Un ingredient d'importància en el que segueix és l'escala de l'anell que estem considerant. Introduïm a continuació les nocions d'escales contínua, finita i fitada. Encara que algunes d'elles foren prèviament considerades (vegeu per exemple [56]), desenvolupem algunes variacions que ens permetran treballar en un context més ampli.

La nostra aproximació al problema es beneficia de manera considerable de la interacció amb el llenguatge de monoides i per tant alguns dels arguments usats estan relacionats amb tècniques de monoides. Aquest procediment produirà, a més, demostracions més simples. La caracterització donada a la Secció anterior dels anells elementals ens permet treballar íntegrament amb anells no elementals.

Comencem provant un resultat que involucrarà un ideal especial que apareixerà repetidament en el que segueix. L'existència d'aquest ideal fou observada per primera vegada per Lin a [56, Lemma 2] per àlgebres AF, i posteriorment a [57, Remark 2.9] per C^*-àlgebres simples i separables (vegeu també [63, Theorem 2.7]).

PROPOSICIÓ 3.2.1 *Sigui R un anell regular simple amb σ-unitat (i sense unitat). Suposem que R és no elemental, amb rang estable* 1 *i que $V(R)$ és estrictament no perforat. Fixem $u \in V(R)^*$. Aleshores existeix un únic ideal $L(R)$ de $\mathcal{M}(R)$ que conté pròpiament R i tal que és contingut en qualsevol ideal que conté pròpiament R. A més, $V(L(R)) \cong V(R) \sqcup \mathrm{Aff}(S_u)^{++}$.*

DEMOSTRACIÓ: Com que R és no elemental, obtenim de la Proposició 3.1.4 que $V(R)$ no és atòmic. Posem $D = D(R)$ i $d = \sup \phi_u(D)$. Sigui $L = V(R) \sqcup \mathrm{Aff}(S_u)^{++}$, que és un ideal d'ordre de $V(R) \sqcup W_\sigma^d(S_u)$. Provarem la següent afirmació: L conté pròpiament $V(R)$ i és contingut en tot ideal d'ordre de $V(R) \sqcup W_\sigma^d(S_u)$ que conté pròpiament $V(R)$. Per tant, el resultat es deduirà dels Teoremes 2.2.9 i 2.3.16.

Notem que $V(R)$ és cancel·latiu, atès que $\mathrm{sr}(R) = 1$ i que $V(R) \neq 0$. Per tant $K_0(R)$ és un grup parcialment ordenat i no nul (ja que $K_0(R)^+ = V(R)$). Així $S_u = St(K_0(R), u)$ és no buit. Es dedueix aleshores que L conté pròpiament $V(R)$.

Sigui I un ideal d'ordre que conté pròpiament $V(R)$. Sigui $f \in I \setminus V(R)$ i $g \in \mathrm{Aff}(S_u)^{++}$. Pel Lema 2.3.12, existeixen $n \in \mathbb{N}$ i $g' \in \mathrm{LAff}_\sigma(S_u)^{++}$ tals que $g + g' = nf$. Com que I és un ideal d'ordre de $V(R) \sqcup W_\sigma^d(S_u)$, obtenim que $g \in I$. $\square$

Encara que per C^*-àlgebres separables aquest resultat ja és conegut, com hem comentat anteriorment, n'incloem una versió que sota les nostres hipòtesis habituals no necessita separabilitat, i que admet la mateixa demostració que hem donat pel cas d'anells.

PROPOSICIÓ 3.2.2 *Sigui A una C^*-àlgebra amb σ-unitat (sense unitat). Suposem que A és simple, amb rang real zero, rang estable* 1 *i que $V(A)$ és estrictament no* *perforat. Suposem també que A és no elemental. Sigui $u \in V(A)^*$. Existeix un únic ideal tancat $L(A)$ de $\mathcal{M}(A)$ que conté pròpiament A i tal que és contingut en qualsevol ideal que conté pròpiament A. A més, $V(L(A)) \cong V(A) \sqcup \mathrm{Aff}(S_u)^{++}$.* □

És un resultat ben conegut (vegeu [1, Theorem 2.7], [72, 3.12.12]) que si A és una C^*-àlgebra amb σ-unitat (sense unitat), llavors $\mathcal{M}(A)$ i $\mathcal{M}(A)/A$ no són mai separables. En el nostre context de treball, aquest és encara el cas fins i tot quan ens restringim al mínim ideal tancat no zero de $\mathcal{M}(A)/A$.

PROPOSICIÓ 3.2.3 *Sigui A una C^*-àlgebra separable (sense unitat) simple i no elemental. Suposem que A té rang real zero, rang estable 1 i que $V(A)$ és estrictament no perforat. Llavors $L(A)/A$ no és separable.*

DEMOSTRACIÓ: És suficient demostrar que $V(L(A)/A)$ conté un subconjunt no numerable. Atès que $RR(A) = 0$, el morfisme natural de monoides $V(L(A))/V(A) \to V(L(A)/A)$ és injectiu (vegeu, per exemple [5, Lemma 3.1]). Fixem $u \in V(A)^*$ i $d = \sup \phi_u(D(A))$. Definim una relació d'equivalència en $\mathrm{Aff}(S_u)^{++}$ posant $f \sim g$ si i només si existeixen $x, y \in V(A)$ tals que $f + \phi_u(x) = g + \phi_u(y)$. Denotem per $\mathrm{Aff}(S_u)^{++}/\phi_u(V(A))$ el quocient de $\mathrm{Aff}(S_u)^{++}$ per aquesta relació d'equivalència, i per $\overline{f}$ les classes d'equivalència. Observem que cada classe conté tan sols una col·lecció numerable de funcions. Aleshores és clar pel Teorema 2.3.17 i per la Proposició 3.2.2 que $V(L(A))/V(A) \cong \{0\} \sqcup (\mathrm{Aff}(S_u)^{++}/\phi_u(V(A)))$. Com que $\mathrm{Aff}(S_u)^{++}$ és no numerable, $V(L(A))/V(A)$ també ho és, i així $V(L(A)/A)$ conté un conjunt no numerable. □

DEFINICIÓ 3.2.4 *Sigui M un monoide amb unitat d'ordre u. Suposem que M té un interval generador D. Diem que (M, D) té* **escala contínua** *si la funció afí $d = \sup \phi_u(D)$ és contínua. Si R és un anell regular simple (resp. A és una C^*-àlgebra simple amb rang real zero) i $u \in V(R)$ és un element no zero (resp. $0 \neq u \in V(A)$), diem que R (resp. A) té* **escala contínua** *si $(V(R), D(R))$ (resp. $(V(A), D(A))$) té escala contínua.*

És convenient notar en aquest punt que la definició d'escala contínua no depèn de l'elecció que haguem fet de la unitat d'ordre $u \in M$. Si hi ha una altra unitat d'ordre $v \in M$, llavors [39, Proposition 6.17] mostra que els espais d'estats S_u i S_v són homeomorfs (en general però, l'homeomorfisme no és afí: vegeu [39, Example 6.18]), a través de $\alpha : S_u \to S_v$ donat per $\alpha(s) = s/s(v)$. Per tant, si denotem $d_u = \sup \phi_u(D)$, $d_v = \sup \phi_v(D)$ i $\beta_v : S_u \to \mathbb{R}^{++}$ és l'avaluació $\beta_v(s) = s(v)$, tenim el següent diagrama commutatiu:

$$\begin{tikzcd} S_u \arrow[rr, "\alpha"] \arrow[dr, "\frac{d_u}{\beta_v}"'] & & S_v \arrow[dl, "d_v"] \\ & \mathbb{R}^+ \cup \{\infty\} & \end{tikzcd}$$

Deduïm així que d_u és contínua si i només si d_v ho és. Pel cas de C^*-àlgebres simples, aquesta definició és clarament equivalent a les donades a [56], [57] i [59]. Notem el següent fet, que necessitarem més endavant: l'homeomorfisme $\alpha : S_u \to S_v$ donat per un canvi d'unitat d'ordre porta punts extrems a punts extrems. En efecte, sigui $s \in \partial_e S_u$, i suposem que existeixen $\lambda \in (0,1)$, $t_1, t_2 \in S_v$ tals que $\alpha(s) = s/s(v) = \lambda t_1 + (1-\lambda)t_2$. Aleshores $s = \lambda s(v)t_1(u)(t_1/t_1(u)) + (1-\lambda)s(v)t_2(u)(t_2/t_2(u))$, i tenim $\lambda s(v)t_1(u) + (1-\lambda)s(v)t_2(u) = 1$. Per tant $\lambda = 0$ o bé $\lambda = 1$, que és impossible.

Podem derivar ara la caracterització d'anells regulars simples amb escala contínua, en termes del reticle d'ideals dels anells de multiplicadors.

COROL·LARI 3.2.5 *Sigui R un anell regular simple amb σ-unitat (sense unitat), rang estable* 1 *i amb $V(R)$ estrictament no perforat. Aleshores $\mathcal{M}(R)/R$ és simple si, i només si, R és elemental o bé R té escala contínua.*

DEMOSTRACIÓ: Si R és elemental, aleshores $\mathcal{M}(R)/R$ és simple pel Teorema 3.1.5. Suposem doncs que R és no elemental. Sigui $M = V(R)$ i $u \in M^*$. Posem $d = \sup \phi_u(D(R))$. Si d és contínua, llavors totes les funcions de $W_\sigma^d(S_u)$ són contínues, d'on $W_\sigma^d(S_u) = \mathrm{Aff}(S_u)^{++}$, i per la Proposició 3.2.1 $\mathcal{M}(R)/R$ és simple. Recíprocament, si $\mathcal{M}(R)/R$ és simple i R no és elemental, aleshores $V(\mathcal{M}(R)) \cong V(R) \sqcup W_\sigma^d(S_u)$, pel Teorema 2.3.16, i pel Teorema 2.2.9 tenim que els ideals de $\mathcal{M}(R)$ es corresponen als de $V(\mathcal{M}(R))$. Ara observem que per la Proposició 3.2.1 $V(\mathcal{M}(R)) \cong V(R) \sqcup \mathrm{Aff}(S_u)^{++}$, i per tant la funció d és contínua. □

El resultat per C^*-àlgebres és vàlid en un grau de generalitat més gran ([57, Theorem 2.10]). Com a mostra d'aplicació de les tècniques que hem desenvolupat, incloem la versió corresponent a la classe amb que estem treballant.

COROL·LARI 3.2.6 *Sigui A una C^*-àlgebra amb σ-unitat (sense unitat), simple, amb rang real zero, rang estable* 1 *i amb $V(A)$ estrictament no perforat. Llavors $\mathcal{M}(A)/A$ és simple si i només si A és elemental o bé A té escala contínua.*

DEMOSTRACIÓ: Si A és elemental, aleshores és ben conegut que $\mathcal{M}(A)/A$ és simple ([68, Theorem 4.1.16]). Suposem que A és no elemental. Posem $u \in V(A)^*$ i $d =$

$\sup \phi_u(D(A))$. Llavors $V(\mathcal{M}(A)) \cong V(A) \sqcup W_\sigma^d(S_u)$ (pel Teorema 2.3.17). Si d és contínua, aleshores $W_\sigma^d(S_u) = \text{Aff}(S_u)^{++}$ i concloem per la Proposició 3.2.2 que $\mathcal{M}(A)/A$ és simple. El recíproc es prova de manera similar al Corol·lari 3.2.5, fent servir els resultats anàlegs per C^*-àlgebres. □

El següent punt que centrarà la nostra atenció fa referència al cas en que l'escala és fitada, o bé finita, però no contínua. Per donar les definicions adequades, notem en primer lloc:

LEMA 3.2.7 *Sigui M un monoide cònic simple i de refinament, amb unitat d'ordre $u \in M$, i sigui D un interval numerablement generat i flexible. Sigui $d = \sup \phi_u(D)$. Llavors d és finita si i només si d és fitada.*

DEMOSTRACIÓ: Suposem que d no és fitada. Llavors, per a cada k existeix $s_k \in S_u$ que satisfà $d(s_k) > 2^{2k}$. Notem que $d = \sup\limits_n \phi_u(x_n)$, per a una successió estrictament creixent d'elements $\{x_n\}$ en M^*. Per tant, podem triar una successió parcial $\{x_{n_k}\}$ tal que $s_k(x_{n_k}) > 2^{2k}$. Així, sense pèrdua de generalitat, podem assumir que $s_k(x_k) > 2^{2k}$ per tot k. Definim $s = \sum\limits_{k=1}^{\infty}(1/2^k)s_k$. Llavors $d(s) = \infty$. □

Podem fer servir, doncs, el Lema anterior com a motivació, i seguidament introduïm les nocions corresponents d'escala fitada i finita. Si K és un conjunt compacte i convex, denotarem per $\partial_e K$ el conjunt de punts extrems.

DEFINICIÓ 3.2.8 *Sigui M un monoide amb unitat d'ordre u i sigui D un interval generador. Diem que (M, D) té* **escala finita** *(resp.* **escala fitada***) si la restricció de $d = \sup \phi_u(D)$ a $\partial_e S_u$ és finita (resp. fitada). Si R és un anell regular simple (resp. A és una C^*-àlgebra simple amb rang real zero) i si $u \in V(R)$ és un element no zero (resp. $u \in V(A)^*$), diem que R (resp. A) té* **escala finita** *(resp.* **escala fitada***) si $(V(R), D(R))$ (resp. $(V(A), D(A))$) té escala finita (resp. escala fitada).*

Observem novament que aquesta definició és independent de l'elecció de la unitat d'ordre u que haguem fet. Això és conseqüència directa del fet que si v és una altra unitat d'ordre, aleshores l'homeomorfisme $\alpha : S_u \to S_v$ porta punts extrems a punts extrems, com hem observat abans. En aquest punt és important notar també que la noció d'escala finita difereix de la definició donada a [56] en que la condició sobre d que estem requerint afecta únicament els punts de la frontera extrema de l'espai d'estats, mentre que a [56] es demana la finitud de d a tot l'espai d'estats. D'altra banda, si f és una funció afí semicontínua inferior, definida en un conjunt compacte i convex K, i si f és fitada a $\partial_e K$, aleshores f és fitada globalment. En efecte, si $f \leq c$ a $\partial_e K$, llavors a causa de l'afinitat de f tenim que $f \leq c$ a l'embolcall convex K' de

$\partial_e K$. Per semicontinuïtat (inferior), $f \leq c$ a la clausura de K', que és igual a K pel Teorema de Krein-Mil'man (1.3.4). D'aquesta manera la nostra noció d'escala fitada coincideix amb la definició d'escala finita donada inicialment a [56].

Per remarcar que els conceptes d'escala finita i fitada són en efecte diferents, presentem un primer mètode de generació d'exemples, la idea del qual es basa en tècniques de grups parcialment ordenats i en resultats de realitzabilitat de certs grups com a grups de Grothendieck d'anells adequats. És, en conseqüència, un mètode indirecte, i interessant al mateix temps, especialment a l'hora de fabricar exemples amb patologies predeterminades. Si X és un espai topològic compacte, denotarem per $L(X)$ el monoide additiu de funcions semicontínues inferiors sobre X.

EXEMPLE 3.2.9 *Existeix una àlgebra ultramatricial (resp. una àlgebra AF) simple, l'escala de la qual és finita però no és fitada.*

DEMOSTRACIÓ: La línia d'atac es basa en provar primer que existeix un monoide M simple, cònic i de refinament, que és cancel·latiu, no perforat i no atòmic. També trobarem un interval D numerablement generat i flexible tal que l'escala respecte D és finita però no fitada.

Sigui $X = [0, 1]$, un espai compacte Hausdorff. Sigui $C(X, \mathbb{R})$ l'anell de funcions contínues amb valors reals sobre X, que és separable, atès que X és metritzable. Sigui G un subgrup numerable i dens de $C(X, \mathbb{R})$ que conté la funció constant 1, i equipem G amb l'ordre estricte; així $G^+ = \{f \in G \mid f \gg 0\} \cup \{0\}$. Com que G és dens en $C(X, \mathbb{R})$, tenim que G és un grup d'interpolació. En efecte, és suficient interpolar la desigualtat $f_1, f_2 \ll g_1, g_2$, on $f_i, g_i \in G$ per $i = 1, 2$. Per [39, Corollary 11.20 i Theorem 11.4], veiem que $(C(X, \mathbb{R}), \leqslant\!\!\!<)$ és un grup d'interpolació. Sigui $h' \in C(X, \mathbb{R})$ tal que $f_i \ll h' \ll g_j$ per a tot i, j. Triem $\varepsilon > 0$ tal que $f_i \ll h' - \varepsilon \ll h' + \varepsilon \ll g_j$ per a tot i, j; aleshores existeix per densitat una funció $h \in G$ tal que $\|h - h'\| < \varepsilon$, d'on obtenim fàcilment que $f_i \ll h \ll g_j$.

Deduïm doncs que $M = G^+$ és un monoide de refinament (vegeu [39, Proposition 2.1]). També M és un monoide simple, cònic, cancel·latiu, no perforat i no atòmic. El fet que M no conté àtoms pot ésser provat directament, però també es dedueix de la hipòtesi que G és dens en $C(X, \mathbb{R})$, i per tant no és cíclic, de manera que per [39, Proposition 14.3], G no conté àtoms, i així tampoc en conté M. Fixem $u = 1$ com unitat d'ordre, i posem $S_1 = St(M, 1) = St(G, 1)$. Observem que l'anell $C(X, \mathbb{R})$ és, amb la topologia de la convergència uniforme, un espai de Banach real. Per [39, Proposition 7.18], els estats sobre $C(X, \mathbb{R})$ són fitats, i també són lineals, per [39, Lemma 6.7], de manera que són aplicacions contínues de $C(X, \mathbb{R})$ a $\mathbb{R}$. Es dedueix d'això i del fet que G és dens que l'aplicació restricció $St(C(X, \mathbb{R}), 1) \to St(G, 1)$ és injectiva. D'altra banda, com que G és un subgrup de $C(X,\mathbb{R})$ que conté la unitat d'ordre 1, tenim que per [39, Theorem 4.3] els estats sobre G normalitzats en 1 estenen a estats sobre $C(X,\mathbb{R})$. Amb tot això concloem que l'aplicació restricció és un homeomorfisme afí. Notem ara que $St(C(X,\mathbb{R})) = M_1^+(X)$, el conjunt de totes les mesures de probabilitat sobre X, per [39, Proposition 6.8], d'on veiem que $\partial_e S_1$ és afinament homeomorf a $\partial_e M_1^+(X)$, i aquest darrer és homeomorf a X, per [39, Proposition 5.24]. Sigui $d_0 \in L(X)^{++}$, definida a través de $d_0(x) = 1/x$ per $x \neq 0$ i $d_0(0) = 2$. Sigui $d \in L(\partial_e S_1)^{++}$, definida composant d_0 amb l'homeomorfisme entre $\partial_e S_1$ i X. Usant [42, Lemma 7.2], podem estendre d a una funció afí semicontínua inferior definida sobre S_1, i que és també estrictament positiva; denotarem aquesta funció novament per d. Sigui $D = \{f \in M \mid f \ll d\}$. Llavors D és un interval flexible i numerablement generat, i $\rho(D) = d$. Tenim també que d, restringida a $\partial_e S_1$ és finita però no fitada.

El Teorema 2.3.18 ens permet assegurar que existeix una àlgebra A^0 complexa, simple, ultramatricial i involutiva tal que $(K(A^0), D(A^0))$ és isomorf a (G, D), i en particular $V(A^0) \cong M$. Sigui $u \in D(A^0)$ la unitat d'ordre que correspon a $1 \in D$, i obtenim de l'argument anterior que A^0 té escala finita però no fitada. La completació de A^0 dóna lloc a una àlgebra AF simple A tal que $(K_0(A), D(A))$ és isomorf a (G, D). En particular $V(A) \cong V(A^0) \cong M$, i anàlogament A té escala finita però no fitada. □

Arribem així al resultat principal de la secció, on analitzem els anells regulars simples i les C^*-àlgebres simples amb escala finita. Resultarà en casos especials que podem donar una caracterització en termes d'una condició sobre el rang estable d'un quocient de l'anell corona, responent així a una pregunta de Goodearl a [42]. Recordem que si $J \subset I$ són ideals d'un anell regular R (resp. ideals tancats d'una C^*-àlgebra A amb rang real zero), llavors l'aplicació natural $V(I)/V(J) \to V(I/J)$ (donada per $\overline{[p]} \mapsto [\pi(p)]$, on $\pi : I \to I/J$ és el morfisme quocient) indueix un isomorfisme de monoides, per [7, Proposition 1.4].

TEOREMA 3.2.10 *Sigui R un anell regular simple amb σ-unitat i rang estable 1. Suposem que R és no elemental, amb $V(R)$ estrictament no perforat, i que S_u és un espai metritzable, on $u \in V(R)^*$. Llavors R té escala finita si, i només si, el monoide $V(\mathcal{M}(R))/V(L(R))$ és cancel·latiu.*

Les bases on descansa la demostració del Teorema 3.2.10 estan constituïdes, essencialment, per la traducció del problema al llenguatge proveït per la teoria de monoides. De fet, aquesta aproximació a la solució ha estat l'única via que hem estat capaços de trobar. És per aquest motiu que abans de demostrar el Teorema establim en primer lloc el resultat corresponent per monoides de Riesz.

Per tal de tractar adequadament amb les restriccions a la frontera extrema de funcions afins i semicontínues inferiors definides en un conjunt convex i compacte, precisarem d'un fet simple, que es pot trobar a [2, Lemma II.7.1].

LEMA 3.2.11 *Sigui K un conjunt convex i compacte, i siguin $f, g : K \to \mathbb{R}$ dues funcions afins i semicontínues inferiors. Si $f_{|\partial_e K} = g_{|\partial_e K}$, aleshores $f = g$.* $\square$

PROPOSICIÓ 3.2.12 *Sigui M un monoide simple i cancel·latiu, i sigui $u \in M$ un element no zero. Suposem que M té un interval no nul D amb un subconjunt cofinal numerable, i sigui $d = \sup \phi_u(D)$. Suposem que (M, D) té escala finita. Si I és un ideal de $M \sqcup W_\sigma^d(S_u)$ que conté pròpiament M, aleshores $(M \sqcup W_\sigma^d(S_u))/I$ és cancel·latiu.*

DEMOSTRACIÓ: En primer lloc, notem que com que M és no zero i cancel·latiu, l'espai d'estats S_u és no buit. Per tant, la demostració de la Proposició 3.2.1 mostra que $L = M \sqcup \mathrm{Aff}(S_u)^{++}$ és un ideal d'ordre de $M \sqcup W_\sigma^d(S_u)$ que conté pròpiament M, i que és contingut en tot ideal d'ordre de $M \sqcup W_\sigma^d(S_u)$ tal que conté pròpiament M.

Suposem que I és un ideal d'ordre de $M \sqcup W_\sigma^d(S_u)$ que conté pròpiament M. Llavors existeix $\emptyset \neq E \subseteq W_\sigma^d(S_u)$ tal que $I = M \sqcup E$. Denotem per $\sim$ la relació d'equivalència mòdul I. Si $f+g \sim f+h$, per $f, g, h \in W_\sigma^d(S_u)$, aleshores $f+g+x_1 = f+h+x_2$, per alguns $x_1, x_2 \in M \sqcup E$. Si $x_i \in E$ per $i = 1, 2$, llavors com que l'escala és finita $(g+x_1)_{|\partial_e S_u} = (h+x_2)_{|\partial_e S_u}$, i així $g+x_1 = h+x_2$ pel Lema 3.2.11. Per tant $g \sim h$. Si $x_1 \in E$ i $x_2 = x \in M$, aleshores fent servir un argument similar obtenim $g+x_1 = h+\phi_u(x)$, però per minimalitat de L veiem que $\phi_u(x) \in \mathrm{Aff}(S_u)^{++} \subseteq E$, de manera que també $g \sim h$. Clarament, les altres possibilitats es tracten d'una forma similar. $\square$

Quan l'espai d'estats S_u és metritzable i M és un monoide de Riesz cancel·latiu i simple, el recíproc de l'anterior Proposició també és cert, és a dir, si $(M \sqcup W_\sigma^d(S_u))/L$ és cancel·latiu, llavors (M, D) té escala finita. Per a provar aquest fet, necessitarem una tècnica que consisteix a "fer caure" valors infinits de determinades funcions. Això requerirà treballar amb *símplexs de Choquet* i per aquest motiu ens caldran algunes de les seves propietats fonamentals, que resumirem breument tot seguit. Remarquem que les definicions de símplex i de símplexs de Choquet han estat introduïdes al capítol de preliminars (secció 3).

PROPOSICIÓ 3.2.13 *[39, Proposition 11.8] Sigui K un subconjunt convex i compacte d'un espai E localment convex i Hausdorff, i sigui $g : K \to \mathbb{R}$ una funció convexa i* *semicontínua inferior. Llavors:*

$$g(x) = \sup\{f(x) \mid f \in \mathrm{Aff}(K) \ i \ f \ll g\}$$

per a tot $x \in K$. $\square$

Una caracterització dels símplexs de Choquet és donada a [39, Theorem 11.4]: Un subconjunt compacte i convex K d'un espai localment convex i Hausdorff és un símplex de Choquet si, i només si, el grup $(\mathrm{Aff}(K), \leq)$ és d'interpolació (això és també equivalent a dir que el grup $(\mathrm{Aff}(K), \lll)$ és d'interpolació). Per tant, moltes de les propietats dels símplexs de Choquet s'expressaran a través de com siguin les funcions afins (amb alguna noció de continuïtat) que hi són definides. El primer ingredient que necessitarem és la versió estricta del Teorema d'Edwards:

TEOREMA 3.2.14 *[39, Theorem 11.12] Sigui* K *un símplex de Choquet, sigui* $f : K \to \{-\infty\} \cup \mathbb{R}$ *una funció convexa semicontínua superior, i sigui* $h : K \to \mathbb{R} \cup \{\infty\}$ *una funció còncava semicontínua inferior. Si* $f \ll h$*, aleshores existeix* $g \in \mathrm{Aff}(K)$ *tal que* $f \ll g \ll h$. $\square$

Per a un ús futur, és convenient observar que $\mathrm{LAff}(K) = \mathrm{LAff}_\sigma(K)$, per a un símplex de Choquet compacte i metritzable. Encara que això és probablement estàndard, incloem demostracions per completitud.

LEMA 3.2.15 *Sigui* K *un espai compacte i metritzable, sigui* g *una funció semicontínua inferior sobre* K*, i sigui* $\mathfrak{F}$ *una família de funcions contínues sobre* K*, el suprem puntual de les quals és* g*. Aleshores existeix una quantitat numerable de funcions de* $\mathfrak{F}$ *que també tenen* g *com a suprem.*

DEMOSTRACIÓ: Per a qualsevol funció $h : K \to (-\infty, \infty]$, denotem per X_h el "subgraf estricte" de h, és a dir, $X_h = \{(x, \alpha) \in K \times (-\infty, \infty] \mid \alpha < h(x)\}$. A causa de la semicontinuïtat inferior, X_g és obert; de manera semblant, X_f és obert per a tota $f \in \mathfrak{F}$. Com que g és el suprem de les funcions $f \in \mathfrak{F}$, veiem que la unió dels conjunts X_f per $f \in \mathfrak{F}$ és precisament X_g.

Ara, $K \times (-\infty, \infty]$ és un espai separable i metritzable, de manera que satisfà el segon axioma de numerabilitat (és a dir, admet una base d'oberts numerable). El mateix fet és cert pel seu subconjunt obert X_g. Però aquests espais satisfan també la propietat de Lindelöf, és a dir, tot recobriment obert admet un subrecobriment numerable. Per tant X_g és la unió d'una quantitat numerable de conjunts de $\{X_f\}_{f \in \mathfrak{F}}$, diguem $X_{f_1}, X_{f_2}, \ldots$. I això implica que g és el suprem de $f_1, f_2, \ldots$, com volíem. $\square$

LEMA 3.2.16 *Sigui K un símplex de Choquet metritzable i sigui $g \in \mathrm{LAff}(K)$. Llavors g és el suprem puntual d'una successió creixent $\{f_n\}$ amb $f_n \in \mathrm{Aff}(K)$ per a tot n. Per tant $\mathrm{LAff}(K) = \mathrm{LAff}_\sigma(K)$.*

DEMOSTRACIÓ: Sigui $\mathfrak{F}$ el conjunt de totes les funcions afins i contínues f sobre K tals que $f \ll g$. Com que g és convexa, la Proposició 3.2.13 assegura que g és el suprem puntual dels elements de $\mathfrak{F}$. Afirmem que de fet $\mathfrak{F}$ és un conjunt dirigit superior. En efecte, si $f_1, f_2 \in \mathfrak{F}$, aleshores sigui f el suprem puntual de f_1 i f_2, i tenim que f és convexa, contínua i $f \ll g$. Atès que g és també còncava, pel Teorema d'Edwards (3.2.14) existeix una funció afí i contínua f_3 tal que $f \ll f_3 \ll g$, establint així l'afirmació. Per acabar, sols ens cal aplicar el Lema 3.2.15. □

DEFINICIÓ 3.2.17 *Sigui K un conjunt convex, i sigui $(K_i)_{i\in I}$ una família no buida de subconjunts convexos de K. Diem que K és la* **suma directa convexa** *dels conjunts K_i si: (1) K és l'embolcall convex de $\cup_{i\in I} K_i$; i (2) Si $i_1, \ldots, i_n$ són índexs diferents de I i*

$$\alpha_1 x_1 + \ldots + \alpha_n x_n = \beta_1 y_1 + \ldots + \beta_n y_n$$

són combinacions convexes amb $x_m, y_m \in K_{i_m}$ per tot m, aleshores $\alpha_j = \beta_j$ per a tot j i $x_j = y_j$ sempre que $\alpha_j > 0$.

La importància d'aquest concepte rau en el següent fet:

TEOREMA 3.2.18 *[39, Theorem 11.28] Si F és una cara tancada d'un símplex de Choquet K, aleshores K és la suma directa convexa de F i la seva cara complementària.* □

PROPOSICIÓ 3.2.19 *Sigui K un símplex de Choquet, sigui $s \in \partial_e K$ i $f \in \mathrm{Aff}(K)^{++}$ amb $f(s) \geq 1$. Denotem per $\{s\}'$ la cara complementària de $\{s\}$. Llavors existeix $g \in \mathrm{LAff}(K)^{++}$ tal que és igual a f sobre $\{s\}'$ i $f(s) = 1$.*

DEMOSTRACIÓ: Si $f(s) = 1$, aleshores agafem $g = f$. Per tant, podem assumir que $f(s) > 1$. Pel Teorema 3.2.18 (i havent notat que $\{s\}$ és efectivament una cara tancada), K és la suma directa convexa de $\{s\}$ i $\{s\}'$, de forma que existeix una única funció afí g sobre K tal que $g_{|\{s\}'} = f_{|\{s\}'}$ i $g(s) = 1$. Notem que $g \leq f$.

Hem de comprovar que g és semicontínua inferior. Observem que $h = f - g$ val 0 sobre $\{s\}'$ i és igual a $a = f(s) - 1 > 0$ en el punt s. Si h fos semicontínua superior, aleshores $g = f - h$ seria semicontínua inferior. Sigui $\lambda \in [0, \infty)$. Prenem un element $x \in K$ qualsevol. Llavors existeix $\alpha \in [0, 1]$ tal que $x = \alpha s + (1 - \alpha)t$, per algun

$t \in \{s\}'$, i per tant $h(x) = \alpha a$. Així, si $\lambda > a$, tenim $h^{-1}[\lambda, \infty) = \emptyset$, que és tancat. Si, en cas contrari, $0 \leq \lambda \leq a$, considerem l'aplicació:

$$\varphi : [\lambda, a] \times \overline{\{s\}'} \to h^{-1}[\lambda, \infty),$$

definida a través de $\varphi(\gamma, \overline{t}) = (\gamma/a)s + (1 - (\gamma/a))\overline{t}$. Per veure que φ és ben definida cal comprovar que $h(\varphi(\gamma, \overline{t})) \geq \lambda$, per $\lambda \leq \gamma \leq a$ i $\overline{t} \in \overline{\{s\}'}$. Tenim que $h((\gamma/a)s+(1-(\gamma/a))\overline{t}) = \gamma+(1-(\gamma/a))h(\overline{t})$. Ara $\overline{t} = \beta s+(1-\beta)t$, per algun $\beta \in [0,1]$ i $t \in \{s\}'$, de manera que $h(\overline{t}) = \beta a$. Llavors $h((\gamma/a)s+(1-(\gamma/a))\overline{t}) = \gamma+(a-\gamma)\beta \geq \lambda$, i per tant φ és ben definida. També, φ és contínua i exhaustiva: si $x \in h^{-1}[\lambda, \infty)$, aleshores $x = \alpha s + (1-\alpha)t$ per cert $\alpha \in [0,1]$, $t \in \{s\}'$, i $\alpha a \geq \lambda$. Així $\varphi(\alpha a, t) = x$. Com que $[\lambda, a] \times \overline{\{s\}'}$ és compacte, veiem que $h^{-1}[\lambda, \infty) = \varphi([\lambda, a] \times \overline{\{s\}'})$ és tancat. □

COROL·LARI 3.2.20 *Sigui K un símplex de Choquet metritzable. Suposem que $f \in \mathrm{LAff}(K)^{++}$ satisfà $f(s) = \infty$ per algun $s \in \partial_e K$. Llavors existeix $g \in \mathrm{LAff}(K)^{++}$ tal que $g(s) = 1$ i $f + g = 2f$.*

DEMOSTRACIÓ: Escrivim $f = \sup_n f_n$, on $\{f_n\}$ és una successió creixent amb cada $f_n \in \mathrm{Aff}(K)^{++}$. Com que $f(s) = \infty$, podem suposar que $f_i(s) > 1$ per a tot i. Denotem per $\{s\}'$ la cara complementària de $\{s\}$ i usem la Proposició 3.2.19 per construir funcions $g_n \in \mathrm{LAff}(K)^{++}$ tals que $g_{n|\{s\}'} = f_{n|\{s\}'}$ i $g_n(s) = 1$. És fàcil veure que $g_n \leq g_{n+1}$. Sigui $g = \sup_n g_n$, que clarament pertany a $\mathrm{LAff}(K)^{++}$. Observem també que $(g+f)_{|\{s\}\cup\{s\}'} = 2f_{|\{s\}\cup\{s\}'}$, i atès que K és l'embolcall convex de $\{s\}\cup\{s\}'$, obtenim que $g + f = 2f$. □

Aplicant l'anterior corol·lari repetidament, podem "fer caure" els valors de f a un quantitat finita de punts extrems on f és infinita.

COROL·LARI 3.2.21 *Sigui K un símplex de Choquet metritzable. Sigui f una funció tal que $f \in \mathrm{LAff}(K)^{++}$ i existeixen $s_1, \ldots, s_n \in \partial_e K$ amb $f(s_i) = \infty$ per a tot i. Llavors existeix $g \in \mathrm{LAff}(K)^{++}$ tal que $g(s_i) = 1$ per a tot i i $g + f = 2f$.*

DEMOSTRACIÓ: Sense pèrdua de generalitat, podem assumir que $s_1, \ldots, s_n$ són tots diferents. Fent caure $f(s_1)$ a 1 obtenim $g_1 \in \mathrm{LAff}(K)^{++}$ tal que $g_{1|\{s_1\}'} = f_{|\{s_1\}'}$ i $g_1(s_1) = 1$. Com que $s_2 \in \{s_1\}'$, tenim que $g_1(s_2) = \infty$. Per tant, podem fer caure $g_1(s_2)$ a 1 i obtenir $g_2 \in \mathrm{LAff}(K)^{++}$ tal que $g_{2|\{s_2\}'} = g_{1|\{s_2\}'}$ i $g_2(s_2) = 1$. A causa de que $s_1 \in \{s_2\}'$, veiem que $g_2(s_1) = g_1(s_1) = 1$. També, $\{s_1, s_2\}' \subseteq \{s_1\}', \{s_2\}'$ implica que $g_{2|\{s_1,s_2\}'} = f_{\{s_1,s_2\}'}$. En particular $g_2(s_3) = \infty$.

Continuant d'aquesta manera obtenim $g_n \in \mathrm{LAff}(K)^{++}$ tal que $g_n(s_i) = 1$ per a tot i i $g_{n|\{s_1,\ldots,s_n\}'} = f_{|\{s_1,\ldots,s_n\}'}$. Prenem $g = g_n$. Com que K és la suma directa convexa de l'embolcall convex de $\{s_1, \ldots, s_n\}$ i de $\{s_1, \ldots, s_n\}'$, i atès que

$$(g + f)_{|\{s_1,\ldots,s_n\}\cup\{s_1,\ldots s_n\}'} = 2f_{|\{s_1,\ldots,s_n\}\cup\{s_1,\ldots,s_n\}'},$$

concloem que $g + f = 2f$, com volíem. □

El mateix tipus de demostració ens permet donar una lleugera extensió de l'anterior resultat.

COROL·LARI 3.2.22 *Sigui K un símplex de Choquet metritzable. Sigui f una funció tal que $f \in \mathrm{LAff}(K)^{++}$ i existeixen punts diferents $s_1, \ldots, s_n \in \partial_e K$ amb $f(s_i) = \infty$. Llavors, si $a_1, \ldots, a_n > 0$ són nombres reals fixats, existeix $g \in \mathrm{LAff}(K)^{++}$ tal que $g(s_i) = a_i$ per a tot i i $g + f = 2f$.* □

TEOREMA 3.2.23 *Sigui M un monoide Riesz, simple, cancel·latiu i sigui $u \in M$ un element no nul. Suposem que M té un interval generador D amb un subconjunt cofinal numerable, i sigui $d = \sup \phi_u(D)$. Assumim que S_u és metritzable. Llavors (M, D) té escala finita si, i només si, $(M \sqcup W^d_\sigma(S_u))/L$ és cancel·latiu (on $L = M \sqcup \mathrm{Aff}(S_u)^{++}$).*

DEMOSTRACIÓ: Que la condició és necessària es demostra a la Proposició 3.2.12. Pel recíproc, observem primer que per ser M cancel·latiu, Riesz i simple, aleshores S_u és un símplex de Choquet, a causa del Teorema 1.3.13. Assumim doncs que $(M \sqcup W^d_\sigma(S_u))/L$ és cancel·latiu i que $d_{|\partial_e S_u}$ no és finita. Llavors $d(s) = \infty$ per algun $s \in \partial_e S_u$. Apliquem el Corol·lari 3.2.20 per construir $d' \in \mathrm{LAff}(S_u)^{++}$ tal que $d'(s) = 1$ i $d + d' = 2d$. En particular $d' \in W^d_\sigma(S_u)$, i en el quocient mòdul L, tenim $[d] + [d'] = 2[d]$. Per hipòtesi, $(M \sqcup W^d_\sigma(S_u))/L$ és cancel·latiu, i en conseqüència $[d] = [d']$. Per tant existeixen funcions afins i contínues f_1 i f_2 sobre S_u tals que $d + f_1 = d' + f_2$, la qual cosa dóna lloc a una contradicció avaluant al punt s. □

DEMOSTRACIÓ DEL TEOREMA 3.2.10. El resultat es dedueix del Teorema 2.3.16 i del Teorema 3.2.23, prenent $M = V(R)$. □

Observem seguidament un fet que és ben conegut, i que utilitzarem d'ara endavant sempre que convingui:

REMARCA 3.2.24 *Sigui A una C^*-àlgebra separable. Sigui $u \in V(A)^*$ una unitat d'ordre, i posem $S_u = St((V(A), u)$. Aleshores S_u és metritzable.*

DEMOSTRACIÓ: Com que A és separable, tenim que $V(A)$ és numerable (vegeu, per exemple, [91, Exercise 6.D]). Per tant, el grup de Grothendieck $K_0(A)$ és numerable i així $St(K_0(A), u)$ té una sub-base numerable d'oberts (per [39, Proposition 6.1]).

En aquest cas, tenint en compte que a més $St(K_0(A), u)$ és compacte i per un resultat estàndard de topologia general (per exemple, [74, Proposition 1.6.14]), l'espai $St(K_0(A), u)$ és homeomorf a un subconjunt de $[0, 1]^{\mathbb{N}}$, i per tant és metritzable. □

La caracterització de les C^*-àlgebres A amb rang real zero i escala finita es pot descriure en casos importants en termes d'una condició sobre el rang estable d'un quocient de $\mathcal{M}(A)$. Això és conseqüència del Teorema de Lin, que ja hem enunciat anteriorment (vegeu 2.1.12), i que permet assegurar que $RR(\mathcal{M}(A)) = 0$ per una classe àmplia de C^*-àlgebres A amb rang real zero i rang estable 1.

TEOREMA 3.2.25 *Sigui A una C^*-àlgebra sense unitat, simple, amb rang real zero i rang estable* 1. *Assumim que $V(A)$ és estrictament no perforat i que A és no elemental. Suposem que A és separable o, més en general, que A té σ-unitat i que S_u és metritzable, on $u \in V(A)^*$. Llavors A té escala finita si, i només si, el monoide $V(\mathcal{M}(A))/V(L(A))$ és cancel·latiu. Si, a més, el rang real de $\mathcal{M}(A)$ és zero, llavors A té escala finita si i només si* $\mathrm{sr}(\mathcal{M}(A)/L(A)) = 1$.

DEMOSTRACIÓ: La demostració de la primera part del resultat és anàloga a la del Teorema 3.2.10, emprant en aquest cas els Teoremes 2.3.17 i 3.2.23.

Si ara $RR(\mathcal{M}(A)) = 0$, llavors

$$V(\mathcal{M}(A))/V(L(A)) \cong V(\mathcal{M}(A)/L(A)),$$

de manera que A té escala finita si, i només si $V(\mathcal{M}(A)/L(A))$ és cancel·latiu, i per [15, Proposition III.2.4] això és equivalent a dir que $\mathrm{sr}(\mathcal{M}(A)/L(A)) = 1$. □

REMARCA 3.2.26 *És interessant preguntar-se si per anells regulars R amb σ-unitat, simples, amb rang estable* 1 *i $V(R)$ estrictament no perforat, la condició aconseguida al Teorema 3.2.25 per caracteritzar les C^*-àlgebres amb escala finita admet una versió paral·lela. És a dir,* té R escala finita si i només si $\mathrm{sr}(\mathcal{M}(R)/L(R)) = 1$? *Seguint les línies de la demostració del Teorema 3.2.25, la resposta a aquesta pregunta seria afirmativa en cas que l'anell $\mathcal{M}(R)$ fos d'intercanvi (vegeu [7, Proposition 1.4, Section 3, Theorem 7.2] i també [92, Theorem 9]), en el sentit de [90]. No es coneixen, però, condicions que poguem imposar a l'anell R que permetin assegurar que $\mathcal{M}(R)$ sigui d'intercanvi; ni tan sols no es sap si $\mathbb{B}(F)$ és d'intercanvi, per a un cos F.*

Recordem que un ideal I en un anell R és **establement cofinit** si R/I és establement finit. El Teorema 3.2.25 permet donar una resposta afirmativa al següent problema:

QÜESTIÓ: 3.2.27 *([42, Section 16]) Sigui A una C^*-àlgebra simple amb σ-unitat (sense unitat), no elemental. Suposem que A té rang real zero, rang estable* 1, *que $V(A)$ és estrictament no perforat i que A té escala fitada. Assumim a més que $RR(\mathcal{M}(A)) = 0$. Sigui I l'ideal tancat i establement cofinit més petit de $\mathcal{M}(A)$ que conté A. És $I = L(A)$?*

Resoldrem tot seguit aquest problema treballant en un context encara més ampli, com és el de les C^*-àlgebres amb escala finita.

TEOREMA 3.2.28 *Sigui A una C^*-àlgebra amb σ-unitat (sense unitat), simple, amb rang real zero, rang estable* 1 *i amb $V(A)$ estrictament no perforat. Suposem que A és no elemental. Si A té escala finita i $RR(\mathcal{M}(A)) = 0$, llavors per a qualsevol ideal tancat I de $\mathcal{M}(A)$ que conté pròpiament A tenim que* $\mathrm{sr}(\mathcal{M}(A)/I) = 1$. *En particular, aquests ideals són establement cofinits i així $L(A)$ és l'ideal tancat i establement cofinit més petit que conté A.*

DEMOSTRACIÓ: Si I és un ideal tancat de $\mathcal{M}(A)$ que conté pròpiament A, aleshores $L(A) \subseteq I$ (per la Proposició 3.2.2). Com que el rang real de $\mathcal{M}(A)$ és zero i A té escala finita, tenim que $\mathrm{sr}(\mathcal{M}(A)/L(A)) = 1$ pel Teorema 3.2.25 (notem que la demostració d'aquesta implicació a 3.2.25 no necessita la hipòtesi que A és separable). Per tant $\mathcal{M}(A)/I$, essent un quocient de $\mathcal{M}(A)/L(A)$, té rang estable 1, per [79, Theorem 4.3]. □

És natural preguntar-se si el resultat establert al Teorema 3.2.28 és, en algun sentit, el millor possible. Concretament, ens plantegem la següent pregunta:

QÜESTIÓ: 3.2.29 *Suposem que es satisfan les hipòtesis del Teorema 3.2.28, excepte que l'escala de A no és finita. Podem assegurar que $\mathcal{M}(A)/L(A)$ és, almenys, establement finita?*

La resposta és negativa, almenys en el cas que l'escala d és infinita en algun punt $s \in \partial_e S_u$ tal que pertany a la clausura de $\{s\}'$. Per la Proposició 3.2.19 (aplicada a la funció constant 2), existeix una funció $g \in \mathrm{LAff}(S_u)^{++}$ tal que $g(s) = 1$ i $g = 2$ als punts de $\{s\}'$. Llavors $d + g = d + 2$ (atès que això ja es satisfà a $\{s\} \sqcup \{s\}'$), de manera que a $(V(A) \sqcup W_\sigma^d(S_u))/(V(A) \sqcup \mathrm{Aff}(S_u)^{++})$, tenim $[d] + [g] = [d]$. A més, la funció g no és contínua perquè $s \in \overline{\{s\}'}$, d'on $[g] \neq 0$. Usant el Teorema 2.3.17, deduïm que $V(\mathcal{M}(A)/L(A))$ no és establement finit, i per tant $\mathcal{M}(A)/L(A)$ no és establement finita.

3.3 Funcions de pseudo-rang i quasitraces

En la secció anterior hem comprovat com l'espai d'estats S_u associat a un anell regular o a una C^*-àlgebra de rang real zero intervé en la determinació dels anells amb escala finita. El nostre propòsit actual consisteix en establir la relació exacta entre aquest espai d'estats i un tipus d'aplicacions definides sobre l'anell, que d'alguna manera mesuraran la grandària dels seus elements. Usarem això en el futur per expressar condicions relatives a anells, l'escala dels quals no serà finita, en termes de condicions topològiques sobre els espais d'aquestes aplicacions.

DEFINICIÓ 3.3.1 *[8, Section 2] Sigui R un anell regular. Una* **funció de pseudo-rang** *sobre R és una funció $N : R \to \mathbb{R}^+$ tal que $N(xy) \leq N(x), N(y)$, per a $x, y \in R$ qualssevol, i $N(e + f) = N(e) + N(f)$, per a idempotents ortogonals $e, f \in R$. Si $\sup N(R) = 1$, aleshores diem que N és* **normalitzada**.

Denotarem per $\mathbb{P}(R)_1$ el conjunt de funcions de pseudo-rang normalitzades, i observem que en cas que R tingui una unitat $1 \in R$, la condició de normalització equival a dir que $N(1) = 1$. D'aquesta manera es pot recuperar la definició original de funció de pseudo-rang sobre un anell regular R amb unitat (vegeu [37, Chapter 16]). Notem que $\mathbb{P}(R)_1$ és, com a subconjunt de $\mathbb{R}^R$, convex i Hausdorff, però en general no és compacte.

La relació entre funcions de pseudo-rang i estats per anells amb unitat fou establerta per Bergman, i també per Goodearl i Handelman (vegeu [44] i també [37, Chapter 17. Notes]).

PROPOSICIÓ 3.3.2 *[37, Proposition 17.12] Si R és un anell regular amb unitat, aleshores hi ha un homeomorfisme afí $\theta : \mathbb{P}(R)_1 \to St(V(R), [1_R])$ tal que $\theta(N)([f]) = N(f)$ per a tota $N \in \mathbb{P}(R)_1$ i tot idempotent $f \in M_\infty(R)$.* $\square$

Volem estendre aquest tipus de relació al cas en que l'anell no tingui unitat. Notem en primer lloc una propietat fonamental de les funcions de pseudo-rang:

LEMA 3.3.3 *Sigui R un anell regular (no necessàriament amb unitat), i sigui $N \in \mathbb{P}(R)$. Sigui $e \in R$ un idempotent, i posem $S = eRe$. Si $x_1, \dots, x_n, y_1, \dots, y_m \in S$ i $x_1S \oplus \dots \oplus x_nS \lesssim y_1S \oplus \dots \oplus y_mS$, aleshores $\sum_{i=1}^{n} N(x_i) \leq \sum_{j=1}^{m} N(y_j)$.*

DEMOSTRACIÓ: Suposem primer que $N(e) = 0$. Aleshores $N(x_i) = N(y_j) = 0$ per a tot i, j, d'on la conclusió és clara. Si $N(e) \neq 0$, definim $N_e : S \to \mathbb{R}^+$ per $N_e(x) = N(x)/N(e)$, on $x \in S$. Aleshores es comprova fàcilment que $N_e \in \mathbb{P}(S)_1$. Per [37, Proposition 16.1(a)] tenim que $\sum_{i=1}^{n} N_e(x_i) \leq \sum_{j=1}^{m} N_e(y_j)$. Usant que $N(e)N_e(x) = N(x)$ en l'anterior desigualtat obtenim la conclusió volguda. $\square$

PROPOSICIÓ 3.3.4 *Sigui R un anell regular (no necessàriament amb unitat), i sigui $N \in \mathbb{P}(R)$. Aleshores, per a tot $k \in \mathbb{N}$, hi ha una única extensió de N a una funció de pseudo-rang N_k sobre $M_k(R)$ tal que $N_k \begin{pmatrix} x & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = N(x)$, per $x \in R$.*

DEMOSTRACIÓ: Denotem $S = M_k(R)$. Sigui $x \in S$. Aleshores existeix un idempotent $e \in S$ tal que $xS = eS$. Com que $V(R)$ satisfà la descomposició de Riesz, existeixen idempotents $e_1, \ldots, e_k \in R$ tals que $[e_1] + \ldots + [e_k] = [e]$. Si hi ha uns altres idempotents $f_1, \ldots, f_m \in R$ tals que $\sum_{i=1}^{k}[e_i] = \sum_{j=1}^{m}[f_j]$, aleshores existeix un idempotent $h \in R$ tal que si $T = hRh$, tenim $e_i, f_j \in T$ per a tot i, j i $e_1T \oplus \ldots \oplus e_kT \cong f_1T \oplus \ldots \oplus f_mT$. Pel Lema 3.3.3 tenim que $\sum_i N(e_i) = \sum_j N(f_j)$.

Definim $N_k(x) = \sum_{i=1}^{k} N(e_i)$, on $e_i \in R$ són idempotents tals que $\sum_i [e_i] = [e]$ i e és un idempotent tal que $eS = xS$. Les observacions anteriors asseguren que N_k és ben definida.

Siguin $x, y \in S$. Aleshores $(xy)S \subseteq xS$. Escrivim $(xy)S = eS$ per a un cert idempotent $e \in S$. Per [67, Lemma 1(i)], existeix un idempotent $f \in S$ tal que $xS = fS$ i $e \leq f$. Com que $V(R)$ és un monoide Riesz, existeixen idempotents $e_1, \ldots, e_k, f_1, \ldots, f_k$ tals que $[e] = \sum_i [e_i] \leq \sum_j [f_j] = [f]$, i per a un córner T de R adequat tenim $e_1T \oplus \ldots \oplus e_kT \lesssim f_1T \oplus \ldots \oplus f_kT$, d'on pel Lema 3.3.3 concloem que $N_k(xy) = \sum_i N(e_i) \leq \sum_i N(f_i) = N_k(x)$. D'altra banda, $S(xy) \subseteq Sy$. Observem que per ser S regular existeix $z \in S$ tal que $y = yzy$. Per tant, si $e = yz$ i $f = zy$, tenim que $Sy = Sf$ i $e \sim f$, de forma que $N_k(y) = N_k(f)$. Com abans, doncs, deduïm que $N_k(xy) \leq N_k(y)$.

Si $e, f \in S$ són idempotents ortogonals, aleshores una línia d'argumentació similar a l'anterior mostra que $N_k(e + f) = N_k(e) + N_k(f)$.

Finalment, sigui N'_k una altra extensió de N a S. Si $e \in S$ és un idempotent, podem escriure $[e] = \sum_i [e_i]$, per a certs idempotents $e_i \in R$. Aleshores $N'_k(e) = \sum_i N'_k(e_i) = \sum_i N(e_i) = N_k(e)$. Per tant $N_k = N'_k$. $\square$

En el que segueix, si N és una funció de pseudo-rang sobre un anell regular R, usarem aquesta mateixa lletra per denotar les extensions de N a totes les matrius sobre R.

Sigui R un anell regular, i sigui $x \in R$ un element no zero. Denotem $\mathbb{P}(R)_x = \{N \in \mathbb{P}(R) \mid N(x) = 1\}$. Notem que si R és simple aleshores $\mathbb{R}_+\mathbb{P}(R)_x = \mathbb{P}(R)$. En efecte, si $N \in \mathbb{P}(R)$ i $N \neq 0$, aleshores $N(x) \neq 0$. En cas contrari, si $y \in R$, aleshores existeixen un córner S de R i $n \in \mathbb{N}$ tals que $yS \lesssim nxS$, de manera que $N(y) = 0$, pel Lema 3.3.3, que és impossible. Posant doncs $N_x = N/N(x)$, tenim que $N(x)N_x = N$.

Recordem que si $e \in R$ és un idempotent no nul, aleshores es defineix $S_u = St(V(R), u)$, on $u = [e] \in V(R)$. Provarem ara que en aquestes condicions, els espais $\mathbb{P}(R)_e$ i S_u són afinament homeomorfs. L'argument que donarem es basa en el resultat per anells amb unitat.

PROPOSICIÓ 3.3.5 *Sigui R un anell regular simple i sigui $e \in R$ un idempotent no nul. Posem $u = [e] \in V(R)$. Llavors existeix un homeomorfisme afí*

$$\alpha : \mathbb{P}(R)_e \to S_u,$$

tal que $\alpha(N)([f]) = N(f)$, per a tota $N \in \mathbb{P}(R)_e$ i tot idempotent $f \in M_\infty(R)$.

DEMOSTRACIÓ: En primer lloc, afirmem que $\mathbb{P}(R)_e = \mathbb{P}(eRe)_1$. En efecte, si $N \in \mathbb{P}(R)_e$, llavors la restricció de N a eRe dóna lloc a una funció de pseudo-rang sobre eRe. Recíprocament, sigui $N_e \in \mathbb{P}(eRe)_1$. Volem estendre N_e a tot R. Prenem $x \in R$. Existeix un idempotent $f \in R$ tal que $xR = fR$. Com que R és simple, existeix $n \in \mathbb{N}$ tal que $[f] \leq n[e]$ a $V(R)$, i usant la descomposició de Riesz obtenim idempotents $f_1, \dots, f_n \in R$ tals que $[f] = \sum_{i=1}^{n}[f_i]$, i $[f_i] \leq [e]$ per a tot i. Podem suposar que $f_i \in eRe$ per a tot i. Definim doncs $N(x) = \sum_{i=1}^{n} N_e(f_i)$. Com a la demostració de la Proposició 3.3.4, l'aplicació N és ben definida, i és una funció de pseudo-rang sobre R. Clarament $N(e) = 1$, i també $N_{|eRe} = N_e$. Tenim doncs que $\mathbb{P}(R)_e = \mathbb{P}(eRe)_1$, i en particular $\mathbb{P}(R)_e$ és un espai compacte.

Usant ara que eRe és un anell regular amb unitat, la Proposició 3.3.2 assegura que existeix un homeomorfisme afí θ_e entre $\mathbb{P}(eRe)_1$ i $St(V(eRe), [e])$. D'altra banda, hi ha un isomorfisme ψ entre els monoides $V(R)$ i $V(eRe)$. En efecte, si $f \in M_\infty(R)$ és un idempotent, aleshores per simplicitat existeix un nombre natural n tal que $[f] \leq n[e]$ a $V(R)$, d'on per la descomposició de Riesz trobem idempotents $f_1, \dots, f_n \in eRe$ tals que $[f] = \sum_{i=1}^{n}[f_i]$ a $V(R)$. Definim $\psi([f]) = \sum_{i=1}^{n}[f_i]$, que és clarament una aplicació ben definida. És fàcil veure que ψ és un isomorfisme de monoides i que $\psi[e] = u$. Deduïm que $St(V(eRe), [e])$ és afinament homeomorf a S_u, via l'aplicació β definida per $\beta(s)[f] = s\psi([f])$, on $s \in St(V(eRe), [e])$ i $f \in M_\infty(R)$ és un idempotent. Definim finalment $\alpha := \beta \circ \theta_e \circ \text{res}$, on res denota la restricció de R a eRe, i que és un homeomorfisme afí. Si ara $f \in M_\infty(R)$ és un idempotent i $N \in \mathbb{P}(R)_e$, aleshores

$$\alpha(N)([f]) = \beta(\theta_e(N_{|eRe}))([f]) = \theta_e(N_{|eRe})(\psi([f])) = N_{|eRe}(\psi([f])) = N([f]). \square$$

Ens ocuparem tot seguit d'obtenir un resultat en la línia de la Proposició 3.3.5 per C^*-àlgebres simples i amb rang real zero, que serà la versió semifinita del resultat conegut de Blackadar i Handelman per C^*-àlgebres amb unitat (vegeu [15]). Amb aquest objectiu ens cal introduir la noció de quasitraça no necessàriament finita, que serà una modificació natural de la definició de traça (donada, per exemple, a [72, 5.2.1]). El concepte de quasitraça finita ha estat estudiat extensivament els darrers anys (vegeu [15], [47]). Podríem esperar, doncs, que alguns dels resultats ja establerts pel cas finit s'estenguessin al cas infinit, però com veurem això dependrà d'altres factors; fins i tot, certs fets provats al cas finit hauran de ser assumits com a hipòtesi en la nostra situació.

DEFINICIÓ 3.3.6 *Sigui A una C^*-àlgebra. Una* **1-quasitraça** *sobre A és una aplicació $\tau : A_+ \to [0,\infty]$ tal que $\tau(\alpha x) = \alpha\tau(x)$ si $x \in A_+$ i $\alpha \in \mathbb{R}_+$, tal que $\tau(x+y) = \tau(x)+\tau(y)$, sempre que x i y són elements de A_+ que commuten, i tal que $\tau(xx^*) = \tau(x^*x)$ per a tot $x \in A$. Una* **quasitraça** *sobre A és una 1-quasitraça τ que es pot estendre a una 1-quasitraça τ_n sobre $M_n(A)$ per a cada $n \in \mathbb{N}$.*

Usem la convenció aquí que $0 \cdot \infty = 0$, de manera que $\tau(0) = 0$. Veient A com una subàlgebra de $M_n(A)$ (és a dir, com a córner superior esquerra), l'extensió τ_n de τ a la Definició 3.3.6 vol dir que per $x \in A$, tenim $\tau(x) = \tau_n(xe_{11})$, on e_{11} és la matriu elemental de $M_n(\widetilde{A})$ que té un 1 a l'entrada $(1,1)$ i zeros a la resta.

Si τ és una 1-quasitraça finita sobre una C^*-àlgebra A, aleshores τ estén de manera natural i única a una aplicació que també anomenarem τ definida sobre A i amb valors a $\mathbb{C}$, tal que és lineal en $*$-subàlgebres commutatives de A, tal que $\tau(x^*x) = \tau(xx^*) \geq 0$ per a tot $x \in A$, i tal que $\tau(a+bi) = \tau(a) + i\tau(b)$ per a tot $a, b \in A_{sa}$. En aquest context, una **quasitraça** finita sobre A és una 1-quasitraça finita que estén a una 1-quasitraça finita sobre $M_2(A)$, és a dir, existeix una 1-quasitraça finita τ' sobre $M_2(A)$ tal que $\tau'\begin{pmatrix} x & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \tau(x)$. Aquesta és la noció clàssica de quasitraça (vegeu [15] i [42]), que es recupera, doncs, a partir de la nostra definició.

Es desprèn de [15, Propositions II.4.1 i II.4.2] que tota quasitraça finita τ estén de manera única a totes les àlgebres $M_n(A)$, així com que totes aquestes extensions són determinades per τ. En particular, veiem que una quasitraça finita no és altra cosa que una quasitraça que pren valors a $[0,\infty)$. En aquest cas usarem la mateixa lletra, τ, per denotar les extensions a les àlgebres de matrius. Tota quasitraça finita τ sobre una C^*-àlgebra A preserva l'ordre de la C^*-àlgebra i és uniformement contínua. Aquest fet, completament no trivial, és provat a [15, Corollary II.2.5]. Es defineix la norma de τ com el suprem dels valors que pren sobre la part positiva de la bola unitat de A, i es té que $\|\tau\| < \infty$ ([15, Corollary II.2.3]). Observem que $\|\tau\| = \tau(1)$ si A té unitat. Denotem per $QT(A)$ el conjunt de quasitraces finites i normalitzades sobre A, és a dir, les quasitraces finites amb norma 1. És una pregunta oberta si tota quasitraça finita és una traça, és a dir, si és lineal. Per la classe de les C^*-àlgebres exactes (que inclou les àlgebres AF), la resposta és afirmativa, com provà Haagerup a [47]. D'ara endavant, quan parlem de quasitraces ho farem en el sentit de la Definició 3.3.6, especificant en cada cas si assumim alguna condició de finitud o no.

Si τ és una quasitraça, posem $F_\tau = \{x \in A_+ \mid \tau(x) < \infty\}$, que és un conjunt no buit atès que $0 \in F_\tau$. Diem que τ és **densament definida** si F_τ és dens en A_+, i denotem el conjunt de quasitraces densament definides per $QT_d(A)$. Usarem $LQT(A)$ per denotar el conjunt de quasitraces semicontínues inferiors. Finalment la notació $LQT_d(A)$ es referirà al conjunt de quasitraces semicontínues inferiors i densament definides. Notem que tots els conjunts considerats són convexos.

És natural considerar quasitraces que compleixin certes condicions de finitud. Algunes d'aquestes condicions estan fortament relacionades amb la propietat que les quasitraces preservin l'ordre, la qual cosa no sembla trivial a partir de les definicions.

LEMA 3.3.7 *Sigui τ una quasitraça sobre una C^*-àlgebra A. Suposem que τ preserva l'ordre. Llavors el conjunt $F'_\tau = \{x \in A \mid x^*x \in F_\tau\}$ és un ideal de A.*

DEMOSTRACIÓ: Com que $\tau(0) = 0$, tenim que F'_τ és no buit. Siguin $x \in F'_\tau$ i $y \in A$. Aleshores $\tau((xy)^*(xy)) = \tau(xyy^*x^*) \leq \|y\|^2\tau(xx^*)$, ja que τ preserva l'ordre. Tenint en compte que $\tau(xx^*) < \infty$, obtenim que $xy \in F'_\tau$. De manera semblant $yx \in F'_\tau$. Per tant F'_τ és tancat pel producte per elements de A. Siguin $a, b \in A_+$. Com a [15, Corollary II.1.11], posem $x = \begin{pmatrix} a^{1/2} & 0 \\ b^{1/2} & 0 \end{pmatrix}$. Llavors:

$$x^*x = \begin{pmatrix} a+b & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \text{ i } xx^* = \begin{pmatrix} a & a^{1/2}b^{1/2} \\ b^{1/2}a^{1/2} & b \end{pmatrix}.$$

Sigui $z = \begin{pmatrix} a^{1/2} & 0 \\ -b^{1/2} & 0 \end{pmatrix}$. Aleshores $xx^* + zz^* = \begin{pmatrix} 2a & 0 \\ 0 & 2b \end{pmatrix}$. D'altra banda, si posem $w = \begin{pmatrix} 0 & b^{1/2} \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$, tenim que $ww^* = \begin{pmatrix} b & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$, mentre que $w^*w = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & b \end{pmatrix}$. Per

tant
$$\tau(a+b) = \tau\begin{pmatrix} a+b & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \tau(x^*x) = \tau(xx^*) \leq 2\tau\begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & b \end{pmatrix}$$
$$= 2(\tau(a) + \tau(w^*w)) = 2(\tau(a) + \tau(b)).$$
Ara, donats $x, y \in F'_\tau$, tenim que $(x+y)^*(x+y) \leq 2(x^*x + y^*y)$, d'on deduïm que $\tau((x+y)^*(x+y)) \leq 4(\tau(x^*x) + \tau(y^*y)) < \infty$. □

Recordem que per a una C^*-àlgebra A qualsevol, $K(A)$ denota l'ideal de Pedersen de A (vegeu la Secció 1 d'aquest mateix capítol). Una propietat important d'aquest ideal, i que farem servir repetidament, és que si $\{x_k\}$ és un conjunt finit d'elements de $K(A)$, llavors la C^*-subàlgebra hereditària generada per $\{x_k\}$ és continguda a $K(A)$ ([72, Proposition 5.6.2]). En particular doncs, si $x \in K(A)_+$ i $\alpha > 0$, aleshores $x^\alpha \in K(A)_+$. També és convenient remarcar que, tal com es veu a la demostració de [72, Theorem 5.6.1], si $x \in A_+$, llavors existeix una successió creixent (x_n) d'elements de $K(A)_+$ que commuten entre ells i també amb x, i tal que $\lim_n x_n = x$.

COROL·LARI 3.3.8 *Sigui A una C^*-àlgebra i sigui $\tau \in QT_d(A)$. Suposem que τ preserva l'ordre. Llavors $\tau_{|K(A)_+}$ és finita. En particular, $\tau(p) < \infty$ per a tota projecció $p \in A$.*

DEMOSTRACIÓ: F'_τ és un ideal de A pel Lema 3.3.7. Sigui $x \in F_\tau$. Notem que $x^2 = x^{1/2}xx^{1/2} \leq \|x\|x$, d'on usant que τ preserva l'ordre obtenim que $\tau(x^2) \leq \|x\|\tau(x) < \infty$. Per tant $x \in (F'_\tau)_+$, i això prova que $F_\tau \subset (F'_\tau)_+$. Com que τ és densament definida, veiem que F'_τ és dens i així conté $K(A)$. Sigui $x \in K(A)_+$. Llavors $x^{1/2} \in K(A)_+$ ([72, 5.6.2]) i per tant $\tau(x) = \tau(x^{1/2}x^{1/2}) < \infty$, de manera que $K(A)_+ \subseteq F_\tau$. Deduïm d'aquesta forma la primera part del resultat. Si ara $p \in A$ és una projecció, aleshores $p \in K(A)$ per [72, 5.6.3], i així $\tau(p) < \infty$. □

Observem que si τ és una quasitraça sobre una C^*-àlgebra A i si $a, b \in A_+$ són elements que commuten i $a \leq b$, llavors $\tau(a) \leq \tau(b)$. Això és clar si $\tau(b) = \infty$, mentre que en el cas que $\tau(b) < \infty$, notem que $b - a$ i a són elements de A_+ que commuten, i per tant $\tau(b) = \tau(b-a) + \tau(a) \geq \tau(a)$.

Adoptem la terminologia de [26], i diem que una quasitraça $\tau : A_+ \to [0, \infty]$ sobre una C^*-àlgebra A és **semifinita** si tot element no zero de A_+ majora (en l'ordre de A) un element no zero, en el qual τ pren un valor finit. Per a $\varepsilon > 0$, denotem per f_ε la funció contínua de $\mathbb{R}$ a $\mathbb{R}$ que val 0 a $(-\infty, \varepsilon]$, és lineal a $[\varepsilon, 2\varepsilon]$ i val 1 a $[2\varepsilon, \infty)$. Observem que per definició de $K(A)$, si $x \in A_+$ i $\varepsilon > 0$, aleshores $f_\varepsilon(x) \in K(A)$.

PROPOSICIÓ 3.3.9 *Sigui A una C^*-àlgebra i sigui $\tau \in LQT_d(A)$. Cadascuna de les condicions següents implica la que té a continuació:*

(1) *τ preserva l'ordre;*

(2) *$\tau_{|K(A)_+}$ és finita;*

(3) *τ és semifinita.*

A més, (1) *i* (2) *són sempre equivalents; i si A és simple aleshores totes són equivalents.*

DEMOSTRACIÓ: (1) $\Rightarrow$ (2) es desprèn del Corol·lari 3.3.8.

(2) $\Rightarrow$ (1). Suposem que $a, b \in A$ són elements tals que $0 \leq a \leq b$. Aleshores existeix una successió (t_n) d'elements a la bola unitat de A tal que $a^{1/2} = \lim_{n\to\infty} t_n b^{1/2}$ (vegeu, per exemple, [48, Lemma A-1]). Llavors $a = \lim_{n\to\infty} b^{1/2}t_n^* t_n b^{1/2}$. Com que τ és semicontínua inferior tenim que $\tau(a) \leq \liminf_n \tau(b^{1/2}t_n^* t_n b^{1/2})$. Clarament, doncs, n'hi ha prou amb veure que $\tau(b^{1/2}c^*cb^{1/2}) \leq \tau(b)$, sempre que $\|c\| \leq 1$. Escrivim $b = \lim_n b_n$, on (b_n) és una successió creixent d'elements de $K(A)_+$ que commuten, i que també commuten amb b ([72, 5.6.1]). Aleshores $cbc^* = \lim_n cb_nc^*$, i atès que $B_n = \overline{b_nAb_n} \subset K(A)$ ([72, 5.6.2]), tenim que $\tau_{|(B_n)_+}$ és una quasitraça finita, i per tant preserva l'ordre, per [15, Corollary II.2.5]. Així $\tau(b^{1/2}c^*cb^{1/2}) = \tau(cbc^*) \leq \liminf_n \tau(cb_nc^*) \leq \liminf_n \tau(b_n) = \sup_n \tau(b_n) = \tau(b)$, tenint en compte que $b_n \leq b$ per a tot n i commuten amb b, i considerant també que τ és semicontínua inferior.

(2) $\Rightarrow$ (3) és clar.

Ara suposem que A és simple i provem (3) $\Rightarrow$ (2). En primer lloc, provem que $\tau(f_\varepsilon(x))$ és finit, sempre que $\varepsilon > 0$ i $x \in K(A)_+$.

Sigui $x \in K(A)_+$ un element no nul, i triem $0 \neq y \in K(A)_+$ amb $\tau(y) < \infty$. Llavors, a causa de la simplicitat, $K(A) = K(A)yK(A)$, i per tant $\langle x\rangle \leq n\langle y\rangle$ a $S(A)$ per algun $n \geq 1$. Per [84, Proposition 2.4], existeixen $\delta' > 0$ i $r \in M_n(A)$ tals que $\mathrm{diag}(f_\varepsilon(x), 0, \dots, 0) = r\mathrm{diag}(f_{\delta'}(x), \dots, f_{\delta'}(x))r^*$. D'aquesta manera, si posem $v = r\mathrm{diag}(f_{\delta'}(x), \dots, f_{\delta'}(x))^{1/2}$, tenim que $\mathrm{diag}(f_\varepsilon(x), 0, \dots, 0) = vv^*$ i

$$v^*v = \mathrm{diag}(f_{\delta'}(y)^{1/2}, \dots, f_{\delta'}(y)^{1/2})r^*r\mathrm{diag}(f_{\delta'}(y)^{1/2}, \dots, f_{\delta'}(y)^{1/2}).$$

Denotant $\delta = \delta'/2$ obtenim que $(v^*v)t = t(v^*v) = v^*v$ amb $t = \mathrm{diag}(f_\delta(y), \dots, f_\delta(y))$. Notem que $\|v^*v\| = \|f_\varepsilon(x)\| \leq 1$ i així $v^*v \leq 1$. Per tant $v^*v \leq t$. En conseqüència, $\tau(f_\varepsilon(x)) = \tau(vv^*) = \tau(v^*v) \leq \tau(t) = n\tau(f_\delta(y)) \leq (n/\delta)\tau(y) < \infty$. (La desigualtat $n\tau(f_\delta(y) \leq (n/\delta)\tau(y)$ es deu al fet que $\delta f_\delta(y) \leq y$.)

Ara triem $0 \neq x \in K(A)_+$ i sigui $\varepsilon > 0$ tal que $f_\varepsilon(x) \neq 0$. Llavors $K(A) = K(A)f_\varepsilon(x)K(A)$ i així $\langle x\rangle \leq n\langle f_\varepsilon(x)\rangle$ a $S(A)$ per algun $n \geq 1$. Per a cada $m \in$

$\mathbb{N}$ existeix com abans $\delta_m > 0$ satisfent $\tau(f_{1/m}(x)) \leq n\tau(f_{\delta_m}(f_\varepsilon(x)))$. Tenint en compte que $f_{\delta_m}(f_\varepsilon(x)) \leq f_{\varepsilon/2}(x)$ obtenim $\tau(f_{1/m}(x)) \leq n\tau(f_{\varepsilon/2}(x))$. Atès que τ és semicontínua inferior, veiem que $\tau(x) \leq \liminf_m \tau(xf_{1/m}(x)) \leq n\|x\|\tau(f_{\varepsilon/2}(x)) < \infty$, com volíem. □

LEMA 3.3.10 *[26, Lemma 5.6] Sigui A una C^*-àlgebra simple. Llavors tota C^*-subàlgebra hereditària B de A continguda a $K(A)$ és algebraicament simple.* □

COROL·LARI 3.3.11 *Sigui A una C^*-àlgebra simple i sigui $\tau \in LQT(A)$. Si $\tau_{|K(A)_+}$ és finita llavors $\tau_{n|K(M_n(A))_+}$ és finita per a tot n. En particular, les extensions τ_n són determinades de manera unívoca per τ.*

DEMOSTRACIÓ: És suficient comprovar que $\tau_{2|K(M_2(A))_+} < \infty$. Prenem un element $a \in K(M_2(A))_+ = M_2(K(A))_+$, i sigui B la C^*-subàlgebra hereditària de A generada per les entrades de a. Com que $B \subseteq K(A)$ ([72, 5.6.2]) tenim $a \in M_2(B)_+$. Pel Lema 3.3.10, B és algebraicament simple, i per tant $M_2(B)$ també ho és. Per tant, si $0 \neq x \in B_+$, tenim $M_2(B) = M_2(B)xe_{11}M_2(B)$. Fixem $\varepsilon > 0$. Un argument semblant al que hem usat a la demostració de la Proposició 3.3.9 mostra que $\tau_2(f_\varepsilon(a)) \leq n\tau(f_\delta(x))$ per algun $\delta > 0$ i algun $n \in \mathbb{N}$, i per hipòtesi $\tau(f_\delta(x)) < \infty$. Ara bé, com que $\varepsilon f_\varepsilon(a) \leq a$, veiem que τ_2 és semifinita i així $\tau_{2|K(M_2(A))_+} < \infty$, per la Proposició 3.3.9.

Suposem ara que $\overline{\tau}$ i $\overline{\tau}'$ són 1-quasitraces semicontínues inferiors sobre A tals que $\overline{\tau}_{|K(A)_+} = \overline{\tau}'_{|K(A)_+}$. Sigui $x \in A_+$. Atès que existeix una successió creixent (x_n) d'elements de $K(A)_+$ que commuten entre ells i també amb x, i el límit dels quals és x ([72, 5.6.1]), obtenim que $\overline{\tau}(x) = \sup \overline{\tau}(x_n) = \sup \overline{\tau}'(x_n) = \overline{\tau}'(x)$.

Finalment, si τ_2' és una altra extensió de τ a $M_2(A)_+$, aleshores $\tau'_{2|M_2(B)_+}$ és una 1-quasitraça finita que estén $\tau_{|B_+}$, per a qualsevol C^*-subàlgebra hereditària $B \subseteq K(A)$ finitament generada. Usant [15, Propositions II.4.1 i II.4.2] obtenim que $\tau'_{2|K(M_2(A))_+} = \tau_{2|K(M_2(A))_+}$, d'on $\tau_2' = \tau_2$ i per tant τ_2 és determinada per τ. □

Sigui A una C^*-àlgebra i sigui $x \in K(A)_+$. Posem $Q = \{\tau \in LQT_d(A) \mid \tau_{|K(A)_+} \text{ és finita}\}$, i $Q_x = \{\tau \in Q \mid \tau(x) = 1\}$. Notem que si $x \neq 0$ i A és simple, llavors $\mathbb{R}_+Q_x = Q$. Per veure això, prenem $\tau \in Q$. Si $\tau = 0$, aleshores és clar que $\tau \in \mathbb{R}_+Q_x$. Si, d'altra banda, $\tau \neq 0$, llavors com que τ és determinada pels valors que pren sobre $K(A)_+$ (per la demostració del Corol·lari 3.3.11) deduïm que $\tau_{|K(A)_+} \neq 0$, i en conseqüència $\tau(x) > 0$. En cas contrari, tindríem $\tau(f_\varepsilon(x)) = 0$ per a tot $\varepsilon > 0$. Sigui $y \in K(A)_+$. Llavors, com a la demostració de la Proposició 3.3.9, existeix $n \in \mathbb{N}$ tal que per a tot $\varepsilon > 0$, hi ha un $\delta > 0$ i un nombre positiu c_n satisfent $\tau(f_\varepsilon(y)) \leq c_n\tau(f_\delta(x))$. Aleshores $\tau(f_\varepsilon(y)) = 0$ per a tot $\varepsilon > 0$. Com que τ és semicontínua inferior i $y = \lim_n f_{1/n}(y)^{1/2} y f_{1/n}(y)^{1/2}$, obtenim finalment que $\tau(y) \leq \liminf_n \|y\| \tau(f_{1/n}(y)) = 0$. Així $\tau_{|K(A)_+} = 0$, que és una contradicció.

D'altra banda, es dedueix de la demostració del Corol·lari 3.3.11 que els elements de Q que coincideixen sobre $K(A)_+$ són de fet iguals. Per aquesta raó $(Q, +)$ és cancel·latiu. Sigui $X = Q - Q = \{\tau - \tau' \mid \tau, \tau' \in Q\}$, que és un espai vectorial real. Equipem X amb la topologia localment convexa generada per les seminormes $p_y : X \to \mathbb{R}$, $\varphi \mapsto |\varphi(y)|$, on $y \in K(A)_+$, anomenada la **topologia dèbil** sobre X. Atès que la igualtat d'elements de Q és determinada per la igualtat sobre $K(A)_+$, les seminormes (p_y) formen una família separant, de manera que X esdevé un espai Hausdorff. Si A és simple, analitzarem amb més detall l'estructura de l'espai Q_x. Ens cal primer un resultat previ d'extensió de "quasitraces" definides sobre l'ideal de Pedersen a tota la C^*-àlgebra.

LEMA 3.3.12 *Sigui A una C^*-àlgebra, i sigui $\tau : K(A)_+ \to [0, \infty)$ una aplicació tal que $\tau(\alpha x) = \alpha \tau(x)$ si $x \in K(A)_+$ i $\alpha \in \mathbb{R}_+$, tal que $\tau(x + y) = \tau(x) + \tau(y)$, si $x, y \in K(A)_+$ són elements que commuten, i tal que $\tau(xx^*) = \tau(x^*x)$ per a tot $x \in K(A)$. Suposem que τ admet extensions τ_n a $M_n(K(A))_+$, per a tot n amb les mateixes propietats que τ. Aleshores τ estén de manera única a una quasitraça $\tau' \in LQT_d(A)$.*

DEMOSTRACIÓ: En primer lloc, observem que les extensions τ_n són unívocament determinades per τ, i que per tant si $B \subseteq K(A)$ és una C^*-subàlgebra hereditària, la restricció de τ a B_+ és una quasitraça sobre B.

Si $x \in A_+$, definim

$$\tau'(x) = \sup_n \tau(x^{1/2} f_{1/n}(x) x^{1/2}) = \sup_n \tau(f_{1/n}(x)^{1/2} x f_{1/n}(x)^{1/2}).$$

Comprovem que $\tau'(xx^*) = \tau'(x^*x)$. Siguin $n, m \in \mathbb{N}$ amb $m \geq 2n$. Aleshores

$$\tau(f_{1/n}(x^*x)^{1/2} x^* f_{1/m}(xx^*) x f_{1/n}(x^*x)^{1/2}) =$$

$$\tau((f_{1/m}(xx^*)^{1/2} x f_{1/n}(x^*x)^{1/2} f_{1/m}(x^*x)^{1/2})(f_{1/m}(x^*x)^{1/2} f_{1/n}(x^*x)^{1/2} x^* f_{1/m}(xx^*)^{1/2}))$$
$$= \tau(f_{1/m}(xx^*)^{1/2} x f_{1/n}(x^*x) x^* f_{1/m}(xx^*)^{1/2})$$
$$\leq \tau(f_{1/m}(xx^*)^{1/2} xx^* f_{1/m}(xx^*)^{1/2}) \leq \tau'(xx^*).$$

Per tant $\tau(f_{1/n}(x^*x)^{1/2} x^* x f_{1/n}(x^*x)^{1/2})$

$$= \lim_{m > 2n} \tau(f_{1/n}(x^*x)^{1/2} x^* f_{1/m}(xx^*) x f_{1/n}(x^*x)^{1/2}) \leq \tau'(xx^*)$$

per l'anterior, d'on tenim que $\tau'(x^*x) \leq \tau'(xx^*)$. Amb un argument simètric concloem que $\tau'(xx^*) = \tau'(x^*x)$.

Observem ara que $\tau'_{|K(A)_+} = \tau$, ja que $\tau_{|\overline{xAx}}$ és contínua i per tant $\tau'(x) = \sup_n \tau(x^{1/2} f_{1/n}(x) x^{1/2}) = \tau(x)$. També, atès que $K(A)_+ \subseteq \{x \in A_+ \mid \tau'(x) < \infty\}$, tenim que τ' és una aplicació densament definida.

Comprovem que τ' és creixent. Suposem que $x, y \in A$ satisfan $0 \leq x \leq y$. Observem que en particular $x \in \overline{yAy}$ i per tant $x = \lim_n f_{1/n}(y)^{1/2} x f_{1/n}(y)^{1/2}$. Per a cada $n \in \mathbb{N}$, tenim

$$\tau(f_{1/n}(x)^{1/2} x f_{1/n}(x)^{1/2}) = \lim_m \tau(f_{1/n}(x)^{1/2} f_{1/m}(y)^{1/2} x f_{1/m}(y)^{1/2} f_{1/n}(x)^{1/2})$$

$$= \lim_m \tau(x^{1/2} f_{1/m}(y)^{1/2} f_{1/n}(x) f_{1/m}(y)^{1/2} x^{1/2}) \leq \sup_m \tau(x^{1/2} f_{1/m}(y) x^{1/2})$$

$$= \sup_m \tau(f_{1/m}(y)^{1/2} x f_{1/m}(y)^{1/2}) \leq \sup_m \tau(f_{1/m}(y)^{1/2} y f_{1/m}(y)^{1/2}) = \tau'(y).$$

Per tant, prenent el suprem sobre n deduïm que $0 \leq \tau'(x) \leq \tau'(y)$.

Usant aquest fet, provem ara que τ' és semicontínua inferior. Sigui (x_k) una successió en A_+ tal que convergeix a $x \in A_+$. Llavors, per a cada $n \in \mathbb{N}$, tenim

$$\tau(f_{1/n}(x)^{1/2} x f_{1/n}(x)^{1/2}) = \lim_k \tau(f_{1/n}(x)^{1/2} x_k f_{1/n}(x)^{1/2})$$

$$= \lim_k \tau(x_k^{1/2} f_{1/n}(x) x_k^{1/2}) \leq \liminf_k \tau'(x_k).$$

(aquesta última desigualtat es desprèn dels fets que τ' és creixent, i $\tau'_{|K(A)_+} = \tau$). Com abans, concloem que $\tau'(x) \leq \liminf_k \tau'(x_k)$.

Finalment, siguin $x, y \in A_+$ dos elements que commuten. Hem de veure que $\tau'(x+y) = \tau'(x) + \tau'(y)$. Observem en primer lloc que les successions $(f_{1/n}(x+y)x)$ i $(f_{1/n}(x+y)y)$ convergeixen a x i y respectivament, i cadascuna d'elles commuta amb x i amb y. Notem que a més $\tau'(x) = \sup_n \tau(x^{1/2} f_{1/n}(x+y) x^{1/2})$. En efecte, atès que τ' és semicontínua inferior i $\tau'_{|K(A)_+} = \tau$, tenim que

$$\tau'(x) \leq \liminf_n \tau'(x^{1/2} f_{1/n}(x+y) x^{1/2}) = \sup_n \tau(x^{1/2} f_{1/n}(x+y) x^{1/2}).$$

Fent servir que, a més, τ' és creixent, es dedueix amb un argument similar que $\sup_n \tau(x^{1/2} f_{1/n}(x+y) x^{1/2}) \leq \tau'(x)$. Una expressió semblant s'obté intercanviant els papers de x i de y. Per tant:

$$\tau'(x) + \tau'(y) = \sup_m \tau(x^{1/2} f_{1/n}(x+y) x^{1/2}) + \sup_n \tau(y^{1/2} f_{1/n}(x+y) y^{1/2})$$

$$= \sup_n \tau(f_{1/n}(x+y)^{1/2} x f_{1/n}(x+y)^{1/2}) + \tau(f_{1/n}(x+y)^{1/2} y f_{1/n}(x+y)^{1/2}))$$

$$= \sup_n \tau(f_{1/n}(x+y)^{1/2}(x+y) f_{1/n}(x+y)^{1/2}) = \tau'(x+y).$$

Per tant, τ' es una 1-quasitraça semicontínua inferior i densament definida que estén τ. Seguint una argumentació similar, les extensions τ_n donen lloc a 1-quasitraces τ'_n sobre $M_n(A)_+$, que també són semicontínues inferiors i densament definides, i que òbviament estenen τ'. Per tant $\tau' \in LQT_d(A)$. □

Introduïm seguidament una sèrie de nocions amb les quals es pot caracteritzar la compacitat des d'un punt de vista de convergència, per espais en general no metritzables (vegeu [74, 1.3, 1.6]).

DEFINICIÓ 3.3.13 *Sigui X un espai topològic i sigui $(x_\lambda)_{\lambda\in\Lambda}$ una xarxa. Una* **subxarxa** *és una xarxa $(y_\mu)_{\mu\in M}$, conjuntament amb una aplicació $h : M \to \Lambda$ tal que $x_{h(\mu)} = y_\mu$ i tal que per a tot $\lambda \in \Lambda$, existeix $\mu(\lambda) \in M$ amb $\lambda \leq h(\mu)$ per a tot $\mu \geq \mu(\lambda)$.*

DEFINICIÓ 3.3.14 *Si (x_λ) és una xarxa en un espai topològic X, i $Y \subset X$, diem que (x_λ) és* **eventualment** *a Y si existeix $\lambda_0 = \lambda_0(Y)$ tal que $x_\lambda \in Y$ si $\lambda \geq \lambda_0$. En aquest context, una xarxa (x_λ)* **convergeix** *a un punt $x \in X$ si (x_λ) és eventualment a U, per a tot entorn U de x. Una xarxa (x_λ) en un espai topològic X s'anomena* **universal** *si per a tot $Y \subset X$, la xarxa és eventualment a Y, o bé és eventualment a $X \setminus Y$.*

L'existència de xarxes universals no trivials, és a dir, no constants a partir d'una determinat lloc, és un fet que requereix l'axioma de l'elecció i que es recull a [74, 1.3.8]: Tota xarxa en un espai topològic té una subxarxa universal.

TEOREMA 3.3.15 *[74, Theorem 1.6.2] Un espai topològic X és compacte si, i només si, tota xarxa universal és convergent.* □

La demostració del següent resultat es basa en el conegut Teorema d'Alaoglu, una versió del qual es troba a [74, Theorem 2.5.2].

PROPOSICIÓ 3.3.16 *Sigui A una C^*-àlgebra simple, i sigui $x \in K(A)_+$ un element diferent de zero. Aleshores l'espai Q_x és (dèbilment) compacte.*

DEMOSTRACIÓ: Sigui (τ_λ) una xarxa universal a Q_x. Pel Teorema 3.3.15, hem de veure que (τ_λ) és convergent. Sigui $y \in K(A)_+$. Aleshores$(\tau_\lambda(y))_\lambda$ és una xarxa universal de $\mathbb{R}$. En efecte, si $H \subset \mathbb{R}$, prenem $F = \{\tau \in Q_x \mid \tau(y) \in H\}$. Com que

(τ_λ) és universal, tenim que (τ_λ) és eventualment a F, o bé eventualment a $Q_x \setminus F$. Sense perdre generalitat, podem suposar que (τ_λ) és eventualment a F, i així existeix λ_0 tal que $\tau_\lambda \in F$ si $\lambda \geq \lambda_0$, és a dir, $\tau_\lambda(y) \in H$ si $\lambda \geq \lambda_0$. Per tant $(\tau_\lambda(y))$ és eventualment a H, i concloem que $(\tau_\lambda(y))$ és universal.

Vegem que a més $\tau_\lambda(y)$ és inclosa dins un compacte de $\mathbb{R}$. Això és clar si $y = 0$. En cas contrari, per la simplicitat de A tenim que $K(A) = K(A)x^{1/2}K(A)$, i per tant existeixen elements $a_i, b_i \in K(A)$ amb $i = 1, \ldots, n$ (i on n depèn de y) tals que $y^{1/2} = \sum_{i=1}^{n} a_i x^{1/2} b_i$. En conseqüència, si prenem

$$C = \begin{pmatrix} a_1 & \ldots & a_n \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \ldots & 0 \end{pmatrix}, \text{ i } D = \begin{pmatrix} b_1 & \ldots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ b_n & \ldots & 0 \end{pmatrix} \text{ a } M_n(A),$$

tenim

$$\begin{pmatrix} y^{1/2} & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = C\mathrm{diag}(x^{1/2}, \ldots, x^{1/2})D,$$

i així

$$\begin{pmatrix} y & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = C\mathrm{diag}(x^{1/2}, \ldots, x^{1/2})DD^*\mathrm{diag}(x^{1/2}, \ldots, x^{1/2})C^*$$

$$\leq \|D\|^2 C\mathrm{diag}(x, \ldots, x)C^*.$$

Per tant, per a tot λ, tenim $0 \leq \tau_\lambda(y) \leq \|D\|^2\|C\|^2 n\tau_\lambda(x) = \|D\|^2\|C\|^2 n$. Posant, doncs $T_y = [0, \|C\|^2\|D\|^2 n]$, veiem que la xarxa $\tau_\lambda(y)$ és inclosa a T_y. Com que T_y és compacte i $(\tau_\lambda(y))$ és universal, tenim que $\tau_\lambda(y)$ és convergent. Sigui $\tau(y) = \lim_\lambda \tau_\lambda(y)$, per $y \in K(A)_+$. Aleshores és fàcil comprovar que estem en les condicions del Lema 3.3.12 i per tant τ es pot estendre (com a una quasitraça) a tot A_+. Per construcció, $\tau \in Q_x$ i és el límit en la topologia dèbil de la xarxa (τ_λ). □

El nostre objectiu ara és provar que si A és una C^*-àlgebra simple amb σ-unitat, amb rang real zero, i si $p \in A$ és una projecció no nul·la, aleshores els espais Q_p i S_u, on $u = [p] \in V(A)$, són afinament homeomorfs. Com ja hem comentat abans, aquesta és la versió semifinita del Teorema de Blackadar i Handelman, donada a [15, Theorem III.1.3], i el paral·lelisme amb el cas de C^*-àlgebres sense unitat fou observat a [59, Section 2], però sense demostració i per C^*-àlgebres que, a més, tenen rang estable 1. Donarem doncs una demostració d'aquest resultat que no necessita cancel·lació, i que es basa parcialment en les tècniques usades a [42, Theorem 12.3].

TEOREMA 3.3.17 *Sigui A una C^*-àlgebra simple, amb σ-unitat i amb rang real zero. Sigui $p \in A$ una projecció no nul·la, i posem $u = [p] \in V(A)$. Llavors hi ha un homeomorfisme afí*

$$\alpha : Q_p \to S_u,$$

tal que $\alpha(\tau)([q]) = \tau(q)$ per a tota $\tau \in Q_p$ i tota projecció $q \in M_\infty(A)$.

DEMOSTRACIÓ: És clar que l'aplicació α és afí i contínua. Atès que els espais Q_p i S_u són compactes, sols cal veure que α és bijectiva.

Suposem que $\alpha(\tau) = \alpha(\tau')$ per $\tau, \tau' \in Q_p$. Llavors τ i τ' prenen els mateixos valors sobre totes les projeccions de A. Sigui $x \in K(A)_+$. Aleshores $B = \overline{xAx} \subseteq K(A)$, de forma que $\tau_{|B_+}$ i $\tau'_{|B_+}$ són quasitraces finites sobre B. Notem que B té rang real zero, i com que τ i τ' coincideixen sobre les projeccions de B, aleshores han de coincidir sobre B_+, per continuïtat uniforme (vegeu, per exemple [15, Corollary II.2.5]). En particular, $\tau(x) = \tau'(x)$. En conseqüència $\tau_{|K(A)_+} = \tau'_{|K(A)_+}$. Pels arguments desenvolupats a la demostració del Corol·lari 3.3.11, deduïm que $\tau = \tau'$. Això prova que α és injectiva.

Sigui $s \in S_u$, i fixem una unitat aproximada (creixent) (p_n) de A formada per projeccions. Atés que A té rang real zero i $s \neq 0$ tenim que $\gamma_n := s[p_n] > 0$ si n és prou gran. Per tant podem assumir sense pèrdua de generalitat que $\gamma_n > 0$ per a tot $n \in \mathbb{N}$. Denotem per $j_n : p_nAp_n \to A$ les aplicacions inclusió, que al seu torn indueixen morfismes de monoides $V(j_n) : V(p_nAp_n) \to V(A)$. Notem que $\gamma_n^{-1}sV(j_n) \in St(V(p_nAp_n), [p_n])$. Per [15, Theorem III.1.3] (o també pel més recent [16, Theorem 3.5]), existeix una quasitraça (finita) $\tau_n \in QT(p_nAp_n)$ tal que $\tau_n(q) = \gamma_n^{-1}s[q]$ per a totes les projeccions $q \in M_\infty(p_nAp_n)$, és a dir, $\gamma_n\tau_n(q) = s[q]$ per a totes les projeccions $q \in M_\infty(p_nAp_n)$.

Com que, per a tot $n \in \mathbb{N}$, les C^*-àlgebres p_nAp_n tenen rang real zero i $p_nAp_n \subseteq p_{n+1}Ap_{n+1}$, veiem que les aplicacions $\gamma_n\tau_n$ i $\gamma_{n+1}\tau_{n+1}$ coincideixen sobre p_nAp_n. Aleshores les aplicacions $\gamma_n\tau_n$ indueixen una aplicació $\overline{\tau} : \cup_n p_nAp_n \to [0,\infty)$, que és una 1-quasitraça. Ens queda estendre $\overline{\tau}$ a A_+. Això no es pot fer usant arguments de continuïtat uniforme, ja que la successió (γ_n) no és necessàriament fitada. Sigui $\tau(x) = \sup_n \overline{\tau}(p_nxp_n)$, i així definim una aplicació $\tau : A_+ \to [0,\infty]$. Provem ara que $\tau(xx^*) = \tau(x^*x)$ per a tot $x \in A$. Fixem $n \leq m$. Aleshores $\overline{\tau}(p_nx^*p_mxp_n) = \overline{\tau}(p_mxp_nx^*p_m) \leq \overline{\tau}(p_mxx^*p_m) \leq \tau(xx^*)$. Com que $\overline{\tau}_{|p_nAp_n} = \gamma_n\tau_n$ és contínua obtenim $\overline{\tau}(p_nx^*xp_n) = \lim_{m\to\infty} \overline{\tau}(p_nx^*p_mxp_n) \leq \tau(xx^*)$, d'on segueix que $\tau(x^*x) \leq \tau(xx^*)$, i per simetria $\tau(xx^*) = \tau(x^*x)$.

És clar que si $\alpha > 0$ i $x \in A_+$, llavors $\tau(\alpha x) = \alpha\tau(x)$. Suposem que $x, y \in A_+$ són elements que commuten. Sigui $\delta > 0$. Llavors existeix $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que si $n \geq n_0$

$$\|p_n x p_n y p_n - p_n y p_n x p_n\| \leq \|x p_n y - y p_n x\| < \delta.$$

Sigui $k \in \mathbb{N}$. Per [15, Corollary II.2.6], existeix $\delta = \delta(k)$ tal que si $\|x p_n y - y p_n x\| < \delta$ aleshores $|\overline{\tau}(p_n(x+y)p_n) - \overline{\tau}(p_n x p_n) - \overline{\tau}(p_n y p_n)| < 1/2^k$. Per tant, existeix n_0 tal que $|\overline{\tau}(p_n(x+y)p_n) - \overline{\tau}(p_n x p_n) - \overline{\tau}(p_n y p_n)| < 1/2^k$, sempre que $n \geq n_0$. Concloem que $\tau(x+y) \leq (1/2^k) + \tau(x) + \tau(y)$, d'on $\tau(x+y) \leq \tau(x) + \tau(y)$. La desigualtat inversa es prova de manera semblant. Així $\tau(x+y) = \tau(x) + \tau(y)$.

Comprovem ara la semicontinuïtat inferior de τ. Sigui (x_k) una successió en A_+ que convergeix a $x \in A_+$. Per a cada $n \in \mathbb{N}$ tenim $\overline{\tau}(p_n x p_n) = \lim_k \overline{\tau}(p_n x_k p_n) \leq \liminf_k \tau(x_k)$, ja que $\overline{\tau}(p_n x_k p_n) \leq \tau(x_k)$. Per tant $\tau(x) \leq \liminf_k \tau(x_k)$, de manera que τ és semicontínua inferior.

Sigui $x \in A_+$. Per a qualsevol $n \in \mathbb{N}$, tenim $x^{1/2} p_n x^{1/2} \leq x$, i $\tau(x^{1/2} p_n x^{1/2}) = \tau(p_n x p_n) \leq \|x\|\tau(p_n) = \|x\|\gamma_n < \infty$. Deduïm que τ és semifinita. També, atès que $p \sim p'$ per alguna projecció $p' \in p_n A p_n$ i algun $n \in \mathbb{N}$, tenim que $\tau(p) = \tau(p') = \gamma_n \tau_n(p') = s[p'] = s[p] = 1$.

Notem ara que $\cup_n p_n A p_n \subseteq F_{\overline{\tau}}$. Per tant τ és densament definida. Les extensions de $\gamma_n \tau_n$ a $M_k(p_n A p_n)_+$ indueixen una 1-quasitraça sobre $M_k(A)_+$ per a cada k, que és una extensió de τ. Per tant $\tau \in Q_p$. Finalment, si $q \in M_\infty(A)$ és una projecció, llavors q és equivalent a una projecció $q' \in M_\infty(p_n A p_n)$ (per algun n). Per tant $\tau(q) = \tau(q') = \gamma_n \tau_n(q') = s[q'] = s[q]$, i així α és exhaustiva. □

Una primera conseqüència del Teorema anterior és una caracterització de les C^*-àlgebres simples amb escala fitada. Blackadar va provar a [11, Theorem 4.8] que una C^*-àlgebra AF simple i separable té escala fitada si i només si és algebraicament simple. Lin va demostrar posteriorment que si A és una C^*-àlgebra simple, amb σ-unitat i escala contínua, aleshores A és algebraicament simple [57, Theorem 3.3]. En el següent resultat estendrem la caracterització donada per Blackadar a la classe de C^*-àlgebres simples, amb σ-unitat, rang real zero i rang estable 1.

TEOREMA 3.3.18 *Sigui A una C^*-àlgebra simple, amb σ-unitat, rang real zero i rang estable 1. Suposem que $V(A)$ és estrictament no perforat. Aleshores les següents condicions són equivalents:*

(1) *A és algebraicament simple;*

(2) *Tota quasitraça semifinita de $LQT_d(A)$ és finita;*

(3) *A té escala fitada.*

DEMOSTRACIÓ: Sigui $p \in A$ una projecció no nul·la; posem $u = [p] \in V(A)$ i $d = \sup \phi_u(D(A))$. Si (e_n) és una unitat aproximada formada per projeccions, llavors $d = \sup \phi_u([e_n])$.

(1) $\Rightarrow$ (2). Sigui $\tau \in LQT_d(A)$ una quasitraça semifinita. Com que A és algebraicament simple, tenim que $K(A) = A$, i per la Proposició 3.3.9, $\tau_{|K(A)_+} < \infty$, d'on τ és finita.

(2) $\Rightarrow$ (3). A causa del Lema 3.2.7, si d no és fitada, aleshores existeix $s \in S_u$ tal que $d(s) = +\infty$, és a dir, $\sup_n s[e_n] = +\infty$. Com que $\mathbb{R}_+ Q_p = Q$ i Q és igual al conjunt de quasitraces de $LQT_d(A)$ semifinites, per hipòtesi, tenim que Q_p és format per les quasitraces finites τ sobre A tals que $\tau(p) = 1$. Sigui $\tau \in Q_p$ la quasitraça que correspon a s via l'homeomorfisme α del Teorema 3.3.17. Per [15, Corollary II.2.3], la norma de τ ha de ser fitada, però això contradiu el fet que $\sup \tau(e_n) = \sup s[e_n] = +\infty$.

(3) $\Rightarrow$ (1). Assumim que $d \ll k$. Per a tot $s \in S_u$ tenim $d(s) = \sup s[e_n] < k = ks[p]$, d'on concloem $s[e_n] < ks[p]$ per a tot $n \in \mathbb{N}$. Com que $V(A)$ és estrictament no perforat i cancel·latiu, tenim que $[e_n] \leq k[p]$ a $V(A)$ per a tot $n \in \mathbb{N}$. Sigui $x = \sum_{n=1}^{\infty}(1/2^n)e_n \in A$. Es dedueix de [78, Proposition 2.3] que $\langle x\rangle \leq k\langle p\rangle$ a $S(A)$. Sigui $B \subseteq M_k(A)$ la C^*-subàlgebra hereditària generada per $\mathrm{diag}(p, \dots, p) \in M_k(A)$. Notem que B és simple, amb unitat, rang real zero i rang estable 1; en particular, B és algebraicament simple.

Observem ara que per a cada $n \in \mathbb{N}$, existeix una projecció $e'_n \in M_k(A)$ tal que $e_n \sim e'_n \leq \mathrm{diag}(p, \dots, p)$. Obtenim per tant una successió de projeccions (e'_n) de B tal que $e'_n \lesssim e'_{n+1}$ per a tot n. Gràcies a la cancel·lació de projeccions és possible construir una successió creixent de projeccions (q_n) a B amb $q_n \sim e'_n \sim e_n$ per a tot $n \in \mathbb{N}$ (vegeu, per exemple, la demostració de [78, Proposition 2.7]). Sigui $y = \sum_{n=1}^{\infty}(1/2^n)q_n \in B$. Llavors $\langle x\rangle = \langle y\rangle$ a $S(A)$ per [78, Proposition 2.3] i per tant $x \sim_s y$ ([78, Corollary 2.4]), és a dir, existeix $a \in M_k(A)$ tal que $\overline{yBy} = \overline{a^*M_k(A)a}$, mentre que $\overline{aM_k(A)a^*} = \overline{\mathrm{diag}(x, \dots, 0)M_k(A)\mathrm{diag}(x, \dots, 0)} \cong \overline{xAx}$. Ara bé, $\overline{xAx} = A$ atès que x és un element estrictament positiu ([72],[68]). Pel Lema 3.3.10, $\overline{yBy} \subseteq B$ és algebraicament simple, i tenint en compte que $\overline{a^*M_k(A)a}$ i $\overline{aM_k(A)a^*}$ són isomorfes (per exemple, estenent per continuïtat l'isomorfisme donat a [24, 1.4]), concloem que A és algebraicament simple. □

En el cas que l'escala, a més de ser fitada, no és contínua, podem dir alguna cosa més sobre l'estructura de $V(\mathcal{M}(A)/L(A))$ (recordem que de fet $\mathcal{M}(A)/L(A) = 0$

exactament quan l'escala és contínua).

TEOREMA 3.3.19 *Sigui A una C^*-àlgebra amb σ-unitat (sense unitat), simple, amb rang real zero, rang estable 1 i amb $V(A)$ estrictament no perforat. Assumim que A és no elemental. Suposem que A té escala fitada però no contínua i que el rang real de $\mathcal{M}(A)$ és zero. Sigui $F' = \{\tau \in QT(\mathcal{M}(A)) \mid \tau_{|A} = 0\}$. Llavors F' és una cara tancada de $QT(\mathcal{M}(A))$ i $V(\mathcal{M}(A)/L(A)) \cong (\mathrm{Aff} F')^+$. En particular, $\mathcal{M}(A)/L(A)$ no és separable.*

DEMOSTRACIÓ: Notem que pel Teorema 3.2.28, $V(\mathcal{M}(A)/L(A))$ és cancel·latiu. Per tant

$$V(\mathcal{M}(A)/L(A)) = K_0(\mathcal{M}(A)/L(A))^+.$$

Ara, [42, Theorem 16.4] diu que

$$K_0(\mathcal{M}(A)/L(A))^+ \cong (\mathrm{Aff} F')^+.$$

Com que l'escala no és contínua, obtenim que $\mathcal{M}(A)/L(A) \neq 0$. Per tant $\mathcal{M}(A)/L(A)$ és establement finita i així admet una funció de dimensió (normalitzada) i semicontínua inferior (vegeu [48, Proposition 1.1]), és a dir, admet una quasitraça (normalitzada), per [15, Theorem II.2.2]. Per tant $F' \neq \emptyset$ i es dedueix que $V(\mathcal{M}(A)/L(A))$ no és numerable, de manera que $\mathcal{M}(A)/L(A)$ no és separable. □

3.4 El reticle d'ideals de l'anell corona

L'objectiu principal d'aquesta secció és aplicar les tècniques desenvolupades anteriorment per descriure el reticle d'ideals de l'anell corona. Analitzarem en conseqüència l'escala d de l'anell "base" per, a través del seu comportament a la frontera extrema, extreure informació sobre els ideals de l'anell de multiplicadors, i veurem com en determinades situacions aquests es distribueixen d'una forma molt característica. La secció es divideix en dues parts diferenciades, la primera de les quals es centra en els anells regulars, mentre que en la segona recollim els resultats anàlegs per C^*-àlgebres.

Una hipòtesi que serà present en tota aquesta primera part de la secció és que l'espai $\mathbb{P}(R)_e$ associat a un idempotent $e \neq 0$ de l'anell, és metritzable. Això és el mateix que demanar que l'espai de funcions de pseudo-rang $\mathbb{P}(eRe)_1$ és metritzable, i és convenient remarcar en aquest punt que hi ha molts exemples d'anells regulars simples R amb unitat i rang estable 1, tals que $\mathbb{P}(R)_1$ és metritzable. Concretament, donat un símplex de Choquet metritzable qualsevol Δ, existeix una àlgebra complexa ultramatricial amb unitat R tal que $\mathbb{P}(R)_1$ és afinament homeomorf a Δ ([37, Theorem 17.23]).

PROPOSICIÓ 3.4.1 *Sigui R un anell regular simple amb σ-unitat (sense unitat) i amb* $\mathrm{sr}(R) = 1$. *Suposem que $V(R)$ és estrictament no perforat, i que R no és elemental. Fixem un idempotent $e \in R$ no nul, i suposem que l'espai $\mathbb{P}(R)_e$ és metritzable. Aleshores existeix un únic ideal $I_{fin}(R)$ de $\mathcal{M}(R)$ d'entre els ideals que contenen pròpiament R, tal que és maximal respecte la propietat que el monoide $V(I_{fin}(R))/V(L(R))$ és cancel·latiu.*

DEMOSTRACIÓ: Posem $u = [e] \in V(R)$. Sigui $D = D(R)$ i sigui $d = \sup \phi_u(D)$. Posem $I_{fin} := V(R) \sqcup E_{fin}$, on $E_{fin} = \{f \in W_\sigma^d(S_u) \mid f_{|\partial_e S_u} \text{ és finita }\}$. Llavors I_{fin} és un ideal d'ordre de $V(R) \sqcup W_\sigma^d(S_u)$. Establirem el següent fet: I_{fin} és l'ideal d'ordre de $V(R) \sqcup W_\sigma^d(S_u)$ més gran respecte la propietat que I_{fin}/L és cancel·latiu, on $L = V(R) \sqcup \mathrm{Aff}(S_u)^{++}$. Aleshores el resultat es deduirà dels Teoremes 2.2.9 i 2.3.16, prenent $I_{fin}(R)$ com l'ideal de $\mathcal{M}(R)$ tal que $V(I_{fin}(R)) \cong I_{fin}$. Provem en primer lloc que I_{fin}/L és cancel·latiu. Suposem que $[f] + [g] = [f] + [h]$ a I_{fin}/L, per $f, g, h \in I_{fin}$. Llavors existeixen $l_1, l_2 \in L$ tals que $f + g + l_1 = f + h + l_2$. Podem assumir que l_1 i l_2 són funcions contínues i afins. Si ens restringim a la frontera extrema obtenim $(g + l_1)_{|\partial_e S_u} = (h + l_2)_{|\partial_e S_u}$. Llavors $g + l_1 = h + l_2$ pel Lema 3.2.11, i en conseqüència $[g] = [h]$ a I_{fin}/L.

Ara suposem que $V(R) \sqcup E$ és un altre ideal d'ordre de $V(R) \sqcup W_\sigma^d(S_u)$ tal que $(V(R) \sqcup E)/L$ és cancel·latiu. Afirmem que $E \subseteq E_{fin}$.

En cas contrari, existeix $f \in E$ tal que $f(s) = \infty$ per algun estat $s \in \partial_e S_u$. Pel Corol·lari 3.2.20 podem construir $g \in \mathrm{LAff}(S_u)^{++}$ amb $g(s) = 1$ i tal que $g + f = 2f$. Atès que $f \in E$ i també $g \leq 2f$ algebraicament, concloem que $g \in E$. Per tant tenim $[g] + [f] = [f] + [f]$ a $(V(R) \sqcup E)/L$. Usant la cancel·lació $[g] = [f]$, de manera que existeixen funcions contínues i afins l_1 i l_2 que satisfan $g + l_1 = f + l_2$, la qual cosa dóna una contradicció avaluant al punt s. □

Anomenarem $I_{fin}(R)$ l'**ideal finit** de $\mathcal{M}(R)$. Observem que R té escala finita precisament quan $I_{fin}(R) = \mathcal{M}(R)$.

DEFINICIÓ 3.4.2 *Sigui R un anell regular. Diem que una funció de pseudo-rang N sobre R és* **infinita** *si $\sup_\lambda N(u_\lambda) = +\infty$, per alguna unitat aproximada $(u_\lambda)_{\lambda \in \Lambda}$ de R.*

Notem que aquesta definició no depèn de la unitat aproximada que agafem. Observem també que si N és infinita, aleshores $\sup N(e) = \infty$, on el suprem es pren sobre el conjunt d'idempotents $e \in R$.

TEOREMA 3.4.3 *Sigui R un anell regular simple, amb σ-unitat (sense unitat) i amb* $\mathrm{sr}(R) = 1$. *Suposem que $V(R)$ és estrictament no perforat, i que R no és elemental. Sigui $e \in R$ un idempotent no nul. Assumim que R té exactament n funcions de pseudo-rang extremes a $\mathbb{P}(R)_e$ que són infinites, i que aquest darrer espai és metritzable. Aleshores hi ha precisament 2^n ideals entre $I_{fin}(R)$ i $\mathcal{M}(R)$.*

DEMOSTRACIÓ: Posem $u = [e] \in V(R)$ i sigui $d = \sup \phi_u(D(R))$. Notem en primer lloc que R té exactament n funcions de pseudo-rang extremes a $\mathbb{P}(R)_e$ que són infinites si, i només si, el conjunt

$$\Gamma_d := \{s \in \partial_e S_u \mid d(s) = +\infty\}$$

té cardinal n, en virtut de la Proposició 3.3.5.

Per a cada subconjunt $\alpha \subseteq \Gamma_d$, definim

$$E_\alpha = \{f \in W_\sigma^d(S_u) \mid f_{|\partial_e S_u} \text{ és finita fora de } \alpha\},$$

i sigui I_α l'ideal de $\mathcal{M}(R)$ tal que $\varphi(V(I_\alpha)) = V(R) \sqcup E_\alpha$, on φ és l'isomorfisme construït al Teorema 2.3.16. Pel Corol·lari 3.2.21 els ideals $V(I_\alpha)$ formen un conjunt de 2^n ideals d'ordre diferents de $V(R) \sqcup W_\sigma^d(S_u)$. Observem que $\varphi(V(I_\emptyset)) = I_{fin}$ i que $\varphi(V(I_{\Gamma_d})) = V(R) \sqcup W_\sigma^d(S_u)$. Suposem que $V(R) \sqcup E$ és un ideal d'ordre de $V(R) \sqcup W_\sigma^d(S_u)$, per algun $E \subseteq W_\sigma^d(S_u)$ que conté E_{fin}. Llavors, prenem $\alpha \subseteq \Gamma_d$ el subconjunt més gran de Γ_d tal que $f_{|\partial_e S_u}$ és finita fora de α per a tota funció $f \in E$. A causa de la finitud de Γ_d, un conjunt α satisfent aquesta propietat existeix. Per construcció, $E \subseteq E_\alpha$ i afirmem que de fet $E = E_\alpha$.

Clarament podem assumir que $E_{fin} \subsetneq E$. Sigui $d' \in \mathrm{LAff}(S_u)^{++}$ una funció construïda d'acord amb el Corol·lari 3.2.21, i que satisfà $d'_{|\Gamma_d'} = d_{|\Gamma_d'}$ i $d'(s) = 1$ per a tot $s \in \Gamma_d$, on aquí denotem per Γ_d' la cara complementària de la cara tancada (de S_u) generada per Γ_d (que, al seu torn, és l'embolcall convex de Γ_d, atès que Γ_d és un conjunt finit, per hipòtesi). Notem que $d' + d = 2d$. Per tant $d' \in V(R) \sqcup W_\sigma^d(S_u)$ i de fet $d' \in I_{fin} \subset V(R) \sqcup E$. També, per construcció de α, existeix una funció $f \in E$ tal que, restringida a $\partial_e S_u$, és infinita precisament a α. (Consideraríem, si $\alpha = \{s_1, \ldots, s_t\}$, funcions $f_1, \ldots, f_t \in E$ tals que $f_i(s_i) = \infty$, i agafaríem llavors $f = f_1 + \ldots + f_t$.) Sigui d_α la funció que "porta" els valors sobre els punts de fora de α a 1. És a dir, si $(\Gamma_d \setminus \alpha)'$ denota la cara complementària de la cara (tancada) generada per $\Gamma_d \setminus \alpha$, llavors d_α es construeix de manera que $d_{\alpha|(\Gamma_d \setminus \alpha)'} = d_{|(\Gamma_d \setminus \alpha)'}$ i $d_\alpha(s) = 1$ per a tot $s \in \Gamma_d \setminus \alpha$.

Com que $\Gamma_d \setminus \alpha \subseteq \Gamma_d$, tenim que $\Gamma_d' \subseteq (\Gamma_d \setminus \alpha)'$, d'on obtenim $d_{\alpha|\Gamma_d'} = d_{|\Gamma_d'}$. Notem també que $d_\alpha(s) = \infty$ per a tot $s \in \alpha$. Per tant $(d_\alpha + f)_{|\Gamma_d \cup \Gamma_d'} = (d' + f)_{|\Gamma_d \cup \Gamma_d'}$, i com que S_u és igual a la suma directa convexa de la cara (tancada) generada per Γ_d i la seva cara complementària Γ'_d (vegeu el Teorema 3.2.18), obtenim que $d_\alpha + f = d' + f$. Així $d_\alpha + f \in E$, i en conseqüència $d_\alpha \in E$.

L'única cosa que ens cal comprovar per acabar la demostració és que $E_\alpha = F_\alpha$, on

$$F_\alpha := \{f \in W_\sigma^d(S_u) \mid f + g = md_\alpha \text{ per algun } m \in \mathbb{N} \text{ i } g \in W_\sigma^d(S_u)\}.$$

Com que $d_\alpha \in E$ i $E \subseteq E_\alpha$ tenim que $d_\alpha \in E_\alpha$, i per tant l'ideal d'ordre generat per d_α és contingut a $V(R) \sqcup E_\alpha$, de manera que $F_\alpha \subseteq E_\alpha$. Recíprocament, sigui $g \in E_\alpha$. En particular, com que $E_\alpha \subseteq W_\sigma^d(S_u)$, podem trobar una funció $h \in W_\sigma^d(S_u)$ i un nombre natural m tals que $g + h = md$. Sabem que $g_{|\partial_e S_u}$ és infinita com a molt sobre els punts de α. Afegint còpies de d (si fos necessari), podem suposar que $g(t) < m$ per a tot $t \in \Gamma_d \cap \{s \in \partial_e S_u \mid g(s) < \infty\}$. Ara usem el Corol·lari 3.2.22 per obtenir una funció $h' \in W_\sigma^d(S_u)$ tal que $h'(t) = m - g(t)$ per $t \in \Gamma_d \setminus \alpha$ i tal que $h'_{|(\Gamma_d\setminus\alpha)'} = h_{|(\Gamma_d\setminus\alpha)'}$. Tenim també que $h + h' = 2h$. Finalment, a causa de la igualtat $(g + h')_{|(\Gamma_d\setminus\alpha)\cup(\Gamma_d\setminus\alpha)'} = md_{\alpha|(\Gamma_d\setminus\alpha)\cup(\Gamma_d\setminus\alpha)'}$, concloem que $g + h' = md_\alpha$, com volíem. □

Investigarem tot seguit els quocients $\mathcal{M}(R)/J$, per a qualsevol ideal J de $\mathcal{M}(R)$ que conté $I_{fin}(R)$, provant que tenen una estructura particular.

Sigui M un monoide. Diem que M és **purament infinit** si sempre que tenim un element $x \in M$ no nul, aleshores existeix $y \in M$ diferent de zero tal que $x + y = x$. Si R és un anell qualsevol, i $e \in R$ és un idempotent no nul, diem que e és **infinit** si existeix un idempotent $f \in R$ tal que $f < e$ i $e \sim f$. Suposem ara que R és un anell no degenerat (o bé semiprimer). Aleshores diem que R és **purament infinit** si tot ideal dreta I de R no nul conté idempotents infinits. És fàcil veure que això és equivalent a demanar que tot ideal principal dreta conté idempotents infinits, i també és senzill veure que la condició de purament infinit és de fet simètrica.

Notem que si R és un anell purament infinit, llavors tots els idempotents no nuls de R són infinits. En efecte, sigui $e \in R$ un idempotent no zero. Aleshores existeix un idempotent infinit $f \in R$ tal que $fR \subseteq eR$. Per [67, Lemma 1.1 (i)], existeix un idempotent $g \in R$ tal que $f \leq g$ i $e \sim g$. Deduïm doncs que e és infinit. Observem que si R és un anell regular, llavors R és purament infinit si, i només si, tots els idempotents de R són infinits, si i només si $V(R)$ és un monoide purament infinit (per la darrera equivalència es necessita la descomposició de Riesz en el monoide $V(R)$, que val perquè l'anell és regular). Ens caldrà fer un parell d'observacions, conseqüències directes del Teorema 2.2.8:

LEMA 3.4.4 *Sigui R un anell regular amb σ-unitat. Sigui I un ideal de $\mathcal{M}(R)$. Si $V(\mathcal{M}(R))/V(I)$ és un monoide purament infinit, aleshores $\mathcal{M}(R)/I$ és, com a anell, purament infinit.*

DEMOSTRACIÓ: Denotem per $\pi : \mathcal{M}(R) \to \mathcal{M}(R)/I$ l'aplicació natural de pas al quocient. Sigui $x \in \mathcal{M}(R)/I$ un element diferent de zero. Prenem una antiimatge $y \in \mathcal{M}(R) \setminus I$ de x qualsevol. Pel Teorema 2.2.8, existeixen idempotents $p_1, p_2 \in \mathcal{M}(R)$ i elements $y_1, y_2, z, w \in \mathcal{M}(R)$ tals que $y = p_1y_1 + p_2y_2$ i tals que $p_1 = yz$ i $p_2 = yw$. Com que $y \notin I$, podem suposar que $p_1 \notin I$. Per tant, posant $f = p_1$, tenim que $\pi(f) \neq 0$, i també que $\pi(f)(\mathcal{M}(R)/I) \subseteq x(\mathcal{M}(R)/I)$. Denotem ara per $\psi : V(\mathcal{M}(R)) \to V(\mathcal{M}(R))/V(I)$ el morfisme de monoides de pas al quocient. Com que $V(\mathcal{M}(R))/V(I)$ és un monoide purament infinit i $f \notin I$, existeix un idempotent $q \in M_\infty(\mathcal{M}(R))$ tal que $[q] \notin V(I)$ i $\psi[f] = \psi[f] + \psi[q]$. Per tant podem trobar idempotents $g, h \in M_\infty(I)$ tals que $[f]+[g] = [f]+[q]+[h]$. Finalment, com que π és un morfisme d'anells, tenim $\pi(f) \sim \pi(f) \oplus \pi(q)$ a $M_\infty(\mathcal{M}(R)/I)$, i $\pi(q) \neq 0$ ja que $q \notin M_\infty(I)$, d'on veiem que $\pi(f)$ és un idempotent infinit. Per tant $x(\mathcal{M}(R)/I)$ conté idempotents infinits, i concloem així que $\mathcal{M}(R)/I$ és un anell purament infinit. □

LEMA 3.4.5 *Sigui R un anell regular amb σ-unitat. Siguin $I \subsetneq J$ ideals de $\mathcal{M}(R)$. Si $e \in J/I$ és un idempotent no nul, aleshores existeix un idempotent $f \in J \setminus I$ tal que $\pi(f) \lesssim e$, on $\pi : J \to J/I$ és l'aplicació natural.*

DEMOSTRACIÓ: Raonant com al Lema anterior, obtenim un idempotent $f \in J \setminus I$ tal que $\pi(f)(J/I) \subseteq e(J/I)$. Ara, per [67, Lemma 1.1 (i)], existeix un idempotent $g \in J/I$ tal que $g \geq \pi(f)$ i $g(J/I) = e(J/I)$, d'on clarament $e \sim g$ i obtenim la conclusió. □

PROPOSICIÓ 3.4.6 *Sigui R un anell regular simple amb σ-unitat (i sense unitat), amb $\mathrm{sr}(R) = 1$ i amb $V(R)$ estrictament no perforat. Suposem que R no és elemental. Sigui $e \in R$ un idempotent no nul. Suposem que R té un nombre finit de funcions de pseudo-rang extremes a $\mathbb{P}(R)_e$ que són infinites, i que aquest darrer espai és metritzable. Sigui J un ideal de $\mathcal{M}(R)$ que conté $I_{fin}(R)$. Llavors $\mathcal{M}(R)/J$ és un anell purament infinit.*

DEMOSTRACIÓ: Pel Lema 3.4.4, per demostrar que $\mathcal{M}(R)/J$ és purament infinit, és suficient provar que $V(\mathcal{M}(R))/V(J)$ és un monoide purament infinit.

Com en el Teorema 3.4.3, posem $u = [e]$ a $V(R)$ i sigui $d = \sup \phi_u(D(R))$. Si R té exactament n funcions de pseudo-rang extremes a $\mathbb{P}(R)_e$, llavors el conjunt Γ_d introduït al Teorema 3.4.3 té cardinalitat n. Recordem que si φ és l'isomorfisme construït al Teorema 2.3.16, llavors $\varphi(V(I_{fin}(R))) = V(R) \sqcup E_{fin}$, on

$$E_{fin} = \{f \in W_\sigma^d(S_u) \mid f_{|\partial_e S_u} < +\infty\},$$

com a la Proposició 3.4.1. Escrivim $\varphi(V(J)) = V(R) \sqcup E$, on $E_{fin} \subseteq E \subsetneq W_\sigma^d(S_u)$. Sigui $f \in W_\sigma^d(S_u)\backslash E$. Llavors existeix $s \in \Gamma_d$ tal que $f(s) = \infty$. Com que $f \in W_\sigma^d(S_u)$ i Γ_d és un conjunt finit, tenim que $f_{|\partial_e S_u}$ és infinita, com a molt, en n punts. Pel Corol·lari 3.2.21, existeix $g \in \mathrm{LAff}(S_u)^{++}$ tal que $g(s) = 1$ sempre que $f(s) = \infty$, per $s \in \partial_e S_u$, i $g + f = 2f$. Notem que $g \in V(R) \sqcup E_{fin} \subseteq V(R) \sqcup E$, i en el quocient mòdul $V(R) \sqcup E$, tenim $[f] = 2[f]$. Per tant $V(\mathcal{M}(R))/V(J)$ és un monoide purament infinit, com volíem. □

Notem que, sota les hipòtesis de la Proposició 3.4.6, i en el cas particular que R té exactament una funció de pseudo-rang extrema infinita, tenim que el monoide $V(\mathcal{M}(R))/V(I_{fin}(R))$ és isomorf a $\{0, \infty\}$. (Observem que si tenim $f, g \in W_\sigma^d(S_u)$ amb $f(s) = g(s) = \infty$, on s és l'únic estat de S_u tal que $d(s) = \infty$, aleshores $f + g' = g + f'$, on f', g' es construeixen com al Corol·lari 3.2.20. Així, $[f] = [g]$ en el quocient mòdul I_{fin}.) Per tant, si $e \in \mathcal{M}(R)/I_{fin}(R)$ és un idempotent no nul, el Lema 3.4.5 assegura l'existència d'un idempotent $f \in \mathcal{M}(R)$ tal que $\pi(f) \neq 0$ i $\pi(f) \lesssim e$. L'isomorfisme anterior implica que de fet $\pi(f) \sim 1$, i per tant $1 \lesssim e \leq 1$.

Ens ocupem ara del cas en que l'anell pugui tenir una quantitat infinita de funcions de pseudo-rang extremes que són infinites. Alguns dels arguments que hem fet servir anteriorment es podran adaptar a la situació actual.

TEOREMA 3.4.7 *Sigui R un anell regular simple amb σ-unitat (i sense unitat), amb* $\mathrm{sr}(R) = 1$ *i amb $V(R)$ estrictament no perforat. Suposem que R no és elemental. Sigui $e \in R$ un idempotent no nul i sigui $\mathfrak{c}$ el cardinal de funcions de pseudo-rang extremes de $\mathbb{P}(R)_e$ que són infinites. Assumim que l'espai $\mathbb{P}(R)_e$ és metritzable i que $\mathfrak{c}$ és infinit. Llavors $\mathcal{M}(R)$ té com a mínim $\mathfrak{c}$ ideals maximals que contenen pròpiament $I_{fin}(R)$, i el quocient de $\mathcal{M}(R)$ per qualsevol d'aquests ideals és un anell purament infinit i simple. A més, $\mathcal{M}(R)$ conté una successió infinita i estrictament decreixent d'ideals que contenen $I_{fin}(R)$.*

DEMOSTRACIÓ: Sigui $u = [e] \in V(R)$ i sigui $d = \sup \phi_u(D(R))$. Notem que per la Proposició 3.3.5, la cardinalitat de Γ_d, el conjunt introduït al Teorema 3.4.3, és exactament $\mathfrak{c}$. Per a qualsevol $s \in \Gamma_d$, sigui I_s l'ideal de $\mathcal{M}(R)$ tal que $\varphi(V(I_s)) = V(R) \sqcup E_s$, on $E_s := \{f \in W_\sigma^d(S_u) \mid f(s) < \infty\}$ i φ és l'isomorfisme construït al Teorema 2.3.16. Notem que $I_{fin} \subsetneq V(I_s)$, on $I_{fin} = \varphi(V(I_{fin}(R)))$ com a la Proposició 3.4.1, atès que és possible construir $d_s \in W_\sigma^d(S_u)$ tal que $d_s(s) = 1$ i tal que $d_{s|\{s\}'} = d_{|\{s\}'}$, usant el Corol·lari 3.2.20. Llavors $d_s \in V(R) \sqcup E_s$ i $d_s \notin I_{fin}$.

Siguin $t, s \in \Gamma_d$ punts diferents. Per construcció $d_s(t) = \infty$, i per tant $I_s \neq I_t$, de manera que tots els ideals que estem considerant són diferents.

Suposem que hi ha un ideal d'ordre $V(R) \sqcup E$ de $V(R) \sqcup W_\sigma^d(S_u)$ tal que $V(R) \sqcup E_s$

està pròpiament contingut a $V(R) \sqcup E$. Llavors podem trobar una funció f tal que $f \in (V(R) \sqcup E) \setminus (V(R) \sqcup E_s)$, de manera que $f(s) = \infty$. Com que $f \in W_\sigma^d(S_u)$, existeixen $n \in \mathbb{N}$ i $g \in W_\sigma^d(S_u)$ tals que $f + g = nd$. Si $g(s) < \infty$ aleshores f i g pertanyen a E, i per tant $nd \in E$ d'on també $d \in E$. Si, d'altra banda, $g(s) = \infty$, sigui $g' \in W_\sigma^d(S_u)$ la funció definida per $g'(s) = 1$ i $g'_{|\{s\}'} = g_{|\{s\}'}$, pel Corol·lari 3.2.20. Aleshores $g' \in E$ i també $(f + g')_{|\{s\} \cup \{s\}'} = (f + g)_{|\{s\} \cup \{s\}'}$, d'on $f + g' = f + g = nd$, i novament es dedueix que $d \in E$. Això implica que $E = W_\sigma^d(S_u)$. Per tant I_s és un ideal maximal.

Per veure que $\mathcal{M}(R)/I_s$ és purament infinit simple, és suficient comprovar, segons el Lema 3.4.4, que el monoide $(V(R) \sqcup W_\sigma^d(S_u))/(V(R) \sqcup E_s)$ és purament infinit. Sigui $f \in (V(R) \sqcup W_\sigma^d(S_u)) \setminus (V(R) \sqcup E_s)$. Llavors $f(s) = \infty$, de manera que existeix $f' \in W_\sigma^d(S_u)$ tal que $f'(s) = 1$ i tal que $f + f' = 2f$ (pel Corol·lari 3.2.20). Per tant $[f] = 2[f]$ a $(V(R) \sqcup W_\sigma^d(S_u))/(V(R) \sqcup E_s)$, ja que $f' \in V(R) \sqcup E_s$

Finalment, per construir una successió infinita i estrictament decreixent d'ideals que contenen $I_{fin}(R)$, prenem $\{s_n\}$ una successió d'elements diferents a Γ_d i sigui I_n l'ideal de $\mathcal{M}(R)$ tal que $\varphi(V(I_n)) = V(R) \sqcup \{f \in W_\sigma^d(S_u) \mid f(s_i) < \infty \text{ per a tot } i \leq n\}$. Aleshores $(V(I_n))$ és una successió d'ideals d'ordre de $V(\mathcal{M}(R))$, tots diferents, que contenen $V(I_{fin}(R))$, i tals que $V(I_1) \supsetneqq V(I_2) \supsetneqq V(I_3) \supsetneqq \dots$. En conseqüència $I_1 \supsetneqq I_2 \supsetneqq I_3 \supsetneqq \dots$, i $I_n \supseteq I_{fin}(R)$ per a tot n. $\square$

Sigui ara M un monoide simple, cònic i purament infinit. Llavors és ben conegut que $M = \{0\} \cup G$, on $(G, +)$ és un grup. En particular, existeix un únic element $e \in G := M \setminus \{0\}$ tal que $x = x + e$ per a tot $x \in G$. Si $M = V(\mathcal{M}(R)/I_s)$ com al Teorema anterior, llavors $e = [\pi(f)]$, on $\pi : \mathcal{M}(R) \to \mathcal{M}(R)/I_s$ és la projecció canònica i $f \notin I_s$. Això és clar perquè $[\pi(f)] + [\pi(f)] = [\pi(f)]$.

Considerarem seguidament el cas en que $\partial_e(\mathbb{P}(R)_e)$ és un espai compacte de Hausdorff, ja que en aquesta situació la informació es pot traslladar d'una forma fidel a la frontera extrema usant resultats coneguts, i en conseqüència s'emmagatzema en la continuïtat, més que no pas en l'afinitat, de les funcions involucrades. Aquest procediment ens permetrà també fer noves construccions. Si X és un espai compacte, aleshores $L_\sigma(X)$ denotarà el submonoide de $L(X)$ que té per elements les funcions que són suprems puntuals de successions creixents de funcions contínues sobre X.

LEMA 3.4.8 *[39, Corollary 11.20] [42, Lemma 7.2] Sigui K un símplex de Choquet. Si $\partial_e K$ és compacta, aleshores l'aplicació restricció $r : \mathrm{LAff}(K) \to L(\partial_e K)$ és un isomorfisme de monoides. La mateixa aplicació restringeix a un isomorfisme de monoides $r : \mathrm{Aff}(K) \to C(\partial_e K)$.* $\square$

Sigui M un monoide tal que l'ordre algebraic és parcial, i sigui $u \in M$ una unitat d'ordre. Sigui D un interval generador sobre M amb un subconjunt cofinal numerable, i posem $d = \sup \phi_u(D)$. Suposem que $\partial_e S_u$ és un espai compacte de Hausdorff. Pel Lema 3.4.8, hi ha un isomorfisme de monoides $\mathrm{LAff}(S_u)^{++} \cong L(\partial_e S_u)^{++}$ donat per restricció. Denotem per $d_0 \in L(\partial_e S_u)^{++}$ la restricció de la funció d a $\partial_e S_u$, i definim

$$W_0^d(S_u) = \{f \in L_\sigma(\partial_e S_u)^{++} \mid f + g = nd_0 \text{ per algun } n \in \mathbb{N} \text{ i } g \in L_\sigma(\partial_e S_u)^{++}\}.$$

El conjunt $M \sqcup W_0^d(S_u)$ és un monoide amb operació (additiva) donada per $x + f = r(\phi_u(x)) + f$, on $x \in M$ i $f \in W_0^d(S_u)$, i on r denota l'aplicació restricció de $\mathrm{Aff}(S_u)^{++}$ a $C(\partial_e S_u)^{++}$, que és un isomorfisme de monoides (també pel Lema 3.4.8). Amb arguments anàlegs als del Lema 2.3.12 es prova que aquesta operació és ben definida i que dota el conjunt $M \sqcup W_0^d(S_u)$ d'estructura de monoide cònic i parcialment ordenat, amb unitat d'ordre d_0. Aleshores tenim la següent observació:

REMARCA 3.4.9 *En les condicions anteriors, l'aplicació* $\gamma : M \sqcup W_\sigma^d(S_u) \to M \sqcup W_0^d(S_u)$ *donada per* $\gamma(x) = x$, *si* $x \in M$, *i* $\gamma(f) = r(f)$ *si* $f \in W_\sigma^d(S_u)$ *és un isomorfisme de monoides.*

PROPOSICIÓ 3.4.10 *Sigui R un anell regular simple amb σ-unitat (i sense unitat), amb* $\mathrm{sr}(R) = 1$ *i amb $V(R)$ estrictament no perforat. Suposem que R no és elemental. Sigui $e \in R$ un idempotent no nul, i suposem que $\partial_e(\mathbb{P}(R)_e)$ és un espai compacte de Hausdorff metritzable. Sigui $\mathfrak{c}$ el cardinal de les funcions de pseudo-rang de $\partial_e(\mathbb{P}(R)_e)$ que són infinites, i suposem que $\mathfrak{c}$ és infinit. Llavors $\mathcal{M}(R)/I_{fin}(R)$ té exactament $\mathfrak{c}$ ideals minimals. A més, el quocient $\mathcal{M}(R)/I_{fin}(R)$ és purament infinit.*

DEMOSTRACIÓ: Sigui $u = [e] \in V(R)$ i sigui $d = \sup \phi_u(D(R))$. Per la Proposició 3.3.5, tenim que $\partial_e S_u$ és un espai compacte de Hausdorff, i pels Teoremes 2.2.9 i 2.3.16 obtenim $V(\mathcal{M}(R)) \cong V(R) \sqcup W_\sigma^d(S_u)$. La remarca 3.4.9 ens assegura que hi ha un isomorfisme ψ de $V(\mathcal{M}(R))$ a $V(R) \sqcup W_0^d(S_u)$. Notem que en aquest context, el conjunt Γ_d introduït al Teorema 3.4.3 es correspon a $\{s \in \partial_e S_u \mid d_0(s) = +\infty\}$, on $d_0 = d_{|\partial_e S_u}$, i que per tant la cardinalitat de Γ_d és exactament $\mathfrak{c}$. En el que segueix, i per conveniència, escriurem d en comptes de d_0.

En primer lloc provem que per a qualsevol $s \in \Gamma_d$, existeix una funció $h \in W_0^d(S_u)$ tal que $h(x) = \infty$ si i només si $x = s$.

Com que $\partial_e S_u$ és metritzable, la topologia sobre $\partial_e S_u$ és induïda per alguna mètrica δ. Sigui $s \in \Gamma_d$. Per $t \in \partial_e S_u$, definim $g(t) = 1/\delta(t, s)$, i notem que g és contínua sobre el conjunt $Y := \partial_e S_u \setminus \{s\}$ i semicontínua inferior sobre $\partial_e S_u$. Considerem $h = \inf\{g, d\}$. Llavors h és semicontínua inferior, positiva i $h \leq g$. Per $t \in Y$, sigui $f(t) = d(t) - h(t) = \sup\{d(t) - g(t), 0\}$, i posem $f(s) = 0$. Per demostrar que

$h \in W_0^d(S_u)$, ens cal comprovar que f és semicontínua inferior. Sigui $k \in \mathbb{R}_+$, i sigui $t_n \in U_k := \{x \in \partial_e S_u \mid f(x) \leq k\}$ una successió que convergeix a algun punt $t \in \partial_e S_u$. En primer lloc, suposem que $t = s$. Llavors $f(s) = 0 \leq k$, i per tant $s \in U_k$. En segon lloc, si $t \in \Gamma_d \setminus \{s\}$ aleshores existeix n_0 tal que $t_n \neq s$ si $n \geq n_0$. Com que g és contínua sobre $\partial_e S_u \setminus \{s\}$ i com que $d(t) = \infty$ tenim que existeix un nombre $m_0 \geq n_0$ tal que $(d-g)(t_n) \geq 0$ si $n \geq m_0$ i tal que $\lim\limits_{n\to\infty}(d-g)(t_n) = +\infty$. Ara, atès que $f(t_n)$ és fitada, arribem a contradicció (per la manera en què hem definit f). Així, si $t \neq s$, necessàriament $t \notin \Gamma_d$. Assumim per tant que $t \notin \Gamma_d$. Si $d(t) \leq g(t)$, llavors $f(t) = 0$ i així $t \in U_k$. Suposem que $g(t) < d(t)$. Com abans, existeix n_0 tal que $t_n \neq s$ si $n \geq n_0$. Com que g és contínua sobre $\partial_e S_u \setminus \{s\}$ podem suposar també que $g(t_n) < g(t) + \varepsilon_n$, on ε_n és alguna successió que convergeix a zero. Per tant $h(t_n) < g(t) + \varepsilon_n$, i així $d(t_n) = h(t_n) + f(t_n) < k + g(t) + \varepsilon_n$. Atès que d és semicontínua, això implica que $d(t) \leq \liminf\limits_n d(t_n) \leq k + g(t)$, de manera que $f(t) = d(t) - g(t) \leq k$. Per tant $h \in W_0^d(S_u)$ i $h(x) = \infty$ precisament quan $x = s$.

Per construir $\mathfrak{c}$ ideals minimals no nuls a $\mathcal{M}(R)/I_{fin}(R)$, procedim de la següent manera. Sigui $s \in \Gamma_d$. Sigui I^s l'ideal de $\mathcal{M}(R)$ tal que $\psi(V(I^s)) = V(R) \sqcup E^s$, on $E^s := \{f \in W_0^d(S_u) \mid f_{|\Gamma_d \setminus \{s\}} < \infty\}$. Com que, pel que acabem de provar, existeix una funció a $W_0^d(S_u)$ que val infinit precisament en un punt prefixat de Γ_d, obtenim que $I^s = I^t$ (per $s, t \in \Gamma_d$) si i només si $s = t$, i també que $I_{fin}(R) \subsetneqq I^s$, per a cada $s \in \Gamma_d$.

Per veure que I^s és minimal contenint $I_{fin}(R)$, suposem que existeix un ideal $J \subseteq \mathcal{M}(A)$ tal que $I_{fin}(R) \subseteq J \subsetneqq I^s$, i notem que $\psi(V(J)) = V(R) \sqcup E$, per algun $E \subseteq W_0^d(S_u)$. Com que $V(J) \subsetneqq V(I^s)$, existeix una funció $f \in (V(R) \sqcup E^s) \setminus (V(R) \sqcup E)$, i així $f(s) = \infty$. Definim $f' : \partial_e S_u \to (0, \infty]$ per $f'(s) = 1$ i $f'_{|\partial_e S_u} = f_{|\partial_e S_u}$. Llavors $f' \in L(\partial_e S_u)^{++}$ i $f' + f = 2f$, de manera que $f' \in W_0^d(S_u)$. De fet, $f' \in I_{fin}$, on aquesta vegada $I_{fin} = \psi(V(I_{fin}(R))) = V(R) \sqcup E_{fin}$, i $E_{fin} = \{f \in W_0^d(S_u) \mid f$ és finita $\}$. Sigui $g \in E$. Si $g(s) = \infty$, aleshores $f + g = f' + g$, d'on concloem que $f \in V(R) \sqcup E$, i arribem a contradicció. Per tant $g(s) < \infty$ i en conseqüència $g \in I_{fin}$. Així $J = I_{fin}(R)$, i provem d'aquesta manera que I^s és minimal contenint $I_{fin}(R)$. Per tant, $\{I^s/I_{fin}(R)\}_{s\in\Gamma_d}$ és una família de $\mathfrak{c}$ ideals minimals no nuls de $\mathcal{M}(R)/I_{fin}(R)$.

Sigui I un ideal d'ordre de $V(R) \sqcup W_0^d(S_u)$ minimal contenint I_{fin}. Per veure que $I = I^s$ per algun $s \in \Gamma_d$, n'hi ha prou amb veure que si $f \in I \setminus I_{fin}$, aleshores f val infinit en un sol punt extrem. Suposem doncs que existeixen punts $s, s' \in \Gamma_d$, amb $s \neq s'$ i tals que $f(s) = f(s') = \infty$. Aleshores podem definir funcions $f', f'' \in W_0^d(S_u)$ per $f'(s') = 1$ i $f'_{|\partial_e S_u \setminus \{s'\}} = f$, i per $f''(s) = 1$ i $f''_{|\partial_e S_u \setminus \{s\}} = f$. Per tant $f' + f'' = 2f$, de manera que $f', f'' \in I$. Siguin $I(f)$, $I(f')$ i $I(f'')$ els ideals d'ordre generats, respectivament, per f, f' i f''. Aleshores, tenim:

$$I_{fin} \subsetneq I_{fin} + I(f') \subseteq I_{fin} + I(f) \subseteq I.$$

Per tant $I = I_{fin} + I(f')$. Anàlogament, $I = I_{fin} + I(f'')$. Així $f' = g + h$, amb $g \in I_{fin}$ i $h \in I(f'')$. Si $h = x \in V(R)$, llavors $f' = g + \phi_u(x)$, la qual cosa ens porta a contradicció avaluant al punt s, ja que $f'(s) = f(s) = \infty$. Per tant, $h \notin V(R)$, de forma que existeix $h_1 \in W_0^d(S_u)$ i existeix $n \in \mathbb{N}$ tals que $h + h_1 = nf''$. Així $f' + h_1 = g + h + h_1 = g + nf''$. Avaluant novament al punt s i tenint en compte que $g(s) < \infty$, obtenim que $f''(s) = \infty$, la qual cosa és impossible.

Comprovem finalment que el monoide $V(\mathcal{M}(R))/V(I_{fin}(R))$ és purament infinit. Escrivim $V(\mathcal{M}(R))$ com $V(R) \sqcup W_0^d(S_u)$. Si $f \in (V(R) \sqcup W_0^d(S_u)) \setminus I_{fin}$, llavors existeix $s \in \partial_e S_u$ tal que $f(s) = \infty$. Construïm una funció $h \in W_0^d(S_u)$ tal que $h(t) = \infty$ precisament al punt $t = s$. Definim $h'(t) = h(t)$ si $t \neq s$ i posem $h'(s) = 1$; aleshores $h' + h = 2h$, i així $h' \in W_0^d(S_u)$, i de fet $h' \in I_{fin}$. Observem que $f + h = f + h'$. Per tant $[f] + [h] = [f]$ a $(V(R) \sqcup W_0^d(S_u))/I_{fin}$, amb $[h] \neq 0$. Pel Lema 3.4.4, això implica que $\mathcal{M}(R)/I_{fin}(R)$ és purament infinit. □

Tanquem l'estudi del cas regular, investigant la presència d'una quantitat no numerable d'ideals a $\mathcal{M}(R)$. Veurem més endavant que també és possible fer construccions similars per àlgebres d'operadors.

TEOREMA 3.4.11 *Sigui R un anell regular simple amb σ-unitat (i sense unitat), amb* $\mathrm{sr}(R) = 1$ *i amb $V(R)$ estrictament no perforat. Suposem que R no és elemental. Sigui $e \in R$ un idempotent no nul, i suposem que l'espai $\partial_e(\mathbb{P}(R)_e)$ és compacte de Hausdorff metritzable, i que conté una funció de pseudo-rang infinita no aïllada. Llavors existeix una quantitat no numerable d'ideals (propis) entre $L(R)$ i $\mathcal{M}(R)$ que formen una cadena respecte la inclusió. La mateixa afirmació val si totes les funcions de pseudo-rang extremes i infinites de $\mathbb{P}(R)_e$ són aïllades, però n'hi ha una quantitat infinita.*

DEMOSTRACIÓ: Sigui $u = [e] \in V(R)$ i sigui $d = \sup \phi_u(D(R))$. Com a la Proposició 3.4.10 (usant la Remarca 3.4.9) tenim un isomorfisme $V(\mathcal{M}(R)) \cong V(R) \sqcup W_0^d(S_u)$, i podem pensar que $\Gamma_d = \{s \in \partial_e S_u \mid d_0(s) = \infty\}$, on $d_0 = d_{|\partial_e S_u}$. En la resta de la demostració, escriurem d en comptes de d_0. La hipòtesi que $\partial_e(\mathbb{P}(R)_e)$ conté una funció de pseudo-rang infinita i no aïllada significa exactament que hi ha un punt $s \in \Gamma_d$ no aïllat. Si $t \in \partial_e S_u$, posem $g(t) = \inf\{(1/\delta(t,s)), d(t)\}$. Amb arguments semblants als de la Proposició 3.4.10, tenim que $g \in W_0^d(S_u)$. Atès que g és semicontínua inferior i $\partial_e S_u$ és compacte, existeix un nombre $\varepsilon > 0$ tal que $g \geq \varepsilon$. Definim $h : \partial_e S_u \to (0, \infty]$

a través de $h(s) = \infty$ i $h(t) = \varepsilon$ si $t \neq s$. És clar que h és semicontínua superior i que $h \leq g \leq d$. Pel Teorema de l'Entrepà (Sandwich Theorem, e.g., [34, 1.7.15]), existeix una funció contínua $f : \partial_e S_u \to [0, \infty]$ tal que $h \leq f \leq g$. Notem que f és infinita precisament al punt s. Posem $Y = \{t \in \partial_e S_u \mid f(t) \leq 1\}$. Sigui $0 < \alpha < 1$, i definim $g_\alpha(t) = f(t)^\alpha$ si $t \in \partial_e S_u \setminus Y$, mentre que $g_\alpha(t) = f(t)$ si $t \in Y$. Aquí, usarem la convenció que $\infty^\alpha = \infty$, de forma que $g_\alpha(s) = \infty$. Notem que $g_\alpha \leq f$ i si $\alpha < \beta$, llavors $g_\alpha \leq g_\beta$.

Si $t \in \partial_e S_u \setminus \{s\}$, posem $w(t) = d(t) - f(t)$ i sigui $w(s) = 0$. Afirmem que la funció w és semicontínua inferior. Per veure això, sigui $k \in \mathbb{R}_+$ i $U_k = \{t \in \partial_e S_u \mid w(t) \leq k\}$. Si $t_n \in U_k$ és una successió que convergeix a algun punt $t \in \partial_e S_u$, llavors hem de comprovar que $w(t) \leq k$. Si $t = s$ aleshores $t \in U_k$, ja que $w(s) = 0$. Es dedueix de la definició de w, i d'una manera similar als arguments emprats a la Proposició 3.4.10 que si $t \neq s$ llavors $t \notin \Gamma_d$. Com que f és contínua sobre $\partial_e S_u$, hi ha una successió de nombres ε_n que convergeix a zero, i tal que $f(t_n) < f(t) + \varepsilon_n$ si n és prou gran. Llavors $d(t_n) = w(t_n) + f(t_n) < k + f(t) + \varepsilon_n$, i atès que d és semicontínua inferior obtenim que $d(t) \leq k + f(t)$, de forma que $w(t) \leq k$. Per tant w és semicontínua inferior, i així $f \in W_0^d(S_u)$. Si $0 < \alpha < 1$, un argument semblant mostra que existeixen $g'_\alpha \in L(\partial_e S_u)^{++}$ i $n \in \mathbb{N}$ tals que $g_\alpha + g'_\alpha = nf$, d'on concloem que $g_\alpha \in W_0^d(S_u)$ per a tot α.

Observem també que si $0 < \alpha < \beta < 1$ la funció g_α pot ésser completada a g_β, és a dir, existeix una funció $h_{\alpha\beta} \in L(\partial_e S_u)^+$ tal que $g_\alpha + h_{\alpha\beta} = g_\beta$. Per provar això, procedim com abans, posant $h_{\alpha\beta} := g_\alpha - g_\beta$ sobre $\partial_e S_u \setminus \{s\}$ i $h_{\alpha\beta}(s) = 0$. Llavors, si $k \in \mathbb{R}_+$ i t_n és una successió a $\partial_e S_u$ que convergeix a algun punt $t \in \partial_e S_u$ diferent de s, i $h_{\alpha\beta}(t_n) \leq k$ per a tot n, comprovem que $h_{\alpha\beta}(t) \leq k$. Si $t \in Y$, aleshores $h_{\alpha\beta}(t) = 0 \leq k$. Si, en canvi, $t \notin Y$ aleshores $h_{\alpha\beta}(t) = f(t)^\beta - f(t)^\alpha$. Com que f és contínua sobre $\partial_e S_u$, existeix un nombre natural n_0 tal que $t_n \notin Y$ i $t_n \neq s$ si $n \geq n_0$. Així $h_{\alpha\beta}(t_n) = f(t_n)^\beta - f(t_n)^\alpha$ convergeix a $h_{\alpha\beta}(t)$ i tenint en compte que $h_{\alpha\beta}(t_n) \leq k$ per a tot n, deduïm que $h_{\alpha\beta}(t) \leq k$.

Per $\alpha \in (0, 1)$, sigui

$$E_\alpha := \{h \in W_0^d(S_u) \mid h + h' = n g_\alpha \text{ per algun } h' \in L(\partial_e S_u)^{++} \text{ i } n \in \mathbb{N}\},$$

i sigui I_α l'ideal de $\mathcal{M}(R)$ tal que $\psi(V(I_\alpha)) = V(R) \sqcup E_\alpha$, on ψ és l'isomorfisme establert a la demostració de la Proposició 3.4.10. Hem provat que $I_\alpha \subseteq I_\beta$ sempre que $\alpha < \beta$. De fet, aquesta inclusió és pròpia. En efecte, considerem la diferència $(n g_\alpha - g_\beta)_{|\partial_e S_u \setminus Y}$, per $n \in \mathbb{N}$. Sigui $t_k \in \partial_e S_u$ una successió que convergeix a s, amb $t_k \neq s$ per a tot k. Com que Y és un conjunt tancat, existeix k_0 tal que $t_k \notin Y$ si $k \geq k_0$. Així, tenint en compte que $(n g_\alpha - g_\beta)(t_k) = f(t_k)^\alpha (n - f(t_k)^{\beta - \alpha})$ si $k \geq k_0$, concloem que $\lim_k (ng_\alpha - g_\beta)(t_k) = -\infty$. Això prova que $g_\beta \notin V(R) \sqcup E_\alpha$, i per tant la inclusió $I_\alpha \subseteq I_\beta$ és pròpia. En conseqüència $\{I_\alpha\}_{\alpha\in(0,1)}$ és una família d'ideals diferents situats entre $L(R)$ i $\mathcal{M}(R)$ que formen una cadena respecte la inclusió.

Suposem ara que totes les funcions de pseudo-rang infinites de $\partial_e(\mathbb{P}(R)_e)$ són punts aïllats, i que a més n'hi ha una quantitat infinita. Llavors Γ_d està format per infinits punts aïllats. Com que $\partial_e S_u$ és compacte i tots els punts de Γ_d són aïllats, existeix una successió $t_n \in \Gamma_d$, el límit de la qual és un punt $s \in \partial_e S_u \setminus \Gamma_d$. Ara, atès que $d \in L(\partial_e S_u)^{++}$ i que $\partial_e S_u$ és compacte, existeix un nombre $1 > \varepsilon > 0$ tal que $\varepsilon < d(t)$ per a tot $t \in \partial_e S_u$. Per $0 < \alpha < 1$, definim funcions $g_\alpha : \partial_e S_u \to (0,\infty)$ a través de $g_\alpha(t_n) = n^\alpha$ i $g_\alpha(t) = \varepsilon$ per $t \neq t_n$. Sigui $\lambda \in \mathbb{R}_+$, i suposem que $\lambda \geq \varepsilon$. Notem que si n és prou gran, aleshores $g_\alpha(t_n) > \lambda$. Per tant ${g_\alpha}^{-1}(-\infty,\lambda]$ és igual al conjunt complementari (a $\partial_e S_u$) d'una cua de la successió $\{t_n\}$. Com que tots els punts de $\{t_n\}$ són aïllats, concloem que $g_\alpha^{-1}(-\infty,\lambda]$ és tancat. Si, d'altra banda, $\lambda < \varepsilon$, llavors $g_\alpha^{-1}(-\infty,\lambda] = \emptyset$. Així $g_\alpha \in L(\partial_e S_u)^{++}$. Notem que $(d - g_\alpha)(t_n) = +\infty$ i que $(d - g_\alpha)(t) = d(t) - \varepsilon$ si $t \neq t_n$, d'on $d - g_\alpha \in L(\partial_e S_u)^{++}$. Per tant $g_\alpha \in W_0^d(S_u)$ per a tot α. A més, es satisfà $g_\alpha \leq g_\beta$ sempre que $0 < \alpha < \beta < 1$. Notem també que $(g_\beta - g_\alpha)(t_n) = n^\alpha(n^{\beta-\alpha} - 1)$ i que $(g_\beta - g_\alpha)(t) = 0$ si $t \neq t_n$, així com que $\lim_n (g_\beta - g_\alpha)(t_n) = +\infty$, de manera que $g_\beta - g_\alpha \in L(\partial_e S_u)^+$. En conseqüència, definim $E_\alpha = \{h \in W_0^d(S_u) \mid h + h' = ng_\alpha \text{ per algun } h' \in L(\partial_e S_u)^{++} \text{ i } n \in \mathbb{N}\}$ i sigui I_α l'ideal de $\mathcal{M}(R)$ tal que $\psi(V(I_\alpha)) = V(R) \sqcup E_\alpha$, com abans. Hem provat doncs que $I_\alpha \subseteq I_\beta$ si $\alpha < \beta$.

Finalment, si $k \in \mathbb{N}$ i $0 < \alpha < \beta < 1$, veiem que $\lim_n (kg_\alpha - g_\beta)(t_n) = -\infty$, de manera que la inclusió $I_\alpha \subseteq I_\beta$ és pròpia, i obtenim així una cadena $\{I_\alpha \mid 0 < \alpha < 1\}$ no numerable. $\square$

L'espai restant d'aquesta secció serà destinat a estudiar les aplicacions de les tècniques desenvolupades anteriorment a les C^*-àlgebres simples, separables i amb rang real zero. Les proves dels resultats estan basades en els mateixos principis que les fetes pel cas d'anells regulars, és a dir, en la sistemàtica aplicació dels càlculs efectuats per a $V(\mathcal{M}(R))$ i la seva traducció a l'estructura de $\mathcal{M}(R)$. En conseqüència ometrem molta part dels detalls, no sense precisar, en cada cas, les variants de les proves que s'escaiguin.

Lin va provar que si A és una C^*-àlgebra AF sense unitat, separable, simple i no elemental, amb un nombre finit de traces extremes semifinites, de les quals n són infinites, aleshores $\mathcal{M}(A)/A$ té exactament 2^n ideals tancats no nuls ([56, Theorem 2]). Una extensió d'aquest resultat fou establerta per Rørdam a [83, Theorem 4.4] per C^*-àlgebres de la forma $A \otimes K$, on A és un C^*-àlgebra amb unitat simple, de dimensió infinita i amb una certa propietat de comparabilitat i K és la C^*-àlgebra dels operadors compactes sobre un espai de Hilbert separable i de dimensió infinita.

QÜESTIÓ: 3.4.12 *És realment necessari tenir una quantitat finita de traces extremes semifinites? És possible "exportar" el model de Lin a la nostra situació? I en quina mesura?*

Provarem que, efectivament, un model similar es pot adoptar en la nostra situació, incloent per tant el resultat de Lin. En particular, no ens caldrà tampoc la hipòtesi de tenir una quantitat finita de traces extremes semifinites. És convenient remarcar que hi ha molts exemples de C^*-àlgebres que satisfan les hipòtesis bàsiques dels enunciats que seguiran, com es veu, per exemple, a [59] o a [40], i que no són àlgebres AF. Per tant, els nostres resultats tenen un ventall d'aplicació molt més ampli.

Sigui A una C^*-àlgebra. A [82, Propositions 4.1-4.3] es demostra que A sempre té un ideal tancat maximal $I_{sr1}(A)$ amb rang estable 1, que pot ésser descrit per

$$I_{sr1}(A) = \{a \in A \mid a + (\widetilde{A}^{-1})^- = (\widetilde{A}^{-1})^-\},$$

on $\widetilde{A}^{-1}$ denota el conjunt d'elements invertibles de $\widetilde{A}$. Donem tot seguit una descripció equivalent d'aquest ideal, per l'àlgebra $\mathcal{M}(A)/L(A)$ i sota certes restriccions addicionals sobre A, on recordem que $L(A)$ és l'ideal tancat minimal de $\mathcal{M}(A)$ que conté pròpiament A.

PROPOSICIÓ 3.4.13 *Sigui A una C^*-àlgebra sense unitat, separable, simple, amb rang real zero i* $\mathrm{sr}(A) = 1$. *Suposem que $V(A)$ és estrictament no perforat, i que A no és elemental. Existeix un únic ideal tancat $I_{fin}(A)$ de $\mathcal{M}(A)$ d'entre els ideals que contenen pròpiament A, i que és maximal respecte la propietat que $V(I_{fin}(A))/V(L(A))$ és cancel·latiu. Si, a més, $RR(\mathcal{M}(A)) = 0$, aleshores es té que $I_{fin}(A)/L(A) = I_{sr1}(\mathcal{M}(A)/L(A))$.*

DEMOSTRACIÓ: Fixem $u \in V(A)^*$. Sigui $D = D(A)$ i posem $d = \sup \phi_u(D)$. Sigui $I_{fin} := V(A) \sqcup E_{fin}$, on $E_{fin} = \{f \in W_\sigma^d(S_u) \mid f_{|\partial_e S_u}$ és finita$\}$. Aleshores la mateixa demostració que hem fet servir a la Proposició 3.4.1, usant aquesta vegada els Teoremes 2.2.4 i 2.3.17, en comptes dels Teoremes 2.2.9 i 2.3.16, prova la primera part de l'enunciat.

Suposem ara que el rang real de $\mathcal{M}(A)$ és zero. Llavors $V(I_{fin}(A)/L(A)) \cong V(I_{fin}(A))/V(L(A)) \cong I_{fin}/L$, i per tant $I_{fin}(A)$ és l'ideal tancat més gran de $\mathcal{M}(A)$ respecte la propietat que $V(I_{fin}(A)/L(A))$ és cancel·latiu, la qual cosa és equivalent a dir que $\mathrm{sr}(I_{fin}(A)/L(A)) = 1$, per [15, Proposition III.2.4]. Així $I_{fin}(A)/L(A) = I_{sr1}(\mathcal{M}(A)/L(A))$. □

Anomenarem $I_{fin}(A)$ l'**ideal finit** de $\mathcal{M}(A)$. Observem que, com al cas regular, A té escala finita precisament quan $I_{fin}(A) = \mathcal{M}(A)$.

DEFINICIÓ 3.4.14 *Sigui A una C^*-àlgebra. Diem que una quasitraça τ semicontínua inferior i que preserva l'ordre és* **infinita** *si* $\sup_\lambda \tau(u_\lambda) = +\infty$, *per alguna unitat aproximada $\{u_\lambda\}_{\lambda\in\Lambda}$ de A.*

Notem que aquesta definició no depèn de la unitat aproximada concreta que triem. Notem també que si A té rang real zero i τ és infinita, llavors $\sup \tau(p) = \infty$, on el suprem es pren sobre les projeccions $p \in A$.

TEOREMA 3.4.15 *Sigui A una C^*-àlgebra sense unitat, separable, simple, amb rang real zero i $\mathrm{sr}(A) = 1$. Suposem que $V(A)$ és estrictament no perforat i que A no és elemental. Sigui $p \in A$ una projecció no nul·la. Suposem que A té exactament n quasitraces extremes infinites a Q_p. Llavors hi ha precisament 2^n ideals tancats entre $I_{fin}(A)$ i $\mathcal{M}(A)$.*

DEMOSTRACIÓ: Posem $u = [p] \in V(A)$ i sigui $d = \sup \phi_u(D(A))$. Notem en primer lloc que A té exactament n quasitraces extremes infinites a Q_p si i només si la cardinalitat del conjunt

$$\Gamma_d := \{s \in \partial_e S_u \mid d(s) = +\infty\}$$

és n, a causa del Teorema 3.3.17.

A partir d'aquest punt, la demostració és anàloga a la del Teorema 3.4.3, fent servir el Teorema 2.3.17, en comptes del Teorema 2.3.16. □

Investigarem ara els quocients $\mathcal{M}(A)/J$, per a qualsevol ideal tancat J de $\mathcal{M}(A)$ que conté $I_{fin}(A)$, i provarem que tenen una estructura particular. En analogia al cas d'anells, recordem que una C^*-àlgebra A és **purament infinita** si per a tot $x \in A_+$ no nul, la C^*-subàlgebra hereditària generada per x conté projeccions infinites. Equivalentment, si tot ideal dreta (esquerra) tancat, principal i no nul conté projeccions infinites; és a dir, A és, com a anell, purament infinit. Per veure aquesta darrera afirmació, suposem que tot ideal dreta tancat i no nul conté projeccions infinites, i sigui $I \neq 0$ un ideal dreta qualsevol. Aleshores existeix una projecció infinita $p \in \overline{I}$. Donat $\varepsilon < 1$, existeix $x \in I_+$ tal que $\|p - x\| < \varepsilon$, i per tant $p = f_\varepsilon(p) \lesssim x$ ([84, Proposition 2.2]). Això implica, per [84, Proposition 2.4], que existeixen $\delta > 0$ i un element $r \in A$ tals que $p = rf_\delta(x)r^* = vv^*$, on $v = rf_\delta(x)^{1/2}$. Per tant, $q := v^*v \in I$ és una projecció tal que $q \sim p$, i per tant és infinita. Recíprocament, si tot ideal dreta no nul conté una projecció infinita, llavors és clar que tot ideal dreta tancat i no nul conté una projecció infinita. Observem que en el cas que A és una C^*-àlgebra amb rang real zero, llavors A és purament infinita si, i només si, $V(A)$ és un monoide purament infinit. La següent observació és similar al Lema 3.4.5, i es pot trobar a [93, Theorem 1.1, Theorem 1.3]. Per conveniència, però, l'enunciem en format separat com a Lema.

LEMA 3.4.16 *Sigui A una C^*-àlgebra amb σ-unitat i rang real zero. Siguin $I \subsetneq J$ ideals tancats de $\mathcal{M}(A)$. Llavors, tota C^*-subàlgebra hereditària de J/I és la clausura d'un espai vectorial generat per imatges de projeccions via l'aplicació natural $\pi : J \to J/I$. En particular, tota projecció no nul·la de J/I conté una subprojecció no nul·la que és la imatge d'una projecció de J.*

DEMOSTRACIÓ: Si B és una C^*-subàlgebra hereditària de J/I, llavors $\pi^{-1}(B)$ és hereditària a $J \subseteq \mathcal{M}(A)$. Per tant, seguint [93, Theorem 1.1], tenim que $\pi^{-1}(B)$ és la clausura de l'espai vectorial generat per les seves projeccions, d'on deduïm la primera afirmació.

Si ara $p \in J/I$ és una projecció no nul·la, llavors sols cal aplicar la primera part del resultat a la C^*-subàlgebra hereditària $B = p(J/I)p \subseteq J/I$. □

PROPOSICIÓ 3.4.17 *Sigui A una C^*-àlgebra sense unitat, separable, simple, amb rang real zero i $\mathrm{sr}(A) = 1$. Suposem que $V(A)$ és estrictament no perforat, i que A no és elemental. Sigui $p \in A$ una projecció no nul·la, i suposem que A té exactament n quasitraces extremes infinites a Q_p. Sigui J un ideal tancat de $\mathcal{M}(A)$ que conté $I_{fin}(A)$. Llavors $\mathcal{M}(A)/J$ és una C^*-àlgebra purament infinita. Si assumim a més que $RR(\mathcal{M}(A)) = 0$, aleshores tenim que $V(\mathcal{M}(A)/I_{fin}(A))$ és isomorf a $\{2^n, \cup\}$, on 2^n és l'àlgebra de Boole de subconjunts d'un conjunt de n elements.*

DEMOSTRACIÓ: Pel Lema 3.4.16, i per demostrar que $\mathcal{M}(A)/J$ és una C^*-àlgebra purament infinita, n'hi ha prou amb veure que tota projecció $\pi(q) \in \mathcal{M}(A)/J$ és infinita, on $\pi : \mathcal{M}(A) \to \mathcal{M}(A)/J$ és l'aplicació natural i $q \in \mathcal{M}(A)$ és una projecció no zero. Amb aquesta finalitat, és suficient provar que $V(\mathcal{M}(A))/V(J)$ és un monoide purament infinit. Les línies d'argumentació són les del Teorema 3.4.3 i la Proposició 3.4.1, usant aquest cop l'isomorfisme construït al Teorema 2.3.17 (en comptes del Teorema 2.3.16).

Suposem ara que $RR(\mathcal{M}(A)) = 0$. Per demostrar la segona part de l'enunciat, sigui Σ el monoide de tots els subconjunts de Γ_d (definit al Teorema 3.4.15), on la unió de conjunts és l'operació del monoide. Per a cada $\alpha \in \Sigma$, construïm $d_\alpha \in W_\sigma^d(S_u)$ com a la demostració del Teorema 3.4.3 (és a dir, $d_\alpha(s) = 1$ per a tot $s \in \Gamma_d \setminus \alpha$ i $d_{\alpha|(\Gamma_d \setminus \alpha)'} = d_{|(\Gamma_d \setminus \alpha)'}$), i sigui $d' = d_\emptyset$. Notem que $d_\alpha + d' = 2d_\alpha$ i en general per inducció $md_\alpha = d_\alpha + (m-1)d'$ per a tot m. Per tant tenim una aplicació $\Sigma \to (V(A) \sqcup W_\sigma^d(S_u))/I_{fin}$, definida per $\alpha \mapsto [d_\alpha]$. És fàcil comprovar que $(d_\alpha + d_\beta)_{|\partial_e S_u} = (d_{\alpha\cup\beta} + d')_{|\partial_e S_u}$ per $\alpha, \beta \in \Sigma$ qualssevol. Es dedueix llavors que $d_\alpha + d_\beta = d_{\alpha\cup\beta} + d'$ i per tant en el monoide $(V(A) \sqcup W_\sigma^d(S_u))/I_{fin}$ tenim que $[d_\alpha] + [d_\beta] = [d_{\alpha\cup\beta}]$. Així l'aplicació tot just definida és un morfisme de monoides, clarament injectiu. Per veure que és de fet exhaustiu, i per tant un isomorfisme de monoides, prenem $[f] \in (V(A) \sqcup W_\sigma^d(S_u))/I_{fin}$. Llavors existeix un subconjunt $\alpha \subseteq \Gamma_d$ tal que $f \in E_\alpha$, on E_α es construeix com al Teorema 3.4.3. De fet, α és únic si el triem com el més petit possible (és a dir, $f_{|\partial_e S_u}$ és infinita precisament sobre α).

Existeixen $m \in \mathbb{N}$ i $g \in W_\sigma^d(S_u)$ tals que $f + g = md_\alpha$. Sigui g' l'element de $W_\sigma^d(S_u)$ obtingut "abaixant" a fins a 1 els valors on $g_{|\partial_e S_u}$ és infinita (segons el Corol·lari 3.2.20). Atès que $g_{|\partial_e S_u}$ és infinita, com a molt, sobre α, obtenim fàcilment $f + g = f + g'$. Així $f + g' = f + g = md_\alpha = d_\alpha + (m-1)d'$, d'on concloem que $[f] = [d_\alpha]$ a $(V(A) \sqcup W_\sigma^d(S_u))/I_{fin}$. $\square$

Observem que, sota les hipòtesis de la Proposició 3.4.17 (incloent que el rang real de $\mathcal{M}(A)$ és zero), i en el cas particular que A té exactament una quasitraça extrema infinita, tenim que $V(\mathcal{M}(A)/I_{fin}(A)) \cong \{0, \infty\}$, i això implica que tota parella de projeccions no nul·les de $\mathcal{M}(A)/I_{fin}(A)$ són equivalents.

Considerem ara el cas en que la C^*-àlgebra pot tenir una quantitat infinita de quasitraces extremes que són infinites. La primera observació que cal fer és que els arguments emprats abans poden ésser adaptats amb facilitat a la nostra situació actual. El següent resultat generalitza [56, Theorem 3] i [55, Lemma 4.16].

TEOREMA 3.4.18 *Sigui A una C^*-àlgebra sense unitat, simple, separable, amb rang real zero i* $\mathrm{sr}(A) = 1$. *Suposem que $V(A)$ és estrictament no perforat, i que A no és elemental. Sigui $p \in A$ una projecció no zero, i sigui $\mathfrak{c}$ el cardinal del conjunt de quasitraces infinites i extremes de Q_p. Assumim que $\mathfrak{c}$ és infinit. Llavors $\mathcal{M}(A)$ té, almenys, $\mathfrak{c}$ ideals maximals que contenen pròpiament $I_{fin}(A)$, i el quocient de $\mathcal{M}(A)$ per qualsevol d'aquests ideals és una C^*-àlgebra purament infinita i simple. A més, $\mathcal{M}(A)$ conté una successió infinita i estrictament decreixent d'ideals tancats que contenen $I_{fin}(A)$.*

DEMOSTRACIÓ: Sigui $u = [p] \in V(A)$ i sigui $d = \sup \phi_u(D(A))$. Notem que pel Teorema 3.3.17, la cardinalitat del conjunt Γ_d definit al Teorema 3.4.15 és exactament $\mathfrak{c}$. La línia d'argumentació usada al Teorema 3.4.7 ens dóna ara la prova per aquest resultat, fent servir el Teorema 2.3.17, en comptes del 2.3.16. Obtenim d'aquesta forma una família de $\mathfrak{c}$ ideals tancats maximals $(I_s)_{s\in\Gamma_d}$, cadascun dels quals conté pròpiament $I_{fin}(A)$. Per veure que cada quocient $\mathcal{M}(A)/I_s$ és purament infinit i simple, és suficient comprovar, com a la Proposició 3.4.17, que el monoide $(V(A) \sqcup W_\sigma^d(S_u))/(V(A) \sqcup E_s)$ és purament infinit. Novament, la demostració és anàloga a la que es fa al Teorema 3.4.7.

Finalment, la successió infinita i estrictament decreixent d'ideals tancats que contenen $I_{fin}(A)$ es construeix de forma anàloga al Teorema 3.4.7 (emprant també 2.3.17). □

Tractarem seguidament el cas en que l'espai $\partial_e Q_p$ és compacte de Hausdorff. Els resultats que obtindrem seran els anàlegs als dels anells regulars. Serà convenient en aquest punt recordar la definició del semigrup de funcions $W_0^d(S_u)$ associat a l'espai d'estats S_u d'un monoide M quan la frontera extrema $\partial_e S_u$ és compacta.

PROPOSICIÓ 3.4.19 *Sigui A una C^*-àlgebra sense unitat, separable, simple, amb rang real zero, i amb* $\mathrm{sr}(A) = 1$. *Suposem que $V(A)$ és estrictament no perforat, i que A no és elemental. Sigui $p \in A$ una projecció no nul·la, i suposem que $\partial_e Q_p$ és un espai compacte de Hausdorff. Sigui $\mathfrak{c}$ el cardinal del conjunt de quasitraces infinites de $\partial_e Q_p$, i assumim que $\mathfrak{c}$ és infinit. Llavors $\mathcal{M}(A)/I_{fin}(A)$ té, exactament $\mathfrak{c}$ ideals minimals tancats. A més, $\mathcal{M}(A)/I_{fin}(A)$ és una C^*-àlgebra purament infinita.*

DEMOSTRACIÓ: Sigui $u = [p] \in V(A)$ i sigui $d = \sup \phi_u(D(A))$. Pel Teorema 3.3.17, tenim que $\partial_e S_u$ és un espai compacte de Hausdorff, i pels Teoremes 2.2.4 i 2.3.17 obtenim $V(\mathcal{M}(A)) \cong V(A) \sqcup W_\sigma^d(S_u)$. La Remarca 3.4.9 ens assegura que tenim un isomorfisme ψ de $V(\mathcal{M}(A))$ a $V(A) \sqcup W_0^d(S_u)$. Notem que el conjunt Γ_d (introduït al Teorema 3.4.15) es correspon en aquesta situació a $\{s \in \partial_e S_u \mid d_0(s) = \infty\}$, on $d_0 = d_{|\partial_e S_u}$, i que la cardinalitat de Γ_d és exactament $\mathfrak{c}$. La demostració s'acaba ara de manera idèntica a la Proposició 3.4.10. □

Observem que la conclusió que $\mathcal{M}(A)/I_{fin}(A)$ és purament infinita, quan $\mathcal{M}(A)$ té rang real zero, d'acord amb la Proposició 3.4.17 prové d'una condició més forta, en el sentit que de fet provem que $p \sim p \oplus p$ per a tota projecció $p \in \mathcal{M}(A)/I_{fin}(A)$. Seria interessant saber si sota les condicions de la Proposició 3.4.19, també podem atènyer aquesta conclusió. La resposta serà, en general, negativa. De fet, en alguns casos podrem aconseguir una projecció $q \in \mathcal{M}(A)/I_{fin}(A)$ tal que $[q] + [q] \neq [q]$ a $V(\mathcal{M}(A)/I_{fin}(A))$. En efecte, si A és una C^*-àlgebra dins les hipòtesis de la Proposició 3.4.19, amb $\partial_e Q_p = [0,1]$ i amb $RR(\mathcal{M}(A)) = 0$, aleshores és suficient construir una funció $f : [0,1] \to [0,\infty]$ semicontínua inferior tal que no existeix cap $g : [0,1] \to [0,\infty)$ semicontínua inferior amb $f = g$ al conjunt $\{x \in [0,1] \mid f(x) < \infty\}$. Aleshores, prenem la projecció $q_1 \in \mathcal{M}(A)$ que representa aquesta funció f, i tenim que $q = \pi(q_1)$ satisfà la condició requerida (on $\pi : \mathcal{M}(A) \to \mathcal{M}(A)/I_{fin}(A)$ és l'aplicació natural). Per construir la funció esmentada anteriorment, prenem $f(x) = \infty$ si

$x = 0$ o bé $x \notin \mathbb{Q}$, i $f(x) = q$ si $x \neq 0$ i té la forma $x = p/q$ amb p i q coprimers. Aleshores $f^{-1}[0, \alpha]$ és finit per a tot $\alpha < \infty$ i per tant f és semicontínua inferior. Si existís $g : [0, 1] \to [0, \infty)$ tal que $f(x) = g(x)$ si $f(x)$ és finit, llavors per algun $n \in \mathbb{N}$, tenim que $g^{-1}[0, n]$ conté un obert no buit (pel Teorema de Baire). Per tant, obtenim contradicció.

Conclourem aquesta secció investigant la presència de famílies no numerables d'ideals tancats a $\mathcal{M}(A)$. Per C^*-àlgebres amb escala fitada, aquest fenomen ja ha estat observat a [42, Corollary 16.7].

TEOREMA 3.4.20 *Sigui A una C^*-àlgebra sense unitat, separable, simple, amb rang real zero, i amb* $\mathrm{sr}(A) = 1$. *Suposem que $V(A)$ és estrictament no perforat, i que A no és elemental. Sigui $p \in A$ una projecció no nul·la, i suposem que $\partial_e Q_p$ és un espai compacte de Hausdorff (metritzable) que conté una quasitraça infinita no aïllada. Llavors existeix una quantitat no numerable d'ideals tancats (propis) entre $L(A)$ i $\mathcal{M}(A)$ que formen una cadena respecte la inclusió. La mateixa afirmació val si totes les quasitraces infinites i extremes de Q_p són aïllades, però n'hi ha una quantitat infinita.*

DEMOSTRACIÓ: Sigui $u = [p] \in V(A)$ i sigui $d = \sup \phi_u(D(A))$. Com a la Proposició 3.4.19 tenim un isomorfisme $V(\mathcal{M}(A)) \cong V(A) \sqcup W_0^d(S_u)$, i el conjunt Γ_d (introduït al Teorema 3.4.15) es correspon a $\{s \in \partial_e S_u \mid d_0(s) = \infty\}$, on $d_0 = d_{|\partial_e S_u}$. La resta de la demostració es dedueix de les tècniques emprades al Teorema 3.4.11 i la Proposició 3.4.10. □

3.5 Els ideals establement cofinits

La Qüestió 3.2.27 preguntava si el mínim ideal establement cofinit de $\mathcal{M}(A)$ que conté A coincideix amb $L(A)$, en cas que l'escala de A és fitada. La resposta afirmativa a aquesta pregunta permet, usant el Teorema 3.3.19 i segons les línies de [42], descriure els ideals de $\mathcal{M}(A)$ en termes de $\mathrm{Aff}(F')$, on F' és la cara tancada de $QT(\mathcal{M}(A))$ formada per les quasitraces que s'anul·len sobre A, i ens mostra com el pas d'escala contínua a escala finita produeix un canvi significatiu en el reticle d'ideals de $\mathcal{M}(A)$. D'altra banda, i com a resposta a la Qüestió 3.2.29, vèiem que si l'escala en una C^*-àlgebra no és finita, aleshores l'ideal $L(A)$ no és en general establement cofinit. Això motiva la recerca del quocient establement finit més gran de $\mathcal{M}(A)/A$, és a dir, busquem l'ideal més petit, no nul, i establement cofinit de $\mathcal{M}(A)$. Com veurem, el tipus d'elements que el formen manté una estreta relació amb la topologia de les quasitraces extremes de l'àlgebra.

Notem però en primer lloc que si l'escala de A no és idènticament infinita, aleshores l'àlgebra de multiplicadors és establement finita. Novament, això es desprèn de la noció corresponent per monoides. Amb aquest fi, observem el següent, que es troba de manera implícita a [3, Proposition 2.1].

LEMA 3.5.1 *Sigui M un monoide amb unitat d'ordre $u \in M$, i sigui $I = \{x \in M \mid x + nu \leq nu$ per algun $n \in \mathbb{N}\}$. Llavors I és l'ideal d'ordre establement cofinit més petit de M.*

DEMOSTRACIÓ: És fàcil veure que I és un ideal d'ordre. Suposem que $[x] + [y] = [y]$ a M/I. Llavors existeixen elements $z, w \in I$ tals que $x + y + z = y + w$. Escrivim $y + h = mu$ per algun $h \in M$ i algun $m \in \mathbb{N}$. Llavors $x + mu + z = mu + w$. També, existeix un element $z' \in M$ i existeix un nombre $k \in \mathbb{N}$ tals que $z + z' = ku$ i com que $w \in I$, trobem un nombre $n \in \mathbb{N}$ que satisfà $w + nu \leq nu$. Ara bé:

$$x + (m + k + n)u = w + z' + (m + n)u \leq (m + n)u + z' \leq (m + n + k)u,$$

d'on deduïm que $x \in I$, i per tant I és un ideal establement cofinit.

Suposem finalment que J és un altre ideal d'ordre establement cofinit i que $I \not\subseteq J$. Prenem $x \in I$ amb $x \notin J$. Llavors $[x] \neq 0$ a M/J, mentre que $[x] + n[u] \leq n[u]$ per algun $n \in \mathbb{N}$, que és una contradicció. □

COROL·LARI 3.5.2 *Sigui A una C^*-àlgebra simple, amb σ-unitat, rang real zero i amb $\mathrm{sr}(A) = 1$. Suposem que $V(A)$ és estrictament no perforat, que A no és elemental i que l'escala no és idènticament infinita. Llavors $\mathcal{M}(A)$ és establement finita.*

DEMOSTRACIÓ: N'hi ha prou amb veure que el monoide $V(\mathcal{M}(A))$ és establement finit. Fixem $u \in V(A)^*$ i posem $d = \sup \phi_u(D(A))$. Pel Teorema 2.3.17, tenim que $V(\mathcal{M}(A)) \cong V(A) \sqcup W_\sigma^d(S_u)$. Sigui I l'ideal minimal establement cofinit de $V(A) \sqcup W_\sigma^d(S_u)$ i sigui $s \in \partial_e S_u$ tal que $d(s) < \infty$. Suposem que $I \neq 0$, i prenem $x \in I$ diferent de zero. Llavors $x + nd \leq nd$ per algun $n \in \mathbb{N}$, pel Lema 3.5.1. Si $x \in V(A)^*$, aleshores $\phi_u(x) \gg 0$, i com que $\phi_u(x) + nd \leq nd$, obtenim una contradicció avaluant al punt s. El cas en que $x \in W_\sigma^d(S_u)$ es tracta de manera semblant. □

La resposta a la Qüestió 3.2.29 plantejada a la Secció 2 pot ésser afinada encara una mica més, com veurem seguidament. Observem primer el següent fet general:

LEMA 3.5.3 *Sigui R un anell amb unitat, i sigui I un ideal (bilateral) de R no nul. Si $V(R)/V(I)$ no és establement finit, aleshores R/I tampoc.*

DEMOSTRACIÓ: Denotem per $\pi : R \to R/I$ l'aplicació natural de pas al quocient. Suposem que R/I és establement finit, i volem veure que $V(R)/V(I)$ també ho és. Suposem doncs que existeix $n \in \mathbb{N}$ tal que $n\overline{[1]} + \overline{[e]} = n\overline{[1]}$ a $V(R)/V(I)$. Aleshores existeixen idempotents $f_1, f_2 \in M_\infty(I)$ tals que $n[1] + [e] + [f_1] = n[1] + [f_2]$ a $V(R)$. Per tant $n[\pi(1)] + [\pi(e)] = n[\pi(1)]$ a $V(R/I)$, i atès que R/I és establement finit, concloem que $e \in M_\infty(I)$, d'on $\overline{[e]} = 0$, com volíem. □

PROPOSICIÓ 3.5.4 *Sigui A una C^*-àlgebra simple, separable (sense unitat), amb rang real zero i* $\mathrm{sr}(A) = 1$. *Suposem a més que A no és elemental i que $V(A)$ és estrictament no perforat. Si A no té escala finita, aleshores l'ideal $L(A)$ no és mai establement cofinit.*

DEMOSTRACIÓ: Sigui $u \in V(A)^*$, sigui $S_u = St(V(A), u)$, i posem $d = \sup \phi_u(D)$, on $D = D(A)$ i ϕ_u és l'aplicació natural. Pel Teorema 2.3.17, els monoides $V(\mathcal{M}(A))$ i $V(A) \sqcup W_\sigma^d(S_u)$ són isomorfs. Aleshores, que l'escala de A no sigui finita vol dir que la funció d es fa infinita en algun punt $s \in \partial_e S_u$.

Denotem per $\{s\}'$ la cara complementària (a S_u) de $\{s\}$. Suposem primer que la cara $\{s\}'$ és tancada. En aquest cas tenim (per [39, Corollary 11.27]) un isomorfisme

$$\mathrm{Aff}(S_u) \cong \mathrm{Aff}(\{s\}) \times \mathrm{Aff}(\{s\}'),$$

de manera que podem construir, per a cada $n \in \mathbb{N}$, una funció $f_n \in \mathrm{Aff}(S_u)^{++}$ tal que $f_n(s) = n$ i tal que $f_{n|\{s\}'} = 1$. Sigui $g = \sup_n f_n$. Notem que $g \in \mathrm{LAff}(S_u)^{++}$ i que $g(s) = +\infty$ i per tant no és contínua. D'altra banda, de la igualtat $(g + d)_{|\{s\} \cup \{s\}'} = (1 + d)_{|\{s\} \cup \{s\}'}$ es desprèn que $g + d = 1 + d$, de manera que $g \in W_\sigma^d(S_u)$. Així, a $V(\mathcal{M}(A))/V(L(A))$ tenim que $[g] + [d] = [d]$, amb $[g] \neq 0$. Per tant, $V(\mathcal{M}(A))/V(L(A))$ no és establement finit.

Suposem ara que $\{s\}'$ no és tancada. Distingim aquí dos casos: assumim primer que $s \in \overline{\{s\}'}$. En aquest cas, les observacions fetes a continuació de la Qüestió 3.2.29 proven que existeix una funció $f \in W_\sigma^d(S_u)$ no contínua, i tal que $f + d = 2 + d$, d'on igual que abans concloem fàcilment que $V(\mathcal{M}(A))/V(L(A))$ no és establement finit. En segon lloc, assumim que $s \notin \overline{\{s\}'}$. Per la Proposició 3.2.19, existeix una funció $f \in W_\sigma^d(S_u)$ tal que $f(s) = 1$ i tal que $f_{|\{s\}'} = 2$. Clarament es satisfà que $f + d = 2 + d$. Per concloure que $V(\mathcal{M}(A))/V(L(A))$ no és establement finit, és suficient comprovar que f no és contínua. En efecte, suposem que ho és. Sigui $x \in \overline{\{s\}'} \setminus \{s\}'$ (aquest punt existeix perquè $\{s\}'$ no és tancada). Aleshores $x = \lim_n x_n$, amb $x_n \in \{s\}'$, i per tant $f(x) = 2$. D'altra banda, i atès que S_u és la suma directa convexa de $\{s\}$ i de $\{s\}'$, existeix $\alpha \in (0, 1]$ i existeix $t \in \{s\}'$ tals que $x = \alpha s + (1 - \alpha)t$. Per tant $f(x) = 2 - \alpha \neq 2$, la qual cosa és una contradicció.

Finalment, pel Lema 3.5.3 concloem que $\mathcal{M}(A)/L(A)$ no és mai establement cofinit, com volíem. □

Necessitarem ara uns lemes de caire més aviat tècnic, que ens seran d'utilitat a l'hora d'avaluar propietats de determinades funcions afins definides sobre l'espai S_u.

LEMA 3.5.5 *Sigui K un símplex de Choquet, i F una cara tancada de K. Sigui F' la cara complementària de F. Aleshores* $\overline{F'} = \overline{\operatorname{conv}(\partial_e K \setminus \partial_e F)}$.

DEMOSTRACIÓ: Suposem primer que F' és una cara tancada. Aleshores, per ser K compacte, veiem que F' és un compacte i convex. Pel Teorema de Krein-Mil'man (1.3.4), tenim que $F' = \overline{\operatorname{conv}(\partial_e F')}$. D'altra banda $\partial_e F' = F' \cap \partial_e K$, ja que F' és una cara de K i per definició de cara complementària, veiem que $\partial_e F' = \partial_e K \setminus \partial_e F$.

Si F' no és tancada, posem $X := \overline{\operatorname{conv}(\partial_e K \setminus \partial_e F)}$. Per construcció, X és un subconjunt compacte i convex de K, i conté tots els extrems de K, excepte potser els de F. Ara, l'embolcall convex de X i de F és un tancat (per [39, Proposition 5.2], i usant que tant X com F són compactes i convexos), i conté tots els punts extrems de K. Pel Teorema de Krein-Mil'man, concloem que $K = \operatorname{conv}(X \cup F)$. Sigui $a \in F'$. Aleshores existeixen $\alpha \in [0,1]$, $f \in F$ i $x \in X$ tals que $a = \alpha f + (1-\alpha)x$. Com que $f \notin F'$ i tenint en compte que F' és una cara, necessàriament $\alpha = 0$, i per tant $a = x$. Tenim doncs que $F' \subseteq X$. D'altra banda, és clar que $X \subseteq \overline{F'}$, i per tant $\overline{F'} = X$. □

Donem ara una petita extensió del Lema 3.2.11 al cas en que les funcions que estem comparant prenguin valors possiblement infinits.

LEMA 3.5.6 *Sigui K un conjunt compacte i convex. Siguin $f, g \in \operatorname{LAff}_\sigma(K)^{++}$ tals que $f_{|\partial_e K} = g_{|\partial_e K}$. Aleshores $f = g$.*

DEMOSTRACIÓ: Per ser K compacte i f semicontínua inferior, tenim que f ateny el seu valor mínim dins K. Afirmem que si $\alpha = \min(f)$, aleshores existeix $x \in \partial_e K$ tal que $f(x) = \alpha$ (aquest tipus d'argument és estàndard i es troba, per exemple, a [39, Corollary 5.19]). En efecte, sigui $F = f^{-1}(\{\alpha\})$. Com que K és compacte i f és semicontínua inferior, tenim que $F = f^{-1}((-\infty, \alpha])$ és un subconjunt no buit i tancat. D'altra banda, si $x, y \in K$ i $a \in (0,1)$ són tals que $ax + (1-a)y \in F$, aleshores és fàcil veure que $x, y \in F$, de manera que F és una cara tancada i no buida de K. Pel Teorema de Krein-Mil'man $F = \overline{\operatorname{conv}(\partial_e F)}$, d'on veiem que $\partial_e F \neq \emptyset$, i com que F és una cara de K, tenim que de fet $\partial_e F = F \cap \partial_e K$, establint així l'afirmació.

Escrivim $g = \sup\limits_n g_n$, on $g_n \in \operatorname{Aff}(K)^{++}$ per a cada $n \in \mathbb{N}$ i a més (g_n) és una successió creixent. Tenim que $g_n \leq g$, i notem que $f - g_n = g - g_n \geq 0$ sobre $\partial_e K$. Tenint en compte que $f - g_n$ és afí i semicontínua inferior, concloem de l'anterior paràgraf que $f - g_n \geq 0$ globalment. Per tant $f \geq g$. Amb un argument similar provem que $f \leq g$, i per tant $f = g$. □

Sigui M un monoide parcialment ordenat, simple, cònic, i sigui $u \in M$ un element diferent de zero. Prenem un interval no nul D sobre M (i que per tant serà generador) amb un subconjunt cofinal numerable, i sigui $d = \sup \phi_u(D)$, on ϕ_u és l'aplicació natural. Suposem que d no és idènticament infinita. Per la demostració del Corollari 3.5.2, el monoide $M \sqcup W_\sigma^d(S_u)$ és establement finit. Ens interessa trobar el mínim ideal establement cofinit i no nul d'aquest monoide. Notem primer que M no és establement cofinit. En efecte, si $x \in M^*$, aleshores $d + x = d + \phi_u(x)$, i per tant a $(M \sqcup W_\sigma^d(S_u))/M$ tenim $[d] = [d] + [\phi_u(x)]$, amb $[\phi_u(x)] \neq 0$. Així, aquest ideal conté estrictament M i per tant conté l'ideal d'ordre $L = M \sqcup \mathrm{Aff}(S_u)^{++}$. Considerem, en el quocient $(M \sqcup W_\sigma^d(S_u))/L$, el mínim ideal establement cofinit (que sabem determinar, gràcies al Lema 3.5.1). Per [70, Proposició 4.1.3 (a)], tenim que aquest ideal té la forma I_{sc}/L, on I_{sc} és un ideal d'ordre de $M \sqcup W_\sigma^d(S_u)$ que conté L. Aleshores I_{sc} és el mínim ideal establement cofinit i no nul de $M \sqcup W_\sigma^d(S_u)$. En efecte, sols cal comprovar que I_{sc} és establement cofinit, però aquest fet es dedueix de l'isomorfisme següent (vegeu també la Proposició 1.1.4 (*b*)):

$$(M \sqcup W_\sigma^d(S_u))/I_{sc} \cong ((M \sqcup W_\sigma^d(S_u))/L)/(I_{sc}/L).$$

Si denotem per $[f]$ les classes d'equivalència dels elements de $W_\sigma^d(S_u)$ mòdul L, i usant la descripció de l'ideal establement cofinit més petit d'un monoide qualsevol donada al Lema 3.5.1, tenim que $I_{sc}/L = \{[f] \in (M \sqcup W_\sigma^d(S_u))/L \mid [f] + n[d] \leq n[d] \text{ per algun } n \in \mathbb{N}\}$. Per tant, si denotem per $\Gamma_d = \{s \in \partial_e S_u \mid d(s) = \infty\}$, i usant el Lema 3.5.6, tenim que

$$I_{sc} = M \sqcup \{f \in W_\sigma^d(S_u) \mid (f+g)_{|\partial_e S_u \setminus \Gamma_d} = n \text{ per alguna } g \in W_\sigma^d(S_u) \text{ i algun } n \in \mathbb{N}\}.$$

Amb aquesta descripció general feta per monoides podem donar una expressió de quin serà, en alguns casos, el monoide corresponent al mínim ideal tancat no nul i establement cofinit per l'àlgebra de multiplicadors d'una C^*-àlgebra.

PROPOSICIÓ 3.5.7 *Sigui A una C^*-àlgebra simple, separable (sense unitat), amb rang real zero i* $\mathrm{sr}(A) = 1$. *Suposem que A no és elemental, que $V(A)$ és estrictament no perforat i que $\mathcal{M}(A)$ té rang real zero. Sigui $p \in A$ una projecció no zero. Suposem que A té exactament n quasitraces extremes infinites $\{\tau_1, \ldots, \tau_n\}$ a Q_p. Sigui $I_{sc}(A)$ el mínim ideal tancat no nul de $\mathcal{M}(A)$ establement cofinit. Aleshores existeixen ideals tancats $I_0(A)$ i $I_\infty(A)$ de $\mathcal{M}(A)$, que són generats per sengles projeccions, tals que $I_{sc}(A) = I_0(A) + I_\infty(A)$.*

DEMOSTRACIÓ: Sigui $u = [p] \in V(A)$, i sigui $d = \sup \phi_u(D(A))$. Notem que pel Teorema 3.3.17, A té exactament n quasitraces extremes infinites si, i només si, existeixen exactament n punts diferents $s_1, \dots, s_n \in \partial_e S_u$ tals que $d(s_i) = \infty$. Posem $\Gamma_d = \{s_1, \dots, s_n\}$.

Per a cada $1 \leq i \leq n$, construïm (d'acord amb les tècniques de la Proposició 3.2.19) una funció $f_i \in \mathrm{LAff}(S_u)^+$ de forma que $f_i(s_i) = 0$ i tal que $f_{i|\{s_i\}'} = 1$ (on $\{s_i\}'$ denota la cara complementària de $\{s_i\}$). Prenem $f' = \sum_{i=1}^{n} f_i$, i sigui $w_0 = f' - (n-2)$. Aleshores $w_0(s_i) = 1$ per a tot i, i $w_{0|\{s_1,\dots,s_n\}'} = 2$ (tenint en compte que $\{s_1, \dots, s_n\}' = \{s_1\}' \cap \dots \cap \{s_n\}'$). És clar que $w_0 \in W_\sigma^d(S_u)$. Sigui $I_0 = V(A) \sqcup \{f \in W_\sigma^d(S_u) \mid f + g = mw_0$ per alguna $g \in W_\sigma^d(S_u)$ i $m \in \mathbb{N}\}$, que és clarament un ideal d'ordre de $V(A) \sqcup W_\sigma^d(S_u)$, i sigui $I_0(A)$ l'ideal tancat de $\mathcal{M}(A)$ tal que $\varphi(V(I_0(A))) = I_0$, on φ és l'isomorfisme construït al Teorema 2.3.17.

Sigui k el nombre màxim d'elements de Γ_d tal que la cara complementària de la cara (tancada) que generen a S_u és tancada. Sense pèrdua de generalitat, podem suposar que $\{s_1, \dots, s_k\}'$ és tancada (entenent que si $k = 0$ no hi ha cap subconjunt no buit de Γ_d amb cara complementària tancada). Definim la funció w_∞^1 per $w_\infty^1(s_i) = \infty$ per $i = 1, \dots, k$, i $w^1_{\infty|\{s_1,\dots,s_k\}'} = 1$, que és una funció afí, semicontínua inferior, i tal que pertany a $W_\sigma^d(S_u)$. Sigui I_∞ l'ideal d'ordre de $V(A) \sqcup W_\sigma^d(S_u)$ generat per w_∞^1, i sigui $I_\infty(A)$ l'ideal tancat de $\mathcal{M}(A)$ tal que $\varphi(V(I_\infty(A))) = I_\infty$. Notem que si $k = 0$, aleshores $I_\infty(A) = L(A)$, i que si $k = n$, aleshores $I_0(A) \subseteq I_\infty(A)$.

Sigui I_{sc} el mínim ideal d'ordre no nul i establement cofinit de $V(A) \sqcup W_\sigma^d(S_u)$. Atès que $\mathcal{M}(A)$ té rang real zero, l'ideal tancat $I_{sc}(A)$ de $\mathcal{M}(A)$ tal que $\varphi(V(I_{sc}(A))) = I_{sc}$ és el mínim ideal tancat no nul i establement cofinit de $\mathcal{M}(A)$. Volem veure que $I_{sc} = I_0 + I_\infty$. Usarem a la resta de la prova la descripció de I_{sc} que hem donat prèviament, és a dir

$$I_{sc} = V(A) \sqcup \{f \in W_\sigma^d(S_u) \mid (f+g)_{|\partial_e S_u \setminus \Gamma_d} = n \text{ per alguna } g \in W_\sigma^d(S_u) \text{ i algun } n \in \mathbb{N}\}.$$

És fàcil comprovar que $I_0 + I_\infty \subseteq I_{sc}$. Recíprocament, sigui $x \in I_{sc}$. Podem assumir que $x \notin V(A)$, i per tant existeixen funcions $f, g \in W_\sigma^d(S_u)$ i $m \in \mathbb{N}$ tals que $x = f$ i tals que $(f+g)_{|\partial_e S_u \setminus \Gamma_d} = m$. Notem que aleshores

$$(f + g + w_\infty^1)_{|\partial_e S_u \setminus \{s_{k+1},\dots,s_n\}} = (m + w_\infty^1)_{|\partial_e S_u \setminus \{s_{k+1},\dots,s_n\}} = (m+1) w^1_{\infty|\partial_e S_u \setminus \{s_{k+1},\dots,s_n\}}.$$

Si $k = n$, llavors de la igualtat anterior i del Lema 3.5.6 concloem que $f + g + w_\infty^1 = (m+1)w_\infty^1$. Podem suposar, doncs, que $k < n$. Per hipòtesi, la cara $\{s_1, \dots, s_n\}'$ no és tancada, de manera que si denotem per $F_n = \overline{\{s_1, \dots, s_n\}'}$, aleshores existeix un element $x \in F_n \setminus \{s_1, \dots, s_n\}'$. Pel Lema 3.5.5, tenim que $F_n = \overline{C_n}$, on $C_n =$

$\operatorname{conv}(\partial_e S_u \setminus \{s_1, \ldots, s_n\})$. Per tant, existeix una successió (x_i) amb $x_i \in C_n$ per a tot i, tal que $x = \lim x_i$. Com que $w^1_\infty(x_i) = 1$, veiem que de fet $w^1_\infty(x) \leq 1$. D'altra banda, escrivim $x = \sum_{j=1}^{n} \alpha_j s_j + \beta w$, on $\beta, \alpha_j \in [0,1]$ satisfan $\sum_{j=1}^{n} \alpha_j + \beta = 1$, amb algun $\alpha_j \neq 0$, i $w \in \{s_1, \ldots, s_n\}'$. Com que per $1 \leq j \leq k$ tenim $w^1_\infty(s_j) = \infty$, necessàriament ha de passar que $\alpha_j = 0$ per $1 \leq j \leq k$, i podem assumir que $\alpha_{k+1} \neq 0$. Observem també que $(f+g)(x_i) = m$, i per tant $(f+g)(x) \leq m$. Concloem doncs que $(f+g)(s_{k+1}) < \infty$. Raonant de manera similar amb la cara $\{s_1, \ldots, s_k, s_{k+2}, \ldots, s_n\}'$, que tampoc és tancada per hipòtesi, veuríem que sense perdre generalitat, podem assumir també que $(f+g)(s_{k+2}) < \infty$. Argumentant d'aquesta manera un nombre finit de vegades concloem que $(f+g)(s_j)$ és finit per $k+1 \leq j \leq n$. Sigui $m' \in \mathbb{R}$ tal que $m' > \max\{m, (f+g)(s_j)$ per $k+1 \leq j \leq n\}$. Per la Proposició 3.2.19, existeix una funció $g' \in W^d_\sigma(S_u)$ tal que $g'_{|\partial_e S_u \setminus \{s_{k+1}, \ldots, s_n\}} = (g+m'-m)_{\partial_e S_u \setminus \{s_{k+1}, \ldots, s_n\}}$, mentre que $g'(s_j) = m' - f(s_j)$ per a tot $k+1 \leq j \leq n$ tal que $f(s_j) + g(s_j) > m$, i $g'(s_j) = g(s_j) + m' - m$ per a tot $k+1 \leq j \leq n$ tal que $f(s_j) + g(s_j) \leq m$. Llavors $(f+g')_{|\partial_e S_u \setminus \Gamma_d} = m'$, i $(f+g')(s_j) \leq m'$ per a tot $k+1 \leq j \leq n$. A més, és fàcil veure que $f + g' + w^1_\infty = m' + w^1_\infty$ sobre $\partial_e S_u \setminus \{s_{k+1}, \ldots, s_n\}$.

Construïm, per acabar la demostració, una funció $h \in W^d_\sigma(S_u)$ de la següent manera. Denotem per $a_j = (f+g')(s_j)$, per $k+1 \leq j \leq n$. Sigui $p \in \mathbb{N}$ tal que $m' - a_j < p$ per a tot j. Construïm, d'acord amb la Proposició 3.2.19, funcions afins i semicontínues inferiors h_j de manera que $h_{j|\{s_j\}'} = 2p$, i $h_j(s_j) = p$ si $1 \leq j \leq k$, mentre que $h_j(s_j) = p + (m' - a_j)$ si $k+1 \leq j \leq n$. Posem $h' = \sum_{j=1}^{n} h_j$ i definim $h = h' - 2p(n-1)$. Notem ara que $h(s_j) = p$ si $1 \leq j \leq k$, i que $h(s_j) = p + (m' - a_j)$ si $k+1 \leq j \leq n$, així com $h_{|\{s_1, \ldots, s_n\}'} = 2p$. Aleshores es comprova fàcilment, usant el Lema 3.5.6, que $f + g' + w^1_\infty + h = (m'+1)w^1_\infty + pw_0$, de manera que $f \in I_0 + I_\infty$, com volíem. □

En analogia a la secció anterior, ens ocuparem ara del cas en que l'espai $\partial_e Q_p$ és compacte de Hausdorff. Veurem que la topologia del conjunt de quasitraces extremes serà determinant per al càlcul del mínim ideal tancat establement cofinit (no nul).

PROPOSICIÓ 3.5.8 *Sigui A una C^*-àlgebra simple, separable (sense unitat), amb rang real zero i $\operatorname{sr}(A) = 1$. Suposem que A no és elemental, que $V(A)$ és estrictament no perforat i que $\mathcal{M}(A)$ té rang real zero. Sigui $p \in A$ una projecció no zero, i suposem que l'espai $\partial_e Q_p$ és compacte Hausdorff. Denotem per Q_∞ el conjunt de quasitraces extremes infinites, dotat amb la topologia induïda per $\partial_e Q_p$. Aleshores existeixen ideals tancats $I_b(A)$, $I_c(A)$ i $I_\infty(A)$ de $\mathcal{M}(A)$ tals que*

(*a*) *Si Q_∞ és obert, aleshores $I_{sc}(A) = I_\infty(A)$.*

(*b*) *Si Q_∞ és tancat, llavors $I_{sc}(A) = I_b(A) \cap I_c(A) + I_\infty(A)$.*

DEMOSTRACIÓ: Sigui $u = [p] \in V(A)^*$, i sigui $d = \sup \phi_u(D(A))$. Aleshores pel Teorema 3.3.17, tenim que $\partial_e S_u$ és un espai compacte Hausdorff i si denotem $\Gamma_d = \{s \in \partial_e S_u \mid d(s) = +\infty\}$, aleshores Γ_d és obert o tancat segons si ho és Q_∞. També, pel Teorema 2.3.17 i la Remarca 3.4.9, tenim un isomorfisme de monoides $\psi : V(\mathcal{M}(A)) \to V(A) \sqcup W_0^d(S_u)$, on d_0 és la restricció de d a $\partial_e S_u$. Per conveniència, escriurem d en comptes de d_0 en el que segueix. Notem també que en aquest context, l'ideal $I_{sc}(A)$ té com a ideal d'ordre associat $\psi(V(I_{sc}(A))) = V(A) \sqcup \{f \in W_0^d(S_u) \mid (f+g)_{\partial_e S_u \setminus \Gamma_d} = n$ per alguna $g \in W_0^d(S_u)$ i $n \in \mathbb{N}\}$, que anomenarem I_{sc}.

Sigui $I_b = V(A) \sqcup \{f \in W_0^d(S_u) \mid f$ és fitada$\}$, que és clarament un ideal d'ordre de $V(A) \sqcup W_0^d(S_u)$. Denotem per $F = \partial_e S_u \setminus \Gamma_d$. Posem també $I_c = V(A) \sqcup \{f \in W_0^d(S_u) \mid f_{|F}$ és contínua$\}$, que també és un ideal d'ordre. Siguin $I_b(A)$ i $I_c(A)$ els ideals tancats de $\mathcal{M}(A)$ tals que $\psi(V(I_b(A))) = I_b$ i $\psi(V(I_c(A))) = I_c$.

Denotem ara $U = \overset{\circ}{\Gamma}_d$, l'interior de Γ_d, i definim la funció $w_\infty^1 \in L(\partial_e S_u)^{++}$ per $(w_\infty^1)_{|U} = +\infty$ mentre que $(w_\infty^1)_{|\partial_e S_u \setminus U} = 1$, que és clarament semicontínua inferior i pertany a $W_0^d(S_u)$. Posem

$$I_\infty = V(A) \sqcup \{f \in W_0^d(S_u) \mid f + g = n w_\infty^1 \text{ per alguna } g \in W_0^d(S_u) \text{ i algun } n \in \mathbb{N}\},$$

i sigui $I_\infty(A)$ l'ideal tancat de $\mathcal{M}(A)$ tal que $\psi(V(I_\infty(A))) = I_\infty$. És clar que $w_\infty^1 \in I_{sc}$.

Per provar (*a*), hem de veure que si Γ_d és obert, aleshores $I_{sc} = I_\infty$. Suposem doncs que Γ_d és obert. En aquest cas $U = \Gamma_d$. Sigui $x \in I_{sc}$. Clarament, podem assumir que $x = f$, amb $f \notin V(A)$. Aleshores existeix una funció $g \in L(\partial_e S_u)^{++}$, i existeix un nombre natural n tals que $(f+g)_{|\partial_e S_u \setminus \Gamma_d} = n$. Llavors, és clar que $f + g + w_\infty^1 = n + w_\infty^1 = (n+1) w_\infty^1$, de manera que $f \in I_\infty$.

Suposem ara que Q_∞ és tancat i provem (*b*). Veurem que si I és un ideal establement cofinit no nul de $V(A) \sqcup W_0^d(S_u)$, aleshores $I_b \cap I_c \subseteq I$. En efecte, suposem que no, i aleshores existeix un element $x \in I_b \cap I_c$ tal que $x \notin I$. És clar que podem assumir que $x \notin V(A)$, i escrivim així $x = f \in W_0^d(S_u)$. Prenem $a \in \mathbb{R}^{++}$ tal que $f \ll a$, i definim la funció w_f^a sobre $\partial_e S_u$ com $w_{f|\Gamma_d}^a = f$ i $w_{f|\partial_e S_u \setminus \Gamma_d}^a = a$. Observem que si $\lambda \in \mathbb{R}$, aleshores $(w_f^a)^{-1}(-\infty, \lambda] = \partial_e S_u$ si $\lambda \geq a$, mentre que si $\lambda < a$, tenim $(w_f^a)^{-1}(-\infty, \lambda] = \Gamma_d \cap \{s \in \partial_e S_u \mid f(s) \leq \lambda\}$. En ambdós casos obtenim un tancat, i per tant $w_f^a \in L(\partial_e S_u)^{++}$. A més, notem que $w_f^a + d = a + d$, d'on tenim que de fet $w_f^a \in W_0^d(S_u)$.

Sigui ara $g' = w_f^a - f$. Tenim que $g'_{|\partial_e S_u \setminus \Gamma_d} = (a - f)_{|\partial_e S_u \setminus \Gamma_d}$, i $g'_{|\Gamma_d} = 0$. Atès que $f \in I_c$, tenim que $f_{|\partial_e S_u \setminus \Gamma_d}$ és contínua. Per tant, si $\lambda \in \mathbb{R}^+$, tenim $(g')^{-1}(-\infty, \lambda] =$

$\{s \in \partial_e S_u \setminus \Gamma_d \mid a \leq \lambda + f(s)\} \cup \Gamma_d$, que és un tancat, ja que $f_{|\partial_e S_u \setminus \Gamma_d}$ és contínua i Γ_d és tancat. Així $g' \in L(\partial_e S_u)^+$. Sigui ara $g = g' + 1 \in L(\partial_e S_u)^{++}$. Observem que $f + g = f + g' + 1 = w_f^a + 1$. Per tant, $f + g + d = a + 1 + d$, on $a + 1$ és una funció constant i per tant contínua, de manera que $a+1 \in L \subseteq I$. Denotem per $[\cdot]$ les classes d'equivalència mòdul I. La igualtat anterior diu, doncs, que $[f]+[g]+[d] = [d]$. Com que I és establement cofinit, concloem que $[f] + [g] = 0$, i atès que el quocient $(V(A) \sqcup W_0^d(S_u))/I$ és cònic, obtenim que $[f] = 0$, la qual cosa contradiu $f \notin I$.

Es dedueix, doncs, d'aquest fet que $I_b \cap I_c \subseteq I_{sc}$. És clar també que $I_\infty \subseteq I_{sc}$, i per tant $I_b \cap I_c + I_\infty \subseteq I_{sc}$. Recíprocament, sigui $f \in I_{sc}$. Aleshores és clar que $f_{|\partial_e S_u \setminus \Gamma_d}$ és una funció contínua i fitada. Tenint en compte que $\partial_e S_u \setminus U = \overline{\partial_e S_u \setminus \Gamma_d}$, i que f és una funció semicontínua inferior, deduïm que f és de fet fitada a $\partial_e S_u \setminus U$. Definim ara una nova funció f' per $f'_{|\partial_e S_u \setminus U} = f_{|\partial_e S_u \setminus U}$, i per $f'_{|U} = k$, on $k \gg f_{|\partial_e S_u \setminus U}$. És clar que $f' \in L(\partial_e S_u)^{++}$, i atès que $f' + d = f + d$, veiem que $f' \in I_b \cap I_c$. D'altra banda, $f + w_\infty^1 = f' + w_\infty^1$, de manera que $f \in I_b \cap I_c + I_\infty$. □

Estudiarem seguidament l'ideal $I_b(A)$, que anomenarem l'**ideal fitat** de $\mathcal{M}(A)$. Si l'àlgebra té una quantitat finita de quasitraces extremes infinites, o bé si l'espai de quasitraces extremes és compacte, podem dir en termes topològics quan aquest ideal és establement cofinit.

PROPOSICIÓ 3.5.9 *Sigui A una C^*-àlgebra simple, separable (sense unitat), amb rang real zero i* $\mathrm{sr}(A) = 1$. *Suposem que A no és elemental, que $V(A)$ és estrictament no perforat, i que $\mathcal{M}(A)$ té rang real zero. Sigui $p \in A$ una projecció no zero. Denotem per Q_∞ el conjunt de quasitraces extremes infinites. Si Q_∞ és finit, aleshores l'ideal $I_b(A)$ és establement cofinit si, i només si, per a cada subconjunt no buit $X \subseteq Q_\infty$, la cara complementària de* $\mathrm{conv}(X)$ *no és tancada.*

DEMOSTRACIÓ: Sigui $u = [p] \in V(A)$, i sigui $d = \sup \phi_u(D(A))$. El fet que Q_∞ és finit vol dir que el conjunt $\Gamma_d = \{s \in \partial_e S_u \mid d(s) = \infty\}$ és finit, i amb el mateix cardinal que Q_∞, gràcies al Teorema 3.3.17. Posem $\Gamma_d = \{s_1, \ldots, s_n\}$.

Suposem que $I_b(A)$ és establement cofinit. Aleshores l'ideal d'ordre

$$I_b = \varphi(V(I_b(A)))$$

de $V(A) \sqcup W_\sigma^d(S_u)$ és establement cofinit, on φ és l'isomorfisme de monoides establert al Teorema 2.3.17. Suposem que existeix un subconjunt no buit $X \subseteq \Gamma_d$ tal que $F = (\mathrm{conv}(X))'$ és tancada. Llavors, tenim que $\mathrm{Aff}(S_u) \cong \mathrm{Aff}(\mathrm{conv}(X)) \oplus \mathrm{Aff}(F)$ ([39, Corollary 11.27]). Podem definir doncs funcions $f_n \in \mathrm{Aff}(S_u)^{++}$ tals que $f_{n|\mathrm{conv}(X)} = n$ i tals que $f_{n|F} = 1$. Llavors, si $f = \sup_n f_n$, tenim que $f \in \mathrm{LAff}(S_u)^{++}$, que

$f_{|X} = \infty$ i que $f_{|F} = 1$, de forma que $f+d = 1+d$. Per tant $f \in W^d_\sigma(S_u)$ i al quocient $(V(A) \sqcup W^d_\sigma(S_u))/I_b$ tenim que $[f]+[d] = [d]$, amb $[f] \neq 0$, i això contradiu el fet que I_b és establement cofinit.

Recíprocament, suposem que per a cada subconjunt no buit $X \subsetneq \Gamma_d$, la cara complementària de $\mathrm{conv}(X)$ no és tancada. Suposem que existeixen funcions fitades $l_1, l_2 \in W^d_\sigma(S_u)$, un nombre $n \in \mathbb{N}$ i una funció $g \in W^d_\sigma(S_u)$ tals que $nd+l_1 = nd+g+l_2$. Aleshores g és fitada a $\partial_e S_u \setminus \Gamma_d$, per una certa cota M. Sigui $F = (\mathrm{conv}(\Gamma_d))'$. Com que F no és tancada, existeix $x \in \overline{F} \setminus F$. Pel Lema 3.5.5, existeix una successió (t_k) amb $t_k \in \mathrm{conv}(\partial_e S_u \setminus \Gamma_d)$ per a tot k, tal que convergeix a x. Com que g és afí, és clar que $g(t_k) \leq M$ per a tot k, de manera que $g(x) \leq M$, ja que g és semicontínua inferior. D'altra banda, tenint en compte que S_u és la suma directa convexa de $\mathrm{conv}(\Gamma_d)$ i de F, trobem nombres positius α_i per $i = 1, \ldots, n$, no tots nuls, un nombre $\beta \geq 0$ i un element $t \in F$, tals que $\sum_{i=1}^{n} \alpha_i + \beta = 1$ i tals que $x = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i s_i + \beta t$. Per tant, existeix $1 \leq i \leq n$ amb $g(s_i) < \infty$. Sense pèrdua de generalitat, tenim que $g(s_1) < \infty$. Amb un argument recurrent concloem que $g(s_2), \ldots, g(s_n) < \infty$ de manera que g és fitada, i per tant I_b és establement cofinit. □

PROPOSICIÓ 3.5.10 *Sigui A una C^*-àlgebra simple, separable (sense unitat), amb rang real zero i $\mathrm{sr}(A) = 1$. Suposem que A no és elemental, que $V(A)$ és estrictament no perforat, i que $\mathcal{M}(A)$ té rang real zero. Sigui $p \in A$ una projecció no zero. Suposem que l'espai $\partial_e Q_p$ de quasitraces extremes és compacte Hausdorff. Aleshores, les següents condicions són equivalents:*

(*a*) *$I_b(A)$ és establement cofinit;*

(*b*) *Q_∞ té interior buit;*

(*c*) *$I_b(A) \cap I_c(A)$ és establement cofinit.*

DEMOSTRACIÓ: Sigui $u = [p] \in V(A)$, i sigui $d = \sup \phi_u(D(A))$. Aleshores pel Teorema 3.3.17, tenim que $\partial_e S_u$ és un espai compacte Hausdorff i si denotem $\Gamma_d = \{s \in \partial_e S_u \mid d(s) = +\infty\}$, aleshores l'interior de Γ_d es correspon al de Q_∞. També, pel Teorema 2.3.17 i la Remarca 3.4.9, tenim un isomorfisme de monoides

$$\psi : V(\mathcal{M}(A)) \to V(A) \sqcup W^d_0(S_u),$$

on d_0 és la restricció de d a $\partial_e S_u$. Com a la Proposició 3.5.8, escriurem d en comptes de d_0 en el que segueix.

(*a*) $\Rightarrow$ (*b*). Suposem que $I_b(A)$ és establement cofinit. Aleshores l'ideal $I_b = \psi(V(I_b(A)))$ és establement cofinit. Hem de veure que Γ_d té interior buit. En cas contrari, existeix un obert no buit $U \subseteq \Gamma_d$. Podem definir, doncs, una funció $f \in L(\partial_e S_u)^{++}$ com $f_{|U} = \infty$ i tal que $f_{|\partial_e S_u \setminus U} = 1$. Clarament $f + d = 1 + d$, d'on veiem que $f \in W_0^d(S_u)$. A més, al quocient $(V(A) \sqcup W_0^d(S_u))/I_b$ tenim $[d] = [f] + [d]$, i amb $[f] \neq 0$. Això contradiu que I_b és establement cofinit.

$(b) \Rightarrow (c)$. Suposem que per $f \in W_0^d(S_u)$, tenim que $[d] = [d] + [f]$ al monoide $(V(A) \sqcup W_0^d(S_u))/(I_b \cap I_c)$. Hem de veure que $f \in I_b \cap I_c$. Existeixen funcions $l_1, l_2 \in I_b \cap I_c$ tals que $d + l_1 = d + f + l_2$. Obtenim doncs que $f \leq N$ a $\partial_e S_u \setminus \Gamma_d$, per una certa constant N, així com que $f_{|\partial_e S_u \setminus \Gamma_d}$ és contínua. Ara bé, com que f és semicontínua inferior, tenim que $f^{-1}(-\infty, N]$ és un tancat de $\partial_e S_u$, i pel que acabem de veure $\partial_e S_u \setminus \Gamma_d \subseteq f^{-1}(-\infty, N]$. Atès que Γ_d té interior buit, tenim que $\partial_e S_u \setminus \Gamma_d$ és dens a $\partial_e S_u$. Per tant, deduïm que $\partial_e S_u = f^{-1}(-\infty, N]$, i així $f \in I_b \cap I_c$. Per tant, $I_b(A) \cap I_c(A)$ és establement cofinit.

$(c) \Rightarrow (b)$. Suposem que $I_b \cap I_c$ és establement cofinit. Si Γ_d té interior no buit, construïm com a $(a) \Rightarrow (b)$ una funció $f \in L(\partial_e S_u)^{++}$ tal que $f_{|U} = \infty$ i tal que $f_{|\partial_e S_u \setminus U} = 1$, on $U \subseteq \Gamma_d$ és un obert no buit. Aleshores $f + d = 1 + d$, i per tant, a $(V(A) \sqcup W_0^d(S_u))/(I_b \cap I_c)$, tenim $[f] + [d] = [d]$, amb $[f] \neq 0$, que és una contradicció.

$(b) \Rightarrow (a)$. Es prova de la mateixa manera que $(b) \Rightarrow (c)$, amb alguna petita modificació. Omitim, doncs, els detalls. □

Altres aspectes estructurals interessants de l'ideal $I_b(A)$ es donen en estudiar el quocient $I_b(A)/L(A)$. Per al resultat que donarem, que pretén ésser un anàleg al Teorema 3.3.19 per C^*-àlgebres amb escala no fitada, ens caldrà assumir que l'ideal d'ordre $V(I_b(A))$ de $V(\mathcal{M}(A))$ tingui unitat d'ordre. Discutirem més endavant exemples on es dóna aquesta situació.

TEOREMA 3.5.11 *Sigui A una C^*-àlgebra simple, amb σ-unitat (sense unitat), amb rang real zero i* $\mathrm{sr}(A) = 1$. *Suposem que A no és elemental, que $V(A)$ és estrictament no perforat i que $\mathcal{M}(A)$ té rang real zero. Sigui $p \in I_b(A) \setminus L(A)$ una projecció, i denotem per $I_p(A) = \overline{\mathcal{M}(A)p\mathcal{M}(A)}$, l'ideal tancat de $\mathcal{M}(A)$ generat per p. Aleshores el conjunt $F_p = \{t \in St(V(I_p(A)), [p]) \mid t_{|V(A)} = 0\}$ és una cara tancada de $St(V(I_p(A)), [p])$, i existeix un isomorfisme $V(I_p(A)/L(A)) \to (\mathrm{Aff} F_p)^+$.*

DEMOSTRACIÓ: Denotem per $v = [p] \in V(\mathcal{M}(A))$. Atès que A és simple, tenim que $V(pAp)$ és isomorf a $V(A)$, a través de $[e] \mapsto [e]$. Observem també que la C^*-àlgebra hereditària pAp satisfà les mateixes hipòtesis que A. Com que $p \notin A$ (ja que $p \notin L(A)$), tenim que l'interval generador $D(pAp)$ és flexible (per exemple, a causa del Lema 2.3.5).

Sigui $u = [q] \in V(A)^*$, amb $q \in pAp$, i posem $d = \sup \phi_u(D(A))$. Aleshores existeix un isomorfisme de monoides $\varphi : V(\mathcal{M}(A)) \to V(A) \sqcup W_\sigma^d(S_u)$, pel Teorema 2.3.17. Posem $I_p = \varphi(V(I_p(A)))$, i notem que $w := \varphi(v) \in W_\sigma^d(S_u)$ és una funció fitada, unitat d'ordre per l'ideal d'ordre I_p. De fet, $w = \sup \phi_u(D(pAp))$, i per tant pAp és una C^*-àlgebra amb escala fitada, i no contínua ja que $p \in I_b(A) \setminus L(A)$.

Denotem per $F'_p = \{\tau \in QT(\mathcal{M}(pAp)) \mid \tau_{|pAp} = 0\}$. És clar que F'_p és una cara tancada de $QT(\mathcal{M}(pAp))$, i pel Teorema 3.3.19 tenim $V(\mathcal{M}(pAp)/L(pAp)) \cong \mathrm{Aff}(F'_p)^+$.

Considerem ara el morfisme de reticles exhaustiu $L_c(\mathcal{M}(A)) \to L_c(p\mathcal{M}(A)p)$, donat per $I \mapsto pIp$. Aquesta aplicació restringeix a un isomorfisme de reticles entre l'interval $[0, I_p(A)]$ dins $L_c(\mathcal{M}(A))$ i $L_c(p\mathcal{M}(A)p)$, de manera que $pL(A)p$ és el mínim ideal tancat de $p\mathcal{M}(A)p$ que conté pAp. Ara, tenint en compte que $\mathcal{M}(pAp) = p\mathcal{M}(A)p$, concloem que $pL(A)p = L(pAp)$.

Notem també que $\overline{L(A)pL(A)} = L(A)$. Tenim un isomorfisme

$$\psi : V(\overline{\mathcal{M}(A)p\mathcal{M}(A)}) = V(I_p(A)) \to V(p\mathcal{M}(A)p),$$

que porta $[p]$ a $[p]$, i restringeix a un isomorfisme

$$V(L(A)) = V(\overline{L(A)pL(A)}) \cong V(pL(A)p) = V(L(pAp)).$$

De fet, podem explicitar ψ de la següent forma: si $e \in M_\infty(I_p(A))$, aleshores $e \lesssim np$ per algun n, i per tant podem trobar projeccions $q_1, \dots, q_n \in M_\infty(p\mathcal{M}(A)p)$ tals que $e \sim q_1 \oplus \dots \oplus q_n$, de manera que $\psi([e]) = \sum_{i=1}^n [q_i]$.

Tenim doncs un homeomorfisme afí

$$\varsigma : St(V(p\mathcal{M}(A)p), [p]) \to St(V(I_p(A)), [p])$$

donat per $\varsigma(s)([e]) = s(\psi([e]))$. D'altra banda, el Teorema de Blackadar-Handelman ([15, Theorem III.1.3]) ens dóna un homeomorfisme afí

$$\zeta : QT(p\mathcal{M}(A)p) \to St(V(p\mathcal{M}(A)p), [p]),$$

a través de $\zeta(\tau)([e]) = \tau(e)$. Per tant, la composició $\varsigma \circ \zeta$ ens dóna un homeomorfisme afí entre $QT(p\mathcal{M}(A)p)$ i $St(V(I_p(A)), [p])$. Observem que $(\varsigma \circ \zeta)(F'_p) = F_p$. Per tant, usant que $\mathcal{M}(A)$ té rang real zero, tenim:

$$V(I_p(A)/L(A)) \cong V(I_p(A))/V(L(A)) \cong V(\mathcal{M}(pAp))/V(L(pAp))$$

$$\cong V(\mathcal{M}(pAp)/L(pAp)) \cong \mathrm{Aff}(F'_p)^+ \cong \mathrm{Aff}(F_p)^+,$$

com volíem. $\square$

COROL·LARI 3.5.12 *(cf. Teorema 3.3.19, [42, Theorem 6.1]) Sigui A una C^*-àlgebra simple, amb σ-unitat (sense unitat), rang real zero i $\mathrm{sr}(A) = 1$. Suposem que A no és elemental, que $V(A)$ és estrictament no perforat i que $\mathcal{M}(A)$ té rang real zero. Suposem també que $L(A) \subsetneqq I_b(A)$, i que el monoide $V(I_b(A))$ té una unitat d'ordre u_b. Sigui $S_b = St(V(I_b(A)), u_b)$. Aleshores el conjunt $F' = \{t \in S_b \mid t_{|V(A)} = 0\}$ és una cara tancada de S_b, i existeix un isomorfisme $V(I_b(A)/L(A)) \cong (\mathrm{Aff} F')^+$.*

DEMOSTRACIÓ: Sigui $p \in M_n(I_b(A))$ una projecció tal que $u_b = [p]$. Per comoditat, suposem que $n = 1$. Aleshores tenim $I_b(A) = \overline{\mathcal{M}(A)p\mathcal{M}(A)}$, de manera que podem raonar com al Teorema anterior. □

Dedicarem la resta d'aquesta secció a donar alguns exemples il·lustratius relacionats amb les hipòtesis del Corol·lari 3.5.12 i amb l'estructura d'ideals del monoide $V(I_b(A)/L(A))$. En resposta a una pregunta de K.R. Goodearl, veurem que hi ha exemples on $V(I_b(A))$ no té unitat d'ordre, de manera que la hipòtesi que hem imposat no és supèrflua. Tanmateix, també hi ha casos on $V(I_b(A))$ sí té unitat d'ordre, de manera que la hipòtesi imposada no és buida. Remarquem per començar una extensió a espais compactes d'un resultat ben conegut per funcions reals de variable real (vegeu [81, Exercise 10.Z]).

DEFINICIÓ 3.5.13 *[69] Sigui X un espai topològic. Un subconjunt F de X es diu* **rar** *si l'interior de la clausura de F és buit. Diem que un subconjunt de X és de* **primera categoria** *si es pot escriure com a unió numerable de subconjunts rars. Si un subconjunt de X no és de primera categoria, aleshores diem que és de* **segona categoria**. *L'espai X és un* **espai de Baire** *si tot obert no buit de X és de segona categoria (equivalentment, el complement de qualsevol subconjunt de primera categoria és dens).*

TEOREMA 3.5.14 *[69, Theorem 9.1] Sigui X un espai mètric complet. Aleshores X és un espai de Baire.* □

REMARCA 3.5.15 *Sigui X un espai mètric complet. Sigui $f \in L(X)^{++}$ i suposem que f és fitada. Aleshores el conjunt de punts de discontinuïtat de f és de primera categoria. En particular, el conjunt de punts de continuïtat de f és dens.*

DEMOSTRACIÓ: Si $t \in X$, denotem per $B_n(t)$ la bola tancada amb centre t i radi $1/n$. Definim $w_n(t) = \sup f_{|B_n(t)} - \inf f_{|B_n(t)}$. Aleshores $w_n(t)$ és una successió decreixent positiva i fitada que defineix un límit $w(t)$, anomenat l'oscil·lació de f al punt t. És fàcil veure que f és contínua al punt t si, i només si, $w(t) = 0$. Denotem per D_f el conjunt de discontinuïtats de f. Aleshores és clar del que acabem de dir que

$D_f = \cup_{n\in\mathbb{N}} A_n$, on $A_n = \{x \in X \mid w(x) \geq 1/n\}$. Per demostrar l'enunciat, és suficient provar que cada conjunt A_n té interior buit. Fixem $n \in \mathbb{N}$, i suposem que existeix $\eta > 0$ i un punt $t \in X$ tals que $B_\eta(t) \subseteq A_n$. Sigui $c \in B_\eta(t)$ tal que $f(c) > \sup f_{|B_\eta(t)} - 1/2n$. Com que f és semicontínua inferior, existeix un obert U tal que $c \in U \subset B_\eta(t)$ i tal que $f_{|U} \gg \sup f_{|B_\eta(t)} - 1/2n$. D'aquest fet concloem fàcilment que $w(c) < 1/2n$, la qual cosa contradiu que $c \in A_n$.

Per tant el conjunt D_f és de primera categoria, i com que X és un espai de Baire, veiem que $X \setminus D_f$ és un conjunt dens. □

EXEMPLE 3.5.16 *Existeix una C^*-àlgebra AF simple, separable (sense unitat), tal que el monoide $V(I_b(A))$ no té unitat d'ordre.*

DEMOSTRACIÓ: Argumentem com a l'exemple 3.2.9. Sigui $X = [-1, 1]$, un espai compacte Hausdorff. Sigui $C(X, \mathbb{R})$ l'anell de funcions contínues amb valors reals sobre X, que és separable, atès que X és metritzable. Sigui G un subgrup numerable i dens de $C(X, \mathbb{R})$ que conté la funció constant 1, i equipem G amb l'ordre estricte; així $G^+ = \{f \in G \mid f \gg 0\} \cup \{0\}$. Com a l'exemple 3.2.9, G és un grup d'interpolació.

Per tant $M = G^+$ és un monoide de refinament, que també és simple, cònic, cancel·latiu, no perforat i no atòmic. Fixem $u = 1$ com unitat d'ordre, i posem $S_1 = St(M, 1) = St(G, 1)$. A causa de la densitat de G, l'aplicació restricció $St(C(X, \mathbb{R}), 1) \to St(G, 1)$ és un homeomorfisme afí. Com a 3.2.9, tenim que l'espai d'estats $St(C(X, \mathbb{R}))$ és igual a $M_1^+(X)$, el conjunt de totes les mesures de probabilitat sobre X i per tant $\partial_e S_1$ és afinament homeomorf a $\partial_e M_1^+(X)$. Per [39, Proposition 5.24], aquest darrer és homeomorf a X. Sigui $d_0 \in L(X)^{++}$, definida a través de $d_0(x) = 1/x$ per $x \in (0, 1]$ i $d_0(x) = \infty$, si $x \in [-1, 0]$. Sigui $d \in L(\partial_e S_1)^{++}$, definida composant d_0 amb l'homeomorfisme entre $\partial_e S_1$ i X. Usant [42, Lemma 7.2], podem estendre d a una funció afí semicontínua inferior definida sobre S_1, i que és també estrictament positiva; denotarem aquesta funció novament per d. Sigui $D = \{f \in M \mid f \ll d\}$. Llavors D és un interval flexible i numerablement generat, i $\sup \phi_1(D) = d$.

Pel Teorema 2.3.18, existeix una àlgebra AF complexa, simple, separable (sense unitat), tal que $(K(A), D(A))$ és isomorf a (G, D). En particular $V(A) \cong M$. Sigui $u \in D(A)$ la unitat d'ordre que correspon a $1 \in D$. L'argument anterior ens mostra que A no té escala finita. Pel Teorema 2.3.17 i la Remarca 3.4.9, veiem que $V(\mathcal{M}(A)) \cong V(A) \sqcup W_0^d(S_u)$. A través d'aquest isomorfisme de monoides, tenim que $V(I_b(A)) \cong I_b$, on $I_b = V(A) \sqcup \{f \in W_0^d(S_u) \mid f_{|\partial_e S_u} \text{ és fitada}\}$. Suposem que I_b té una unitat d'ordre $w_b \in W_0^d(S_u)$. Aleshores $w_{b|[-1,0]}$ és una funció semicontínua inferior, i per la Remarca 3.5.15 existeix un punt $c \in (-1, 0)$ on w_b és contínua. Sigui

$f \in L(X)^{++}$ definida com $f_{|X\setminus\{c\}} = 2$ i tal que $f(c) = 1$. Aleshores, si $n \in \mathbb{N}$, tenim que $(nd - f)_{|[0,1]} = nd - 2$ i $(nd - f)_{|[-1,0)} = \infty$. Per tant, si $n \in \mathbb{N}$ és prou gran tenim que $nd - f \in L(X)^{++}$, de manera que $f \in W_0^d(S_u)$. Per construcció, la funció f és fitada i no és contínua al punt c. D'altra banda, existeix $k \in \mathbb{N}$ i existeix $h \in W_0^d(S_u)$ tals que $f + h = kw_b$, i atès que w_b és contínua al punt c, arribem a contradicció ja que f també ho hauria de ser. Per tant I_b no té unitat d'ordre. □

De l'argumentació usada a l'exemple anterior deduïm que si $V(I_b(A))$ té unitat d'ordre, aleshores el conjunt Q_∞ no pot tenir interior, almenys en el cas que $\partial_e S_u$ és un espai compacte metritzable. Si afegim altres hipòtesis de continuïtat, que d'altra banda són perfectament raonables, a l'escala de A, obtenim altres tipus d'exemples on $V(I_b(A))$ sí té unitat d'ordre.

LEMA 3.5.17 *Sigui A una C^*-àlgebra simple, separable (sense unitat), amb rang real zero i* $\mathrm{sr}(A) = 1$. *Suposem que A no és elemental i que $V(A)$ és estrictament no perforat. Sigui $p \in A$ una projecció no zero. Denotem per Q_∞ el subconjunt de $\partial_e Q_p$ format per les quasitraces infinites. Suposem que $\partial_e Q_p$ és un espai compacte i que Q_∞ és finit. Si, a més, la restricció de l'escala de A (definida sobre $\partial_e Q_p$) als punts on és finita és una funció contínua, aleshores el monoide $V(I_b(A))$ té unitat d'ordre.*

DEMOSTRACIÓ: Sigui $u = [p] \in V(A)$, i sigui $d = \sup \phi_u(D(A))$. Pel Teorema 2.3.17 i la Remarca 3.4.9, tenim un isomorfisme de monoides $\psi : V(\mathcal{M}(A)) \to V(A) \sqcup W_0^d(S_u)$, on d_0 és la restricció de d a $\partial_e S_u$. Com abans, escriurem d en comptes de d_0 en el que segueix. També, el conjunt $\Gamma_d = \{s \in \partial_e S_u \mid d(s) = +\infty\}$ es correspon, a través de l'homeomorfisme del Teorema 3.3.17, a Q_∞. Posem $\Gamma_d = \{s_1, \dots, s_n\}$. Observem que per hipòtesi l'escala d és contínua a $\partial_e S_u \setminus \Gamma_d$.

Sigui $I_b = V(A) \sqcup \{f \in W_0^d(S_u) \mid f \text{ és fitada}\}$, i recordem que l'ideal $I_b(A)$ es defineix de manera que $\psi(V(I_b(A))) = I_b$. Definim la funció w_b per $w_{b|\partial_e S_u \setminus \Gamma_d} = 2$ i per $w_b(s_i) = 1$ per a tot i. És fàcil comprovar que w_b és una funció semicontínua inferior, i clarament $md - w_b = md - 2$, de forma que si $m \in \mathbb{N}$ és prou gran tenim $md - w_b \in L(\partial_e S_u)^{++}$. Així $w_b \in W_0^d(S_u)$. Afirmem que w_b és una unitat d'ordre per I_b. En efecte, és obvi que $w_b \in I_b$. Sigui ara $f \in I_b$. Triem $k \in \mathbb{N}$ tal que $f \ll k$. Definim una funció g tal que $g_{|\partial_e S_u \setminus \Gamma_d} = (2k - f)_{|\partial_e S_u \setminus \Gamma_d}$, i tal que $g(s_i) = k - f(s_i)$. Si veiem que g és semicontínua inferior, llavors $f + g = kw_b$ i l'afirmació quedarà provada. Suposem que tenim una successió (x_m) a $\partial_e S_u$ que convergeix a $x \in \partial_e S_u$. Aleshores, si $x \notin \Gamma_d$, podem assumir que cap terme de la successió pertany a Γ_d, de manera que $g(x_m)$ convergeix a $g(x)$ (ja que $f_{|\partial_e S_u \setminus \Gamma_d}$ és contínua). Suposem que $x = s_i$ per algun i. Aleshores, podem assumir que $x_m \notin \Gamma_d$ per a tot m, i tenim $\liminf_{m\to\infty} g(x_m) = 2k - \limsup_{m\to\infty} f(x_m) \geq k \geq k - f(s_i) = g(s_i)$, per les hipòtesis que hem imposat. Per tant, g és semicontínua inferior, com volíem. □

La descripció donada al Corol·lari 3.5.12 del quocient $I_b(A)/L(A)$ mostra novament l'existència d'una estructura especialment rica d'ideals entre $L(A)$ i $I_b(A)$. Aquest és també el cas quan $I_b(A) = \mathcal{M}(A)$ (és a dir, per C^*-àlgebres amb escala fitada), tal com va ser provat a [42, Corollary 16.7], on es construeixen exemples amb una quantitat no numerable d'ideals maximals establement cofinits. Si l'escala no és fitada, provarem seguidament que un model semblant es pot adaptar al quocient $I_b(A)/L(A)$. En el següent exemple el monoide $V(I_b(A))$ té unitat d'ordre, i per tant, el resultat es pot derivar del Teorema 3.5.11, juntament amb resultats de [42]. Els càlculs que donarem no necessiten, però, el coneixement d'aquesta unitat d'ordre i en conseqüència donen una descripció dels ideals més clara. Usarem un fet conegut sobre la compactificació de Stone-Čech d'un espai topològic X localment compacte, i que denotem per βX. Si $f \in C_b(X, \mathbb{R})$, aleshores f admet una extensió $f^\beta \in C(\beta X, \mathbb{R})$, per [36, Theorem 6.5]. Aquesta extensió és única i de fet defineix un isomorfisme d'anells entre $C_b(X, \mathbb{R})$ i $C(\beta X, \mathbb{R})$, per [36, 6.6 (b)].

EXEMPLE 3.5.18 *Existeix una AF àlgebra A simple, separable (sense unitat), tal que la seva àlgebra de multiplicadors conté una quantitat no numerable d'ideals tancats maximals entre $L(A)$ i l'ideal fitat $I_b(A)$, i una quantitat no numerable d'ideals tancats entre $I_b(A)$ i $\mathcal{M}(A)$ tals que formen una cadena respecte la inclusió. A més, en aquest cas $I_b(A) = I_{sc}(A)$.*

DEMOSTRACIÓ: El mètode que usarem està basat parcialment en el de [42, Example 7.3, Corollary 7.4]. Seguim la notació dels exemples 3.2.9 i 3.5.16. Considerem en aquest cas l'espai $X = [0, 1]$ i un subgrup G de $C(X, \mathbb{R})$ numerable i dens que conté la funció 1, el qual equipem amb l'ordre estricte. Prenem $M = G^+$. Aleshores M és un monoide simple, cònic, cancel·latiu, que satisfà la propietat de refinament, no perforat i no atòmic. Fixem $u = 1$ com a unitat d'ordre, i posem $S_1 = St(M, 1)$. Aleshores $\partial_e S_1$ és homeomorf a X. Prenem la funció semicontínua inferior $d : X \to \mathbb{R}^{++} \cup \{+\infty\}$ definida per $d(x) = 1/x$ per a tot $x \in X$. Com que $\partial_e S_1$ és compacte, podem estendre d a una funció afí i semicontínua inferior, definida sobre S_1 (per [42, Lemma 7.2]), i que anomenarem d novament. Posem $D = \{f \in M \mid f \ll d\}$. Aleshores D és no nul i flexible, i també $\sup \phi_1(D) = d$. Pel Teorema 2.3.18, existeix una AF àlgebra A que és simple, separable (sense unitat), i tal que $(K_0(A), D(A)) \cong (G, D)$. Per tant $V(A) = K_0(A)^+ \cong M$ i així, pel Teorema 2.3.17 existeix un isomorfisme de monoides

$$\varphi : V(\mathcal{M}(A)) \to V(A) \sqcup W_\sigma^d(S_1),$$

i com que $\partial_e S_1$ és compacte, podem identificar $W_\sigma^d(S_1)$ amb

$$W_0^d(S_1) = \{f \in L[0,1]^{++} \mid f + g = nd \text{ per alguna } g \in L[0,1]^{++} \text{ i algun } n \in \mathbb{N}\},$$

on ara d denota la restricció de d a $[0,1]$. Amb aquesta notació, tenim que

$$\varphi(V(I_{fin}(A))) = I_{fin} = M \sqcup \{f \in W_0^d(S_1) \mid f(0) < \infty\},$$

així com $\varphi(V(I_b(A))) = I_b = M \sqcup \{f \in W_0^d(S_1) \mid f \text{ és fitada}\}$ i finalment

$$\varphi(V(L(A))) = L = M \sqcup C[0,1]^{++}.$$

En primer lloc, observem que $L \subsetneq I_b \subsetneq I_{fin} \subsetneq M \sqcup W_0^d(S_1)$. En efecte, sigui $f' \in C[0,1]^{++}$ una funció contínua qualsevol tal que $f' \ll d$. Posem $f(x) = f'(x)$ si $x \neq 0$ i definim $f(0) = \varepsilon < f'(0)$. Llavors la funció $g = d - f$ és semicontínua inferior, estrictament positiva, i tenim $f + g = d$. Per tant $f \in W_0^d(S_1)$ i de fet $f \in I_b \setminus L$.

Prenem ara $d'(x) = d(x)$ si $x \neq 0$ i definim $d(0) = 1$. Llavors $d' \in L[0,1]^{++}$, satisfà $d + d' = 2d$ i per tant $d' \in I_{fin} \setminus I_b$.

En segon lloc, descrivim el quocient I_b/L. Escrivim $I_b = M \sqcup E_b$, on $E_b = \{f \in W_0^d(S_1) \mid f \text{ és fitada}\}$. Denotem per $\iota : \{0\} \sqcup E_b \to I_b$ la inclusió natural, i notem que $\iota(\{0\} \sqcup C[0,1]^{++}) \subseteq L$. Per tant, podem definir un morfisme de monoides

$$\bar{\iota} : (\{0\} \sqcup E_b)/(\{0\} \sqcup C[0,1]^{++}) \to I_b/L,$$

en la manera natural. És fàcil veure que $\bar{\iota}$ és de fet un isomorfisme.

Denotem per $B = C_b((0,1], \mathbb{R})$ l'espai vectorial ordenat de totes les funcions fitades, contínues, i a valors reals definides a $(0,1]$. Posem $C = \{f \in B \mid \lim\limits_{t \to 0} f(t) = 0\}$, un subgrup convex de B. Definim:

$$\varsigma : (\{0\} \sqcup E_b)/(\{0\} \sqcup C[0,1]^{++}) \to B/C$$

per $\varsigma(0) = 0$ i $\varsigma([f]) = [f_{|(0,1]} - f(0)]$. Aleshores, ς és ben definida i és un morfisme de monoides. És fàcil veure que $\varsigma(x) = 0$ si, i només si $x = 0$. Suposem que per funcions $f, g \in E_b$, existeixen funcions $h_1, h_2 \in C$ tals que $f_{|(0,1]} - f(0) + h_1 = g_{|(0,1]} - g(0) + h_2$. Aleshores, atès que $(f - f(0) - g + g(0))_{|(0,1]} = h_2 - h_1$ i que $\lim\limits_{t \to 0}(h_2 - h_1)(t) = 0$, obtenim que $f - g$ és de fet contínua a $[0,1]$, de manera que existeixen funcions $l_1, l_2 \in C[0,1]^{++}$ tals que $f - g = l_2 - l_1$. Per tant $[f] = [g]$ al quocient $(\{0\} \sqcup E_b)/(\{0\} \sqcup C[0,1]^{++})$. Això prova que ς és injectiu.

Sigui $f \in E_b$. Afirmem que $f_{|(0,1]} - f(0) \in B^+ + C$. Definim una funció g semicontínua superior sobre $[0,1]$ per $g(0) = f(0)$ i per $g(x) = 0$ si $x \neq 0$. Aleshores

$g \leq f$, d'on pel Teorema del Sandwich (vegeu, per exemple, [34, 1.7.15]) existeix una funció $h \in C([0,1],\mathbb{R})$ tal que $g \leq h \leq f$. Observem que $f(0) = h(0)$. Ara bé, si prenem $k := h_{|(0,1]} - h(0)$, tenim que $k \in C$ i que $(f_{|(0,1]} - f(0)) - k = f_{|(0,1]} - h_{|(0,1]} \geq 0$, de manera que $(f_{|(0,1]} - f(0)) - k \in B^+$, provant l'afirmació. Per tant

$$\varsigma((\{0\} \sqcup E_b)/(\{0\} \sqcup C[0,1]^{++})) \subseteq (B^+ + C)/C.$$

Per veure que de fet tenim igualtat, prenem $h \in B^+$. Llavors existeix $f \in L[0,1]^{++}$ tal que $f_{|(0,1]} = h+1$ i tal que $f(0) = 1$. Atès que $h \leq m$ per algun $m \in \mathbb{N}$ i que $d \geq 1$, existeix un nombre $n \in \mathbb{N}$ tal que $f \ll nd$. Prenem $g(x) = (nd - f)(x)$ si $x \neq 0$, i posem $g(0) = \infty$. Llavors $g \in L[0,1]^{++}$ i tenim $f + g = nd$. Per tant $f \in W_0^d(S_1)$, aleshores és clar que $f \in E_b$ i de fet $\varsigma([f]) = [f_{|(0,1]} - 1] = [h]$.

Per tant hem provat que els monoides I_b/L i $(B^+ + C)/C = (B/C)^+$ són isomorfs. Per les observacions anteriors a aquest exemple, tenim que B és isomorf a $C(\beta(0,1],\mathbb{R})$. Per a qualsevol $x \in \beta(0,1]$, definim $I_x = \{f \in B \mid f^\beta(x) = 0\}$, on recordem que f^β denota l'única extensió contínua de f a $\beta(0,1]$. Aleshores, per [36, Theorem 7.2], els subconjunts $(I_x)_{x\in\beta(0,1]}$ són ideals maximals diferents de B. A més, per a cada $x \in \beta(0,1] \setminus (0,1]$, resulta que $C \subseteq I_x$. Notem ara que $\beta(0,1] \setminus (0,1]$ és no numerable. En efecte, atès que $(0,1] \cong \mathbb{R}^+ \cong \mathbb{R}^-$, tenim que

$$\beta(0,1] \setminus (0,1] \cong \beta\mathbb{R}^+ \setminus \mathbb{R}^+ \cong \beta\mathbb{R}^- \setminus \mathbb{R}^-,$$

i per [36, 6.10],

$$\beta\mathbb{R} \setminus \mathbb{R} = (\beta\mathbb{R}^+ \setminus \mathbb{R}^+) \cup (\beta\mathbb{R}^- \setminus \mathbb{R}^-).$$

Finalment, a causa de [89, 4.45] tenim que $\beta\mathbb{R} \setminus \mathbb{R}$ és no numerable.

Per tant, el grup B/C té una quantitat no numerable d'ideals maximals (diferents), que són I_x/C, amb $x \in \beta(0,1] \setminus (0,1]$, i en conseqüència $(I_x/C) \cap (B/C)^+$ són ideals maximals diferents del monoide $(B/C)^+$. Per l'isomorfisme donat anteriorment, es dedueix la primera conclusió.

Que $M \sqcup W_0^d(S_1)$ conté una família no numerable d'ideals que contenen pròpiament I_b i que formen una cadena respecte la inclusió es dedueix del Teorema 3.4.20.

Per la Proposició 3.5.8, concloem per acabar que $I_b(A) = I_{sc}(A)$. □

Capítol 4

Riquesa d'extrems i rang estable

Les C^*-àlgebres amb riquesa d'extrems van ser introduïdes a [21], com un anàleg infinit de les C^*-àlgebres amb rang estable 1, i amb l'objectiu d'estendre la teoria ja existent per aquestes àlgebres. En aquest capítol considerarem el problema d'esbrinar si l'àlgebra de multiplicadors o l'àlgebra corona d'una C^*-àlgebra A satisfà alguna condició de finitud. Més precisament, en calcularem el rang estable i establirem quan tenen riquesa d'extrems.

Les tècniques emprades són les dels capítols anteriors, excepte per l'anàlisi de la riquesa d'extrems, on ens caldrà en alguns casos estudiar l'aplicació índex. En el sentit clàssic, si $\mathcal{H}$ és un espai de Hilbert separable de dimensió infinita, l'índex mesura la diferència de "mida" entre el nucli i el conucli d'un operador $T \in \mathbb{B}(\mathcal{H})$. Més precisament, es defineix:

$$\mathrm{Index}(T) := \dim(\mathrm{Ker}(T)) - \dim(\mathrm{Ker}(T^*)),$$

que té sentit si $\mathrm{Ker}(T)$ i $\mathrm{Ker}(T^*)$ tenen dimensió finita. Un operador $T \in \mathbb{B}(\mathcal{H})$ es diu *Fredholm* si, a més, $T(\mathcal{H})$ és tancat (equivalentment, pel Teorema d'Atkinson, si la imatge de T a $\mathbb{B}(\mathcal{H})/\mathbb{K}(\mathcal{H})$ és invertible). Si denotem per $\mathcal{F}$ el conjunt dels operadors Fredholm, aleshores $\mathrm{Index}_{|\mathcal{F}} : \mathcal{F} \to \mathbb{Z}$ és un morfisme exhaustiu i localment constant. Nosaltres utilitzarem una extensió a Teoria K d'aquesta aplicació.

Aquest capítol està dividit en dues seccions. A la primera combinem les tècniques desenvolupades al segon capítol amb els resultats de [7], per a calcular el rang estable de certes C^*-àlgebres de multiplicadors, un càlcul que novament depèn de la informació que proporciona l'escala, essent els possibles valors 2 o ∞, sempre que l'àlgebra "base" no tingui unitat. (Una hipòtesi necessària aquí, encara que possiblement supèrflua, és que $RR(\mathcal{M}(A)) = 0$.)

En la segona estudiem si les C^*-àlgebres de multiplicadors i àlgebres corona tenen riquesa d'extrems, per C^*-àlgebres dins la classe que hem vingut considerant al llarg dels capítols anteriors. (Per àlgebres AF i les seves estabilitzacions, aquest problema ja ha estat considerat parcialment a [55].)Això es pot dur a terme a través de l'anàlisi de la topologia de les quasitraces extremes infinites de la C^*-àlgebra, resultant en la majoria de casos que ni $\mathcal{M}(A)$ ni $\mathcal{M}(A)/A$ tenen riquesa d'extrems. Més precisament, si A és una C^*-àlgebra simple, separable (sense unitat), amb rang real zero, $\mathrm{sr}(A) = 1$ i amb $V(A)$ estrictament no perforat, tenim:

(*a*) Si A és elemental, aleshores $\mathcal{M}(A)/A$ no té riquesa d'extrems.

(*b*) Si A no és elemental, té escala finita i $\mathcal{M}(A)$ té rang real zero, aleshores $\mathcal{M}(A)/A$ té riquesa d'extrems.

(*c*) Si A no és elemental i té almenys dues quasitraces extremes infinites, aleshores $\mathcal{M}(A)/A$ no té riquesa d'extrems.

(*d*) Si A no és elemental, té exactament una quasitraça extrema infinita τ i el rang real de $\mathcal{M}(A)$ és zero, llavors $\mathcal{M}(A)/A$ té riquesa d'extrems si, i només si, la cara complementària de $\{\tau\}$ (dins l'espai de quasitraces) és tancada.

(*e*) Si $RR(\mathcal{M}(A)) = 0$, aleshores $\mathcal{M}(A)$ no té en cap cas riquesa d'extrems.

4.1 Separativitat i rang estable

Rieffel va provar a [79, Proposition 6.5] que si B és un C^*-àlgebra amb unitat que conté dues isometries amb rangs ortogonals, llavors $\mathrm{sr}(B) = \infty$. Aquest és el cas, per exemple, per $\mathbb{B}(\mathcal{H})$, on $\mathcal{H}$ és un espai de Hilbert separable de dimensió infinita. Sembla que aquest fet hauria de fer desaparèixer qualsevol condició de finitud sobre el rang estable de l'àlgebra de multiplicadors $\mathcal{M}(A)$ d'una C^*-àlgebra simple A. En el mateix article, Rieffel pregunta el següent:

QÜESTIÓ: 4.1.1 *([79, Question 4.16]) Es poden imposar algunes condicions de finitud sobre $\mathcal{M}(A)$ (o sobre la mateixa A) per assegurar que* $\mathrm{sr}(\mathcal{M}(A)) = \mathrm{sr}(A)$*?*

En aquesta secció proporcionarem una forma directa per calcular el rang estable dels anells de multiplicadors $\mathcal{M}(A)$ en termes de l'escala de A. Assumirem encara que A és una C^*-àlgebra simple, no elemental, separable, amb rang real zero, rang estable 1 i no perforació estricta en el monoide $V(A)$; també suposarem que el rang real de $\mathcal{M}(A)$ és zero. Obtindrem llavors que els únics valors possibles per $\mathrm{sr}(\mathcal{M}(A))$

són 2 o ∞. Fins i tot quan $\mathcal{M}(A)$ és establement finita, aquests valors no coincideixen amb $\mathrm{sr}(A)$. Aquest fet dóna una resposta negativa parcial a l'anterior pregunta.

DEFINICIÓ 4.1.2 *Sigui M un monoide abelià. Diem que M és* **separatiu** *si la igualtat $a+a=a+b=b+b$ implica $a=b$, per a $a,b \in M$ qualssevol. Una C^*-àlgebra A és* **separativa** *si el monoide associat $V(A)$ és separatiu.*

Com es veu a [7], la separativitat és la clau per atacar una bona part de problemes relacionats amb la cancel·lació de mòduls projectius finitament generats sobre anells regulars i C^*-àlgebres amb rang real zero. La importància d'aquest concepte en la nostra situació actual es recull en el següent Lema.

LEMA 4.1.3 *Sigui A una C^*-àlgebra simple, amb σ-unitat (sense unitat), amb rang real zero, $\mathrm{sr}(A)=1$, i tal que $V(A)$ és estrictament no perforat. Llavors $\mathcal{M}(A)$ és separativa.*

DEMOSTRACIÓ: Només cal que provem que el monoide $V(\mathcal{M}(A))$ és separatiu. Si $A \cong K(\mathcal{H})$, per algun espai de Hilbert separable i de dimensió infinita $\mathcal{H}$, llavors $\mathcal{M}(A) \cong B(\mathcal{H})$. Com que $V(B(\mathcal{H})) \cong \mathbb{Z}^+ \cup \{\infty\}$ amb $\infty + x = x + \infty = \infty$ per a tot x, és clar que $\mathcal{M}(A)$ és separatiu. Per tant, podem assumir que A no és elemental. Prenem un element $u \in V(A)$ no nul, i posem $d = \sup \phi_u(D(A))$. Aleshores $V(\mathcal{M}(A)) \cong V(A) \sqcup W_\sigma^d(S_u)$, pel Teorema 2.3.17. Siguin $a,b \in V(A) \sqcup W_\sigma^d(S_u)$, i suposem que $a+a=a+b=b+b$. En primer lloc, notem que $a \in V(A)$ si i només si $b \in V(A)$. Per tant, si $a \in V(A)$, llavors $a=b$ ja que $V(A)$ és cancel·latiu.

En segon lloc, suposem que ni a, ni b, pertanyen a $V(A)$. Escrivim $a=f$ i $b=g$ per a funcions $f,g \in W_\sigma^d(S_u)$. La igualtat $2f=2g$ implica que f és infinita als mateixos punts que g. En particular obtenim $f=g$. Per tant $a=b$. $\square$

A [7] es va provar que una noció adequada de rang estable per elements del monoide $V(R)$ de classes d'isomorfisme de mòduls (dreta) projectius finitament generats sobre un anell R dóna informació sobre el rang estable per una àmplia classe d'anells. Farem ús d'aquests fets per calcular el rang estable dels anells de multiplicadors.

DEFINICIÓ 4.1.4 *[7] Sigui M un monoide, siguin $a \in M$ i $n \in \mathbb{N}$. Diem que a satisfà la* **condició de n-rang estable** *si es compleix el següent: Sempre que $na+h=a+y$ per alguns $h,y \in M$, llavors existeix $e \in M$ tal que $y=h+e$ i tal que $na=a+e$. El* **rang estable** *de l'element a, que denotarem per $\mathrm{sr}(a)$ és l'enter positiu n més petit tal que a satisfà la condició de n-rang estable (si aquest n existeix), o bé ∞ (si aquest n no existeix).*

La següent Proposició és coneguda. Una versió per anells es pot trobar a [7, Section 3].

PROPOSICIÓ 4.1.5 *Sigui M un monoide, i sigui $a \in M$.*

(1) *Suposem que M és cònic. Llavors* $\mathrm{sr}(a) = 1$ *si, i només si, a cancel·la de les sumes a M.*

(2) *Suposem que M és separatiu. Llavors* $\mathrm{sr}(a)$ *és* 1, 2 *o bé* ∞.

DEMOSTRACIÓ: (1). Suposem que M és cònic. Si a cancel·la de les sumes a M, llavors clarament $\mathrm{sr}(a) = 1$. Recíprocament, assumim que $\mathrm{sr}(a) = 1$ i que $a + y = a + h$ per alguns $y, h \in M$. Llavors, existeix un element $e \in M$ tal que $y = h + e$ i tal que $a = a + e$. Aplicant novament el fet que $\mathrm{sr}(a) = 1$ a la igualtat $a + e = a + 0$ obtenim un element $e' \in M$ tal que $a = a + e'$ i tal que $0 = e + e'$. Atès que M és cònic, això implica que $e = 0$ i per tant $y = h$, com volíem.

(2). Ara suposem que M és separatiu i que $\mathrm{sr}(a) \leq n$ per algun $n \in \mathbb{N}$. Si $2a + h = a + y$ per elements $h, y \in M$, aleshores afegint $(n-1)y$ a aquesta igualtat obtenim $na + (a + nh) = a + ny$. Com que $\mathrm{sr}(a) \leq n$, existeix $e \in M$ tal que $na = a + e$ i tal que $ny = (a + nh) + e$, d'on deduïm que $a \leq ny$. Apliquem ara [7, Lemma 2.1 (iv)] a l'equació $a + (a + h) = a + y$, i concloem que $a + h = y$. Per tant $\mathrm{sr}(a) \leq 2$. □

TEOREMA 4.1.6 *Sigui A una C^*-àlgebra simple (sense unitat), separable, amb rang real zero i amb* $\mathrm{sr}(A) = 1$. *Suposem que $V(A)$ és estrictament no perforat, i que $\mathcal{M}(A)$ té rang real zero. Llavors* $\mathrm{sr}(\mathcal{M}(A)) = 2$ *si i només si A té escala finita però no contínua; i* $\mathrm{sr}(\mathcal{M}(A)) = \infty$ *si i només si A té escala contínua o bé si l'escala no és finita.*

DEMOSTRACIÓ: Si A és elemental, aleshores és ben conegut que $\mathrm{sr}(\mathcal{M}(A)) = \infty$ (vegeu [79, Proposition 6.5], així com el comentari fet a l'inici de la secció). D'altra banda, l'escala en aquest cas és infinita. Podem suposar doncs que A no és elemental.

Pel Lema 4.1.3, l'àlgebra $\mathcal{M}(A)$ és separativa. Per tant els únics possibles valors pel rang estable dels elements del monoide $V(\mathcal{M}(A))$ són 1, 2 o bé ∞, d'acord amb la Proposició 4.1.5 (2). Notem que $\mathcal{M}(A)$ és un anell d'intercanvi, en el sentit de [90], perquè té rang real zero (vegeu [7, Theorem 7.2]). Per tant, el rang estable de $\mathcal{M}(A)$ és igual al rang estable de l'element $[1_{\mathcal{M}(A)}] \in V(\mathcal{M}(A))$, per [7, Theorem 3.2]. Fixem $u \in V(A)^*$ i posem $d = \sup \phi_u(D(A))$. Pel Teorema 2.3.17, existeix un isomorfisme de monoides φ entre $V(\mathcal{M}(A))$ i $V(A) \sqcup W_\sigma^d(S_u)$ tal que $\varphi([1_{\mathcal{M}(A)}]) = d$. Per tant $\mathrm{sr}[1_{\mathcal{M}(A)}] = \mathrm{sr}(d)$.

Observem que $\mathrm{sr}(d) \geq 2$. Per veure això, caracteritzem els elements de $V(A) \sqcup W_\sigma^d(S_u)$ amb rang estable 1 com els elements de $V(A)$. Com que $V(A) \sqcup W_\sigma^d(S_u)$ és un monoide cònic, un element té rang estable 1 si, i només si, cancel·la de les sumes a $V(A) \sqcup W_\sigma^d(S_u)$, per la Proposició 4.1.5 (1). Sigui $x \in V(A)$ i suposem que $x + f = x + g$ per algunes funcions $f, g \in W_\sigma^d(S_u)$. Llavors f és infinita exactament g ho és, i si $f(s) < \infty$ per algun $s \in S_u$, aleshores $s(x) + f(s) = s(x) + g(s)$, d'on tenim que $f(s) = g(s)$. Per tant $f = g$. Suposem, recíprocament, que $\mathrm{sr}(x) = 1$ i que $x \notin V(A)$. Llavors $x \in W_\sigma^d(S_u)$. Prenem un element $z \in V(A)^*$ qualsevol, i observem que $z + x = \phi_u(z) + x$, la qual cosa contradiu el fet que x cancel·la de les sumes a $V(A) \sqcup W_\sigma^d(S_u)$. Com que $d \notin V(A)$, concloem que $\mathrm{sr}(d) \geq 2$.

Suposem ara que A té escala finita però no contínua. Llavors $d_{|\partial_e S_u}$ és finita i d no és contínua. Per veure que $\mathrm{sr}(d) = 2$, és suficient comprovar que d satisfà la condició de 2-rang estable. Suposem que per alguns $y, h \in V(A) \sqcup W_\sigma^d(S_u)$, tenim que $2d + h = d + y$. Si $y \in V(A)$, llavors la igualtat $2d + h = d + \phi_u(y)$ ens diu que $d + h = \phi_u(y)$, i això implica que d és contínua, una contradicció. Per tant $y \notin V(A)$, i en aquest cas $(d + h)_{|\partial_e S_u} = y_{|\partial_e S_u}$, d'on deduïm que $d + h = y$ i per tant acabem si escollim $e = d$. En conseqüència $\mathrm{sr}(d) \leq 2$ i com que, pel que hem provat abans, $\mathrm{sr}(d) \geq 2$, tenim que $\mathrm{sr}(d) = 2$. Per tant $\mathrm{sr}(\mathcal{M}(A)) = 2$.

Recíprocament, suposem que $\mathrm{sr}(\mathcal{M}(A)) = 2$. Llavors $\mathrm{sr}(d) = 2$. Si d és una funció afí i contínua, aleshores d és fitada, de manera que $d \ll (m+1)\phi_u(u)$ per algun $m \in \mathbb{N}$. Sigui $x = mu$ i notem que $0 \ll d \ll \phi_u(x) + 1 = \phi_u(x + u)$. Sigui $y = x + u$ i escollim $h \in \mathrm{Aff}(S_u)^{++}$ tal que $d + h = \phi_u(y)$. Llavors $2d + h = d + \phi_u(y) = d + y$, i com que $h \notin V(A)$, no hi ha cap $e \in V(A) \sqcup W_\sigma^d(S_u)$ satisfent $y = h + e$. Per tant d no satisfà la condició de 2-rang estable, la qual cosa és una contradicció. Si, d'altra banda, existeix $s \in \partial_e S_u$ tal que $d(s) = \infty$, distingim dues possibilitats: en primer lloc, si $d_{|\partial_e S_u}$ és idènticament infinita, llavors és fàcil veure que $\mathrm{sr}(d) = \infty$ (ja que en aquest cas $W_\sigma^d(S_u) = \mathrm{LAff}(S_u)^{++}$), i per tant d no satisfà la condició de 2-rang estable, contradient la nostra hipòtesi; en segon lloc, si $d_{|\partial_e S_u}$ és finita en algun punt però $d(s) = \infty$, llavors usant les tècniques del Corol·lari 3.2.22 existeix $y \in W_\sigma^d(S_u)$ amb $y(s) = 1/2$ i tal que $y_{|\{s\}'} = (d + 1)_{|\{s\}'}$, on $\{s\}'$ denota la cara complementària de $\{s\}$ dins S_u. Per tant $2d + h = d + y$, amb $h = 1$. Si existís un element $e \in V(A) \sqcup W_\sigma^d(S_u)$ tal que $y = h + e$, llavors en particular $1 \leq y$, la qual cosa és impossible ja que $y(s) = 1/2$. Per tant d no satisfà la condició de 2-rang estable, i això contradiu la nostra hipòtesi que $\mathrm{sr}(d) = 2$.

És clar que les condicions complementàries caracteritzen les àlgebres de multiplicadors amb rang estable infinit. □

Zhang va provar a [93, Corollary 1.6] que, si A és una C^*-àlgebra simple amb σ-unitat, rang real zero i amb escala contínua (és a dir, el quocient $\mathcal{M}(A)/A$ és simple), llavors $\mathcal{M}(A)/A$ conté dues isometries amb rangs ortogonals, i per tant en particular $\mathrm{sr}(\mathcal{M}(A)/A) = \infty$, per [79, Proposition 6.5]. El següent Corol·lari tracta el cas en que $\mathcal{M}(A)/A$ no és simple.

COROL·LARI 4.1.7 *Sigui A una C^*-àlgebra simple, separable i no elemental. Suposem que A té rang real zero,* $\mathrm{sr}(A) = 1$, *i que $V(A)$ és estrictament no perforat. Assumim que $RR(\mathcal{M}(A)) = 0$. Llavors* $\mathrm{sr}(\mathcal{M}(A)/A) = 2$ *si, i només si,* $\mathrm{sr}(\mathcal{M}(A)) = 2$.

DEMOSTRACIÓ: Suposem que $\mathrm{sr}(\mathcal{M}(A)) = 2$. Llavors $\mathrm{sr}(\mathcal{M}(A)/A) \leq \mathrm{sr}(\mathcal{M}(A)) = 2$, per [79, Theorem 4.3]. Com que tota projecció de $\mathcal{M}(A)/A$ és infinita ([93, Theorem 1.3 (a)]) tenim que $V(\mathcal{M}(A)/A)$ no és cancel·latiu, i per tant concloem que $\mathrm{sr}(\mathcal{M}(A)/A) = 2$.

Recíprocament, suposem que $\mathrm{sr}(\mathcal{M}(A)/A) = 2$. Com que $\mathrm{sr}(A) = 1$, tenim que

$$\mathrm{sr}(\mathcal{M}(A)) \leq \max\{\mathrm{sr}(A), \mathrm{sr}(\mathcal{M}(A)/A) + 1\} = 3,$$

usant [79, Corollary 4.12]. Atès que el rang estable de $\mathcal{M}(A)$ és finit, concloem a partir del Teorema 4.1.6 que $\mathrm{sr}(\mathcal{M}(A)) = 2$. □

QÜESTIÓ: 4.1.8 *És possible suprimir la hipòtesi que $RR(\mathcal{M}(A)) = 0$ al Teorema 4.1.6?*

A banda de millorar el resultat en sí, una resposta afirmativa a aquesta pregunta permetria, possiblement, establir un fet similar per anells de multiplicadors d'anells regulars. A més, i seguint [19, Proposition 1.2] (vegeu també la secció 2 del capítol de preliminars), obtindríem fites per al rang real de $\mathcal{M}(A)$: en cas que l'escala fos finita i no contínua, tindríem que $RR(\mathcal{M}(A)) \leq 3$.

La prova del Teorema 4.1.6 estableix, de fet, el següent: si fixem un element $u \in V(A)^*$ i definim $d = \sup \phi_u(D(A))$, aleshores fent servir que hi ha un isomorfisme de monoides $\varphi : V(\mathcal{M}(A)) \to V(A) \sqcup W_\sigma^d(S_u)$ tal que $\varphi([1_{\mathcal{M}(A)}]) = d$, pel Teorema 2.3.17, veiem que $\mathrm{sr}(d) = 2$ si, i només si, d és finita i no contínua, i $\mathrm{sr}(d) = \infty$ en altre cas. Ara bé, tenint en compte que sempre $\mathrm{sr}(\mathcal{M}(A)) \geq \mathrm{sr}([1_{\mathcal{M}(A)}])$ (vegeu, per exemple [7]), concloem que de fet si l'escala de A és infinita, aleshores $\mathrm{sr}(\mathcal{M}(A)) = \infty$, mentre que si $\mathrm{sr}(\mathcal{M}(A)) = 2$, llavors $\mathrm{sr}(d) = 2$ i per tant l'escala de A és finita i no contínua. Per tant, respondre afirmativament la Qüestió 4.1.8 equival a provar, sota les hipòtesis del Teorema 4.1.6, i sense suposar que $RR(\mathcal{M}(A)) = 0$, que si l'escala de A és finita i no contínua, aleshores $\mathrm{sr}(\mathcal{M}(A)) = 2$.

4.2 Riquesa d'extrems de l'àlgebra de multiplicadors i de la corona

En aquesta secció introduirem la noció de riquesa d'extrems i en donarem algunes caracteritzacions, segons [21]. També ressaltarem el comportament de la riquesa d'extrems a través d'extensions, d'acord amb els resultats de [21] i [55]. Posteriorment, usarem aquests fets per a examinar la riquesa d'extrems de l'àlgebra de multiplicadors i de la corona, en termes de les quasitraces extremes infinites. Els resultats que obtindrem, que en determinades situacions generalitzen resultats coneguts per àlgebres AF (vegeu [55, Section 4]), permeten analitzar la riquesa d'extrems en un gran nombre de casos que no havien estat considerats prèviament.

Si A és una C^*-àlgebra, denotarem per A_1 la bola unitat tancada de A. Clarament, A_1 és un subconjunt convex de A. Denotarem per $\mathfrak{E}(A)$ el conjunt dels punts extrems de A_1. Parlarem, fent abús de llenguatge, dels extrems de A, referint-nos als extrems de A_1.

PROPOSICIÓ 4.2.1 *[72, Proposition 1.4.7] Sigui A una C^*-àlgebra. Aleshores $\mathfrak{E}(A)$ és el conjunt d'elements $x \in A$ tals que $(1 - xx^*)A(1 - x^*x) = 0$. En particular, xx^* i x^*x són projeccions.* □

DEFINICIÓ 4.2.2 *[21, Section 1] Sigui A una C^*-àlgebra amb unitat. Un element $x \in A$ es diu* **quasi-invertible** *si $x \in A^{-1}\mathfrak{E}(A)A^{-1}$ (equivalentment, i per [21, Theorem 1.1], si existeixen dos ideals tancats ortogonals I, J de A tals que $x + I$ és invertible per l'esquerra a A/I i $x + J$ és invertible per la dreta a A/J). Denotem per A_q^{-1} el conjunt dels elements quasi-invertibles.*

DEFINICIÓ 4.2.3 *[21, Section 3] Diem que una C^*-àlgebra A amb unitat té* **riquesa d'extrems** *si A_q^{-1} és dens en A. Si A no té unitat, aleshores diem que A té riquesa d'extrems si, i només si, $\widetilde{A}$ té riquesa d'extrems.*

Una noció equivalent es pot trobar a:

TEOREMA 4.2.4 *([20, Section 6], [21, Section 3]) Sigui A una C^*-àlgebra. Aleshores A té riquesa d'extrems si, i només si, $A_1 = \operatorname{conv}(\mathfrak{E}(A))$.* □

És convenient contrastar aquest resultat amb [72, Proposition 1.1.12], on es prova que en una C^*-àlgebra A qualsevol amb unitat, A_1 és la *clausura* de l'embolcall convex dels unitaris de A (i, clarament, els unitaris són extrems).

D'entre els exemples de C^*-àlgebres que tenen riquesa d'extrems destaquem en primer lloc les àlgebres de von Neumann i les AW^*-àlgebres ([21, Section 3]).

REMARCA 4.2.5 *([18], [21]) Sigui A una C^*-àlgebra. Aleshores:*

(*a*) $\mathrm{sr}(A) = 1$ *si, i només si, A té riquesa d'extrems i* $\mathfrak{E}(\widetilde{A}) = \mathcal{U}(\widetilde{A})$.

(*b*) *Si A és simple, aleshores A té riquesa d'extrems si, i només si, és o bé purament infinita o bé té rang estable* 1.

DEMOSTRACIÓ: (*a*). Clarament, podem suposar que A té unitat. Si A té riquesa d'extrems i $\mathfrak{E}(A) = \mathcal{U}(A)$, aleshores $A_q^{-1} = A^{-1}\mathcal{U}(A)A^{-1} = A^{-1}$ és dens en A, de manera que $\mathrm{sr}(A) = 1$. Recíprocament, si $\mathrm{sr}(A) = 1$, aleshores A té riquesa d'extrems ja que $A^{-1} \subseteq A_q^{-1}$. D'altra banda, [20, Proposition 10.2] implica que $\mathfrak{E}(A) = \mathcal{U}(A)$.

(*b*). Si A és purament infinita i simple, aleshores A té riquesa d'extrems, per [55, Lemma 3.3] (vegeu també [75], [82]), i per l'apartat anterior, A té riquesa d'extrems si $\mathrm{sr}(A) = 1$. El recíproc és [20, Corollary 10.5]. □

Si A és una C^*-àlgebra commutativa, és a dir, si existeix un espai topològic compacte de Hausdorff X tal que $A = C(X)$, aleshores, atès que tot extrem és clarament unitari concloem per la Remarca 4.2.5 (*a*) que A té riquesa d'extrems si, i només si, $\dim X \leq 1$.

Les construccions naturals fetes a partir de C^*-àlgebres amb riquesa d'extrems formen noves C^*-àlgebres amb riquesa d'extrems. Així, com es veu a [21, Theorem 3.5], tot quocient, tota suma directa, tot producte directe i tota C^*-subàlgebra hereditària d'una C^*-àlgebra amb riquesa d'extrems també té riquesa d'extrems. Així mateix, i per [21, Theorem 4.5], si A té riquesa d'extrems, aleshores $M_n(A)$ té riquesa d'extrems per a tot $n \in \mathbb{N}$.

Com al cas de les C^*-àlgebres amb rang real zero (vegeu [19, Theorem 3.14], i també [98, 3.2]), el comportament de la riquesa d'extrems en extensions depèn de poder "pujar" certs elements dels quocients de l'àlgebra; en aquest cas, cal pujar isometries parcials extremes dels quocients a isometries parcials extremes. Enunciem tot seguit aquest resultat i algunes de les seves conseqüències:

TEOREMA 4.2.6 *([21, Theorem 6.1 (i) $\Leftrightarrow$ (iv)]) Sigui A una C^*-àlgebra amb unitat, i J un ideal tancat de A. Aleshores A té riquesa d'extrems si, i només si, J i A/J tenen riquesa d'extrems, $\mathfrak{E}(A/J) = (\mathfrak{E}(A) + J)/J$ i a més $\mathfrak{E}(A) + J \subsetneq (A_q^{-1})^-$.* □

COROL·LARI 4.2.7 *([21, Corollary 6.3]) Sigui J un ideal de rang estable* 1 *d'una C^*-àlgebra A. Aleshores A té riquesa d'extrems si, i només si, A/J té riquesa d'extrems i $\mathfrak{E}(A/J) = (\mathfrak{E}(A) + J)/J$.* □

TEOREMA 4.2.8 *([55, Theorem 3.6]) Sigui A una C^*-àlgebra, i sigui J un ideal essencial i tancat de A que és purament infinit i simple. Aleshores A té riquesa* *d'extrems si, i només si, A/J té riquesa d'extrems i $\mathfrak{E}(A/J)$ és format per isometries i co-isometries.* □

QÜESTIÓ: 4.2.9 *Si A és una C^*-àlgebra, sota quines condicions té l'àlgebra de multiplicadors $\mathcal{M}(A)$ riquesa d'extrems? I $\mathcal{M}(A)/A$?*

Aquest problema ha estat abordat recentment i amb cert èxit a [55], per C^*-àlgebres purament infinites i simples i per certes classes d'àlgebres AF. En el que segueix estendrem aquests resultats a la classe amb que hem estat treballant al llarg dels capítols anteriors, eliminant en molts casos hipòtesis supèrflues que s'assumeixen a [55].

Amb l'objectiu de clarificar l'exposició, enunciem explícitament un fet que és usat a [55], per provar un dels resultats principals ([55, Theorem 4.9]).

LEMA 4.2.10 *Sigui A una C^*-àlgebra amb unitat. Suposem que A és un anell primer i que existeixen ideals maximals diferents J_i, per $i = 1, 2$, tals que cada projecció de A/J_i és infinita. Aleshores A no té riquesa d'extrems.*

DEMOSTRACIÓ: Considerem la següent C^*-successió exacta:

$$0 \to (J_1 \cap J_2) \to A \to A/(J_1 \cap J_2) \to 0,$$

i notem que $A/(J_1 \cap J_2) \cong J_1/(J_1 \cap J_2) \oplus J_2/(J_1 \cap J_2)$, així com que $J_1/(J_1 \cap J_2) \cong A/J_2$ i $J_2/(J_1 \cap J_2) \cong A/J_1$. Com que cada quocient A/J_i és simple, els extrems respectius són isometries o co-isometries. A més, atès que tota projecció de $J_i/(J_1 \cap J_2)$ és infinita, veiem que $J_i/(J_1 \cap J_2)$ conté isometries (i per tant co-isometries) no trivials, per a $i = 1, 2$. Finalment, com que els extrems d'una suma directa són exactament la suma directa dels extrems de cada un dels sumands, veiem que $A/(J_1 \cap J_2)$ conté un extrem que no és ni una isometria ni una co-isometria, de manera que no es pot pujar a un extrem de A, ja que A és primer. Pel Teorema 4.2.6, A no té riquesa d'extrems. □

Estudiem ara la riquesa d'extrems del cas elemental. Suposem que $A \cong \mathbb{K}(\mathcal{H})$ per un espai de Hilbert $\mathcal{H}$ separable i de dimensió infinita. Aleshores $\mathcal{M}(A)/A \cong \mathbb{B}(\mathcal{H})/\mathbb{K}(\mathcal{H})$ és purament infinita i simple, d'on per la Remarca 4.2.5, $\mathcal{M}(A)/A$ té riquesa d'extrems. D'altra banda, per [55, Theorem 2.3], hi ha una isometria de $\mathbb{B}(\mathcal{H})/\mathbb{K}(\mathcal{H})$ que no es pot pujar ni a una isometria, ni a una coisometria, de $\mathbb{B}(\mathcal{H})$. Atès que $\mathbb{B}(\mathcal{H})$ és primer i pel Teorema 4.2.6, tenim que $\mathcal{M}(A)$ no té riquesa d'extrems.

A [55, Theorem 4.9], es prova que si A és una àlgebra AF simple, separable i tal que $A \otimes \mathbb{K}(\mathcal{H})$ té almenys dues traces extremes semifinites, aleshores $\mathcal{M}(A \otimes \mathbb{K})/(A \otimes \mathbb{K})$

no té riquesa d'extrems. D'altra banda, a [55, Proposition 4.13] s'estableix que si A és una àlgebra AF simple, separable (sense unitat), amb un nombre finit de traces extremes semifinites, de les quals almenys dues són infinites, aleshores $\mathcal{M}(A)/A$ no té riquesa d'extrems. Ambdues classes d'àlgebres poden ésser estudiades amb els mètodes que hem desenvolupat. El següent Teorema amplia, en gran mesura, el nombre de casos en que la riquesa d'extrems de l'anell corona pot ésser examinada, sense haver de distingir si l'àlgebra és estable o no, i generalitzant doncs de manera important els resultats citats anteriorment. A la vegada, donem una resposta afirmativa a la pregunta implícita plantejada a [55, Remark 4.19]: Si A té un nombre infinit de quasitraces extremes, té la corona riquesa d'extrems? En cas que cap d'elles sigui infinita, la resposta serà afirmativa (completant en certa forma [55, Theorem 4.1], on es tracten alguns casos estables fora de la nostra classe), mentre que si almenys dues són infinites, aleshores la resposta és negativa. El cas en que tan sols hi ha una quasitraça extrema infinita serà tractat més endavant.

TEOREMA 4.2.11 *Sigui A una C^*-àlgebra simple, separable (sense unitat), amb rang real zero i $\mathrm{sr}(A) = 1$. Suposem que A no és elemental i que $V(A)$ és estrictament no perforat. Sigui $p \in A$ una projecció no zero. Aleshores:*

(*a*) *Si A té escala finita i $\mathcal{M}(A)$ té rang real zero, llavors $\mathcal{M}(A)/A$ té riquesa d'extrems.*

(*b*) *Si A té almenys dues quasitraces extremes infinites a Q_p, aleshores $\mathcal{M}(A)/A$ no té riquesa d'extrems.*

DEMOSTRACIÓ: (*a*). Considerem l'ideal $L(A)$, introduït a la Proposició 3.2.2, i recordem que és el mínim ideal tancat no zero de $\mathcal{M}(A)$ tal que conté pròpiament A. Notem que $L(A)/A$ és un ideal tancat essencial de $\mathcal{M}(A)/A$, i que és purament infinit i simple. Si A té escala finita, tenim pel Teorema 3.2.25 que $\mathcal{M}(A)/L(A)$ té rang estable 1. Per la Remarca 4.2.5 (*a*), això implica que $\mathcal{M}(A)/L(A)$ té riquesa d'extrems i que $\mathfrak{E}(\mathcal{M}(A)/L(A)) = \mathcal{U}(\mathcal{M}(A)/L(A))$. Pel Teorema 4.2.8, concloem que $\mathcal{M}(A)/A$ té riquesa d'extrems.

(*b*). Sigui $\mathfrak{c}$ el cardinal de quasitraces extremes infinites a l'espai Q_p. Per hipòtesi $\mathfrak{c} \geq 2$. Apliquem els Teoremes 3.4.15 i 3.4.18 per obtenir almenys $\mathfrak{c}$ ideals tancats maximals i diferents a $\mathcal{M}(A)/A$. A més, el quocient de $\mathcal{M}(A)$ per qualsevol d'aquests ideals és una C^*-àlgebra purament infinita i simple (vegeu, a més, la Proposició 3.4.17). D'altra banda, l'ideal $L(A)/A$ és el mínim ideal tancat i no nul de $\mathcal{M}(A)/A$, de manera que la corona és un anell primer. Per tant, estem en les hipòtesis del Lema 4.2.10, d'on concloem que $\mathcal{M}(A)/A$ no té riquesa d'extrems. □

REMARCA 4.2.12 *A la demostració del Teorema anterior, hem utilitzat el fet que l'àlgebra corona $\mathcal{M}(A)/A$ és un anell primer. Val a dir que això no és cert en general, en el cas que l'àlgebra de la qual partim sigui un anell primer. En efecte, sigui A una C^*-àlgebra simple i sense unitat tal que $\mathcal{M}(A)$ conté almenys dos ideals maximals tancats diferents I_1, I_2 (exemples d'aquest tipus existeixen seguint les línies de l'Exemple 3.2.9). Sigui $J = I_1 I_2$. Aleshores J és un anell primer i $\mathcal{M}(J) = \mathcal{M}(A)$. Per tant $\mathcal{M}(J)/J$ conté dos ideals no trivials, que són I_i/J per $i = 1, 2$, el producte dels quals és zero.*

Hem deixat pendent al Teorema 4.2.11 el cas en que la C^*-àlgebra té exactament una quasitraça extrema infinita. A [55, Proposition 4.18], es prova que si A és una àlgebra AF simple, separable (sense unitat), amb un nombre finit de traces extremes de les quals exactament una és infinita, aleshores $\mathcal{M}(A)/A$ té riquesa d'extrems. L'objectiu de la resta de la secció és establir l'extensió d'aquest fet al cas en que A és simple, separable, amb rang real zero i rang estable 1, i amb $V(A)$ estrictament no perforat. Eliminarem a més la hipòtesi que A tingui un nombre finit de (quasi)traces extremes. Contràriament al que podria semblar, però, aquesta extensió no és directa, sinó que la riquesa d'extrems de $\mathcal{M}(A)/A$ quan A té exactament una quasitraça extrema infinita dependrà de la naturalesa d'aquesta quasitraça. Necessitarem primer uns resultats que ens permetin "pujar" isometries d'un quocient de forma satisfactòria, i amb aquest objectiu l'aplicació índex de Teoria K ens serà d'utilitat, per la qual cosa en recordem la definició i alguna propietat bàsica. Si A és una C^*-àlgebra amb unitat qualsevol i $n \in \mathbb{N}$, denotem per p_n la projecció $\mathrm{diag}(1, \dots, 1, 0, \dots)$, que és una projecció a $M_k(A)$ per a $k \geq n$ i a $M_\infty(A)$. Notem que de fet $p_n = \sum_{i=1}^{n} e_{ii}$.

DEFINICIÓ 4.2.13 *([91, Definition 8.1.1]) Sigui A una C^*-àlgebra amb unitat, sigui J un ideal tancat de A i prenem un element $x \in K_1(A/J)$. Sigui $u \in \mathcal{U}_n(A/J)$ tal que $x = [u]$, i sigui $v \in \mathcal{U}_k(A/J)$ tal que $\mathrm{diag}(u, v)$ és homòtop a $1 \in \mathcal{U}_{n+k}(A/J)$ (es pot agafar, per exemple, $v = u^*$ i utilitzar [91, Theorem 4.2.9]). Sigui $w \in \mathcal{U}_{n+k}(A)$ tal que $\pi(w) = \mathrm{diag}(u, v)$, on π és l'aplicació natural de pas al quocient (aquest element existeix en virtut de [91, Corollary 4.3.3]). Definim l'***aplicació índex**

$$\delta : K_1(A/J) \to K_0(J)$$

per $\delta(x) = [wp_n w^*] - [p_n]$.

Es demostra a [91, Proposition 8.1.3, Theorem 8.2.1] que l'índex és un morfisme de grups ben definit i que a més, si J és un ideal de A, la següent successió és exacta a tot arreu:

$$K_1(J) \to K_1(A) \to K_1(A/J) \xrightarrow{\delta} K_0(J) \to K_0(A) \to K_0(A/J),$$

on les aplicacions diferents de l'índex són les naturalment induïdes per K_0 i K_1.

REMARCA 4.2.14 *[91, Exercise 8.C] Si l'unitari $u \in M_n(A/J)$ puja, almenys, a una isometria parcial $v \in M_n(A)$ aleshores l'índex es pot calcular com $\delta([u]) = [1 - v^*v] - [1 - vv^*]$.*

DEMOSTRACIÓ: Definim en aquest cas l'unitari $w = \begin{pmatrix} v & 1 - vv^* \\ 1 - v^*v & v^* \end{pmatrix}$. Notem que $w \in M_{2n}(A)$. És clar que $\pi(w) = \mathrm{diag}(u, u^*)$. Un simple càlcul mostra que

$$wp_nw^* = \begin{pmatrix} vv^* & 0 \\ 0 & 1 - v^*v \end{pmatrix},$$

d'on per la definició d'índex obtenim la conclusió. □

LEMA 4.2.15 *Sigui B una C^*-àlgebra amb unitat, i sigui I un ideal tancat de B. Sigui u una isometria de B/I, i denotem per $\pi : B \to B/I$ l'aplicació natural. Aleshores u es pot pujar a una isometria $z \in B$ si, i només si, existeix una isometria parcial $v \in B$ tal que $1 - v^*v \lesssim 1 - vv^*$ i tal que $\pi(v) = u$.*

DEMOSTRACIÓ: Si u es pot pujar a una isometria $z \in B$, aleshores sols cal prendre $v = z$. Recíprocament, suposem que $u = \pi(v)$ per alguna isometria parcial $v \in B$ tal que $1 - v^*v \lesssim 1 - vv^*$. Siguin $p = v^*v$ i $q = vv^*$. Aleshores existeix $w \in B$ tal que $1 - p = w^*w$ i tal que $ww^* \leq 1 - q$. Clarament, podem suposar que $v \in qB$ i que $w \in (1 - q)B$. Atès que $\pi(v) = u$, veiem que $\pi(w^*w) = 0$, és a dir, $w \in I$. Sigui ara $z = v + w$. Llavors $z^*z = v^*v + v^*w + w^*v + w^*w = p + (1 - p) = 1$, de forma que z és una isometria, i tenim $\pi(z) = \pi(v) = u$, com volíem. □

Necessitarem el següent:

LEMA 4.2.16 *Sigui B una C^*-àlgebra amb rang real zero. Aleshores*

$$K_0(B) = G(V(B)).$$

DEMOSTRACIÓ: Clarament, podem suposar que B no té unitat. Observem en primer lloc que $V(B) = \varinjlim V(pBp)$, variant p en el conjunt de projeccions de B. (En general, el conjunt de projeccions de B no té per què ser dirigit, però donades projeccions $p, q \in B$, existeix una projecció $r \in B$ tal que $\|p - pr\|, \|q - qr\| < 1$; deduïm doncs que $p, q \lesssim r$, de manera que $V(pBp) \subseteq V(rBr)$ i també $V(qBq) \subseteq V(rBr)$.) Tenint en compte ara que G és un functor continu de la categoria de monoides a la categoria de grups, obtenim que $G(V(B)) = \varinjlim G(V(pBp))$. D'altra banda, $G(V(pBp)) = K_0(pBp)$, atès que pBp sí té unitat. Resta provar, doncs, que $K_0(B) = \varinjlim K_0(pBp)$.

Observem ara que si $p \in M_n(B^+)$ és una projecció, aleshores existeix $r \leq n$ i existeixen projeccions $g, h \in M_\infty(B)$ amb $g \leq 1_r$, tals que $p \sim (1_r - g) \oplus h$. (Aquí 1_r denota la unitat de $M_r(\mathbb{C})$.) Això es desprèn de [42, Lemma 10.3] (vegeu també la demostració [5, Lemma 3.4]). Aplicant la propietat de refinament a la igualtat $(1_r - g) + g = 1_r$, obtenim projeccions mútuament ortogonals $p_1, \ldots, p_r \in B$ i projeccions $q_1, \ldots, q_r \in B$ tals que $1 = p_i + q_i$ per a tot i, i tals que $g \sim \sum_{i=1}^{r} q_i$, mentre que $1_r - g \sim \sum_{i=1}^{r} p_i$. Així, obtenim que $1_r - g \sim \sum_{i=1}^{r} p_i \sim (1 - q_1) + \ldots + (1 - q_r) \sim 1_r - \sum_{i=1}^{r} q_i$. Utilitzant aquest fet i que $V(B) = \varinjlim V(pBp)$, com hem observat abans, concloem que $V(B^+) = \varinjlim V((pBp)^+)$. D'altra banda, si denotem per $\pi : B^+ \to \mathbb{C}$ i per $\pi_p : (pBp)^+ \to \mathbb{C}$, amb $p \in B$, les projeccions naturals, aleshores tenim $V(\pi_p) = V(\pi) \circ V(i)$, on $i : (pBp)^+ \to B^+$ és la inclusió natural.

Usant novament la continuïtat de G, obtenim que $K_0(B^+) = \varinjlim K_0((pBp)^+)$, i també que $G(\pi_p) = G(\pi) \circ G(i)$. D'això concloem que $K_0(B) = \varinjlim K_0(pBp)$, com volíem. □

PROPOSICIÓ 4.2.17 *Sigui B una C^*-àlgebra amb unitat, i sigui I un ideal tancat bilateral de B. Siguin $u \in \mathcal{U}(B/I)$, i denotem per $\pi : B \to B/I$ l'aplicació de pas al quocient. Si $RR(I) = 0$ i el monoide $V(I)$ és cancel·latiu, aleshores l'unitari u es pot pujar a un unitari de B (respectivament, a una isometria pròpia, a una co-isometria pròpia) si, i només si, $\delta[u] = 0$ (respectivament, $\delta[u] < 0$, $\delta[u] > 0$).*

DEMOSTRACIÓ: Si u es pot pujar a una isometria parcial $v \in B$ a través de π, aleshores per la Remarca 4.2.14 l'índex es pot calcular com $\delta([u]) = [1-v^*v]-[1-vv^*]$.

Suposem que l'unitari u es pot pujar a un unitari (respectivament, a una isometria pròpia, a una co-isometria pròpia) $v \in B$. Aleshores, es desprèn immediatament del paràgraf anterior que $\delta[u] = 0$ (respectivament, $\delta[u] < 0$, $\delta[u] > 0$).

Recíprocament, notem primer que de fet podem pujar u a una isometria parcial $v \in B$, atès que $RR(I) = 0$ (vegeu, per exemple, la demostració de [28, Lemma 2.6], o també [5, Lemma 2.1]). Si $\delta[u] = 0$, aleshores $[1 - v^*v] = [1 - vv^*]$ a $K_0(I)$. Usant el Lema 4.2.16, i atès que $V(I)$ és un monoide cancel·latiu, obtenim que $1 - v^*v \sim 1 - vv^*$ a I. Per tant, existeix un element $w \in I$ tal que $1 - p = w^*w$ i tal que $1 - q = ww^*$, on $p = v^*v$ i $q = vv^*$. Sigui $z = v + w$. Aleshores, per un càlcul similar al del

Lema 4.2.15, tenim $z^*z = zz^* = 1$ i també $\pi(z) = \pi(v) = u$, d'on veiem que u es pot pujar a un unitari.

Si ara $\delta[u] < 0$, aleshores $1 - v^*v \lesssim 1 - vv^*$, de manera que pel Lema 4.2.15, u es pot pujar a una isometria $z \in B$, que és pròpia atès que u no és un unitari. Procedim de manera similar si $\delta[u] > 0$, per a obtenir una co-isometria. □

El següent Lema és una conseqüència dels mètodes que hem desenvolupat al capítol anterior:

LEMA 4.2.18 *Sigui K un símplex de Choquet metritzable, i siguin $f, g, h, d \in \mathrm{LAff}(K)$ funcions estrictament positives tals que $f + g = f + h = d$. Suposem que existeix $s \in \partial_e K$ tal que $d(x) = \infty$ (per a $x \in \partial_e K$) si, i només si, $x = s$. Suposem que $g_{|\partial_e K}$ és una funció finita.*

(*a*) *Si $h_{|\partial_e K}$ és també una funció finita i $g(s) < h(s)$, aleshores existeix $w \in \mathrm{LAff}(K)^{++}$ i existeix un nombre $k \in \mathbb{N}$ tals que $g + k = h + w$ i tals que $w + d = k + d$.*

(*b*) *Si $h(s) = \infty$ i $\{s\}'$, la cara complementària de s, és una cara tancada, aleshores existeix $w \in \mathrm{LAff}(K)^{++}$ i existeix un nombre $k \in \mathbb{N}$ tals que $g + w = h + k$ i tals que $w + d = k + d$.*

DEMOSTRACIÓ: Atès que $g_{|\partial_e K}$ és finita, obtenim immediatament que $f(s) = \infty$ i que $g_{|\partial_e K \setminus \{s\}} = h_{|\partial_e K \setminus \{s\}}$.

(*a*). Sigui $a = h(s) - g(s)$ i prenem $k \in \mathbb{N}$ tal que $k > a$. Per un argument semblant al que hem usat a la Proposició 3.2.19 (vegeu també la Proposició 3.5.7), existeix una funció w afí i semicontínua inferior tal que $w(s) = k - a$ i tal que $w_{|\{s\}'} = k$. Notem que $(g + k)_{|\partial_e K} = (h + w)_{|\partial_e K}$ i que $(w + d)_{|\partial_e K} = (k + d)_{|\partial_e K}$. Per tant $g + k = h + w$ i també $w + d = k + d$ (pel Lema 3.5.6).

(*b*). Atès que $\{s\}'$ és tancada, existeix $w \in \mathrm{LAff}(K)^{++}$ tal que $w(s) = \infty$ i tal que $w_{|\{s\}'} = k$ per algun enter positiu k (vegeu la demostració de la Proposició 3.5.4). Aleshores $(g + w)_{|\partial_e K} = (h + k)_{|\partial_e K}$ i també $(w + d)_{|\partial_e K} = (k + d)_{|\partial_e K}$, d'on concloem que $g + w = h + k$, així com $w + d = k + d$ (també pel Lema 3.5.6). □

PROPOSICIÓ 4.2.19 *Sigui A una C^*-àlgebra simple, separable (sense unitat), amb rang real zero i $\mathrm{sr}(A) = 1$. Suposem que A no és elemental i que $V(A)$ és estrictament no perforat. Sigui $p \in A$ una projecció no zero, i suposem que A té exactament una quasitraça extrema infinita a Q_p. Suposem també que el rang real de $\mathcal{M}(A)$ és zero. Sigui I un ideal tancat qualsevol de $\mathcal{M}(A)$ tal que $A \subsetneq I \subseteq I_{fin}(A)$. Aleshores $\delta[u]$ és o bé zero, o bé positiu, o bé negatiu, per a qualsevol unitari $u \in \mathcal{M}(A)/I$, on*

$\delta : K_1(\mathcal{M}(A)/I) \to K_0(I/L(A))$ *és l'aplicació índex. Per tant* u *es pot pujar sempre a una isometria o a una co-isometria de* $\mathcal{M}(A)/L(A)$.

DEMOSTRACIÓ: Sigui $u = [p] \in V(A)$, i posem $d = \sup \phi_u(D(A))$. Denotem $B = \mathcal{M}(A)$. Pel Teorema 2.3.17, existeix un isomorfisme de monoides $\varphi : V(B) \to V(A) \sqcup W_\sigma^d(S_u)$, tal que $\varphi([1_B]) = d$. D'altra banda, com que l'espai Q_p té exactament una quasitraça extrema infinita, concloem pel Teorema 3.3.17 que el conjunt $\Gamma_d = \{t \in \partial_e S_u \mid d(t) = \infty\}$ té un sol element, que denotem per s.

Siguin $\phi : B \to B/I$ i $\pi : B \to B/L(A)$ les aplicacions naturals de pas al quocient. Per la demostració de [28, Lemma 2.6] (o també [5, Lemma 2.1]), existeix una isometria parcial $v \in B$ tal que $\phi(v) = u$. Aleshores, tant $1 - v^*v$ com $1 - vv^*$ pertanyen a I. Atès que u no és zero, observem en primer lloc que $v \notin A$. Suposem ara que $1 - v^*v \in A$. Aleshores $\delta([u]) = -[\pi(1 - vv^*)] \leq 0$, i una conclusió semblant obtindríem si $1 - v^*v \in A$. Per tant, podem assumir que $1 - v^*v, 1 - vv^* \notin A$. Siguin $f = \varphi([v^*v])$, $g = \varphi([1 - v^*v])$ i $h = \varphi([1 - vv^*])$, que per les reduccions que hem fet són funcions a $W_\sigma^d(S_u)$. Notem que $f + g = f + h = d$, i que ambdues funcions $h_{|\partial_e S_u}$ i $g_{|\partial_e S_u}$ són finites, perquè $g, h \in I_{fin} = \varphi(V(I_{fin}(A)))$. Si $g(s) = h(s)$, aleshores $g = h$ i per tant $1 - v^*v \sim 1 - vv^*$ a I, de manera que $\delta([u]) = 0$. Suposem que, en cas contrari, $g(s) < h(s)$. Aleshores, pel Lema 4.2.18 (a) existeix $w \in \mathrm{LAff}(S_u)^{++}$ i existeix un nombre $k \in \mathbb{N}$ tals que $g + k = h + w$ i tals que $w + d = k + d$. Per tant, podem trobar projeccions no nul·les $p \in M_\infty(L(A))$ i $q \in M_\infty(I)$ tals que $\varphi([p]) = k$ i tals que $\varphi([q]) = w$, i a més $(1-v^*v) \oplus p \sim (1-vv^*) \oplus q$. Llavors, tenim que $\pi(1 - v^*v) \sim \pi(1 - vv^*) \oplus \pi(q)$ al quocient $I/L(A)$, i deduïm que $\delta([u]) = [\pi(1-v^*v)] - [\pi(1-vv^*)] \geq 0$. L'argument és similar en cas que $h(s) < g(s)$.

Per la Proposició 4.2.17, concloem que u es pot pujar sempre a una isometria o a una co-isometria de $\mathcal{M}(A)/L(A)$. □

PROPOSICIÓ 4.2.20 *Sigui* A *una* C^**-àlgebra simple, separable (sense unitat), amb rang real zero i* $\mathrm{sr}(A) = 1$. *Suposem que* A *no és elemental i que* $V(A)$ *és estrictament no perforat. Sigui* $p \in A$ *una projecció no zero, i suposem que* A *té exactament una quasitraça extrema infinita a* Q_p, *que anomenem* τ. *Si* $RR(\mathcal{M}(A)) = 0$, *aleshores totes les isometries pròpies de* $\mathcal{M}(A)/I_{fin}(A)$ *es poden pujar a isometries pròpies de* $\mathcal{M}(A)/L(A)$ *si, i només si, la cara complementària de* $\{\tau\}$ *dins* Q_p *és tancada.*

DEMOSTRACIÓ: Sigui $u = [p] \in V(A)$, i posem $d = \sup \phi_u(D(A))$. Denotem $B = \mathcal{M}(A)$. Pel Teorema 2.3.17, tenim un isomorfisme de monoides $\varphi : V(B) \to V(A) \sqcup W_\sigma^d(S_u)$, tal que $\varphi([1_B]) = d$. Com abans, la quasitraça τ es correspon, a través de l'homeomorfisme del Teorema 3.3.17 a l'únic punt $s \in \partial_e S_u$ tal que $d(s) = \infty$.

Suposem en primer lloc que $\{s\}'$, la cara complementària de $\{s\}$ al símplex S_u, no és tancada i que totes les isometries pròpies de $B/I_{fin}(A)$ es poden pujar a isometries pròpies de $B/L(A)$. Atès que totes les projeccions de $B/I_{fin}(A)$ són infinites (vegeu Proposició 3.4.17), existeix una isometria pròpia $u \in B/I_{fin}(A)$. Per hipòtesi, podem pujar u a una isometria pròpia $v \in B/L(A)$. D'altra banda, existeix una isometria parcial $z \in B$ tal que $\pi(z) = v$, on $\pi : B \to B/L(A)$ és l'aplicació natural (una altra vegada per la demostració de [28, Lemma 2.6], o bé [5, Lemma 2.1]). Per tant $1 - z^*z \in L(A)$ i també $1 - zz^* \notin I_{fin}(A)$. Com a la Proposició 4.2.19, tenim que $z \notin A$, i a més en aquest cas $1 - zz^* \notin A$. Podem suposar també que $1 - z^*z \notin A$, atès que la prova seria similar en cas contrari. Siguin $f = \varphi([z^*z])$, $g = \varphi([1 - z^*z])$ i $h = \varphi([1 - zz^*])$. Aleshores $f + g = f + h = d$. Com que $d(s) = \infty$ i g és contínua, obtenim que $f(s) = \infty$. A més, $g_{|\partial_e S_u \setminus \{s\}} = h_{|\partial_e S_u \setminus \{s\}}$. Notem també que $F := \overline{\{s\}'}$ és la clausura de l'embolcall convex de $\partial_e S_u \setminus \{s\}$, pel Lema 3.5.5, i que F és un subconjunt compacte i convex de S_u (vegeu [39, Proposition 5.1]).

Si $s \notin F$, aleshores $\partial_e F = \partial_e S_u \setminus \{s\}$, i atès que g i h són funcions afins i semicontínues inferiors obtenim que $g_{|F} = h_{|F}$ (pel Lema 3.5.6). D'altra banda, com que $\{s\}'$ no és tancada, existeix un punt $x \in F \setminus \{s\}'$. Notem que $g(x) = h(x)$. Però $x \notin \{s\}'$, de manera que existeix $\alpha \in (0, 1]$ i existeix $t \in \{s\}'$ tals que $x = \alpha s + (1-\alpha)t$, i això implica que $h(x) = \infty$, la qual cosa és una contradicció ja que g és contínua.

Per tant $s \in F$, i així tenim $s = \lim_m y_m$, on (y_m) és una successió, els elements de la qual pertanyen a l'embolcall convex de $\partial_e S_u \setminus \{s\}$. Per tant $g(y_m) = h(y_m)$ per a tot $m \in \mathbb{N}$, i deduïm que $g(s) = \lim_m g(y_m) = \lim_m h(y_m) \geq h(s)$, novament una contradicció.

Recíprocament, assumim que $\{s\}'$ és una cara tancada, i prenem una isometria pròpia $u \in B/I_{fin}(A)$. Com abans, existeix una isometria parcial $z \in B \setminus A$ tal que $\phi(z) = u$, on $\phi : B \to B/I_{fin}(A)$ és l'aplicació natural. Per tant tenim que $1-z^*z \in I_{fin}(A)$ i també que $1-zz^* \notin I_{fin}(A)$. Si $1-z^*z \in A$, aleshores $1 = \pi(z)^*\pi(z)$ i $1 \neq \pi(z)\pi(z)^*$ ja que $1 - zz^* \notin I_{fin}(A)$. A més tenim que $u = \phi(z) = \overline{\pi(z)}$, on el darrer denota la classe de $\pi(z)$ mòdul $I_{fin}(A)/L(A)$. Veiem així que u es pot pujar a una isometria (pròpia) de $\mathcal{M}(A)/L(A)$. Per tant podem suposar que $1 - z^*z \notin A$. Siguin $f = \varphi([z^*z])$, $g = \varphi([1 - z^*z])$ i $h = \varphi([1 - zz^*])$. Aleshores tenim que $f + g = f + h = d$ i també que $h(s) = \infty$. Pel Lema 4.2.18 (b), existeix una funció $w \in \mathrm{LAff}(S_u)^{++}$ i existeix un nombre $k \in \mathbb{N}$ tals que $g + w = h + k$, així com $w + d = k + d$. Per tant, existeixen projeccions $p \in M_\infty(L(A))$ i $q \in M_\infty(B)$ tals que $k = \varphi([p])$ i $w = \varphi([q])$, i a més $(1 - z^*z) \oplus q \sim (1 - zz^*) \oplus p$. Per tant $1 - \pi(z)^*\pi(z) \lesssim 1 - \pi(z)\pi(z)^*$, i com abans $u = \phi(z) = \overline{\pi(z)}$; concloem doncs pel Lema 4.2.15 que u es pot pujar a una isometria (pròpia). □

Ens concentrem ara en els punts extrems de $\mathcal{M}(A)/L(A)$, que són, en la nostra situació, isometries i co-isometries.

LEMA 4.2.21 *Sigui A una C^*-àlgebra simple, separable (sense unitat), amb rang real zero i $\mathrm{sr}(A) = 1$. Suposem que A no és elemental i que $V(A)$ és estrictament no perforat. Sigui $p \in A$ una projecció no zero, i suposem que A té exactament una quasitraça extrema infinita a Q_p. Si $L(A)$ té rang real zero, aleshores $\mathfrak{E}(\mathcal{M}(A)/L(A))$ és format únicament per isometries o co-isometries.*

DEMOSTRACIÓ: Posem $u = [p] \in V(A)$, i escrivim $d = \sup \phi_u(D(A))$. Com abans, si posem $B = \mathcal{M}(A)$, tenim un isomorfisme de monoides $\varphi : V(B) \to V(A) \sqcup W_\sigma^d(S_u)$ tal que $\varphi([1_B]) = d$ (Teorema 2.3.17), i existeix un únic punt $s \in \partial_e S_u$ tal que $d(s) = \infty$.

Sigui $v \in \mathfrak{E}(B/L(A))$. Aleshores $(1-v^*v)(B/L(A))(1-vv^*) = 0$, per la Proposició 4.2.1, i v és una isometria parcial. Suposem que v no és ni una isometria, ni una co-isometria. Triem una isometria parcial $z \in B \setminus A$ tal que $\pi(z) = v$, on $\pi : B \to B/L(A)$ és l'aplicació natural. Llavors $(1 - z^*z)B(1 - zz^*) \subseteq L(A)$. Denotem per I i J els ideals tancats de B generats respectivament per $1 - z^*z$ i per $1 - zz^*$. Aleshores $IJ \subseteq L(A)$. D'altra banda, tenim que $A \subsetneq I, J$ atès que v no és ni una isometria, ni una co-isometria. Per tant $L(A) \subseteq I, J$ i concloem que $L(A) = IJ = I \cap J$.

Clarament, tant $1 - z^*z$ com $1 - zz^*$ no pertanyen a A. Siguin $f = \varphi([z^*z])$, $g = \varphi([1 - z^*z])$ i $h = \varphi([1 - zz^*])$. Novament tenim $f + g = f + h = d$, d'on deduïm que $g = h$ sobre $\partial_e S_u \setminus \{s\}$. D'altra banda, posem

$$I_g = V(A) \sqcup \{f_1 \in W_\sigma^d(S_u) \mid f_1 + f_2 = ng \text{ per alguna } f_2 \in W_\sigma^d(S_u) \text{ i algun } n \in \mathbb{N}\},$$

l'ideal d'ordre de $V(A) \sqcup W_\sigma^d(S_u)$ generat per la funció g. Anàlogament definim l'ideal d'ordre I_h. Notem que $\varphi(V(I)) = I_g$ i que $\varphi(V(J)) = I_h$.

Com que $I \cap J = L(A)$, tenim que

$$I_g \cap I_h = \varphi(V(I) \cap V(J)) = \varphi(V(L(A))) = V(A) \sqcup \mathrm{Aff}(S_u)^{++}.$$

Notem que $g, h \notin \mathrm{Aff}(S_u)^{++}$, perquè v no és ni isometria, ni co-isometria. Per tant $g \neq h$. En cas contrari, tindríem $I_g = I_g \cap I_h = V(A) \sqcup \mathrm{Aff}(S_u)^{++}$, i per tant g seria contínua. Suposem que $g(s) = \infty$ i que $h(s) < \infty$. Aleshores $g + h = 2g$, d'on concloem que $I_h \subseteq I_g$, de manera que h seria contínua, la qual cosa és una contradicció.

Això implica que $g(s), h(s) < \infty$. Suposem doncs que $h(s) < g(s)$. Sigui $n \geq 2$ tal que $nh(s) > g(s)$. Per un argument semblant al de la Proposició 3.2.19 (vegeu també la demostració de la Proposició 3.5.7), existeix una funció $f' \in \mathrm{LAff}(S_u)^{++}$ tal que $f'(s) = nh(s) - g(s)$ i tal que $f'_{|\{s\}'} = (n-1)g_{|\{s\}'}$. Llavors $f' + g = nh$, i per tant $I_g \subseteq I_h$, i obtenim novament contradicció ja que g no és contínua.

Concloem doncs que qualsevol punt $v \in \mathfrak{E}(B/L(A))$ és necessàriament una isometria o una co-isometria. □

REMARCA 4.2.22 *El resultat anterior seria immediat si $\mathcal{M}(A)/L(A)$ fos un anell primer. Destaquem que, en general, això no és cert.*

DEMOSTRACIÓ: Sigui A una C^*-àlgebra AF simple, separable, i sigui $p \in A$ una projecció no zero tal que si $u = [p] \in V(A)$, aleshores $\partial_e S_u \cong [-1, 1]$. A més prenem A tal que la seva escala d val 2 a l'interval $[-1, 0)$ i tal que $d(x) = 1/(1-x)$ si $x \in [0, 1]$. (L'existència d'aquest exemple està garantida seguint les línies de l'Exemple 3.2.9.) Aleshores A té tan sols una quasitraça extrema infinita. Definim $f \in W_0^d(S_u)$ com 1 a $[-1, 1)$ i posem $f(1) = 1/2$. Definim també $g \in W_0^d(S_u)$ com 1 a l'interval $[-1, 0)$ i com $1/2$ a l'interval $[0, 1]$. Aleshores, si denotem per I_f i per I_g els ideals d'ordre generats per f i per g respectivament, és clar que $I_f \cap I_g = V(A) \sqcup C[-1, 1]^{++}$, mentre que $I_f \neq V(A) \sqcup C[-1, 1]^{++}$ i també $I_g \neq V(A) \sqcup C[-1, 1]^{++}$. □

Arribem així al punt en que podem examinar amb precisió la riquesa d'extrems de l'àlgebra corona d'una C^*-àlgebra simple amb exactament una quasitraça extrema infinita.

TEOREMA 4.2.23 *Sigui A una C^*-àlgebra simple, separable (sense unitat), amb rang real zero i* $\mathrm{sr}(A) = 1$. *Suposem que A no és elemental i que $V(A)$ és estrictament no perforat. Sigui $p \in A$ una projecció no zero, i suposem que A té exactament una quasitraça extrema infinita a Q_p, que denotem per τ. Si $RR(\mathcal{M}(A)) = 0$, aleshores les següents condicions són equivalents:*

(*a*) *$\mathcal{M}(A)/A$ té riquesa d'extrems;*

(*b*) *La cara complementària de $\{\tau\}$ és tancada a Q_p;*

(*c*) *L'ideal $I_b(A)$ no és establement cofinit.*

DEMOSTRACIÓ: Posem $B = \mathcal{M}(A)$. Observem primer que $L(A)/A$ és un ideal tancat i essencial de B/A, que a més és purament infinit i simple. Llavors, pel Teorema 4.2.8, B/A té riquesa d'extrems si, i només si, $B/L(A)$ té riquesa d'extrems i $\mathfrak{E}(B/L(A))$ és format únicament per isometries i co-isometries. L'última condició és automàtica, gràcies al Lema 4.2.21. Per tant B/A té riquesa d'extrems si, i només si, $B/L(A)$ té riquesa d'extrems.

Com que $I_{fin}(A)/L(A)$ té rang estable 1 (vegeu la Proposició 3.4.13), deduïm del Corol·lari 4.2.7 que $B/L(A)$ té riquesa d'extrems si, i només si, $B/I_{fin}(A)$ té riquesa d'extrems i les isometries parcials extremes de $B/I_{fin}(A)$ es poden pujar a les de $B/L(A)$. Notem que $B/I_{fin}(A)$ és purament infinita i simple, i per tant té riquesa d'extrems, per la Remarca 4.2.5 (*b*). Per tant B/A té riquesa d'extrems si, i només si, les isometries parcials extremes de $B/I_{fin}(A)$ es poden pujar a les de $B/L(A)$, i aquesta última condició val si, i només si, la cara complementària $\{\tau\}'$ de τ a Q_p és una cara tancada, per les Proposicions 4.2.19 i 4.2.20. Hem provat doncs que $(a) \Leftrightarrow (b)$.

L'equivalència entre (*b*) i (*c*) és una conseqüència directa de la Proposició 3.5.9. □

COROL·LARI 4.2.24 *Sigui A una C^*-àlgebra separable (sense unitat), simple, amb rang real zero i* $\mathrm{sr}(A) = 1$. *Suposem que A no és elemental i que $V(A)$ és estrictament no perforat. Sigui $p \in A$ una projecció no zero, i suposem que A té exactament una quasitraça extrema infinita τ a Q_p. Si $RR(\mathcal{M}(A)) = 0$ i $\partial_e Q_p$ és un espai compacte, aleshores $\mathcal{M}(A)/A$ té riquesa d'extrems si, i només si, τ és un punt aïllat a $\partial_e Q_p$.*

DEMOSTRACIÓ: Pel Teorema 4.2.23, sols hem de veure que $\{\tau\}$ és aïllat a $\partial_e Q_p$ si, i només si, la cara complementària de $\{\tau\}$ a Q_p és tancada.

Sigui $u = [p] \in V(A)$, i sigui $d = \sup \phi_u(D(A))$. Pel Teorema 3.3.17 existeix un homeomorfisme afí $\alpha : Q_p \to S_u$, i si $s = \alpha(\tau)$, aleshores $s \in \partial_e S_u$ és l'únic punt extrem on la funció d es fa infinita. Hem de veure, doncs, que $\{s\}$ és aïllat a $\partial_e S_u$ si, i només si, $\{s\}'$ és una cara tancada. Notem que $\{s\}$ és aïllat si, i només si, $\partial_e S_u \setminus \{s\}$ és tancat.

Per [39, Corollary 11.20], hi ha un homeomorfisme afí β entre S_u i $M_1^+(\partial_e S_u)$ tal que $\beta(t) = \varepsilon_t$ per $t \in \partial_e S_u$, i on $\varepsilon_t \in M_1^+(\partial_e S_u)$ és la mesura concentrada en el punt t.

Suposem que $\{\varepsilon_s\}'$ és una cara tancada a $M_1^+(\partial_e S_u)$. Per [39, Proposition 5.25], existeix un tancat $X \subseteq \partial_e S_u$ tal que

$$\{\varepsilon_s\}' = \sigma(X) := \{\mu \in M_1^+(\partial_e S_u) \mid \mu(X) = 1\}.$$

De fet, a la demostració d'aquest resultat, es veu que $X = \{t \in \partial_e S_u \mid \varepsilon_t \in \{\varepsilon_s\}'\}$, d'on és clar que $X = \partial_e S_u \setminus \{s\}$. Per tant, $\partial_e S_u \setminus \{s\}$ és tancat.

Recíprocament, si $\partial_e S_u \setminus \{s\}$ és tancat, escrivim com abans $X = \partial_e S_u \setminus \{s\} = \{t \in \partial_e S_u \mid \varepsilon_t \in \{\varepsilon_s\}'\}$, i tenim per [39, Proposition 5.25] que $F = \sigma(X)$ és una cara tancada. Atès que $\varepsilon_s \notin \sigma(X)$, tenim que $\sigma(X) \subseteq \{\varepsilon_s\}'$. Si ara $\mu \in \{\varepsilon_s\}'$, aleshores $\mu(X) \neq 0$ (en cas contrari tindríem $\mu = \varepsilon_s$, que és impossible). Sigui $\alpha = \mu(\{s\})$. Notem que $1 - \alpha = \mu(X)$. Considerem la mesura $\nu = (\mu - \alpha\varepsilon_s)/(1 - \alpha)$. Clarament

$\nu(X) = 1$ i per tant $\nu \in \sigma(X) \subseteq \{\varepsilon_s\}'$. Així $\mu = \alpha\varepsilon_s + (1-\alpha)\nu$, d'on concloem que $\alpha = 0$ ja que $\sigma(X)$ és una cara, i per tant $\mu \in \sigma(X)$. En conseqüència, la cara $\{\varepsilon_s\}'$ és tancada. □

COROL·LARI 4.2.25 *Sigui A una C^*-àlgebra simple, separable (sense unitat), amb rang real zero i* $\mathrm{sr}(A) = 1$. *Suposem que A no és elemental i que $V(A)$ és estrictament no perforat. Sigui $p \in A$ una projecció no zero, i suposem que A té exactament una quasitraça extrema infinita a Q_p, així com que l'espai $\partial_e Q_p$ és compacte. Si $RR(\mathcal{M}(A)) = 0$ i l'escala és contínua allà on és finita, llavors $\mathcal{M}(A)/A$ té riquesa d'extrems si, i només si, $I_{fin}(A) = L(A)$.*

DEMOSTRACIÓ: Sigui $u = [p] \in V(A)$, i sigui $d = \sup \phi_u(D(A))$. Pel Teorema 2.3.17 i la Remarca 3.4.9, tenim un isomorfisme de monoides $\psi : V(\mathcal{M}(A)) \to V(A) \sqcup W_0^d(S_u)$, on

$$W_0^d(S_u) = \{f \in L(\partial_e S_u)^{++} \mid f + g = nd_0 \text{ per alguna } g \in L(\partial_e S_u)^{++} \text{ i algun } n \in \mathbb{N}\},$$

i on d_0 és la restricció de d a $\partial_e S_u$. Anomenarem d a d_0 d'ara endavant, per conveniència. Pel Teorema 3.3.17, hi ha un homeomorfisme afí $\alpha : Q_p \to S_u$, i si $s = \alpha(\tau)$, llavors $s \in \partial_e S_u$ és l'únic punt extrem on la funció d es fa infinita. Hem de veure, pel Corol·lari 4.2.24, que $\{s\}$ és aïllat si, i només si, $I_{fin}(A) = L(A)$.

Siguin $I_{fin} = \psi(V(I_{fin}(A)))$ i $L = \psi(V(L(A)))$, i suposem que $\{s\}$ és un punt aïllat a $\partial_e S_u$. Sigui $d' \in L(\partial_e S_u)^{++}$ definida per $d'_{|\partial_e S_u \setminus \{s\}} = d$ i $d'(s) = 1$. Aleshores $d' + d = 2d$, de manera que $d' \in W_0^d(S_u)$, i de fet d' és contínua, atès que $\{s\}$ és aïllat. Si $f \in I_{fin}$, aleshores existeix una funció $g \in W_0^d(S_u)$ i existeix $n \in \mathbb{N}$ tals que $f + g = nd$. És clar que podem modificar g convenientment per obtenir $f + g' = md'$, per a $m \in \mathbb{N}$ adequat, d'on veiem que $f \in L$. Recíprocament, si $I_{fin} = L$, construïm $d' \in L(\partial_e S_u)^{++}$ com abans, i atès que $d' \in I_{fin}$, tenim que d' és contínua, de manera que $\{s\}$ ha de ser un punt aïllat. □

REMARCA 4.2.26 *Si A compleix les hipòtesis del Corol·lari anterior, llavors $\mathcal{M}(A)$ té exactament 4 ideals tancats:* $0 \subset A \subset L(A) \subset \mathcal{M}(A)$.

La següent qüestió que ens ocupa és, clarament, quan $\mathcal{M}(A)$ tindrà riquesa d'extrems. Certs casos han estat estudiats a [55, Theorem 3.1]; en la mateixa secció es comenta que $\mathcal{M}(A)$ no té riquesa d'extrems, quan A és una àlgebra AF simple, separable (sense unitat) i no elemental. En la prova del següent resultat, ens basem fortament (en un dels casos) en la demostració de [55, Theorem 2.3], i reproduïm, per conveniència, l'argument.

PROPOSICIÓ 4.2.27 *Sigui A una C^*-àlgebra simple, separable (sense unitat), amb rang real zero i* $\mathrm{sr}(A) = 1$. *Suposem que $V(A)$ és estrictament no perforat. Aleshores $\mathcal{M}(A)$ no té riquesa d'extrems.*

DEMOSTRACIÓ: Clarament, podem assumir que A no és elemental. Suposem en primer lloc que l'escala de A no és idènticament infinita. En aquest cas, el Corol·lari 3.5.2 afirma que $\mathcal{M}(A)$ és establement finit. D'altra banda, notem que $\mathcal{M}(A)$ és un anell primer i per tant $\mathfrak{E}(\mathcal{M}(A))$ és format per isometries i co-isometries. Deduïm doncs que $\mathfrak{E}(\mathcal{M}(A)) = \mathcal{U}(\mathcal{M}(A))$. Per tant, i d'acord amb la Remarca 4.2.5 (a), tenim que $\mathcal{M}(A)$ té riquesa d'extrems si, i només si, $\mathrm{sr}(\mathcal{M}(A)) = 1$. Com que $V(\mathcal{M}(A))$ no és cancel·latiu (per exemple, pel Teorema 2.3.17), concloem que $\mathrm{sr}(\mathcal{M}(A)) \neq 1$, de manera que $\mathcal{M}(A)$ no té riquesa d'extrems (vegeu també la Secció 1 d'aquest capítol).

Suposem ara que l'escala de A és idènticament infinita. Si A té almenys dues quasitraces extremes (que per força seran infinites), aleshores, pel Teorema 4.2.11 (b), tenim que $\mathcal{M}(A)/A$ no té riquesa d'extrems, i per [21, Theorem 3.5], $\mathcal{M}(A)$ tampoc. Ens reduïm doncs a considerar el cas en que A té exactament una quasitraça τ, i que aquesta és infinita. Això vol dir que si (e_n) és una unitat aproximada per A formada per una successió creixent de projeccions, aleshores $\sup \tau(e_n) = \infty$. Denotem per $L(A)$ el mínim ideal tancat de $\mathcal{M}(A)$ que conté A, i sigui $\pi : \mathcal{M}(A) \to \mathcal{M}(A)/A$ l'aplicació de pas al quocient. Prenem una projecció $q \in L(A) \setminus A$. Aleshores $\pi(q)$ és infinita (vegeu [93, Theorem 1.3(a)]) i per tant, existeix $v \in L(A)/A$ tal que $v^*v = \pi(q)$, mentre que $vv^* < \pi(q)$.

Sigui $w = v + 1 - \pi(q)$. Aleshores w és una isometria pròpia de $\mathcal{M}(A)/A$. Per la demostració de [28, Lemma 2.6] (i atès que A té rang real zero), existeix una isometria parcial $u \in \mathcal{M}(A)$, i existeix una projecció $p \in A$ tals que $\pi(u) = w$ i $u^*u = 1 - p$. Per tant $\pi(1 - uu^*) = 1 - ww^* = \pi(q) - vv^* \in \pi(L(A))$. Així $1 - uu^* \in L(A)$, i si (f_n) és una unitat aproximada (formada per projeccions) per la C^*-subàlgebra hereditària $(1 - uu^*)A(1 - uu^*)$, tenim que $\sup \tau(f_n) < \infty$.

Prenem $p' \in A$ una projecció tal que $\tau(p') > \sup \tau(f_n)$. Com que $1 - p, 1 - p' \notin L(A)$, i atès que A té una sola quasitraça extrema (que és infinita), tenim $1-p \sim 1-p'$ a $\mathcal{M}(A)$. Per tant, existeix $r \in \mathcal{M}(A)$ tal que $1 - p' = r^*r$, mentre que $1 - p = rr^*$. Sigui $t = ur$. Aleshores $t^*t = 1 - p'$ i $tt^* = uu^*$, de manera que $\pi(t)$ és isometria a $\mathcal{M}(A)/A$.

Denotem per $\phi : \mathcal{M}(A) \to \mathcal{M}(A)/L(A)$ l'aplicació de pas al quocient, i observem que $\phi(t)$ és un unitari a $\mathcal{M}(A)/L(A)$. Afirmem ara que $\pi(t)$ no puja a cap isometria de $\mathcal{M}(A)$. En cas contrari, existiria $s \in \mathcal{M}(A)$ isometria tal que $\pi(s) = \pi(t)$. Però llavors $\phi(s) = \phi(t)$. Per la Remarca 4.2.14, tenim que

$$\delta([\phi(t)]) = [1 - s^*s] - [1 - ss^*] = [1 - t^*t] - [1 - tt^*],$$

on $\delta : K_1(\mathcal{M}(A)/L(A)) \to K_0(L(A))$ és l'aplicació índex. Aleshores, atès que s és una isometria, tenim $[1-tt^*] = [1-t^*t]+[1-ss^*]$. Com que $RR(\mathcal{M}(A)) = 0$, obtenim pel Lema 4.2.16 una projecció $f \in M_\infty(L(A))$ tal que $(1-tt^*) \oplus f \sim (1-t^*t) \oplus (1-ss^*) \oplus f = p' \oplus (1-ss^*) \oplus f$. Per simplicitat, assumim que $f \in L(A)$. Sigui (t_n) (respectivament, (g_n)) una unitat aproximada (formada per projeccions) per la C^*-àlgebra $(1-ss^*)A(1-ss^*)$ (respectivament, per fAf). Llavors, per [42, Proposition 1.7], per a tot $n \in \mathbb{N}$, existeix $m \in \mathbb{N}$ tal que $p' \oplus t_n \oplus g_n \lesssim f_m \oplus g_m$. Per tant, si $n \in \mathbb{N}$, existeix $m \in \mathbb{N}$ tal que $\tau(p') + \tau(t_n) + \tau(g_n) \leq \tau(f_m) + \tau(g_m) < \tau(p') + \tau(g_m)$, d'on deduïm, prenent suprems, que $\sup \tau(t_n) \leq 0$. Per tant, $1 - tt^* = 0$. Això implica que $1 - uu^* = 0$ i per tant $ww^* = 1$, i això contradiu el fet que w és una isometria pròpia.

Observem també que $\pi(t)$ no puja a cap coisometria. En cas contrari, existiria $s_1 \in \mathcal{M}(A)$ tal que $\pi(s_1) = \pi(t)$ i $s_1s_1^* = 1$. Per tant, $ww^* = \pi(uu^*) = \pi(tt^*) = \pi(s_1s_1^*) = 1$, la qual cosa és impossible, ja que w és una isometria pròpia.

Pel Teorema 4.2.6, concloem que $\mathcal{M}(A)$ no té riquesa d'extrems. □

Concloem aquesta Secció presentant la classe de C^*-àlgebres amb la propietat (WS), i discutint la seva relació amb el que hem estat considerant.

DEFINICIÓ 4.2.28 *([13, Definition 4.3.3], [51, Definition 4.1]) Sigui A una C^*-àlgebra. Diem que un element $x \in A$ té* **bon suport** *si existeix una projecció $p \in A$ tal que $x = xp$ i tal que x^*x és invertible a pAp.*

L'equivalència $(a) \Leftrightarrow (b)$ en el següent Lema és ben coneguda. Donem, però, alguns detalls.

LEMA 4.2.29 *Sigui A una C^*-àlgebra amb unitat. Per a un element $x \in A$, les següents condicions són equivalents:*

(a) x té bon suport;

(b) x^*x és invertible, o bé el zero és un punt aïllat de $\mathrm{Spec}(x^*x)$*;*

(c) x és regular (i.e., existeix $y \in A$ tal que $x = xyx$).

DEMOSTRACIÓ: $(a) \Rightarrow (b)$. Suposem que x té bon suport. Aleshores existeix una projecció $p \in A$ tal que $x = xp$ i x^*x és invertible a pAp. Si x^*x no és invertible i el zero no és un punt aïllat de $\mathrm{Spec}(x^*x)$ aleshores existeix una successió $(\varepsilon_n) \subset \mathrm{Spec}(x^*x)$, amb $\varepsilon_n > 0$ per a tot $n \in \mathbb{N}$ i tal que tendeix a zero. Per tant $\varepsilon_n - x^*x$ no és invertible a A. Ara bé, com que x^*x és invertible a pAp, l'espectre de x^*x a pAp no conté el zero, i atès que l'espectre és compacte, existeix n_0 tal que $\varepsilon_n \notin \mathrm{Spec}_{pAp}(x^*x)$, si $n \geq n_0$. Així, si n és prou gran, $\varepsilon_n p - x^*x$ és invertible a pAp, i en conseqüència $\varepsilon_n - x^*x = \varepsilon_n(1-p) + \varepsilon_n p - x^*x$ és invertible a A, i això és impossible.

$(b) \Rightarrow (a)$. Si x^*x és invertible, és clar que x té bon suport. Si, d'altra banda, el zero és un punt aïllat de $\mathrm{Spec}(x^*x)$, aleshores existeix $\varepsilon > 0$ tal que $\mathrm{Spec}(x^*x) \subseteq \{0\} \cup [\varepsilon, \infty)$. Sigui $p = f_\varepsilon(x^*x)$. És clar que $p = f_{\varepsilon/2}(x^*x)$, i per tant p és una projecció. Per càlcul funcional, x^*x és invertible a la C^*-àlgebra (commutativa) generada per x^*x (i que té unitat p); a més, $x^*xp = px^*x = x^*x$. Deduïm doncs que $xp = x$ i que x^*x és invertible a pAp.

$(a) \Rightarrow (c)$. Suposem que x té bon suport. Aleshores existeix una projecció $p \in A$ tal que $x = xp$ i x^*x és invertible a pAp. Sigui $y \in pAp$ l'invers de x^*x. Llavors $x = xp = xyx^*x = x(yx^*)x$. Per tant, x és regular.

$(c) \Rightarrow (a)$. Suposem que x és regular. Aleshores existeix $y \in A$ tal que $x = xyx$. Sigui $e = yx$. Aleshores e és un idempotent de A, i $xe = x$. Per [12, Proposition 4.6.2] (vegeu també [52, Theorem 26], o [38, Proposition 19.1]) existeix una projecció $p \in A$ tal que $Ap = Ae$. De fet, si prenem $z = 1 + (e^* - e)(e - e^*)$, aleshores e és invertible a A i es pot prendre $p = e^*ez^{-1}$. Com que $e = ep$, tenim que $x = xe = xep = xp$. D'altra banda, i com que x és regular, tenim $Ax = A(yx) = Ae = Ap$, de manera que $x^*Ax = pAp$, i per tant $p \leq k(x^*x)$, per cert $k \in \mathbb{N}$. Veiem doncs que x^*x és invertible a pAp, com volíem. □

DEFINICIÓ 4.2.30 *[51, Definition 4.2] Diem que una C^*-àlgebra A amb unitat satisfà la* **propietat (*WS*)** *si els elements amb bon suport són densos en A.*

L'interès d'aquesta classe rau en el fet que conté tant les C^*-àlgebres de rang real zero com les que tenen riquesa d'extrems (en particular les de rang estable 1), per [51, Proposition 4.3, Proposition 4.4]. En canvi, la propietat (WS) és estrictament més dèbil que les propietats de rang real zero, riquesa d'extrems i rang estable 1. Així, per exemple, considerem la C^*-àlgebra $C[0,1]$, que té rang real $RR(C[0,1]) = \dim[0,1] = 1$ i també rang estable $\mathrm{sr}(C[0,1]) = [\dim[0,1]/2] + 1 = 1$. Per tant, $C[0,1]$ satisfà la propietat (WS) però no té rang real zero. Si, d'altra banda, A és una C^*-àlgebra simple, separable (sense unitat), tal que $RR(A) = 0$ i $\mathrm{sr}(A) = 1$, i si $V(A)$ és estrictament no perforat, aleshores $\mathcal{M}(A)$ no té riquesa d'extrems, per la Proposició 4.2.27. Si, a més, $RR(\mathcal{M}(A)) = 0$, llavors $\mathcal{M}(A)$ satisfà la propietat (WS). Altres exemples es poden trobar a [51].

QÜESTIÓ: 4.2.31 *Sigui A una C^*-àlgebra simple, separable (sense unitat), amb rang real zero. Satisfà llavors $\mathcal{M}(A)$ la propietat (WS)?*

Si A és purament infinita, aleshores la resposta és afirmativa, ja que per [55, Corollary 3.8], en aquest cas $\mathcal{M}(A)$ té riquesa d'extrems. Novament, una resposta afirmativa donaria cotes sobre el rang real d'aquestes àlgebres de multiplicadors, atès que si una C^*-àlgebra B amb unitat satisfà la propietat (WS), aleshores $RR(B) \leq 1$, per [51, Proposition 4.7].

Si A és una C^*-àlgebra simple, separable, amb rang real zero, rang estable 1 i tal que $V(A)$ és estrictament no perforat, una possible línia d'atac es podria basar en analitzar el comportament de la propietat (WS) a través d'extensions, atès que tots els quocients de $\mathcal{M}(A)$ tenen rang real zero, i per tant satisfan la propietat (WS).

Bibliografia

[1] C.A.Akemann, G.K.Pedersen, J.Tomiyama, Multipliers of C^*-algebras, *J. Funct. Anal.* **13** (1973), pp. 277–301.

[2] E.M.Alfsen, Compact convex sets and boundary integrals, Ergebnisse der Math. und ihre Grenzgebiete, Band 57, Springer-Verlag, Berlin, 1971.

[3] P.Ara, Aleph-nought-continuous regular rings, *J. Algebra*, **109 (1)** (1987), pp. 115–126.

[4] P.Ara, On the symmetric ring of quotients of semiprime rings, *Àlxebra*, **54**, Algebra and Geometry (Santiago de Compostela, 1989), Univ. Santiago de Compostela, Santiago de Compostela, pp. 11–15.

[5] P.Ara, Extensions of exchange rings, *J. Algebra*, **197** (1997), pp. 409–423.

[6] P.Ara, E.Pardo, Refinement monoids with weak comparability and applications to regular rings and C^*-algebras, *Proc. Amer. Math. Soc.*, **124(3)** (1996), pp. 715–720.

[7] P.Ara, K.R.Goodearl, K.C. O'Meara, E.Pardo, Separative cancellation for projective modules over exchange rings, *Israel J. Math.*, to appear.

[8] P.Ara, K.R.Goodearl, E.Pardo, D.V.Tyukavkin, K-theoretically simple von Neumann regular rings, *J. Algebra*, **174** (1995), pp. 659–677.

[9] H.Bass, K-Theory and stable algebra, *Publ. I.H.E.S.*, **22** (1964), pp. 5–60.

[10] K.I.Beidar, W.S.Martindale III, A.V.Mikhalev, Rings with generalized identities, Pure and Applied Math., **196**, Marcel Dekker, Inc., 1996.

[11] B.Blackadar, Traces on simple AF C^*-algebras, *J. Funct. Anal.*, **38** (1980), pp. 156–168.

[12] B.BLACKADAR, K-Theory for operator algebras, Springer-Verlag, New York, 1986.

[13] B.BLACKADAR, Comparison theory for simple C^*-algebras, Operator Algebras and Applications (D. Evans and M. Takesaki, eds.), *London Math. Soc. Lecture Notes*, **135**, 1988, pp. 21–54.

[14] B.BLACKADAR, Projections in C^*-algebras, Contemporary Mathematics, Volume **167** (1994), pp. 131–149.

[15] B.BLACKADAR, D.HANDELMAN, Dimension functions and traces on C^*-algebras, *J. Funct. Anal.*, **45** (1982), pp. 297–340.

[16] B.BLACKADAR, M.RØRDAM, Extending states on preordered semigroups and the existence of quasitraces on C^*-algebras, *J. Algebra*, **152** (1992), pp. 240–247.

[17] B.BLACKADAR, M.DADARLAT, M.RØRDAM, The real rank of inductive limit C^*-algebras, *Math. Scand.*, **69** (1991), pp. 211–216.

[18] L.G.BROWN, Homotopy of projections in C^*-algebras of stable rank one. Recent advances in operator algebras (Orléans, 1992.), *Astérisque*, **232** (1995), pp. 115–120.

[19] L.G.BROWN, G.K.PEDERSEN, C^*-algebras of real rank zero, *J. Funct. Anal.*, **99** (1991), pp. 131–149.

[20] L.G.BROWN, G.K.PEDERSEN, On the geometry of the unit ball of a C^*-algebra, II. Preprint, 1993.

[21] L.G.BROWN, G.K.PEDERSEN, On the geometry of the unit ball of a C^*-algebra, *J. Reine Angew. Math.*, **469** (1995), pp. 113–147.

[22] R.BUSBY, Double centralizers and extensions of C^*-algebras, *Trans. Amer. Math. Soc.*, **132** (1968), pp. 79–99.

[23] A.CONNES, Noncommutative Geometry, Academic Press, San Diego, 1994.

[24] J.CUNTZ, The structure of multiplication and addition on simple C^*-algebras, *Math. Scand.*, **40** (1977), pp. 215–233.

[25] J.CUNTZ, Dimension functions on simple C^*-algebras, *Math. Ann.*, **233** (1978), pp. 181–197.

[26] J.CUNTZ, G.K.PEDERSEN, Equivalence and traces on C^*-algebras, *J. Funct. Anal.*, **33** (1979), pp. 135–164.

[27] K.R.DAVIDSON, C^*-algebras by example, Fields Institute Monographs, **6**, A.M.S., Providence, 1996.

[28] G.A.ELLIOTT, Derivations of matroid C^*-algebras II, *Ann. of Math.*, **100** (1974), pp. 407–422.

[29] G.A.ELLIOTT, On the classification of inductive limits of sequences of semisimple finite-dimensional algebras, *J. Algebra*, **38** (1976), pp. 29–44.

[30] G.A.ELLIOTT, The ideal structure of the multiplier algebra of an AF algebra, *C. R. Math. Rep. Acad. Sci. Canada*, **9** (1987), pp. 225–230.

[31] G.A.ELLIOTT, On the classification of C^*-algebras of real rank zero, *J. Reine Angew. Math.*, **443** (1993), pp. 179–219.

[32] G.A.ELLIOTT, D.E.EVANS, The structure of the irrational rotation C^*-algebra, *Ann. of Math.*, **138** (1993), pp. 477–501.

[33] R.ENGELKING, Dimension Theory, North-Holland Publishing Company, 1978.

[34] R.ENGELKING, General topology, Rev. and Compl. Ed., Heldermann Verlag, Berlin, 1989.

[35] E.G.EVANS, Krull-Schmidt and cancellation over local rings, *Pacific J. of Math.*, **46** (1973), pp. 115–121.

[36] L.GILLMAN, M.JERISON, Rings of Continuous Functions, Van Nostrand, Princeton, 1960.

[37] K.R.GOODEARL, "Von Neumann regular rings", Pitman, London 1979; "," Second Ed., Krieger, Malabar, Fl., 1991.

[38] K.R.GOODEARL, Notes on real and complex C^*-algebras, Nantwich, Cheshire, 1982.

[39] K.R.GOODEARL, Partially ordered abelian groups with interpolation, Math. Surveys and Monographs, **20**, A.M.S., Providence, 1986.

[40] K.R.GOODEARL, Notes on a class of simple C^*-algebras with real rank zero, *Publ. Matem.*, **36** (1992), pp. 637–654.

[41] K.R.GOODEARL, Riesz decomposition in inductive limit C^*-algebras, *Rocky Mtn. J. Math.*, **24** **(4)** (1994), pp. 1405–1430.

[42] K.R.GOODEARL, K_0 of multiplier algebras of C^*-algebras with real rank zero, *K-Theory*, **10** (1996), pp. 419–489.

[43] K.R.GOODEARL, C^*-algebras of real rank zero whose K_0's are not Riesz groups, *Canad. Math. Bull.*, **39** **(4)** (1996), pp. 429–437.

[44] K.R.GOODEARL, D.E.HANDELMAN, Rank functions and K_0 of regular rings, *J. Pure Appl. Algebra*, **7** (1976), pp. 195–216.

[45] K.R.GOODEARL, D.E.HANDELMAN, Stenosis in dimension groups and *AF* C^*-algebras, *J. Reine Angew. Math.*, **332** (1982), pp. 1–98.

[46] K.GROVE, G.K.PEDERSEN, Sub-Stonean spaces and corona sets, *J. Funct. Anal.*, **56** (1984), 124–143.

[47] U.HAAGERUP, Quasitraces on exact C^*-algebras are traces. Manuscript, 1991.

[48] D.E.HANDELMAN, Homomorphisms of C^*-algebras to finite AW^*-algebras, *Mich. Math. J.*, **28** (1981), pp. 229–240.

[49] R.H.HERMAN, L.N.VASERSTEIN, The stable range of C^*-algebras, *Invent. Math.*, **77** (1984), pp. 553–555.

[50] G.HOCHSCHILD, Cohomology and representations of associative algebras, *Duke Math. J.*, **14** (1947), pp. 921–948.

[51] J. A JEONG, H.OSAKA, Extremally rich C^*-crossed products and cancellation property. Preprint, 1996.

[52] I.KAPLANSKY, Rings of Operators, Benjamin, New York, 1968.

[53] J.L.KELLEY, Note on a theorem of Krein and Milman, *J. Osaka Inst. Sci. Tech., Part* 1 *Math. Phys.*, **3** (1951), pp. 1–2.

[54] M.KREIN, D.MIL'MAN, On extreme points of regular convex sets, *Studia Math.*, **9** (1940), pp. 133–137.

[55] N.S.LARSEN, H.OSAKA, Extremal richness of multiplier algebras of corona algebras of simple C^*-algebras, *J. Operator Theory*, **38** (1997), pp. 131–149.

[56] H.LIN, Ideals of multiplier algebras of simple AF C^*-algebras, *Proc. Amer. Math. Soc.*, **104** (1988), pp. 239–244.

[57] H.LIN, Simple C^*-algebras with continuous scales and simple corona algebras, *Proc. Amer. Math. Soc.*, **112 (3)** (1991), pp. 871–880.

[58] H.LIN, Generalized Weyl-von Neumann theorems, *Int. J. Math.*, **2 (6)** (1991), pp. 725–739.

[59] H.LIN, Notes on K-Theory of multiplier algebras and corona algebras. Preprint.

[60] H.LIN, Exponential rank of C^*-algebras with real rank zero and the Brown-Pedersen conjectures, *J. Funct. Anal.*, **114** (1993), pp. 1–11.

[61] H.LIN, Generalized Weyl-von Neumann theorems (II), *Math. Scand.*, **77** (1995), pp. 129–147.

[62] H.LIN, S.ZHANG, On infinite simple C^*-algebras, *J. Funct. Anal.*, **100** (1991), pp. 221–231.

[63] H.LIN, S.ZHANG, Certain simple C^*-algebras with nonzero real rank whose corona algebras have real rank zero, *Houston J. Math.*, **18 (1)** (1992), pp. 57–71.

[64] T.A.LORING, Lifting solutions to perturbing problems in C^*-algebras, Fields Institute Monographs, **8**, A.M.S., Providence, 1997.

[65] G.W.MACKEY, Note on a Theorem of Murray, *Bull. Amer. Math. Soc.*, **52** (1946), pp. 322–325.

[66] P.MENAL, Spectral Banach algebras of bounded index, *J. Algebra*, **154 (1)** (1993), pp. 27–66.

[67] P.MENAL, J.MONCASI, Lifting units in self-injective rings and an index theory for Rickart C^*-algebras, *Pacific J. Math.*, **126 (2)** (1987), pp. 295–329.

[68] G.J.MURPHY, C^*-algebras and Operator Theory, Academic Press, Boston, 1990.

[69] J.C.OXTOBY, Measure and category, Graduate Texts in Mathematics, **2**, Springer-Verlag, 1971.

[70] E.PARDO, Monoides de refinament i anells d'intercanvi, Tesi Doctoral, Universitat Autònoma de Barcelona, 1995.

[71] E.PARDO, Metric completions of ordered groups and K_0 of exchange rings, *Trans. Amer. Math. Soc.*, to appear.

[72] G.K.PEDERSEN, C^*-algebras and their automorphism groups, Academic Press, London/New York, 1979.

[73] G.K.PEDERSEN, The linear span of projections in simple C^*-algebras, *J. Operator Theory*, **4** (1980), pp. 289–296.

[74] G.K.PEDERSEN, Analysis Now, Graduate Texts in Mathematics, **118**, Springer-Verlag, 1989.

[75] G.K.PEDERSEN, The λ-function in operator algebras, *J. Operator Theory*, **26** (1991), pp. 345–381.

[76] F.PERERA, Cuntz's relations on positive elements in C^*-algebras, Treball de Recerca, UAB, 1995.

[77] F.PERERA, Monoids arising from positive matrices over commutative C^*-algebras. Preprint, 1996.

[78] F.PERERA, The structure of positive elements for C^*-algebras with real rank zero, *Int. J. Math.*, **8 (3)** (1997), pp. 383–405.

[79] M.A.RIEFFEL, Dimension and stable rank in the K-Theory of C^*-algebras, *Proc. London Math. Soc.*, **46 (3)** (1983), pp. 301–333.

[80] M.A.RIEFFEL, C^*-algebras associated with irrational rotations, *Pacific J. Math.*, **93 (2)**, (1981), pp. 415–429.

[81] A.C.M. van ROOIJ, W.H.SCHIKHOF, A second course on real functions, Cambridge University Press, 1982.

[82] M.RØRDAM, Advances in the theory of unitary rank and countable approximation, *Ann. of Math.*, **128** (1988), pp. 153–172.

[83] M.RØRDAM, Ideals in the multiplier algebra of a stable C^*-algebra, *J. Operator Theory*, **25** (1991), pp. 283–298.

[84] M. RØRDAM, On the structure of simple C^*-algebras tensored with a UHF-algebra, II, *J. Funct. Anal.*, **107** (1992), pp. 255–269.

[85] L.A. SKORNJAKOV, Complemented modular lattices and regular rings, Oliver and Boyd, Edinburgh, 1964.

[86] L.N.VASERSTEIN, Stable range of rings and dimensionality of topological spaces, *Funct. Anal. Appl.*, **5** (1971), pp. 102–110.

[87] L.N.VASERSTEIN, Bass's first stable one condition, *J. Pure Appl. Algebra*, **34** (1984), pp. 319–330.

[88] J.VILLADSEN, Simple C^*-algebras with perforation. Preprint, 1995.

[89] R.C.WALKER, The Stone-Čech Compactification, Ergebnisse der Mathematik und ihrer Grenzgebiete, Band 83, Springer-Verlag, Berlin, 1974.

[90] R.B.WARFIELD, Exchange rings and decomposition of modules, *Math. Ann.*, **199** (1972), pp. 31–36.

[91] N.E.WEGGE-OLSEN, K-Theory and C^*-algebras. Oxford University Press, 1993.

[92] H.-P.YU, Stable range one for exchange rings, *J. Pure Appl. Algebra*, **98** (1995), pp. 105–109.

[93] S.ZHANG, On the structure of projections and ideals of corona algebras, *Can. J. Math.*, **41** (1989), pp. 721–742.

[94] S.ZHANG, C^*-algebras with real rank zero and the internal structure of their corona and multiplier algebras, Part III, *Can. J. Math.*, **62** (1990), pp. 159–190.

[95] S.ZHANG, A property of purely infinite simple C^*-algebras, *Proc. Amer. Math. Soc.*, **109 (3)** (1990), pp. 717–720.

[96] S.ZHANG, A Riesz decomposition property and ideal structure of multiplier algebras, *J. Operator Theory*, **24** (1990), pp. 209–225.

[97] S.ZHANG, K_1-groups, quasidiagonality, and interpolation by multiplier projections, *Trans. Amer. Math. Soc.*, **325 (2)**, (1991), pp. 793–818.

[98] S.ZHANG, C^*-algebras with real rank zero and their corona and multiplier algebras, Part I, *Pacific J. Math.*, **155** (1992), pp. 169–197.

[99] S.ZHANG, C^*-algebras with real rank zero and their corona and multiplier algebras, Part II, *K-Theory*, **6** (1992), pp. 1–27.

[100] S.ZHANG, C^*-algebras with real rank zero and their corona and multiplier algebras, Part IV, *Int. J. Math.*, **3** (1992), pp. 309–336.

Índex terminològic