}}$ y $\dot{\alpha} \in S^1 \tilde{\mathfrak{g}}$, entonces

$$\left.\begin{array}{rcl} i(X)(\alpha \otimes 1) & = & \alpha(X) \\ i(X)(1 \otimes \dot{\alpha}) & = & 0 \end{array}\right\} \quad X \in \tilde{\mathfrak{g}},$$

$$\left.\begin{array}{rcl} \rho(g)(\alpha \otimes 1) & = & \mathrm{Ad}(g^{-1})^* \alpha \otimes 1 \\ \rho(g)(1 \otimes \dot{\alpha}) & = & 1 \otimes \mathrm{Ad}(g^{-1})^* \dot{\alpha} \end{array}\right\} \quad g \in \tilde{G}$$

y la diferencial de la acción ρ es

$$\left.\begin{array}{rcl} \mathcal{L}_X(\alpha \otimes 1) & = & \mathcal{L}_X \alpha \otimes 1 \\ \mathcal{L}_X(1 \otimes \dot{\alpha}) & = & 1 \otimes \mathcal{L}_X \dot{\alpha} \end{array}\right\} \quad X \in \tilde{\mathfrak{g}}.$$

Teniendo en cuenta que $a \otimes b = a \otimes 1 \wedge 1 \otimes b$, estas definiciones se extienden para cualquier elemento de $W(\tilde{G})$.

La diferencial d en $W(\tilde{G})$ la definimos como la suma de diferenciales

$$d = d' + d'' : W(\tilde{G}^{*}) \longrightarrow W(\tilde{G}^{*+1})$$

donde d' y d'' están caracterizadas a través de las fórmulas

$$\left.\begin{array}{rcl} d'\alpha & = & d\alpha \\ d''\alpha & = & \tilde{\alpha} \end{array}\right\} \quad \text{para} \quad \alpha \in \bigwedge^{1}\tilde{\mathfrak{g}}$$

y

$$\left.\begin{array}{rcl} i(X)d'\tilde{\alpha} & = & \mathcal{L}_X\tilde{\alpha} \\ d''\alpha & = & 0 \end{array}\right\} \quad \text{para} \quad \tilde{\alpha} \in S^{1}\tilde{\mathfrak{g}} \quad \text{y} \quad X \in \tilde{\mathfrak{g}}$$

En 2.2, $\tilde{\alpha}$ es el mismo elemento que α aunque pensado como elemento de $S^1\tilde{\mathfrak{g}}$ y la diferencial d en el lado derecho es el operador diferencial en $\tilde{G}$ sobre las formas invariantes a la izquierda.

Al restringir las acciones ρ a las definidas por los elementos de G y la derivación $i(X)$ únicamente a vectores X del álgebra $\mathfrak{g}$, obtenemos en $W(\tilde{G})$ una estructura de G–DG–álgebra que denotaremos por $W(G, E)$.

Para nuestros propósitos será útil pensar en la estructura de G–DG–álgebra inducida sobre $W(G, E)$ desde otro punto de vista. Consideremos las aplicaciones identidad de $\mathfrak{g}$ en $\mathfrak{g}$

$$\left.\begin{array}{rcl} \omega_0 = \mathrm{id}_{\mathfrak{g}} : \mathfrak{g} & \longrightarrow & \mathfrak{g} \\ \Omega_0 = \mathrm{id}_{\mathfrak{g}} : \mathfrak{g} & \longrightarrow & \mathfrak{g} \end{array}\right\}$$

donde ω_0 se pensará como un elemento de $\bigwedge^1 \mathfrak{g}^* \otimes \mathfrak{g}$ y Ω_0 como un elemento de $S^1\mathfrak{g}^* \otimes \mathfrak{g}$, y las aplicaciones identidad de E en E

$$\left.\begin{array}{rcl} \theta_0 = \mathrm{id}_E : E & \longrightarrow & E \\ \Theta_0 = \mathrm{id}_E : E & \longrightarrow & E \end{array}\right\}$$

pensando en θ_0 como un elemento de $\bigwedge^1 E^* \otimes E$ y Θ_0 como un elemento de $S^1 E^* \otimes E$.

Lema 2.4 *La diferencial d en $W(G,E)$ queda determinada por las relaciones siguientes*

$$\left.\begin{aligned} d\omega_0 + \tfrac{1}{2}\omega_0 \wedge \omega_0 &= \Omega_0 \\ d\Omega_0 + \omega_0 \wedge \Omega_0 &= 0 \\ d\theta_0 + \omega_0 \wedge \theta_0 &= \Theta_0 \\ d\Theta_0 + \omega_0 \wedge \Theta_0 &= \Omega_0 \wedge \theta_0 \end{aligned}\right\} \tag{2.5}$$

A modo de ejemplo, veamos de qué manera la primera relación caracteriza la diferencial sobre los elementos de $\bigwedge^1 \mathfrak{g}^*$. Si $\{e_1, \ldots, e_n\}$ es una base de $\mathfrak{g}$ y $\{e^1, \ldots, e^n\}$ su base dual podemos poner

$$\omega_0 = \mathrm{id}_{\mathfrak{g}} = \sum_{i=1}^{n} e^i \otimes e_i \in \bigwedge^1 \mathfrak{g}^* \otimes \mathfrak{g}.$$

Entonces, según las relaciones 2.5

$$d\omega_0 = \sum_{i=1}^{n} de^i \otimes e_i,$$

$$\begin{aligned} \frac{1}{2}\omega_0 \wedge \omega_0 &= \frac{1}{2}\sum_{i,j} (e^i \otimes e_i) \wedge (e^j \otimes e_j) \\ &= \frac{1}{2}\sum_{i,j} e^i \wedge e^j \otimes [e_i, e_j] \\ &= \sum_{i<j,k} c_{ij}^k e^i \wedge e^j \otimes e_k \end{aligned}$$

y

$$\Omega_0 = \sum_{i=1}^{n} \tilde{e}^i \otimes e_i \qquad \text{con} \quad \tilde{e}^i \in S^1\mathfrak{g}^* \otimes \mathfrak{g}.$$

Por lo tanto

$$de^i \otimes e_i = \left[-\sum_{k<l} c_{kl}^i e^k \wedge e^l + \tilde{e}^i \right] \otimes e_i$$

de donde

$$de_i = -\sum_{k<l} c_{kl}^i e^k \wedge e^l + \tilde{e}^i.$$

(las c_{ij}^k son las constantes de estructura del álgebra $\mathfrak{g}$ respecto de la base $\{e_i\}$)

De la misma manera se pueden calcular $d\tilde{e}^i$, du^i y $d\tilde{u}^i$ siendo $\{u^i\}$ base del espacio dual E^*.

De forma parecida tenemos que

Lema 2.5 *Las derivaciones $i(X)$ y $\mathcal{L}_X$ de $W(G,E)$ están caracterizadas por las relaciones*

$$\left.\begin{array}{rcl} i(X)\omega_0 & = & X \\ i(X)\Omega_0 & = & 0 \\ i(X)\theta_0 & = & 0 \\ i(X)\Theta_0 & = & 0 \end{array}\right\} \qquad \left.\begin{array}{rcl} \mathcal{L}_X^{\mathfrak{g}}\omega_0 & = & 0 \\ \mathcal{L}_X^{\mathfrak{g}}\Omega_0 & = & 0 \\ \mathcal{L}_X^{E}\theta_0 & = & 0 \\ \mathcal{L}_X^{E}\Theta_0 & = & 0 \end{array}\right\}$$

Una serie de largos pero sencillos cálculos demuestran que

$$\omega_0 \in I^1(W(G,E)\otimes\mathfrak{g}), \quad \Omega_0 \in B^2(W(G,E)\otimes\mathfrak{g})$$

$$\theta_0 \in B^1(W(G,E)\otimes E), \quad \Theta_0 \in B^2(W(G,E)\otimes E)$$

Obsérvese que las ecuaciones 2.5 tienen cierta similitud con las ecuaciones de estructura y de Bianchi (cf. página 16 y [KO 63]) en un fibrado principal. El propósito de esta sección es el de proporcionar las definiciones y resultados necesarios para construir un morfismo de G–DG–álgebras cuya imagen será el complejo de las formas diferenciales en cierto fibrado principal. Las ecuaciones 2.5 las utilizaremos para establecer dicho morfismo.

Puesto que será particularmente interesante el caso con torsión nula (conexiones riemannianas), vamos a construir a partir de $W(G,E)$ una nueva G–DG–álgebra que elimine los términos Θ_0 y $\Omega_0 \wedge \theta_0$ (i.e. $d\Theta_0$).

Sea J el ideal de $W(G,E)$ generado por Θ_0 y $\Omega_0 \wedge \theta_0$, en bases $\{e_i\}$ del álgebra $\mathfrak{g}$ y $\{u_i\}$ del G-módulo E; tenemos que

$$\Theta_0 = \sum \tilde{u}^i \otimes u_i$$

y que

$$\Omega_0 \wedge \theta_0 = \sum \lambda^i_{jk} \tilde{e}^j \wedge u^k \otimes u_i$$

donde $\sigma(e_j) \cdot u_k = \lambda^i_{jk} u_i$. Con esta notación

$$J = \left\langle \tilde{u}^1, \ldots, \tilde{u}^n, (\sum_{j,k} \lambda^i_{jk} \tilde{e}^j \wedge u^k)^m_{i=1} \right\rangle \tag{2.6}$$

Lema 2.6 (cf. [AL 78]) *El ideal J es estable por d, por la acción ρ de G y por las antiderivaciones $i(X)$.*

Entonces el cociente

$$\widehat{W}(G, E) = W(G, E)/J$$

tiene una estructura natural de G–DG–álgebra. Al conjunto de los elementos básicos de $\widehat{W}(G, E)$ lo denotaremos por $B\widehat{W}(G, E)$ y está definido por

$$B\widehat{W}(G, E) = \{\alpha \in \widehat{W}(G, E) : \; \mathcal{L}_X \alpha = 0 = i(X)\alpha\}$$

(obsérvese que dada una G–DG–álgebra tenemos dos tipos de elementos básicos, los de A y los de $A \otimes E$, siendo E un G-módulo).

2.3 Un morfismo básico

En esta sección M será una variedad riemanniana n-dimensional, orientada y sin borde. Supondremos también que sobre M está dado un campo de p-planos $\mathcal{F}$ orientado.

La existencia de una distribución de p-planos puede expresarse en términos del fibrado principal de las referencias ortonormales directas $SO(M)$ de la variedad M.

Proposición 2.2 *En la variedad M son equivalentes las siguientes propiedades:*

1. *Existe una distribución de p-planos $\mathcal{F}$.*

2. *El fibrado principal $SO(M)$ de las referencias ortonormales directas admite una reducción con grupo estructural* $\mathsf{SO}(p,\mathbf{R}) \times \mathsf{SO}(q,\mathbf{R})$ *con* $q = n - p$.

Esta reducción la denotaremos por $SO(M,\mathcal{F})$.

Demostración: Recordemos que según la proposición 1.3, un fibrado principal P con grupo estructural G es reducible a un grupo de Lie G' si y solo si existe un atlas $(U_\alpha, \varphi_\alpha)$ trivializador de P cuyas funciones de transición

$$g_{\alpha\beta} : U_\alpha \cap U_\beta \longrightarrow G$$

toman valores en G'.

Primeramente supongamos que existe $\mathcal{F}$; entonces podemos considerar un recubrimiento por abiertos $\{U_i\}_{i\in A}$ de manera que en cada U_i hay secciones de $TM|U_i$

$$\begin{aligned} e^i_A &: U_i \longrightarrow TM|U_i \qquad A = 1,\ldots,p \\ e^i_\alpha &: U_i \longrightarrow TM|U_i \qquad \alpha = p+1,\ldots,p+q = n \end{aligned}$$

tales que $\{e^i_1(x)(x),\ldots,e^i_p(x),e^i_{p+1}(x),\ldots,e^i_n(x)\}$ es una base ortonormal adaptada al campo de planos $\mathcal{F}$ (cf. pág. 26).

Puesto que M y $\mathcal{F}$ están orientadas, podemos elegir las secciones $\{e^i_A, e^i_\alpha\}$ de forma que los cambios de base estén dados por matrices pertenecientes al grupo $\mathsf{SO}(p,\mathbf{R}) \times \mathsf{SO}(q,\mathbf{R})$.

Consideremos las trivializaciones locales

$$\begin{aligned} \pi^{-1}(U_i) &\longrightarrow U_i \times G \\ z &\longmapsto (\pi(z), \varphi_i(z)) \end{aligned}$$

en las que $\pi(z)$ es la proyección sobre M y $\varphi_i(z)$ nos da la expresión de la referencia representada por z en la base $\{e^i_1(x),\ldots,e^i_p(x),e^i_{p+1}(x),\ldots,e^i_n(x)\}$. Para esta trivialización tenemos las funciones de transición

$$\begin{aligned} U_i \cap U_j &\xrightarrow{\varphi_{\mathcal{F}}} \mathsf{SO}(n,\mathbf{R}) \\ x &\longmapsto \varphi_i(z) \cdot \varphi_j(z)^{-1} \end{aligned}$$

con $\pi(z) = z$. La matriz $g_{ij}(x) = \varphi_i(z) \cdot \varphi_j(z)^{-1}$ es de $\mathbf{SO}(p,\mathbf{R}) \times \mathbf{SO}(q,\mathbf{R})$ pues transforma referencias expresadas en la base $\{e^j_A(x), e^j_\alpha(x)\}$ a referencias expresadas en la base $\{e^i_A(x), e^i_\alpha(x)\}$, por tanto la existencia de $\mathcal{F}$ implica la posibilidad de reducir el fibrado principal $SO(M)$ al grupo estructural $\mathbf{SO}(p,\mathbf{R}) \times \mathbf{SO}(q,\mathbf{R})$.

Recíprocamente, si existe una reducción de $SO(M)$ a $\mathbf{SO}(p,\mathbf{R}) \times \mathbf{SO}(q,\mathbf{R})$ tenemos una trivialización

$$\begin{array}{ccc} \pi^{-1}(U_i) & \longrightarrow & U_i \times G \\ z & \longmapsto & (\pi(z), \varphi_i(z)) \end{array}$$

con $g_{ij}(x) = \varphi_i(z) \cdot \varphi_j(z)^{-1} \in \mathbf{SO}(p,\mathbf{R}) \times \mathbf{SO}(q,\mathbf{R})$. Cada $\varphi_k(z)$ es la expresión de la referencia representada por z en una determinada base ortonormal $\{e^k_1(x), \dots, e^k_n(x)\}$; entonces del hecho de que $g_{ij}(x)$ sea de $\mathbf{SO}(p,\mathbf{R}) \times \mathbf{SO}(q,\mathbf{R})$ se deduce que $\{e^i_1(x), \dots, e^i_p(x)\}$ y $\{e^j_1(x), \dots e^j_p(x)\}$ determinan un mismo subespacio en T_xM. Por tanto queda definido un campo de p-planos $\mathcal{F}$ por

$$\mathcal{F}|_{U_i} = \left\langle e^i_1(x), \dots, e^i_p(x) \right\rangle$$

■

Sean ω y Ω las formas de conexión y curvatura asociadas a la conexión de Levi-Civita de la variedad riemanniana (M, g). Son formas del fibrado de referencias $SO(M)$ a valores el álgebra de Lie $\mathfrak{so}(n,\mathbf{R})$ del grupo estructural $\mathbf{SO}(n,\mathbf{R})$.

Tenemos que

$$\mathfrak{so}(n,\mathbf{R}) = \{A \in \mathfrak{gl}(n,\mathbf{R}) \ : \ A^t = -A\}.$$

Si $p + q = n$ y A es una matriz de $\mathfrak{so}(n,\mathbf{R})$, entonces

$$A = \begin{pmatrix} a_1 & m \\ -m^t & a_2 \end{pmatrix}$$

con $a_1 \in \mathfrak{so}(p,\mathbf{R})$, $a_2 \in \mathfrak{so}(q,\mathbf{R})$ y $m \in \mathrm{Hom}(\mathbf{R}^q, \mathbf{R}^p)$. Por tanto, $\mathfrak{so}(n,\mathbf{R})$ admite la descomposición

$$\mathfrak{so}(n,\mathbf{R}) = \mathfrak{h} \oplus \mathfrak{m}$$

donde

$$\left.\begin{aligned} \mathfrak{h} &= \mathfrak{so}(p,\mathbf{R}) \oplus \mathfrak{so}(q,\mathbf{R}) \\ \mathfrak{m} &= \operatorname{Hom}(\mathbf{R}^q,\mathbf{R}^p) \end{aligned}\right\}$$

Los subespacios $\mathfrak{h}$ y $\mathfrak{m}$ satisfacen las relaciones siguientes

$$\begin{gathered} [\mathfrak{h},\mathfrak{m}] \subset \mathfrak{m}, \\ [\mathfrak{h},\mathfrak{h}] \subset \mathfrak{h}, \qquad\qquad [\mathfrak{m},\mathfrak{m}] \subset \mathfrak{h} \end{gathered} \tag{2.7}$$

Puesto que en M tenemos un campo de p-planos orientado $\mathcal{F}$, podemos considerar la restricción de las formas de conexión, curvatura y fundamental al fibrado de las referencias ortonormales directas y adaptadas a $\mathcal{F}$

$$i : SO(M,\mathcal{F}) \longrightarrow SO(M).$$

Haciendo un abuso de notación denotaremos a estas formas de la misma manera que en $SO(M)$, es decir, θ, ω y Ω.

Consideremos las descomposiciones

$$\begin{aligned} \omega &= \sigma + \pi \\ \Omega &= \Sigma + \Pi \end{aligned} \tag{2.8}$$

donde σ y Σ son elementos de $A(SO(M,\mathcal{F})) \otimes \mathfrak{m}$ y π y Π elementos de $A(SO(M,\mathcal{F})) \otimes \mathfrak{h}$.

Nótese que al cumplirse $R_g^* \cdot \omega = \operatorname{Ad}(g^{-1}) \circ \omega$, π es una forma de conexión para $SO(M,\mathcal{F})$ y σ es una forma tensorial.

Usando estas descomposiciones de ω y Ω, las ecuaciones de estructura

$$\left.\begin{aligned} d\omega + \frac{1}{2}\omega \wedge \omega &= \Omega \\ d\theta + \omega \wedge \theta &= 0 \end{aligned}\right\}$$

y la identidad de Bianchi

$$d\Omega = -\omega \wedge \Omega$$

resulta el lema siguiente

Lema 2.7 *Las formas θ, σ, Σ, π y Π satisfacen las ecuaciones*

$$\left.\begin{array}{rcl} d\theta + \pi \wedge \theta & = & -\sigma \wedge \theta \\ d\sigma + \pi \wedge \sigma & = & \Sigma \\ d\pi + \frac{1}{2}\pi \wedge \pi & = & \Pi - \frac{1}{2}\sigma \wedge \sigma \\ d\Sigma + \pi \wedge \Sigma & = & -\sigma \wedge \Pi \\ d\Pi + \pi \wedge \Pi & = & -\sigma \wedge \Sigma \end{array}\right\} \tag{2.9}$$

Por otra parte, si G es el grupo $\mathbf{SO}(n, \mathbf{R})$ y (E, σ) el G-módulo $\mathbf{R}^n$ con

$$\sigma : \mathbf{SO}(n, \mathbf{R}) \longrightarrow \mathbf{Gl}(n, \mathbf{R})$$

$$\overline{\sigma} : \mathfrak{so}(n, \mathbf{R}) \longrightarrow \mathfrak{gl}(n. \mathbf{R}),$$

las inclusiones naturales, el producto semidirecto $\tilde{G} = G \times_\sigma E$ es el grupo afín $ASO(n, \mathbf{R})$.

Hemos visto que $W(ASO(n, \mathbf{R}))$ es un álgebra diferencial graduada cuya diferencial quedaba determinada por las relaciones 2.5 entre formas θ_0 y Θ_0 de $\bigwedge^*(\mathbf{R}^n)^* \otimes \mathbf{R}^n$ y ω_0 y Ω_0 de $\bigwedge^* \mathfrak{so}(n, \mathbf{R})^* \otimes \mathfrak{so}(n, \mathbf{R})$. Consideramos la descomposición

$$\begin{array}{c} \omega_0 = \sigma_0 + \pi_0 \\ \Omega_0 = \Sigma_0 + \Pi_0 \end{array} \tag{2.10}$$

con $\sigma_0, \Sigma_0 \in \bigwedge^* \mathfrak{so}(n. \mathbf{R})^* \otimes \mathfrak{h}$ y $\pi_0, \Pi_0 \in \bigwedge^* \mathfrak{so}(n, \mathbf{R})^* \otimes \mathfrak{m}$.

Entonces, a partir de 2.5, tenemos

$$\left.\begin{array}{rcl} d\theta_0 + \pi_0 \wedge \theta_0 & = & -\sigma_0 \wedge \theta_0 \\ d\sigma_0 + \pi_0 \wedge \sigma_0 & = & \Sigma_0 \\ d\pi_0 + \frac{1}{2}\pi_0 \wedge \pi_0 & = & \Pi_0 - \frac{1}{2}\sigma_0 \wedge \sigma_0 \\ d\Sigma_0 + \pi_0 \wedge \Sigma_0 & = & -\sigma_0 \wedge \Pi_0 \\ d\Pi_0 + \pi_0 \wedge \Pi_0 & = & -\sigma_0 \wedge \Sigma_0 \end{array}\right\} \tag{2.11}$$

Recuérdese que en $W(ASO(n,\mathbf{R}))$ teníamos una estructura de $\mathbf{SO}(n,\mathbf{R})$-$DG$-álgebra; entonces, restringiendo la acción

$$\rho(g) : W(ASO(n,\mathbf{R})) \longrightarrow W(ASO(n,\mathbf{R}))$$

y la derivación

$$i(X) : W(ASO(n,\mathbf{R})) \longrightarrow W(ASO(n,\mathbf{R}))$$

a elememtos g de $\mathbf{SO}(p,\mathbf{R}) \times \mathbf{SO}(q,\mathbf{R})$ y X de $\mathfrak{so}(p,\mathbf{R}) \oplus \mathfrak{so}(q,\mathbf{R})$, tenemos de forma evidente una estructura de $\mathbf{SO}(p,\mathbf{R}) \times \mathbf{SO}(q,\mathbf{R})$-$DG$-álgebra sobre $W(ASO(n,\mathbf{R}))$ que denotaremos por W^*_{pq}.

Igual que antes, ahora consideramos el cociente W^*_{pq}/J, donde J es el ideal de W^*_{pq} que está generado por las componentes de Θ_0 y $d\Theta_0$. Pondremos $\widehat{W}^*_{pq}$ para esta nueva $\mathbf{SO}(p,\mathbf{R}) \times \mathbf{SO}(q,\mathbf{R})$-$DG$-álgebra. Previo al resultado principal establecemos el siguiente lema

Lema 2.8 *Sea P un espacio fibrado con base M, fibra F y proyección*

$$\pi : E \to M.$$

a) Si ω es una forma diferencial en M, entonces la forma en P $\pi^*\omega$ es básica (i.e. $i(X)\pi^*\omega = 0 = \mathcal{L}_X\pi^*\omega$).

b) Si Φ es una forma diferencial básica en P y la fibra F es conexa, entonces Φ proyecta sobre $A(M)$, es decir, hay una $\omega \in A(M)$ tal que $\pi^*\omega = \Phi$.

Demostración: El apartado a) es trivial, veamos el apartado b). Si $p \in M$ y $v_1, \ldots, v_n \in T_pM$ definimos

$$\omega(p; v_1, \ldots, v_n) = \Phi(z; w_1, \ldots, w_n)$$

con $\pi(z) = p$ y $\pi_* w_i = v_i$. Veamos que ω está bien definida.

Si $\pi_* w'_i = w_i$, entonces $\pi_*(w'_i - w_i) = 0$ y $w'_i = w_i + e_i$ con e_i cierto vector vertical. Entonces

$$\Phi(z, w_1, \ldots, w_n) = \Phi(z, w'_1, \ldots, w'_n)$$

pues Φ se anula sobre los vectores verticales.

Veamos ahora que no depende del z elegido. Para ello fijamos un $z \in P$, vectores $v_1, \ldots, v_n$ en $T_z P$ y consideramos el conjunto

$$\Omega_z = \{z' \in F_z : \Phi(z'; w_1, \ldots, w_n) = \Phi(z; v_1, \ldots, v_n) \text{ con } \pi_* w_i = \pi_* v_i\}$$

Ω_z no es vacío pues $z \in \Omega_z$ y es claramente un conjunto cerrado. Veamos que además es abierto.

Sea U un entorno trivializador alrededor de $\pi(z) = p$ con

$$\pi^{-1}(U) \cong U \times F$$

y (x, y) coordenadas locales de U y F respectivamente, entonces

$$\Phi = \Phi_{IJ} dx^I \wedge dy^J$$

pero, por ser la forma Φ básica, resulta que localmente es de la forma

$$\Phi = \Phi_I dx^I.$$

A partir de esta expresión local es claro que Ω_z es abierto. Por tanto, como que F es conexa, $\Omega_z = F_z$ y Φ está bien definida. ∎

Entonces tenemos el resultado siguiente

Proposición 2.3 (cf. [AL 78]) *Sea (M, g) una variedad riemanniana orientada, compacta y sin borde sobre la cual se ha dado un campo de p-planos $\mathcal{F}$ orientado. Asociado a $(M, \mathcal{F})$ hay un morfismo de* $\mathbf{SO}(p, \mathbf{R}) \times \mathbf{SO}(q, \mathbf{R})$*-DG-álgebras*

$$\varphi_{\mathcal{F}} : \widehat{W}^*_{pq} \longrightarrow A(SO(M, \mathcal{F})).$$

Y pasando a sus respectivos elementos básicos, da lugar a un morfismo de álgebras diferenciales graduadas

$$B\varphi_{\mathcal{F}} : B\widehat{W}^*_{pq} \longrightarrow A(M).$$

Demostración: Para construir $\varphi_{\mathcal{F}}$ basta con poner

$$\begin{array}{rcl} \varphi_{\mathcal{F}} : \widehat{W}^*_{pq} & \longrightarrow & A(SO(M, \mathcal{F})) \\ [\theta_0] & \longmapsto & \theta \\ [\omega_0] & \longmapsto & \omega \\ [\Omega_0] & \longmapsto & \Omega \end{array}$$

Obviamente es morfismo de $\mathsf{SO}(p,\mathbf{R}) \times \mathsf{SO}(q,\mathbf{R})$-$DG$-álgebras pues conserva las relaciones diferenciales (2.9 y 2.11), la derivación $i(X)$, la acción ρ y $\mathcal{L}_X$.

Los elementos básicos en una G–DG–álgebra son aquellos α tales que

$$i(X)\alpha = 0 = \mathcal{L}_X\alpha$$

por tanto todo morfismo de G–DG–álgebras preserva los elementos básicos. Así pues tenemos

$$B\varphi_{\mathcal{F}} : B\widehat{W}^*_{pq} \longrightarrow BA(SO(M,\mathcal{F}))$$

pero al ser el grupo $\mathsf{SO}(p,\mathbf{R}) \times \mathsf{SO}(q,\mathbf{R})$ conexo, por el lema 2.8 el conjunto de los elementos básicos de $A(SO(M,\mathcal{F}))$ es igual a $A(M)$ y el lema queda demostrado. ∎

Consideremos ahora en M el campo de n-planos trivial. Repitiendo el proceso anterior obtenemos la $\mathsf{SO}(n,\mathbf{R})$-$DG$-álgebra W_{n0} y al hacer cociente con J la $\mathsf{SO}(n,\mathbf{R})$-$DG$-álgebra $\widehat{W}^*_{n0}$. Como álgebras diferenciales graduadas $\widehat{W}^*_{pq}$ y $\widehat{W}^*_{n0}$ son el mismo conjunto, en cambio al considerar sus elementos básicos tan solo podemos afirmar que hay una inyección

$$j : B\widehat{W}^*_{n0} \longrightarrow B\widehat{W}^*_{pq}$$

pues los elementos básicos de $\widehat{W}^*_{n0}$ son básicos en $\widehat{W}^*_{pq}$ pero no al revés.

Por tanto, asociado a $(M,\mathcal{F})$ y la métrica g de M tenemos el diagrama conmutativo siguiente

$$\begin{tikzcd} B\widehat{W}^*_{n0} \arrow[rr, "j"] \arrow[dr, "B\varphi_M"'] & & B\widehat{W}^*_{pq} \arrow[dl, "B\varphi_{\mathcal{F}}"] \\ & A(M) & \end{tikzcd} \tag{2.12}$$

2.4 Fórmulas integrales

Igual que en la sección 2.3, aquí trataremos con variedades riemannianas M, orientadas y sin borde, sobre las cuales se tiene un campo de p-planos orientado $\mathcal{F}$.

Sea $\widehat{W}^*_{n0}$ la $\mathbf{SO}(n,\mathbf{R})$-$DG$-álgebra definida en la página 45. En $\mathfrak{so}(n,\mathbf{R})$ consideraremos la base $\{e_i^j\}$, con $i < j$, compuesta por las matrices de $\mathfrak{gl}(n,\mathbf{R})$ de la forma

$$\begin{pmatrix} 0 & \cdots & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & 1 & \vdots \\ \vdots & -1 & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & \cdots & 0 \end{pmatrix}$$

con el 1 en la fila i-columna j y el -1 en la fila j-columna i. En $\mathbf{R}^n$ la base canónica la denotamos por $\{e_1,\ldots,e_n\}$.

Con esta notación, las formas ω_0, Ω_0 de $\widehat{W}_{n0} \otimes \mathfrak{so}(n,\mathbf{R})$ y θ_0 de $\widehat{W}_{n0} \otimes \mathbf{R}^n$ se expresan como

$$\theta_0 = \sum_i \theta_0^i \otimes e_i$$

$$\Omega_0 = \sum_{i<j} \Omega_{0j}^i \otimes e_i^j \qquad\qquad \omega_0 = \sum_{i<j} \omega_{0j}^i \otimes e_i^j$$

Tenemos el siguiente resultado

Proposición 2.4 *Si α es la forma de $\widehat{W}_{n0}$ definida por*

$$\alpha = \sum_{i<j} (-1)^{i+j+1} \Omega_{0j}^i \wedge \theta_0^1 \wedge \ldots \wedge \hat{\theta}_0^i \wedge \ldots \wedge \hat{\theta}_0^j \wedge \ldots \wedge \theta_0^n$$

entonces α es un elemento básico ($\alpha \in B\widehat{W}_{n0}$).

NOTA: $\hat{\theta}_0^i$ indica que el término θ_0^i no está en la expresión.

Demostración: Hemos de comprobar que

$$\mathcal{L}_X \alpha = 0 = i(X)\alpha \qquad \forall X \in \mathfrak{so}(n,\mathbf{R}).$$

Puesto que $i(X)\Omega_0 = 0 = i(X)\theta_0$ (cf. lema 2.5) tenemos que $i(X)\alpha = 0$ y por tanto bastará con demostar que $\mathcal{L}_X\alpha = 0$, ahora bien

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_X \alpha &= i(X) \circ d\alpha + d \circ i(X)\alpha \\ &= i(X) \circ d\alpha \end{aligned}$$

y entonces el problema se reduce a comprobar que $i(X) \circ d\alpha$ es cero.

Durante el resto de la prueba y para evitar sobrecargar la notación pondremos Ω^i_j, θ^i y ω^i_j en vez de $\Omega^i_{0j}, \theta^i_0$ y ω^i_{0j} y escribiremos

$$d\eta_{ij} = \theta^1 \wedge \ldots \wedge \hat{\theta}^i \wedge \ldots \wedge \hat{\theta}^j \wedge \ldots \wedge \theta^n.$$

De las propiedades de la diferencial d, la antiderivación $i(X)$ y del hecho que $i(X)\eta_{ij} = 0 = i(X)\Omega^i_j$ tenemos las igualdades

$$\begin{aligned} i(X) \circ d\alpha &= i(X)d(\sum_{i<j}(-1)^{i+j+1}\Omega^i_j \wedge \eta_{ij}) \\ &= i(X)(\sum_{i<j}(-1)^{i+j+1}d\Omega^i_j \wedge \eta_{ij} + (-1)^{i+j+1}\Omega^i_j \wedge d\eta_{ij}) \\ &= \sum_{i<j}\left((-1)^{i+j+1}i(X)d\Omega^i_j \wedge \eta_{ij} + \Omega^i_j \wedge i(X)d\eta_{ij}\right). \end{aligned}$$

Por tanto nos dedicaremos a estudiar con detalle las expresiones $i(X)d\Omega^i_j$ e $i(X)d\eta_{ij}$.

Las formas Ω, ω y θ satisfacen las relaciones

$$\begin{aligned} d\Omega &= -\omega \wedge \Omega \\ d\theta &= -\omega \wedge \theta. \end{aligned}$$

Desarrollando la primera de ellas queda que

$$d\Omega^i_j = -\omega^i_k \wedge \Omega^k_j + \Omega^i_k \wedge \omega^k_j$$

mientras que al desarrollar la segunda

$$d\theta^i = -\omega^i_k \wedge \theta^k, \tag{2.13}$$

donde convenimos que $\Omega^j_i = -\Omega^i_j$ y $\omega^j_i = -\omega^i_j$ (y por tanto $\Omega^i_i = \omega^i_i = 0$).

Aplicando estos desarrollos se tiene que

$$i(X)d\Omega^i_j = -\omega^i_k(X)\Omega^k_j + \Omega^i_k\omega^k_j(X)$$

y como $\omega^i_j(X) = X^i_j$ (nótese que $X^j_i = -X^i_j$) queda

$$i(X)d\Omega^i_j = -X^i_k\Omega^k_j + \Omega^i_kX^k_j.$$

Supongamos, sin pérdida de generalidad, que X es un elemento e_p^q de la base de $\mathfrak{so}(n,\mathbf{R})$ que antes hemos considerado. Entonces X_k^i y X_j^k son nulos excepto en los casos

$$X_p^q = -1 \qquad \text{y} \qquad X_q^p = 1.$$

Por tanto, al ser $i < j$, la única posibilidad es que $i = p$ y $j = q$ pero en este caso

$$i(X)d\Omega_q^p = -X_q^p\Omega_q^q + \Omega_p^p X_q^p = 0.$$

ya que $\Omega_p^p = \Omega_q^q = 0$. Así pues, $i(X)d\Omega_j^i = 0$ para cualquier $X \in \mathfrak{so}(n,\mathbf{R})$.

Nos queda por estudiar

$$i(X) \circ d\alpha = \sum_{i<j}(-1)^{i+j+1}\Omega_j^i \wedge i(X)d\eta_{ij}.$$

Tenemos que

$$\begin{aligned} d\eta_{ij} &= d(\theta^1 \wedge \ldots \wedge \hat{\theta}^i \wedge \ldots \wedge \hat{\theta}^j \wedge \ldots \wedge \theta^n) \\ &= \sum_{r=1,\neq i,j}^{n} (-1)^{r+1}\epsilon_{ijk}\theta^1 \wedge \ldots d\theta^r \wedge \ldots \wedge \theta^n \end{aligned}$$

donde

$$\epsilon_{ijk} = \begin{cases} 1 & \text{si} \quad r < i \quad \text{o} \quad r > j \\ -1 & \text{si} \quad i < r < j \end{cases}$$

y usando la relación 2.13

$$d\eta_{ij} = \sum_{r=1;k}^{n} (-1)^r\epsilon_{ijk}\theta^1 \wedge \ldots \wedge \overbrace{\omega_k^r \wedge \theta^k}^{r} \wedge \ldots \wedge \theta^n.$$

Estudiemos la acción de X sobre un sumando típico

$$i(X)\theta^1 \wedge \ldots \wedge \overbrace{\omega_k^r \wedge \theta^k}^{r} \wedge \ldots \wedge \theta^n =$$

$$= (-1)^{r+1}\epsilon_{ijk}\theta^1 \wedge \ldots \wedge i(X)\overbrace{\omega_k^r \wedge \theta^k}^{r} \wedge \ldots \wedge \theta^n.$$

entonces

$$i(X)d\eta_{ij} = -\sum_{r,k} \theta^1 \wedge \ldots \wedge \overbrace{X_k^r \theta^k}^{r} \wedge \ldots \wedge \theta^n.$$

Cuando consideramos $X = e_p^q$ $(p < q)$, solo hay dos valores posibles para r y k que no hagan nulo X_k^r. Por tanto

$$\begin{aligned} i(X)d\eta_{ij} &= -\theta^1 \wedge \ldots \overbrace{\theta^q}^{p} \wedge \ldots \wedge \theta^n \\ &\quad +\theta^1 \wedge \ldots \overbrace{\theta^p}^{q} \wedge \ldots \wedge \theta^n \end{aligned}$$

lo cual siempre es cero ya que para que no lo fuera debería ser $i = p$ y $j = q$ cosa que es imposible pues estos lugares están ocupados por θ^q y θ^p respectivamente.

Concluimos entonces que $i(X)d\eta_{ij} = 0$ para todo X y el lema queda demostrado. ■

Proposición 2.5 *Sea* $B\varphi_M : B\widehat{W}_{n0}^* \rightarrow A(M)$ *la aplicación definida en la sección anterior, entonces*

$$B\varphi_M \cdot \alpha = \frac{1}{2}\tau_M \cdot \nu$$

donde τ_M *es la curvatura escalar y* ν *el elemento de volumen en* M *relativos a la métrica* g.

Demostración: Sean ahora θ la forma fundamental en el fibrado principal de las referencias ortonormales directas en M $SO(M)$ y ω y Ω las formas de conexión y curvatura asociadas a g. Tenemos que

$$\varphi_M : \widehat{W}_{n0}^* \longrightarrow A(SO(M))$$

induce aplicaciones

$$\varphi_M \otimes id_{\mathfrak{so}(n,\mathbf{R})} : \widehat{W}_{n0}^* \otimes \mathfrak{so}(n,\mathbf{R}) \longrightarrow A(SO(M)) \otimes \mathfrak{so}(n,\mathbf{R})$$

y

$$\varphi_M \otimes id_{\mathbf{R}^n} : \widehat{W}_{n0}^* \otimes \mathbf{R}^n \longrightarrow A(SO(M)) \otimes \mathbf{R}^n$$

tales que

$$\varphi_M \otimes id_{\mathbf{R}^n}(\theta_0) = \theta$$

$$\varphi_M \otimes id_{\mathbf{so}(n,\mathbf{R})}(\omega_0) = \omega \qquad\qquad \varphi_M \otimes id_{\mathbf{so}(n,\mathbf{R})}(\Omega_0) = \Omega.$$

El hecho de que α sea básica en $\widehat{W}^*_{n0}$ implica que $\varphi_M\alpha$ define una forma global en $A(M)$. Como $B\varphi_M\alpha$ es una n-forma, se tiene que $B\varphi_M\alpha = f\nu$, para una cierta función f a determinar.

Para ello consideremos la proyección habitual $\pi : SO(M) \to M$ y una sección local $\sigma : U \to SO(M)$ es decir, σ es una aplicación tal que

$$\sigma(p) = (e_1(p), \ldots, e_n(p))$$

es una base ortonormal directa de T_pM para cada p de U. Tenemos entonces que

$$B\varphi_M \cdot \alpha = \sigma^*(\varphi_M \cdot \alpha)$$

sobre U. En efecto, si $p \in U$ y $v_1, \ldots, v_n \in T_pM$ tenemos que

$$(B\varphi_M \cdot \alpha)(p, v_1, \ldots, v_n) = \varphi_M \cdot \alpha(z, w_1, \ldots, w_n)$$

cuando $\pi(z) = p$ y $\pi_*(w_i) = v_i$ y que

$$(\sigma^*\varphi_M \cdot \alpha)(z, v_1, \ldots, v_n) = (\varphi_M \cdot \alpha)(\sigma(p), \sigma_* v_1, \ldots . \sigma_* v_n).$$

Por tanto $B\varphi_M \cdot \alpha = \sigma^*(\varphi_M \cdot \alpha)$ sobre U.

Para determinar f bastará que evaluemos $(\sigma^*\varphi_M \cdot \alpha)(p, e_1(p), \ldots, e_n(p))$. Aligerando la notación pondremos θ^i, ω^i_j y Ω^i_j en vez de $\sigma^*\theta^i$, $\sigma^*\omega^i_j$ y $\sigma^*\Omega^i_j$.

Sabemos que

$$\Omega^i_j = \frac{1}{2}\sum_{k,l} R^i_{jkl}\theta^k \wedge \theta^l,$$

entonces

$$\begin{aligned}
\sigma^*(\varphi_M \cdot \alpha) &= \sum_{i<j}(-1)^{i+j+1}\left[\frac{1}{2}R^i_{jij}\theta^i \wedge \theta^j + \frac{1}{2}R^i_{jji}\theta^j \wedge \theta^i\right] \wedge \eta_{ij} \\
&= \sum_{i<j} R^i_{jij}\nu = \frac{1}{2}\tau_M \nu
\end{aligned}$$

como queríamos demostrar. ■

Teorema 2.2 *Sea el diagrama conmutativo 2.12:*

$$\begin{array}{ccc} B\widehat{W}^*_{n0} & \xrightarrow{j} & B\widehat{W}^*_{pq} \\ B\varphi_M \searrow & & \swarrow B\varphi_{\mathcal{F}} \\ & A(M) & \end{array}$$

entonces, si α es como antes

$$B\varphi_{\mathcal{F}} \cdot j(\alpha) = \left[\frac{1}{2}(\tau_{\mathcal{F}} + \tau_{\mathcal{H}}) + 2(\sigma_{2,\mathcal{F}} + \sigma_{2,\mathcal{H}} + \|A_{\mathcal{F}}\|^2 + \|A_{\mathcal{H}}\|^2)\right] \nu + d\zeta$$

donde $\tau_{\mathcal{F}}$ y $\tau_{\mathcal{H}}$ son las curvaturas escalares de los campos de planos $\mathcal{F}$ y $\mathcal{F}^{\perp} = \mathcal{H}$, $\sigma_{2,\star}$ las funciones simétricas de curvatura de orden 2 y $A_\star$ los tensores de integrabilidad (cf. capítulo 1).

Demostración: En $A(SO(M,\mathcal{F})) \otimes (\mathfrak{h} \oplus \mathfrak{m})$ consideramos las descomposiciones habituales

$$\left.\begin{array}{l} \Omega = \Sigma + \Pi \\ \omega = \sigma + \pi \end{array}\right\}$$

con Σ, σ de $A(SO(M,\mathcal{F})) \otimes \mathfrak{h}$ y Π, π de $A(SO(M,\mathcal{F})) \otimes \mathfrak{m}$.

<u>Paso 1</u>. Si ponemos

$$\begin{aligned} \alpha_1 &= \sum_{A<B} (-1)^{A+B+1} \Pi^A_B \wedge \eta_{AB} \\ \alpha_2 &= \sum_{\alpha<\beta} (-1)^{\alpha+\beta+1} \Pi^\alpha_\beta \wedge \eta_{\alpha\beta} \\ \alpha_3 &= \sum_{A,\alpha} (-1)^{A+\alpha+1} \Sigma^A_\alpha \wedge \eta_{A\alpha} \end{aligned}$$

con $A, B, C, \ldots$ variando en $\{1, \ldots, p\}$, $\alpha, \beta, \gamma, \ldots$ en $\{p+1, \ldots, n\}$ e $i, j, k, \ldots$ en $\{1, \ldots, n\}$ tenemos que

$$\alpha_1 = \frac{1}{2}\tau_{\mathcal{F}} \cdot \nu \quad \text{y} \quad \alpha_2 = \frac{1}{2}\tau_{\mathcal{H}} \cdot \nu.$$

Para verlo basta darse cuenta de que localmente

$$\left.\begin{array}{rcl} \Pi_B^A & = & \frac{1}{2}\sum_{k,l} R_{Bkl}^A \theta^k \wedge \theta^l \\ \Pi_\beta^\alpha & = & \frac{1}{2}\sum_{k,l} R_{\beta kl}^\alpha \theta^k \wedge \theta^l \end{array}\right\}$$

y proceder como en la proposición anterior.

<u>PASO 2</u>. Usando la identidad

$$\Sigma_\alpha^A = d\sigma_\alpha^A + \sum_B \pi_B^A \wedge \sigma_\alpha^B + \sum_\beta \sigma_\beta^A \wedge \pi_\alpha^\beta$$

(que proviene de $\Omega_j^i = d\omega_j^i + \sum_k \omega_k^i \wedge \omega_j^k$) tenemos que

$$\begin{aligned} \alpha_3 &= \sum_{A,\alpha}(-1)^{A+\alpha+1} d\sigma_\alpha^A \wedge \eta_{A\alpha} && (2.14)\\ &+ \sum_{A,B,\alpha}(-1)^{A+\alpha+1}\pi_B^A \wedge \sigma_\alpha^B \wedge \eta_{A\alpha} && (2.15)\\ &+ \sum_{A,B,\alpha}(-1)^{A+\alpha+1}\sigma_\beta^A \wedge \pi_\alpha^\beta \wedge \eta_{A\alpha} && (2.16)\end{aligned}$$

Estos términos los denotaremos por Φ_1, Φ_2 y Φ_3 respectivamente.

Puesto que

$$\begin{aligned} \Phi_3 &= \sum_{A,\alpha}(-1)^{A+\alpha+1} d\sigma_\alpha^A \wedge \eta_{A\alpha} \\ &= \sum_{A,\alpha}(-1)^{A+\alpha+1}\left[d(\sigma_\alpha^A \wedge \eta_{A\alpha}) + \sigma_A^\alpha \wedge d\eta_{A\alpha}\right] \\ &= \sum_{A,\alpha}(-1)^{A+\alpha+1}\sigma_\alpha^A \wedge d\eta_{A\alpha} + d\zeta \end{aligned}$$

el estudio de Φ_3 pasa pues por considerar la expresión

$$\Phi = \sum_{A,\alpha}(-1)^{A+\alpha+1}\sigma_\alpha^A \wedge d\eta_{A\alpha}.$$

Si

$$\epsilon_{ijk} = \begin{cases} 1 & \text{si } \ k > j \text{ o } k < i \\ -1 & \text{si } \ i < k < j \end{cases}$$

podemos poner

$$\begin{aligned}
d\eta_{A\alpha} &= \sum_r (-1)^{r+1}\epsilon_{A\alpha r}\theta^1 \wedge \ldots \wedge d\theta^r \wedge \ldots \wedge \theta^n \\
&= \sum_{r,k} (-1)^r \epsilon_{A\alpha r}\omega_k^r \wedge \theta^r \wedge \theta^1 \wedge \ldots \wedge \theta^n \\
&= \sum_r (-1)^r \epsilon_{A\alpha r}\omega_A^r \wedge \theta^A \wedge \theta^1 \wedge \ldots \wedge \theta^n \\
&\quad + \sum_r (-1)^r \epsilon_{A\alpha r}\omega_\alpha^r \wedge \theta^\alpha \wedge \theta^1 \wedge \ldots \wedge \theta^n
\end{aligned}$$

(en el producto $\theta^1 \wedge \ldots \wedge \theta^n$ faltan las formas θ^A, θ^α y θ^r) y si

$$\delta_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{si} \quad i < j \\ -1 & \text{si} \quad i > j \end{cases}$$

tenemos que

$$\begin{aligned}
d\eta_{A\alpha} &= \sum_r (-1)^{A+r+1}\epsilon_{A\alpha r}\delta_{Ar}\omega_A^r \wedge \eta_{\alpha r} \\
&\quad + \sum_r (-1)^{\alpha+r}\epsilon_{A\alpha r}\delta_{\alpha r}\omega_\alpha^r \wedge \eta_{Ar}.
\end{aligned}$$

Ahora el término Φ lo descomponemos en los dos sumandos Φ_1 y Φ_2 siguientes

$$\begin{aligned}
\Phi_1 &= \sum_{A,\alpha,r} (-1)^{\alpha+r}\epsilon_{A\alpha r}\delta_{Ar}\sigma_\alpha^A \wedge \omega_A^r \wedge \eta_{\alpha r} \\
\Phi_2 &= \sum_{A,\alpha,r} (-1)^{A+r+1}\epsilon_{A\alpha r}\delta_{\alpha r}\sigma_\alpha^A \wedge \omega_\alpha^r \wedge \eta_{Ar}.
\end{aligned}$$

Obsérvese que si $r \in \{1, \ldots, p\}$ ω_A^r es π_A^r y ω_α^r es σ_α^r y si $r \in \{p+1, \ldots, n\}$ ω_A^r es σ_A^r y ω_α^r es π_α^r. Con ésto y los índices adecuados

$$\begin{aligned}
\Phi_1 &= \sum_{A,\alpha}\sum_B (-1)^{\alpha+B}\epsilon_{A\alpha B}\delta_{AB}\sigma_\alpha^A \wedge \pi_A^B \wedge \eta_{\alpha B} \\
&\quad + \sum_{A,\alpha}\sum_\beta (-1)^{\alpha+\beta}\epsilon_{A\alpha\beta}\delta_{A\beta}\sigma_\alpha^A \wedge \sigma_A^\beta \wedge \eta_{\alpha\beta}
\end{aligned}$$

y como que

$$\epsilon_{A\alpha B} = -\delta_{AB}, \quad \epsilon_{A\alpha\beta} = \delta_{\alpha\beta} \quad \text{y} \quad \delta_{A\beta} = 1$$

queda

$$\begin{aligned}
\Phi_1 &= \sum_{A,\alpha,B} (-1)^{\alpha+B+1} \sigma_\alpha^A \wedge \pi_A^B \wedge \eta_{\alpha B} \\
&+ \sum_{A,\alpha,\beta} (-1)^{\alpha+\beta} \delta_{\alpha\beta} \sigma_\alpha^A \wedge \sigma_A^\beta \wedge \eta_{\alpha\beta}
\end{aligned}$$

Mediante un procedimiento análogo obtenemos la siguiente expresión para la parte Φ_2

$$\begin{aligned}
\Phi_2 &= \sum_{A,\alpha,\beta} (-1)^{A+\beta+1} \sigma_\alpha^A \wedge \pi_\alpha^\beta \wedge \eta_{A\beta} \\
&+ \sum_{A,\alpha,B} (-1)^{A+B+1} \delta_{AB} \sigma_\alpha^A \wedge \sigma_\alpha^B \wedge \eta_{AB}
\end{aligned}$$

Entonces, separando los casos según sea $\alpha < \beta$ o $\alpha > \beta$ y $A < B$ o $A > B$ en los términos de Φ_1 y Φ_2 en los que aparecen $\delta_{\alpha\beta}$ y δ_{AB}, tenemos que Φ se puede expresar como

$$\begin{aligned}
\Phi &= 2 \sum_{A<B,\alpha} (-1)^{A+B+1} \sigma_\alpha^A \wedge \sigma_\alpha^B \wedge \eta_{AB} \\
&+2 \sum_{\alpha<\beta,A} (-1)^{\alpha+\beta+1} \sigma_A^\alpha \wedge \sigma_A^\beta \wedge \eta_{\alpha\beta} \\
&+ \sum_{A<B,\alpha} (-1)^{A+\alpha} \pi_B^A \wedge \sigma_\alpha^B \wedge \eta_{A\alpha} \\
&+ \sum_{\alpha<\beta,A} (-1)^{\alpha+A} \sigma_\beta^A \wedge \pi_\alpha^\beta \wedge \eta_{A\alpha}
\end{aligned}$$

donde los dos últimos términos se cancelan con los dos primeros sumandos de la expresión de α_3 en la página 52. De aquí concluimos que

$$\alpha_3 = 2 \left[\sum_{A<B,\alpha} (-1)^{A+B+1} \sigma_\alpha^A \wedge \sigma_\alpha^B \wedge \eta_{AB} + \sum_{\alpha<\beta,A} (-1)^{\alpha+\beta+1} \sigma_A^\alpha \wedge \sigma_A^\beta \wedge \eta_{\alpha\beta} \right] + d\zeta.$$

<u>Paso 3</u>. Ahora estudiamos los términos

$$\left.\begin{aligned}
\Phi_{\mathcal{F}} &= \sum_{A<B,\alpha} (-1)^{A+B+1} \sigma_\alpha^A \wedge \sigma_\alpha^B \wedge \eta_{AB} \\
\Phi_{\mathcal{H}} &= \sum_{\alpha<\beta,A} (-1)^{\alpha+\beta+1} \sigma_A^\alpha \wedge \sigma_A^\beta \wedge \eta_{\alpha\beta}
\end{aligned}\right\}$$

Si ponemos $\sigma_\alpha^A = \sum_k \lambda_{\alpha k}^A \theta^k$

$$\begin{aligned}
\Phi_{\mathcal{F}} &= \sum_{A<B,\alpha} (-1)^{A+B+1} \lambda_{\alpha k}^A \lambda_{\alpha r}^B \theta^k \wedge \theta^r \wedge \eta_{AB} \\
&= \sum_{A<B,\alpha} (-1)^{A+B+1} (\lambda_{\alpha A}^A \lambda_{\alpha B}^B - \lambda_{\alpha B}^A \lambda_{\alpha A}^B) \theta^A \wedge \theta^B \wedge \eta_{AB} \\
&= \sum_{A<B,\alpha} (\lambda_{\alpha A}^A \lambda_{\alpha B}^B - \lambda_{\alpha B}^A \lambda_{\alpha A}^B) \cdot \nu
\end{aligned}$$

y de forma análoga, para $\Phi_{\mathcal{H}}$ tenemos la igualdad

$$\Phi_{\mathcal{H}} = \sum_{\alpha<\beta,A} (\lambda_{A\alpha}^\alpha \lambda_{A\beta}^\beta - \lambda_{A\beta}^\alpha \lambda_{A\alpha}^\beta) \cdot \nu.$$

Recordemos que los tensores fundamental $S_{\mathcal{F}}$ y de integrabilidad $A_{\mathcal{F}}$ evaluados sobre campos tangentes a $\mathcal{F}$ nos daban

$$\begin{aligned}
S_{\mathcal{F}}(e_A. e_B) &= \frac{1}{2} v(\nabla_{e_A} e_B + \nabla_{e_B} e_A) \\
A_{\mathcal{F}}(e_A, e_B) &= \frac{1}{2} v(\nabla_{e_A} e_B - \nabla_{e_B} e_A),
\end{aligned}$$

(análogamente para $\tau_{\mathcal{F}}$ y $\tau_{\mathcal{H}}$). Entonces si ponemos

$$S_{\mathcal{F}}(e_A, e_B) = \sum_\alpha S_{AB}^\alpha \cdot e_\alpha, \quad A_{\mathcal{F}}(e_A, e_B) = \sum_\alpha a_{AB}^\alpha \cdot e_\alpha$$

resulta que

$$\begin{aligned}
S_{AB}^\alpha + a_{AB}^\alpha &= g(v(\nabla_{e_A} e_B), e_\alpha) \\
&= g(\nabla_{e_A} e_B, e_\alpha)
\end{aligned}$$

pero

$$\lambda_{\alpha A}^B = g(\nabla_{e_A} e_\alpha, e_B) = -g(\nabla_{e_A} e_B, e_\alpha)$$

por tanto,

$$\lambda_{\alpha A}^B = -(S_{AB}^\alpha + a_{AB}^\alpha).$$

Sustituimos esta expresión de $\lambda_{\alpha A}^B$ en el término típico de $\Phi_{\mathcal{F}}$ y teniendo en cuenta que

$$a_{AB}^\alpha = -a_{BA}^\alpha \quad \text{y} \quad S_{AB}^\alpha = S_{BA}^\alpha$$

obtenemos

$$\begin{aligned}
\lambda^A_{\alpha A}\lambda^B_{\alpha B} &- \lambda^A_{\alpha B}\lambda^B_{\alpha A} = \\
&= (S^\alpha_{AA} + a^\alpha_{AA})(S^\alpha_{BB} + a^\alpha_{BB}) - (S^\alpha_{AB} + a^\alpha_{AB})(S^\alpha_{BA} + a^\alpha_{BA}) \\
&= (S^\alpha_{AA}S^\alpha_{BB} - S^\alpha_{AB}S^\alpha_{BA}) + (a^\alpha_{AB})^2.
\end{aligned}$$

Entonces

$$\begin{aligned}
\Phi_{\mathcal{F}} &= \left[\sum_{A<B,\alpha}(S^\alpha_{AA}S^\alpha_{BB} - S^\alpha_{AB}S^\alpha_{BA}) + \sum_{A<B,\alpha}(a^\alpha_{AB})^2\right]\cdot\nu \\
&= \left[\sum_{A<B,\alpha}(S^\alpha_{AA}S^\alpha_{BB} - (S^\alpha_{AB})^2) + \sum_{A<B,\alpha}(a^\alpha_{AB})^2\right]\cdot\nu \\
&= \left[\sum_{\alpha}\{(\mathrm{tr}S^\alpha)^2 - \mathrm{tr}(S^\alpha)^2\} + \sum_{A<B,\alpha}(a^\alpha_{AB})^2\right]\cdot\nu \\
&= (\sigma_{2,\mathcal{F}} + \|A_{\mathcal{F}}\|^2)\cdot\nu
\end{aligned}$$

y de forma similar tenemos

$$\Phi_{\mathcal{H}} = (\sigma_{2,\mathcal{H}} + \|A_{\mathcal{H}}\|^2)\cdot\nu.$$

Sustituyendo estos valores de $\Phi_{\mathcal{F}}$ y $\Phi_{\mathcal{H}}$ en α_3 y usando las igualdades deducidas en el paso 1 concluimos que

$$B\varphi_{\mathcal{F}}\cdot j(\alpha) = \left[\frac{1}{2}(\tau_{\mathcal{F}} + \tau_{\mathcal{H}}) + 2(\sigma_{2,\mathcal{F}} + \sigma_{2,\mathcal{H}} + \|A_{\mathcal{F}}\|^2 + \|A_{\mathcal{H}}\|^2)\right]\nu + d\zeta$$

que es lo que queríamos demostrar. ■

Combinando los dos últimos resultados y el hecho de que el diagrama

$$\begin{array}{ccc}
B\widehat{W}^*_{n0} & \xrightarrow{j} & B\widehat{W}^*_{pq} \\
B\varphi_M \searrow & & \swarrow B\varphi_{\mathcal{F}} \\
& A(M) &
\end{array}$$

es conmutativo tenemos el

Corolario 2.1 *Sea (M,g) variedad riemanniana oorientada y sin borde. Si $\mathcal{F}$ es una campo de p-planos en M y $\mathcal{H}$ el campo oortogonal a $\mathcal{F}$, entonces*

$$\frac{1}{2}\tau_M \cdot \nu = \left[\frac{1}{2}(\tau_{\mathcal{F}} + \tau_{\mathcal{H}}) + 2(\sigma_{2,\mathcal{F}} + \sigma_{2,\mathcal{H}} + \|A_{\mathcal{F}}\|^2 + \|A_{\mathcal{H}}\|^2)\right] \nu + d\zeta \quad (2.17)$$

donde

1. *τ_M es la curvatura escalar en M*

$$\tau_M = \sum_{i,j} g(R(e_i, e_j)e_j, e_i)$$

2. *$\tau_{\mathcal{F}}$ y $\tau_{\mathcal{H}}$ son las curvaturas escalares de $\mathcal{F}$ y $\mathcal{H}$* desde M *(i.e. no intrínsecas a $\mathcal{F}$ y $\mathcal{H}$)*

$$\tau_{\mathcal{F}} = \sum_{A,B} g(R(e_A, e_B)e_B, e_A), \quad \tau_{\mathcal{H}} = \sum_{\alpha,\beta} g(R(e_\alpha, e_\beta)e_\beta, e_\alpha)$$

3. $$\sigma_{2,\mathcal{F}} = \frac{1}{2}\sum_{\alpha}\{(\mathrm{tr}S^\alpha_{\mathcal{F}})^2 - \mathrm{tr}(S^\alpha_{\mathcal{F}})^2\}$$

   con $(S_{\mathcal{F}})_{AB} = g(S_{\mathcal{F}}(e_A, e_B), e_\alpha)$ (idem para $\sigma_{2,\mathcal{H}}$ cambiando los índices de sumación).

4. $$\|A_{\mathcal{F}}\|^2 = \sum_{A<B}(a^\alpha_{AB})^2$$

   con $a^\alpha_{AB} = g(A_{\mathcal{F}}(e_A, e_B), e_\alpha)$ (idem para $\|A_{\mathcal{H}}\|^2$ cambiando los índices de sumación)

En el capítulo 1 (cf. página 8) definíamos la curvaatura seccional inducida por g en $\mathcal{F}$ la cual denotábamos por $\tau'_{\mathcal{F}}$ (resp. $\mathcal{H}$ y $\tau'_{\mathcal{H}}$).

Para obtener nuevas fórmulas al estilo de 2.17 veamos que relaciones existen entre estas curvaturas $\tau'_\star$ y $\tau_\star$.

Proposición 2.6 (Ecuación de Gauss para campos de planos). *Si X, Y, Z, W son campos vectoriales pertenecientes a $\mathcal{F}$, entonces:*

$$\begin{aligned} g(R(X,Y)Z,W) &= g(R'(X,Y)Z,W) \\ &\quad + g(\alpha(X,Z),\alpha(Y,W)) - g(\alpha(Y,Z),\alpha(X,W)) \end{aligned}$$

(siendo $\alpha(X,Y) = v(\nabla_X Y)$, $R'(X,Y)Z = \nabla'_X\nabla'_Y Z - \nabla'_Y\nabla'_X Z - \nabla'_{[X,Y]}Z$ y $\nabla'_X Y = h(\nabla_X Y)$)

Demostración: Si $\mathcal{F}$ define una foliación, la proposición a demostrar es un caso particular de la clásica ecuación de Gauss para subvariedades.

Usando la descomposición $\nabla_X Y = h(\nabla_X Y) + v(\nabla_X Y)$ resulta

$$\nabla_X\nabla_Y Z = \nabla'_X\nabla'_Y Z + h\nabla_X v\nabla_Y Z + v\nabla_X\nabla_Y Z$$

y

$$\nabla_{[X,Y]}Z = \nabla'_{[X,Y]}Z + v\nabla_{[X,Y]}Z$$

entonces tenemos que

$$\begin{aligned} R(X,Y)Z &= R'(X,Y)Z + h(\nabla_X v\nabla_Y Z - \nabla_Y v\nabla_X Z) \\ &\quad + \text{“términos tangentes a } \mathcal{H}\text{”}. \end{aligned}$$

Por lo tanto

$$\begin{aligned} g(R(X,Y)Z,W) &= g(R(X,Y)Z,W) \\ &\quad + g(h(\nabla_X v\nabla_Y Z - \nabla_Y v\nabla_X Z),W). \end{aligned}$$

El segundo sumando a la derecha de la anterior igualdad es

$$\begin{gathered} g(h(\nabla_X v\nabla_Y Z - \nabla_Y v\nabla_X Z),W) = \\ = g(\nabla_X v\nabla_Y Z,W) - g(\nabla_Y v\nabla_X Z.W) \end{gathered}$$

y como

$$\begin{aligned} g(\nabla_X v\nabla_Y Z,W) &= X\cdot g(v\nabla_Y Z,W) - g(v\nabla_Y Z,\nabla_X W) \\ &= -g(\alpha(Y,Z),\alpha(X,W)) \end{aligned}$$

y

$$\begin{aligned} g(\nabla_Y v \nabla_X Z, W) &= Y \cdot g(v\nabla_X Z, W) - g(v\nabla_X Z, \nabla_Y W) \\ &= -g(\alpha(X,Z), \alpha(Y,W)) \end{aligned}$$

la fórmula queda demostrada. ∎

Como consecuencia tenemos las relaciones siguientes

Proposición 2.7

$$\left.\begin{aligned} \tau_{\mathcal{F}} &= \tau'_{\mathcal{F}} - 2 \cdot (\sigma_{2,\mathcal{F}} + \|A_{\mathcal{F}}\|^2) \\ \tau_{\mathcal{H}} &= \tau'_{\mathcal{H}} - 2 \cdot (\sigma_{2,\mathcal{H}} + \|A_{\mathcal{H}}\|^2) \end{aligned}\right\}$$

Demostración: Tenemos que

$$k_{AB} = g(R(e_A, e_B)e_B, e_A)$$

entonces, por la ecuación de Gauss antes probada, resulta que

$$\begin{aligned} k_{AB} &= k'_{AB} + g(\alpha(e_A, e_B), \alpha(e_B, e_A)) \\ &\quad + g(\alpha(e_A, e_A), \alpha(e_B, e_B)) \end{aligned}$$

pero

$$\begin{aligned} \alpha(e_A, e_B) &= v(\nabla_{e_A} e_B) \\ &= (A_{\mathcal{F}} + S_{\mathcal{F}})(e_A, e_B) = \sum_\alpha (S^\alpha_{AB} + a^\alpha_{AB}) e_\alpha \end{aligned}$$

entonces

$$\begin{aligned} g(\alpha(e_A, e_B), \alpha(e_B, e_A)) &= \sum_\alpha (S^\alpha_{AB} + a^\alpha_{AB})(S^\alpha_{BA} + a^\alpha_{BA}) \\ &= \sum_\alpha \left[(S^\alpha_{AB})^2 - (a^\alpha_{AB})^2 \right] \end{aligned}$$

y

$$g(\alpha(e_A, e_A), \alpha(e_B, e_B)) = \sum_\alpha S^\alpha_{AA} S^\alpha_{BB}.$$

En definitiva tenemos las relacioness

$$k_{AB} = k'_{AB} - \sum_{\alpha} \left[S^{\alpha}_{AA} S S^{\alpha}_{BB} - (S^{\alpha}_{AB})^2 \right] - \sum_{\alpha} (a_{AB})^2$$

que al sumarlas para todo A y B daan lugar a la relación que buscábamos

$$\tau_{\mathcal{F}} = \tau'_{\mathcal{F}} - 2 \cdot (\sigma_{2,\mathcal{F}} + \|A_{\mathcal{F}}\|^2).$$

Para la relación entre $\tau_{\mathcal{H}}$ y $\tau'_{\mathcal{H}}$ proceedemos de forma similar. ∎

Corolario 2.2 *Sea (M,g) variedad riemanniana orientada y sin borde. Si $\mathcal{F}$ es una campo de p-planos en M yy $\mathcal{H}$ el campo ortogonal a $\mathcal{F}$, entonces*

$$\frac{1}{2}\tau_M \cdot \nu = \left[\frac{1}{2}(\tau'_{\mathcal{F}} + \tau'_{\mathcal{H}}) + \sigma_{2,\mathcal{F}} + \sigma_{2,\mathcal{H}} + \|A_{\mathcal{F}}\|^2 + \|A_{\mathcal{H}}\|^2 \right] \nu + d\zeta \qquad (2.18)$$

Demostración: Basta sustituir en la fórmula 2.17 las relaciones $\tau_{\mathcal{F}} = \tau'_{\mathcal{F}} - 2 \cdot (\sigma_{2,\mathcal{F}} + \|A_{\mathcal{F}}\|^2)$ y $\tau_{\mathcal{H}} = \tau'_{\mathcal{H}} - 2 \cdot (\sigma_{2,\mathcal{H}} + \|A_{\mathcal{H}}\|^2)$ demostradas en el lema anterior. ∎

Una diferencia importante de essta fórmula con respecto a 2.17 es que ahora en la parte derecha de la igualdad la curvatura seccional de los campos de planos $\mathcal{F}$ y $\mathcal{H}$ es con respecto a la métrica propia inducida por g (pensemos por ejemplo en $\mathcal{F}$ y $\mathcal{H}$ como fibrados vectoriales con estructura riemanniana). Así pues, además del término exacto, tenemos tres tipos de términos: unos relativos a la curvatura intrínseca (τ'), otros relacionados con la manera en *cómo* están inmersos $\mathcal{F}$ y $\mathcal{H}$ en M desede un punto de vista métrico (σ proviene de la segunda forma fundamental) y por último los términos que determinan la integrabilidad ($\|A\|^2$).

Antes de pasar a ver algunas de las fórmulas integrales que inducen las relaciones hasta ahora obtenidas, anaalizaremos el término exacto $d\zeta$ de 2.17 sin lo cual nuestro análisis no estaría completo.

Para cada campo vectorial X de M la divergencia de X, denotada por $\mathrm{div}(X)$, es una función sobre M definida por

$$\mathrm{div}(X) \cdot \nu = \mathcal{L}_X \nu.$$

Vamos a buscar un $X \in \mathcal{X}(M)$ tal que

$$d\zeta = \mathrm{div}(X) \cdot \nu$$

para lo cual pondremos $X = \sum_i x^i e_i$ y $\zeta = \sum_i z_i \eta_i$. siendo $\{e_i\}$ la base ortonormal adaptada habitual y $\eta_i = \theta^1 \wedge \ldots \wedge \hat{\theta^i} \wedge \ldots \wedge \theta^n$ con $\{\theta^i\}$ base dual de $\{e_i\}$. Entonces

$$d\zeta = \mathcal{L}_X \nu = d \circ i(X)\nu + i(X) \circ d\nu$$

y al ser $d\nu = 0$, imponiendo que $i(X)\nu$ se igual a ζ, obtendremos relaciones para determinar las componentes del vector X en la base $\{e_i\}$.

$$\begin{aligned}
[i(X)\nu](e_1, \ldots, \hat{e}_i, \ldots, e_n) &= n \cdot \nu(X, e_1, \ldots, \hat{e}_i, \ldots, e_n) \\
&= n \cdot \nu(\sum_k x^k e_k, e_1, \ldots, \hat{e}_i, \ldots, e_n) \\
&= n(-1)^{i+1} \frac{x^i}{n!} = (-1)^{i+1} \frac{x^i}{(n-1)!}
\end{aligned}$$

y al ser

$$\zeta(e_1 \ldots, \hat{e}_i, \ldots, e_n) = \frac{z_i}{(n-1)!}$$

podemos tomar $x^i = (-1)^{i+1} z_i$ (aquí la i no suma).

Recuérdese que

$$\zeta = \sum_{A,\alpha} (-1)^{A+\alpha+1} \sigma_\alpha^A \wedge \eta_{A\alpha}$$

entonces si $\sigma_\alpha^A = \lambda_{\alpha k}^A \theta^k$, tenemos que

$$\begin{aligned}
\sigma_\alpha^A \wedge \eta_{A\alpha} &= \sum_k \lambda_{\alpha k}^A \theta^k \wedge \eta_{A\alpha} \\
&= \lambda_{\alpha A}^A \theta^A \wedge \eta_{A\alpha} + \lambda_{\alpha\alpha}^A \theta^\alpha \wedge \eta_{A\alpha} \\
&= (-1)^{A+1} \lambda_{\alpha A}^A \eta_\alpha + (-1)^\alpha \lambda_{\alpha\alpha}^A \eta_A
\end{aligned}$$

y teniendo en cuenta que $\lambda_{AA}^\alpha = \lambda_{\alpha A}^A$

$$\zeta = \sum_{A,\alpha} (-1)^{A+1} \lambda_{AA}^\alpha \eta_\alpha + \sum_{A,\alpha} (-1)^\alpha \lambda_{\alpha\alpha}^A \eta_A.$$

Por tanto

$$\left.\begin{array}{rcl} z_A &=& \sum_\alpha (-1)^{A+1}\lambda^A_{\alpha\alpha} \\ z_\alpha &=& \sum_A (-1)^{\alpha+1}\lambda^\alpha_{AA} \end{array}\right\}$$

Puesto que $\lambda^A_{\alpha\alpha} = g(\nabla_{e_\alpha}e_\alpha, e_A)$ y $\lambda^\alpha_{AA} = g(\nabla_{e_A}e_A, e_\alpha)$

$$\left.\begin{array}{rcl} x^A &=& g(\nabla_{e_\alpha}e_\alpha, e_A) \\ x^\alpha &=& g(\nabla_{e_A}e_A, e_\alpha) \end{array}\right\}$$

y poniendo

$$X_{\mathcal{F}} = h(\sum_\alpha \nabla_{e_\alpha}e_\alpha) \quad \text{y} \quad X_{\mathcal{H}} = v(\sum_A \nabla_{e_A}e_A)$$

resulta que el campo que buscábamos es

$$X = X_{\mathcal{F}} + X_{\mathcal{H}}.$$

Si además tenemos en cuenta que, en general, cuando $\{e_i\}$ es ortonormal

$$\operatorname{div}(Z) = \sum_{j=1}^{n} g(\nabla_{e_i}Z, e_i)$$

y ponemos (cf. [RA 86])

$$\left.\begin{array}{rcl} \operatorname{div}_{\mathcal{F}}(Z) &=& \sum_A g(\nabla_{e_A}Z, e_A) \\ \operatorname{div}_{\mathcal{H}}(Z) &=& \sum_\alpha g(\nabla_{e_\alpha}Z, e_\alpha) \end{array}\right\}$$

despues de unos pequeños cálculos queda que

$$d\zeta = \left[\operatorname{div}_{\mathcal{F}}(X_{\mathcal{F}}) + \operatorname{div}_{\mathcal{H}}(X_{\mathcal{H}}) - (\|X_{\mathcal{F}}\|^2 + \|X_{\mathcal{H}}\|^2)\right]\nu.$$

En definitiva, hemos demostrado

Proposición 2.8 *Sea (M, g) una variedad riemanniana orientada y $\mathcal{F}$ un campo de p-planos orientable de codimensión 1 en M. Si $d\zeta$ es la forma exacta dada en 2.17 y 2.18 entonces*

$$d\zeta = \operatorname{div}(X)\cdot\nu \tag{2.19}$$

siendo $X = h(\sum_\alpha \nabla_{e_\alpha} e_\alpha) + v(\sum_A \nabla_{e_A} e_A)$. *Además, si ponemos* $X_{\mathcal{F}} = h(X)$ *y* $X_{\mathcal{H}} = v(X)$, *tenemos que*

$$\operatorname{div}(X) = \operatorname{div}_{\mathcal{F}}(X_{\mathcal{F}}) + \operatorname{div}_{\mathcal{H}}(X_{\mathcal{H}}) - (\|X_{\mathcal{F}}\|^2 + \|X_{\mathcal{H}}\|^2)$$

con $\operatorname{div}_{\mathcal{F}}(X_{\mathcal{F}}) = \sum_A g(\nabla_{e_A} X_{\mathcal{F}}, e_A)$ *y* $\operatorname{div}_{\mathcal{H}}(X_{\mathcal{H}}) = \sum_\alpha g(\nabla_{e_\alpha} X_{\mathcal{H}}, e_\alpha)$.

Cuando consideramos M compacta, la relaciones 2.17 y 2.18 dan lugar a las siguientes fórmulas integrales

Corolario 2.3 *Sea* (M, g) *variedad riemanniana orientada, compacta y sin borde. Si* $\mathcal{F}$ *es un campo de* p*-planos en* M *y* $\mathcal{H}$ *el campo ortogonal a* $\mathcal{F}$, *entonces se tienen las fórmulas integrales siguientes*

1.

$$\frac{1}{2}\int_M \tau_M = \frac{1}{2}\int_M (\tau_{\mathcal{F}} + \tau_{\mathcal{H}}) - 2\int_M (\sigma_{2,\mathcal{F}} + \sigma_{2,\mathcal{H}}) + 2\int_M (\|A_{\mathcal{F}}\|^2 + \|A_{\mathcal{H}}\|^2) \tag{2.20}$$

2.

$$\frac{1}{2}\int_M \tau_M = \frac{1}{2}\int_M (\tau'_{\mathcal{F}} - \tau'_{\mathcal{H}}) + \int_M (\sigma_{2,\mathcal{F}} + \sigma_{2,\mathcal{H}}) + \int_M (\|A_{\mathcal{F}}\|^2 + \|A_{\mathcal{H}}\|^2) \tag{2.21}$$

Otro tipo de fórmulas interesantes surgen al introducir la curvatura escalar mixta τ_m definida en M a través de la relación

$$\tau_M = \tau_{\mathcal{F}} + 2\tau_m + \tau_{\mathcal{H}}$$

es decir,

$$\tau_m = \sum_{A,\alpha} k_{A\alpha} = \sum_{A,\alpha} g(R(e_A, e_\alpha)e_\alpha, e_A).$$

Corolario 2.4 *Sea* (M, g) *variedad riemanniana orientada y sin borde. Si* $\mathcal{F}$ *es un campo de* p*-planos en* M *y* $\mathcal{H}$ *el campo ortogonal a* $\mathcal{F}$, *entonces*

1.

$$\frac{1}{2}\tau_m \nu = \left[\sigma_{2,\mathcal{F}} - \sigma_{2,\mathcal{H}} + \|A_{\mathcal{F}}\|^2 + \|A_{\mathcal{H}}\|^2\right] \nu + \frac{1}{2} d\zeta \tag{2.22}$$

2. Si M es compacta, se tiene la fórmula integral

$$\frac{1}{2}\int_M \tau_m = \int_M (\sigma_{2,\mathcal{F}} + \sigma_{2,\mathcal{H}}) + \int_M (\|A_{\mathcal{F}}\|^2 + \|A_{\mathcal{H}}\|^2) \tag{2.23}$$

El punto de vista que aquí hemos seguido para deducir fórmulas como 2.17, 2.18, 2.22 y sus correspondientes relaciones integrales unifica varios resultados obtenidos, mediante técnicas diversas, por diferentes autores (cf. [B1 84], [B2 84], [RA 86] y [RO 88]). Por ejemplo, ciertas fórmulas obtenidas por Ranjan y Rocamora pueden deducirse a partir de 2.22 y la expresión 2.19. Nótese también que los métodos utilizados abren la posibilidad de encontrar nuevas relaciones entre objetos métricos de la variedad y de los campos de planos.

En los trabajos sobre variedades de curvatura seccional constante y foliaciones de codimensión uno realizados por Brito-Langevin-Rosenberg hay fórmulas integrales relativas a las funciones simétricas de curvatura de orden superior. Queda como problema abierto (y actualmente objeto de nuestras investigaciones) la generalización de estas fórmulas con respecto a las hipótesis de codimensión y curvatura. Para llevar a cabo esta propuesta de generalización parece natural empezar con *formas* en $\widehat{W}^*_{n0}$ análogas a α. Así por el momento hemos empezado a trabajar con

$$\alpha_p = (-1)^k n! \sum_{I,K} \epsilon_I^K (-1)^{|K|} \Omega^I \wedge \eta_K$$

donde $p = 2k$, $K = (k_1, \ldots, k_p)$, $|K| = k_1 + \cdots + k_p$, $I = (i_1, \ldots, i_p)$,

$$\epsilon_I^K = \operatorname{sign}\begin{pmatrix} k_1 & \cdots & k_p \\ i_1 & \cdots & i_p \end{pmatrix}$$

y

$$\begin{aligned} \Omega^I &= \Omega^{i_1}_{i_2} \wedge \Omega^{i_3}_{i_4} \wedge \ldots \wedge \Omega^{i_{p-1}}_{i_p} \\ \eta_K &= \theta^1 \wedge \ldots \hat{\theta}^{k_1} \wedge \ldots \wedge \hat{\theta}^{k_p} \wedge \ldots \theta^n \end{aligned}$$

Estas formas α_p, al ser proyectadas sobre $A(M)$ a través de la aplicación $B\varphi_M$, dan lugar a la función de *p-curvatura escalar* de M (cf. [TH 64]). Obsérvese que $\alpha_2 = \alpha_{2,\mathcal{F}}$.

Dejemos de lado estas cuestiones para volver de nuevo a los casos que estábamos tratando. Antes de aplicar las fórmulas a situaciones geométricas más particulares veamos dos casos límite.

Si el tensor de Ricci (cf. 1.1) se define como

$$\mathrm{Ric}(v,w)=\sum_{i=1}^{n} g(R(e_i,v)w,e_i),$$

tenemos

Corolario 2.5 *Si (M,g) es una variedad riemanniana compacta, orientada y sin borde y $\mathcal{F}$ es una campo de planos orientable y de codimensión 1 en M, entonces*

$$\frac{1}{2}\int_M \mathrm{Ric}(N,N)=\int_M \sigma_{2,\mathcal{F}}+\int_M \|A_{\mathcal{F}}\|^2 \tag{2.24}$$

siendo N un campo unitario y normal a $\mathcal{F}$.

Demostración: En 2.23 tenemos

$$\frac{1}{2}\int_M \tau_m=\int_M(\sigma_{2,\mathcal{F}}+\sigma_{2,\mathcal{H}})+\int_M(\|A_{\mathcal{F}}\|^2+\|A_{\mathcal{H}}\|^2)$$

pero $\mathcal{H}$ es un campo vectorial orientado y por tanto $A_{\mathcal{H}}$ es nulo ya que siempre es integrable y $\sigma_{2,\mathcal{H}}=0$ por ser $\S_{\mathcal{H}}$ un escalar. Además

$$\begin{aligned}\tau_m &= \sum_{A,\alpha} g(e_A,e_\alpha)e_\alpha,e_A)\\ &= \sum_{A} g(e_A,N)N,e_A)\\ &= \mathrm{Ric}(N,N)\end{aligned}$$

lo cual acaba de demostrar el corolario. ∎

Consideremos ahora el caso con curvatura seccional constante. Sustituyendo en τ_m el valor de las curvaturas seccionales tenemos demostrado el

Corolario 2.6 *Si (M,g) es una variedad riemanniana compacta, orientada, sin borde y con curvatura seccional constante con valor k y si $\mathcal{F}$ es un campo de planos orientable y $\mathcal{H}$ su ortogonal, tenemos la fórmula integral siguiente*

$$\frac{1}{2}pqk\cdot\mathrm{vol}(M)=\int_M(\sigma_{2,\mathcal{F}}+\sigma_{2,\mathcal{H}})+\int_M(\|A_{\mathcal{F}}\|^2+\|A_{\mathcal{H}}\|^2)$$

donde $\dim\mathcal{F}=p$ *y* $\dim\mathcal{H}=q$.

2.5 Algunas aplicaciones directas

En estaa sección veremos algunas obstrucciones geométricas a la existencia de determmninados tipos de campos de planos.

En primer lugar recordemos (cf. capítulo 1) que si el vector curvatura media de $\mathcal{F}$ es

$$H_{\mathcal{F}} = \frac{1}{p} \sum_{\alpha=p+1}^{n} \mathrm{tr}(S^{\alpha}) \cdot e_{\alpha},$$

entoncees el campo de p-planos $\mathcal{F}$ es umbilical si $S_{\mathcal{F}}(X,Y) = g(X,Y)H_{\mathcal{F}}$. Esto imnplica que $S^{\alpha}_{\mathcal{F}} = \lambda_{\alpha} \cdot I$ (I aplicación identidad) y por tanto

$$\begin{aligned}
\sigma_{2,\mathcal{F}} &= \frac{1}{2} \sum_{\alpha} \{(\mathrm{tr} S^{\alpha})^2 - \mathrm{tr}(S^{\alpha})^2\} \\
&= \frac{1}{2} \sum_{\alpha} (p^2 \lambda_{\alpha}^2 - p \lambda_{\alpha}^2) \\
&= \frac{p(p-1)}{2} \sum_{\alpha} \lambda_{\alpha}^2.
\end{aligned}$$

Entoncees, sustituyendo esta expresión en 2.23, tenemos

Proposición 2.9 *Sea (M,g) variedad riemanniana orientada, compacta y sin borde. Si $\mathcal{F}$ y $\mathcal{H}$ son campos de planos totalmente umbilicales, ortogonales y compulementarios en M con $\dim \mathcal{F} = p$ y $\dim \mathcal{H} = q$,*

$$\frac{1}{2} \int_M \tau_m = p^2 \binom{p}{2} \int_M \|H_{\mathcal{F}}\|^2 + q^2 \binom{q}{2} \int_M \|H_{\mathcal{H}}\|^2 + \int_M (\|A_{\mathcal{F}}\|^2 + \|A_{\mathcal{H}}\|^2)$$

Corolarrio 2.7 *Sean M, $\mathcal{F}$ y $\mathcal{H}$ como en la proposición anterior.*

1. *Si la curvatura escalar mixta τ_m es no positiva entonces, las distribuciaones $\mathcal{F}$ y $\mathcal{H}$ deben ser minimales (i.e. $H_{\mathcal{F}} = 0 = H_{\mathcal{H}}$) e integrables y aademás. τ_m debe ser idénticamente nula.*

2. *En particular, el enunciado 1 es cierto si M es una variedad con curvactura escalar no positiva.*

Con respecto a la curvatura intrínseca de $\mathcal{F}$ y $\mathcal{H}$ tenemos el siguiente resultadao

Proposición 2.10 *Sobre variedades riemannianas compactas con curvatura escalar negativa no existen foliaciones cuyas hojas sean totalmente umbilicales, de codimensión uno y con curvatura escalar intrínseca no negativa*

.

Demostración: Sustituyendo en la fórmula integral 2.21, tenemos

$$\frac{1}{2}\int_M \mathrm{Ric}(N,N) = \frac{1}{2}\int_M \tau'_{\mathcal{F}} + (n-1)^2\left(\frac{n-1}{2}\right)\int_M \|H_{\mathcal{F}}\|^2$$

y en el caso que tratamos, el lado derecho de la igualdad es no negativo mientras que el izquierdo es negativo, lo cual es imposible. ∎

NOTA: Las hipótesis que hacemos sobre las curvaturas se pueden cambiar por las condiciones $\tau'_m > 0$ y $\tau_M \leq 0$ y el resultado sigue siendo válido. Si $\tau'_m \geq 0$ y $\tau_M \leq 0$ la situación descrita en la proposición es posible solo cuando τ_M y τ_m sean siempre nulas.

Consideremos ahora el caso totalmente geodésico. Si $\mathcal{F}$ es un campo de planos con esta propiedad, entonces (cf. pág. 10 y ss.) $S_{\mathcal{F}} \equiv 0$ y por tanto $\sigma_{2,\mathcal{F}} = 0$.

Proposición 2.11 *Sea (M,g) una variedad riemanniana orientada, compacta y sin borde y $\mathcal{F}$ y $\mathcal{H}$ campos de planos ortogonales y complementarios.*

1. *Si τ_m es no positiva y es negativa en algún punto de M, $\mathcal{F}$ y $\mathcal{H}$ no pueden ser campos totalmente geodésicos.*

2. *En particular, si M tiene curvatura seccional no positiva y es negativa en algún punto, la afirmación 1 sigue siendo cierta.*

3. *Si $\tau_m \leq 0$ y los campos de planos son totalmente geodésicos éstos deben ser integrables y τ_m idénticamente nula .*

Demostración: Cuando $\mathcal{F}$ y $\mathcal{H}$ son totalemente geodésicos. de la fórmula 2.23 deducimos que

$$\frac{1}{2}\int_M \tau_m = \int_M \|A_{\mathcal{F}}\|^2 + \int_M \|A_{\mathcal{H}}\|^2 \geq 0$$

lo cual no es posible en los casos 1 y 2. Sin embargo, cuando $\tau_m = 0$ y $\mathcal{F}$ y $\mathcal{H}$ son integrables, no hay contradicción. ∎

Un campo de planos $\mathcal{F}$ es minimal si el vector curvatura media $H_{\mathcal{F}}$ es nulo. En ese caso $\mathrm{tr}(S^\alpha) = 0$ y

$$\sigma_{2,\mathcal{F}} = -\frac{1}{2}\sum_\alpha \mathrm{tr}(S^\alpha)^2 \leq 0.$$

Usando esta propiedad de los campos de planos minimales recuperamos el siguiente resultado de Oshikiri (cf. [OS 81]).

Proposición 2.12 *Sea $\mathcal{F}$ una foliación minimal de codimensión uno sobre una variedad riemanniana M, orientada, compacta y sin borde cumpliendo que* $\mathrm{Ric} \geq 0$. *Entonces, $\mathcal{F}$ es totalmente geodésica.*

Demostración: Aplicando el corolario 2.24 a $\mathcal{F}$ tenemos que

$$\frac{1}{2}\int_M \mathrm{Ric}(N,N) = \int_M \sigma_{2,\mathcal{F}} + \int_M \|A_{\mathcal{F}}\|^2,$$

y al ser $\mathcal{F}$ integrable

$$0 \leq \frac{1}{2}\int_M \mathrm{Ric}(N,N) = \int_M \sigma_{2,\mathcal{F}} \leq 0.$$

Por tanto, $\mathrm{tr}(S^\alpha) = 0$ para todo α y $\mathcal{F}$ es totalmente geodésica. Nótese que además, se cumplirá que $\mathrm{Ric}(N,N) = 0$. ∎

Volviendo a aplicar la fórmula 2.24 y las diferentes expresiones de $\sigma_{2,\mathcal{F}}$ obtenemos el siguiente resultado

Proposición 2.13 *Sea M una variedad riemanniana orientada, compacta y sin borde.*

1. *Si la curvatura seccional es estrictamente positiva, M no admite foliaciones de codimensión uno minimales.*

2. *Si la curvatura seccional es estrictamente negativa, M no admite campos de planos de codimensión uno totalmente geodésicos.*

Las foliaciones riemannianas tienen la propiedad de tener el campo ortogonal totalmente geodésico (cf. pág. 24); utilizando este hecho tenemos

Proposición 2.14 *Sea M una variedad riemanniana, compacta y sin borde*

1. *Si $\mathcal{F}$ es una foliación totalmente geodésica y riemanniana en M tal que $\tau_m > 0$, entonces el campo ortogonal $\mathcal{H}$ no puede ser integrable.*
2. *Si M tiene curvatura escalar negativa, entonces no existen foliaciones riemannianas totalmente geodésicas en M.*

NOTA: En particular, la afirmación 1 es válida cambiando curvatura escalar mixta por curvatura escalar o curvatura seccional.

Demostración: Aplicando 2.24 y que $\sigma_{2,\mathcal{F}} = 0 = \sigma_{2,\mathcal{H}}$. tenemos

$$\frac{1}{2}\int_M \tau_m = \int_M \|A_{\mathcal{H}}\|^2$$

de donde deducimos 1. y 2. ∎

Para el caso particular de flujos tenemos que

Proposición 2.15 *No existen flujos riemannianos sobre una variedad cuya métrica tenga curvatura de Ricci negativa.*

La demostración es idéntica a la anterior teniendo en cuenta que en este caso, si N genera el flujo, $\tau_m = \mathrm{Ric}(N, N)$ en el caso uno dimensional.

Capítulo 3

Foliaciones de Lie

En este capítulo se estudirán los flujos de Lie de codimensión 3. Más concretamente, trataremos el siguiente problema de realización:

> Sea $\mathfrak{g}$ un álgebra de Lie de dimensión 3 y un entero q entre 0 y 3, ¿cuándo existe un flujo de Lie $(M, \mathcal{F})$ con M compacta, $\dim(M) = 4$, álgebra transversa $\mathfrak{g}$ y álgebra estructural de dimensión q?

3.1 Algebras de Lie de dimensión 3

En esta sección clasificaremos las álgebras de Lie de dimensión 3 de forma que nos sea útil para resolver el problema de la realización de flujos de Lie anteriormente citado.

Definición 3.1 *El* álgebra derivada $\mathfrak{g}'$ *de un álgebra de Lie* $\mathfrak{g}$ *es la subálgebra de* $\mathfrak{g}$ *más pequeña que contiene todos los productos* $[x, y]$ *con* $x, y \in \mathfrak{g}$.

Es decir, $\mathfrak{g}' =< [x, y] \, : \, x, y \in \mathfrak{g} >$, el álgebra generada por los productos $[x, y]$.

Al ser 3 la dimensión de $\mathfrak{g}$, el álgebra derivada puede tener dimensiones $0, 1, 2$ ó 3. Clasificaremos $\mathfrak{g}$ en función de dicha dimensión.

- Si $\dim \mathfrak{g}' = 0$, entonces $\mathfrak{g}$ es el álgebra abeliana. Para cualquier base $\{e_1, e_2, e_3\}$ de $\mathfrak{g}$ se tiene que $[e_i, e_j] = 0$. Este álgebra la denotaremos por $\mathfrak{g}_1$.

- Si $\dim \mathfrak{g}' = 1$, entonces existe un $\alpha_1 \in \mathfrak{g}$ tal que $\mathfrak{g}' =< \alpha_1 >$.

  Si $\mathfrak{g}'$ es del centro de $\mathfrak{g}$ (elementos que conmutan con cualquier elemento de $\mathfrak{g}$) y $\{e_1, e_2, \alpha_1\}$ una base de $\mathfrak{g}$, se tiene que $[e_1, \alpha_1] = [e_2, \alpha_2] = 0$ y $[e_1, e_2] = \lambda\alpha_1$ con $\lambda \neq 0$. Mediante un cambio de base adecuado podemos pensar en $\mathfrak{g}$ generada por elementos $\{e_1, e_2, e_3\}$ tales que

$$[e_1, e_2] = [e_1, e_3] = 0$$

$$[e_2, e_3] = e_1.$$

Esta es la llamada *álgebra de Heisenberg* y la denotaremos por $\mathfrak{g}_2$.

En el caso de que $\mathfrak{g}'$ no sea del centro de $\mathfrak{g}$, hay un α_2 de $\mathfrak{g}$ tal que $[\alpha_1, \alpha_2] = \lambda\alpha_1$ con $\lambda \neq 0$. Ampliando hasta una base $\{\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3\}$ se tiene que

$$[\alpha_1, \alpha_2] = \lambda\alpha_1, \quad [\alpha_1, \alpha_3] = \mu\alpha_1, \quad [\alpha_2, \alpha_3] = \delta\alpha_1.$$

Mediante el cambio de base $e_1 = \alpha_1/\lambda$, $e_2 = \alpha_2$ y $e_3 = \delta\alpha_1 - \mu\alpha_2 + \lambda\alpha_3$ tenemos que este álgebra puede pensarse como generada por elementos $\{e_1, e_2, e_3\}$ tales que

$$[e_1, e_2] = e_1$$

$$[e_1, e_3] = [e_2, e_3] = 0.$$

Esta será el *álgebra afín* y la denotaremos por $\mathfrak{g}_5$.

NOTA: Este álgebra se denomina afín pues es el álgebra de Lie del grupo producto $\mathrm{Aff}^+(\mathbf{R}) \times \mathbf{R}$. Recordemos que el álgebra de Lie de $\mathrm{Aff}^+(\mathbf{R})$ es de dimensión 2 y satisface $[e_1, e_3] = e_1$.

- Si $\dim \mathfrak{g}' = 2$, podemos considerar una base $\{\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3\}$ de $\mathfrak{g}$ con $\mathfrak{g}'$ generada por α_1 y α_2 y satisfaciendo

$$[\alpha_1, \alpha_2] = x\alpha_1 + y\alpha_2$$

$$[\alpha_1, \alpha_3] = a\alpha_1 + b\alpha_2, \quad [\alpha_2, \alpha_3] = c\alpha_1 + d\alpha_2.$$

De la identidad de Jacobi

$$[[\alpha_1,\alpha_2],\alpha_3]+[[\alpha_3,\alpha_1],\alpha_2]+[[\alpha_2,\alpha_3],\alpha_1]=0$$

se obtiene que

$$\left.\begin{aligned} xb-ya&=0\\ xd-yc&=0\end{aligned}\right\}$$

Entonces podemos suponer que $ad-bc\neq 0$ (en caso contrario no podría cumplirse que $\dim\mathfrak{g}'=2$), de donde se deduce que x e y son cero. Resumiendo, si la dimensión de $\mathfrak{g}'$ es dos, hay una base $\{\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3\}$ de $\mathfrak{g}$ tal que

$$[\alpha_1,\alpha_2]=0$$

$$[\alpha_1,\alpha_3]=a\alpha_1+b\alpha_2$$

$$[\alpha_2,\alpha_3]=c\alpha_1+d\alpha_2$$

con $ad-bc\neq 0$ y $\mathfrak{g}'$ generada por α_1 y α_2. Vamos a ver que esta familia de álgebras puede reducirse a tres tipos fundamentales de álgebras no isomorfas.

Supongamos que existe un $\alpha\in\mathfrak{g}'$ de manera que $[\alpha,\alpha_3]=\lambda\alpha$. Si α es igual a $x\alpha_1+y\alpha_2$, entonces

$$\begin{aligned}[\alpha,\alpha_3] &= \lambda\alpha=\lambda x\alpha_1+\lambda y\alpha_2\\ &= (xa+yc)\alpha_1+(xb+yd)\alpha_2\end{aligned}$$

y por tanto λ es un valor propio de la matriz

$$A=\begin{pmatrix} a & c\\ b & d\end{pmatrix}$$

siendo $\alpha=(x,y)$ un vector propio. Entonces λ debe satisfacer la ecuación característica siguiente

$$\lambda^2-(a+d)\lambda+ad-bc = 0. \tag{3.1}$$

Se pueden dar varios casos

1. Si la ecuación 3.1 tiene a λ como única solución con multiplicidad dos, existen vectores α y β tales que $A\alpha = \lambda\alpha$ y $A\beta = \alpha + \lambda\beta$. Eligiendo como nueva base $e_1 = \alpha$, $e_2 = \lambda\alpha$ y $e_3 = \alpha_3/\lambda$ tenemos generadores e_1 y e_2 de $\mathfrak{g}'$ tales que

$$[e_1, e_2] = 0$$

$$[e_1, e_3] = e_1, \qquad [e_2, e_3] = e_1 + e_2.$$

El álgebra obtenida la denotaremos por $\mathfrak{g}_6$.

2. Si la ecuación 3.1 tiene dos soluciones reales diferentes λ y μ con vectores propios α y β, poniendo $e_1 = \alpha$, $e_2 = \beta$ y $e_3 = \alpha_3/\lambda$ tenemos generadores e_1 y e_2 de $\mathfrak{g}'$ tales que

$$[e_1, e_2] = 0$$

$$[e_1, e_3] = e_1, \qquad [e_2, e_3] = ke_2 \quad k \neq 0.$$

El álgebra así obtenida la denotaremos por $\mathfrak{g}_7$.

OBSERVACION: En $\mathfrak{g}_7$ podemos considerar $k \in [-1, 1] \setminus \{0\}$ ya que dos álgebras de $\mathfrak{g}_7$ con $k \cdot k' = 1$ son isomorfas. Para verlo basta considerar el cambio de base $e_1' = e_2$, $e_2' = e_1$, $e_3' = k^{-1}e_3$.

3. Si la ecuación 3.1 sólo admite soluciones complejas, tomamos la base

$$\left.\begin{array}{rcl} u_1 & = & \alpha_1 \\ u_2 & = & a\alpha_1 + b\alpha_2 \\ u_3 & = & \alpha_3 \end{array}\right\}$$

(podemos suponer $b \neq 0$ pues en caso contrario tomamos $u_2 = c\alpha_1 + d\alpha_2$).

Entonces

$$[u_1, u_2] = 0$$

$$[u_1, u_3] = u_2, \quad [u_2, u_3] = -(ad - bc)u_1 + (a + d)u_2$$

y mediante un nuevo cambio de base

$$e_1 = u_1, \quad e_2 = u_2 \quad \text{y} \quad e_3 = u_3/(ad - bc)$$

tenemos

$$[e_1, e_2] = 0$$

$$[e_1, e_3] = e_2, \qquad [e_2, e_3] = -e_1 + he_2$$

siendo $h^2 < 4$ puesto que las raices del polinomio 3.1 son complejas.

- Si $\dim \mathfrak{g}' = 3$, dada una base $\{\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3\}$ de $\mathfrak{g}$ se tiene que

$$\left.\begin{array}{l} [\alpha_1, \alpha_2] = v_1 \\ [\alpha_3, \alpha_1] = v_2 \\ [\alpha_2, \alpha_3] = v_3 \end{array}\right\}$$

donde los v_1, v_2 y v_3 son linealmente independientes. Entonces, si escribimos $v_i = \sum_j \lambda_{ij} e_j$, la matriz

$$C = \begin{pmatrix} \lambda_{11} & \lambda_{12} & \lambda_{13} \\ \lambda_{21} & \lambda_{22} & \lambda_{23} \\ \lambda_{31} & \lambda_{32} & \lambda_{33} \end{pmatrix}$$

es no singular. Además, gracias a la identidad de Jacobi, C es una matriz simétrica y en consecuencia define una cónica no degenerada en el plano proyectivo.

En coordenadas homogéneas (x_1, x_2, x_3) las formas canónicas de las posibles cónicas se reducen a los dos tipos fundamentales siguientes

$$\left.\begin{array}{rcl} x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 & = & 0 \\ -x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 & = & 0 \end{array}\right\}$$

Entonces, salvo cambios de base, existen dos posibles álgebras de Lie con $\dim \mathfrak{g}' = 3$:

La *ortogonal* $\mathfrak{so}(3)$ tal que

$$[e_1, e_2] = e_3$$

$$[e_3, e_1] = e_2, \qquad [e_2, e_3] = e_1$$

y la *especial lineal* $\mathfrak{sl}(2)$ con

$$[e_1, e_2] = e_3$$

$$[e_3, e_1] = e_2, \qquad [e_2, e_3] = -e_1.$$

Resumiendo, salvo isomorfismos, las álgebras de Lie tridimensionales quedan reducidas a las ocho familias siguientes:

- $\mathfrak{g}_1$ (Abeliana):

$$[e_1, e_2] = [e_1, e_3] = [e_2, e_3] = 0$$

- $\mathfrak{g}_2$ (Heisenberg):

$$[e_1, e_2] = [e_1, e_3] = 0, \quad [e_2, e_3] = e_1$$

- $\mathfrak{g}_3$ ($\mathfrak{so}(3)$):

$$[e_1, e_2] = e_3, \quad [e_2, e_3] = e_1, \quad [e_3, e_1] = e_2$$

- $\mathfrak{g}_4$ ($\mathfrak{sl}(2)$):

$$[e_1, e_2] = e_3, \quad [e_2, e_3] = -e_1, \quad [e_3, e_1] = e_2$$

- $\mathfrak{g}_5$ (Afin):

$$[e_1, e_2] = e_1, \quad [e_1, e_3] = [e_2, e_3] = 0$$

- $\mathfrak{g}_6$:

$$[e_1, e_2] = 0, \quad [e_1, e_3] = e_1, \quad [e_2, e_3] = e_1 + e_2$$

- $\mathfrak{g}_7$:

$$[e_1, e_2] = 0, \quad [e_1, e_3] = e_1, \quad [e_2, e_3] = ke_2 \qquad k \neq 0$$

- $\mathfrak{g}_8$:

$$[e_1, e_2] = 0, \quad [e_1, e_3] = e_2, \quad [e_2, e_3] = -e_1 + he_2 \qquad h^2 < 4$$

OBSERVACION: Nótese que las álgebras $\mathfrak{g}_1$, $\mathfrak{g}_2$, $\mathfrak{g}_3$ y $\mathfrak{g}_4$ son unimodulares, $\mathfrak{g}_5$ y $\mathfrak{g}_6$ no lo son, $\mathfrak{g}_7$ es unimodular solo si $k = -1$ y $\mathfrak{g}_8$ solo cuando $h = 0$.

3.2 Grupos de Lie de dimensión 3

En esta sección daremos grupos de Lie tridimensionales que realicen las álgebras de Lie obtenidas en la sección anterior.

Para $\mathfrak{g}_1, \mathfrak{g}_2, \mathfrak{g}_3, \mathfrak{g}_4$ y $\mathfrak{g}_5$ tenemos los grupos clásicos siguientes:

- El *grupo abeliano* $(\mathbf{R}^3, +)$ tiene a $\mathfrak{g}_1$ como álgebra de Lie.

- El *grupo de Heisenberg*

$$G_2 = \{\begin{pmatrix} 1 & a & b \\ 0 & 1 & c \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} : a, b, c \in \mathbf{R}\}$$

es un grupo de matrices cuya álgebra de Lie es $\mathfrak{g}_2$.

- El *grupo ortogonal directo*

$$\mathbf{SO}(3, \mathbf{R}) = \{A \in \mathbf{Gl}(3, \mathbf{R}) : A \cdot A^t = I \text{ y } \det(A) = 1\}$$

tiene a $\mathfrak{g}_3$ como álgebra de Lie.

También podemos considerar a $S^3 = \mathbf{SU}(2)$ como grupo cuya álgebra de Lie es $\mathfrak{g}_3$ (de hecho $S^3 \to \mathbf{SO}(3, \mathbf{R})$ es un recubrimiento de dos hojas).

- El *grupo especial lineal*

$$\mathbf{Sl}(2, \mathbf{R}) = \{A \in \mathbf{Gl}(3, \mathbf{R}) : \det(A) = 1\}$$

realiza a $\mathfrak{g}_4$.

- Para el álgebra afín $\mathfrak{g}_5$ consideraremos el grupo producto $\mathrm{Aff}^+(2, \mathbf{R}) \times \mathbf{R}$ siendo $\mathrm{Aff}^+(2, \mathbf{R}) = \{A : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ tal que $A(x) = ax + b$, $a > 0\}$ y $\mathbf{R}$ el grupo abeliano.

Para las familias $\mathfrak{g}_6, \mathfrak{g}_7$ y $\mathfrak{g}_8$ construiremos grupos de Lie especiales que las realicen como álgebras. Para ello utilizaremos el siguiente resultado:

Teorema 3.1 (cf. [GU 77]) *Toda álgebra de Lie de matrices $\mathfrak{l}$ es el álgebra de Lie del grupo multiplicativo de matrices de la forma e^{At} con $A \in \mathfrak{l}$.*

Demostración: Recuérdese que si α es un elemento de $\mathfrak{g}$, entonces la *aplicación adjunta* viene definida por $(\text{ad}\alpha)(\beta) = [\alpha, \beta]$ para cualquier β de $\mathfrak{g}$. La aplicación ad es un endomorfismo de $\mathfrak{g}$.

Como consecuencia del teorema 3.1 tenemos que si $\mathfrak{g}$ es un álgebra de Lie con centro trivial, el grupo de las matrices de la forma $X = e^{(\text{ad}_\alpha)\cdot t}$ con $\alpha \in \mathfrak{g}$ tiene a $\mathfrak{g}$ por álgebra de Lie asociada. En efecto, por ser $Z(\mathfrak{g}) = 0$, el morfismo de álgebras

$$\text{ad} : \mathfrak{g} \longrightarrow \text{End}(\mathfrak{g})$$

es inyectivo y por tanto $\mathfrak{g}$ es isomorfa al álgebra de matrices $\text{ad}(\mathfrak{g})$. Aplicando ahora el teorema 3.1 la afirmación queda demostrada. ∎

Sea $\{e_1, e_2, e_3\}$ una base del álgebra de Lie $\mathfrak{g}$ de forma que

$$\left.\begin{aligned} [e_1, e_2] &= 0 \\ [e_1, e_3] &= ae_1 + be_2 \\ [e_2, e_3] &= ce_1 + de_2 \end{aligned}\right\}$$

siendo $ad - bc \neq 0$. El centro de $\mathfrak{g}$ es trivial y por tanto también lo son los centros de $\mathfrak{g}_6$, $\mathfrak{g}_7$ y $\mathfrak{g}_8$. Usando que la exponenciación de matrices es

$$e^A = I + \sum_1^\infty \frac{A^n}{n!}$$

y calculando las aplicaciones adjuntas de dichas álgebras obtenemos las realizaciones siguientes:

- Para el álgebra $\mathfrak{g}_6$

$$G_6 = \{\begin{pmatrix} e^{-t} & -te^{-t} & x \\ 0 & e^{-t} & y \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} : x, y, t \in \mathbf{R}\},$$

- para el álgebra $\mathfrak{g}_7$

$$G_7 = \{ \begin{pmatrix} e^{-t} & 0 & x \\ 0 & e^{-kt} & y \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} : x, y, t \in \mathbf{R}\}$$

y

- para el álgebra $\mathfrak{g}_8$

$$G_8 = \{ \begin{pmatrix} C(t)\cos(\varphi + t) & -C(t)\sin t & x \\ C(t)\sin t & C(t)\cos(\varphi - t) & y \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} : x, y, t \in \mathbf{R}\}$$

donde $C(t) = 2e^{\beta t}/\alpha$ siendo $\alpha = \sqrt{4 - h^2}$ y $\beta = \tan\varphi = h/\alpha$ ($\sin\varphi = h/2$, $\cos\varphi = \alpha/2$).

También podemos pensar en estos grupos como el espacio $\mathbf{R}^2 \times \mathbf{R}$ dotado de la ley de multiplicación

$$(p, t) \cdot (p', t') = (p + e^{-\Lambda t} p', t + t')$$

con la matriz Λ dependiendo del álgebra que consideremos:

$$\Lambda = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \quad \text{para} \quad \mathfrak{g}_6, \qquad \Lambda = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & k \end{pmatrix} \quad \text{para} \quad \mathfrak{g}_7$$

y

$$\Lambda = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & h \end{pmatrix} \quad \text{para} \quad \mathfrak{g}_8.$$

3.3 Realización de flujos de Lie de codimensión 3

En esta sección se demostrarán —entre otros—los siguientes resultados relativos a la realización de flujos de Lie en variedades diferenciables compactas de dimensión 4.

Teorema 3.2 *Si el álgebra estructural $\mathfrak{h}$ de $\mathcal{F}$ es cero, i.e. $\mathcal{F}$ es una foliación con hojas compactas, entonces $\mathfrak{g}_1, \mathfrak{g}_2, \mathfrak{g}_3$ y $\mathfrak{g}_4$ son álgebras realizables. $\mathfrak{g}_5$ y $\mathfrak{g}_6$ no son realizables. $\mathfrak{g}_7$ es realizable si y solo si $k = -1$ y $\mathfrak{g}_8$ es realizable si y solo si $h = 0$.*

Teorema 3.3 *Si el álgebra estructural $\mathfrak{h}$ de $\mathcal{F}$ tiene dimensión 1, entonces $\mathfrak{g}_1$, $\mathfrak{g}_2$, $\mathfrak{g}_3$, $\mathfrak{g}_4$ y $\mathfrak{g}_5$ son álgebras realizables. $\mathfrak{g}_6$ y $\mathfrak{g}_7$ no son realizables y $\mathfrak{g}_8$ con $h = 0$ es realizable.*

No se conoce ninguna realización de $\mathfrak{g}_8$ con $h \neq 0$ y álgebra estructural 1-dimensional.

En el siguiente resultado es remarcable el hecho de que la realización del par $(\mathfrak{g}_7, 2)$ depende del valor de k. De hecho tenemos que

Teorema 3.4 *Si el álgebra de Lie estructural $\mathfrak{g}$ de $\mathcal{F}$ tiene dimensión 2 entonces $\mathfrak{g}_1$, $\mathfrak{g}_5$ y $\mathfrak{g}_8$ con $h = 0$ son álgebras realizables mientras que $\mathfrak{g}_2$, $\mathfrak{g}_3$, $\mathfrak{g}_4$, $\mathfrak{g}_6$ y $\mathfrak{g}_7$ con $k \in \mathbb{Q}$ no son realizables.*

Daremos un ejemplo de realización de $\mathfrak{g}_7$ con k irracional. El problema de caracterizar los k para los cuales $\mathfrak{g}_7$ es realizable y el caso del álgebra $\mathfrak{g}_8$ están todavía abiertos. La demostración de los teoremas pondrá de manifiesto que en algunos casos la obstrucción a la realización radica en la compacidad de la variedad M y no en razones puramente algebraicas.

Dividiremos esta sección en cuatro apartados, uno por cada posible dimensión del álgebra estructural $\mathfrak{h}$.

El siguiente resultado (cf. [CA 84]) lo usaremos a lo largo de esta sección pues implicará de forma directa la no realizabilidad de algunos pares $(\mathfrak{g}, q)$.

Teorema 3.5 *Sea G un grupo de Lie simplemente conexo de dimensión n, M una variedad de dimensión $(n+1)$ y Φ un G-flujo de Lie sobre M. Si las órbitas de Φ son densas:*

1. *$G = \mathbb{R}^n$ (como grupo),*
2. *$M \cong T^{n+1}$ y*

3. la foliación definida por Φ es diferenciablemente conjugada a una foliación lineal sobre T^{n+1}.

Como consecuencia inmediata tenemos

Corolario 3.1 *Sea $(M, \mathcal{F}\ )$ un flujo de Lie sobre una variedad compacta M y F una hoja de $\mathcal{F}$. $(\overline{F}, \mathcal{F}\ |_{\overline{F}})$ es un flujo de Lie cuya álgebra transversa $\mathcal{H}$ es abeliana. Por tanto el álgebra estructural de $(M, \mathcal{F}\ )$ es abeliana.*

NOTA: $\overline{F}$ es la variedad M del teorema 3.5 y $\mathcal{F}\ |_{\overline{F}}$ es la foliación densa.

Sea $\mathcal{F}$ un flujo de Lie de codimensión 3 sobre una variedad compacta M. Puesto que las adherencias de las hojas de $\mathcal{F}$ son las fibras de un fibrado (cf. el teorema 1.7), se pueden presentar los cuatro casos siguientes.

Codimensión de $\overline{\mathcal{F}} = 3$

En este caso las hojas de $\mathcal{F}$ son compactas luego el fibrado básico es $M \rightarrow M/\mathcal{F}$. Por lo tanto la cohomología básica coincide con la cohomología de de Rham de la variedad compacta $M/\mathcal{F}$ y $H^3(M, \mathcal{F}) \neq 0$. Por el teorema 1.9, si un flujo de este tipo existe debe estar modelado sobre un álgebra de Lie unimodular. En consecuencia, $\mathfrak{g}_5$ y $\mathfrak{g}_6$ no son realizables pues no son álgebras unimodulares, $\mathfrak{g}_7$ es realizable (a priori) solo en el caso de que $k \neq -1$ y $\mathfrak{g}_8$ solo cuando $h = 0$.

Daremos ahora ejemplos de realizaciones para las restantes álgebras.

- Para $\mathfrak{g}_1$ basta considerar el flujo obtenido a partir del fibrado trivial

$$T^1 \times T^3 \longrightarrow T^3$$

siendo T^n el toro n-dimensional.

- Para el álgebra de Heisenberg $\mathfrak{g}_2$ consideraremos el fibrado trivial

$$T^1 \times M \longrightarrow M$$

siendo M el espacio homogéneo G_2/Γ del grupo de Heisenberg G_2 por el subgrupo discreto uniforme

$$\Gamma = \{ \begin{pmatrix} 1 & a & b \\ 0 & 1 & c \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} : a, b, c \in \mathbf{Z} \}.$$

- Si el álgebra de Lie es $\mathfrak{g}_3$, álgebra de las matrices antisimétricas $\mathfrak{so}(3, \mathbf{R})$, bastará que tomemos de nuevo un fibrado trivial

$$T^1 \times S^3 \longrightarrow S^3.$$

- Para $\mathfrak{g}_4$, álgebra de las matrices de traza nula $\mathfrak{sl}(2, \mathbf{R})$, consideraremos el fibrado trivial

$$T^1 \times T_1 W \longrightarrow T_1 W$$

donde $T_1 W$ es el fibrado formado por los vectores tangentes unitarios al toro bidimensional de dos agujeros. Puesto que $T_1 W$ es la variedad homogénea $PSL(2, \mathbf{R})/\pi_1(W)$, tenemos el ejemplo que se buscaba.

- Sea el álgebra $\mathfrak{g}_7$ con $k = -1$. Si una matriz A de $\mathbf{Sl}(2, \mathbf{Z})$ tiene valores propios λ y $1/\lambda$ con λ positivo y diferente de 1, dotamos a $\mathbf{R}^3 = \mathbf{R}^2 \times \mathbf{R}$ de una estructura de grupo mediante la multiplicación

$$(u, t) \cdot (v, s) = (A^t \cdot v + u, t + s).$$

El álgebra de Lie de este grupo es $\mathfrak{g}_7$ con $k = -1$ (cf. [GO 85]).

Los puntos de $\mathbf{R}^3$ cuyas coordenadas son enteras constituyen un subgrupo discreto uniforme Γ de $\mathbf{R}^3$. El cociente $\mathbf{R}^3/\Gamma$ es una variedad compacta que se suele denotar por T_A^3 y se denomina *toro hiperbólico*. Entonces el fibrado trivial

$$T^1 \times T_A^3 \longrightarrow T_A^3$$

da un ejemplo de realización del álgebra de Lie $\mathfrak{g}_7$ con $k = -1$.

• Consideremos ahora el caso $\mathfrak{g}_8$ con $h = 0$. Sea el flujo definido por las fibras del fibrado trivial $T^1 \times T^3 \to T^3$ y denotemos por $\theta^0, \theta^1, \theta^2, \theta^3$ las coordenadas canónicas en $T^1 \times T^3$. El paralelismo dado por $\partial/\partial\theta^1$, $\partial/\partial\theta^2$, y $\partial/\partial\theta^3$ hace de las fibras del fibrado un flujo de Lie abeliano, pero hay suficiente cantidad de funciones básicas suficientes como para modificar este paralelismo. Tomemos por ejemplo

$$\left.\begin{array}{rcl} e_1 & = & \cos\theta^1 \cdot \dfrac{\partial}{\partial\theta^2} + \sin\theta^1 \cdot \dfrac{\partial}{\partial\theta^3} \\ e_2 & = & -\sin\theta^1 \cdot \dfrac{\partial}{\partial\theta^2} + \cos\theta^1 \cdot \dfrac{\partial}{\partial\theta^3} \\ e_3 & = & -\dfrac{\partial}{\partial\theta^1} \end{array}\right\}$$

para obtener un nuevo paralelismo que satisface $[e_1, e_2] = 0$, $[e_1, e_3] = e_2$ y $[e_2, e_3] = -1$. Es decir, el flujo admite también a $\mathfrak{g}_8$ (con $h = 0$) como modelo transverso.

Codimensión de $\overline{\mathcal{F}} = 2$

En este caso la dimensión del álgebra estructural $\mathfrak{h}$ es 1. Daremos ejemplos de realizaciones de las álgebras $\mathfrak{g}_1, \mathfrak{g}_2, \mathfrak{g}_3, \mathfrak{g}_4, \mathfrak{g}_5$ y $\mathfrak{g}_8$ (esta última con $h = 0$). También demostraremos que las álgebras $\mathfrak{g}_6$ y $\mathfrak{g}_7$ no son realizables.

• Para $\mathfrak{g}_1$ un posible ejemplo de realización viene dado por el flujo $(X, 0)$ en $T^2 \times T^2$ donde X es un flujo lineal denso en el toro T^2. Un tal flujo se puede obtener pasando al cociente los flujos de $\mathbf{R}^2$ que consisten en rectas de pendiente irracional.

• Caso $\mathfrak{g}_2$. Sea M el espacio homogéneo del grupo de Heisenberg ya considerado en el caso de codim$(\overline{\mathcal{F}}) = 3$ (véase la página 81). El flujo definido en $M \times T^1$ cuyas curvas integrales están dadas por las curvas de $G_2 \times \mathbf{R}^2$

$$\varphi_t(p) = (\begin{pmatrix} 1 & a & b+t \\ 0 & 1 & c \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, t + d)$$

donde

$$p = \left(\begin{pmatrix} 1 & a & b \\ 0 & 1 & c \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, d \right) \qquad \text{y} \qquad d \in \mathbf{R} \setminus \mathbf{Q}$$

es transverso a M y la adherencia de cada hoja es isomorfa a T^2. Por tanto, tenemos un ejemplo de flujo de Lie modelado en el álgebra $\mathfrak{g}_2$ y con codimensión de $\overline{\mathcal{F}}$ igual a 1.

- Puesto que $S^3 = SU(2)$, podemos construir un ejemplo de flujo con $\mathfrak{g}_3$ como modelo transverso mediante la *suspensión* de la representación

$$h : \pi_1(S^1) \longrightarrow \mathrm{Diff}(S^3)$$

definida por

$$h(1) = \begin{pmatrix} e^{i\alpha} & 0 \\ 0 & e^{-i\alpha} \end{pmatrix}$$

siendo α un número irracional.

Más concretamente, consideremos $M = S^3 \times \mathbf{R}/\sim$ con la relación de equivalencia $\sim$ dada por

$$(p,t) \sim (p',t') \qquad \text{si y solo si} \qquad t - t' = n \in \mathbf{Z} \quad \text{y} \quad p' = h(n) \cdot p.$$

En $S^3 \times \mathbf{R}$ consideramos la foliación cuyas hojas son las lineas $\{p\} \times \mathbf{R}$. Estas lineas son invariantes por la acción que define la relación de equivalencia y por tanto inducen, por la proyección $\pi : S^3 \times \mathbf{R} \longrightarrow M$, un flujo de Lie $\mathcal{F}$ sobre M. $\mathcal{F}$ es una $\mathfrak{g}_3$-foliación de Lie; nos falta ver que $\mathrm{codim}(\overline{\mathcal{F}}) = 2$. Para ello tomamos una hoja F de $\mathcal{F}$ y estudiamos su intersección con la variedad transversa $\pi(S^3 \times \{t_0\})$ (que es difeomorfa a S^3). Los puntos de intersección son la proyección en $\pi(S^3 \times \{t_0\})$ del conjunto

$$\{(e^{in\alpha} \cdot a, e^{in\alpha} \cdot b), \quad n \in \mathbf{Z}\}$$

cuya adherencia es una curva cerrada en un toro de $S^3 \times \{t_0\}$. Por lo tanto, $\overline{\mathcal{F}}$ tiene codimensión 2.

• Realización de $\mathfrak{g}_4$. Primeramente construiremos un flujo de Lie transversalmente afín sobre una variedad de dimensión 3 (cf. [GO 85] o [CA 84]).

Para ello consideremos una matriz A de $\mathrm{Sl}(2,\mathbf{Z})$ con traza mayor que 2. Entonces los valores propios λ y $1/\lambda$ son reales (e irracionales) y las direcciones propias tienen pendiente irracional. Por v_1 y v_2 denotaremos los vectores propios asociados a λ y $1/\lambda$ respectivamente.

La aplicación lineal $A : \mathbf{R}^2 \longrightarrow \mathbf{R}^2$ induce un difeomorfismo del toro T^2 en si mismo. Denotaremos por T^3_A la variedad obtenida por suspensión de este difeomorfismo, es decir, como en el caso anterior (ver página 81) $T^3_A = T^2 \times \mathbf{R}/\sim$, donde $\sim$ es la relación de equivalencia siguiente

$$(p,t) \sim (p',t') \qquad \text{sii} \qquad t - t' = n \quad \text{y} \quad p' = A^n p.$$

La dirección definida por v_1 genera un flujo denso en $T^2 \times \mathbf{R}$ y, por ser v_1 vector propio, se proyecta sobre T^3_A dando lugar a una foliación $\mathcal{F}_0$ de dimensión uno cuyas hojas son densas sobre toros.

$(T^3_A, \mathcal{F}_0)$ es un flujo de Lie modelado en el álgebra afín dos dimensional. Para comprobarlo construiremos de nuevo T^3_A partiendo del grupo G que se obtiene al considerar en $\mathbf{R}^2 \times \mathbf{R}$ la siguiente ley de multiplicación

$$(p,t)\cdot(p',t') = (p + A^t p', t + t')$$

(nótese que G es el grupo G_7 con $k = 1$).

Si H es el subgrupo discreto uniforme de G definido por

$$H = \{(p,t) \in \mathbf{R}^3 : p \in \mathbf{Z}^2, t \in \mathbf{Z}\}$$

es claro que el espacio homogeneo compacto G/H es precisamente T^3_A (piénsese por ejemplo en T^3_A definido por la acción de $\mathbf{Z}$ en $T^2 \times \mathbf{R}$). El álgebra de Lie de G está generada por los campos vectoriales

$$e_1 = \frac{1}{\log\lambda}\frac{\partial}{\partial t}, \quad e_3 = \lambda^t v_1, \quad e_2 = \lambda^{-t} v_2$$

que satisfacen las relaciones

$$[e_1, e_2] = e_2, \qquad [e_1, e_3] = -e_3, \qquad [e_2, e_3] = 0.$$

El subgrupo uniparamétrico σ_t generado por e_2 es normal en G puesto que $< e_2 >$ es un ideal del álgebra de Lie de G (cf. [WA 71]). Entonces la foliación que define σ_t en G es un flujo de Lie modelado en $\mathrm{Aff}^+(\mathbf{R})$, pues $G/ < \sigma_t >$ tiene por álgebra la generada por e_1 y e_3 que es el álgebra de $\mathrm{Aff}^+(\mathbf{R})$. Por tanto, la foliación obtenida en T_A^3 es transversalmente afín.

La $\mathfrak{g}_4$-foliación de Lie que buscamos se construirá sobre la variedad producto $T_A^3 \times S^1$ (cf. el trabajo de El-Kacimi–Nicolau [KA 88]).

A través del morfismo de grupos

$$\begin{array}{ccc} \mathrm{Aff}^+(\mathbf{R}) & \longrightarrow & \mathrm{Sl}(2,\mathbf{R}) \\ \begin{pmatrix} a & b \\ 0 & 1 \end{pmatrix} & \longmapsto & \frac{1}{\sqrt{a}}\begin{pmatrix} a & b \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \end{array}$$

podemos considerar a $\mathrm{Aff}^+(\mathbf{R})$ como un subgrupo de $\mathrm{Sl}(2,\mathbf{R})$. Consideremos el recubrimiento universal $\widetilde{\mathrm{Sl}}(2,\mathbf{R})$ de $\mathrm{Sl}(2,\mathbf{R})$. Dado que la variedad $\mathrm{Aff}^+(\mathbf{R})$ es simplemente conexa, la inmersión $\mathrm{Aff}^+(\mathbf{R}) \to \mathrm{Sl}(2,\mathbf{R})$ dada anteriormente puede ser elevada a $\widetilde{\mathrm{Sl}}(2,\mathbf{R})$. Consideraremos la elevación que envía la matriz identidad de $\mathrm{Aff}^+(\mathbf{R})$ al elemento neutro de $\widetilde{\mathrm{Sl}}(2,\mathbf{R})$ y a la imagen la denotaremos por $\widetilde{\mathrm{Aff}^+}(\mathbf{R})$.

Topológicamente el grupo $\widetilde{\mathrm{Sl}}(2,\mathbf{R})$ es $D \times \mathbf{R}$ donde D es el disco unidad en el plano complejo $\mathbf{C}$ y su estructura de grupo viene dada por el producto

$$(x,t) \times (y,s) = (\frac{x + e^{2is}y}{e^{2is} + x\overline{y}}, t + s + \varphi)$$

siendo

$$\varphi = \frac{1}{2i} \log \frac{1 + e^{-2is}x\overline{y}}{1 + e^{2is}\overline{x}y}.$$

Esta ley de multiplicación se obtiene al descomponer cada matriz de $\mathrm{Sl}(2,\mathbf{R})$ como el producto de una rotación y una matriz de la forma

$$\begin{pmatrix} a & b \\ b & c \end{pmatrix}, \qquad a > 0, \quad ac - b^2 = 1$$

(cf. [PO 85]). Nótese que esta última matriz determina un punto $z = a + ib$ del semiplano superior del plano complejo y viceversa. Al aplicar por una homografía el semiplano superior en el disco unidad resulta que dar un elemento de $\mathrm{Sl}(2,\mathbf{R})$ es equivalente a dar una pareja $(u,\theta) \in I\!D \times S^1$. Finalmente, para obtener $\widetilde{\mathrm{Sl}}(2,\mathbf{R})$ basta considerar la coordenada θ no como un ángulo sino como un elemento de $\mathbf{R}$.

Dado un $(x,t) \in \widetilde{\mathrm{Sl}}(2,\mathbf{R})$, la proyección sobre $\mathrm{Sl}(2,\mathbf{R})$ viene dadaa por

$$\frac{1}{\sqrt{1-|x|^2}}\begin{pmatrix} \cos t + |x|\cos(t+\alpha) & |x|\sin(t+\alpha) - \sin t \\ |x|\sin(t+\alpha) + \sin t & \cos t - |x|\cos(t+\alpha) \end{pmatrix}$$

siendo α el argumento de $x \in D$.

El centro de $\widetilde{\mathrm{Sl}}(2,\mathbf{R})$ está formado por los elementos (x,t) que saatisfacen la relación

$$\frac{x + e^{2is}y}{e^{2is} + x\overline{y}} = \frac{y + e^{2it}x}{e^{2it} + y\overline{x}}$$

para cualquier (y,s) perteneciente a $\widetilde{\mathrm{Sl}}(2,\mathbf{R})$. En particular, si $y = 0$ debe cumplirse que $x = e^{-2is}x$ para todo s real y por tanto $x = 0$. Entonces $y = ye^{-2it}$, lo cual implica que $t = n\pi$, siendo $n \in \mathbf{Z}$. Así pues, el ceentro de $\widetilde{\mathrm{Sl}}(2,\mathbf{R})$ es

$$Z(\widetilde{\mathrm{Sl}}(2,\mathbf{R})) = \{(0,n\pi) : n \in \mathbf{Z}\} \cong \mathbf{Z}.$$

Sea $\varphi : \mathbf{R} \longrightarrow \mathrm{Sl}(2,\mathbf{R})$ el subgrupo uniparamétrico

$$\varphi(t) = \begin{pmatrix} \cos 2\pi t & -\sin 2\pi t \\ \sin 2\pi t & \cos 2\pi t \end{pmatrix}.$$

Una elevación de φ en $\widetilde{\mathrm{Sl}}(2,\mathbf{R})$ es $\tilde{\varphi}(t) = (0, 2\pi t)$. Obsérvese que $\tilde{\varphi}(t)$ contiene la parte del centro de $\widetilde{\mathrm{Sl}}(2,\mathbf{R})$ que se proyecta sobre la matriz identidad.

Ahora ya estamos en condiciones de construir la foliación prometida. Para ello utilizaremos un desarrollo de $(T_A^3, \mathcal{F}_0)$ dado por la submersión $D_0 : \tilde{T}_A^3 \longrightarrow \widetilde{\mathrm{Aff}}^+(\mathbf{R})$ y el morfismo $h_0 : \pi_1(T_A^3) \longrightarrow \widetilde{\mathrm{Aff}}^+(\mathbf{R})$.

Sea la submersión

$$\begin{array}{rccc} D : & \tilde{T}_A^3 \times S^1 & \longrightarrow & \widetilde{\mathrm{Sl}}(2,\mathbf{R}) \\ & (x,t) & \longmapsto & D_0(x) \cdot \tilde{\varphi}(t) \end{array}$$

y la aplicación

$$\begin{array}{rcl} h : \pi_1(T_A^3 \times S^1) & \longrightarrow & \widetilde{\mathrm{Sl}}(2, \mathbf{R}) \\ (\gamma, n) & \longmapsto & h_0(\gamma) \cdot \tilde{\varphi}(n). \end{array}$$

La aplicación h es morfismo de grupos pues satisface

$$\begin{aligned} h((\gamma, n)(\gamma', n')) &= h((\gamma\gamma', n + n')) \\ &= h_0(\gamma\gamma')\tilde{\varphi}(n + n') \\ &= h_0(\gamma)h_0(\gamma')\tilde{\varphi}(n)\tilde{\varphi}(n') \\ &= h_0(\gamma)\tilde{\varphi}(n)h_0(\gamma')\tilde{\varphi}(n') \\ &= h(\gamma, n)h(\gamma', n') \end{aligned}$$

y aquí hemos utilizado que $\tilde{\varphi}(n)$ es del centro de $\widetilde{\mathrm{Sl}}(2, \mathbf{R})$.

Por último, comprobemos que D es equivariante:

$$\begin{aligned} D((\gamma, n) \cdot (x, t)) &= D((\gamma x, n + t)) \\ &= D_0(\gamma x)\tilde{\varphi}(n + t) \\ &= h_0(\gamma)D_0(x)\tilde{\varphi}(n)\tilde{\varphi}(t) \\ &= h_0(\gamma)\tilde{\varphi}(n)D(x, t) \\ &= h((\gamma, n))D(x, t). \end{aligned}$$

Entonces en $\tilde{T}_A^3 \times \mathbf{R}$ tenemos un flujo de Lie transversalmente $\widetilde{\mathrm{Sl}}(2, \mathbf{R})$ con codimensión de $\overline{\mathcal{F}}$ igual a 2 que proyecta sobre $T_A^3 \times S^1$ obteniendo así la foliación que buscábamos.

- Para realizar el álgebra $\mathfrak{g}_5 = \mathfrak{aff}(2) \oplus \mathbf{R}$, sea X un campo que genera el flujo transversalmente afín en T_A^3 descrito en el caso anterior. El campo $(X, 0)$ de $T_A^3 \times S^1$ define una foliación de Lie $\mathcal{F}$ con codimensión de $\overline{\mathcal{F}}$ igual a 2 y modelada en el álgebra $\mathfrak{g}_5$.

- Caso $\mathfrak{g}_6$. Demostraremos el resultado siguiente.

Teorema 3.6 *No existen flujos de Lie $\mathcal{F}$ sobre variedades compactas tales que la codimensión de $\overline{\mathcal{F}}$ sea 2 y tenga como modelo transverso el álgebra de Lie $\mathfrak{g}_6$.*

Demostración: Supondremos que existe un flujo $\mathcal{F}$ en la variedad M con estas propiedades. Fijemos un generador X de $\mathcal{F}$ (pasamos al recubrimiento doble orientable en el caso de que $\mathcal{F}$ no sea orientable) y un paralelismo transverso representado por los campos foliados Y_1, Y_2 e Y_3 tal que

$$[\overline{Y_1}, \overline{Y_2}] = 0$$

$$[\overline{Y_1}, \overline{Y_3}] = \overline{Y_1} \qquad\qquad [\overline{Y_2}, \overline{Y_3}] = \overline{Y_1} + \overline{Y_2}$$

siendo $\overline{Y_i}$ la clase del campo foliado Y_i módulo los campos tangentes a $\mathcal{F}$.

Consideremos en M una métrica de Riemann g. Ello da lugar a la descomposición ortogonal

$$TM = T\mathcal{F} \oplus T\mathcal{F}^{\perp}.$$

Para cada $Z \in \mathcal{X}(M)$ denotaremos por Z^t su parte tangente y por Z^n su parte ortogonal respecto esa descomposición.

Primeramente demostraremos que el conjunto

$$T = \{p \in M : Y_1^n(p) = 0\}$$

es vacío y por tanto Y_1 siempre tendrá componente transversa a $\mathcal{F}$.

<u>T es abierto</u>. Si $p \in T$, entonces Y_1 es tangente a $\overline{\mathcal{F}}$ en p, por tanto Y_2^n e Y_3^n deben ser independientes en p, pues si no lo fueran no podría ocurrir que la codimensión de la foliación adherente $\overline{\mathcal{F}}$ fuera 2. Entonces Y_2^n e Y_3^n son independientes en un abierto U que contiene a p y podemos poner

$$Y_1^n = \lambda Y_2^n + \mu Y_3^n \qquad \text{en} \quad U.$$

Las funciones λ y μ son básicas en U. En efecto, por ser los Y_i foliados, se tiene que $[Y_i, X] = fX$, lo cual implica que $[X, Y_i^n]$ es tangente a $\mathcal{F}$ y como

$$\begin{aligned} [X, Y_1^n] &= [X, \lambda Y_2^n] + [X, \mu Y_3^n] \\ &= X(\lambda) Y_2^n + X(\mu) Y_3^n + \lambda [X, Y_2^n] + \mu [X, Y_3^n] \end{aligned}$$

resulta que $X(\lambda) = X(\mu) = 0$.

Desarrollando los corchetes $[Y_1^n, Y_2^n]$ y $[Y_1^n, Y_3^n]$ en el abierto U llegamos al sistema de ecuaciones diferenciales siguientes

$$\left.\begin{array}{rcl} Y_2^n(\lambda) + \mu\lambda + \mu & = & 0 \\ Y_2^n(\mu) + \mu^2 & = & 0 \\ Y_3^n(\lambda) - \lambda^2 & = & 0 \\ Y_3^n(\mu) - \mu\lambda + \mu & = & 0 \end{array}\right\}$$

con las condiciones iniciales $\lambda(p) = 0$ y $\mu(p) = 0$.

Veamos por ejemplo como se obtienen las dos primeras ecuaciones. Dado que si Z es un campo tangente a $\mathcal{F}$ el paréntesis $[Y_i^n, Z]$ también lo es, resulta que los corchetes $[Y_i^n, Y_j^n]$ son tangentes a $\mathcal{F}$. Entonces en el abierto U tenemos que

$$\begin{array}{rcl} [Y_1^n, Y_2^n] & = & [\lambda Y_2^n, Y_2^n] + [\mu Y_3^n, Y_2^n] \\ & = & -Y_2^n(\lambda) Y_2^n - Y_2^n(\mu) Y_3^n + \mu [Y_3^n, Y_2^n] \\ & = & -Y_2^n(\lambda) Y_2^n - Y_2^n(\mu) Y_3^n - \mu Y_1^2 - \mu Y_2^n + \text{"parte tangente"} \\ & = & -(Y_2^n(\lambda) + \mu\lambda + \mu) Y_2^n - (Y_2^n(\mu) + \mu^2) Y_3^n + \text{"parte tangente"} \end{array}$$

de donde se obtienen las dos primeras ecuaciones. Para las otras procedemos de forma análoga.

Sea $\varphi(t)$ una curva integral del campo Y_2^n con la condición inicial $\varphi(0) = p$. Las dos primeras ecuaciones dan lugar a las ecuaciones diferenciales ordinarias siguientes

$$\left.\begin{array}{rcl} \dfrac{d}{dt}\mu(\varphi(t)) + \mu(\varphi(t))^2 & = & 0 \\ \dfrac{d}{dt}\lambda(\varphi(t)) + \mu(\varphi(t))\lambda(\varphi(t)) + \mu(\varphi(t)) & = & 0 \end{array}\right\}$$

y por tanto (teorema de existencia y unicidad de las soluciones) λ y μ se anulan sobre $\varphi(t)$. De hecho, al ser funciones básicas, se anulan en $\overline{F} \cap U$, donde $\overline{F}$ es la hoja de la foliación adherente $\overline{\mathcal{F}}$ que pasa por p. Entonces λ y

μ son cero a lo largo de las curvas integrales de Y_2^n que parten de los puntos de $\overline{F} \cap U$. De forma similar, deducimos que las funciones λ y μ son nulas sobre las curvas integrales de Y_3^n.

Si $Y_{2,t}^n$ e $Y_{3,t}^n$ representan los grupos uniparamétricos asociados a los campos Y_2^n e Y_3^n, la aplicación

$$\begin{aligned} \Phi : \overline{\mathcal{F}} \times \mathbf{R}^2 &\longrightarrow M \\ (x,t,s) &\longmapsto (Y_{2,t}^n \circ Y_{3,s}^n)(x) \end{aligned}$$

es un difeomorfismo local en $(p,0,0)$. En efecto, basta comprobar que

$$\Phi_*(\frac{\partial}{\partial t}|_{(p,0,0)}) = Y_2^n(p), \quad \Phi_*(\frac{\partial}{\partial s}|_{(p,0,0)}) = Y_3^n(p),$$
$$\Phi_*|_{T_p\overline{\mathcal{F}}} = \mathrm{id}.$$

Por tanto podemos tomar un entorno V de p contenido en U de manera que todo $q \in V$ sea de la forma $(Y_{2,t}^n \circ Y_{3,s}^n)(x)$ para ciertos t y s y algún $x \in \overline{\mathcal{F}} \cap U$. Entonces $\lambda(q) = \mu(q) = 0$ en un entorno abierto de p, lo cual demuestra que el conjunto T es abierto.

Como claramente es cerrado, T es el vacío o T es igual a M. Pero si T fuera todo M, llegamos a una contradicción. En efecto, siendo θ^0, θ^1, θ^2, θ^3 la base dual de X, Y_1, Y_2, Y_3, se tiene que $d\theta^2 = -\theta^2 \wedge \theta^3$, debido a que Y_2 e Y_3 son siempre transversos a $\overline{\mathcal{F}}$ se cumple que para todo campo Z tangente a $\overline{\mathcal{F}}$ $\theta^2(Z) = \theta^3(Z) = d\theta^2(Z,\cdot) = d\theta^3(Z,\cdot) = 0$, entonces las 1-formas θ^2 y θ^3 son proyectables sobre la variedad básica $W = M/\overline{\mathcal{F}}$. De esta forma hemos obtenido una forma de volúmen en W que es exacta, cosa que es del todo imposible pues W es compacta. Por tanto $T = M$.

Consideremos ahora el conjunto $Q = \cup_{a \in \mathbf{R}} Q_a$, siendo

$$Q_a = \{p \in M : Y_2^n(p) = aY_1^n(p)\}.$$

<u>Q es abierto</u>. Si $p \in Q$, hay un $a \in \mathbf{R}$ tal que $Y_2^n(p) = aY_1^n(p)$. Por ser codim $(\overline{\mathcal{F}}) = 2$, los vectores Y_1^n e Y_3^n deben ser independientes en p. Entonces existen funciones λ y μ definidas en un entorno abierto U de p tales que

$$Y_2^n = \lambda Y_1^n + \mu Y_3^n$$

con $\lambda(p) = a$ y $\mu(p) = 0$.

Como $[Y_1, Y_2] = [Y_1, Y_2^t] + [Y_1, Y_2^n]$ es tangente a $\mathcal{F}$, la parte normal del corchete $[Y_1, Y_2^n]$ es cero. Pero

$$\begin{aligned} [Y_1, Y_2^n]^n &= Y_1(\lambda)Y_1^n + Y_1(\mu)Y_3^n + \lambda[Y_1, Y_1^n]^n + \mu[Y_1, Y_3^n]^n \\ &= (Y_1(\lambda) + \mu)Y_1^n + Y_1(\mu)Y_3^n \end{aligned}$$

y por tanto tenemos las ecuaciones diferenciales

$$\left.\begin{aligned} Y_1(\lambda) + \mu &= 0 \\ Y_1(\mu) &= 0 \end{aligned}\right\} \quad \text{en} \quad U.$$

Análogamente, desarrollando la parte normal del corchete $[Y_3, Y_2^n]$ obtenemos las ecuaciones diferenciales

$$\left.\begin{aligned} Y_3(\lambda) + 1 &= 0 \\ Y_3(\mu) + \mu &= 0 \end{aligned}\right\} \quad \text{en} \quad U.$$

Como se da la condición inicial $\mu(p) = 0$, por el teorema de existencia y unicidad de soluciones de ecuaciones diferenciales ordinarias. resulta que μ es cero a lo largo de las curvas integrales de Y_1 e Y_3 y, por argumentos idénticos a los utilizados al demostrar que el conjunto T era abierto, resulta que $\mu = 0$ en todo U.

Asi pues, $Y_2^n = \lambda Y_1^n$ en el abierto U y cada $x \in U$ es de $Q_{\lambda(x)} \subset Q$. Por lo tanto, Q es abierto en M.

<u>Q es cerrado.</u> Si p no es de Q_a para cada $a \in \mathbb{R}$ tenemos que $Y_2^n(p) \neq aY_1^n(p)$. En particular $Y_2^n(p)$ es no nulo. Como Y_1^n no se anula nunca, los vectores Y_1 e Y_2 son linealmente independientes en p y por tanto son independientes en un entorno abierto U de p, lo cual demuestra que Q es cerrado.

Como que la variedad M es conexa debe ser $Q = \emptyset$ o $Q = M$. La demostración del teorema habrá acabado cuando veamos que cada una de estas suposiciones nos llevan a un absurdo.

1. Si $Q = \emptyset$, los campos Y_1^n e Y_2^n son linealmente independientes en todo punto de M. Entonces existen funciones diferenciables f y g globalmente definidas en M tales que

$$Y_3^n = fY_1^n + gY_2^n.$$

Calculando otra vez la parte normal del paréntesis $[Y_1, Y_3^n]$ obtenemos la ecuación, ahora global, $Y_1(\lambda) = 1$. Pero al ser M compacta, esta relación es imposible.

2. Si $Q = M$, para cada p de M hay un $a(p) \in \mathbf{R}$ tal que

$$Y_2^n(p) = a(p)Y_1^n(p).$$

La función a es básica y $Y_2 - aY_1$ es un campo tangente a $\overline{\mathcal{F}}$ en todo punto. Entonces el corchete $[Y_3, Y_2 - aY_1]$ es de $\overline{\mathcal{F}}$ y esto implica, desarrollando el paréntesis, que $Y_3(a) = -1$ lo cual es de nuevo una contradicción por ser M variedad compacta.

Por tanto, hemos demostrado que no pueden existir foliaciones transversalmente modeladas en el álgebra $\mathfrak{g}_6$ con $\operatorname{codim}(\overline{\mathcal{F}}) = 2$ lo cual acaba el teorema. ∎

- Caso $\mathfrak{g}_7$. Demostraremos que

Teorema 3.7 *No existen flujos de Lie $\mathcal{F}$ sobre variedades compactas tales que la codimensión de $\overline{\mathcal{F}}$ sea 2 y tenga como modelo transverso el álgebra de Lie $\mathfrak{g}_7$.*

Demostración: Al igual que en el caso anterior, demostraremos que el conjunto $T = \{p \in M : Y_1^n(p) = 0\}$ es abierto y cerrado y por tanto, al ser la variedad M conexa, $T = \emptyset$ o $T = M$.

Para demostrar que es abierto ponemos $Y_1^n = \lambda Y_2^n + \mu Y_3^n$ en un entorno abierto U de p. Como antes, desarrollando los corchetes de Lie $[Y_1^n, Y_2^n]$ y $[Y_1^n, Y_3^n]$ obtenemos las ecuaciones diferenciales

$$\left.\begin{aligned} Y_2^n(\lambda) + k\mu &= 0 \\ Y_2^n(\mu) &= 0 \\ Y_3^n(\lambda) + (1-k)\lambda^2 &= 0 \\ Y_3^n(\mu) + \mu &= 0 \end{aligned}\right\}$$

con las condiciones iniciales $\lambda(p) = 0$ y $\mu(p) = 0$.

Entonces λ y μ han de ser nulas en U, de donde se deduce que T es un conjunto abierto.

T no puede ser todo M pues, como ocurre en el caso $\mathfrak{g}_6$, tendríamos un elemento de volumen exacto —$d\theta^2 = -k\theta^2 \wedge \theta^3$ $(k \neq 0)$— en la variedad básica $W = M/\overline{\mathcal{F}}$ que es compacta. Por tanto $T = \emptyset$.

Consideramos el conjunto $Q = \cup_{a \in \mathbf{R}} Q_a$ con $Q_a = \{p \in M : Y_2^n(p) = aY_1^n(p)\}$.

<u>Q es abierto.</u> Si $p \in Q$, hay un a real tal que $Y_2^n(p) = aY_1^n(p)$ por tanto los campos Y_3^n e Y_1^n son independientes en p. Entonces se tiene la relación $Y_2^n = \lambda Y_1^n + \mu Y_3^n$ en un entorno abierto U que contiene a p.

Considerando las partes normales de los paréntesis $[Y_1, Y_2^n]$ e $[Y_3, Y_2^n]$, obtenemos las ecuaciones diferenciales

$$\left.\begin{array}{rcl} Y_1(\lambda) + \mu & = & 0 \\ Y_1(\mu) & = & 0 \\ Y_3(\lambda) + (k-1)\lambda & = & 0 \\ Y_3(\mu) + k\mu & = & 0 \end{array}\right\} \quad \text{en} \quad U.$$

con las condiciones iniciales $\lambda(p) = a$ y $\mu(p) = 0$. Por tanto μ es cero sobre las curvas integrales de Y_1 e Y_2 con lo cual resulta ser nula en todo el abierto U. Así pues, $Y_2^n = \lambda Y_1^n$ en un entorno abierto de p y entonces el conjunto Q es abierto.

La demostración de que Q es cerrado es idéntica a la del teorema anterior.

Finalmente veremos que Q no puede ser ni M ni el vacío, lo cual acaba la demostración.

1. Si Q fuera vacío Y_1^n e Y_2^n serían linealmente independientes en todo punto y por tanto tendríamos funciones globales f y g en M de manera que
$$Y_3^n = fY_1^n + gY_2^n.$$
Al calcular el paréntesis $[Y_1, Y_3^n]$ y considerar su parte normal llegamos a la ecuación $Y_1(\lambda) = 1$, pero M es compacta y esta relación no es posible.

2. Si Q fuera todo M tendríamos una función básica a en M tal que $Y_2^n = aY_1^n$. Entonces $Y_2 - aY_1$ sería tangente a $\overline{\mathcal{F}}$ y como que $[Y_3, Y_2 - aY_1]$ ha de ser también tangente (pues Y_3 es foliado) tenemos que a satisface la ecuación diferencial global

$$Y_3(a) = (1 - k)a.$$

Si $k \neq 1$ la única solución posible es $a = 0$, de otra forma a sería no acotada en M compacta. Como antes (teorema 3.6), esto nos conduce a una contradicción, pues se cumpliría que $d\theta^1 = -\theta^1 \wedge \theta^3$ siendo θ^1 y θ^3 formas proyectables sobre la variedad básica $W = M/\overline{\mathcal{F}}$.

Cuando $k = 1$, al calcular $[Y_1, Y_2 - aY_1]$ deducimos que la función a es constante. Sea $\omega^0, \omega^1, \omega^2, \omega^3$ la base dual de la base de campos $X, Y_2 - aY_1, Y_1, Y_3$. Se obtiene que $d\omega^2 = -\omega^2 \wedge \omega^3$, siendo ω^2 y ω^3 1-formas proyectables sobre la variedad básica W, lo cual es de nuevo una contradicción.

Por tanto no pueden existir $\mathfrak{g}_7$-foliaciones de Lie sobre M compacta y con codim$(\mathcal{F}) = 2$. ■

• Caso $\mathfrak{g}_8$ (con $h = 0$). Si $\theta^0, \theta^1, \theta^2, \theta^3$ son las coordenadas canónicas de la variedad $T^2 \times T^2$, el campo vectorial dado por

$$X = \frac{\partial}{\partial\theta^0} + \alpha\frac{\partial}{\partial\theta^1}$$

con α irracional define un flujo de Lie transversalmente abeliano con respecto al paralelismo transverso dado por $\partial/\partial\theta^1$, $\partial/\partial\theta^2$, $\partial/\partial\theta^3$ y cumple que codim$(\overline{\mathcal{F}}) = 2$. Ahora, modificamos este paralelismo tomando los campos

$$\left.\begin{array}{rcl} e_1 & = & \cos\theta^2\dfrac{\partial}{\partial\theta^1} + \sin\theta^2\dfrac{\partial}{\partial\theta^3} \\ e_2 & = & \sin\theta^2\dfrac{\partial}{\partial\theta^1} + \cos\theta^2\dfrac{\partial}{\partial\theta^3} \\ e_3 & = & -\dfrac{\partial}{\partial\theta^2} \end{array}\right\}$$

Entonces el campo vectorial X también define (además de un $\mathfrak{g}_1$-flujo) un $\mathfrak{g}_8$-flujo de Lie.

Codimensión de $\overline{\mathcal{F}} = 1$

En esta situación, el álgebra de Lie estructural tiene dimensión dos. Como ya hemos visto anteriormente (cf. página 79) dicha álgebra es abeliana, por tanto la álgebras $\mathfrak{g}_3$ y $\mathfrak{g}_4$ no son realizables, pues no tienen subálgebras abelianas de dimensión dos (si v_1 y v_2 generaran una subálgebra abeliana de $\mathfrak{g}_3$ o $\mathfrak{g}_4$, entonces serían linealmente dependientes).

Daremos ejemplos de realizaciones de las álgebras $\mathfrak{g}_1, \mathfrak{g}_2, \mathfrak{g}_5$ y $\mathfrak{g}_8$ siendo en este último caso $h = 0$. Demostraremos que en el caso $\mathfrak{g}_7$ las únicas realizaciones posibles se dan cuando k es irracional y se construirá un ejemplo de este tipo. Finalmente probaremos que el álgebra $\mathfrak{g}_6$ no es realizable.

- Caso $\mathfrak{g}_1$. Considérese por ejemplo el flujo $(X, 0)$ sobre $T^3 \times S^1$ donde el campo X define un flujo lineal denso en el toro T^3.

- Caso $\mathfrak{g}_2$. Este álgebra no es realizable y para demostrarlo utilizaremos el siguiente resultado de Molino sobre flujos riemannianos.

Teorema 3.8 (cf. [MO 85]) *Para un flujo riemanniano $\mathcal{F}$ en una variedad compacta conexa orientada M, las propiedades siguientes son equivalentes:*

1. *$\mathcal{F}$ es isométrico,*
2. *El haz transverso central C admite una trivialización global y*
3. *El espacio de cohomología en grado máximo $H_b^{n-1}(M, \mathcal{F})$ no es nulo (es decir, $\mathcal{F}$ es unimodular).*

Por *flujo riemanniano* se entiende una foliación riemanniana de dimensión uno, y el *haz transverso central* es el haz sobre M de los gérmenes de campos transversos centrales locales, esto es, las clases de campos $\overline{X} \in \mathcal{L}(\mathcal{U}, \mathcal{F})/\mathcal{X}_{\mathcal{F}}$ tales que $[\overline{X}, \overline{Y}] = 0$ para cualquier $\overline{Y}$ de $\mathcal{L}(M, \mathcal{F})/\mathcal{X}_{\mathcal{F}}$.

También nos valdremos del siguiente resultado debido a Llabrés y Reventós :

Teorema 3.9 (cf. [LR 88]) *Sea $\mathcal{F}$ una $\mathfrak{g}$-foliación de Lie tal que la codimensión de $\overline{\mathcal{F}}$ es igual a uno. Entonces $\mathcal{F}$ es unimodular si y solo si $\mathfrak{g}$ es unimodular y el álgebra de Lie estructural $\mathfrak{h}$ también es unimodular.*

Como consecuencia tenemos que, al ser $\mathfrak{g}_2$ unimodular y ser el álgebra estructural abeliana, la foliación $\mathcal{F}$ es unimodular. Utilizando el teorema 3.8 resulta que el haz transverso central C admite una trivialización global, por tanto existen v y w campos foliados independientes y tangentes a la adherencia de $\mathcal{F}$ que conmutan, como clases de campos transversos, con todo campo foliado global. En particular $[v, e_i] = [w, e_i]$, siendo los vectores e_1, e_2 y e_3 generadores de $\mathfrak{g}_2$. Si ponemos

$$\left.\begin{array}{rcl} v & = & \lambda e_1 + \mu e_2 + \gamma e_3 \\ w & = & \alpha e_1 + \beta e_2 + \delta e_3 \end{array}\right\}$$

obtenemos que $v = \lambda e_1$ y $w = \alpha e_1$ lo cual está en contradicción con el hecho de que la dimensión del álgebra estructural sea 2.

- En el caso del álgebra $\mathfrak{g}_5$, sea X el generador del flujo transversalmente afín en T^3_A considerado cuando la codimensión de $\overline{\mathcal{F}}$ era 2 (véase pag. 84). El campo vectorial $(X, \alpha\partial/\partial\theta)$ sobre $T^3_A \times S^1$, con α irracional y θ la función coordenada en S^1, tiene a $\mathfrak{g}_5 = \mathfrak{aff}^+(2) \oplus \mathbf{R}$ como álgebra transversa y la codimensión de la adherencia de las hojas que define es uno.

- Caso $\mathfrak{g}_8$ cuando $h = 0$. Igual que en construcciones anteriores, tomamos las coordenadas canónicas θ^0, θ^1, θ^2 y θ^3 de $T^3 \times S^1$. Entonces el campo vectorial definido por

$$X = \frac{\partial}{\partial\theta^0} + \alpha\frac{\partial}{\partial\theta^1} + \beta\frac{\partial}{\partial\theta^2}$$

con α y β racionalmente independientes admite a

$$\left.\begin{array}{rcl} e_1 & = & \cos\theta^3\dfrac{\partial}{\partial\theta^0} + \sin\theta^3\dfrac{\partial}{\partial\theta^1} \\ e_2 & = & \sin\theta^3\dfrac{\partial}{\partial\theta^0} + \cos\theta^3\dfrac{\partial}{\partial\theta^1} \\ e_3 & = & -\dfrac{\partial}{\partial\theta^3} \end{array}\right\}$$

como paralelismo transverso y e_1, e_2, e_3 es precisamente una base del álgebra $\mathfrak{g}_8$ con el parámetro $h = 0$.

- Estudiaremos ahora las restantes álgebras $\mathfrak{g}_6$, $\mathfrak{g}_7$ y $\mathfrak{g}_8$ cuando $h \neq 0$.

Ya hemos visto (confróntese la página 77 y siguientes) que los grupos conexos y simplemente conexos asociados a estas álgebras pueden pensarse como el espacio $\mathbf{R}^2 \times \mathbf{R}$ con el producto

$$(p,t)\cdot(q,s) = (p + e^{-\Lambda t}q, t+s)$$

siendo

$$e^{-\Lambda t} = \begin{pmatrix} e^{-t} & -te^{-t} \\ 0 & e^{-t} \end{pmatrix} \qquad \text{para} \quad \mathfrak{g}_6,$$

$$e^{-\Lambda t} = \begin{pmatrix} e^{-t} & 0 \\ 0 & e^{-kt} \end{pmatrix} \qquad \text{para} \quad \mathfrak{g}_7$$

y

$$e^{-\Lambda t} = C(t)\begin{pmatrix} \cos(\varphi + t) & -\sin t \\ \sin t & \cos(\varphi - t) \end{pmatrix} \qquad \text{para} \quad \mathfrak{g}_8,$$

donde $C(t) = \alpha e^{\beta t}/2$ con $\alpha = \sqrt{4-h^2}$ y $\beta = \tan\varphi = h/2$ $(\sin\varphi = h/2$, $\cos\varphi = h/2)$.

Las bases que utilizaremos para definir las álgebras que se consideran vienen dadas por los campos invariantes a la izquierda siguientes:

– para el álgebra $\mathfrak{g}_6$

$$\left.\begin{aligned} e_1 &= e^{-t}\frac{\partial}{\partial x} \\ e_2 &= -te^{-t}\frac{\partial}{\partial x} + e^{-t}\frac{\partial}{\partial y} \\ e_3 &= \frac{\partial}{\partial t} \end{aligned}\right\}$$

- para el álgebra $\mathfrak{g}_7$

$$\left.\begin{array}{rcl} e_1 & = & e^{-t}\dfrac{\partial}{\partial x} \\ e_2 & = & e^{-kt}\dfrac{\partial}{\partial y} \\ e_3 & = & \dfrac{\partial}{\partial t} \end{array}\right\}$$

y

- para el álgebra $\mathfrak{g}_8$

$$\left.\begin{array}{rcl} e_1 & = & \dfrac{2}{\alpha}e^{-\beta t}(\cos(\varphi + t)\dfrac{\partial}{\partial x} + \sin t\dfrac{\partial}{\partial y}) \\ e_2 & = & \dfrac{2}{\alpha}e^{-\beta t}(-\sin t\dfrac{\partial}{\partial x} + \cos(\varphi - t)\dfrac{\partial}{\partial y}) \\ e_3 & = & -\dfrac{\alpha}{2}\dfrac{\partial}{\partial t} \end{array}\right\}$$

Supongamos que sobre una variedad compacta tenemos una realización $\mathcal{F}$ con $\operatorname{codim}(\overline{\mathcal{F}}) = 1$ de alguna de estas álgebras. Denotaremos el álgebra de Lie transversa por $\mathfrak{g}$ y el grupo correspondiente por G.

Las adherencias de las hojas de $\mathcal{F}$ son toros T^3 (cf. página 79) y tenemos por tanto la fibración básica

$$T^3 \xrightarrow{i} M \xrightarrow{p} S^1$$

y, como $\pi_1(T^3) = \mathbb{Z}^3$, $\pi_1(S^1) = \mathbb{Z}$ y $\pi_2(S^1) = 0$, la correspondiente sucesión exacta de homotopía queda

$$0 \longrightarrow \mathbb{Z}^3 \xrightarrow{i_*} \pi_1(M) \xrightarrow{p_*} \mathbb{Z} \longrightarrow 0.$$

Esta sucesión es una *extensión* del grupo fundamental $\pi_1(M)$ de M. Puesto que $\mathbb{Z}^3$ es abeliano, la acción

$$\begin{array}{rcl} \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}^3 & \longrightarrow & \mathbb{Z}^3 \\ (n, p) & \longmapsto & n \cdot p \end{array}$$

dada por $n \cdot p = \tilde{n}p\tilde{n}^{-1}$ con $\tilde{n} \in p_*^{-1}(n)$ está bien definida (obsérvese que $n \cdot p \in \mathbf{Z}^3$ pues $p_*(\tilde{n}p\tilde{n}^{-1}) = \tilde{n}\tilde{n}^{-1} = 1$ y, al ser la sucesión exacta, $n \cdot p$ es de la imagen de i_*). En efecto, si $\overline{n}$ es otro elemento de $p_*^{-1}(n)$, existe un $h \in \mathbf{Z}^3$ tal que $\overline{n} = \tilde{n}h$ debido a que $\pi_1(M)/\mathbf{Z}^3 \cong \mathbf{Z}$.

Nótese también que cualquier sección $s : \mathbf{Z} \longrightarrow \pi_1(M)$ da lugar a una acción de $\mathbf{Z}$ en $\mathbf{Z}^3$

$$n \star p = s(n)ps(n)^{-1}.$$

Como la acción primeramente definida no dependía del $\tilde{n} \in p_*^{-1}(n)$ elegido, resulta que $n \cdot p = n \star p$.

En [HI 82] se demuestra el resultado siguiente

Teorema 3.10 *Si*

$$1 \longrightarrow H \xrightarrow{\mu} G \xrightarrow{\epsilon} K \longrightarrow 1$$

es una extensión de G que admite una sección $s : K \longrightarrow G$ (denominada escisión *por la derecha). entonces*

$$G \cong H \times_s K$$

donde $H \times_s K$ es el grupo $H \times K$ con la ley de multiplicación

$$(h_1, k_1)(h_2, k_2) = (h_1(k_1 \star k_2), k_1 k_2).$$

(Se dice que G es el producto semidirecto *de H y G).*

Utilizaremos este teorema para calcular el grupo $\pi_1(M)$.

Podemos pensar que el fibrado $T^3 \longrightarrow M \longrightarrow S^1$ se obtiene a partir de un difeomorfismo φ de T^3 en T^3. Más precisamente, consideremos

$$M = T^3 \times [0, 1]/\sim$$

donde

$$(p,t) \sim (q,s) \quad \text{si y solo si} \quad \begin{cases} p = q \quad \text{y} \quad t = s \\ \text{ó} \\ q = \varphi(p) \quad \text{y} \quad t = 0, s = 1 \end{cases}$$

es decir, identificamos $T^3 \times \{0\}$ con $T^3 \times \{1\}$ via el difeomorfismo φ.

Tenemos pues que $\pi_1(M)$ es el producto semidirecto de los grupos abelianos $\pi_1(T^3) \cong \mathbf{Z}^3$ y $\pi_1(S^1) \cong \mathbf{Z}$. Estudiaremos la acción de $\mathbf{Z}$ sobre $\mathbf{Z}^3$ para determinar con precisión cual es el producto en $\mathbf{Z}^3 \times \mathbf{Z}$.

Sea $\gamma : I \to S^1$ un camino cerrado en S^1 representando la clase del elemento neutro, es decir $[\gamma] = 1 \in \pi_1(S^1) = \mathbf{Z}$ y $\tilde{\gamma} : I \to M$ una elevación de γ en M de manera que

$$\tilde{\gamma}(t) = [(x_0, t)]$$

con $x_0 \in T^3$, entonces

$$\tilde{\gamma}(0) = [(x_0, 0)] \qquad \text{y} \qquad \tilde{\gamma}(1) = [(x_0, 1)] = [(\varphi^{-1}x_0, 0)].$$

Sea $\tau : I \to T^3$ un camino cerrado en T^3 con $\tau(0) = \varphi^{-1}x_0 = \tau(1)$. Pensaremos en τ dentro de M como el camino $[(\tau(t), 0)]$. Entonces la acción de $\mathbf{Z}$ en $\mathbf{Z}^3$ viene definida por

$$1 \cdot \tau = \tilde{\gamma} \cdot \tau \cdot \tilde{\gamma}^{-1}$$

Lema 3.1 *El camino $\tilde{\gamma} \cdot \tau \cdot \tilde{\gamma}^{-1}$ es homotopo al camino $\varphi\tau$.*

Demostración: Bastará construir una homotopía

$$H : I \times I \longrightarrow M$$

con $H(0,t) = \varphi\tau$ y $H(1,t) = \tilde{\gamma} \cdot \tau \cdot \tilde{\gamma}^{-1}$. Ponemos

$$H(s,t) = [(x_0, st)] \cdot [(\varphi\tau, s)] \cdot [(x_0, st)]^{-1}$$

entonces

$$\begin{aligned} H(0,t) &= [(x_0, 0)] \cdot [(\varphi\tau, 0)] \cdot [(x_0, 0)]^{-1} = \varphi\tau \\ H(1,t) &= [(x_0, t)] \cdot [(\varphi\tau, 1)] \cdot [(x_0, t)]^{-1} \\ &= [(x_0, t)] \cdot [(\tau, 0)] \cdot [(x_0, t)]^{-1} \\ &= \tilde{\gamma} \cdot \tau \cdot \tilde{\gamma}^{-1} \end{aligned}$$

y el lema queda demostrado. ∎

Por tanto $\pi_1(M) = \mathbf{Z}^3 \times_\varphi \mathbf{Z}$, siendo $\mathbf{Z}^3 \times_\varphi \mathbf{Z}$ el grupo $\mathbf{Z}^3 \times \mathbf{Z}$ con el producto

$$(p,n)\cdot(q,m) = (p + \varphi_*^n q, n+m)$$

donde $\varphi_* : \pi_1(T^3) \to \pi_1(T^3)$ es el morfismo a nivel de homotopía inducido por el difeomorfismo $\varphi : T^3 \longrightarrow T^3$.

Como $\mathcal{F}$ es una foliación de Lie, tenemos el desarrollo (cf. la proposición 1.5)

$$\begin{array}{ccc} \widetilde{M} & \xrightarrow{D} & G \\ \downarrow & & \\ M & & \end{array}$$

con la representación de holonomía $h : \pi_1(M) \to h(\pi_1(M)) = \Gamma \subset G$ y $D(\gamma \cdot \tilde{x}) = h(\gamma)\cdot D\tilde{x}$, $\tilde{x} \in \widetilde{M}$ y $\gamma \in \pi_1(M)$.

Se tiene que la variedad básica $M/\overline{\mathcal{F}}$ es difeomorfa a $G/\overline{\Gamma}$ (cf. por ejemplo [LR 88]), entonces $\overline{\Gamma}$ es un subgrupo dos dimensional de G. El álgebra de Lie $\mathcal{H}$ de la componente conexa de $\overline{\Gamma}$ que contiene al elemento neutro, $\overline{\Gamma}_e$, es precisamente el álgebra estructural de $\mathcal{F}$ y ya sabemos que en el caso que estamos tratando dicha álgebra es abeliana.

Como $\mathfrak{g}$ está generada por vectores e_1, e_2, e_3 que satisfacen

$$\left.\begin{array}{rcl} [e_1, e_2] & = & 0 \\ [e_1, e_3] & = & ae_1 + be_2 \\ [e_2, e_3] & = & ce_1 + de_2 \end{array}\right\}$$

con $ad - bc \neq 0$, la única subálgebra abeliana con dimensión dos de $\mathfrak{g}$ es $\mathcal{H} = < e_1, e_2 >$. Fijándonos en las expresiones de los campos e_1 y e_2 para $\mathfrak{g}_6$, $\mathfrak{g}_7$ y $\mathfrak{g}_8$ (ver página 97) resulta que $\mathcal{H}$ está generada por $\partial/\partial x$ y $\partial/\partial x$ y por tanto

$$\overline{\Gamma} \cong \mathbf{R}^2 \times \mathbf{Z}\epsilon$$

para cierto número real positivo ϵ. Además tenemos que $\overline{\Gamma}_e \cong \mathbf{R}^2 \times \{0\}$ es abeliano.

Lema 3.2 *Sea A un subgrupo abeliano de $\Gamma = h(\pi_1(M))$. Entonces A está contenido en $\mathbf{R}^2 \times \{0\}$ o existe un elemento $a = (a_1, a_2, a_3)$ de $\mathbf{R}^3$ con $a_3 \neq 0$ tal que $A = \{a^n : n \in \mathbf{Z}\}$.*

Demostración: Si A no está en $\mathbf{R}^2 \times \{0\}$ entonces $A \cap (\mathbf{R}^2 \times \{0\}) = 0$ pues en el caso contrario tendríamos dos elementos $(p, 0) \in A$ con $p \neq 0$ y $(q, t) \in A$ con $t \neq 0$, y como el grupo A es abeliano

$$(p, 0)(q, t) = (q, t)(p, 0)$$

de donde resulta que

$$q + e^{-\Lambda t}p = q + p.$$

Esto implica que $t = 0$ salvo en el caso $\mathfrak{g}_8$ (con h=0) pero este caso no lo consideramos aquí. Por tanto, $A \cap (\mathbf{R}^2 \times \{0\}) = 0$.

En particular deducimos que A tiene como mucho un elemento en cada nivel $\mathbf{R}^2 \times \{m\epsilon\}$, $m \in \mathbf{Z}$, ya que si a_1, a_2 son de $\mathbf{R}^2 \times \{m\epsilon\}$ entonces $a_1 a_2^{-1} \in A \cap (\mathbf{R}^2 \times \{0\}) = 0$, de donde concluimos que $a_1 = a_2$.

Sea ahora $a = (a_1, a_2, n\epsilon)$ el elemento de A que está en el nivel más bajo. Para cada $b = (b_1, b_2, m\epsilon)$ escribimos $m = nd + r$, entonces $ba^{-d} \in A$ y está en el nivel $r\epsilon$ con $r < n$, por tanto r tiene que ser 0 y $b = a^d$.

Así pues tanto $A =< a >$ y el lema queda demostrado. ∎

Sigamos estudiando la estructura del grupo $\Gamma = h(\pi_1(M))$.

Proposición 3.1 *Siguiendo la notación anterior tenemos que*

$$(\mathbf{R}^2 \times \{0\}) \cap \Gamma = h(\mathbf{Z}^3)$$

Demostración: Por ser $\mathbf{R}^2 \times \{0\}$ abeliano, $(\mathbf{R}^2 \times \{0\}) \cap \Gamma$ es un subgrupo abeliano de Γ. Los grupos $h(\mathbf{Z}^3)$ y $h(\mathbf{Z})$ son abelianos en Γ y por tanto, aplicando el lema anterior, no tenemos más que las cuatro posibilidades siguientes:

a) Tanto $h(\mathbf{Z}^3)$ como $h(\mathbf{Z})$ están contenidos en $\mathbf{R}^2 \times \{0\}$. Entonces Γ, generado por $h(\mathbf{Z})$ y $h(\mathbf{Z}^3)$, está contenido en $\mathbf{R}^2 \times \{0\}$ lo cual contradice que $\mathbf{R}^3/\overline{\Gamma} = S^1$.

b) $h(\mathbf{Z}^3)$ está contenido en $\mathbf{R}^2 \times \{0\}$ y $h(\mathbf{Z}) = \{a^n : n \in \mathbf{Z}\}$ con $a \notin \mathbf{R}^2 \times \{0\}$. Está claro que $h(\mathbf{Z}^3) \subset (\mathbf{R}^2 \times \{0\}) \cap \Gamma$; veamos la otra inclusión. Si $\sigma \in (\mathbf{R}^2 \times \{0\}) \cap \Gamma$, entonces hay un elemento

$(p,n) \in \pi_1(M)$ tal que $h((p,n)) = \sigma$ pero como $(p,n) = (p,0)(0,n)$ tenemos que

$$\sigma = h((p,0)) \cdot h((0,n)) = b \cdot a^k$$

con $b \in \mathbf{R}^2 \times \{0\}$ y $a \notin \mathbf{R}^2 \times \{0\}$. Como que σ ha de estar en $\mathbf{R}^2 \times \{0\}$, entonces $k = 0$ ya que si $b = (b_1, b_2, 0)$ y $a = (a_1, a_2, a_3)$ con $a_3 \neq 0$ tendríamos que $b \cdot a^k = (c_1, c_2, ka_3) \in \mathbf{R}^2 \times \{0\}$.
Por tanto en este caso se da la igualdad $(\mathbf{R}^2 \times \{0\}) \cap \Gamma = h(\mathbf{Z}^3)$.

c) $h(\mathbf{Z})$ está contenido en $\mathbf{R}^2 \times \{0\}$ y $h(\mathbf{Z}^3) = \{a^n : n \in \mathbf{Z}\}$ con $a \notin \mathbf{R}^2 \times \{0\}$. Procedemos como en el caso anterior. Si $\sigma \in (\mathbf{R}^2 \times \{0\}) \cap \Gamma$, entonces hay un (p,n) tal que

$$\sigma = h((p,n)) = h((p,0)) \cdot h((0,n)) = a^k \cdot b$$

con $b \in \mathbf{R}^2 \times \{0\}$. Entonces $k = 0$ y $(\mathbf{R}^2 \times \{0\}) \cap \Gamma = h(\mathbf{Z})$. Pero esto no es posible, pues $h(\mathbf{Z})$ no puede ser denso en $\mathbf{R}^2 \times \{0\}$ y $\overline{\Gamma}_e \neq \mathbf{R}^2 \times \{0\}$ lo cual es una contradicción.

d) $h(\mathbf{Z}^3) = \{a^n : n \in \mathbf{Z}\}$ y $h(\mathbf{Z}) = \{b^n : n \in \mathbf{Z}\}$ con $a \in \mathbf{R}^2 \times \{k_1\epsilon\}$ y $b \in \mathbf{R}^2 \times \{k_2\epsilon\}$. Cualquier elemento σ de Γ será de la forma

$$\sigma = a^n \cdot b^m.$$

Si además σ ha de ser de $\mathbf{R}^2 \times \{0\}$, debe de cumplirse que

$$nk_1 + mk_2 = 0.$$

Entonces $\Gamma \cap (\mathbf{R}^2 \times \{0\})$ está generado por un elemento de la forma $a^p \cdot b^q$ con $p, q \in \mathbf{Z}$. Contradicción, pues de esta manera $\Gamma \cap (\mathbf{R}^2 \times \{0\})$ no puede ser denso en $\mathbf{R}^2 \times \{0\}$.

Por tanto, el único caso posible es el b), que hace que sea $(\mathbf{R}^2 \times \{0\}) \cap \Gamma = h(\mathbf{Z}^3)$. ∎

OBSERVACION: Tres elementos u, v y w de $\mathbf{R}^3$ pueden generar un subgrupo denso de $\mathbf{R}^3$. De hecho, basta con tomar $u = \lambda v + \mu w$ con λ, μ y λ/μ irracionales. Entonces, *a priori*, es posible tener

$$\overline{h(\mathbf{Z})} = \mathbf{R}^2 \times \{0\}.$$

Con estos preliminares ya podemos pasar a los resultados fundamentales de este apartado.

Proposición 3.2 *No existen flujos de Lie con* $\operatorname{codim}(\overline{\mathcal{F}}) = 1$ *y transversalmente modelados en el álgebra* $\mathfrak{g}_6$.

Demostración: Supongamos que existe una tal realización.

Consideremos

$$\left.\begin{array}{rcl} h(\mathbf{Z}^3) & = & <(p_1,0),(p_2,0),(p_3,0)> \\ h(\mathbf{Z}) & = & <(p,t)> \qquad \text{con} \quad t>0 \end{array}\right\}$$

El subgrupo $h(\mathbf{Z}^3)$ es normal en Γ pues $\mathbf{Z}^3$ lo es en $\mathbf{Z}^3 \times_\varphi \mathbf{Z}$. Entonces

$$(p,t)(p_i,0)(p,t)^{-1} \in h(\mathbf{Z}^3)$$

lo cual da lugar a las relaciones

$$e^{-\Lambda t}p_i = \sum_{j=1}^{3} \lambda_i^j p_j \qquad i=1,2,3 \tag{3.2}$$

Veremos que la matriz $A = (\lambda_i^j)$ es precisamente la matriz de la aplicación $\varphi_* : \mathbf{Z}^3 \to \mathbf{Z}^3$. En efecto, supongamos elementos q_i de $\mathbf{Z}^3$ tales que $h((q_i,0)) = (p_i,0)$. Se tiene que

$$\begin{aligned} (p,t)(p_i,0)(p,t)^{-1} &= h((0,1)(q_i,0)(0,1)^{-1}) \\ &= h((0,1)(q_i,-1)) \\ &= h((\varphi_* q_i,0)) \end{aligned}$$

pues el producto en $\mathbf{Z}^3 \times_\varphi \mathbf{Z}$ era $(p,m)(q,n) = (p+\varphi_*^m q.m+n)$. Entonces

$$\begin{aligned} (p,t)(p_i,0)(p,t)^{-1} &= \sum_{j=1}^{3} \lambda_i^j h((q_j,0)) \\ &= (p_1,0)^{\lambda_i^1}(p_2,0)^{\lambda_i^2}(p_3.0)^{\lambda_i^3} \end{aligned}$$

lo cual prueba que $A = (\lambda_i^j)$ es la matriz de φ_* (en la base $\{p_i\}_{i=1}^3$).

En el caso de $\mathfrak{g}_6$ se tiene que

$$\Lambda = \begin{pmatrix} e^{-t} & -te^{-t} \\ 0 & e^{-t} \end{pmatrix}.$$

Para simplificar notación pondremos $a = e^{-t}$. Nótese que al ser t estrictamente positivo tenemos que $0 < a < 1$.

Si ponemos $p_1 = (a_1, a_2)$, $p_2 = (b_1, b_2)$ y $p_3 = (c_1, c_2)$ y definimos los vectores $v_1 = (a_1, b_1, c_1)$ y $v_2 = (a_2, b_2, c_2)$, de la relación 3.2 se deduce que

$$\begin{aligned} \varphi_* v_1 &= a v_1 + a \log a v_2 \\ \varphi_* v_2 &= a v_2. \end{aligned}$$

Completando los vectores independientes v_1 y v_2 (pues p_1, p_2, p_3 tienen rango 2) a una base $\{v_1, v_2, v_3\}$, resulta que

$$A = \begin{pmatrix} a & 0 & \alpha \\ a \log a & a & \beta \\ 0 & a & a^{-2} \end{pmatrix}$$

La matriz A es la transformada, mediante un cambio de base, de una matriz invertible de $\mathbf{Z}^3$ en $\mathbf{Z}^3$. Entonces sus invariantes son enteros y en particular su determinante es 1, puesto que la ecuación característica de A es

$$x^3 - px^2 + qx - 1 = 0 \tag{3.3}$$

tenemos que

$$2a + \frac{1}{a^2} = p \tag{3.4}$$

y

$$a^2 + \frac{2}{a} = q. \tag{3.5}$$

Entonces a es irracional pues al ser valor propio de A satisface la ecuación 3.3 y si a fuera un número racional r/s con r y s enteros primos entre si r y s deberían de ser divisores de 1. Esto implica que $a = \pm 1$, cosa imposible por ser $a \in (0, 1)$.

Multiplicando la ecuación 3.5 por a^2 y la 3.4 por a obtenemos

$$\left.\begin{array}{rcl} a^2p & = & 2a^3+1 \\ aq & = & a^3+1 \end{array}\right\}$$

y simplificando el término cúbico resulta que a debe de ser raíz de la ecuación de segundo grado

$$pa^2 - 2qa + 3 \;=\; 0. \tag{3.6}$$

Entonces

$$a \;=\; \frac{q \pm \sqrt{q^2-3p}}{p}, \tag{3.7}$$

y sustituyendo los dos posibles valores de a en la ecuación 3.4, tenemos que p y q satisfacen

$$\sqrt{p^2-3p}\,(p^2q+3p-4q^2) \;=\; 2p^3 - p^2q^2 - 9pq + 4q^3 \tag{3.8}$$

y

$$\sqrt{p^2-3p}\,(p^2q+3p-4q^2) \;=\; -2p^3 + p^2q^2 + 9pq - 4q^3. \tag{3.9}$$

Restando 3.8 y 3.9 obtenemos la relación

$$4p^3 - 2p^2q^2 - 18pq + 8q^3 \;=\; 0. \tag{3.10}$$

Por otra parte, elevando al cuadrado los dos términos de la igualdad 3.8 y simplificando, se deduce que

$$4p^3 - p^2q^2 - 18pq + 4q^3 + 27 \;=\; 0. \tag{3.11}$$

Finalmente, restando 3.10 y 3.11, tenemos que si $a = (q \pm \sqrt{q^2-3p})/p$, entonces

$$p^2 = 4q - \frac{27}{q^2}.$$

Pero al ser p y q enteros positivos, q^2 debe de ser 9 y por tanto $p = 3 = q$. Ello implicaría $a = 1$ en contra de $a \in (0,1)$.

Por tanto, hemos demostrado que no pueden existir **flujos de Lie** $\mathcal{F}$ **en** variedades compactas con codimensión de $\overline{\mathcal{F}}$ igual a 1 y **con modelo** transverso $\mathfrak{g}_6$. ∎

La demostración de un resultado análogo para el álgebra $\mathfrak{g}_7$ **pasa por** el establecimiento del siguiente lema

Lema 3.3 *Sea* $p(x) = x^3 - px^2 + qx - 1$ *un polinomio con* p *y* q *enteros. Si existen* $k \in \mathbf{R} \setminus \{0\}$ *y un* $\xi \in (0,1)$ *de manera que las raíces de* $p(x)$ *sean* ξ, ξ^k *y* $\xi^{-(k+1)}$, *entonces* k *es irracional.*

Demostración: Ya hemos visto que las únicas raíces racionales posibles de $p(x)$ son -1 y 1.

Si el 1 fuera raíz, como $\xi \in (0,1)$, tendríamos que $k = 0$ lo cual queda excluido en las hipótesis. Si -1 fuera raíz, entonces $-1/\xi$ también lo sería, pero esto no es posible pues todas las raíces son positivas.

Por tanto $p(x)$ es un polinomio irreducible en $\mathbf{Q}$. Su grupo de Galois sobre $\mathbf{Q}$ es $\mathbf{Z}_3$ o el grupo simétrico S_3 y en cualquiera de los dos casos existe un automorfismo σ del cuerpo extensión $\mathcal{K}$ que es de orden 3. permuta las raíces y es la identidad sobre $\mathbf{Q}$. Es decir. σ satisface

$$\sigma(\xi) = \xi^k, \qquad \sigma(\xi^k) = \xi^{-(k+1)}, \qquad \sigma(\xi^{-(k+1)}) = \xi$$

ó

$$\sigma(\xi) = \xi^{-(k+1)}, \qquad \sigma(\xi^k) = \xi, \qquad \sigma(\xi^{-(k+1)}) = \xi^k.$$

Si k fuera un número racional p/q, usando que $\sigma(x^{1/q}) = \pm\sigma(x)^{1/q}$ cuando $x^{1/q} \in \mathcal{K}$ obtenemos que

$$\begin{aligned}
\xi^{-k-1} &= \sigma(\xi^k) &&= \sigma(\xi^{p/q}) \\
&= \sigma((\xi^p)^{1/q}) &&= (\sigma(\xi)^p)^{1/q} \\
&= \xi^{k^2}
\end{aligned}$$

en el primer caso, y que

$$\xi = \sigma(\xi^k) = \xi^{-(k+1)k}$$

en el segundo. Esto implica que $k^2 + k + 1 = 0$ lo cual no es posible pues $k \in \mathbf{R} \setminus \{0\}$.

Entonces $k \notin \mathbf{Q}$ y el lema queda demostrado. ∎

Proposición 3.3 *No existen foliaciones de Lie con* $\mathrm{codim}(\overline{\mathcal{F}}) = 1$ *y transversalmente modeladas en el álgebra* $\mathfrak{g}_7$ *con* $k \in \mathbf{Q}$.

Demostración: Igual que en la proposición anterior, supongamos que una tal foliación existe. Entonces $\mathcal{F}$ se realiza en un fibrado en toros T^3 sobre S^1 definido por un difeomorfismo $\varphi : T^3 \to T^3$. La aplicación $\varphi_* : \mathbf{Z}^3 \to \mathbf{Z}^3$ se escribe en cierta base de la forma

$$A = \begin{pmatrix} a & 0 & \alpha \\ 0 & a^k & \beta \\ 0 & 0 & a^{-(k+1)} \end{pmatrix}.$$

con $a = e^{-t}$, y por tanto $a \in (0, 1)$.

Las raíces del polinomio característico de A son a, a^k y $a^{-(k+1)}$. Aplicando el lema anterior tenemos que k es irracional. Por tanto no existen realizaciones con $k \in \mathbf{Q}$ y la proposición queda demostrada. ∎

Este último resultado no quedaría completo si no comprobáramos la existencia de foliaciones transversalmente $\mathfrak{g}_7$ con $k \in \mathbf{R} \setminus \mathbf{Q}$.

EJEMPLO: Consideremos la matriz

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & 3 \end{pmatrix}$$

de $\mathbf{Sl}(3, \mathbf{R})$. Su polinomio característico es

$$x^3 - 6x^2 + 9x - 1$$

y los valores propios son

$$\lambda_i = 2(1 + \cos \frac{2^j}{9} \pi).$$

Tenemos que $0 < \lambda_3 < 1 < \lambda_2 < \lambda_1$. Pongamos $\xi = \lambda_3$, hay un $k < 0$ tal que $\xi^k = \lambda_2$. Este k es

$$\frac{\log(2(1 + \cos \frac{4\pi}{9}))}{\log(2(1 + \cos \frac{8\pi}{9}))}$$

y según el lema 3.3 este número es irracional.

Los vectores propios de A son de la forma

$$v_j = (1, \frac{1}{\lambda_j - 2}, \frac{1}{\lambda_j - 3}).$$

La razón entre las componentes de estos vectores es irracional. En efecto, si $v_j = (a, b, c)$, entonces

$$\left.\begin{aligned} \frac{a}{b} &= \lambda_j - 2 \in \mathbf{R} \setminus \mathbf{Q} \\ \frac{a}{c} &= \lambda_j - 3 \in \mathbf{R} \setminus \mathbf{Q} \\ \frac{b}{c} &= 1 - \frac{1}{\lambda_j - 2} \in \mathbf{R} \setminus \mathbf{Q} \end{aligned}\right\}$$

Por lo tanto cada vector v_j genera un flujo denso en el toro T^3.

Consideremos la variedad compacta $M = T^3 \times \mathbf{R}/\sim$ siendo "$\sim$" la relación $(x, t) \sim (Ax, t+1)$. La dirección dada por el vector propio v_1 es invariante por A, por tanto induce un flujo global en M que es denso sobre toros T^3.

Este flujo tiene a $\mathfrak{g}_7$ con $k = \log \lambda_2 / \log \lambda_3$ como álgebra transversa. Para verificar esta última afirmación obsérvese que un paralelismo transverso invariante por A en $T^3 \times \mathbf{R}$ viene dado por

$$\left.\begin{aligned} e_1 &= \xi^t v_2 \\ e_2 &= \xi^{kt} v_3 \\ e_3 &= -\frac{1}{\log \xi} \frac{\partial}{\partial t} \end{aligned}\right\}$$

campos que satisfacen

$$[e_1, e_2] = 0,$$

$$[e_1, e_3] = e_1, \qquad [e_2, e_3] = k e_2.$$

Con lo cual tenemos el ejemplo deseado.

Codimensión de $\overline{\mathcal{F}} = 0$

Este es un caso trivial pues el álgebra transversaa coincide con el álgebra estructural. Por tanto solo son realizables los fflujos transversalmente abelianos, es decir, solo el álgebra $\mathfrak{g}_1$ es realizabble y la realización consiste en flujos lineales densos en T^4.

Bibliografia

[AL 78] C. Albert, D. Lehmann, *Une algébre graduée universelle pour les connexions*, Math. Z. **159**.

[AL 83] C. Albert , *Invariants Riemanniens des champs de plans*, C.R. Acad. Sci. Paris (Série I) , **296**.

[AS 78] D. Asimov , *Average Gaussian curvature of leaves of foliations*, Bull. Amer. Math. Soc. , **84**.

[B1 84] F. Brito, R. Langevin, H. Rosenberg , *Intégrales de courbure sur des variétées feuilletées*, J. Differential Geometry , **16**.

[B2 84] F. Brito , *A remark on minimal foliations of codimension two*, Tohôku Math. J. , **36**.

[BO 82] R. Bott, L.W. Tu , *Differential Forms in Algebraic Topology*, Springer–Verlag, G.T.M.

[CA 84] Y. Carrière , *Flots riemanniens*, Asterisque , **16**.

[CA 85] C. Camacho, A. Lins Neto , *Geometric Theory of Foliations*, Birkhäuser.

[CH 73] B. Chen , *Geometry of submanifolds*, Marcel Dekker, Inc.

[CH 79] L. Childs , *A concrete introduction to higher algebra*, Springer–Verlag, U.T.M.

[DO 82] B. Doubrovine, S. Novikov, A. Fomenko , *Géométrie contemporaine: méthodes et aplications*, MIR, Moscú.

[FE 71] E. Fedida , *Sur les feuilletages de Lie*, C. R. Acad. Sci. Paris, Ser. A-B , **272**.

[GA 87] E. Gallego, A. Reventós , *Curvature and plane fields*, C.R. Acad. Sci. Paris (Série I) , **306**.

[GA 89] E. Gallego, A. Reventós , *Lie flows of codimension 3*, Trans. Amer. Math. Soc. (por publicar) .

[GO 85] C. Godbillon , *Feuilletages: etudes géométriques*, Univ. Louis Pasteur, Strasbourg.

[GU 77] H.W. Guggenheimer , *Differential Geometry*, Dover.

[HI 82] P. Hilton, Y. Wu , *Curso de álgebra moderna*, Ed. Reverté.

[JA 62] N. Jacobson , *Lie algebras*, Interscience Publishers.

[KA 75] F.W. Kamber, P. Tondeur , *Foliated bundles and characteristic classes*, Lecture Notes in Math. Springer–Verlag , **493**.

[KA 88] A. El Kacimi, M. Nicolau , *Espaces homogènes moyennables et feuilletages de Lie*, Rev. Pub. IRMA, Lille vol. 12 , **VII**.

[KO 63] S. Kobayashi, K. Nomizu , *Foundations of Differential Geometry*, Interscience Publishers.

[LR 88] M. Llabrés, A. Reventós , *Unimoldular Lie foliations*, Ann. Fac. Sci. Toulouse, vol IX , **2**.

[LL 88] M. Llabrés , *Sobre les foliacions de Lie*, Tesis, U.A.B.

[MO 82] P. Molino , *Géométrie globale des feuilletages riemanniens*, Nederl. Akad. Wetensch. Indag. Math. , **44**.

[MO 85] P. Molino, V. Sergiescu , *Deux remarques sur les flots riemanniens*, Manuscripta Mathematica , **51**.

[MO 88] P. Molino , *Riemannian foliations*, Birkhäuser.

[OS 81] Gen-ichi Oshikiri , *A remark on minimal foliations*, Tohôku Math. J. , **33**.

[PO 81] M. Postnikov , *Leçons de géométrie: Algèbre lineaire et géométrie*, MIR, Moscú.

[PO 85] M. Postnikov , *Leçons de géométrie: Groupes et algèbres de Lie*, MIR, Moscú.

[RA 86] A. Ranjan , *Structural equations and an integral formula for foliated manifolds*, GeometriæDedicata. , **20**.

[RE 83] B.L. Reinhart , *Differential Geometry of foliations*, Ergenbise der Mathematik..., Springer–Verlag.

[RO 88] A.H. Rocamora , *Some geometric consequences of the Weintzenböck formula on Riemannian almost-product manifolds; weak-harmonic distributions*, Illinois J. of Math. , **32(4)**.

[TH 64] J.A. Thorpe , *Sectional curvatures and characteristic classes*, Ann. of Math. , **80**.

[WA 71] F.W. Warner , *Foundations of Differential Geometry and Lie Groups*, Scotts, Foresman and Company.