Universitat Autònoma de Barcelona

Teoria-K no estable per a anells de multiplicadors

Francesc Perera Domènech

Memòria presentada per aspirar al grau de doctor en Ciències (Matemàtiques).

Departament de Matemàtiques de la Universitat Autònoma de Barcelona.

Bellaterra, Febrer del 1998.

CERTIFICO que aquesta memòria ha estat realitzada per Francesc Perera Domènech, sota la direcció del Dr. Pere Ara i Bertran.

Bellaterra, Febrer de 1998

Dr. Pere Ara Bertran

a la Montserrat

La poesia és un aspecte del pensament.
La bellesa és un aspecte de la veritat.
MARTIN HEIDEGGER

Índex

Introducció

A les acaballes del segle dinou, molts experiments de la Física es van encaminar cap a l'anàlisi de l'espectre dels àtoms que constitueïen la matèria. Per exemple, la llum emesa per una làmpara Geissler plena d'hidrògen es pot analitzar espectrogràficament, emprant un prisma, i s'obtenen una sèrie de línies indexades per les respectives longituds d'ona. Aquest procediment permet recollir informació de l'estructura atòmica de l'element en qüestió (en aquest cas, de l'hidrògen), tot caracteritzant-lo.

Diversos processos experimentals van portar a considerar les freqüències ν, en comptes de les longituds d'ona λ, com un paràmetre més adequat per indexar l'espectre dels àtoms estudiats; de fet, existeix un conjunt de freqüències I tal que l'espectre es pot descriure com $\nu_{ij} = \nu_i - \nu_j$, per parelles $\nu_i, \nu_j \in I$. Es dedueix el següent principi: $\nu_{ik} = \nu_{ij} + \nu_{jk}$, anomenat el principi de Ritz-Rydberg, que estableix una llei de composició parcialment definida sobre l'espectre.

La Física Teòrica de l'època, encara basada en la mecànica de Newton i en les lleis de Maxwell, no oferia una explicació satisfactòria per aquesta fenomenologia. De fet, els intents d'aplicar el punt de vista clàssic portaven a resultats teòrics que després contradeien l'experimentació, com ara que el conjunt de freqüències de les radiacions emeses per un àtom formen un subgrup de $\mathbb{R}$. Es va fer necessari, doncs, qüestionar la mecànica clàssica, i això és el que va fer Heisenberg. En el sentit clàssic, l'àlgebra de les quantitats físiques observables es pot llegir del grup de freqüències emeses, i és l'anomenada àlgebra de convolució del sistema, que és commutativa. Heisenberg va cenyir-se al grupoide de freqüències que en realitat s'observava; formalment, la fabricació d'una àlgebra de convolució té encara sentit, però ja no és commutativa, sinó isomorfa a l'àlgebra de matrius complexes. Aquest és un dels primers exemples del que s'ha anat anomenant topologia no commutativa: la substitució de l'àlgebra de funcions sobre l'espai de fases per "l'espai no commutatiu" format per l'àlgebra de matrius.

Posteriors desenvolupaments de la Física van posar de manifest la seva profunda interconnexió amb aspectes de la matemàtica pura, dins el marc de les àlgebres d'operadors. Així, l'assignació d'una C^*-àlgebra que és un límit inductiu de C^*-àlgebres de dimensió finita a un sistema macroscòpic permet descriure'n els observables a través dels elements de l'àlgebra. Les traces definides en aquesta àlgebra expressen condicions d'equilibri en el sistema i permeten analitzar-ne l'evolució. (Per un tractament més complet i exhaustiu sobre aquest tema, vegeu [23].)

• **Àlgebres d'operadors i anells regulars.** La necessitat fonamental d'entendre fenòmens relacionats amb la Mecànica Quàntica va provocar l'aparició dels anells d'operadors sobre un espai de Hilbert, i l'estudi dels seus reticles de projeccions. Cap als anys vint, Murray i von Neumann van axiomatitzar aspectes d'aquesta mecànica, definint d'aquesta forma les àlgebres de von Neumann (o W^*-àlgebres), que són subàlgebres autoadjuntes de l'àlgebra d'operadors lineals i fitats sobre un espai de Hilbert $\mathcal{H}$, denotada $\mathbb{B}(\mathcal{H})$, i tancades en la topologia dèbil d'operadors.

En una W^*-àlgebra, les projeccions formen un reticle complet i (orto)complementat, amb unes propietats d'incidència similars a les del reticle de subespais vectorials d'una Geometria Projectiva de dimensió finita, però en un context que en general involucra infinites dimensions. Von Neumann va establir un sistema d'axiomes que, en el cas directament finit, caracteritzaven aquesta nova estructura, introduint el concepte de Geometria Contínua l'any trenta-cinc: reticle modular complet i complementat tal que l'ínfim i el suprem satisfan certes propietats de continuïtat (reflectides en lleis de distribució feble).

En analogia al resultat clàssic que el reticle de subespais d'una Geometria Projectiva de dimensió finita sota certes hipòtesis es pot coordenar per un anell de divisió D (en el sentit que aquest reticle és isomorf al reticle d'ideals dreta d'un anell de matrius sobre D), von Neumann va provar que tot reticle modular complementat L - també sota certes restriccions - es pot coordenar per un anell regular R (breument, un anell R és regular si per a tot $x \in R$, existeix $y \in R$ tal que $x = xyx$, o, equivalentment, si tot ideal dreta principal és generat per un idempotent), és a dir, L és isomorf al reticle d'ideals principals dreta de R. A partir d'aquest moment, els anells regulars es van constituir com una eina per estudiar reticles i geometries contínues, fins que van adquirir l'estatus de teoria independent, especialment a través dels textos de Kaplansky ([52]), Skornjakov ([85]), i més recentment, de Goodearl ([37]).

L'abundància de projeccions en una W^*-àlgebra A (si $t \in A$, llavors les projeccions sobre Ker t i sobre $\overline{\operatorname{Im} t}$ pertanyen a A; l'anul·lador de qualsevol subconjunt de A és generat per una projecció) i la riquesa d'estructura d'aquests anells va suggerir un procés d'axiomatització (de parts de la teoria) amb la idea de fons d'incidir en aspectes més algebraics de les àlgebres de von Neumann. Aquest procés fou dut a terme, entre d'altres, per Steen, Gel'fand, Naĭmark, Rickart, von Neumann, i es va aconseguir una culminació amb la introducció de les AW^*-àlgebres (que contenen les W^*-àlgebres) de la mà de Kaplansky als anys cinquanta, com un marc algebraic més general on tractar nocions intrínseques d'àlgebres de von Neumann (i.e., " no espacials", sense fer referència a l'acció dels elements de l'anell sobre els vectors d'un espai de Hilbert).

Com a part d'aquesta evolució cap a l'axiomàtica de la teoria, apareix cap als anys quaranta el concepte de C^*-àlgebra, basat en considerar subàlgebres autoadjuntes de l'àlgebra d'operadors lineals i fitats sobre un espai de Hilbert, aquesta vegada tancades per la topologia uniforme. Des del punt de vista abstracte, una C^*-àlgebra és una àlgebra complexa de Banach, involutiva, tal que compleix l'elegant condició $\|xx^*\| = \|x\|^2$. Les AW^*-àlgebres són de fet casos particulars de C^*-àlgebres, amb la propietat addicional que l'anul·lador dreta de tot subconjunt és generat per una projecció.

L'avenç de la teoria, bé coordenant el reticle de projeccions de W^*-àlgebres, bé aïllant aspectes algebraics de les àlgebres d'operadors ha presentat de bon començament una profunda interconnexió. Així, Berberian provà que tota AW^*-àlgebra directament finita A admet una immersió canònica en un anell regular amb involució R que coordena el reticle de projeccions de A (i.e., R i A tenen el mateix reticle de projeccions). Extensions d'aquest fet foren establertes per Handelman, per la classe més general de C^*-àlgebres de Rickart (finites), és a dir, C^*-àlgebres on l'anul·lador de cada element és generat per una projecció. Més precisament, Handelman va demostrar que tota C^*-àlgebra de Rickart finita A es pot immergir canònicament dins un anell regular, que també coordena el reticle de projeccions de A. Un aspecte compartit per totes aquestes àlgebres és l'abundància de projeccions (idempotents autoadjunts), fins al punt que la seva estructura aporta informació significativa sobre l'estructura de l'àlgebra. Aquesta filosofia ha estat estesa posteriorment a la classe de C^*-àlgebres amb rang real zero, introduïda per Brown i Pedersen el 1991 ([19]), i que constitueixen un marc de treball molt més ampli i, com veurem posteriorment, més convenient.

• **Anells de multiplicadors.** En el sentit clàssic, el terme anell sempre s'ha referit a anells que contenen la unitat. En molts aspectes (sovint sota la influència de la Teoria K), el punt de vista actual es centra en els anells que no necessàriament tenen unitat. Una forma clàssica d'adjuntar una unitat a R és construint l'anomenada *extensió de Dorroh*, que consisteix en considerar $R_1 := R \times \mathbb{Z}$, amb la suma definida component a component, i el producte donat a través de $(x, n)(y, m) = (xy + mx + ny, nm)$. La unitat de R_1 és $(0, 1)$, i l'aplicació $\varphi : R \to R_1$ definida per $\varphi(x) = (x, 0)$ és un morfisme d'anells injectiu tal que $\varphi(R)$ és un ideal bilateral de R_1. Aquest canvi d'actitud (cap als anells sense unitat) posa de manifest el problema universal d'adjuntar una unitat a un anell R, que suposarem semiprimer. Hi ha dos objectes característics que resolen aquest problema, i que podem introduir des del punt de vista del llenguatge de categories; ambdues construccions són universals. Sigui $\mathcal{C}$ la categoria que té per objectes les parelles (T, φ_T) on T és un anell amb unitat i $\varphi_T : R \to T$ és un morfisme d'anells injectiu tal que $\varphi_T(R)$ és un ideal essencial de T. Els objectes de $\mathcal{C}$ s'anomenaran unitificacions de R. Els morfismes de $\mathcal{C}$ són morfismes d'anells amb unitat $f : T \to T'$, tals que $f \circ \varphi_T = \varphi_{T'}$. Definim aleshores $\widetilde{R}$ com un objecte inicial d'aquesta categoria i $\mathcal{M}(R)$ com un objecte final (únics llevat d'isomorfisme). Aleshores $\widetilde{R}$ és la mínima unitificació de R i $\mathcal{M}(R)$ és la màxima unitificació de R. Dins $\mathcal{M}(R)$, podem descriure $\widetilde{R}$ com el subanell de $\mathcal{M}(R)$ generat per R i per $1_{\mathcal{M}(R)}$.

Històricament, l'àlgebra de multiplicadors d'una K-àlgebra associativa A apareix per primera vegada a l'article de Hochschild ([50]) l'any quaranta-set, on s'anomena anell de "multiplicacions", i la seva definició coincideix, en el cas d'una C^*-àlgebra, amb la de dobles centralitzadors que va donar posteriorment Johnson l'any seixanta-quatre. Aquest concepte va ésser introduït com a eina per estudiar les possibles extensions d'una àlgebra A per una altra àlgebra C. Més concretament, si A, B i C són àlgebres associatives, diem que B és una extensió de A per C si existeix una successió exacta curta:

$$0 \to A \to B \to C \to 0.$$

És un problema clàssic determinar, fixades A i C, totes les extensions possibles, llevat d'una possible identificació mòdul una relació d'equivalència. Hochschild va estudiar aquest problema i el va resoldre essencialment, usant tècniques relatives a l'anell de multiplicadors.

Uns anys més tard (el 1968), Busby va desenvolupar una Teoria d'Extensions anàloga per C^*-àlgebres ([22]). En particular, va provar que si A és una C^*-àlgebra, aleshores $\mathcal{M}(A)$ també (i va introduir la topologia estricta a $\mathcal{M}(A)$, provant que $\mathcal{M}(A)$ és estrictament tancada, i que de fet és la completació estricta de A). En el seu treball, i d'una manera anàloga al que va fer Hochschild, Busby assigna a cada extensió

$$0 \to A \to B \to C \to 0$$

de C^*-àlgebres un invariant (conegut actualment com l'*invariant de Busby*), que és un $*$-morfisme $\tau : C \to \mathcal{M}(A)/A$, construït usant la universalitat de $\mathcal{M}(A)$. A més, va provar que si B_1 i B_2 són extensions de A per C amb invariants associats τ_1 i τ_2, respectivament, aleshores $\tau_1 = \tau_2$ si i només si existeix un isomorfisme $\psi : B_1 \to B_2$

que fa el següent diagrama commutatiu:

$$\begin{tikzcd} A \arrow[r] \arrow[d, "\mathrm{id}"] & B_1 \arrow[r] \arrow[d, "\psi"] & C \arrow[d, "\mathrm{id}"] \\ A \arrow[r] & B_2 \arrow[r] & C \end{tikzcd}$$

Si denotem per $\mathrm{Ext}(A, C)$ el conjunt d'extensions de A per C, mòdul la relació d'equivalència natural donada per l'invariant de Busby, aleshores es desprèn que hi ha una bijecció

$$\mathrm{Ext}(A, C) \longleftrightarrow \mathrm{Hom}(C, \mathcal{M}(A)/A).$$

Veiem doncs que el coneixement de l'estructura de $\mathcal{M}(A)$ o de $\mathcal{M}(A)/A$ és fonamental per classificar les extensions de A per C.

• **Teoria *K*.** És una tècnica clàssica de Teoria d'Anells estudiar les propietats d'un determinat anell a través de les propietats dels seus mòduls. Uns mòduls especialment significatius són els mòduls projectius finitament generats. Per analitzar aquest tipus especial de mòduls o, equivalentment, els idempotents de matrius sobre l'anell, una de les eines més fructíferes ha estat la Teoria K (algebraica). En essència, la Teoria K tracta aspectes d'àlgebra lineal sobre un anell R. Aquesta teoria consisteix en assignar a un anell R una col·lecció de grups abelians $K_i(R)$, per a $i \geq 0$, connectats a través d'una successió exacta, els quals, són invariants de R i permeten entendre millor aspectes estructurals de l'anell. L'ús de la Teoria K afecta àrees de les matemàtiques com ara la topologia, l'àlgebra o l'anàlisi funcional. El seu desenvolupament inicial es va fer els anys cinquanta de la mà de Grothendieck i Serre com una eina per estudiar problemes relatius a la geometria algebraica. La construcció de Grothendieck va ser usada a principis dels anys seixanta per tractar qüestions relacionades amb la topologia. Més endavant, Grothendieck, Bass i altres van adaptar aquesta teoria per analitzar l'estructura d'anells i àlgebres. En el context d'anells, els grups més estudiats són K_0 i K_1, que de fet són els grups on incidirem al llarg del treball. L'objectiu del grup $K_0(R)$ és estudiar les classes d'equivalència d'idempotents sobre $M_n(R)$ (per a tot n), mòdul una relació d'equivalència estable. El grup $K_1(R)$ analitza el comportament dels grups lineals $GL_n(R)$ sobre R. En el context d'àlgebres d'operadors, és un fet conegut que la successió de grups associats a una C^*-àlgebra es redueix, llevat isomorfisme, als grups K_0 i K_1 (prenent aquí el K_1 topològic), interconnectats a través d'una successió exacta, anomenada la successió exacta cíclica de 6 termes (associada a un ideal tancat I d'una C^*-àlgebra A).

Una elaboració de la Teoria K, combinada amb la Teoria d'Extensions ens porta a la Teoria K de Kasparov (també anomenada Teoria KK), que per a una parella de C^*-àlgebres A i B, on A és separable i B té σ-unitat produeix una sèrie de grups $KK^n(A, B)$, per $n \geq 0$, amb la particularitat que $KK^n(\mathbb{C}, B) \cong K_n(B)$, per a $n = 0, 1$. En la construcció d'aquesta teoria, els anells de multiplicadors hi juguen un paper fonamental. La Teoria K de Kasparov ha esdevingut un element clau per entendre els K-grups de C^*-àlgebres no commutatives, i ha mostrat la seva utilitat en diverses aplicacions a la geometria i la topologia (vegeu [23]).

Un aspecte relacionat amb la Teoria K és el rang estable. Aquest concepte va ser introduït per Bass ([9]), amb l'objectiu de donar una estimació sobre l'enter més petit n pel qual $GL_n(R)$ "genera" el grup $K_1(R)$ (on R és un anell arbitrari). Les propietats bàsiques del rang estable van ser establertes per Vaserstein l'any setanta-u ([86]). La relació d'aquest concepte amb la teoria de mòduls sobre un anell va aflorar al treball d'Evans ([35]) l'any setanta-tres, on es prova que si l'anell d'endomorfismes d'un mòdul M té rang estable 1, aleshores donats mòduls qualssevol A i B, la relació $M \oplus A \cong M \oplus B$ implica $A \cong B$. Diverses extensions d'aquest fet, degudes a Warfield, van ser establertes posteriorment, per a valors del rang estable superiors a 1.

Pel que fa a àlgebres de Banach, una noció de rang estable topològic fou introduïda per Rieffel el 1983 ([79]). Hi ha exemples mostrant que aquest nou concepte difereix del rang estable algebraic; Rieffel va preguntar si per C^*-àlgebres ambdues nocions coincidien ([79, Question 2.7]). La resposta afirmativa a aquesta pregunta va arribar de la mà de Herman i Vaserstein, a [49].

El rang estable ha estat considerat, en aquest context, un bon anàleg no commutatiu de la dimensió d'un espai topològic. Una raó per això és que si X és un espai compacte de Hausdorff i $A = C(X)$ és l'anell de funcions contínues (a valors complexes) sobre X, aleshores $\mathrm{sr}(A) = [\dim X/2] + 1$, on $\dim X$ és una noció de dimensió per espais topològics, anomenada "covering" o de recobriment (i que ha estat àmpliament estudiada; vegeu, per exemple, [33]). Aquest no és, però, un invariant completament satisfactori en el sentit que espais topològics de dimensions diferents donen lloc a àlgebres amb el mateix rang estable. Per aquest motiu, i modificant la definició de rang estable topològic, Brown i Pedersen van definir a [19] el rang real d'una C^*-àlgebra A, denotat $RR(A)$; en particular, van provar que si A és commutativa, i per tant de la forma $C(X)$ per a un cert espai compacte Hausdorff X, aleshores $RR(A) = \dim X$. A partir d'aquest moment s'adopta el punt de vista que el rang real expressa la dimensió no commutativa d'una forma més adient que no pas el rang estable. Ambdós invariants tenen importància i estan relacionats per l'expressió $RR(A) \leq 2\mathrm{sr}(A) - 1$.

Un cas important (de fet, el primer cas a ser tractat) és el de rang real zero. Més precisament, una C^*-àlgebra A té rang real zero si donat un element $x \in A$ tal que $x = x^*$, existeix una successió de projeccions $p_n \in xA$ (que commuten) tals que $x = \lim_{n\to\infty} p_n x$ (d'alguna manera, es pot pensar que A és aproximadament regular). Aquesta és una caracterització equivalent de la definició original, deguda a Menal ([66]).

La classe de C^*-àlgebres amb rang real zero és molt àmplia i inclou gran quantitat d'exemples, d'entre els que destaquem les àlgebres de von Neumann, les AW^*-àlgebres i les C^*-àlgebres de Rickart. També ho són les àlgebres AF, que apareixen com la generalització dels operadors compactes sobre un espai de Hilbert, i que són clausures d'unions de successions creixents de subàlgebres semisimples. D'altres exemples inclouen les àlgebres de rotació irracional, les purament infinites simples (i en particular les àlgebres de Cuntz), etc. Les C^*-àlgebres amb rang real zero constitueixen una classe molt estudiada, i ara per ara és la més entesa. De fet, una de les vies de desenvolupament de la teoria es basa, actualment, en l'anomenat Programa d'Elliott, és a dir, l'estudi d'invariants de Teoria K que permetin classificar alguna subclasse de les C^*-àlgebres amb rang real zero. L'origen d'aquesta tècnica es pot situar en la classificació de les àlgebres AF. Elliott va establir a [29] que el grup K_0, juntament amb una estructura ordenada natural classifica les àlgebres AF llevat isomorfisme. És a dir, si A i B són AF, aleshores $A \cong B$ si i només si $K_0(A) \cong K_0(B)$ com a grups parcialment ordenats. Aquest és un dels exemples on l'estructura ordenada del grup K_0 juga un paper fonamental. Arran d'aquest resultat, l'atenció cap a l'estructura ordenada dels K-grups es va intensificar (vegeu, per exemple, [39]).

Els següents exemples que es van examinar plantejaven la qüestió d'esbrinar la naturalesa intrínseca d'una àlgebra AF. Breument: si una àlgebra no és AF, per què no? En diverses construccions apareix de manera natural (per la mateixa essència de la construcció) que l'única obstrucció per ésser AF és que el grup K_1 no és trivial (mentre que per àlgebres AF és un fet conegut que $K_1 = 0$), i que el grup K_0 pot presentar torsió. A partir d'aquest punt, els esforços es van centrar en estudiar un invariant que involucrés K_0, K_1 i, en alguns casos, l'espai de traces de l'àlgebra. Aquesta línia d'atac estava dirigida a les àlgebres separables, simples, nuclears i amb rang real zero. I ha resultat ésser exitosa, almenys per classes que generalitzen raonablement la classe AF. Algunes d'aquestes àlgebres estan incloses dins la classe de C^*-àlgebres anomenades AH, i.e., aquelles que són límits inductius (en la categoria de C^*-àlgebres) de successions d'àlgebres de la forma $M_{n_1}(C(X_1))\oplus\ldots\oplus M_{n_k}(C(X_k))$, per a espais compactes Hausdorff $X_1, \ldots, X_k$ (notem que el cas $X_1 = \ldots = X_k = \{*\}$ és exactament el cas AF). Si tots els espais que apareixen són iguals a cercles, grafs o esferes, i el límit té rang real zero, aleshores el grup $K_* := K_0 \oplus K_1$, equipat amb un cert ordre (que en el cas simple reverteix únicament en la primera component), és un invariant que classifica (aquest és un resultat degut a Elliott, Gong, Lin, Pasnicu i Su). Hi ha encara, però, dues preguntes obertes fonamentals. En primer lloc, decidir si la Teoria K és un invariant complet per les àlgebres AH amb rang real zero (vegeu [14, Problem 7.3.3]); en segon lloc, determinar si tota C^*-àlgebra establement finita, separable, nuclear i amb rang real zero és de fet AH (vegeu [14]).

Malgrat aquests bons resultats, podria ser que la Teoria K no fos un invariant prou potent per classificar totes les C^*-àlgebres simples, separables, amb rang real zero, establement finites i nuclears. Per exemple, Goodearl va construir a [43] una C^*-àlgebra separable amb unitat, establement finita, nuclear, amb rang real zero, rang estable 2 i amb els mateixos K-grups que una àlgebra AF, però sense ser-ho. Aquesta C^*-àlgebra no és tampoc AH. Això fa pensar que una hipòtesi més forta que la finitud estable hauria de ser considerada, com ara el rang estable 1. En els casos de C^*-àlgebres amb rang real zero, i també en el cas d'anells regulars, la condició de rang estable 1 té una traducció exacta al nivell de $K_0(R)$, dient que el monoide $K_0^+(R)$ (és a dir, el conjunt d'elements positius per l'ordre), és precisament el monoide de classes d'equivalència d'idempotents $V(R)$.

Aquest fet motiva que, en l'estudi d'anells R que no tinguin rang estable 1, es dirigeixi més l'atenció cap al monoide $V(R)$, més que no pas al grup $K_0(R)$, ja que en la construcció d'aquest darrer hi ha involucrada una noció d'estabilitat que "disfressa" les relacions entre idempotents. Aquesta és la base del que anomenem Teoria K no estable, que ha estat usada per Blackadar, Rørdam, Ara, Goodearl, O'Meara i Pardo (entre altres) els anys 80-90. La Teoria K no estable emfatitza doncs les relacions d'equivalència i ordre entre idempotents, i aquest fet posa de manifest la necessitat de determinar amb exactitud quines propietats satisfà aquest ordre. Així, en tots els exemples estudiats el grup K_0 és dèbilment no perforat. De fet, no es coneix cap exemple de C^*-àlgebra amb rang real zero (respectivament, d'anell regular), amb rang estable 1, i tal que K_0 no sigui dèbilment no perforat. Aquesta condició tècnica és, doncs, natural i en el cas simple es pot llegir en la següent propietat del monoide $V(R)$: si per algun $n \in \mathbb{N}$ tenim $nx + z = ny$ en el monoide, amb $z \neq 0$, aleshores $x + w = y$ amb algun $w \neq 0$. Diem en aquest cas que $V(R)$ és estrictament no perforat.

Una estreta relació amb aquest tema la guarden les qüestions de comparabilitat. Sobre una C^*-àlgebra A amb unitat, una quasitraça és una funció τ de $M_\infty(A)_+$ a $[0, \infty)$ tal que $\tau(x^*x) = \tau(xx^*)$ per a tot x, tal que $\tau(x+y) = \tau(x) + \tau(y)$ si x i y commuten, i tal que $\tau(1) = 1$. Una qüestió important pel que fa a l'estructura de les C^*-àlgebres simples és la Qüestió Fonamental de Comparabilitat (FCQ), establerta per Blackadar a [13]: *Si A és una C^*-àlgebra simple i $p, q \in A$ són projeccions tals* *que* $\tau(p) < \tau(q)$ *per a tota quasitraça* τ, *podem assegurar que* $p \prec q$? Aquesta pregunta ha estat resposta afirmativament per algunes classes de C^*-àlgebres, que inclouen les àlgebres AF simples, i admet una extensió natural al conjunt de classes d'equivalència d'elements positius de $M_\infty(A)$ (denotat per $S(A)$ i equipat amb una estructura ordenada i additiva), l'anomenada (FCQ+). En particular, si A és simple i té rang real zero, a [78] es demostra que la resposta a la (FCQ) és afirmativa si, i només si, la resposta a la (FCQ+) és afirmativa, si i només si, $V(A)$ és estrictament no perforat; això posa de manifest la importància de la no perforació estricta, així com la necessitat d'aprofundir en l'estudi del monoide $S(A)$.

• **Les conjectures de Brown i Pedersen.** Els problemes d'extensions plantegen diverses qüestions sobre les "dimensions" dels anells que hi apareixen. És a dir, donada $0 \to A \to B \to C \to 0$, on A, B i C són C^*-àlgebres, és interessant relacionar els rangs reals de A, B i C. Concretament, es sap que $RR(B) = 0$ si, i només si, $RR(A) = RR(C) = 0$ i les projeccions de C es poden "pujar" a projeccions de B. Fins i tot, però, és un problema obert determinar, o fitar, els rangs reals de B i de C sabent que $RR(A) = 0$. Aquesta qüestió es va tractar, en primer lloc, per la successió bàsica següent:

$$0 \to A \to \mathcal{M}(A) \to \mathcal{M}(A)/A \to 0,$$

i motivats per alguns resultats experimentals, Brown i Pedersen van establir l'any 91 les següents conjectures:

(1) Si A és una àlgebra AF, aleshores $RR(\mathcal{M}(A)) = 0$.

(2) $RR(\mathcal{M}(A)) = 0$ per a tota C^*-àlgebra A amb σ-unitat, tal que $RR(A) = 0$ i $K_1(A) = 0$.

(3) Si A és una C^*-àlgebra amb σ-unitat i $RR(A) = 0$, llavors $RR(\mathcal{M}(A)/A) = 0$.

Desde la seva formulació a [19], s'ha progressat molt en la resolució d'aquests problemes. En particular, Lin va provar a [60] que si $\mathrm{sr}(A) = 1$, aleshores la conjectura (2) (i per tant la (1)) és vàlida (remarquem aquí que Lin va establir (1) amb anterioritat, a [58]). En el mateix article, es prova que si A és simple i $\mathrm{sr}(A) = 1$, aleshores la conjectura (3) és vàlida. El cas general contempla una àmplia varietat de situacions. Per exemple, si A és purament infinita i simple i si $K_1(A) \neq 0$, aleshores $RR(A) = 0$, $RR(\mathcal{M}(A)) \neq 0$, i en canvi $RR(\mathcal{M}(A)/A) = 0$. D'altres exemples satisfan $RR(A) \neq 0$, però en canvi $RR(\mathcal{M}(A)/A) = 0$. En aquests casos, l'existència d'un ideal tancat minimal a $\mathcal{M}(A)/A$ esdevé fonamental per a l'estudi de les projeccions de $\mathcal{M}(A)/A$. És convenient remarcar en aquest punt i de cara a l'atac general de les conjectures que és un problema obert determinar si un anell regular (o una C^*-àlgebra amb rang real zero) simple és o bé purament infinit, o bé té rang estable 1 (progressos recents s'han aconseguit a [7]).

• **Objectius.** L'estudi dels anells de multiplicadors de C^*-àlgebres ha estat un objectiu perseguit per diversos autors, d'entre els que destaquem Elliott, Goodearl, Lin i Zhang. A [28] i a [30], Elliott estudia propietats dels multiplicadors per matroides i per àlgebres AF. Els resultats obtinguts per Goodearl a [42] fan un ús extensiu de Teoria K; concretament, es dóna una descripció del grup $K_0(\mathcal{M}(A))$ (i en particular de la seva estructura additiva i ordenada) per una àmplia classe de C^*-àlgebres amb σ-unitat i no necessàriament simples (i que conté alguns dels resultats de Lin a [59]) . El cas simple és abordat per Lin en diversos treballs, on prova que el reticle d'ideals de $\mathcal{M}(A)$ per una àlgebra A dins la classe AF és finit, sota unes hipòtesis restrictives - un nombre finit d'estats extrems (vegeu [56]). També prova l'existència de l'ideal tancat minimal $L(A)/A$ a $\mathcal{M}(A)/A$, per C^*-àlgebres simples i separables, i caracteritza aquelles A dins aquesta classe tals que $\mathcal{M}(A)/A$ és simple, en termes d'una condició de l'àlgebra base - escala contínua (vegeu [57]). En la sèrie d'articles [98], [99], [94], [100], Zhang fa un estudi exhaustiu de les C^*-àlgebres amb rang real zero i els seus anells de multiplicadors, fent èmfasi en el cas purament infinit simple, en estabilitzacions de certes C^*-àlgebres, i en algunes propietats del reticle d'ideals de $\mathcal{M}(A)/A$ quan A és simple, amb σ-unitat i $RR(A) = 0$. La Teoria K dels anells de multiplicadors, referent al grup K_1, també ha estat investigada (vegeu [59], [61], [97]).

En cap cas, però, no s'ofereix un mètode que descrigui el reticle d'ideals dels multiplicadors d'anells dins classes significatives i que permeti examinar les patologies d'aquests objectes, d'altra banda força exòtics. Aquest objectiu serà la línia general en la qual ens basarem: establir unes hipòtesis de treball adequades que contemplin la gran similitud entre els anells regulars i les C^*-àlgebres amb rang real zero, i determinar un invariant (fent èmfasi en la Teoria K no estable) que proporcioni, simultàniament, informació sobre el reticle d'ideals dels anells de multiplicadors en ambdós casos. Considerarem els anells regulars (respectivament, C^*-àlgebres amb rang real zero) simples, amb σ-unitat, rang estable 1, tals que el monoide de classes d'equivalència d'idempotents sigui estrictament no perforat. Pels propòsits d'aquesta introducció, ens referirem a aquestes classes per $\mathcal{N}$ i $\mathcal{N}^*$ respectivament. Les qüestions que considerarem són les següents:

(1) **Reticle d'ideals.** Els resultats de Zhang a ([96]) impliquen que la informació sobre el reticle d'ideals tancats de $\mathcal{M}(A)$, on A té rang real zero i σ-unitat es pot llegir al monoide $V(\mathcal{M}(A))$. Hi ha dos fets fonamentals que permeten establir aquest resultat: la descomposició de Riesz a $V(\mathcal{M}(A))$ i el fet que els ideals de $\mathcal{M}(A)$ són "generats" per projeccions, en un sentit topològic. Partint d'una noció adequada d'unitat aproximada per anells semiprimers, el primer objectiu es basa en esbrinar

si aquestes propietats es mantenen per anells de multiplicadors d'anells regulars. En segon lloc, ens proposem dur a terme una anàlisi exhaustiva del monoide $V(\mathcal{M}(R))$, per a les classes $\mathcal{N}$ i $\mathcal{N}^*$. La línia d'atac segueix dos passos fonamentals. Primer donem una representació adequada d'aquest monoide, a través dels intervals sobre $V(A)$, per una C^*-àlgebra A amb σ-unitat, rang real zero i rang estable 1 (seguint bàsicament els passos de la representació del grup $K_0(\mathcal{M}(A))$ donada a [42]). Seguidament tindrem en compte l'estreta relació entre els intervals flexibles i certes funcions semicontínues inferiors (vegeu [45]).

(2) **Escales en anells i C^*-àlgebres.** Breument, donat un anell R dins $\mathcal{N}$ o $\mathcal{N}^*$, l'escala és una funció afí a valors reals positius (i possiblement infinita), definida sobre $V(R)$. Les propietats de l'escala reverteixen directament a propietats de R o bé de $\mathcal{M}(R)$ (i dels seus ideals). Per exemple, hom prova a [56] que si A és una àlgebra AF simple i sense unitat, aleshores, si $A \ncong \mathbb{K}(\mathcal{H})$, la continuïtat de l'escala sobre A significa que $\mathcal{M}(A)/A$ és simple. Sota les mateixes hipòtesis, Blackadar prova a [11] que A és algebraicament simple precisament quan l'escala és fitada. Finalment, si assumim a més que el nombre d'estats extrems sobre $V(A)$ és finit, aleshores el coneixement del valor de l'escala en aquests punts determina el coneixement global de la funció, i la finitud/infinitud d'aquests valors caracteritza completament el reticle d'ideals de $\mathcal{M}(A)/A$, que en aquesta situació és finit ([56]).

A [42] es prova que els ideals establement cofinits de $\mathcal{M}(A)$ es corresponen (quan $\mathcal{M}(A)$ té rang real zero) als ideals de $K_0(\mathcal{M}(A))$ - ambdós reticles són isomorfs. Aquest fet és usat posteriorment per estudiar el grup K_0 del quocient establement finit més gran de $\mathcal{M}(A)/A$ quan $A \in \mathcal{N}^*$ (no necessàriament simple) i té escala fitada: més precisament, si I és l'ideal establement cofinit més petit de $\mathcal{M}(A)$ que conté A, aleshores $K_0(\mathcal{M}(A)/I)$ és isomorf a un cert grup de funcions afins i contínues. Arran d'aquest resultat, Goodearl pregunta a [42, Section 16]: *Si una C^*-àlgebra A dins la classe $\mathcal{N}^*$ té escala fitada, i $RR(\mathcal{M}(A)) = 0$, és $L(A)$ l'ideal tancat establement cofinit més petit de $\mathcal{M}(A)$?* En la recerca de la resposta a aquesta pregunta, és natural considerar la següent qüestió: *Si $A \in \mathcal{N}^*$, té A escala fitada si i només si A és algebraicament simple?* Una resposta afirmativa a aquesta pregunta donaria una generalització del resultat de Blackadar ([11]).

Una línia de treball paral·lela s'enceta a l'hora de considerar anells R dins $\mathcal{N}$. Així, les següents qüestions queden obertes i mereixen consideració:

(i) *És $\mathcal{M}(R)/R$ simple si, i només si, l'escala és contínua, o bé R és algun tipus d'anell elemental?*

(ii) *Té $\mathcal{M}(R)$ un ideal mínim contenint R, tal que està contingut a qualsevol altre ideal que conté R?*

En darrer lloc, ens ocuparem de les qüestions que fan referència als anells dins $\mathcal{N}$ o $\mathcal{N}^*$ amb escala no acotada. En aquesta direcció, la qüestió clau és la següent:

(iii) *Si coneixem els punts on l'escala pren valors infinits, és possible determinar el reticle d'ideals de $\mathcal{M}(R)/R$?*

(3) **Rang estable i condicions de finitud.** *Si A és una C^*-àlgebra, es poden imposar algunes condicions de finitud sobre $\mathcal{M}(A)$, o sobre la mateixa A, per assegurar que* $\mathrm{sr}(\mathcal{M}(A)) = \mathrm{sr}(A)$*?* Aquesta pregunta fou formulada per Rieffel a [79, Question 4.16] i ha estat considerada, per exemple, a [18]. El mateix Rieffel va provar que si B és una C^*-àlgebra que conté dues isometries amb rangs ortogonals, aleshores $\mathrm{sr}(B) = \infty$; això passa en el cas $B = \mathbb{B}(\mathcal{H})$, on $\mathcal{H}$ és un espai de Hilbert separable i de dimensió infinita. Sembla difícil per tant que existeixi un exemple pel qual la resposta a l'anterior pregunta sigui afirmativa. Això motiva, però, la següent qüestió: *És possible calcular* $\mathrm{sr}(\mathcal{M}(A))$*, almenys per les àlgebres dins la classe $\mathcal{N}^*$?* Els exemples amb rang estable finit donarien, en cas d'existir, fites sobre el rang real d'aquestes àlgebres, d'acord amb la fórmula $RR(B) \leq 2\mathrm{sr}(B) - 1$, que ja hem esmentat abans. La recerca d'altres condicions de finitud es pot centrar en les següents preguntes: *Si R és un anell dins la classe $\mathcal{N}$ o $\mathcal{N}^*$, és almenys $\mathcal{M}(R)$ establement finit?* Per C^*-àlgebres, s'han considerat recentment d'altres nocions properes a rang estable 1. Una C^*-àlgebra A té riquesa d'extrems si l'embolcall convex dels extrems de la bola unitat A_1 de A és precisament A_1. Es prova a [21] que la classe de C^*-àlgebres amb riquesa d'extrems inclou pròpiament la classe de C^*-àlgebres amb rang estable 1, tot compartint algunes agradables propietats. A [55] s'estudia el problema de si $\mathcal{M}(A)$ o bé $\mathcal{M}(A)/A$ tenen riquesa d'extrems si A és una àlgebra AF, o bé si A és purament infinita simple, i s'estableix la següent qüestió ([55, Remark 4.19]): *Si A és separable, AF, simple, sense unitat, i té un nombre infinit de quasitraces extremes, podem dir que $\mathcal{M}(A)/A$ té riquesa d'extrems?*

El contingut de la memòria

D'acord amb les directrius traçades anteriorment, en aquest treball provem que la informació continguda en el reticle d'ideals de $\mathcal{M}(R)$, per a un anell R en la classe $\mathcal{N}$ es pot llegir en el monoide $V(\mathcal{M}(R))$, i relacionem aquest monoide amb un semigrup de funcions definides sobre l'espai d'estats de $V(R)$, facilitant així l'anàlisi de l'estructura d'ideals. Això respon a la filosofia de l'apartat (1). A conseqüència d'aquesta representació, provem que la continuïtat de l'escala es tradueix en una condició de simplicitat del quocient $\mathcal{M}(R)/R$, per $R \in \mathcal{N}$, i provem l'existència d'un ideal $L(R)$ de $\mathcal{M}(R)$ que és mínim contenint R. Si l'escala és fitada, el resultat establert per Blackadar pot ésser estès als anells de la classe $\mathcal{N}^*$. Així mateix, és possible caracteritzar les C^*-àlgebres A dins $\mathcal{N}^*$ amb $RR(\mathcal{M}(A)) = 0$ i escala finita en termes d'una condició sobre $\mathcal{M}(A)/L(A)$. Com a corol·lari d'aquest fet, responem a una pregunta de [42, Section 16]. Un resultat similar es pot establir pels anells R en $\mathcal{N}$, en termes d'una condició de cancel·lació d'un quocient del monoide $V(\mathcal{M}(R))$. Quan l'escala no és finita, apareix una nova riquesa estructural que generalitza en gran mesura observacions efectuades per àlgebres AF (per exemple, a [56]). Per les C^*-àlgebres A en la classe $\mathcal{N}^*$, i suposant a més que $RR(\mathcal{M}(A)) = 0$, donem un càlcul explícit del rang estable de $\mathcal{M}(A)$ en termes de la continuïtat i finitud de l'escala, donant així una resposta negativa parcial a [79, Question 4.16]. També examinem la finitud estable de $\mathcal{M}(A)$, per A dins $\mathcal{N}^*$, veient que és establement finita, llevat del cas en que l'escala és idènticament infinita (per exemple, si $A \cong A \otimes \mathbb{K}$), i analitzem la riquesa d'extrems de $\mathcal{M}(A)/A$, responent una pregunta implícita a [55, Remark 4.19] i tractant casos que no són presents a [55].

Aquesta memòria està estructurada en quatre capítols, el primer dels quals es dedica a la recopilació de conceptes i resultats bàsics per a la posterior comprensió del treball. Cada capítol ve encapçalat per una introducció del seu contingut, ressaltant els resultats principals, de manera que en aquest espai ens limitarem a ressenyar-ne el contingut, remetent el lector a cada capítol per ampliar detalls.

En el segon capítol donem la definició de l'anell de multiplicadors $\mathcal{M}(R)$ d'un anell semiprimer R i estudiem algunes característiques bàsiques. Propietats fonamentals com ara la descomposició de Riesz a $V(\mathcal{M}(R))$ i el fet que els ideals de $\mathcal{M}(R)$ estan generats per idempotents, són establertes per anells regulars amb σ-unitat, en analogia als resultats coneguts per C^*-àlgebres amb rang real zero. En la tercera secció aprofitem aquests resultats per donar una representació de $V(\mathcal{M}(R))$, per R dins $\mathcal{N}$ o $\mathcal{N}^*$, en termes de $V(R)$ i un semigrup de funcions afins i semicontínues inferiors definides sobre l'espai d'estats de $V(R)$. En la quarta secció, donem aplicacions de les tècniques anteriors per obtenir una representació del monoide $S(A)$, per A dins $\mathcal{N}^*$.

En el tercer capítol utilitzem els resultats del capítol 2 per iniciar un estudi sistemàtic del reticle d'ideals de $\mathcal{M}(R)$, per R dins $\mathcal{N}$ o bé $\mathcal{N}^*$. Concretament, en la segona secció caracteritzem els anells R que tenen escala finita, i donem resposta afirmativa, en un context més ampli, a una pregunta de [42]. A conseqüència de les tècniques de la tercera secció generalitzem el resultat de Blackadar de [11] sobre àlgebres AF amb escala fitada. En la quarta secció provem que un model semblant a l'obtingut per Lin a [56] es pot adoptar en el nostre context: la consideració de l'ideal $I_{fin}(R)$ "divideix" l'anell $\mathcal{M}(R)$ en dues parts amb comportaments sorprenentment diferents. L'ideal $I_{fin}(R)$ és el màxim ideal amb la propietat que $V(I_{fin}(R))/V(L(R))$ és cancel·latiu, i al mateix temps, és el mínim ideal tal que $\mathcal{M}(R)/I_{fin}(R)$ és purament infinit. Posteriorment, descrivim el reticle d'ideals de $\mathcal{M}(R)/I_{fin}(R)$ amb exactitud: si l'escala es fa infinita precisament a n punts extrems, aleshores $\mathcal{M}(R)/I_{fin}(R)$ conté exactament 2^n ideals no nuls (dels quals exactament n són minimals, i n maximals). Sota algunes restriccions addicionals assumides a l'espai d'estats, certs aspectes d'aquesta distribució d'ideals es traslladen al cas que l'escala es fa infinita a $\mathfrak{c}$ punts, amb $\mathfrak{c}$ un cardinal infinit: aleshores $\mathcal{M}(R)/I_{fin}(R)$ conté exactament $\mathfrak{c}$ ideals minimals i almenys $\mathfrak{c}$ maximals. La presència de quantitats no numerables d'ideals, ja observada per àlgebres amb escala fitada, es veu enriquida en el cas no fitat per la presència de cadenes no numerables d'ideals. La cinquena secció tracta la recerca del quocient establement finit més gran de $\mathcal{M}(A)/A$, per A dins $\mathcal{N}^*$. Així, denotant per $I_{sc}(A)$ l'ideal establement cofinit més petit i no nul de $\mathcal{M}(A)$, veiem que en determinats casos $I_{sc}(A)$ és finitament generat. La forma especial de l'ideal $I_{sc}(A)$ fa parar atenció a l'ideal $I_b(A)$, que reflexa la presència de córners de A amb escala fitada. En conseqüència, generalitzant un resultat de Goodearl a [42] (en el cas simple), descrivim $V(I_b(A)/L(A))$ en termes d'un espai de funcions afins i contínues.

El darrer capítol està dedicat a examinar el rang estable i la riquesa d'extrems de $\mathcal{M}(A)$ per A dins $\mathcal{N}^*$. En la primera secció establim la separativitat de $V(\mathcal{M}(A))$, element clau per estudiar-ne el rang estable, d'acord amb resultats de [7]. Provem així que si $RR(\mathcal{M}(A)) = 0$ i A no té unitat, aleshores el rang estable de $\mathcal{M}(A)$ és 2 si, i només si, l'escala és finita i no contínua, i val infinit en cas contrari. En la segona secció estudiem la riquesa d'extrems de $\mathcal{M}(A)$ i $\mathcal{M}(A)/A$; concretament, provem que $\mathcal{M}(A)$ no té mai riquesa d'extrems. Pel que fa a $\mathcal{M}(A)/A$, el resultat varia segons les quasitraces extremes infinites de A; en la majoria de casos, però, $\mathcal{M}(A)/A$ no té riquesa d'extrems. Els resultats d'aquesta secció responen a una pregunta de [55], i amplien de manera important el nombre de casos en que la riquesa d'extrems es pot analitzar.

Per acabar, remarquem que en tot el treball hem tingut present la necessitat de fer una exposició el més autocontinguda possible. Per aquesta raó, resultats d'altres autors (tots ells amb la corresponent referència) han estat inclosos, així com totes les definicions necessàries per a la comprensió del text.

Agraïments

Vull expressar el meu agraïment a totes les persones que indirectament o directa m'han ajudat en la realització d'aquest treball. En primer lloc, al Pere Ara, que durant els anys en que la memòria ha pres forma ha sabut trobar els errors en els arguments i m'ha previngut de cometre'n de nous, m'ha indicat camins alternatius a seguir per provar resultats, convertint en un plaer la tasca de fer recerca en Matemàtiques. I que, sortosament, ha dedicat moltes hores a la correcció de les versions preliminars del manuscrit. També vull manifestar el meu agraïment als professors Ken Goodearl i Fred Wehrung, per destinar una bona part del seu temps a atendre preguntes i fer comentaris, en sengles estades de recerca que vaig fer a la Universitat de Califòrnia (Santa Barbara) i la Universitat de Caen. A l'Enric Pardo, per moltes discussions al voltant de les coses que no sortien, i també de les que sortien. Al grup de Teoria d'Anells de la UAB per moltes converses profitoses i a molts membres del Departament de Matemàtiques de la UAB, pel seu recolzament i companyonia.

En darrer lloc, vull agrair a la Montserrat, als pares, sogres, germans i amics tot el suport demostrat, per saber compartir els moments d'ensopiment, els d'engrescament, i per mostrar en tot moment una confiança incondicional, sovint immerescuda. És per aquesta raó que aquest treball els és dedicat.

Capítol 1

Preliminars

Aquest capítol està dedicat a donar una sèrie de definicions i resultats bàsics, amb un doble objectiu: facilitar la comprensió en la lectura posterior de la memòria, i establir un marc de treball en el que ens mourem en la resta de capítols. D'altres definicions més específiques seran donades més endavant, en el moment en que haguem d'emprar-les. Hem estructurat aquest capítol en tres seccions: *Monoides, ideals i monoides d'intervals*, *Anells, C^*-àlgebres i Teoria K*, i finalment *Conjunts compactes i convexos. Símplexs*, que són els tres pilars fonamentals que dónen cos a aquest treball.

1.1 Monoides, ideals i monoides d'intervals

En aquesta secció donarem les nocions estàndard referents a monoides ordenats i monoides d'intervals. Al llarg del treball, tots els monoides seran abelians. La notació que emprarem per les operacions serà la notació additiva, i en conseqüència denotarem per 0 l'element neutre. Tot monoide abelià admet un pre-ordre natural, que definim tot seguit.

DEFINICIÓ 1.1.1 *Sigui M un monoide. Per a $x, y \in M$ diem que $x \leq y$ si i només si existeix un element $z \in M$ tal que $x + z = y$. La relació binària $\leq$ satisfà les propietats reflexiva i transitiva, essent al mateix temps invariant per translacions. És per tant un pre-ordre, que anomenem* **pre-ordre algebraic**. *Diem també que M és* **algebraicament ordenat**. *Si la relació $\leq$ és a més antisimètrica, aleshores diem que el pre-ordre algebraic a M és un* **ordre parcial**.

D'ara endavant, i si no es diu el contrari, assumirem que els monoides són algebraicament ordenats. Òbviament, un monoide M pot admetre altres pre-ordres diferents de l'algebraic. En tots els casos, entendrem que aquests pre-ordres seran invariants per translacions, i per tant compatibles amb l'estructura additiva de M.

DEFINICIÓ 1.1.2 *Sigui M un monoide. Diem que un element $u \in M$ és una* **unitat d'ordre** *si $u \neq 0$ i si per a tot $x \in M$, existeix un nombre $n \in \mathbb{N}$ tal que $x \leq nu$. Quan convingui, escriurem un monoide M amb unitat d'ordre $u \in M$ com (M, u).*

DEFINICIÓ 1.1.3 *Un monoide M és* **cònic** *si sempre que $x + y = 0$ per a elements $x, y \in M$, tenim que $x = y = 0$.*

DEFINICIÓ 1.1.4 *Sigui M un monoide i sigui $u \in M$ una unitat d'ordre. Diem que M és* **directament finit** *si la igualtat $x+y = x$, per a $x, y \in M$ amb $x, y \leq u$ implica $y = 0$. De forma semblant, M es diu* **establement finit** *si la igualtat $x + y = x$, per a $x, y \in M$ qualssevol, implica $y = 0$.*

És clar que la condició de directament finit (d'establement finit), tan sols depèn de verificar la corresponent condició sobre la unitat d'ordre (o sobre els múltiples de la unitat d'ordre). Observem que si M és cònic i establement finit, aleshores el pre-ordre algebraic és un ordre (parcial).

DEFINICIÓ 1.1.5 *Siguin (M, u) i (N, v) monoides amb unitats d'ordre, i sigui*

$$f : M \to N$$

un morfisme de monoides. Diem que f és **normalitzat** *si $f(u) = v$.*

D'altres nocions interessants, i que ens convindran per treballar amb monoides són:

DEFINICIÓ 1.1.6 *Sigui $(M, \leq)$ un monoide pre-ordenat (i on l'ordre no és necessàriament l'algebraic). Diem que M és* **cancel·latiu per l'ordre** *si, donats $x, y, z \in M$ tals que $x + z \leq y + z$, aleshores $x \leq y$. Diem que M és* **cancel·latiu** *si, donats $x, y, z \in M$ tals que $x + z = y + z$, aleshores $x = y$.*

Observem que si l'ordre en M és algebraic i parcial, aleshores les nocions de cancel·latiu per l'ordre i cancel·latiu coincideixen.

DEFINICIÓ 1.1.7 *Sigui M un monoide. Diem que M és un* **monoide de refinament** *si, sempre que $x_1, x_2, y_1, y_2 \in M$ satisfan $x_1 + x_2 = y_1 + y_2$, llavors existeixen elements $z_{ij} \in M$ (per $i, j = 1, 2$) tals que $\sum_{j=1}^{2} z_{ij} = x_i$ i tals que $\sum_{i=1}^{2} z_{ij} = y_j$ per a $i, j = 1, 2$.*

DEFINICIÓ 1.1.8 *Sigui M un monoide. Diem que M és un* **monoide de Riesz** *si M satisfà la* **Propietat de Descomposició de Riesz**, *és a dir, sempre que $x, y_1, y_2 \in M$ satisfan $x \leq y_1 + y_2$, aleshores existeixen elements $x_1, x_2 \in M$ tals que $x = x_1 + x_2$ i tals que $x_i \leq y_i$ per a $i = 1, 2$.*

És clar que un monoide de refinament és sempre de Riesz, mentre que el recíproc és fals. Un exemple senzill s'obté considerant el monoide $M = \{0, u, \infty\}$ amb $2u = \infty$.

DEFINICIÓ 1.1.9 *Sigui M un monoide. Diem que M satisfà la* **Propietat d'Interpolació de Riesz** *si sempre que $x_1, x_2, y_1, y_2 \in M$ satisfan $x_i \leq y_j$ per a $i, j = 1, 2$, aleshores existeix un element $z \in M$ tal que $x_i \leq z \leq y_j$ per $i, j = 1, 2$.*

Si el monoide M amb què treballem és cancel·latiu, aleshores les diferents propietats de descomposició que hem introduït són equivalents, tal com es veu a [39, Proposition 2.1].

DEFINICIÓ 1.1.10 *Sigui G un grup abelià. Com hem fet per monoides, una relació binària $\leq$ definida sobre G tal que és reflexiva, transitiva i invariant per translacions s'anomena un* **pre-ordre**, *que diem* **parcial** *si a més $\leq$ és antisimètric. Diem que G és un* **grup abelià (parcialment) ordenat**. *Un* **con** *de G és un subconjunt $C \subseteq G$ tal que $0 \in C$ i tal que és un submonoide de G. Un con es diu* **estricte** *si 0 és l'únic element $x \in G$ tal que $x \in C$ i també $-x \in C$.*

Els elements **positius** seran de manera natural aquells $x \in G$ tals que $x \geq 0$. Denotarem el conjunt d'elements positius per G^+, i l'anomenarem **con positiu**. Observem que un con C en un grup abelià G sempre indueix un pre-ordre, que s'escriu $\leq_C$, de la següent manera: diem que $x \leq_C y$, per $x, y \in C$ si i només si $y - x \in C$. Aquest pre-ordre és invariant per translacions, i constitueix un ordre parcial exactament quan C és estricte. Així, si G és un grup parcialment ordenat, el con G^+ és estricte i l'ordre a G coincideix amb $\leq_{G^+}$.

DEFINICIÓ 1.1.11 *Una* **unitat d'ordre** *de G és un element $u > 0$ de G tal que per a tot $x \in G$, existeix $n \geq 1$ tal que $x \leq nu$. Com al cas de monoides, escriurem $(G, \leq, u)$ o simplement G.*

Veurem seguidament una relació natural entre els monoides i els grups abelians. Sigui M un monoide. Definim una relació d'equivalència sobre M per $x \sim y$ si i només si existeix un element $z \in M$ tal que $x + z = y + z$. Posem $M_c = M/\sim$, i denotem les classes d'equivalència dels elements de M per $[x]$. Definim una operació a M_c per $[x] + [y] = [x + y]$, si $x, y \in M$. És fàcil veure que aquesta operació és ben definida.

Notem que amb aquesta estructura, M_c és cancel·latiu i també cancel·latiu per l'ordre (respecte l'ordre algebraic). Anomenem M_c el **monoide cancel·latiu associat a** M.

Si u és una unitat d'ordre per M, llavors $[u]$ també és una unitat d'ordre per M_c, que denotarem novament per u. Observem que si l'ordre algebraic a M és parcial ordenat, aleshores a M_c també ho és.

Afegint doncs inversos formals als elements de M_c podem definir un grup abelià, denotat per $G(M)$. És clar que $G(M) = \{x - y \mid x, y \in M_c\}$. Definim un ordre a $G(M)$ prenent com a con positiu:

$$G(M)^+ = M_c.$$

DEFINICIÓ 1.1.12 *El grup* $(G(M), G(M)^+)$ *s'anomena el* **grup de Grothendieck** *de* M *(i és parcialment ordenat si* M *ho és).*

Un aspecte important del grup de Grothendieck és que pot ésser caracteritzat per la següent propietat universal: (1) Existeix un morfisme de monoides $\pi : M \to G(M)^+$ tal que $\pi(m) = [m]$, i (2) sempre que H és un grup abelià pre-ordenat amb con positiu H^+ i $\varphi : M \to H^+$ és un morfisme de monoides, aleshores existeix un únic morfisme de grups $\psi : G(M) \to H$ tal que el diagrama

$$\begin{tikzcd} M \arrow[r, "\pi"] \arrow[dr, "\varphi"'] & G(M) \arrow[d, "\psi"] \\ & H \end{tikzcd}$$

és commutatiu.

Les propietats de descomposició que hem formulat per monoides tenen versions paral·leles per grups abelians:

DEFINICIÓ 1.1.13 *Sigui* G *un grup parcialment ordenat. Diem que* G *és un* **grup de Riesz** *(o també que* G *és un* **grup d'interpolació***) si el con positiu* G^+ *és un monoide Riesz.*

Notem que si M és un monoide cancel·latiu, aleshores $G(M)$ és un grup de Riesz si, i només si, M és un monoide Riesz. Una noció d'extrema importància al llarg del treball és la d'ideal en un monoide.

DEFINICIÓ 1.1.14 *Sigui M un monoide. Un* **ideal d'ordre** *de M és un subconjunt no buit I de M que és un submonoide, i tal que és hereditari per l'ordre, és a dir, si $x \leq y$ i $y \in I$, aleshores $x \in I$.*

Si M és un monoide i $a \in M$, aleshores el conjunt $I_a = \{x \in M \mid x \leq na$ per algun $n \in \mathbb{N}\}$ és el mínim ideal d'ordre de M que conté l'element a, i l'anomenem per tant l'ideal de M generat per a. Observem que a és una unitat d'ordre per I_a. Ens referirem als ideals generats per un element com els *ideals principals* de M.

DEFINICIÓ 1.1.15 *Diem que un monoide M és* **simple** *si té exactament dos ideals, l'ideal generat pel zero i M.*

Observem que si M és cònic, aleshores M és simple si i només si és no zero i tot element diferent de zero de M és una unitat d'ordre. En efecte, si M és cònic i simple i $x \in M$ és no zero, aleshores tenim que $I_x \neq 0$, de manera que $I_x = M$, i per tant x és unitat d'ordre. Recíprocament, notem primer que l'ideal generat pel zero és exactament $\{0\}$, ja que M és cònic. Suposem ara que I és un ideal no zero de M. Aleshores I conté un element $x \in M$ no zero, que per hipòtesi és unitat d'ordre. Per tant $I = M$, com volíem.

DEFINICIÓ 1.1.16 *Sigui G un grup pre-ordenat amb unitat d'ordre $u \in G$. Un* **estat** *sobre (G, u) és un morfisme de grups $s : G \to \mathbb{R}$ tal que $s(G^+) \subseteq \mathbb{R}^+$ i $s(u) = 1$ (és a dir, s és normalitzat). Denotem per $St(G, u)$ el conjunt d'estats sobre (G, u).*

Si tenim un monoide M amb unitat d'ordre $u \in M$, aleshores definim els estats sobre (M, u) com $St(M, u) := St(G(M), u)$, on $G(M)$ és el grup de Grothendieck de M amb el pre-ordre natural. Per la propietat de $G(M)$, tenim que un estat sobre (M, u) és un morfisme de monoides normalitzat $s : M \to \mathbb{R}^+$. Un estat sobre (M, u) es diu **discret** si $s(G(M))$ és un subgrup cíclic de $\mathbb{R}$.

Sigui M un monoide algebraicament ordenat amb unitat d'ordre $u \in M$. Si M és establement finit i cònic, llavors $St(M, u)$ és no buit (vegeu, per exemple, [39, Corollary 4.4]). Recíprocament, si M és simple i $St(M, u)$ és no buit, llavors M és establement finit i cònic.

Sigui M un monoide, i sigui I un ideal d'ordre de M. Definim una relació d'equivalència a M de la manera següent: si $x, y \in M$, escrivim $x \sim y$ si i només si existeixen elements $z, w \in I$ tals que $x + z = y + w$. Denotem per M/I el conjunt quocient de M mòdul aquesta relació d'equivalència, i denotem per $[x]$ la classe d'equivalència d'un element $x \in M$. Definim una addició a M/I de manera natural per

$[x]+[y]=[x+y]$. És fàcil comprovar que aquesta operació és ben definida, i que dota M/I d'estructura de monoide abelià, que anomenarem el **quocient de M per I** (vegeu també [70, Proposició 4.1.2]). Observem que si $u \in M$ és una unitat d'ordre, aleshores $[u] \in M/I$ també és una unitat d'ordre. La relació bàsica entre ideals i quocients es recull en:

PROPOSICIÓ 1.1.17 *([70, Proposició 4.1.3]) Sigui M un monoide. Aleshores:*

(*a*) *Si $I \leq M$ és un ideal, llavors existeix una relació bijectiva entre els ideals de M/I i els ideals de M que contenen I.*

(*b*) *Si $J \subseteq I$ són dos ideals de M, llavors $(M/J)/(I/J) \cong (M/I)$.*

(*c*) *Si M és de refinament, aleshores la classe $\mathcal{L}(M)$ d'ideals de M forma un reticle amb la suma i la intersecció d'ideals.*

(*d*) *Si M és de refinament i I, J són dos ideals de M aleshores*

$$(I+J)/J \cong I/(I \cap J). \square$$

DEFINICIÓ 1.1.18 *Sigui M un monoide en el qual el pre-ordre algebraic és parcial. Un* **interval** *sobre M és un subconjunt no buit $I \subseteq M$ tal que és dirigit i hereditari per l'ordre (és a dir, si $x \leq y$ i tenim $y \in I$, aleshores $x \in I$). Denotem per $\Lambda(M)$ el conjunt de tots els intervals sobre M.*

Podem equipar $\Lambda(M)$ amb una estructura natural de monoide abelià, de la manera següent:

Si $I, J \in \Lambda(M)$, aleshores definim

$$I+J=\{z \in M \mid z \leq x+y \text{ per algun } x \in I, y \in J\}.$$

Deduïm doncs que si M és un monoide Riesz, llavors $I+J=\{x+y \mid x \in I, y \in J\}$.

DEFINICIÓ 1.1.19 *Sigui M un monoide, i sigui $I \in \Lambda(M)$. Diem que I és* **numerablement generat** *si existeix un subconjunt cofinal numerable $X \subseteq I$ (és a dir, existeix una successió $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ tal que per a tot $x \in I$, tenim $x \leq x_n$ per algun $n \in \mathbb{N}$). Denotarem el conjunt d'intervals numerablement generats sobre M per $\Lambda_\sigma(M)$.*

Notem que si I és un interval sobre M numerablement generat, aleshores podem escriure $I=\{y \in M \mid y \leq x_n \text{ per algun } n \in \mathbb{N}\}$, per alguna successió (x_n) en M.

Sigui D un interval (fixat) sobre M. Escriurem $\Lambda_{\sigma,D}(M)$ per denotar el submonoide de $\Lambda_\sigma(M)$, els elements del qual són els intervals numerablement generats sobre M que són continguts en un múltiple de D, és a dir, $I \in \Lambda_{\sigma,D}(M)$ si i només si $I \in \Lambda_\sigma(M)$ i existeix $n \in \mathbb{N}$ tal que $I \subseteq nD$. Denotem per $W_\sigma^D(M)$ el submonoide de $\Lambda_{\sigma,D}(M)$ format pels intervals numerablement generats I sobre M tals que $I + J = nD$ per algun $J \in \Lambda_\sigma(M)$ i algun $n \in \mathbb{N}$.

1.2 Anells, C^*-àlgebres i Teoria K

Introduirem seguidament alguns conceptes bàsics per anells, centrant-nos en les classes que estudiarem posteriorment. Al llarg de tot el treball, suposarem que els anells són associatius, però no necessàriament amb unitat.

Sigui R un anell. Definim $M_\infty(R) = \cup_{n=1}^{\infty} M_n(R)$ a través de les aplicacions $M_n(R) \to M_{n+1}(R)$ definides per $x \mapsto \operatorname{diag}(x, 0)$. D'aquesta manera, $M_\infty(R)$ és un anell.

DEFINICIÓ 1.2.1 *Si R és un anell, i $e, f \in M_\infty(R)$ són idempotents, diem que e i f són* **equivalents**, *i escrivim $e \sim f$, si existeixen elements $x, y \in M_\infty(R)$ tals que $e = xy$, mentre que $f = yx$.*

És fàcil comprovar que la relació $\sim$ definida sobre el conjunt d'idempotents de $M_\infty(R)$ és d'equivalència. Denotem per $[e]$ la classe d'equivalència respecte d'aquesta relació, i definim $V(R) = \{[e] \mid e \text{ és un idempotent de } M_\infty(R)\}$. Equipem $V(R)$ amb una estructura additiva de la següent manera: si $[e], [f] \in V(R)$, posem $[e] + [f] = [\begin{pmatrix} e & 0 \\ 0 & f \end{pmatrix}]$. D'aquesta manera $V(R)$ esdevé un monoide abelià cònic i (algebraicament) ordenat.

En el cas particular que R tingui unitat, podem donar una descripció alternativa i equivalent de $V(R)$ com el conjunt de classes d'isomorfia de R-mòduls projectius (dreta) finitament generats. L'addició és en aquest cas $[P]+[Q] = [P \oplus Q]$. El fet que aquesta descripció sigui equivalent a l'anterior implica en particular que la definició prenent mòduls és simètrica.

DEFINICIÓ 1.2.2 *Sigui R un anell amb unitat. Diem que R és* **directament finit** *si sempre que $xy = 1$, per a $x, y \in R$ qualssevol, tenim que $yx = 1$. En cas contrari direm que R és* **directament infinit**. *Si $M_n(R)$ és directament finit per a tot $n \in \mathbb{N}$ aleshores diem que R és* **establement finit**.

Observem que R és directament finit (respectivament, establement finit) si i només si el monoide $V(R)$ és directament finit (respectivament, establement finit), en el sentit de la Definició 1.1.4. Veiem doncs que, atès que $V(R)$ és sempre cònic, si R és establement finit aleshores l'ordre algebraic a $V(R)$ és parcial.

En el que segueix, R serà un anell que pensarem inclòs, com a ideal bilateral, dins un anell amb unitat S. La forma estàndard d'aconseguir això és incloent R de manera natural dins $S = R_1 = R \oplus \mathbb{Z}$, amb la suma component a component i el producte donat per $(x,n)(y,m) = (xy + ny + mx, nm)$. La unitat per S és $(0,1)$. La definició que donarem no dependrà, però, d'aquest anell concret S.

DEFINICIÓ 1.2.3 *Siguin $R \subseteq S$ anells, tals que S té unitat i R és un ideal de S. Una n-pla $(a_1, \dots, a_n)$ d'elements de S es diu* ***R*-unimodular** *si $a_1 - 1 \in R$, $a_i \in R$ per a tot $i > 1$ i existeixen elements $b_1, \dots, b_n \in S$, amb $b_1 - 1, b_i \in R$ per $i > 1$ tals que $\sum_{i=1}^{n} b_i a_i = 1$. Diem que una n-pla R-unimodular $(a_1, \dots, a_n)$ és* **reduïble** *si existeix una $(n-1)$-pla $(b_1, \dots, b_{n-1})$ d'elements de R tal que la $(n-1)$-pla $(a_1 + b_1 a_n, \dots, a_{n-1} + b_{n-1} a_n)$ és R-unimodular.*

DEFINICIÓ 1.2.4 *Siguin $R \subseteq S$ anells tals que S té unitat i R és un ideal bilateral de S. Definim el* **rang estable** *de R, i ho denotem per $\mathrm{sr}(R)$, com el nombre natural n més petit tal que tota $(n+1)$-pla R-unimodular és reduïble. Escriurem $\mathrm{sr}(R) = n$. Si aquest enter n no existeix, diem aleshores que R té rang estable infinit, i ho denotem $\mathrm{sr}(R) = \infty$.*

El cas en que estarem interessats és quan el rang estable és 1. A partir de la definició anterior, un anell R té rang estable 1 si sempre que $R_1 a + R_1 b = R_1$, per $a, b \in R_1$ amb $a - 1, b \in R$, aleshores existeix $t \in R$ tal que $R_1(a + tb) = R_1$. Per [87, Theorem 3.6] (vegeu també [86]), aquesta condició és equivalent a demanar que $M_n(R)$ tingui rang estable 1 per a tot $n \in \mathbb{N}$, o bé que tot factor de R tingui rang estable 1. Per [87, Theorem 3.9], si e és un idempotent en un anell R amb rang estable 1, aleshores eRe també té rang estable 1. L'aspecte interessant dels anells amb rang estable 1 és que permeten cancel·lar els elements del monoide de classes d'equivalència d'idempotents. Enunciem-ho explícitament:

TEOREMA 1.2.5 *Sigui R un anell amb $\mathrm{sr}(R) = 1$. Aleshores el monoide $V(R)$ és cancel·latiu.*

DEMOSTRACIÓ: Si R té unitat, això ja és conegut (vegeu [35, Theorem 4.13]). Pel cas en que R no té unitat, suposem que $e, f, g \in M_\infty(R)$ són idempotents tals que

$[e] + [g] = [f] + [g]$. Ens podem reduir al cas que l'anell té unitat passant a l'anell $(e \oplus f \oplus g)M_\infty(R)(e \oplus f \oplus g)$. Obtenim així que $[e] = [f]$, i per tant $V(R)$ és cancel·latiu. □

Detallem tot seguit les classes d'anells que tractarem al llarg de la memòria.

DEFINICIÓ 1.2.6 *Diem que un anell R és* **semiprimer** *si per a tot $x \in R$, la condició $xRx = 0$ implica que $x = 0$.*

De manera equivalent, un anell R amb unitat és semiprimer si i només si per a tot ideal bilateral I de R, la condició $I^2 = 0$ implica que $I = 0$ (com veurem més endavant, aquesta equivalència es manté per classes d'anells més generals que els anells amb unitat).

DEFINICIÓ 1.2.7 *Sigui R un anell. Diem que R és* **regular de von Neumann** *si per a tot $x \in R$, existeix $y \in R$ tal que $x = xyx$.*

Equivalentment, un anell R és regular de von Neumann si i només si tot ideal dreta (esquerra) finitament generat és generat per un idempotent, si i només si tot ideal principal és generat per un idempotent (vegeu [37, Proposition 1.1]). D'ara endavant abreujarem la terminologia parlant simplement d'anells regulars. Les construccions elementals fetes a partir d'anells regulars produeixen novament anells regulars: així, les imatges homomòrfiques, els córners, els anells de matrius i els límits directes d'anells regulars són regulars (vegeu [37, Chapter 1]).

Un tipus d'anell regular especialment important és el següent:

DEFINICIÓ 1.2.8 *Sigui R un anell regular amb unitat. Diem que R és* **regular per unitats** *si per a tot $x \in R$, existeix una unitat $u \in R$ tal que $x = xux$.*

La prova del següent resultat es pot trobar a [37, Theorem 4.5, Proposition 4.12], excepte la part $(c) \Leftrightarrow (d)$, que és una conseqüència directa d'una de les possibles definicions de $V(R)$ per anells amb unitat.

TEOREMA 1.2.9 *(Fuchs, Handelman, Kaplansky) Sigui R un anell regular amb unitat. Les següents condicions són equivalents:*

(a) R és regular per unitats;

(b) R té rang estable 1;

(c) Tot R-mòdul projectiu (dreta) finitament generat cancel·la de les sumes directes de R-mòduls projectius (dreta) finitament generats;

(*d*) *V(R) és cancel·latiu.* □

El cas en que R no té unitat també pot ésser tractat de manera semblant, però referint-nos als córners de R. Això es pot fer tenint en compte que, en un anell regular, els idempotents formen un conjunt dirigit:

LEMA 1.2.10 *[67, Lemma 1.1] Sigui R un anell regular, i sigui I un ideal de R. Si $e, f \in R$ són idempotents, aleshores existeix un idempotent $g \in I$ tal que $eRe + fRf \subseteq gRg$. En particular, si $a \in I$ aleshores existeix un idempotent $k \in I$ tal que $a \in kRk$.* □

Si S és un anell qualsevol, denotem per $E(S)$ el conjunt format pels idempotents de S. Equipat amb l'ordre natural d'idempotents, $E(S)$ és un conjunt parcialment ordenat. Pel Lema anterior, si R és regular, aleshores $E(R)$ és a més un conjunt dirigit.

TEOREMA 1.2.11 *Sigui R un anell regular. Les següents condicions són equivalents:*

(*a*) *R té rang estable 1;*

(*b*) *Tot córner de R té rang estable 1;*

(*c*) *Tot córner de R és regular per unitats;*

(*d*) *$V(R)$ és cancel·latiu.*

DEMOSTRACIÓ: La implicació $(a) \Rightarrow (b)$ és conseqüència de [87, Theorem 3.9]. El Teorema 1.2.9 implica que $(b) \Leftrightarrow (c)$. Suposem ara que tot córner de R és regular per unitats. Si per idempotents $e, f, g \in M_\infty(R)$ tenim $[e] + [g] = [f] + [g]$ aleshores pel Lema 1.2.10 existeix un córner T de R adequat tal que $e, f, g \in M_\infty(T)$ i $[e] + [g] = [f] + [g]$ a $V(T)$, d'on clarament $[e] = [f]$ a $V(T)$, i per tant $[e] = [f]$ a $V(R)$. Veiem doncs que $(c) \Rightarrow (d)$. Pel recíproc, és fàcil veure que si $V(R)$ és cancel·latiu, aleshores $V(T)$ és cancel·latiu per a qualsevol córner T de R, i pel Teorema 1.2.9 tenim que T és regular per unitats.

Finalment, vegem $(b) \Rightarrow (a)$. Siguin $a = 1 + a'$, amb $a' \in R$, i $b \in R$. Suposem que $R_1 a + R_1 b = R_1$. Prenem $e \in R$ un idempotent tal que $a', b \in eRe$ (usant el Lema 1.2.10). Notem que $ae = ea = e + a'$. Per [87, Lemma 3.5], tenim $Ra + Rb = R$, de manera que $(eRe)ae + (eRe)b = eRe$. Per hipòtesi, el rang estable de eRe és 1, de manera que existeix $t' \in eRe$ amb $(eRe)(ae + t'b) = eRe$. Prenent $t = 1 - e + t'$, és fàcil comprovar que $a + tb$ és invertible a R_1. □

Destaquem finalment una propietat dels anells regulars que ens serà d'utilitat:

TEOREMA 1.2.12 *(Goodearl-Handelman) Sigui R un anell regular. Aleshores el monoide $V(R)$ és un monoide de refinament, i en particular de Riesz.*

DEMOSTRACIÓ: Una demostració pel cas en que R té unitat es pot trobar a [37, Theorem 2.8]. Si R no té unitat, argumentant com al Teorema 1.2.11, ens reduïm a treballar en un córner de R, que sí té unitat. □

L'altra classe d'anells que jugarà un paper fonamental és la de les C^*-àlgebres.

DEFINICIÓ 1.2.13 *Sigui A un anell. Diem que A és una* **C^*-àlgebra** *si A és una àlgebra de Banach complexa, amb una involució, que denotem per $*$, tal que per a tot $x \in A$ es satisfà*

$$\|xx^*\| = \|x\|^2.$$

Una àlgebra amb involució s'anomenarà sovint $*$-àlgebra. Com es veu a la definició, una C^*-àlgebra A no té necessàriament unitat, però sempre se n'hi pot adjuntar una.

DEFINICIÓ 1.2.14 *Sigui R un anell, i sigui I un ideal bilateral de R no zero. Diem que I és un ideal* **essencial** *si per a tot ideal J de R no nul es té que $I \cap J \neq 0$.*

Una **unitificació** d'un anell semiprimer R és per definició un anell S amb unitat que conté R com a ideal essencial. El procés d'adjunció d'una unitat a una K-àlgebra R semiprimera que no en té, on K és un cos, es pot fer de manera "minimal" (en el sentit que tota altra unitificació la conté), de la següent manera: Prenem $\widetilde{R} = R \oplus K$, amb les operacions habituals i unitat $(0, 1)$. Aleshores R és un ideal bilateral essencial de $\widetilde{R}$.

En el cas d'una C^*-àlgebra A sense unitat aquest procés també es pot fer, però cal anar amb compte a l'hora d'escollir una norma a $\widetilde{A}$. Es prova a [91, Proposition 2.1.3] (vegeu també [38, Exercise (1D)], entre d'altres) que existeix una única norma a $\widetilde{A}$ que estén la norma de A i amb la qual $\widetilde{A}$ és una C^*-àlgebra.

Les aplicacions naturals entre C^*-àlgebres són aquelles que, a banda de ser morfismes d'àlgebres, preserven la involució i la topologia. És un fet ben conegut que si un morfisme preserva la involució (en diem un $*$-morfisme), aleshores és automàticament continu i té norma més petita que 1.

DEFINICIÓ 1.2.15 *Un element x en una $*$-àlgebra complexa A es diu* **autoadjunt** *si $x^* = x$. Denotem el conjunt d'elements autoadjunts per A_{sa}. Una* **projecció** *és un idempotent autoadjunt. Diem que un element $v \in A$ és una* **isometria parcial** *si v^*v és una projecció. Si A té unitat i $v^*v = 1$ (respectivament, $vv^* = 1$), aleshores diem que v és una* **isometria** *(respectivament, una* **co-isometria***). Un element que* *és una isometria i una co-isometria al mateix temps es diu* **unitari**. *Denotem per* $\mathcal{U}(A)$ *el grup dels unitaris de* A.

DEFINICIÓ 1.2.16 *Sigui* A *una àlgebra complexa i* $x \in A$. *Definim l'***espectre** *de* x *com* $\mathrm{Spec}(x) = \{z \in \mathbb{C} \mid z1_A - x$ *no és invertible en* $\widetilde{A}\}$, *un subconjunt compacte de* $\mathbb{C}$.

En el context de l'anterior definició, un element x en una C^*-àlgebra A es diu **positiu**, i escrivim $x \geq 0$, si $x^* = x$ i $\mathrm{Spec}(x) \subseteq \mathbb{R}^+$. Denotem el conjunt d'elements positius per A_+. Equivalentment, si A és una C^*-àlgebra i $x \in A$, aleshores $x \in A_+$ si i només si $x = yy^*$, per algun $y \in A$ (vegeu, per exemple, [38, Theorem 5.7]). Es prova que el conjunt A_+ és un con estricte de A (per exemple, [38, Lemma 5.6]), i per tant defineix un ordre parcial a l'àlgebra: si $x, y \in A$ diem que $x \leq y$ si i només si $y - x \geq 0$. En aquest mateix sentit, es pot veure que $x \in A_{sa}$ si i només si x és **normal** (és a dir, $xx^* = x^*x$) i $\mathrm{Spec}(x) \subseteq \mathbb{R}$.

Sigui X un espai localment compacte Hausdorff. Denotem per $C_0(X)$ l'anell de funcions contínues (a valors complexes) sobre X que "desapareixen" a l'infinit, és a dir, les funcions contínues f tals que, per a tot $n \in \mathbb{N}$, el conjunt $\{x \in X \mid f(x) \geq 1/n\}$ és un compacte de X. Amb les operacions habituals de suma i producte, prenent com a norma la norma del suprem i com a involució la conjugació complexa, l'anell $C_0(X)$ és una C^*-àlgebra commutativa, i té unitat si i només si X és compacte. Introduïm ara una tècnica que juga un paper central en molts arguments de C^*-àlgebres. Aquesta tècnica es coneix amb el nom de **càlcul funcional o espectral**, i ens permetrà treballar amb elements que siguin "funcions" d'un element donat. Si A és una C^*-àlgebra i $a \in A$, denotem per $C^*(a)$ (respectivament $C^*(a, 1)$) la mínima C^*-subàlgebra que conté a (respectivament, que conté $a, 1$), i l'anomenem la C^*-subàlgebra **generada** per a (respectivament, per $a, 1$). En ambdós casos, obtenim C^*-àlgebres commutatives. El càlcul funcional es basa en el següent resultat, que pot trobar-se a [68, Theorem 2.1.10]:

TEOREMA 1.2.17 *(Gel'fand) Sigui* A *una* C^**-àlgebra commutativa diferent de zero. Aleshores existeix un espai localment compacte Hausdorff* X *tal que* A *és isomètricament* $*$*-isomorfa a* $C_0(X)$. $\square$

TEOREMA 1.2.18 *[68, Theorem 2.1.13] Sigui* A *una* C^**-àlgebra amb unitat, i sigui* $a \in A$ *un element normal. Denotem per* z *la inclusió de* $\mathrm{Spec}(a)$ *en* $\mathbb{C}$. *Aleshores, hi ha un únic* $*$*-morfisme amb unitat* $\varphi : C(\mathrm{Spec}(a)) \to A$ *tal que* $\varphi(z) = a$. *A més,* φ *és una isometria i* $\mathrm{Im}(\varphi) = C^*(a, 1)$. $\square$

Si la nostra C^*-àlgebra no té unitat, aleshores treient la funció constant $z \mapsto 1$ de $C(\mathrm{Spec}(a))$ i la unitat 1 de $C^*(a, 1)$, obtenim un isomorfisme

$$\varphi : C_0(\mathrm{Spec}(a) \setminus \{0\}) \to C^*(a).$$

El gran avantatge d'aquest fet és que podem treballar amb funcions d'un determinat element d'una C^*-àlgebra A. Més precisament, si $a \in A$ és un element normal, i $f \in C_0(\mathrm{Spec}(a) \setminus \{0\})$, aleshores definim $f(a) = \varphi(f)$. Usarem aquesta notació en el futur, sense parlar més d'aquest isomorfisme. Una funció especial que ens interessarà aplicar a elements positius és la següent:

DEFINICIÓ 1.2.19 *Sigui $\varepsilon > 0$. Definim f_ε com la funció real de variable real tal que val zero a $(-\infty, \varepsilon/2]$, és lineal a $[\varepsilon/2, \varepsilon]$ i val 1 a $[\varepsilon, +\infty)$.*

Observem que, per a tot $\varepsilon > 0$, es té que $f_{\varepsilon/2} f_\varepsilon = f_\varepsilon$.

Una classe important de C^*-subàlgebres d'una C^*-àlgebra donada és la formada per aquelles que hereten l'ordre:

DEFINICIÓ 1.2.20 *Una C^*-subàlgebra B d'una C^*-àlgebra A es diu* **hereditària** *si la condició $0 \leq a \leq b$ amb $a \in A$ i $b \in B$ implica que $a \in B$.*

Clarament, 0 i A són C^*-àlgebres hereditàries, i la intersecció de C^*-subàlgebres hereditàries és altre cop hereditària. La C^*-subàlgebra hereditària generada per un subconjunt S de A és per definició la C^*-subàlgebra hereditària més petita que conté S. Si I és un ideal tancat en una C^*-àlgebra A, aleshores I és una C^*-subàlgebra hereditària de A. En efecte, si $0 \leq a \leq b$, amb $b \in I$, aleshores per [48, Lemma A-1] existeix una successió d'elements (t_n) en A tals que $a^{1/2} = \lim_{n\to\infty} t_n b^{1/2}$ i per tant $a \in I$. Diem que A és una C^*-àlgebra **simple** si A no té ideals tancats no trivials. En cas que A no tingui ideals no trivials, direm que A és **algebraicament simple**. (Si, per exemple, A té unitat, aleshores els conceptes de simple i algebraicament simple coincideixen.)

Les C^*-àlgebres hereditàries són exemples clars de C^*-àlgebres que no tenen unitat. Si treballem dins una C^*-àlgebra més gran, sembla clar que no sempre serà convenient afegir una unitat a una hereditària en la manera usual (és a dir, sumant $\mathbb{C}$). Això es pot evitar fent servir el concepte d'unitat aproximada, que es basa en la noció de xarxa. Aquesta última és una noció que permet expressar la topologia d'un espai en termes de convergència, i és la que cal considerar quan l'espai que estem tractant no és metritzable.

DEFINICIÓ 1.2.21 *Sigui X un espai topològic. Una* **xarxa** *és una parella (Λ, ς), on Λ és un conjunt preordenat, dirigit superiorment, i $\varsigma : \Lambda \to X$ és una aplicació.*

Denotarem $x_\lambda = \varsigma(\lambda)$, i així la notació d'una xarxa serà $(x_\lambda)_{\lambda\in\Lambda}$. Les xarxes també s'anomenen **successions generalitzades**. Aquesta terminologia queda justificada pel fet que si $(x_\lambda)_{\lambda\in\Lambda}$ és una xarxa i $\Lambda = \mathbb{N}$, aleshores $(x_\lambda)_\lambda$ és una successió.

DEFINICIÓ 1.2.22 *Sigui A una C^*-àlgebra. Una* **unitat aproximada** *és una xarxa $(u_\lambda)_{\lambda\in\Lambda}$ creixent tal que $u_\lambda \in A_+$ i $\|u_\lambda\| \leq 1$ per a tot $\lambda \in \Lambda$, i tal que per a tot $x \in A$ tenim $x = \lim_\lambda xu_\lambda$. (Equivalentment $x = \lim_\lambda u_\lambda x$.) Diem que A té* **σ-unitat** *si existeix una unitat aproximada numerable.*

Afortunadament, l'existència d'unitats aproximades està assegurada en el nostre context (vegeu, per exemple, [72, Theorem 1.4.2] o bé [68, Theorem 3.1.1]):

TEOREMA 1.2.23 *Tota C^*-àlgebra A té una unitat aproximada. De fet, prenent $\Lambda = \{a \in A_+ \mid \|a\| < 1\}$, i posant $u_\lambda = \lambda$ per a tot $\lambda \in \Lambda$, aleshores $(u_\lambda)_\lambda$ és una unitat aproximada per A.* □

Sigui A una C^*-àlgebra, i sigui $a \in A_+$. Aleshores la C^*-subàlgebra hereditària generada per $\{a\}$ és $B := \overline{aAa}$. En efecte, l'aspecte més significatiu és veure que $a \in B$. Sigui (u_λ) una unitat aproximada per A. Aleshores $a^2 = \lim au_\lambda a$ i per tant $a^2 \in B$. Ara, com que B és una C^*-àlgebra, tenim que $a = (a^2)^{1/2} \in B$ (per càlcul funcional). D'altra banda, és fàcil veure també que $\{f_\varepsilon(a)\}_{\varepsilon>0}$ és una unitat aproximada per B, que de fet es pot prendre numerable agafant $\varepsilon_n = 1/n$, per $n \in \mathbb{N}$.

DEFINICIÓ 1.2.24 *Sigui R un anell amb unitat, i sigui $n \geq 1$. Denotem per $Lg_n(R)$ (respectivament $Rg_n(R)$) el conjunt de n-ples $(x_1, \ldots, x_n)$ a R^n tals que $\sum_{i=1}^{n} Rx_i = R$ (respectivament, $\sum_{i=1}^{n} x_iR = R$). Si A és una C^*-àlgebra amb unitat, denotem per $\mathrm{tsr}(A) = \inf\{n \mid \overline{Lg_n(A)} = A^n\}$. Si A no té unitat, posem $\mathrm{tsr}(A) = \mathrm{tsr}(\widetilde{A})$. Anomenem $\mathrm{tsr}(A)$ el* **rang estable topològic** *de A.*

Rieffel provà a [79, Proposition 1.6], que aquesta definició de rang estable topològic és simètrica (és a dir, coincident amb la definició que obtindríem prenent $Rg_n(A)$). D'altra banda, Herman i Vaserstein van provar a [49, Proposition 1.2] que per a una C^*-àlgebra amb unitat el rang estable topològic coincideix amb l'algebraic (d'acord amb la definició 1.2.4). Notem que això no introdueix cap ambigüitat en el cas que la C^*-àlgebra no tingui unitat, en el sentit que $\mathrm{sr}(A) = \mathrm{sr}(\widetilde{A}) = \mathrm{tsr}(\widetilde{A}) = \mathrm{tsr}(A)$. Parlarem, doncs, de rang estable, tant per anells com per C^*-àlgebres.

Com al cas dels anells regulars, ens interessarà parlar de C^*-àlgebres que tenen rang estable 1 (és a dir, C^*-àlgebres on els invertibles són densos). Això, com abans, té una traducció al monoide de classes d'equivalència d'idempotents. A causa de la involució, aquest monoide pot ésser descrit d'una manera més convenient usant projeccions.

DEFINICIÓ 1.2.25 *Sigui A un anell amb involució, i siguin $p, q \in A$ projeccions. Diem que p i q són* **$*$-equivalents** *o bé* **Murray-von Neumann equivalents** *si existeix un element $v \in A$ tal que $p = vv^*$ i $q = v^*v$.*

El següent resultat, degut a Kaplansky, mostra que en una C^*-àlgebra A la definició de $V(A)$ com a classes d'equivalència d'idempotents o com a classes de $*$-equivalència de projeccions és irrellevant (per a una referència, vegeu [52] o bé [38]).

PROPOSICIÓ 1.2.26 *(Kaplansky) Sigui A una C^*-àlgebra. Aleshores*

(a) *Si $p, q \in M_\infty(A)$ són projeccions, aleshores $p \sim q$ si i només si p i q són $*$-equivalents.*

(b) *Si $e \in A$ és un idempotent, aleshores existeix una projecció $p \in A$ tal que $eA = pA$.* □

A conseqüència del Teorema 1.2.5 i de les observacions que acabem de fer, tenim que si A és una C^*-àlgebra amb rang estable 1, aleshores $V(A)$ és cancel·latiu.

La noció de rang estable topològic és una versió no commutativa de la dimensió, en el sentit que si $A = C(X)$, per a un espai compacte de Hausdorff X, aleshores $\mathrm{sr}(A) = [\dim(X)/2] + 1$, on $\dim(X)$ és la dimensió "covering" per espais topològics (vegeu, per exemple, [79, Proposition 1.7]). En part per aquest motiu, Brown i Pedersen van introduir a [19] el concepte de rang real per a una C^*-àlgebra, basat en demanar a la definició de rang estable que els elements siguin autoadjunts.

DEFINICIÓ 1.2.27 *Sigui A una C^*-àlgebra amb unitat. Sigui N el conjunt de nombres naturals tals que si $n \in N$, aleshores per a tot $m \geq n + 1$, tot $\varepsilon > 0$ i tota m-pla $(x_1, \dots, x_m) \in A_{sa}^m$, existeix una m-pla $(y_1, \dots, y_m) \in A_{sa}^m$ tal que $\sum_{k=1}^{m} y_k^2$ és invertible i $\|\sum_{k=1}^{m}(x_k - y_k)^2\| < \varepsilon$. Definim el* **rang real** *de A, i ho denotem per $RR(A)$, com l'ínfim del conjunt N. Si A no té unitat, definim $RR(A) = RR(\widetilde{A})$.*

En contrast amb el rang estable, el rang real és un anàleg no commutatiu més fidel per a la dimensió. Així, si $A = C(X)$, amb X un espai compacte de Hausdorff, tenim que $RR(A) = \dim(X)$ ([19, Proposition 1.1]). Hi ha, a més, una relació entre els dos conceptes, que és $RR(A) \leq 2\mathrm{sr}(A) - 1$ (vegeu [19, Proposition 1.2]).

El cas en que estarem interessats és quan el rang real és zero. Segons la definició, això és dir que tot element autoadjunt es pot aproximar per un element autoadjunt i invertible. Es pot dir encara més ([19, Theorem 2.6]):

TEOREMA 1.2.28 *(Brown-Pedersen) Per a una C^*-àlgebra A, les següents condicions són equivalents:*

(a) *$RR(A)=0$;*

(b) *(FS) Els elements de A_{sa} amb espectre finit són densos a A_{sa};*

(c) *(HP) Tota C^*-subàlgebra hereditària de A té una unitat aproximada (no necessàriament creixent) formada per projeccions;*

(d) *Per a qualsevol parella d'elements $x, y \in A_+$ tals que $xy = 0$, i per a qualsevol $\varepsilon > 0$, existeix una projecció $p \in \widetilde{A}$ tal que $\|(1-p)x\| \leq \varepsilon$ i tal que $py = 0$.* □

La classe de C^*-àlgebres amb rang real zero és tancada per subàlgebres hereditàries (en particular, per ideals tancats i córners), pel pas a matrius ([19, Corollary 2.8, Theorem 2.10]), i per límits directes (és a dir, si $(A_i)_{i\in I}$ és una família de C^*-àlgebres amb rang real zero i $A = \varinjlim A_i$, en la categoria de C^*-àlgebres, aleshores A té rang real zero). A més, si una C^*-àlgebra amb σ-unitat té rang real zero, aleshores té una unitat aproximada formada per una successió creixent de projeccions ([19, Proposition 2.9]). Com al cas regular, en presència de rang real zero, les C^*-àlgebres amb rang estable 1 tenen un interès especial:

PROPOSICIÓ 1.2.29 *[15, Proposition III.2.4] (Blackadar-Handelman) Sigui A una C^*-àlgebra amb rang real zero. Aleshores $\mathrm{sr}(A) = 1$ si, i només si, el monoide $V(A)$ és cancel·latiu.* □

Donarem tot seguit alguns exemples de C^*-àlgebres amb rang real zero, que il·lustren l'amplitud d'aquesta classe. Per més detalls sobre les àlgebres que apareixen, vegeu per exemple [27] o bé [91].

(a) Sigui A una C^*-àlgebra commutativa. Aleshores $A = C_0(X)$ per a un cert espai localment compacte Hausdorff. Pel que hem vist abans, $RR(A) = RR(\widetilde{A}) = \dim(\alpha X)$, on αX és la compactificació per un punt de X. Així $RR(A) = 0$ si i només si $\dim(X) = 0$.

(b) Sigui $\mathcal{H}$ un espai de Hilbert complex. Denotem per $\mathbb{B}(\mathcal{H})$ els operadors $T : \mathcal{H} \to \mathcal{H}$ que són lineals i acotats. Si $T \in \mathbb{B}(\mathcal{H})$ prenem $\|T\| = \sup_{\|x\|\leq 1} \|Tx\|$, i definim

T^* com l'únic operador tal que $\langle Tx, y\rangle = \langle x, T^*y\rangle$, per a $x, y \in \mathcal{H}$ qualssevol. Aleshores $\mathbb{B}(\mathcal{H})$ és una C^*-àlgebra amb rang real zero. En el cas particular que $\mathcal{H}$ tingui dimensió finita n, es té que $\mathbb{B}(\mathcal{H}) = M_n(\mathbb{C})$.

(*c*) Diem que una projecció p en una C^*-àlgebra A és **infinita** si i només si existeix una altra projecció $q < p$ i tal que $p \sim q$. Una C^*-àlgebra A es diu **purament infinita** si tota C^*-subàlgebra hereditària no zero té una projecció infinita (si A és simple i amb dimensió almenys 2, això és equivalent a dir que per a tot element $a \in A$ no zero, existeixen elements $x, y \in A$ tals que $xay = 1$, per [27, Theorem V.5.5]). Si A és una C^*-àlgebra purament infinita i simple, aleshores A té rang real zero (vegeu [95, Theorem 1]). Exemples clàssics de C^*-àlgebres purament infinites simples són les **àlgebres de Cuntz**. Breument, si $n \geq 2$, es defineix l'àlgebra de Cuntz $\mathcal{O}_n$ com la C^*-àlgebra universal generada per isometries $s_1, \ldots, s_n$ tals que $\sum_{i=1}^{n} s_i s_i^* = 1$. Es pot veure que aquestes àlgebres són simples i purament infinites (vegeu, per exemple, [27, Corollary V.4.7, Corollary V.5.6]), i per tant tenen rang real zero.

(*d*) És clar que si $A_1, \ldots, A_n$ són C^*-àlgebres amb rang real zero, aleshores $A_1 \oplus \ldots \oplus A_n$, amb la norma del màxim, és una C^*-àlgebra amb rang real zero. D'altra banda, és ben sabut que les C^*-àlgebres finitament dimensionals són les semisimples (vegeu, per exemple [38]), i per tant de la forma $M_{n_1}(\mathbb{C}) \oplus \ldots \oplus M_{n_k}(\mathbb{C})$ per a certs enters $n_1, \ldots, n_k$. Per tant, les àlgebres finitament dimensionals tenen rang real zero. Més en general, una C^*-àlgebra es diu **aproximadament finit-dimensional** o ***AF*** si A és un límit directe, en la categoria de C^*-àlgebres d'àlgebres finitament dimensionals. Equivalentment, A és una C^*-àlgebra AF si, i només si, A és la clausura d'una $*$-àlgebra ultramatricial complexa, és a dir, A és la clausura d'una unió creixent de C^*-àlgebres amb dimensió finita (vegeu [38]). Per tant, si A és una àlgebra AF, aleshores A té rang real zero. També, per [79, Proposition 3.5], tota àlgebra AF té rang estable 1.

Dins aquesta classe, tenim les àlgebres UHF (Uniformement Hiper-finites), que consisteixen en límits directes de successions $A_n = M_{k_n}(\mathbb{C})$ on $k_n | k_{n+1}$, i que són simples (vegeu [27], [68]).

(*e*) Sigui θ un nombre irracional. Denotem per A_θ la C^*-àlgebra universal generada per dos unitaris u i v que satisfan la relació $uv = e^{2\pi i\theta} vu$. Anomenem A_θ l'**àlgebra de rotació irracional**. Aquestes àlgebres són simples ([27, Theorem VI.1.4]). Rieffel va provar a [80] que les àlgebres de rotació irracional tenen rang estable 1, i més recentment Elliott i Evans van veure que de fet tenen rang real zero ([32]). Es desprèn de [80] que $V(A_\theta) = (\mathbb{Z} + \theta\mathbb{Z})^+$ (pensats com a positius dins $\mathbb{R}$).

Per aconseguir un exemple sense unitat però amb σ-unitat i les mateixes característiques, podem prendre $A_\theta \otimes \mathbb{K}(\mathcal{H})$ per a un espai de Hilbert $\mathcal{H}$ separable i de dimensió infinita.

(f) Una C^*-àlgebra simple A té **creixement de dimensió lent** (slow dimension growth) si es pot escriure com $A = \varinjlim A_n$, on $A_n = \oplus_k M_{[n,k]}(C(X_{n,k}))$, per a uns certs espais topològics compactes de Hausdorff, i es satisfà

$$\lim_n \max_k \left(\frac{\dim(X_{n,k})}{[n,k]} \right) = 0.$$

Observem que en el cas particular que $X_{n,k} = \{*\}$ per a tots n, k, aleshores aquesta és exactament la definició d'una àlgebra AF.

Es prova a [17] que si A és una C^*-àlgebra amb creixement de dimensió lent, aleshores A té rang estable 1, i A té rang real zero si, i només si, les projeccions de A separen certes aplicacions definides sobre A (que s'anomenen quasitraces, i de les quals en parlarem més endavant).

(g) La següent classe d'exemples és construïda a [40]. Sigui X un espai topològic compacte Hausdorff, separable i no buit. Triem una successió (x_n) d'elements de X tal que $\{x_n, x_{n+1}, \dots\}$ és dens a X per a tot n. Per a $n, k \in \mathbb{N}$ posem $\delta_n : M_k(C(X)) \to M_k(\mathbb{C}) \subseteq M_k(C(X))$ el morfisme donat per avaluació a x_n. Siguin $(\nu(k))_{k\in\mathbb{N}}$ enters positius tals que $\nu(n)|\nu(n+1)$, i posem $A_n = M_{\nu(n)}(C(X))$. Triem aplicacions $\phi_n : A_n \to A_{n+1}$ donades per

$$\phi_n(a) = \operatorname{diag}(a, \dots, a, \delta_n(a), \dots, \delta_n(a)).$$

Si $s > n$, posem $\phi_{s,n} = \phi_{s-1}\phi_{s-2}\dots\phi_n : A_n \to A_s$. Sigui A el límit inductiu de la successió (A_n, ϕ_n). Si α_n és el nombre d'identitats que apareixen a la definició de ϕ_n, suposem que $0 < \alpha_n < \frac{\nu(n+1)}{\nu(n)}$, és a dir, almenys apareixen una identitat i una δ_n.

Per [40, Lemma 1, Theorem 3], A és una C^*-àlgebra simple amb unitat i rang estable 1. Si $s > n$, posem $w_{s,n} = \alpha_n\alpha_{n+1}\dots\alpha_{s-1}\frac{\nu(n)}{\nu(s)}$. Aleshores A té rang real zero si i només si $\lim_{t\to\infty} w_{t,1} = 0$ o bé X és totalment desconnectat ([40, Theorem 9]).

En la mateixa línia d'abans, un exemple sense unitat però amb σ-unitat i les mateixes propietats es pot aconseguir considerant $A \otimes \mathbb{K}(\mathcal{H})$, per a un espai de Hilbert $\mathcal{H}$ separable i de dimensió infinita, i per A dins la classe anterior.

Finalment, introduïm les definicions de K_0 i K_1. Donada una C^*-àlgebra A, considerem la C^*-àlgebra $A^+ := A \oplus \mathbb{C}$ (que és isomorfa a $\widetilde{A}$ si A no té unitat), i considerem la projecció $\pi : A^+ \to \mathbb{C}$. Aleshores π indueix un morfisme de monoides $\pi_* : V(A^+) \to V(\mathbb{C})$, i $V(\mathbb{C}) \cong \mathbb{N} \cup \{0\}$. Al seu torn, π_* indueix un morfisme entre els corresponents grups de Grothendieck $\pi_* : G(V(A^+)) \to \mathbb{Z}$ (seguint la notació de la secció anterior). Definim $K_0(A) = \mathrm{Ker}(\pi_*)$. Cal notar que $K_0(A) = G(V(A))$ si A té unitat (per exemple, [91, Proposition 6.2.2]).

Definim ara, per a $n \in \mathbb{N}$, el grup $\mathcal{U}_n(A^+) = \{u \in \mathcal{U}(M_n(A^+))\}$. Aquests són grups topològics, localment arc-connexos, però en general no connexos. Denotem per $\mathcal{U}_n(A^+)_0$ la component connexa de la identitat i posem $G_n = \mathcal{U}_n(A^+)/\mathcal{U}_n(A^+)_0$. Si $m \leq n$, definim $\phi_{nm} : G_n \to G_m$ per $\phi_{nm}([u]) = [\mathrm{diag}(u, 1_{n-m})]$, on 1_{n-m} és la identitat de grandària $n - m$. Aleshores $K_1(A)$ es defineix com el límit directe del sistema (G_n, ϕ_{nm}). Altres definicions equivalents poden trobar-se a [91, Chapter 7].

Tant K_0 com K_1 són functors de la categoria de C^*-àlgebres a la categoria de grups abelians, que preserven límits directes (una conseqüència d'això és que si A és una àlgebra AF, aleshores $K_1(A) = 0$) i són invariants per estabilitzacions. Ambdós functors són mig exactes, en el següent sentit: si A és una C^*-àlgebra i J és un ideal tancat de A, aleshores la successió exacta de C^*-àlgebres $0 \to J \to A \to A/J \to 0$ indueix una successió exacta de grups abelians $K_i(J) \to K_i(A) \to K_i(A/J)$, per $i = 0, 1$. La falta d'exactitud en els extrems permet connectar aquestes dues successions per formar la coneguda successió exacta de sis termes (que no necessitarem). Un dels morfismes que calen per fer això és l'aplicació índex, de la qual en parlarem al capítol 4.

1.3 Conjunts compactes i convexos. Símplexs

L'objectiu d'aquesta secció és resumir breument els conceptes bàsics de conjunts compactes i convexos. Donada la naturalesa del treball, hem considerat convenient presentar la noció de símplex des d'un punt de vista algebraic. Atès que la definició en sí no s'usarà en els capítols següents, aquest és potser el punt en el qual convé parlar-ne per donar peu als exemples importants, i a les propietats que satisfan els símplexs. Per un tractament més complet sobre la matèria, vegeu [39, Chapter 5, Chapter 10], i també [2].

Si E és un espai vectorial real i $x_1, \ldots, x_n \in E$, una combinació lineal de la forma $\sum_{i=1}^{n} \alpha_i x_i$, on $\sum_{i=1}^{n} \alpha_i = 1$ s'anomena una **combinació afí**. En cas que $\alpha_i \geq 0$ (respectivament $\alpha_i > 0$) per a tot i, la combinació es diu **convexa** (respectivament **convexa positiva**). Un **conjunt convex** K dins un espai vectorial real E és un subconjunt de E tancat per combinacions convexes. Si $X \subseteq E$, anomenem **embolcall convex** de X al conjunt convex més petit de E que conté X. Denotarem l'embocall convex de X per $\mathrm{conv}(X)$.

DEFINICIÓ 1.3.1 *Si K i L són subconjunts convexos de sengles espais vectorials reals E_1 i E_2, una aplicació $f : K \to L$ que preserva combinacions convexes s'anomena* **afí**. *Si f és una bijecció, aleshores diem que f és un* **isomorfisme afí**. *(Notem que la inversa de f ja és, en aquest cas, afí.)*

Treballarem d'ara endavant amb subconjunts convexos d'espais vectorials topològics. Més precisament, ens mourem en la **categoria dels espais compactes i convexos**, els objectes de la qual són els subconjunts compactes i convexos d'espais vectorials topològics Hausdorff. Els morfismes en aquesta categoria són les aplicacions contínues i afins entre els objectes. Els isomorfismes seran, naturalment, isomorfismes afins que a més són homeomorfismes. Parlarem així d'**homeomorfismes afins**.

Un dels resultats destacables és el Teorema de Krein-Mil'man, que ens permet "generar" els espais compactes i convexos a partir d'uns punts especials.

DEFINICIÓ 1.3.2 *Sigui K un conjunt convex. Un punt* **extrem** *de K és un punt $x \in K$ tal que no és a l'interior de cap segment de K. És a dir, si $x = \alpha y + (1-\alpha)z$ per $y, z \in K$ i $\alpha \in [0,1]$, aleshores cal que $\alpha = 0, 1$ o bé que $y = z = x$. Denotem el conjunt de punts extrems de K per $\partial_e K$.*

Una generalització d'aquesta noció és la següent:

DEFINICIÓ 1.3.3 *Una* **cara** *en un conjunt convex K és un subconjunt convex F de K tal que conté tot segment (dins de K) l'interior del qual interseca F. És a dir, si $\alpha x + (1-\alpha)y \in F$, amb $x, y \in K$ i $\alpha \in (0,1)$, aleshores $x, y \in F$.*

En el cas particular que $x \in K$, tenim que $\{x\}$ és una cara si i només si $x \in \partial_e K$. És fàcil veure que tota cara d'una cara F és novament una cara. Deduïm doncs que si F és una cara, llavors $\partial_e F = F \cap \partial_e K$.

L'existència de punts extrems no és trivial i es deu al següent fet, que pot trobar-se a [54, Theorem], [53], o [39, Theorem 5.17].

TEOREMA 1.3.4 *(Krein-Mil'man) Sigui K un subconjunt compacte i convex d'un espai vectorial topològic i localment convex E. Aleshores K és la clausura de l'embolcall convex de $\partial_e K$.* $\square$

Aquest Teorema permet, en ocasions, provar propietats referents a tot K mirant tan sols el comportament dels punts extrems. Com a exemple, destaquem que si f és una funció afí i contínua definida sobre K i amb valors reals, aleshores el màxim i el mínim de f es prenen en un punt extrem ([39, Corollary 5.19]). En conseqüència, si f i g són funcions afins i contínues definides sobre K i a valors reals, tenim que $f \leq g$ (o bé $f = g$) a $\partial_e K$ implica que $f \leq g$ (resp. $f = g$) globalment ([39, Corollary 5.20]). Clarament, l'ús efectiu de totes aquestes aplicacions depèn del que coneguem de la frontera extrema del convex K. Detallem tot seguit un exemple concret.

Sigui X un espai compacte Hausdorff. Recordem que una **mesura de probabilitat** sobre X és una mesura positiva, regular, de Borel μ sobre X tal que $\mu(X) = 1$. El conjunt de mesures de probabilitat sobre X es denotarà per $M_1^+(X)$. Els punts de X defineixen unes mesures particulars sobre X, les que anomenem *mesures puntuals*, o bé *mesures concentrades en un punt*. Més precisament, si $x \in X$ és un punt fixat, definim $\varepsilon_x \in M_1^+(X)$ per $\varepsilon_x(A) = 1$ si $x \in A$ i $\varepsilon_x(A) = 0$ en cas contrari, per a tots els borelians de X. A causa de la singularitat d'aquestes mesures, és fàcil veure que són punts extrems de $M_1^+(X)$. El recíproc de l'anterior afirmació és un resultat clàssic que es pot trobar, per exemple, a [39, Proposition 5.24]: L'aplicació $\delta : X \to \partial_e M_1^+(X)$ definida per $\delta(x) = \varepsilon_x$ és un homeomorfisme (δ es coneix sovint amb el nom d'*aplicació natural*). Hi ha resultats que descriuen amb precisió les cares tancades dels espais de mesures de probabilitat. Aquests, junt amb d'altres fets, es poden trobar a [39, pp. 87–92].

Un tipus especial de conjunt convex que ens interessarà és el símplex (i, més concretament, el símplex de Choquet). La propietat de símplex prové de generalitzar la noció de símplex clàssic al cas de dimensió infinita (on recordem que un *símplex clàssic* en un espai vectorial real E és un subconjunt convex de E que és l'embolcall convex d'una quantitat finita de punts afinament independents de E).

DEFINICIÓ 1.3.5 *Un* **con convex** *d'un espai vectorial real E és un subconjunt convex C tal que és un con del grup abelià E (en el sentit de la Definició 1.1.10). Un con convex C és* **estricte** *si 0 és l'únic element $x \in C$ tal que $x \in C$ i $-x \in C$.*

DEFINICIÓ 1.3.6 *Sigui C un con convex d'un espai vectorial real. Si $C \neq 0$, una* **base** *de C és un conjunt convex $K \subseteq C$ tal que tot punt no zero de C es pot escriure de manera única com αx, amb $x \in K$ i $\alpha \in \mathbb{R}^+$. La base del con zero serà, per definició, el conjunt buit.*

Com es veu a [39, Chapter 10], tot conjunt convex es pot realitzar com una base d'un con estricte en un espai vectorial real. Per tant, és d'esperar que investigant els cons convexos obtinguem informació de les seves bases. Un con convex C indueix de manera natural un pre-ordre $\leq_C$ en el grup abelià E, com hem vist a la secció 1. Ens interessarà un tipus d'ordre particular.

DEFINICIÓ 1.3.7 *Un* **con reticular** *en un espai vectorial real E és un con de E estricte i convex, tal que $(C, \leq_C)$ és un reticle.*

DEFINICIÓ 1.3.8 *Un* **símplex** *en un espai vectorial real E és un subconjunt convex K de E tal que és afinament homeomorf a la base d'algun con reticular.*

Els exemples a destacar de símplexs són, en primer lloc, els símplexs clàssics. Essent un símplex clàssic afinament homeomorf al símplex estàndard n-dimensional de $\mathbb{R}^{n+1}$ (per algun n), sols cal notar que aquest és una base pel con positiu de $\mathbb{R}^{n+1}$, que és un reticle. En segon lloc, si (G, u) és un grup d'interpolació amb unitat d'ordre, aleshores l'espai d'estats $St(G, u)$ és un símplex (vegeu [39, Corollary 10.6]).

Si X és un espai compacte Hausdorff, aleshores [39, Proposition 6.8] prova que $M_1^+(X) = St(C(X, \mathbb{R}), 1)$ (on $C(X, \mathbb{R})$ és l'anell de funcions contínues sobre X amb valors reals, i unitat d'ordre la funció constant 1). En particular doncs, $M_1^+(X)$ és un símplex. (Observem que $C(X, \mathbb{R})$ és un reticle, i per tant un grup d'interpolació.)

L'avantatge de treballar en aquesta classe es veu reflectit en el següent fet (que es pot trobar a [39, Proposition 10.9, Proposition 10.10]):

PROPOSICIÓ 1.3.9 *En un símplex, tota cara és un símplex, i l'embolcall convex de qualsevol unió de cares és una cara.* □

Sovint serà convenient, donada una cara en un conjunt convex, considerar el seu complement. Per tal que això concordi amb les funcions afins que poguem definir sobre la cara i el complement, aquest no pot ser qualsevol, sinó que ens interessa parlar d'un complement en el sentit "convex". La noció de símplex és novament útil en aquest context.

PROPOSICIÓ 1.3.10 *([39, Proposition 10.12]) Sigui F una cara d'un símplex K, i sigui F' la unió de les cares de K que són disjuntes de F. Aleshores F' és una cara de K, i és la cara més gran de K que és disjunta de F.* □

DEFINICIÓ 1.3.11 *Sigui F una cara en un símplex K, i sigui F' la unió de les cares de K que són disjuntes de F. Anomenem F' la* **cara complementària** *de F a K.*

L'èmfasi que hem posat en treballar amb símplexs es pot veure justificat pel fet que F' no és una cara, si sols considerem conjunts convexos (i fins i tot compactes), com es pot veure agafant un quadrat en el pla i $F = \{v\}$, on v és un vèrtex del quadrat. Aleshores F' és format per les dues arestes del quadrat que no contenen v, i clarament no és una cara. Recollim també l'observació feta a [39, Example 10.13], en la direcció que hi ha símplexs compactes de la forma $St(G, u)$ per a un grup (G, u) d'interpolació, tal que $St(G, u)$ té una cara pròpia amb cara complementària buida.

Tanquem aquesta secció introduint el concepte de símplex de Choquet, que lliga les propietats algebraiques agradables dels símplexs amb una de topològica força convenient.

DEFINICIÓ 1.3.12 *Sigui E un espai vectorial topològic Hausdorff localment convex. Si $K \subseteq E$ és un símplex compacte, aleshores diem que K és un* **símplex de Choquet**.

Novament, la font d'exemples elementals de símplexs de Choquet és constituïda pels símplexs clàssics. D'altra banda, i per [39, Theorem 10.16], tots els símplexs de Choquet de dimensió finita són clàssics. La classe de símplexs en la qual estarem de fet més interessats és la següent:

TEOREMA 1.3.13 *[39, Theorem 10.17] Si (G, u) és un grup d'interpolació amb unitat d'ordre, aleshores $St(G, u)$ és un símplex de Choquet.* □

En particular, si X és un espai compacte Hausdorff, i tenint en compte que $M_1^+(X) = St(C(X, \mathbb{R}), 1)$, tenim que el símplex de les mesures de probabilitat és de Choquet.

Capítol 2

Anells de multiplicadors

En aquest capítol introduirem els anells de multiplicadors, a la vegada que desenvoluparem la tècnica a través de la qual seran analitzats. Aquesta tècnica es basa en estudiar, per a un monoide (M, u) cònic, simple, de refinament, i per a un interval numerablement generat D sobre M adequat, la representació d'un cert submonoide de $\Lambda_{\sigma,D}(M)$ dins el con de funcions afins i semicontínues inferiors sobre l'espai d'estats de M normalitzats en u. A banda de tenir un interès independent, aquest procediment ens proporciona un marc de treball prou ampli des d'on tractar eficaçment problemes que fan referència de manera simultània a anells regulars i a C^*-àlgebres dins una extensa classe.

El capítol està dividit en quatre seccions. A la primera construirem l'anell de multiplicadors d'un anell semiprimer R i el dotarem d'una topologia anàloga a la topologia estricta habitual per C^*-àlgebres (vegeu [91, Chapter 2]). També analitzarem alguns exemples i establirem propietats bàsiques d'aquests anells, algunes d'elles ja conegudes en el cas de C^*-àlgebres. En la segona donem una relació entre els ideals de l'anell de multiplicadors i els ideals d'ordre del monoide de classes d'equivalència d'idempotents. Aquesta relació esdevindrà un isomorfisme per classes àmplies d'anells. Més precisament, provem el següent:

TEOREMA *Sigui R un anell amb* $\mathrm{sr}(R) = 1$. *Suposem que:*

(a) R és un anell regular, i existeix una successió creixent d'idempotents (e_n) tal que $R = \cup_{n=1}^{\infty} e_n R e_n$, o bé

(b) R és una C^*-àlgebra amb rang real zero, i existeix una successió creixent de projeccions (e_n) tal que $R = \overline{\cup_{n=1}^{\infty} e_n R e_n}$.

Aleshores el reticle d'ideals de $V(\mathcal{M}(R))$ és isomorf al reticle d'ideals de $\mathcal{M}(R)$ (d'ideals tancats, si R és C^*-àlgebra). A més, si $D = \{[e] \in V(R) \mid e \in R\}$, aleshores el monoide $V(\mathcal{M}(R))$ és isomorf al submonoide de $\Lambda_{\sigma,D}(V(R))$ format pels intervals

I tals que existeixen $n \in \mathbb{N}$ i un interval J amb $I + J = nD$.

L'essència de la tercera secció rau en aconseguir una representació útil del monoide $V(\mathcal{M}(R))$. La representació adequada en el nostre context s'obté mitjançant un espai de funcions contínues inferiors:

TEOREMA *Sigui R un anell com al Teorema anterior. Suposem que a més R és simple, que el monoide $V(R)$ és estrictament no perforat i no atòmic. Sigui $u \in V(R)$ un element no zero. Posem $S_u = St(V(R), u)$ i sigui $\phi_u : V(R) \to \mathrm{Aff}(S_u)^+$ l'aplicació natural (donada per avaluació). Denotem per $d = \sup \phi_u(D)$, i per $W_\sigma^d(S_u) = \{f \in \mathrm{LAff}(S_u)^{++} \mid f + g = nd$ per alguna $g \in \mathrm{LAff}(S_u)^{++}$ i algun $n \in \mathbb{N}\}$. Aleshores hi ha un isomorfisme de monoides entre $V(\mathcal{M}(R))$ i $V(R) \sqcup W_\sigma^d(S_u)$ tal que $[1_{\mathcal{M}(R)}]$ s'aplica sobre d. (L'estructura de monoide a $V(R) \sqcup W_\sigma^d(S_u)$ estén les operacions de $V(R)$ i de $W_\sigma^d(S_u)$, i a més $x + f = \phi_u(x) + f$, per a $x \in V(R)$ i $f \in W_\sigma^d(S_u)$.)*

Aquest resultat (que per C^*-àlgebres amplia les representacions obtingudes a [30] i [59, Theorem 7]), relaciona els ideals de $\mathcal{M}(R)$ amb els ideals del semigrup $W_\sigma^d(S_u)$, permetent iniciar-ne una anàlisi més intuïtiva i sistemàtica. Serà, doncs, l'eina fonamental que utilitzarem en els capítols subsegüents.

Finalment, la quarta secció clou el capítol amb algunes aplicacions de les tècniques anteriors que permeten estudiar d'altres monoides relacionats amb C^*-àlgebres.

2.1 Construcció i propietats

L'objectiu d'aquesta primera secció és donar una construcció explícita de l'anell de multiplicadors $\mathcal{M}(R)$ d'un anell semiprimer R. Veurem que si R és un anell topològic aleshores és possible definir una topologia a $\mathcal{M}(R)$, anomenada *topologia estricta*, de forma que $\mathcal{M}(R)$ és *estrictament complet.*

Aquesta topologia té una expressió en termes de convergència que dóna lloc de manera natural a la noció d'unitat aproximada per anells semiprimers, en analogia al concepte C^*-algebraic, alhora que ens permet establir un marc de treball adequat on tractar simultàniament qüestions relatives a anells regulars i a C^*-àlgebres de rang real zero.

DEFINICIÓ 2.1.1 *Sigui R un anell semiprimer. Un* **doble centralitzador** *sobre R és una parella (f, g), on $f : R \to R$ és un morfisme de mòduls dreta, $g : R \to R$ és un morfisme de mòduls esquerra, tals que satisfan la condició d'equilibri $xf(y) = g(x)y$, per a tot $x, y \in R$. El conjunt de tots els dobles centralitzadors es denota per $\mathcal{M}(R)$, i s'anomena* **anell de multiplicadors** *de R. Anomenem el quocient $\mathcal{M}(R)/R$* **anell corona**.

Notem que $\mathcal{M}(R)$ és efectivament un anell, amb operacions definides per

$$(f_1, g_1) + (f_2, g_2) = (f_1 + f_2, g_1 + g_2),$$

$$(f_1, g_1) \cdot (f_2, g_2) = (f_1 f_2, g_2 g_1).$$

Si denotem per id : $R \to R$ el morfisme identitat, aleshores la parella $(\mathrm{id}, \mathrm{id})$ és la identitat de $\mathcal{M}(R)$.

El prototipus de doble centralitzador ve donat pels elements de l'anell. Fixem $x \in R$, i definim els morfismes $f_x : R \to R$ i $g_x : R \to R$ com multiplicació per l'esquerra i per la dreta per x respectivament. Degut a l'associativitat del producte de R, tenim que $(f_x, g_x) \in \mathcal{M}(R)$. Això defineix una aplicació

$$\begin{array}{rccc} \varphi : & R & \to & \mathcal{M}(R) \\ & x & \mapsto & (f_x, g_x) \end{array}.$$

És fàcil comprovar que φ és un morfisme d'anells. Com que R és semiprimer, tenim que φ és injectiu. En efecte, si $\varphi(x) = 0$, aleshores $xR = Rx = 0$ i en conseqüència $xRx = 0$, d'on $x = 0$.

La injectivitat de φ es pot assegurar en contexts més amplis. Sigui R un anell. Diem que R és **no degenerat** si sempre que $x \in R$ satisfà $xR = 0$ o $Rx = 0$, aleshores $x = 0$. Més en general, diem que R és **dèbilment no degenerat** si $xR = 0$ i $Rx = 0$ impliquen que $x = 0$. Notem que els anells semiprimers són no degenerats. De fet, si R és un anell, aleshores R és semiprimer si i només si tot ideal dreta és (com a anell) dèbilment no degenerat, si i només si tot ideal esquerra és (com a anell) dèbilment no degenerat. D'aquestes consideracions es desprèn la següent

REMARCA 2.1.2 *Si R és un anell no degenerat o dèbilment no degenerat, aleshores el morfisme $\varphi : R \to \mathcal{M}(R)$ és injectiu.*

Observem que si R és semiprimer, aleshores $\varphi(R)$ és un ideal essencial de $\mathcal{M}(R)$. En efecte, si $J \lhd \mathcal{M}(R)$ satisfà $J \cap \varphi(R) = 0$, llavors $J\varphi(R) = 0$. Sigui $(f, g) \in J$. Aleshores $(f, g)(f_x, g_x) = 0$ per a tot $x \in R$, d'on es dedueix fàcilment que $f = g = 0$, i per tant $J = 0$.

Aquesta construcció resol el problema universal d'adjunció d'una unitat a R, de la següent manera: (1) Existeix un anell $\mathcal{M}(R)$ amb unitat i un morfisme injectiu $\varphi : R \to \mathcal{M}(R)$ tal que $\varphi(R) \lhd \mathcal{M}(R)$, i (2) Si S és un altre anell i $\varphi_1 : R \to S$ és un morfisme injectiu tal que $\varphi_1(R) \lhd S$, aleshores existeix un únic morfisme $\overline{\varphi} : S \to \mathcal{M}(R)$ amb $\overline{\varphi}\varphi_1 = \varphi$. A més, si S té unitat 1_S, llavors $\overline{\varphi}(1_S) = 1_{\mathcal{M}(R)}$, i $\overline{\varphi}$ és injectiu si i només si $\varphi_1(R)$ és un ideal essencial de S. Per verificar la propietat universal de

$\mathcal{M}(R)$, sols cal definir $\overline{\varphi}(s) = (f_s, g_s)$, on $f_s(x) = \varphi_1^{-1}(s\varphi_1(x))$ i $g_s(x) = \varphi_1^{-1}(\varphi_1(x)s))$, per $s \in S$. Veiem doncs que l'anell $\mathcal{M}(R)$ és la màxima unitificació de R. Llevat que el context porti a confusió, obviarem el morfisme φ en el que segueix i pensarem que R és un ideal de $\mathcal{M}(R)$. Amb aquest conveni, tenim que si $x \in \mathcal{M}(R)$ s'escriu com $x = (f, g)$, llavors $ax = g(a)$ i $xa = f(a)$ per a tot $a \in R$.

Abans d'esmentar els primers exemples, veurem com certes propietats estructurals de l'anell es transporten a l'anell de multiplicadors.

En primer lloc, notem que si R és semiprimer o bé R és primer, aleshores $\mathcal{M}(R)$ és semiprimer o primer (respectivament). En efecte, en el primer cas si $I \lhd \mathcal{M}(R)$ és tal que $I^2 = 0$, llavors $(I \cap R)^2 \subseteq I^2 = 0$, d'on $I \cap R = 0$ i per tant $I = 0$, ja que R és essencial en $\mathcal{M}(R)$. En el segon cas, si $0 \neq I, J \lhd \mathcal{M}(R)$, aleshores $I \cap R, J \cap R$ són ideals de R no nuls, ja que R és essencial. Com que R és primer, tenim $0 \neq (I \cap R)(J \cap R) \subseteq IJ$, i així $IJ \neq 0$.

Suposem que R és una K-àlgebra, on K és un anell commutatiu. Sigui (f, g) un doble centralitzador sobre R. Si $z \in K$, aleshores $(zf, zg) = (fz, gz)$ és també un doble centralitzador sobre R, que denotem per $z(f, g)$ (equivalentment, per $(f, g)z$). Per tant $\mathcal{M}(R)$ és també una K-àlgebra. A més és fàcil veure que f i g són K-lineals i que $\mathcal{M}(R)$ compleix la corresponent propietat universal a la categoria de K-àlgebres.

Suposem ara que R té una involució, és a dir, una aplicació $* : R \to R$ tal que $(x + y)^* = x^* + y^*$ i $(xy)^* = y^*x^*$ per a tot $x, y \in R$. Si $f : R \to R$ és una aplicació qualsevol, definim $f^* : R \to R$ per $f^*(x) = f(x^*)^*$. Notem que si (f, g) és un doble centralitzador, llavors (g^*, f^*) és també un doble centralitzador. Per tant, si posem $(f, g)^* = (g^*, f^*)$, obtenim que $\mathcal{M}(R)$ és un anell involutiu. Altra vegada $\mathcal{M}(R)$ compleix la propietat universal corresponent a la categoria de $*$-anells.

Finalment, tractem el cas en que l'anell té una topologia. Suposem que A és una àlgebra complexa de Banach semiprimera. Sigui (f, g) un doble centralitzador sobre A. Usant el Teorema de la Gràfica Tancada (vegeu, per exemple, [74, Theorem 2.2.7]), és fàcil veure que f i g són aplicacions lineals acotades sobre A, i que a més $\|f\| = \|g\|$. Posant $\|(f, g)\| = \|f\| = \|g\|$, obtenim doncs que $\mathcal{M}(A)$ és una àlgebra complexa i normada. No és difícil veure directament que $\mathcal{M}(A)$ és completa respecte la seva norma, i que si la norma de A és una C^*-norma, aleshores també ho és la de $\mathcal{M}(A)$, de forma que $\mathcal{M}(A)$ és una C^*-àlgebra si A ho és (això es pot trobar, per exemple, a [91, Chapter 2]).

És possible descriure també, per una C^*-àlgebra A, la seva àlgebra de multiplicadors $\mathcal{M}(A)$ en el marc d'una representació com a operadors en un espai de Hilbert. Sigui $\pi : A \to \mathbb{B}(\mathcal{H})$ una representació de A no degenerada en un espai de Hilbert $\mathcal{H}$. Denotem per $\mathcal{I}(A)$ l'idealitzador de A dins $\mathbb{B}(\mathcal{H})$, és a dir, la C^*-subàlgebra més gran de $\mathbb{B}(\mathcal{H})$ que conté A com a ideal tancat. Clarament $\mathcal{I}(A) = \{x \in \mathbb{B}(\mathcal{H}) \mid xA \subset A \text{ i } Ax \subset A\}$. El següent resultat mostra que els elements que "multipliquen" A dins ella mateixa són precisament els multiplicadors. Es desprèn també que aquesta descripció no depèn de la representació concreta de A com operadors en un espai de Hilbert.

PROPOSICIÓ 2.1.3 *[72, Proposition 3.12.3] Existeix un $*$-isomorfisme entre $\mathcal{I}(A)$ i $\mathcal{M}(A)$, donat per la correspondència $x \mapsto (f_x, g_x)$.* □

Presentem seguidament una col·lecció d'exemples que ens donaran una idea de quin tipus d'anell podem esperar com anell de multiplicadors. La grandària de $\mathcal{M}(R)$, comparat amb el de R, és molt gran si R no té unitat. Si A és una C^*-àlgebra, això és patent en la no separabilitat de $\mathcal{M}(A)$ i de $\mathcal{M}(A)/A$, tal com es veu a [72, 3.12.12] i [1, Theorem 2.7]. Tot i això, és possible que en la construcció de l'anell de multiplicadors no haguem afegit més ideals a banda de l'anell base.

(*a*) Clarament $\mathcal{M}(R) = R$ si, i només si, R té unitat.

(*b*) Sigui D un anell de divisió, i siguin ${}_DV$ i W_D espais vectorials esquerra i dreta (respectivament) sobre D. Un **producte interior** és una aplicació bilineal:

$$\langle\, ,\rangle : V \times W \to D.$$

La parella V, W s'anomena un **parell dual** o bé un **parell d'espais duals** si la forma $\langle\, ,\rangle$ és a més no degenerada, és a dir, $\langle v, W\rangle = 0$ força $v = 0$, i $\langle V, w\rangle = 0$ implica que $w = 0$. Si V, W és un parell dual, una aplicació D-lineal $f : V \to V$ es diu **adjuntable** si existeix una aplicació D-lineal $f^* : W \to W$ tal que $\langle vf, w\rangle = \langle v, f^*w\rangle$ per a tota parella de vectors $v \in V$ i $w \in W$.

Si V, W és un parell dual, denotem per $\mathcal{L}_W(V)$ el conjunt d'elements $f \in \mathrm{End}({}_DV)$ que són adjuntables, i per $\mathcal{F}_W(V)$ el subconjunt d'elements de $\mathcal{L}_W(V)$ que tenen rang finit. És fàcil veure que $R := \mathcal{F}_W(V)$ és un ideal de $\mathcal{L}_W(V)$. Per [10, Theorem 4.3.8 (iv)], tenim que $R = \mathrm{Soc}(R)$, i per [10, Theorem 4.3.7 (vi)], $\mathrm{Soc}(R)$ és simple. Ara, usem [4, Proposition 2] per concloure que $\mathcal{M}(R) = \mathcal{M}(\mathrm{Soc}(R)) \cong \mathcal{L}_W(V)$. Veurem més endavant que $\mathcal{L}_W(V)/\mathcal{F}_W(V)$ és un anell simple, si la dimensió de V i W sobre D és numerable.

(*c*) Sigui F un cos. Sigui $V = F^{(\infty)}$ l'espai vectorial sobre F que és la suma directa d'una quantitat numerable de còpies de F. Si $v = (v_i)_{i\in\mathbb{N}}$ i $w = (w_i)_{i\in\mathbb{N}}$ són elements de V, definim

$$\langle v, w\rangle = \sum_{i=1}^{\infty} v_i w_i.$$

És fàcil comprovar que $\langle , \rangle$ és una forma bilineal no degenerada, de forma que V, V és un parell dual. Sigui e_i el vector de V que té un 1 a la component i-sima i zeros a la resta. Aleshores $(e_i)_{i\in\mathbb{N}}$ és una base de V. Representem els elements $f \in \mathrm{End}(_F V)$ respecte aquesta base com matrius $M(f)$ amb un nombre infinit de files i de columnes, i on cada fila té un nombre finit d'entrades no nul·les. Observem que un element $f \in \mathrm{End}(_F V)$ és adjuntable si i només si cada fila de $M(f)^t$ té un nombre finit d'entrades no nul·les, és a dir, si cada columna de $M(f)$ té un nombre finit d'entrades no nul·les. Definim l'adjunt $f^* \in \mathrm{End}(V_F)$ de forma que la seva matriu associada és $M(f^*) = M(f)^t$. Així, els elements de l'anell $\mathbb{B}(F) := \mathcal{L}_V(V)$ són matrius amb un nombre infinit de files i de columnes, i on cada fila i cada columna té un nombre finit d'entrades no nul·les. És clar que $M_\infty(F) := \mathcal{F}_V(V)$ consisteix en les matrius de $\mathbb{B}(F)$ amb un nombre finit d'entrades no nul·les. Per l'anterior, $\mathcal{M}(M_\infty(F)) = \mathbb{B}(F)$. En aquest cas també, resultarà que $\mathbb{B}(F)/M_\infty(F)$ és un anell simple.

(*d*) Podem estudiar l'anàleg topològic de l'exemple anterior. Sigui $\mathcal{H}$ un espai de Hilbert separable i de dimensió infinita, i sigui $A = \mathbb{K}(\mathcal{H})$ la C^*-àlgebra dels operadors compactes sobre $\mathcal{H}$. (Recordem que un operador T sobre $\mathcal{H}$ és **compacte** si i només si $T(B_1)$ és relativament compacta, és a dir, si $\overline{T(B_1)}$ és compacta, on B_1 és la bola unitat tancada de $\mathcal{H}$.) Denotem per $\mathbb{F}(\mathcal{H})$ el conjunt d'operadors amb rang finit (és a dir, amb imatge de dimensió finita). Aleshores $M_\infty(\mathbb{C}) \subseteq \mathbb{F}(\mathcal{H}) \subseteq \overline{M_\infty(\mathbb{C})}$. D'altra banda, els operadors compactes són acotats i s'escriuen com a límit d'operadors de rang finit ([68, Theorem 2.4.5]), de manera que $A = \overline{M_\infty(\mathbb{C})}$, on cal entendre la completació en la topologia de la norma induïda per $\mathbb{B}(\mathcal{H})$. Aleshores, $\mathcal{M}(A) = \mathbb{B}(\mathcal{H})$. En aquest cas també, l'**àlgebra de Calkin** $\mathbb{B}(\mathcal{H})/\mathbb{K}(\mathcal{H})$ és una C^*-àlgebra simple (vegeu [68, Theorem 4.1.16]).

(*e*) Sigui A una C^*-àlgebra commutativa. Aleshores és clar que $\mathcal{M}(A)$ també ho és. Pel Teorema de Gel'fand (1.2.17), podem assumir que $A = C_0(X)$ per un cert espai topològic localment compacte de Hausdorff. Com que $\mathcal{M}(A)$ té unitat, existeix un espai compacte de Hausdorff βX tal que $\mathcal{M}(A) = C(\beta X, \mathbb{C})$. L'espai βX s'anomena la **compactificació de Stone-Čech** de X. En general, si X és un espai localment compacte de Hausdorff, un espai compacte de Hausdorff Y és una **compactificació** de X si existeix una aplicació contínua $f : X \to Y$, que és un homeomorfisme sobre la imatge i tal que $f(X)$ és dens en Y. La compactificació de Stone -Čech es pot identificar, en aquest context, amb la solució del problema universal de compactificar un espai localment compacte de

Hausdorff (d'una forma maximal), en els següents termes: (1) Existeix un espai compacte Hausdorff βX i una aplicació contínua $\widetilde{\varphi} : X \to \beta X$, tal que βX és una compactificació de X (a través de $\widetilde{\varphi}$), i (2) Si Y és una altra compactificació de X, a través de $g : X \to Y$, aleshores existeix una única aplicació contínua $h : Y \to \beta X$ tal que $hg = \widetilde{\varphi}$.

Es pot demostrar també que $\mathcal{M}(A) \cong C_b(X, \mathbb{C})$, la C^*-àlgebra de funcions contínues i acotades sobre X (vegeu, per exemple, [91, 2.2.4]). En aquest cas $\mathcal{M}(A)/A \cong C(\beta X \setminus X, \mathbb{C})$, on $\beta X \setminus X$ s'anomena **espai corona** (vegeu [46]), i és un exemple del que s'anomena espai sub-stonià: tota parella de subconjunts σ-compactes oberts disjunts tenen clausures compactes disjuntes.

Introduirem ara una topologia a $\mathcal{M}(R)$, per a un anell semiprimer R, en la qual $\mathcal{M}(R)$ serà un anell topològic complet i, en els casos d'interès tindrem que de fet la completació de R respecte aquesta topologia serà precisament $\mathcal{M}(R)$. Per C^*-àlgebres, aquesta és una tècnica ben coneguda que perfilarem seguidament, i que ens servirà com a motivació per tractar el cas més general d'un anell semiprimer R qualsevol.

Aquesta nova topologia és el resultat d'introduir la topologia dèbil induïda per una família separant de seminormes en un espai vectorial (que és una tècnica clàssica d'espais vectorials topològics). Més precisament, sigui A un C^*-àlgebra que actua sobre un espai de Hilbert $\mathcal{H}$ de forma no degenerada. Per a cada conjunt finit $\{\varepsilon, a_1, \dots, a_n\}$, on $\varepsilon > 0$ i $a_1, \dots, a_n \in A$, considerem

$$U(\varepsilon; a_1, \dots, a_n) = \{x \in \mathbb{B}(\mathcal{H}) \mid \|xa_i\|, \|a_ix\| < \varepsilon \text{ per a tot } i\}.$$

Anomenem **topologia estricta** a $\mathbb{B}(\mathcal{H})$ induïda per A a la topologia que té com a sub-base d'oberts del zero la formada pels entorns $U(\varepsilon; a_1, \dots, a_n)$, mentre que la sub-base d'oberts de qualsevol altre punt z ve donada per $z + U$, on U és un element de la sub-base d'oberts del zero. Equivalentment, aquesta topologia és la més feble tal que totes les aplicacions de la forma $x \mapsto ax$ i $x \mapsto xa$ per $x \in \mathbb{B}(\mathcal{H})$ i $a \in A$ són contínues. També es pot descriure com la topologia localment convexa a $\mathbb{B}(\mathcal{H})$ generada per les seminormes $p_a, q_a : \mathbb{B}(\mathcal{H}) \to \mathbb{R}^+$, on $a \in A$, definides per $p_a(x) = \|ax\|$ i $q_a(x) = \|xa\|$. La topologia estricta a $\mathcal{M}(A)$ és llavors la induïda per la inclusió $\mathcal{M}(A) \subseteq \mathbb{B}(\mathcal{H})$. Notem que, com que l'acció de A és no degenerada, aquesta família és separant, és a dir, si $0 \neq x \in \mathbb{B}(\mathcal{H})$, llavors existeix $a \in A$ tal que $p_a(x) \neq 0$ (de fet, existeix $a \in A$ tal que $p_a(x) \neq 0$ i $q_a(x) \neq 0$). En aquest cas, l'espai resultant és Hausdorff ([74, 1.4.5]).

Si R és un anell semiprimer sense cap topologia predefinida, hi considerem (per defecte) la topologia discreta. La manera natural d'expressar aquesta topologia en termes mètrics és definint una mètrica $d : R \times R \to \mathbb{R}^+$ per $d(x,y) = 1 - \delta_{x,y}$. És fàcil veure que R és un anell topològic complet respecte aquesta topologia. En analogia al cas de C^*-àlgebres, definim per a $\varepsilon > 0$ i elements $a_1, \dots, a_n \in R$, els conjunts

$$(\dagger) \qquad U(\varepsilon; a_1, \dots, a_n) = \{x \in \mathcal{M}(R) \mid d(xa_i, 0), d(a_i x, 0) < \varepsilon \text{ per a tot } i\}.$$

Donat que la topologia és discreta, si $\varepsilon \geq 1$ tenim que $U(\varepsilon; a_1, \dots, a_n) = \mathcal{M}(R)$, mentre que en el cas que $\varepsilon < 1$, tenim

$$U(\varepsilon; a_1, \dots, a_n) = \{x \in \mathcal{M}(R) \mid xa_i = a_i x = 0 \text{ per a tot } i\}.$$

Per tant ens referirem a aquests darrers conjunts simplement com $U(a_1, \dots, a_n)$. Definim la **topologia estricta** a $\mathcal{M}(R)$ induïda per R com la que té base d'oberts al voltant del zero els conjunts $U(a_1, \dots, a_n)$ per a $a_1, \dots, a_n \in R$. En qualsevol altre punt $x \in \mathcal{M}(R)$, la base d'oberts al voltant de x es defineix com $x + U$, on U és un element de la base d'oberts del zero.

Expressem seguidament la topologia en termes de convergència. Si A és una C^*-àlgebra i $(x_\lambda)_{\lambda \in \Lambda}$ és una xarxa d'elements en $\mathcal{M}(A)$, diem que x_λ convergeix a $x \in \mathcal{M}(A)$ en la topologia estricta (o que convergeix estrictament) si, i només si, per a tot $a \in A$, les xarxes $(x_\lambda a)$ i $(a x_\lambda)$ convergeixen en norma a xa i ax respectivament. De manera semblant, si R és un anell semiprimer i (x_λ) és una xarxa de $\mathcal{M}(R)$, diem que x_λ convergeix a $x \in \mathcal{M}(R)$ en la topologia estricta (o que convergeix estrictament a x), i escrivim $x_\lambda \to x$ si, i només si, per a tot conjunt d'elements $a_1, \dots, a_n \in R$, existeix λ_0 tal que si $\lambda \geq \lambda_0$, aleshores $(x_\lambda - x)a_i = a_i(x_\lambda - x) = 0$ per a tot i. Equivalentment, x_λ convergeix estrictament a x si, i només si, per a tot $a \in R$, existeix λ_0 tal que si $\lambda \geq \lambda_0$ llavors $(x_\lambda - x)a = a(x_\lambda - x) = 0$ (això és degut a que $(x_\lambda)_\lambda$ és una xarxa i per tant el conjunt d'índexos és dirigit).

REMARCA 2.1.4 *Del que hem discutit es desprèn que podem considerar de fet anells semiprimers R amb una mètrica $d : R \times R \to \mathbb{R}^+$. La topologia estricta a $\mathcal{M}(R)$ induïda per R es defineix donant com a sub-base d'oberts al voltant del zero els conjunts de la forma $(\dagger)$. Aquest nivell de generalitat inclou tant el cas de C^*-àlgebres (on $d(x,y) = \|x - y\|$) com el cas discret (on $d(x,y) = 1 - \delta_{xy}$). En aquest context, una xarxa $(x_i)_{i \in I}$ de $\mathcal{M}(R)$ convergeix a $x \in \mathcal{M}(R)$ en la topologia estricta si, i només si, per a tot $\varepsilon > 0$ i per a tot $a \in R$, existeix $i_0 \in I$ tal que $d(x_i a, xa) < \varepsilon$ i $d(ax_i, ax) < \varepsilon$ si $i \geq i_0$. Les aplicacions més immediates seran al camp dels anells regulars i de C^*-àlgebres, de forma que no treballarem amb aquestes classes més àmplies d'anells.*

En tots els casos, és clar que la suma és estrictament contínua. En particular, $x_\lambda \to x$ si i només si $x_\lambda - x \to 0$ (estrictament). Pel producte, tenim el següent

LEMA 2.1.5 *Sigui R un anell semiprimer, i siguin $(x_\lambda)_{\lambda\in\Lambda}$, $(y_\mu)_{\mu\in\Gamma}$ dues xarxes de $\mathcal{M}(R)$ que convergeixen a x i y respectivament, en la topologia estricta induïda per R. Aleshores $(x_\lambda y_\mu)_{(\lambda,\mu)\in\Lambda\times\Gamma}$ convergeix, en la topologia estricta, a xy.*

DEMOSTRACIÓ: Suposem que $x_\lambda \to x$ i $y_\mu \to y$. Prenem $a \in R$. Existeix λ_0 tal que si $\lambda \geq \lambda_0$, aleshores $a(x_\lambda - x) = 0$ i $(x_\lambda - x)ya = 0$. Existeix també μ_0 tal que si $\mu \geq \mu_0$ aleshores $ax(y_\mu - y) = 0$ i $(y_\mu - y)a = 0$. Per tant, si $(\lambda, \mu) \geq (\lambda_0, \mu_0)$, tenim que

$$x_\lambda y_\mu - xy = x_\lambda(y_\mu - y) + (x_\lambda - x)y,$$

de forma que

$$a(x_\lambda y_\mu - xy) = ax_\lambda(y_\mu - y) + a(x_\lambda - x)y = ax(y_\mu - y) = 0,$$

i també

$$(x_\lambda y_\mu - xy)a = x_\lambda(y_\mu - y)a + (x_\lambda - x)ya = 0. \ \square$$

LEMA 2.1.6 *[91, Lemma 2.3.3 and Proposition 2.3.4] Sigui A una C^*-àlgebra. Llavors la involució $*$ és estrictament contínua. La multiplicació a $\mathcal{M}(A)$ per un element fixat de $\mathcal{M}(A)$, o bé per elements en un conjunt acotat de $\mathcal{M}(A)$, és estrictament contínua. En general, la topologia estricta és més dèbil que la topologia de la norma i coincideixen precisament quan $A = \mathcal{M}(A)$.* $\square$

La completació d'un anell R respecte la topologia estricta produirà en certs casos d'interès tot l'anell de multiplicadors. Aquest haurà de ser, en particular, estrictament complet, és a dir, tota xarxa de Cauchy estricta serà convergent. Com veurem seguidament, aquest és sempre el cas.

DEFINICIÓ 2.1.7 *Sigui R un anell semiprimer. Diem que R té una* **unitat aproximada** *si existeix una xarxa $(a_i)_{i\in I}$ en R tal que convergeix en la topologia estricta induïda per R a $1 \in \mathcal{M}(R)$. Diem que R és un anell amb* **unitats locals** *si per a qualsevol conjunt finit $a_1, \ldots, a_n$ de R, existeix un idempotent $e \in R$ tal que $a_i \in eRe$ per a tot i.*

Observem que aquesta és la versió algebraica de la noció d'unitat aproximada per C^*-àlgebres (1.2.22). És possible establir un concepte més general seguint les línies de la Remarca 2.1.4.

Si R és un anell semiprimer amb unitat aproximada $(a_i)_{i\in I}$, aleshores diem que aquesta és **creixent** si per $i, j \in I$ tals que $i < j$, es compleix que $a_i = a_i a_j = a_j a_i$.

LEMA 2.1.8 *Sigui R un anell semiprimer. Llavors R té una unitat aproximada si, i només si, R té una unitat aproximada creixent.*

DEMOSTRACIÓ: La condició de suficiència és òbvia. Suposem doncs que $(a_i)_{i\in I}$ és una unitat aproximada per R. Sigui $\Lambda = \{a \in R \mid a = a_i \text{ per algun } i \in I\}$. Definim un ordre parcial a Λ. Si $\lambda, \mu \in \Lambda$, posem $\lambda \leq \mu$ si $\lambda = \mu$ o bé, en cas que $\lambda \neq \mu$, si $\lambda = \lambda\mu = \mu\lambda$. Notem que $(\Lambda, \leq)$ és un conjunt dirigit superiorment. En efecte, si $\lambda, \mu \in \Lambda$, llavors existeixen $i, j \in I$ tals que $\lambda = a_i$ i $\mu = a_j$. Com que $a_i \to 1$ estrictament, existeix $k \in I$ tal que $a_i a_k = a_k a_i = a_i$ i $a_j a_k = a_k a_j = a_j$. Posant $\nu = a_k$, veiem que $\lambda, \mu \leq \nu$. Definim $a_\lambda = \lambda$ si $\lambda \in \Lambda$. Aleshores, la xarxa $(a_\lambda)_{\lambda\in\Lambda}$ és una unitat aproximada creixent per R. Sols cal comprovar que $a_\lambda \to 1$ estrictament. Sigui $x \in R$. Existeix $i \in I$ tal que $a_i x = x a_i = x$. Posem $\lambda_0 = a_i \in \Lambda$. Llavors, si $\lambda \geq \lambda_0$, tenim que $\lambda x = \lambda(\lambda_0 x) = (\lambda\lambda_0)x = \lambda_0 x = x$, i anàlogament $x\lambda = x$. □

REMARCA 2.1.9 *Notem que si A és una C^*-àlgebra i $(a_i)_{i\in I}$ és una xarxa en A_+ tal que $\|a_i\| \leq 1$ per a tot $i \in I$, i $a_i = a_i a_j = a_j a_i$ sempre que $i < j$, llavors $(a_i)_{i\in I}$ és una xarxa creixent en A_+. En efecte, si $i < j$, tenim que $a_i^{1/2} = a_i^{1/2} a_j = a_j a_i^{1/2}$, i aleshores $a_i = a_i^{1/2} a_i^{1/2} = a_i^{1/2} a_j^2 a_i^{1/2} = a_j a_i a_j \leq a_j^2 \leq a_j$. Per tant, si (a_i) és una unitat aproximada creixent per A (formada per elements positius i de norma acotada per 1) en el sentit que li hem donat anteriorment, aleshores (a_i) és també una unitat aproximada creixent en l'ordre de la C^*-àlgebra.*

En cas que el conjunt I sigui numerable, aleshores R té una unitat aproximada si, i només si, existeix una successió $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ en R tal que $a_n a_{n+1} = a_n = a_{n+1} a_n$ i que convergeix estrictament a 1. En aquesta situació direm que R té **σ-unitat** (vegeu [64, Definition 1.2.1]) i que la unitat aproximada $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ és una σ-unitat de R. Observem també que si R és un anell amb unitats locals, aleshores $R = \cup eRe$, on la unió es pren variant tots els idempotents de R; en particular, aquest conjunt és dirigit i per tant formen una xarxa que òbviament convergeix estrictament a 1, de manera que R té una unitat aproximada.

PROPOSICIÓ 2.1.10 *Sigui R un anell semiprimer. Llavors $\mathcal{M}(R)$ és complet en la topologia estricta induïda per R. A més, R té una unitat aproximada si, i només si, $\mathcal{M}(R)$ és la completació de R en la topologia estricta.*

DEMOSTRACIÓ: Sigui $(x_\lambda)_\lambda$ una xarxa de Cauchy estricta a $\mathcal{M}(R)$. Aleshores, per a tot $a \in R$, les xarxes $(x_\lambda a)$ i $(a x_\lambda)$ són de Cauchy a R, i per tant convergents (és a dir, constants a partir d'un lloc). Definim aplicacions $f, g : R \to R$ per $f(a) = \lim_\lambda x_\lambda a$ i $g(a) = \lim_\lambda a x_\lambda$. Donats $a, b \in R$, existeix λ_0 tal que si $\lambda \geq \lambda_0$ llavors $x_\lambda a = x_{\lambda_0} a$ i $b x_\lambda = b x_{\lambda_0}$. Aleshores $b f(a) = b(x_{\lambda_0} a) = g(b) a$. Per tant, (f, g) és un doble centralitzador. A més, tenim que $\lim_\lambda x_\lambda = (f, g)$. Per veure-ho, prenem $a \in R$.

Aleshores $x_\lambda a - (f,g)a = x_\lambda a - \lim_\mu x_\mu a$, que és igual a zero si λ és prou gran. Anàlogament, $ax_\lambda - \lim_\mu ax_\mu = 0$ si λ és prou gran.

Suposem ara que R té una unitat aproximada $(a_i)_{i\in I}$. Llavors, per a tot $x \in \mathcal{M}(R)$, tenim que $a_i x \to 1 \cdot x = x$ en la topologia estricta, pel Lema 2.1.5, i per tant $\mathcal{M}(R)$ és la completació de R en la topologia estricta. El recíproc és obvi, un cop observat que si $\mathcal{M}(R)$ és la completació de R en la topologia estricta, llavors $1 \in \mathcal{M}(R)$ ha de ser el límit d'una certa xarxa $(a_i)_{i\in I}$ de R. □

La demostració de la següent Proposició és semblant, utilitzant el fet que tota C^*-àlgebra té una unitat aproximada.

PROPOSICIÓ 2.1.11 *[91, Proposition 2.3.5] Sigui A una C^*-àlgebra. Aleshores $\mathcal{M}(A)$ és la completació estricta de A. En particular, $\mathcal{M}(A)$ és estrictament complet.* □

Fins ara hem estudiat algunes propietats estructurals (algebraiques, topològiques) dels anells de multiplicadors $\mathcal{M}(R)$ d'anells semiprimers R. En general, però, no totes les característiques estructurals de R es traslladaran a $\mathcal{M}(R)$. Per exemple, veurem que si R és regular, aleshores $\mathcal{M}(R)$ no és necessàriament regular. D'altra banda, és conegut que si A és una C^*-àlgebra amb rang real zero, aleshores $\mathcal{M}(A)$ pot no tenir rang real zero. S'ha arribat a caracteritzar fins i tot quan $\mathcal{M}(A)$ té rang real zero. Recordem que per a una C^*-àlgebra B amb unitat, denotem per $\mathcal{U}(B)$ el grup unitari de B i per $\mathcal{U}(B)_0 \subseteq \mathcal{U}(B)$ la component connexa de l'element neutre $1 \in B$. El grup abelià $K_1(B)$ es defineix com $\varinjlim \mathcal{U}(M_n(B))/\mathcal{U}(M_n(B))_0$ (vegeu el capítol anterior, i també [91]). Destaquem el següent resultat de Huaxin Lin, que es troba parcialment a [60, Theorem 10]. Una conseqüència immediata és que si A és una àlgebra AF (sense unitat) amb σ-unitat, aleshores $\mathcal{M}(A)$ té rang real zero.

TEOREMA 2.1.12 *(Lin) Sigui A una C^*-àlgebra simple amb σ-unitat, rang real zero i rang estable 1. Aleshores $\mathcal{M}(A)$ té rang real zero si, i només si, $K_1(A) = 0$.*

DEMOSTRACIÓ: La condició de suficiència fou demostrada a [60, Theorem 10]. Per [61, Lemma 3.3], tenim que $\mathcal{U}(\mathcal{M}(A))$ és connex, i donat que $M_n(\mathcal{M}(A)) \cong \mathcal{M}(M_n(A))$ per a tota C^*-àlgebra A (vegeu, per exemple [91, Exercise 2.R]), deduïm que $\mathcal{U}(M_n(\mathcal{M}(A)))$ és connex per a tot $n \in \mathbb{N}$. Per tant $K_1(\mathcal{M}(A)) = 0$. Suposem doncs que $\mathcal{M}(A)$ té rang real zero. Aleshores, la inclusió natural $A \to \mathcal{M}(A)$ indueix un morfisme de grups $K_1(A) \to K_1(\mathcal{M}(A))$, que és injectiu per [61, Lemma 2.3]. Com que $K_1(\mathcal{M}(A)) = 0$, deduïm que $K_1(A) = 0$. □

A partir d'aquest resultat, podem generar exemples de C^*-àlgebres amb rang real zero, els multiplicadors de les quals no tenen rang real zero. Sigui B una C^*-àlgebra dins la classe construïda a [40]. Aleshores B és una C^*-àlgebra simple amb unitat, rang real zero, rang estable 1 i amb $K_1(B) \neq 0$. Sigui $A = B \otimes \mathbb{K}$, on $\mathbb{K}$ és la C^*-àlgebra d'operadors compactes sobre un espai de Hilbert separable de dimensió infinita. Aleshores A és simple amb σ-unitat, rang real zero, rang estable 1, i $K_1(A) = K_1(B) \neq 0$. Pel Teorema 2.1.12, $\mathcal{M}(A)$ no té rang real zero.

Mostrarem seguidament una classe d'anells (alguns d'ells regulars) pels quals els seus anells de multiplicadors no són regulars. Sigui R un anell semiprimer, i sigui $\{p_i\}_{i\in I}$ un conjunt d'idempotents ortogonals de R. Definim la xarxa $p_J = \sum_{i\in J} p_i$ d'idempotents, on $J \subset I$ és un subconjunt finit de I. Aleshores $(p_J)_J$ és una xarxa de Cauchy si, i només si, per a tot $a \in R$ existeix un subconjunt finit J_0 de I tal que $(p_J - p_{J_0})a = a(p_J - p_{J_0}) = 0$, per a tot $J_0 \subseteq J$ amb $J \subseteq I$ finit, si i només si, per a tot $a \in R$, existeix un subconjunt J_0 finit de I tal que $p_i a = a p_i = 0$ per a tot $i \in I \setminus J_0$. En aquest cas, i com que $\mathcal{M}(R)$ és estrictament complet per la Proposició 2.1.10, escrivim $\sum_{i\in I} p_i \in \mathcal{M}(R)$ com el límit de $(p_J)_J$. Pel Lema 2.1.5, tenim que $\sum_{i\in I} p_i$ és idempotent de $\mathcal{M}(R)$. Notem que si $I = \{i_n\}_n$ és numerable, aleshores $\sum_{n=1}^{\infty} p_{i_n}$ existeix si, i només si, per a tot $a \in R$, existeix n_0 tal que $p_{i_n}x = xp_{i_n} = 0$ si $n \geq n_0$. El següent Lema ens serà d'utilitat més endavant.

LEMA 2.1.13 *Sigui R un anell semiprimer. Siguin $(e_i)_{i\in I}$ i $(f_i)_{i\in I}$ dues xarxes d'idempotents ortogonals de R tals que $e := \sum_{i\in I} e_i$ i $f := \sum_{i\in I} f_i$ existeixen. Siguin x_i elements de R tals que $x_i \in e_i R f_i$ per a tot i. Llavors $x := \sum_{i\in I} x_i$ existeix i $x \in e\mathcal{M}(R)f$.*

DEMOSTRACIÓ: Prenem $a \in R$. Aleshores existeixen J_1, J_2 subconjunts finits de I tals que $e_i a = a e_i = 0$ per a tot $i \in I \setminus J_1$ i $f_i a = a f_i = 0$ per a tot $i \in I \setminus J_2$. Prenem $J_0 = J_1 \cup J_2 \subset I$, i notem que $x_i a = x_i f_i a = 0$ i $a x_i = a e_i x_i = 0$ per a tot $i \in I \setminus J_0$. Així, la xarxa $(\sum_{i\in J} x_i)_{\{J\subset I; |J|<\infty\}}$ és de Cauchy, i per tant convergent. Sigui $x = \sum_{i\in I} x_i$. Aleshores és clar que $x \in e\mathcal{M}(R)f$. □

DEFINICIÓ 2.1.14 *Sigui R un anell. Diem que R té una* **unitat numerable** *si existeix una successió (p_n) creixent d'idempotents tal que $R = \cup_{n=1}^{\infty} p_n R p_n$. La successió (p_n) s'anomena la* **unitat numerable** *per R.*

Notem que si R té una unitat numerable, aleshores R és un anell amb unitats locals, i en particular (si a més R és semiprimer), R té una unitat aproximada.

En cas que R sigui regular, aleshores R té una unitat numerable si, i només si, R té σ-unitat. En efecte, suposem que R té σ-unitat $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$. Aleshores, per a cada n i com que R és regular, existeixen idempotents $e'_n, e''_n \in R$ tals que $a_n R = e'_n R$ i

$Ra_n = Re''_n$. Pel Lema 1.2.10, existeixen idempotents $e_n \in R$ tals que $e'_n, e''_n \leq e_n$ i com que $a_n \to 1$ estrictament, deduïm que $R = \cup_{n=1}^{\infty} e_n R e_n$, de manera que R té una unitat numerable. El recíproc és obvi. En el futur parlarem, doncs, d'anells regulars amb σ-unitat.

PROPOSICIÓ 2.1.15 (P. Ara, no publicat) *Sigui R un anell primer amb unitat numerable, però sense unitat. Llavors $\mathcal{M}(R)$ no és regular.*

DEMOSTRACIÓ: Sigui $(p_n)_{n\in\mathbb{N}}$ una unitat numerable per R. Escrivim $e_n = p_n - p_{n-1}$, amb $p_0 = 0$. Com que R no té unitat, podem suposar que $e_n \neq 0$ per a tot $n \in \mathbb{N}$. Afirmem que existeix una successió (x_n) d'elements de R tal que $x_n \in e_n R e_{n+1}$ i $x_1 x_2 \dots x_n \neq 0$ per a tot $n \geq 1$. La construcció es fa per inducció sobre n. Notem primer que $e_1 R e_2 \neq 0$ ja que $e_1, e_2 \neq 0$ i R és primer. Per tant podem triar un element $x_1 \in e_1 R e_2$ no zero. Suposem que $x_1, \dots x_{n-1}$ han estat construïts satisfent $x_1 \dots x_{n-1} \neq 0$ i $x_i \in e_i R e_{i+1}$. Sigui $z = x_1 \dots x_{n-1}$. Com que R és primer, tenim que $zRe_{n+1} \neq 0$ i per tant existeix $x_n \in e_n R e_{n+1}$ tal que $z x_n \neq 0$. Això prova l'afirmació.

Sigui $x = \sum_{n=1}^{\infty} x_n \in \mathcal{M}(R)$, que existeix pel Lema 2.1.13. Aleshores l'element $1 + x$ no és un element regular de von Neumann. Suposem que existeix $y \in \mathcal{M}(R)$ tal que

$$(1) \qquad 1 + x = (1 + x)y(1 + x).$$

Posem $e_0 = x_0 = 0$. En primer lloc provem que $e_m y e_n = 0$ per a tot $m > n$ i que $e_n y e_n = e_n$ per a tot n. Procedim per inducció sobre n. Si $n = 0$ això és clar. Suposem que existeix un $k \geq 0$ tal que $e_m y e_k = 0$ per a tot $m > k$ i $e_n y e_n = e_n$ per a tot $n \leq k$. Multiplicant la relació (1) per la dreta per e_{k+1} obtenim

$$(2) \qquad (1 + x)y(e_{k+1} + x_k) = e_{k+1} + x_k.$$

Notem que existeix $l > k + 1$ tal que $ye_{k+1} \in p_l R$. Per hipòtesi d'inducció (usant que $e_m y e_k = 0$ per a tot $m > k$), també tenim que $yx_k \in p_k R$. Per tant, multiplicant la relació (2) per l'esquerra per e_t amb $k + 1 \leq t$ obtenim que $e_t y e_{k+1} = 0$ si $t \geq l$, que $e_t y e_{k+1} + x_t y e_{k+1} = 0$ si $k + 1 < t < l$, mentre que $e_{k+1} y e_{k+1} + x_{k+1} y e_{k+1} = e_{k+1}$ si $t = k + 1$. Fent servir les dues primeres relacions obtingudes resulta mitjançant un procés recurrent (començant amb $t = l - 1$) que $e_t y e_{k+1} = 0$ per a tot $k + 1 < t$. Per tant $x_{k+1} y e_{k+1} = 0$ i així tenim que $e_{k+1} y e_{k+1} = e_{k+1}$.

Ara provarem que per a tot $n \geq 1$ i tot $1 \leq i < n$ tenim que

$$e_i y e_n = (-1)^{n-i} x_i x_{i+1} \dots x_{n-1}.$$

Novament procedim per inducció sobre n. Com abans aquesta igualtat és clara si $n = 0$. Suposem doncs que la fórmula val per algun $n \geq 0$. Llavors, usant que $e_m y e_n = 0$ si $m > n$ i el fet que $1 + x = \sum_{k=1}^{\infty}(e_k + x_k)$ obtenim

$$(1+x)yx_n = (1+x)(\sum_{i=1}^{n}(-1)^{n-i}x_i x_{i+1}\dots x_n)$$

$$= \sum_{i=1}^{n}(-1)^{n-i}x_i x_{i+1}\dots x_n + \sum_{i=1}^{n}(-1)^{n-i}x_{i-1}x_i x_{i+1}\dots x_n = x_n.$$

Deduïm que

$$e_{n+1} + x_n = (1+x)e_{n+1} = (1+x)y(e_{n+1} + x_n) = (1+x)ye_{n+1} + x_n,$$

i per tant $e_{n+1} = (1+x)ye_{n+1}$. Multiplicant aquesta equació per l'esquerra per e_t amb $1 \leq t \leq n$ obtenim que $0 = e_t y e_{n+1} + x_t(e_{t+1}ye_{n+1})$. Com que $e_{n+1}ye_{n+1} = e_{n+1}$, les relacions anteriors mostren de manera recurrent que $e_t y e_{n+1} = (-1)^{n+1-t}x_t x_{t+1}\dots x_n$, la qual cosa completa la inducció.

Finalment, notem que existeix $k > 1$ tal que $e_1 y e_k = 0$ i per tant tenim $0 = e_1 y e_k = (-1)^{k-1}x_1 x_2 \dots x_{k-1} \neq 0$, de manera que entrem en contradicció amb l'elecció feta de la successió $\{x_n\}$. $\square$

Clourem la secció amb dos resultats que expressen propietats tècniques de l'anell de multiplicadors i ens seran útils més endavant. Són resultats coneguts en el camp de les C^*-àlgebres, i davant la impossibilitat de trobar referències explícites a la literatura d'anells semiprimers, donem demostracions.

LEMA 2.1.16 *Sigui R un anell semiprimer amb unitat aproximada, i sigui $p \in \mathcal{M}(R)$ un idempotent. Aleshores pRp és un anell semiprimer i $\mathcal{M}(pRp) = p\mathcal{M}(R)p$.*

DEMOSTRACIÓ: És clar que pRp és un anell semiprimer si R ho és. Denotem per $\mathcal{M}_p$ el conjunt de parelles (f, g) tals que $f : pR \to pR$ i $g : Rp \to Rp$ són morfismes de mòduls dreta i esquerra respectivament i $xf(y) = g(x)y$ per a tot $x \in Rp$ i $y \in pR$. Aleshores es comprova que $\mathcal{M}_p$, amb les operacions naturals de suma i producte, és un anell amb unitat $(\mathrm{id}, \mathrm{id})$. Definim una aplicació $\Theta : \mathcal{M}_p \to \mathcal{M}(pRp)$ per $\Theta(f, g) = (f_{|pRp}, g_{|pRp})$. Observem que Θ és un morfisme d'anells amb unitat injectiu. En efecte, suposem que $\Theta(f, g) = 0$. Aleshores $f_{|pRp} = g_{|pRp} = 0$. Notem que $f(pR)$ és un ideal dreta de R. Siguin $x, y \in R$, i calculem $pyf(px) = pypf(px) = g(pyp)px = 0$. Per tant $pRf(pR) = 0$, i així

$$f(pR)^2 = f(pR)f(pR) = f(pRf(pR)) = 0.$$

Com que R és semiprimer, tenim que $f(pR) = 0$, i per tant $f = 0$. Anàlogament $g = 0$, i per tant Θ és injectiu.

Afirmem que Θ és de fet exhaustiu. Prenem $(f, g) \in \mathcal{M}(pRp)$. Aleshores $f, g : pRp \to pRp$ són morfismes de pRp-mòduls dreta i esquerra, respectivament, i $xf(y) = g(x)y$ per a tota parella d'elements $x, y \in pRp$. Volem estendre aquestes aplicacions a $(f_0, g_0) \in \mathcal{M}_p$. Suposem que $f_0 : pR \to pR$ i $g_0 : Rp \to Rp$ existeixen. Llavors, si $y \in R$ tenim que

$$(\ddagger) \qquad pyf_0(px) = pypf_0(px) = g_0(pyp)px = g(pyp)px.$$

Sigui $(a_i)_{i\in I}$ la unitat aproximada de R. Aleshores la xarxa $(pa_ip)_i$ convergeix en la topologia estricta (induïda per pRp) a l'element $p \in \mathcal{M}(pRp)$. En conseqüència, les xarxes $(f(pa_ip))_i$ i $(g(pa_ip))_i$ convergeixen en la topologia estricta induïda per pRp a elements $w, t \in \mathcal{M}(pRp)$, respectivament. En efecte, és suficient comprovar que ambdues xarxes són de Cauchy i utilitzar el fet que $\mathcal{M}(pRp)$ és estrictament complet (pel Lema 2.1.10). Sigui $x \in R$. Com que $(pa_ip)_i$ és de Cauchy, existeix $i_0 \in I$ tal que si $i, j \geq i_0$, aleshores $(pa_ip)(pxp) = (pa_jp)(pxp)$ i $g(pxp)(pa_ip) = g(pxp)(pa_jp)$. Per tant, si $i, j \geq i_0$, tenim que

$$f(pa_ip)(pxp) = f((pa_ip)(pxp)) = f(pa_jp)(pxp),$$

i també

$$(pxp)f(pa_ip) = g(pxp)(pa_ip) = g(pxp)(pa_jp) = (pxp)f(pa_jp).$$

Veiem així que $(f(pa_ip))_i$ és una xarxa de Cauchy. Un argument similar prova que $(g(pa_ip))_i$ és de Cauchy.

Posem ara $y = a_i$ en la identitat $(\ddagger)$, i prenem límits en la topologia estricta, obtenint que $f_0(px) = tpx$. Definim doncs f_0 d'aquesta manera. Similarment, posem $g_0(xp) = xpw$. Per construcció, és clar que tant f_0 com g_0 són morfismes de R-mòduls (dreta i esquerra, respectivament). Cal comprovar, finalment, que $(f_0, g_0) \in \mathcal{M}_p$ i que $\Theta(f_0, g_0) = (f, g)$.

Notem que $(f_0, g_0) \in \mathcal{M}_p$ si, i només si, $ypf_0(px) = g_0(yp)px$ per $x, y \in R$ qualssevol, si i només si $yptpx = ypwpx$ per a tota parella d'elements $x, y \in R$. Si $j \in I$ i $z \in R$, tenim que $g(pzp)pa_jp = pzpf(pa_jp)$, i per tant $g(pzp) = pzpw$, prenent límits en la topologia estricta. Així doncs, si $i \in I$ i $x, y \in R$ tenim $ypg(pa_ip)px = ypa_ipwpx$, d'on prenent límits estrictes novament tenim $yptpx = ypwpx$. Per tant $(f_0, g_0) \in \mathcal{M}_p$.

Per veure que $f_{0|pRp} = f$, hem de comprovar que $f_0(pxp) = tpxp = f(pxp)$ per $x \in R$. Això prové del fet que si $i \in I$, aleshores $g(pa_ip)pxp = pa_ipf(pxp)$, d'on es conclou la igualtat prenent límits estrictes. De la mateixa manera obtenim que $g_{0|pRp} = g$. Per tant, Θ és exhaustiu i l'afirmació queda provada.

Clarament, $p\mathcal{M}(R)p \subseteq \mathcal{M}(pRp)$. Recíprocament, sigui $(f,g) \in \mathcal{M}(pRp)$ un doble centralitzador. Sigui $(f_0, g_0) \in \mathcal{M}_p$ l'antiimatge de (f,g) a través de Θ, i definim aplicacions $f', g' : R \to R$ per $f'(x) = f_0(px)$ i $g'(x) = g_0(xp)$, on $x \in R$. Aleshores és clar que f' i g' són morfismes de R-mòduls dreta i esquerra (respectivament), i de fet, si $x, y \in R$, aleshores $xf'(y) = xf_0(py) = xpf_0(py) = g_0(xp)py = g'(x)y$. Per tant $(f', g') \in \mathcal{M}(R)$, i clarament $p(f', g')p = (f,g)$. □

Les hipòtesis que hem imposat a l'anell en el resultat anterior no són supèrflues. Això es veu reflectit en el següent

EXEMPLE 2.1.17 *Existeix un anell primer R i un idempotent $p \in \mathcal{M}(R)$ tal que $\mathcal{M}(pRp) \neq p\mathcal{M}(R)p$.*

DEMOSTRACIÓ: Sigui
$$R = \begin{pmatrix} 2\mathbb{Z} & 2\mathbb{Z} & 2^2\mathbb{Z} \\ 2\mathbb{Z} & 2\mathbb{Z} & 2^3\mathbb{Z} \\ 2^2\mathbb{Z} & 2^3\mathbb{Z} & 2^4\mathbb{Z} \end{pmatrix}.$$

És fàcil comprovar que R és un anell amb les operacions induïdes de $M_3(\mathbb{Z})$. Vegem que R és primer. Siguin $a, b \in R$ tals que $aRb = 0$. Notem en primer lloc que, per a qualsevol $x \in M_3(\mathbb{Z})$, tenim que $2^4x \in R$. Per tant, $2^4(axb) = a(2^4x)b = 0$ per a tot $x \in M_3(\mathbb{Z})$, d'on $aM_3(\mathbb{Z})b = 0$. Com que $M_3(\mathbb{Z})$ és primer, deduïm que $a = 0$ o $b = 0$.

Comprovem que R no té unitat aproximada. Suposem que existeix una successió $(x_i)_{i\in\mathbb{N}}$ de R que convergeix en la topologia estricta a $1 \in \mathcal{M}(R)$. Aleshores, denotem per $x_{11}^{(i)} \in 2\mathbb{Z}$ la component $(1,1)$ de x_i. Prenem $a = 2e_{11} \in R$. Existeix i_0 tal que si $i \geq i_0$, aleshores $x_i a = a$. Per tant, si $i \geq i_0$ tenim $e_{11}(x_i a)e_{11} = 2x_{11}^{(i)}e_{11} = 2e_{11}$, d'on deduïm que $x_{11}^{(i)} = 1$, la qual cosa contradiu que $x_i \in R$.

Sigui $p = e_{11} + e_{22} \in \mathcal{M}(R)$. Aleshores
$$pRp = \begin{pmatrix} 2\mathbb{Z} & 2\mathbb{Z} & 0 \\ 2\mathbb{Z} & 2\mathbb{Z} & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Sigui $x = e_{21} \in \mathcal{M}(pRp)$. Notem que $p\mathcal{M}(R)p \subseteq \mathcal{M}(R)$, i que si $a = 2^2e_{13}$, llavors $xa = 2^2e_{23} \notin R$, de manera que $x \notin p\mathcal{M}(R)p$. □

El cas de l'exemple contrasta amb el fet que si R és un anell semiprimer qualsevol i $p^2 = p \in Q := Q_s(R)$, aleshores $pQp = Q_s(pQp \cap R)$ (vegeu, per exemple, [10, Proposition 2.3.14]).

LEMA 2.1.18 *Sigui R un anell semiprimer, i sigui $n \geq 1$. Llavors existeix un isomorfisme d'anells amb unitat entre $M_n(\mathcal{M}(R))$ i $\mathcal{M}(M_n(R))$.*

DEMOSTRACIÓ: És clar que $M_n(\mathcal{M}(R)) \subseteq \mathcal{M}(M_n(R))$. Per $1 \leq i,j \leq n$, sigui $e_{ij} \in M_n(\mathcal{M}(R))$ la matriu que té com a entrades $1 \in \mathcal{M}(R)$ en la posició (i,j) i zeros a la resta. Denotem $e_i = e_{ii}$.

Sigui $m \in \mathcal{M}(M_n(R))$. Notem que per $1 \leq j \leq n$, els elements de $me_jM_n(R)e_j$ són matrius (sobre R) que tenen entrades possiblement no nul·les a la columna j-sima, i zeros a la resta. Denotem, doncs, per $f_{ij} : R \to R$ les aplicacions definides a través de l'equació $f_{ij}(x)e_{ij} = e_im(xe_j)$, on $x \in R$. Observem que f_{ij} són morfismes de R-mòduls per la dreta. L'additivitat de f_{ij} és clara. D'altra banda, si $x, r \in R$, tenim que $f_{ij}(xr)e_{ij} = e_im(xre_j) = e_i(mx)e_jre_j = f_{ij}(x)e_{ij}re_j = f_{ij}(x)re_{ij}$.

Podem fer un càlcul similar multiplicant per l'esquerra de l'element m. Tenim així que per $1 \leq i \leq n$, els elements de $e_iM_n(R)e_im$ són matrius (sobre R) que tenen entrades possiblement no nul·les a la fila i-sima i zeros a la resta. Com abans, posem $g_{ij} : R \to R$ les aplicacions definides a través de $g_{ij}(x)e_{ij} = (e_ix)me_j$, on $x \in R$. De manera semblant a l'anterior paràgraf, es comprova que g_{ij} són morfismes de R-mòduls per l'esquerra.

Observem que les parelles (f_{ij}, g_{ij}) són dobles centralitzadors. En efecte, només cal comprovar que satisfan la condició d'equilibri. Siguin $x, y \in R$. Aleshores $xf_{ij}(y)e_{ij} = x(e_imye_j) = (e_ixme_j)y = g_{ij}(x)e_{ij}y = g_{ij}(x)ye_{ij}$. Per tant, si denotem $\varphi(m)$ la matriu que té per entrada (i,j)-sima l'element (f_{ij}, g_{ij}) de $\mathcal{M}(R)$, tenim $\varphi(m) \in M_n(\mathcal{M}(R))$. Observem que $\varphi : \mathcal{M}(M_n(R)) \to M_n(\mathcal{M}(R))$ és una aplicació ben definida. Si $m = 0$, aleshores $mx = xm = 0$ per a tot $x \in R$. Per tant, $f_{ij}(x) = g_{ij}(x) = 0$ per a tot i,j i tot $x \in R$, de manera que $\varphi(m) = 0$.

Provem que φ és de fet un isomorfisme d'anells. Siguin $m, m' \in \mathcal{M}(M_n(R))$. És fàcil comprovar que $\varphi(m + m') = \varphi(m) + \varphi(m')$. Denotem ara per (h_{ij}, s_{ij}) l'entrada (i,j)-sima de $\varphi(mm')$, i per (f_{ij}, g_{ij}) i (f'_{ij}, g'_{ij}) les corresponents entrades de $\varphi(m)$ i de $\varphi(m')$, respectivament. Observem que si $1 \leq k \leq n$ i $x \in R$, aleshores $f_{ik}(f'_{kj}(x))e_{ik} = e_imf'_{kj}(x)e_k$, i per tant

$$f_{ik}(f'_{kj}(x))e_{ij} = f_{ik}(f'_{kj}(x))e_{ik}e_{kj} = e_imf'_{kj}(x)e_{kj} = e_ime_km'xe_j.$$

Així, com que $\sum\limits_{k=1}^{n} e_k = 1_{\mathcal{M}(M_n(R))}$, obtenim que

$$\sum_{k=1}^{n} f_{ik}(f'_{kj}(x))e_{ij} = \sum_{k=1}^{n} e_ime_km'xe_j = e_imm'xe_j.$$

D'altra banda, $h_{ij}(x)e_{ij} = e_i m m' x e_j$, d'on veiem que $h_{ij} = \sum\limits_k f_{ik} f'_{kj}$. De manera semblant es té que $g_{ij} = \sum\limits_k g'_{kj} g_{ik}$. Per tant

$$(h_{ij}, s_{ij}) = \sum_k (f_{ik}, g_{ik})(f'_{kj}, g'_{kj}),$$

i així tenim que $\varphi(mm') = \varphi(m)\varphi(m')$.

Suposem ara que $\varphi(m) = 0$. Sigui $x \in M_n(R)$, i escrivim $x = \sum\limits_{i,j} x_{ij} e_{ij}$. Notem que $0 = f_{ji}(x)e_{ji} = e_j m x_{ij} e_i$, d'on tenim $0 = \sum\limits_{j=1}^{n} f_{ji}(x)e_{ji} = m x_{ij} e_i$. Per tant $m x_{ij} e_{ij} = m x_{ij} e_i e_{ij} = 0$, i concloem que $mx = 0$. Anàlogament es prova que $xm = 0$. Per tant $m = 0$, i com a conseqüència φ és un morfisme injectiu. És fàcil comprovar, d'altra banda, que si $m \in M_n(\mathcal{M}(R))$, aleshores $\varphi(m) = m$, provant així l'exhaustivitat de φ. En particular tenim que $\varphi(1_{\mathcal{M}(M_n(R))}) = \varphi(\sum\limits_{k=1}^{n} e_k) = \sum\limits_{k=1}^{n} e_k = 1_{M_n(\mathcal{M}(R))}$. $\square$

En el cas que l'anell R tingui unitat aproximada, el resultat anterior es pot deduir de la Proposició 2.1.10 d'una forma més directa calculant completacions en la topologia estricta (de fet, aquest és l'argument utilitzat en el camp de les C^*-àlgebres). Molt breument, indiquem a continuació la línia de raonament. Denotarem la completació d'un anell semiprimer S en la topologia estricta per $\overline{S}^{\beta}$. Llavors tenim que $\mathcal{M}(M_n(R)) = \overline{M_n(R)}^{\beta} \cong M_n(\overline{R}^{\beta}) = M_n(\mathcal{M}(R))$.

2.2 Ideals d'anells de multiplicadors

Iniciarem seguidament la tasca d'analitzar l'estructura d'ideals de l'anell de multiplicadors $\mathcal{M}(R)$ d'un anell semiprimer R. A diferència de la secció anterior, veurem que algunes propietats de R donen lloc a propietats lleugerament més dèbils a $\mathcal{M}(R)$. El primer pas consisteix en relacionar els ideals de $\mathcal{M}(R)$ amb els ideals d'ordre del monoide associat $V(\mathcal{M}(R))$ de classes d'equivalència (de Murray-von Neumann) d'idempotents. Posteriorment donarem una representació de $V(\mathcal{M}(R))$ com a un cert monoide d'intervals sobre $V(R)$, quan el rang estable de R és 1. Treballarem amb anells regulars de von Neumann R amb σ-unitat, com per exemple les K-àlgebres regulars de dimensió numerable (de fet, l'exemple universal és de la forma $R = \varinjlim R_n$, on R_n és una successió d'anells regulars amb unitat). Estarem interessats també en les C^*-àlgebres amb σ-unitat i rang real zero.

Si R és un anell, denotem per $L(R)$ el reticle dels ideals (bilaterals) de R. En el cas d'una C^*-àlgebra A, denotarem per $L_c(A)$ el reticle dels ideals (bilaterals) tancats per la topologia de A. Finalment, si M és un monoide algebraicament ordenat, aleshores $L(M)$ denotarà el reticle d'ideals d'ordre de M.

DEFINICIÓ 2.2.1 *Sigui A una C^*-àlgebra. Diem que A satisfà la* **propietat (LP)** *si tot element de A s'aproxima en norma per una combinació lineal (complexa) de projeccions.*

TEOREMA 2.2.2 *[73] Sigui A una C^*-àlgebra amb rang real zero. Aleshores A satisfà la propietat (LP).* □

PROPOSICIÓ 2.2.3

(a) *Sigui R un anell amb unitat tal que $V(R)$ és un monoide Riesz i suposem que tot ideal de R és generat per idempotents. Aleshores l'aplicació $\phi : L(R) \to L(V(R))$, donada per $\phi(I) = V(I)$ és un isomorfisme de reticles.*

(b) *Sigui A una C^*-àlgebra amb unitat tal que $V(A)$ és un monoide Riesz i suposem que tot ideal tancat de A satisfà la propietat (LP). Llavors l'aplicació $\phi : L_c(A) \to L(V(A))$ és un isomorfisme de reticles.*

DEMOSTRACIÓ: (a) Observem en primer lloc que si $n \geq 1$ i $e \in M_n(R)$ és un idempotent, aleshores existeixen $e_1, \ldots, e_n$ idempotents de R tals que $e \sim e_1 \oplus \ldots \oplus e_n$. En efecte, com que $e \leq n1_R$, a través de la descomposició de Riesz de $V(R)$ obtenim idempotents $e'_1, \ldots, e'_n \in M_\infty(R)$ tals que $e'_i \lesssim 1_R$ per a tot i. Per tant existeixen idempotents $e_1, \ldots, e_n$ de R tals que $e'_i \sim e_i \leq 1_R$, per a tot i.

Aleshores, per a qualsevol ideal I de R, tenim que $V(I)$ és el submonoide de $V(R)$ generat pel conjunt $\{[e] \mid e \text{ és un idempotent de } I\}$. És clar que $V(I) \cap V(J) = V(I \cap J)$, i també que $V(I + J) \supseteq V(I) + V(J)$. Per demostrar la inclusió contrària, suposem que $[e] \in V(I + J)$, on e és un idempotent de $I + J$. Per hipòtesi, existeixen idempotents $e_i \in I$ i $f_j \in J$ (per $i = 1, \ldots, n$ i $j = 1, \ldots, m$), i elements $r_i, s_i, t_j, w_j \in R$, amb $r_i, t_j \in eR$, tals que $e = r_1e_1s_1 + \ldots + r_ne_ns_n + t_1f_1w_1 + \ldots + t_mf_mw_m$. Definim un morfisme de mòduls (projectius) dreta per

$$\begin{array}{ccc} e_1R \oplus \ldots \oplus e_nR \oplus f_1R \oplus \ldots \oplus f_mR & \longrightarrow & eR \\ (e_1x_1, \ldots, e_nx_n, f_1y_1, \ldots, f_my_m) & \mapsto & \sum\limits_i r_ie_ix_i + \sum\limits_j t_jf_jy_j \end{array} .$$

Per la relació anterior, és clar que aquest morfisme és exhaustiu, i donat que eR és projectiu, escindeix, de manera que $eR \oplus Q \cong e_1R \oplus \ldots \oplus e_nR \oplus f_1R \oplus \ldots \oplus f_mR$, per a un cert R-mòdul dreta projectiu Q, i per tant a $V(R)$ tenim que $[e] \leq \sum\limits_i [e_i] + \sum\limits_j [f_j]$.

Així, $[e] \in V(I) + V(J)$, fent servir que $V(R)$ és un monoide de Riesz. Això prova que ϕ és un morfisme de reticles.

Si $V(I) = V(J)$, aleshores I i J tenen els mateixos idempotents, i en conseqüència $I = J$. Suposem ara que S és un ideal d'ordre de $V(R)$. Sigui $I(S)$ l'ideal de R generat pel conjunt $\{e \in R \mid e \text{ és idempotent i } [e] \in S\}$. Afirmem que $V(I(S)) = S$. En efecte, sigui $e \in I(S)$ un idempotent. Per hipòtesi existeixen elements $r_i, s_i \in R$ i idempotents $e_i \in R$ amb $[e_i] \in S$, per $i = 1, \dots, n$, tals que $e = \sum_{i=1}^{n} r_i e_i s_i$. Un argument similar a l'usat en el paràgraf anterior mostra que $[e] \leq [e_1] + \dots + [e_n]$ a $V(R)$. Com que $[e_i] \in S$ per a tot i, tenim $[e] \in S$. Recíprocament, suposem que $[e] \in S$. Com que $V(R)$ satisfà la propietat de descomposició de Riesz, existeixen idempotents $e_i \in R$ tals que $[e] = [e_1] + \dots + [e_n]$. Com que $[e] \in S$, tenim que cada $[e_i] \in S$, i així $e_i \in I(S)$ per a tot i. Per tant $[e_i] \in V(I(S))$, de manera que $[e] \in V(I(S))$, i l'afirmació queda provada.

(b) Suposem ara que A és una C^*-àlgebra amb unitat. Si I és un ideal tancat de A, aleshores el mateix argument que hem utilitzat a l'apartat anterior prova que $V(I)$ és el submonoide de $V(A)$ generat per $\{[p] \in V(A) \mid p \text{ és una projecció de } I\}$. També és clar en aquest cas que $V(I \cap J) = V(I) \cap V(J)$ i que $V(I + J) \supseteq V(I) + V(J)$. Per establir la inclusió inversa, prenem $[p] \in V(I + J)$, on p és una projecció de $I + J$. (Notem que $I + J$ és un ideal tancat de A per [72, Corollary 1.5.8].) Llavors $p = x + y$, amb $x \in I$ i $y \in J$. Com que A satisfà la propietat (LP), tenim que tant I com J són les clausures dels espais vectorials generats per les seves projeccions, i per tant existeixen $n, m \in \mathbb{N}$, nombres $\lambda_i, \mu_j \in \mathbb{C}$ i projeccions $p_i \in I$ i $q_j \in J$ tals que $\|x - \sum_{i=1}^{n} \lambda_i p_i\| < 1/2$ i $\|y - \sum_{j=1}^{m} \mu_j q_j\| < 1/2$. Usant [42, 10.7] obtenim que $p = x + y \lesssim p_1 \oplus \dots \oplus p_n \oplus q_1 \oplus \dots \oplus q_m$, i per tant $[p] \in V(I) + V(J)$.

Si $V(I) = V(J)$ llavors I i J tenen les mateixes projeccions, i per tant $I = J$. Assumim ara que S és un ideal d'ordre de $V(A)$. Sigui $I(S)$ l'ideal tancat de A generat per $\{p \in A \mid p \text{ és una projecció i } [p] \in S\}$. Aleshores $V(I(S)) = S$. En efecte, sigui $p \in I(S)$ una projecció. Llavors existeix $n \in \mathbb{N}$, elements $r_i, s_i \in A$ i projeccions $p_i \in A$ tals que $[p_i] \in S$ amb $\|p - \sum_{i=1}^{n} r_i p_i s_i\| < 1$, d'on $p \lesssim p_1 \oplus \dots \oplus p_n$, una altra vegada per [42, 10.7], de manera que $[p] \leq [p_1] + \dots + [p_n]$. Com que $[p_i] \in S$ per a tot i, concloem que $[p] \in S$. La inclusió recíproca es demostra com en l'apartat anterior. □

L'essència del següent resultat es troba a [96, Theorem 2.3]. Per completitud, incloem una versió lleugerament modificada, més adaptada a la nostra notació.

TEOREMA 2.2.4 *Sigui A una C^*-àlgebra amb σ-unitat i rang real zero. Aleshores el reticle d'ideals tancats de $\mathcal{M}(A)$ és isomorf al reticle d'ideals d'ordre de $V(\mathcal{M}(A))$, a través de l'aplicació $I \mapsto V(I)$.*

DEMOSTRACIÓ: Per [96, Theorem 1.1], si $B = \mathcal{M}(A)$, sabem que $V(B)$ satisfà la propietat de descomposició de Riesz. D'altra banda, si I és un ideal tancat de B, aleshores I és la clausura de l'expansió lineal de les seves projeccions, per [96, Theorem 2.2]. Per tant B satisfà les hipòtesis de la Proposició 2.2.3 i així el reticle d'ideals tancats de B és isomorf al reticle d'ideals d'ordre de $V(B)$. □

El Teorema anterior també és vàlid en el cas d'anells regulars, però per establir-lo necessitem una sèrie de resultats preliminars, versions algebraiques i paral·leles del que es coneix per C^*-àlgebres.

LEMA 2.2.5 *Sigui R un anell regular amb σ-unitat (e_n), i sigui $p \in \mathcal{M}(R)$ un idempotent. Aleshores pRp és regular i existeix una successió d'idempotents (f_n) a pRp que és σ-unitat per pRp. A més, si $q \in R$ és un idempotent, aleshores $q \lesssim p$ si i només si $q \lesssim f_n$ per algun $n \in \mathbb{N}$.*

DEMOSTRACIÓ: Primer provem que pRp és un anell regular. Sigui $x \in pRp$. En particular $x \in R$ i per tant existeix $y \in R$ tal que $x = xyx$. D'altra banda $x = pxp$, de manera que $x = (pxp)(pyp)(pxp)$, amb $pyp \in pRp$.

Recordem que pel Lema 1.2.10, el conjunt d'idempotents $E(S)$ d'un anell regular S és dirigit, i per tant, $S = \cup_{e\in E(S)} eSe$.

Escrivim $R = \cup_{n=1}^{\infty} e_nRe_n$, i posem $pRp = \cup_{e\in E(pRp)} e(pRp)e$. Tenim que $pe_1p \in f_1(pRp)f_1$ per algun idempotent $f_1 \in pRp$, i també que $pe_2p \in f_2'(pRp)f_2'$ per cert idempotent $f_2' \in pRp$. Donat que el conjunt d'idempotents de pRp és dirigit, existeix $f_2 \in pRp$ tal que $f_1, f_2' \leq f_2$, de forma que $pe_2p \in f_2(pRp)f_2$. Inductivament, trobem una successió $f_1 \leq f_2 \leq f_3 \leq \dots$ d'idempotents a pRp tal que $pe_np \in f_n(pRp)f_n$ per a tot n. Òbviament $\cup_n f_nRf_n \subseteq pRp$. Pel recíproc, si $x \in pRp$, aleshores existeix $n \in \mathbb{N}$ tal que $x = e_nxe_n$, i també $x = pxp$. Per tant $x = pxp = pe_nxe_np = pe_npxpe_np = f_n(pe_npxpe_np)f_n \in f_nRf_n$.

Notem que $f_n \in pRp$ per a cada $n \in \mathbb{N}$, i per tant $f_n = f_np = pf_n$, de forma que $f_n \lesssim p$. Per tant, si $q \in R$ és idempotent i $q \lesssim f_n$ per algun $n \in \mathbb{N}$, aleshores clarament $q \lesssim p$. Recíprocament, si $q \lesssim p$, llavors $q \sim q' \leq p$ per un cert idempotent $q' \in R$, que de fet pertany a pRp. Per tant existeix $n \in \mathbb{N}$ tal que $q' \in f_nRf_n$, d'on $q' \leq f_n$, i així $q \sim q' \leq f_n$. □

LEMA 2.2.6 *Sigui R un anell regular, i siguin $p, q \in \mathcal{M}(R)$ idempotents ortogonals tals que pRp i qRq tenen σ-unitats $\{e_n\}$ i $\{f_n\}$ respectivament. Aleshores $g_n := e_n + f_n$ és una σ-unitat per $(p+q)R(p+q)$.*

DEMOSTRACIÓ: Escrivim $pRp = \cup_{n=1}^{\infty} e_n R e_n$ i $qRq = \cup_{n=1}^{\infty} f_n R f_n$. Notem que Rp és ideal esquerra de R. Per tant $Rp = (Rp)(Rp) = R(pRp) = \cup_n R(e_n R e_n) = \cup_n (Re_n)(Re_n) = \cup_n Re_n$. Anàlogament $Rq = \cup_n Rf_n$, $pR = \cup_n e_n R$ i $qR = \cup_n f_n R$.

Sigui $x \in (p+q)R(p+q)$. Aleshores $x = pxp + qxq + pxq + qxp$, i existeixen índexs $i, j, k, l, s, t \in \mathbb{N}$ tals que $pxp \in e_i R e_i$, $qxq \in f_j R f_j$, $pxq \in e_k R f_l$ i $qxp \in f_s R e_t$. Sigui $n = \max\{i, j, k, l, s, t\}$. És clar que $pxp \in e_n R e_n$, $qxq \in f_n R f_n$, $pxq \in e_n R f_n$ i $qxp \in f_n R e_n$, i per tant $x \in g_n R g_n$, provant que $(p+q)R(p+q) \subseteq \cup_m g_m R g_m$. Donat que la inclusió inversa és òbvia, tenim igualtat. $\square$

Procedim ara a establir la descomposició de Riesz a $\mathcal{M}(R)$ per un anell regular R amb unitat numerable. La demostració és anàloga a la coneguda per C^*-àlgebres i demostrada per Zhang a [96, Theorem 1.1], amb algunes modificacions.

TEOREMA 2.2.7 *Sigui R un anell regular amb σ-unitat. Aleshores $V(\mathcal{M}(R))$ és un monoide Riesz.*

DEMOSTRACIÓ: Siguin $[r], [p], [q] \in V(\mathcal{M}(R))$ elements tals que $[r] \leq [p] + [q]$. Observem en primer lloc que totes les matrius sobre R són anells regulars (per [37, Lemma 1.6]), i amb σ-unitat. Per tant, a causa del Lema 2.1.18, podem suposar que r, p, q són idempotents de $\mathcal{M}(R)$, amb $pq = qp = 0$, i també que $r \leq p + q$. D'altra banda, observem que $(p+q)\mathcal{M}(R)(p+q) = \mathcal{M}((p+q)R(p+q))$ pel Lema 2.1.16 i per tant podem assumir que $p + q = 1$.

Fixem σ-unitats (p_n) per pRp, (q_n) per qRq, (r_n) per rRr i (r'_n) per $(1-r)R(1-r)$. Aleshores, pel Lema 2.2.6, els idempotents $e_n = p_n + q_n$ i $f_n = r_n + r'_n$ formen σ-unitats per R. Com que $R = \cup_n e_n R e_n = \cup_n f_n R f_n$ i qualsevol successió parcial d'una σ-unitat segueix essent σ-unitat, podem assumir canviant notació que

$$e_1 \leq f_1 \leq e_2 \leq f_2 \leq \cdots.$$

Posem $r_0 = e_0 = f_0 = 0$. Notem que $\sum_{n=1}^{k} (r_n - r_{n-1}) = r_k$ convergeix en la topologia estricta a r, de forma que escrivim $\sum_{n=1}^{\infty} (r_n - r_{n-1}) = r$.

Com que R és regular, $V(R)$ satisfà la descomposició de Riesz (pel Lema 1.2.12 o també per [39, Theorem 2.8]). Per tant, de la desigualtat

$$r_n - r_{n-1} \leq f_n - f_{n-1} = (f_n - e_n) + (e_n - f_{n-1}),$$

deduïm que existeixen elements

$$x_n \in (r_n - r_{n-1})R(f_n - f_{n-1}) \text{ i } y_n \in (f_n - f_{n-1})R(r_n - r_{n-1})$$

tals que $r_n - r_{n-1} = x_n y_n$, mentre que $y_n x_n = s_n + s'_n$ per idempotents s_n, s'_n que satisfan $s_n \leq f_n - e_n$ i $s'_n \leq e_n - f_{n-1}$.

Siguin $x = \sum_{n=1}^{\infty} x_n$ i $y = \sum_{n=1}^{\infty} y_n$ elements de $\mathcal{M}(R)$. Aleshores $xy = \sum_{n=1}^{\infty} x_n y_n = q$ i $yx = \sum_{n=1}^{\infty}(s_n + s'_n)$. Posem $p_0 = q_0 = s_0 = 0$, i notem ara que

$$s_n + s'_{n+1} \leq e_{n+1} - e_n = p_{n+1} + q_{n+1} - (p_n + q_n) \leq (p_{n+1} - p_n) + (q_{n+1} - q_n).$$

Una nova aplicació de Riesz dóna elements $w_n \in (s_n + s'_{n+1})R(e_{n+1} - e_n)$ i $z_n \in (e_{n+1} - e_n)R(s_n + s'_{n+1})$ tals que $w_n z_n = s_n + s'_{n+1}$ i $z_n w_n = t_n + t'_n$ per idempotents t_n, t'_n que satisfan $t_n \leq p_{n+1} - p_n$ i $t'_n \leq q_{n+1} - q_n$. Posem $w = \sum_{n=0}^{\infty} w_n$ i $z = \sum_{n=0}^{\infty} z_n$, elements de $\mathcal{M}(R)$. Tenim que $zw = \sum_{n=0}^{\infty}(t_n + t'_n)$, i que $wz = \sum_{n=0}^{\infty}(s_n + s'_{n+1})$. Siguin $p' = \sum_{n=0}^{\infty} t_n$ i $q' = \sum_{n=0}^{\infty} t'_n$. Aleshores $p' + q' = zw$ per construcció. També $p' \leq \sum_{n=0}^{\infty}(p_{n+1} - p_n) = p$ i també $q' \leq \sum_{n=0}^{\infty}(q_{n+1} - q_n) = q$.

Notem ara que

$$yx = (s_1 + s'_1) + (s_2 + s'_2) + (s_3 + s'_3) + \ldots = (s_0 + s'_1) + (s_1 + s'_2) + (s_2 + s'_3) + \ldots = wz.$$

Posem $p_1 = xwp'zy$ i $q_1 = xwq'zy$. Aleshores, usant que $p'zwp' = p'$, obtenim $p_1^2 = p_1 p_1 = (xwp'zy)(xwp'zy) = xwp'zwzwp'zy = xwp'zwp'zy = xwp'zy = p_1$, i per tant p_1 és idempotent. Anàlogament $q_1^2 = q_1$. Finalment $p_1 + q_1 = xw(p' + q')zy = xwzwzy = xwzy = xyxy = xy = r$, establint així el resultat. □

El següent ingredient que ens cal per continuar l'estudi dels ideals de $\mathcal{M}(R)$, per un anell regular R, a través dels ideals de $V(\mathcal{M}(R))$ és substituir la falta de regularitat de $\mathcal{M}(R)$ per l'existència de "suficients" idempotents. Més precisament, veurem que tot ideal principal per la dreta de $\mathcal{M}(R)$ és generat per dos idempotents.

TEOREMA 2.2.8 *Sigui R un anell regular, amb σ-unitat. Sigui $x \in \mathcal{M}(R)$. Aleshores existeixen idempotents $p_i \in x\mathcal{M}(R)$ i elements $x_i \in \mathcal{M}(R)$, per $i = 1, 2$ tals que $x = p_1 x_1 + p_2 x_2$. En conseqüència, els ideals de $\mathcal{M}(R)$ són generats per idempotents.*

DEMOSTRACIÓ: Sigui (e_n) una σ-unitat de R formada per idempotents. Primer observem que per la continuïtat del producte en la topologia estricta induïda per R (Lema 2.1.5), tenim $\lim_n x e_n = \lim_n e_n x = x$.

Posem $e_0 = 0$. Es dedueix de l'anterior paràgraf que $x = \sum_{n=0}^{\infty} x(e_n - e_{n-1})$, en la topologia estricta, i també que $x = \sum_{n=0}^{\infty}(e_n - e_{n-1})x$. Considerem $xe_1 \in R$. Existeix

$n \geq 2$ tal que $xe_1 \in e_nRe_n$, i per tant $xe_1 = e_nxe_1e_n = e_nxe_1$. Anàlogament, existeix $m \geq 2$ tal que $e_1x = e_1xe_m$. Renumerant, si cal, podem suposar que $n = m = 2$, i per tant tenim $xe_1 = e_1xe_1 + (e_2 - e_1)xe_1$ i $e_1x = e_1xe_1 + e_1x(e_2 - e_1)$.

Per inducció obtindrem que, per $n \geq 2$ (i llevat una renumeració de la unitat numerable):

$$(1) \qquad x(e_n - e_{n-1}) = (e_{n-1} - e_{n-2})x(e_n - e_{n-1}) + (e_n - e_{n-1})x(e_n - e_{n-1}) + (e_{n+1} - e_n)x(e_n - e_{n-1}),$$

$$(2) \qquad (e_n - e_{n-1})x = (e_n - e_{n-1})x(e_{n-1} - e_{n-2}) + (e_n - e_{n-1})x(e_n - e_{n-1}) + (e_n - e_{n-1})x(e_{n+1} - e_n).$$

D'aquesta manera, podrem representar l'element x com una matriu tridiagonal que té una quantitat numerable de files i de columnes: si posem $a_n = (e_n - e_{n-1})x(e_{n+1} - e_n)$, $b_n = (e_{n+1} - e_n)x(e_{n+1} - e_n)$ i $c_n = (e_{n+2} - e_{n+1})x(e_{n+1} - e_n)$, per $n \geq 1$, aleshores tenim:

$$x = \begin{pmatrix} b_1 & a_2 & 0 & 0 & \cdots \\ c_1 & b_2 & a_3 & 0 & \cdots \\ 0 & c_2 & b_3 & a_4 & \cdots \\ 0 & 0 & c_3 & b_4 & \cdots \\ 0 & 0 & 0 & c_4 & \cdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots \end{pmatrix}.$$

Provem que aquesta descomposició és vàlida. Suposem que $n = 2$, i considerem els elements $x(e_2 - e_1)$ i $(e_2 - e_1)x$. Com abans, existeix $n \geq 3$ tal que $x(e_2 - e_1), (e_2 - e_1)x \in e_nRe_n$. Renumerant, podem assumir novament que $n = 3$ i així obtenim que

$$x(e_2 - e_1) = e_3x(e_2 - e_1) = (e_3 - e_2)x(e_2 - e_1) + (e_2 - e_1)x(e_2 - e_1) + e_1x(e_2 - e_1),$$

així com

$$(e_2 - e_1)x = (e_2 - e_1)x(e_3 - e_2) + (e_2 - e_1)x(e_2 - e_1) + (e_2 - e_1)xe_1.$$

Suposem que per a un cert $n > 2$ les identitats (1) i (2) es satisfan. Considerem doncs els elements $x(e_{n+1} - e_n)$ i $(e_{n+1} - e_n)x$. Podem assumir que ambdós elements pertanyen a $e_{n+2}Re_{n+2}$. Per tant

$$x(e_{n+1} - e_n) = \sum_{k=1}^{n+2} (e_k - e_{k-1})x(e_{n+1} - e_n),$$

$$(e_{n+1}-e_n)x=\sum_{k=1}^{n+2}(e_{n+1}-e_n)x(e_k-e_{k-1}).$$

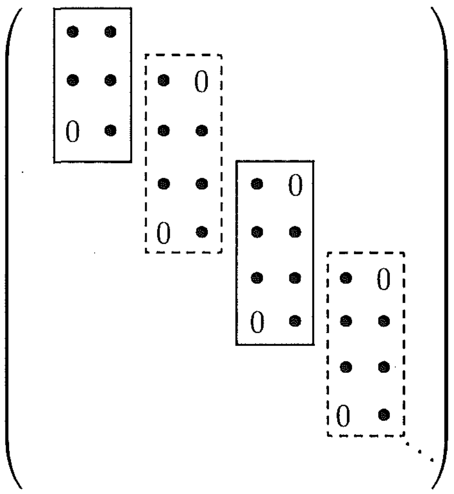
Si $k=1$, aleshores $e_1x(e_{n+1}-e_n)=e_1xe_2(e_{n+1}-e_n)=0$, ja que $n>2$. D'altra banda, si $1<k<n$, aleshores per hipòtesi d'inducció $(e_k-e_{k-1})x(e_{n+1}-e_n)=(e_k-e_{k-1})x(e_{k+1}-e_{k-2})(e_{n+1}-e_n)=(e_k-e_{k-1})x(e_{k+1}(1-e_n))=0$. Això prova que $x(e_{n+1}-e_n)=\sum_{k=n}^{n+2}(e_k-e_{k-1})x(e_{n+1}-e_n)$, i estableix la identitat (1). De manera anàloga es prova la identitat (2), completant així la inducció.

Siguin x_i, per $i=1,2$ els elements de $\mathcal{M}(R)$ definits de la següent forma (i que existeixen pel Lema 2.1.13):

$$x_1=\sum_{n=1}^{\infty}(x(e_{4n-3}-e_{4n-4})+x(e_{4n-2}-e_{4n-3}))=\sum_{n=1}^{\infty}x(e_{4n-2}-e_{4n-4}),$$

$$x_2=\sum_{n=1}^{\infty}(x(e_{4n-1}-e_{4n-2})+x(e_{4n}-e_{4n-1}))=\sum_{n=1}^{\infty}x(e_{4n}-e_{4n-2}).$$

En la matriu anterior, això correspon a:



.

És a dir, x_1 s'obté "sumant" les caixes emmarcades amb línies contínues, mentre que el mateix procés aplicat a les emmarcades amb línies discontínues ens dóna x_2. Aleshores tenim que $x=x_1+x_2$. Posem $y_n=x(e_{4n-2}-e_{4n-4})\in R$. Com que R és regular, existeixen elements $z_n\in R$ tals que $y_n=y_nz_ny_n$. La relació (1) aplicada a y_n ens dóna

$$y_n=(e_{4n-1}-e_{4n-4})x(e_{4n-2}-e_{4n-3})+(e_{4n-2}-e_{4n-5})x(e_{4n-3}-e_{4n-4})=(e_{4n-1}-e_{4n-5})y_n,$$

de manera que podem suposar que $z_n \in (e_{4n-1} - e_{4n-5})R(e_{4n-1} - e_{4n-5})$. Per tant els elements $f_n := y_n z_n = x z_n$ són idempotents. Sigui $p_1 = \sum_{n=1}^{\infty} f_n \in \mathcal{M}(R)$. Aleshores $p_1^2 = p_1$ i si posem $z = \sum_{n=1}^{\infty} z_n \in \mathcal{M}(R)$, llavors tenim $p_1 = \sum_n y_n z_n = \sum_n x z_n = x \sum_n z_n = xz$. D'altra banda $x_1 = \sum_n y_n = \sum_n f_n y_n = p_1 x_1$.

De forma similar construïm un idempotent $p_2 \in \mathcal{M}(R)$ tal que $p_2 \in x\mathcal{M}(R)$ i $x_2 = p_2 x_2$. Llavors tenim $x = x_1 + x_2 = p_1 x_1 + p_2 x_2$. Això prova que l'ideal generat per $x \in \mathcal{M}(R)$ és generat pels idempotents p_1 i p_2, establint d'aquesta manera l'enunciat. □

TEOREMA 2.2.9 *Sigui R un anell regular amb σ-unitat. Aleshores el reticle d'ideals de $\mathcal{M}(R)$ és isomorf al reticle d'ideals d'ordre de $V(\mathcal{M}(R))$, a través de l'aplicació $I \mapsto V(I)$.*

DEMOSTRACIÓ: Posem $B = \mathcal{M}(R)$. Pel Teorema 2.2.7, $V(B)$ és un monoide Riesz, i pel Teorema 2.2.8, els ideals de $\mathcal{M}(R)$ són generats per idempotents. Veiem doncs que les hipòtesis de la Proposició 2.2.3 són satisfetes, d'on es dedueix el resultat. □

L'objectiu final d'aquesta secció és representar el monoide $V(\mathcal{M}(R))$ com un monoide d'intervals sobre $V(R)$, establint de passada la relació exacta existent entre aquests dos monoides. Aquest tipus de tècnica ja fou usat a [42] per estudiar el grup de Grothendieck $K_0(\mathcal{M}(A))$, per a una C^*-àlgebra A amb σ-unitat, rang real zero i rang estable 1. Aprofitarem per tant alguns dels resultats obtinguts a [42], que es tradueixen íntegrament al context actual de treball, un cop establert el Teorema 2.2.8.

DEFINICIÓ 2.2.10 *Sigui R un anell. Definim el conjunt*

$$D(R) = \{[e] \in V(R) \mid e \text{ és un idempotent a } R\}.$$

Si (e_n) és una unitat numerable per R, llavors $D(R)$ es pot descriure com un interval numerablement generat que té $\{[e_n]\}$ com a subconjunt cofinal numerable.

Sigui R un anell regular amb σ-unitat i rang estable 1. Si e és un idempotent a $M_n(\mathcal{M}(R))$, llavors $eM_n(R)e$ és un subanell regular de $M_n(R)$, i també té σ-unitat, pel Lema 2.2.5. Definim

$$\theta(e) = \{[p] \in V(R) \mid p \text{ és un idempotent a } eM_\infty(R)e\}.$$

Llavors $\theta(e)$ és un interval sobre $V(A)$. De fet,

$$\theta(e) = \{[p] \in V(R) \mid p \text{ és un idempotent a } eM_n(R)e\} =$$

$$= \{[p] \in V(R) \mid p \lesssim e\} =$$
$$= \{[p] \in V(R) \mid p \lesssim e_k \text{ per algun } k\},$$

on $e_1 \leq e_2 \leq \ldots$ és una σ-unitat per l'anell $eM_n(R)e$ (la segona igualtat es deu a la segona part del Lema 2.2.5). D'altra banda, és clar que $\theta(e) \subseteq nD(R)$.

Necessitarem el següent resultat, que és una traducció gairebé exacta de [42, Proposition 1.7, Proposition 1.8].

PROPOSICIÓ 2.2.11 *Sigui R un anell regular amb σ-unitat i rang estable* 1. *Aleshores*

(*a*) *Si e, f són idempotents de $M_n(\mathcal{M}(R))$, llavors $e \sim f$ si, i només si, $\theta(e) = \theta(f)$.*

(*b*) *Sigui g un idempotent de $M_\infty(\mathcal{M}(R))$, i siguin X i Y intervals numerablement generats sobre $V(R)$ tals que $X + Y = \theta(g)$. Llavors $g = e + f$ per certs idempotents ortogonals $e, f \in M_\infty(\mathcal{M}(R))$ tals que $\theta(e) = X$ i $\theta(f) = Y$.* □

TEOREMA 2.2.12 *Sigui R un anell regular amb σ-unitat i rang estable* 1. *Llavors existeix un isomorfisme de monoides normalitzat entre $(V(\mathcal{M}(R)), [1_{\mathcal{M}(R)}])$ i el monoide $(W_\sigma^D(V(R)), D)$, els elements del qual són aquells intervals numerablement generats I sobre $V(R)$ pels quals existeixen $n \in \mathbb{N}$ i un interval numerablement generat J sobre $V(R)$ tals que $I + J = nD$, on $D = D(R)$.*

DEMOSTRACIÓ: En primer lloc observem que si e i f són idempotents ortogonals a $M_n(\mathcal{M}(R))$, aleshores $\theta(e \oplus f) = \theta(e) + \theta(f)$. En efecte, és clar que $\theta(e) + \theta(f) \subseteq \theta(e \oplus f)$. D'altra banda, si $[p] \in \theta(e \oplus f)$, aleshores $[p] \leq [e] + [f]$, i per la descomposició de Riesz establerta al Teorema 2.2.7, tenim $[p] = [p_1] + [p_2]$, amb p_1 i p_2 idempotents tals que $[p_1] \leq [e]$ i $[p_2] \leq [f]$, de forma que $[p] \in \theta(e) + \theta(f)$.

Notem també que donat un idempotent $e \in M_n(\mathcal{M}(R))$, aleshores existeix un altre idempotent $g \in M_n(\mathcal{M}(R))$ tal que $\theta(e) + \theta(g) = nD(R)$. En efecte, posem $g = 1_{M_n(\mathcal{M}(R))} - e$. Per l'observació feta al paràgraf anterior, tenim que $\theta(e) + \theta(g) = \theta(e + g) = n\theta(1_{\mathcal{M}(R)}) = nD(R)$.

Definim una aplicació $\gamma : V(\mathcal{M}(R)) \to W_\sigma^D(V(R))$ per $\gamma(v) = \theta(e)$, on $v = [e]$ per algun idempotent $e \in M_\infty(\mathcal{M}(R))$. Per la Proposició 2.2.11(a) i les observacions anteriors, és clar que γ és un morfisme de monoides injectiu. Notem que D és una unitat d'ordre per $W_\sigma^D(V(R))$, així com que $\gamma([1_{\mathcal{M}(R)}]) = D$. Per tant γ és normalitzat. Per veure que γ és bijectiva, prenem $I \in W_\sigma^D(V(R))$. Llavors existeixen un interval numerablement generat J i un enter positiu n tals que $I + J = nD$. Observem que de fet $D = \theta(1_{\mathcal{M}(R)})$, i per tant $nD = \theta(1_{M_n(\mathcal{M}(R))})$. Així, per la Proposició 2.2.11(b), existeixen idempotents ortogonals $e, f \in M_n(\mathcal{M}(R))$ tals que $\theta(e) = I$ i $\theta(f) = J$. Per tant $I = \gamma([e])$. $\square$

Per C^*-àlgebres, la línia d'argumentació és molt similar, substituint idempotents per projeccions. Així, per a una C^*-àlgebra A, definim el conjunt $D(A) = \{[p] \in V(A) \mid p$ és una projecció a $A\}$. Suposem que A té σ-unitat, rang real zero i rang estable 1. Si $e \in M_n(\mathcal{M}(A))$ és una projecció, aleshores $eM_n(A)e$ és una C^*-subàlgebra de $M_n(A)$ amb σ-unitat, i que té una identitat aproximada que consisteix en una successió creixent de projeccions, per [42, Lemma 1.3]. Definim

$$\theta(e) = \{[p] \in V(A) \mid p \text{ és una projecció a } eM_\infty(A)e\}.$$

Aleshores $\theta(e)$ és un interval sobre $V(A)$, i de fet

$$\theta(e) = \{[p] \in V(A) \mid p \lesssim e\} =$$

$$\{[p] \in V(A) \mid p \lesssim e_k \text{ per algun } k\},$$

on $e_1 \leq e_2 \leq \dots$ és una identitat aproximada de projeccions per $eM_n(A)e$ (vegeu també [42, 1.4]).

Com abans, una simple modificació de [42, Proposition 1.8] ens proporciona la següent

PROPOSICIÓ 2.2.13 *Sigui A una C^*-àlgebra amb σ-unitat, rang real zero i rang estable* 1. *Sigui $g \in M_\infty(\mathcal{M}(A))$ una projecció i siguin X i Y intervals numerablement generats sobre $V(A)$ tals que $X+Y = \theta(g)$. Aleshores $g = e+f$, per certes projeccions ortogonals $e, f \in M_\infty(\mathcal{M}(A))$ tals que $X = \theta(e)$ i $Y = \theta(f)$.* $\square$

Així obtenim per C^*-àlgebres el resultat anàleg al cas d'anells regulars.

TEOREMA 2.2.14 *Sigui A una C^*-àlgebra amb σ-unitat, rang real zero i rang estable* 1. *Aleshores existeix un isomorfisme de monoides normalitzat entre $V(\mathcal{M}(A))$ i el monoide $W_\sigma^D(V(A))$, els elements del qual són aquells intervals numerablement generats I pels quals existeixen $n \in \mathbb{N}$ i un interval numerablement generat J tals que $I + J = nD$, on $D = D(A)$.*

DEMOSTRACIÓ: A [42, Proposition 1.6], es prova que si $e, f \in M_\infty(A)$ són projeccions, aleshores $\theta(e) + \theta(f) = \theta(e \oplus f)$; i també que si $e \in M_n(\mathcal{M}(A))$ és una projecció, aleshores existeix una projecció $g \in M_n(\mathcal{M}(A))$ tal que $\theta(e) + \theta(g) = nD$. D'altra banda, $\theta(e) = \theta(f)$ si, i només si $e \sim f$, per [42, Proposition 1.7].

Això ens permet definir una aplicació $\gamma : V(\mathcal{M}(A)) \to W_\sigma^D(V(A))$, per $\gamma(v) = \theta(e)$, on $v = [e]$ per alguna projecció $e \in M_\infty(\mathcal{M}(A))$. És clar usant les observacions anteriors que γ és un morfisme de monoides injectiu. Tenint en compte que D és una unitat d'ordre per $W_\sigma^D(V(A))$ i que $\gamma([1_{\mathcal{M}(A)}]) = D$, veiem que γ és normalitzat. Finalment, per veure que γ és exhaustiu, argumentem com a la segona part del Teorema 2.2.12, usant la Proposició 2.2.13. □

2.3 Els Teoremes de representació

Hem tancat la secció anterior establint un isomorfisme entre els monoides $V(\mathcal{M}(R))$ per certs anells semiprimers R, i uns monoides d'intervals sobre $V(R)$ que hem anomenat $W_\sigma^D(V(R))$. Aquest procés permet concentrar-nos en l'estudi dels monoides d'intervals sobre un monoide donat. En aquesta secció tractarem aquests monoides des d'un punt de vista abstracte, per aconseguir-ne una representació adequada, que els relacionarà amb un semigrup de funcions afins i semicontínues inferiors. Aquesta serà la peça clau a usar en els capítols següents per entendre l'estructura d'ideals d'anells de multiplicadors.

DEFINICIÓ 2.3.1 *Sigui M un monoide i sigui D un interval sobre M. Diem que D és un interval* **generador** *si D genera M com a monoide. Suposem que D té un subconjunt cofinal numerable. Definim $W_\sigma^D(M)$ com el monoide que té per elements els intervals numerablement generats I sobre M pels quals existeixen $n \in \mathbb{N}$ i un interval numerablement generat J sobre M tals que $I + J = nD$.*

DEFINICIÓ 2.3.2 *Sigui M un monoide. Si $x, y \in M$, diem que $x \leq^* y$ si existeix un element $0 \neq z \in M$ tal que $x + z = y$. Un* **àtom** *de M és un element $a \in M$ diferent de zero pel qual no existeix cap element $b \in M$ satisfent $0 \leq^* b \leq^* a$. Diem que M és un monoide* **atòmic** *si tot element de M es pot escriure com a suma d'àtoms.*

Si $x, y \in M$ escriurem, com es fa usualment, $x < y$ si i només si $x \leq y$ i $x \neq y$. Notem que si M és cancel·latiu (o, més en general, si M és establement finit), llavors les dues relacions $<$ i $\leq^*$ coincideixen. El resultat següent és un fet estàndard:

LEMA 2.3.3 *Sigui M un monoide simple i sigui $u \in M$ una unitat d'ordre. Si M no té àtoms, llavors $St(M, u)$ no té estats discrets.*

DEMOSTRACIÓ: Sigui $s \in St(M, u)$. Llavors $s(x) > 0$ per a tot element $x \in M$ diferent de zero. En efecte, si $s(y) = 0$ per algun $0 \neq y \in M$, llavors donat $0 \neq x \in M$ existeix $n \in \mathbb{N}$ tal que $x \leq ny$, i per tant $s(x) \leq ns(y) = 0$, la qual cosa contradiu el fet que $s(u) = 1$.

Si s és un estat discret, aleshores existeix $0 \neq x \in M$ tal que $s(x)$ és el valor mínim de $s(M)$. Llavors x és un àtom. En cas contrari, si existís $y \in M$ satisfent $0 \leq^* y \leq^* x$, llavors pel que hem observat en el paràgraf anterior $0 < s(y) < s(x)$, i entrem novament en contradicció. □

DEFINICIÓ 2.3.4 *([45], [42]) Sigui M un monoide. Un interval I sobre M és* **flexible** *si, i només si, I és diferent de zero i per a tot $x \in I$, existeixen $y \in I$ i $n \in \mathbb{N}$ tals que $(n+1)x \leq ny$.*

Va ser observat a [42, Section 4] (vegeu també [45, Lemma 7.4, Proposition 7.5]) que si M és el con positiu d'un grup de Riesz G simple i dèbilment no-perforat, llavors tot interval no nul sobre M és, o bé flexible, o bé de la forma $[0, x]$, per algun $x \in M$ diferent de zero. Aquest fet pot ésser estès al cas en que M no és cancel·latiu, en el cas que els intervals són numerablement generats.

LEMA 2.3.5 *Sigui M un monoide cònic, simple i de refinament. Llavors tot element de $\Lambda_\sigma(M)$ és, o bé flexible, o bé de la forma $[0, x]$ per algun $x \in M$, però no totes dues coses alhora.*

DEMOSTRACIÓ: Suposem en primer lloc que M no té àtoms. Provem que tot interval I generat per una successió estrictament creixent $0 < x_1 < x_2 < \dots$ és flexible. Existeix $t \in M^*$ tal que $x_1 + t = x_2$. Afirmem que existeix $y \in M^*$ tal que $y \leq^* \{t, x_1\}$. En efecte, donat que M és simple i $x_1 \neq 0$, existeix $k \in \mathbb{N}$ tal que $t \leq kx_1$. Apliquem la propietat de refinament per trobar elements $t_1, \dots, t_k \in M$ tals que $\sum_{i=1}^{k} t_i = t$ i $t_i \leq x_1$ per a tot i. Com que $t \neq 0$, existeix i de manera que $t_i \neq 0$. Podem suposar que $t_1 \neq 0$. Per tant $t_1 \leq \{t, x_1\}$. Com que M no té àtoms, existeix $y \in M$ tal que $0 \leq^* y \leq^* t_1$. Per tant, usem que M és cònic per concloure que $y \leq^* \{t, x_1\}$.

Notem a més que, essent M simple, y és una unitat d'ordre, de forma que $x_1 \leq ny$ per algun $n \in \mathbb{N}$. Ara observem que

$$(n+1)x_1 = nx_1 + x_1 \leq nx_1 + ny = n(x_1 + y) \leq^* n(x_1 + t) = nx_2.$$

De manera semblant, per a cada i, existeix n amb $(n+1)x_i \leq nx_{i+1}$. Per tant I és flexible. Notem finalment que tot interval numerablement generat és, o bé generat per una successió estrictament creixent, o bé de la forma $[0, x]$, per algun $x \in M$.

Suposem ara que M té un àtom i per tant és atòmic, car és simple i de refinament. Per [6, Lemma 1.6], M és el monoide cíclic infinit, essent el resultat clar en aquest cas. □

DEFINICIÓ 2.3.6 *Sigui M un monoide. Diem que M és* **estrictament no perforat** *si sempre que $nx \leq^* ny$ per algun $n \in \mathbb{N}$, es té que $x \leq^* y$.*

En cas que M sigui cancel·latiu, tenim que M és estrictament no perforat si, i només si, per a $x, y \in M$, la condició $nx < ny$ amb $n \in \mathbb{N}$ implica que $x < y$. Això és conseqüència directa del fet que en aquesta situació les relacions $\leq^*$ i $<$ coincideixen, com ja hem observat abans. Remarquem aquí que si A és una C^*-àlgebra dins les classes (b), (d), (e), (f) o (g) considerades al capítol anterior (secció 2), aleshores $V(A)$ és estrictament no perforat.

Ens ocuparem seguidament d'establir una relació entre els intervals numerablement generats sobre un monoide i certes funcions definides sobre els seus espais d'estats. Recordem primer algunes definicions i propietats bàsiques.

DEFINICIÓ 2.3.7 *Sigui X un espai topològic, i siguin*

$$f : X \to \mathbb{R} \cup \{\infty\} \text{ i } g : X \to \{-\infty\} \cup \mathbb{R}$$

dues funcions amb valors reals estesos. Diem que f és **semicontínua inferior** *si i només si $f^{-1}(-\infty, \alpha]$ és tancat en X (equivalentment, $f^{-1}(\alpha, \infty]$ és obert en X) per a tot $\alpha \in \mathbb{R}$. De manera semblant, diem que g és* **semicontínua superior** *si $g^{-1}[\alpha, \infty)$ és tancat en X (equivalentment, $g^{-1}[-\infty, \alpha)$ és obert en X) per a tot $\alpha \in \mathbb{R}$.*

Es desprèn de manera immediata de les definicions que una funció f és semicontínua inferior si, i només si, $-f$ és semicontínua superior, així com que f és contínua si i només si és simultàniament semicontínua inferior i superior. La següent caracterització i propietats de funcions semicontínues es desprèn directament del resultat per funcions a valors reals (vegeu [74, Proposition 1.5.11, Proposition 1.5.12]).

PROPOSICIÓ 2.3.8 *Sigui X un espai topològic. Una funció $f : X \to \mathbb{R} \cup \{\infty\}$ és semicontínua inferior si i només si per a tota xarxa convergent $(x_\lambda)_{\lambda \in \Lambda}$ en X, amb $x = \lim_{\lambda \in \Lambda} x_\lambda$, tenim*

$$f(x) \leq \liminf_{\lambda} f(x_\lambda). \ \square$$

PROPOSICIÓ 2.3.9 *El suprem puntual d'una quantitat qualsevol de funcions semicontínues inferiors, així com l'ínfim d'una quantitat finita, defineixen una funció semicontínua inferior. Les funcions semicontínues inferiors són tancades per sumes i pel producte per escalars (reals) positius.* $\square$

Per a un conjunt compacte i convex K, denotem per $\mathrm{Aff}(K)$ el grup de funcions afins i contínues sobre K amb valors reals. De manera semblant, denotarem per $\mathrm{LAff}(K)$ el semigrup de totes les funcions afins i semicontínues inferiors amb valors a $\mathbb{R} \cup \{\infty\}$. Així mateix, $\mathrm{LAff}_\sigma(K)$ denotarà el subsemigrup de $\mathrm{LAff}(K)$, els elements del qual són suprems puntuals de successions creixents de funcions afins i contínues sobre K. L'ús del superíndex $+$ (respectivament, $++$) es referirà sempre a funcions positives (respectivament, estrictament positives).

Sigui M un monoide, i suposem que existeix una unitat d'ordre $u \in M$ (respecte l'ordre algebraic). Denotem per $S_u = St(M, u)$, l'espai d'estats sobre (M, u). Observem que S_u és un subconjunt de $\mathbb{R}^M$, el conjunt de totes les aplicacions de M a $\mathbb{R}$. Dotant aquest últim de la topologia producte, suposarem sempre que S_u té la topologia induïda. En termes de convergència, una xarxa $(s_\lambda)_{\lambda \in \Lambda}$ de S_u convergeix a $s \in S_u$ si i només si $\lim_\lambda s_\lambda(x) = s(x)$ per a tot $x \in M$. En cas que M sigui establement finit i cònic, aleshores S_u és compacte (vegeu [39, Proposition 6.2]). Denotarem per $\phi_u : M \to \mathrm{Aff}(S_u)$ la representació natural (donada per avaluació). Més concretament, si $x \in M$ i si $s \in S_u$, llavors $\phi_u(x)(s) = s(x)$. Si f i g són funcions semicontínues sobre S_u, escriurem $f \ll g$ per denotar la desigualtat uniforme estricta, és a dir, $f(s) < g(s)$ per a tot $s \in S_u$. En alguns casos importants, és possible recuperar l'ordre de M a partir del de $\mathrm{Aff}(S_u)$. El següent Lema, que és conegut, recull aquest fet.

LEMA 2.3.10 *Sigui M un monoide estrictament no perforat, cancel·latiu, i sigui $u \in M$ una unitat d'ordre. Siguin $x, y \in M$. Suposem que $\phi_u(x) \ll \phi_u(y)$. Llavors $x < y$.*

DEMOSTRACIÓ: Si $\phi_u(x) \ll \phi_u(y)$, llavors existeix $m \in \mathbb{N}$ tal que $m([y] - [x])$ és una unitat d'ordre de $G(M)$, on $G(M)$ és el grup de Grothendieck de M (vegeu [39, Theorem 4.12]). En particular, $m([y] - [x]) > 0$ i com que M és cancel·latiu, això implica que $mx \leq^* my$ a M, d'on deduïm que $x \leq^* y$, ja que M és estrictament no perforat. Finalment, donat que M és cancel·latiu, aquesta última relació equival a $x < y$. □

Per $X \in \Lambda(M)$, posem $\rho(X) := \sup \phi_u(X)$, on "sup" significarà suprem puntual. Llavors $\rho(X) \in \mathrm{LAff}(S_u)^+$. El següent resultat, similar a [42, Lemma 5.2], estableix la relació bàsica entre intervals i funcions semicontínues.

LEMA 2.3.11 *Sigui M un monoide simple i de refinament. Suposem que M és no atòmic, estrictament no perforat i cancel·latiu. Sigui $u \in M$ un element diferent de zero.*

(1) *Si $X \in \Lambda(M)$ és diferent de zero, llavors $\rho(X) \in \mathrm{LAff}(S_u)^{++}$ i és fitada inferiorment per una constant no nul·la.*

(2) $\rho(X+Y) = \rho(X) + \rho(Y)$ *per a intervals qualssevol* X *i* Y *sobre* M.

(3) *Si* $f \in \mathrm{LAff}(S_u)^{++}$, *llavors* $\rho'(f) = \{x \in M \mid \phi_u(x) \ll f\}$ *és un interval flexible sobre* M *i* $\rho\rho'(f) = f$.

(4) *Si* $X \in \Lambda(M)$ *és flexible, llavors* $\rho'\rho(X) = X$.

DEMOSTRACIÓ: Si $X \in \Lambda(M)$ és diferent de zero, llavors X conté un element $x \in M$ no nul, i que per tant és una unitat d'ordre. Llavors $\rho(X) \in \mathrm{LAff}(S_u)^{++}$. Com que x és una unitat d'ordre, existeix $n \in \mathbb{N}$ tal que $u \leq nx$, i per tant $\rho(X) \geq \phi_u(x) \geq 1/n$. Així (1) queda provat. Donat que $\phi_u(X+Y) = \phi_u(X) + \phi_u(Y)$, obtenim (2). Sigui $f \in \mathrm{LAff}(S_u)^{++}$. Notem que $\rho'(f)$ és òbviament no buit i hereditari per l'ordre. Siguin $x, y \in \rho'(f)$ i $g = \sup\{\phi_u(x), \phi_u(y)\}$. Llavors g és una funció semicontínua superior, convexa i $g \ll f$. Per [39, Theorem 11.12], existeix $h \in \mathrm{Aff}(S_u)$ tal que $g \ll h \ll f$. Triem $\varepsilon > 0$ satisfent $g \ll h - \varepsilon \ll h + \varepsilon \ll f$, i per [71, Theorem 3.5], existeix $z \in M$ tal que $\|h - \phi_u(z)\| < \varepsilon$. Deduïm llavors que $\phi_u(x), \phi_u(y) \ll \phi_u(z)$ i així $x, y \leq z$ pel Lema 2.3.10. Notem també que $z \in \rho'(f)$. Això prova que $\rho'(f)$ és un interval. Per veure que $\rho\rho'(f) = f$, prenem $s \in S_u$ i $\alpha < f(s)$. Per [39, Theorem 11.8], existeix $g \in \mathrm{Aff}(S_u)^{++}$ tal que $\alpha < g(s)$ i $g \ll f$. Agafem $\varepsilon > 0$ de manera que $\alpha < g(s) - \varepsilon$ i $g + \varepsilon \ll f$. Per [71, Theorem 3.5] la imatge de $G(M)^+$ a través de l'aplicació natural és densa en $\mathrm{Aff}(S_u)^+$, i per tant existeix $z \in M$ que satisfà $\|g - \phi_u(z)\| < \varepsilon$. Per tant $\phi_u(z)(s) > \alpha$ i $\phi_u(z) \ll f$, i això ja prova que $\rho\rho'(f) = f$. Finalment, sigui $x \in \rho'(f)$. Llavors $f - \phi_u(x)$ és una funció afí, estrictament positiva i semicontínua inferior. Un argument similar al que hem usat abans prova que existeix un element $y \in M$ diferent de zero tal que $x + y \in \rho'(f)$. Per veure que $\rho'(f)$ és flexible, seguim un argument similar a l'usat a [45, Lemma 7.4]. La propietat que hem establert pels elements de $\rho'(f)$ s'aplica a $0 \in \rho'(f)$ per donar-nos $y \in M^*$ tal que $y = 0 + y \in \rho'(f)$. Per tant $\rho'(f) \neq 0$. Si $x \in \rho'(f)$, existeix $v \in M^*$ tal que $x + v \in \rho'(f)$. Com que M és simple $x \leq nv$ per algun $n \in \mathbb{N}$, d'on $(n+1)x = nx + x \leq nx + nv = n(x+v)$, i per tant $\rho'(f)$ és flexible. Això estableix (3). Per (4), ens basem en arguments usats a [45, Proposition 7.7]. Cal veure que

$$\rho'\rho(X) = \{x \in M \mid \phi_u(x) \ll \sup \phi_u(X)\} = X.$$

Sigui $x \in X$. Podem assumir que $x \neq 0$. Aleshores existeixen $y \in X$ i $n \in \mathbb{N}$ tals que $(n+1)x \leq ny$. En particular $y \neq 0$ i també $(n+1)x \leq^* (n+1)y$ ja que M és cònic. Per tant $x \leq^* y$, per ser M estrictament no perforat, d'on deduïm que $x + z \in X$ per algun $z \in X$ no nul. Com que M és simple $\phi_u(z) \gg 0$ i així $\phi_u(x) \ll \phi_u(x+z) \leq \sup \phi_u(X)$.

Recíprocament, suposem que $\phi_u(x) \ll \sup \phi_u(X)$ per a $x \in M$. Per a cada $s \in S_u$, existeix $x_s \in X$ tal que $s(x) < s(x_s)$. Sigui $U_{x_s} = \{t \in S_u \mid t(x) < t(x_s)\}$. Aleshores $S_u = \cup_{x_s} U_{x_s}$. Per compacitat existeixen $x_1, \ldots, x_n \in X$ tals que $S_u = \cup_i U_{x_i}$. Com que X és dirigit, existeix $w \in X$ tal que $x_i \leq w$ per a tot i. Llavors $s(x) < s(w)$ per a tot $s \in S_u$. Pel Lema 2.3.10 $x < w$ i per tant $x \in X$. □

Sigui M un monoide tal que l'ordre algebraic és parcial, i suposem que $u \in M$ és una unitat d'ordre. Sigui D un interval generador sobre M amb un subconjunt cofinal numerable i denotem per $d = \sup \phi_u(D) = \rho(D)$. Definim

$$W_\sigma^d(S_u) = \{f \in \mathrm{LAff}_\sigma(S_u)^{++} \mid f + g = nd \text{ on } g \in \mathrm{LAff}_\sigma(S_u)^{++} \text{ i } n \in \mathbb{N}\}.$$

Notem que $W_\sigma^d(S_u)$ pot ésser descrit també com el conjunt format per les funcions $f \in \mathrm{LAff}_\sigma(S_u)^{++}$ tals que $f + g = nd$ per algun $n \in \mathbb{N}$ i alguna $g \in \mathrm{LAff}_\sigma(S_u)^{+}$. És obvi que $W_\sigma^d(S_u)$ és un semigrup amb l'operació $+$.

Considerem el conjunt $M \sqcup W_\sigma^d(S_u)$, on $\sqcup$ denotarà la unió disjunta de conjunts. Definim una estructura de monoide a $M \sqcup W_\sigma^d(S_u)$ tal que en primer lloc estén les operacions naturals d'addició a M i $W_\sigma^d(S_u)$, i definim una suma mixta d'elements de M i de $W_\sigma^d(S_u)$ per $x + f = \rho[0, x] + f = \phi_u(x) + f$, on $x \in M$ i $f \in W_\sigma^d(S_u)$.

LEMA 2.3.12 *Sigui M un monoide parcialment ordenat amb unitat d'ordre $u \in M$. Sigui D un interval generador sobre M i posem $d = \sup \phi_u(D)$. Siguin $f \in \mathrm{LAff}_\sigma(S_u)^{++}$ i $g \in \mathrm{Aff}(S_u)^{++}$. Aleshores existeixen $n \in \mathbb{N}$ i $g' \in \mathrm{LAff}_\sigma(S_u)^{++}$ tals que $g + g' = nf$. En particular, si $x \in M$ i $f \in W_\sigma^d(S_u)$, aleshores $x + f \in W_\sigma^d(S_u)$ i d és una unitat d'ordre per $M \sqcup W_\sigma^d(S_u)$.*

DEMOSTRACIÓ: Com que f és semicontínua inferior i estrictament positiva, g és contínua, i ambdues són definides sobre un compacte, existeix una constant $n \in \mathbb{N}$ tal que $g \ll nf$. Per tant $g' := nf - g$ és una funció afí, estrictament positiva i semicontínua inferior. Com que $f = \sup_m f_m$, on (f_m) és una successió creixent a $\mathrm{Aff}(S_u)^{++}$, i donat que $g \ll nf$, existeix $k \in \mathbb{N}$ tal que $g \ll nf_k$, per un argument de compacitat similar al que hem usat al Lema 2.3.10. Per tant $nf - g = \sup_{l \geq k}(nf_l - g)$, i $nf_l - g \in \mathrm{Aff}(S_u)^{++}$. Això implica que $g' \in \mathrm{LAff}_\sigma(S_u)^{++}$ i $g + g' = nf$.

Si $x \in M$ i $f \in W_\sigma^d(S_u)$, aleshores $\phi_u(x) \in \mathrm{Aff}(S_u)^+$, i per tant $\phi_u(x + u) = \phi_u(x) + 1 \in \mathrm{Aff}(S_u)^{++}$. Per l'anterior, existeixen $n \in \mathbb{N}$ i $h \in \mathrm{LAff}_\sigma(S_u)^{++}$ tals que $\phi_u(x + u) + h = nd$. D'altra banda, existeixen $m \in \mathbb{N}$ i $f' \in \mathrm{LAff}_\sigma(S_u)^{++}$ amb $f + f' = md$. Per tant $(x + f) + (h + f' + 1) = (f + f') + (\phi_u(x + u) + h) = (n + m)d$.

Finalment, d és unitat d'ordre de $M \sqcup W_\sigma^d(S_u)$ per definició de $W_\sigma^d(S_u)$, de l'operació a $M \sqcup W_\sigma^d(S_u)$, i del que acabem de provar. □

TEOREMA 2.3.13 *Sigui M un monoide cònic, simple, de refinament, i sigui $u \in M$ un element diferent de zero. Sigui D un interval flexible i no nul sobre M amb un subconjunt cofinal numerable. Definim una aplicació $\varphi : (W_\sigma^D(M), D) \to (M \sqcup W_\sigma^d(S_u), d)$ per $\varphi(X) = \rho(X) \in W_\sigma^d(S_u)$ si X és un interval flexible, i $\varphi([0,x]) = x$, per $x \in M$. Llavors φ és un morfisme de monoides normalitzat. Si, a més, M és no atòmic, estrictament no perforat i cancel·latiu, llavors φ és un isomorfisme.*

DEMOSTRACIÓ: En primer lloc notem que si X i Y són intervals sobre M, llavors

$$\rho(X+Y) = \sup\{\phi_u(x+y) \mid x \in X \text{ i } y \in Y\} = \rho(X) + \rho(Y).$$

En particular, si $X \in W_\sigma^D(M)$ és flexible, llavors $\rho(X) \in W_\sigma^d(S_u)$. Com que tot interval numerablement generat sobre M és, o bé flexible, o bé de la forma $[0,x]$ per algun $x \in M$ (pel Lema 2.3.5), veiem que φ és una aplicació ben definida.

▷ φ és un morfisme de monoides normalitzat. Només hem de comprovar que $\varphi([0,x]+X) = \varphi([0,x]) + \varphi(X)$, per $x \in M^*$ i per un interval flexible $X \in W_\sigma^D(M)$. Donat que X és flexible, tenim que $[0,x]+X$ és flexible (vegeu la demostració de [45, Lemma 8.1]). Llavors

$$\varphi([0,x]+X) = \rho([0,x]+X) = \rho([0,x]) + \rho(X) =$$

$$\phi_u(x) + \rho(X) = x + \rho(X) = \varphi([0,x]) + \varphi(X).$$

Notem també que $\varphi(D) = \rho(D) = d$, puix que D també és flexible.

Assumim ara les hipòtesis addicionals, és a dir, que M és a més no atòmic, estrictament no perforat i cancel·latiu.

▷ φ és injectiva. Suposem que $\varphi(X) = \varphi(Y)$. Observem que per definició de φ i pel Lema 2.3.5 no és possible que tant sols un dels dos intervals X o Y sigui flexible. En altres paraules, o bé X i Y són ambdós flexibles o bé cap dels dos ho és. Si X i Y són flexibles, llavors $\rho(X) = \varphi(X) = \varphi(Y) = \rho(Y)$. Per tant $X = \rho'\rho(X) = \rho'\rho(Y) = Y$, pel Lema 2.3.11. Si, altrament, ni X ni Y són flexibles, llavors $X = [0,x]$ i $Y = [0,y]$ per alguns $x, y \in M$, i així $\varphi(X) = x = y = \varphi(Y)$. Per tant $X = Y$.

▷ φ és exhaustiva. Si $x \in M$, llavors x prové de $[0,x]$, a través de φ. Sols ens cal observar que $[0,x] \in W_\sigma^D(M)$ per a tot $x \in M$:

Existeix $n \in \mathbb{N}$ tal que $x \in nD$. Llavors, si $Y = \{y \in M \mid x+y \in nD\}$ tenim que $[0,x] + Y = nD$, per [42, Lemma 3.8]. Usant que M és cancel·latiu i que D és numerablement generat, provem que Y també és numerablement generat. En efecte, suposem que $\{d_k\}_k$ és un subconjunt cofinal numerable per nD. Com que $x \in nD$, podem suposar que $x \leq d_k$ per a tot k. Escrivim $x + s_k = d_k$, per elements $s_k \in M$.

Aleshores si $y \in Y$, existeix $k \in \mathbb{N}$ tal que $x + y \leq d_k = x + s_k$, i per tant $y \leq s_k$. La successió $\{s_k\}$, que és creixent, és doncs un subconjunt cofinal numerable per Y.

Sigui ara $f \in W^d_\sigma(S_u)$ i prenem $X = \rho'(f)$, que és flexible pel Lema 2.3.11. Notem també que $\rho(X) = f$. Donat que existeixen $h \in \mathrm{LAff}_\sigma(S_u)^{++}$ i $n \in \mathbb{N}$ amb $f + h = nd$, tenim que $X + \rho'(h) = nD$. Finalment, hem de provar que X i $\rho'(h)$ són numerablement generats. Sabem que $f = \sup g_n$, on el suprem és puntual, i on $\{g_n\}$ és una successió creixent amb $g_i \in \mathrm{Aff}(S_u)^{++}$ per a tot i. Denotem per $G(M)$ el grup de Grothendieck de M. Com que M no té estats discrets pel Lema 2.3.3 i és un monoide de refinament, la imatge de $G(M)^+$ a través de la representació natural (donada per avaluació sobre els estats de $G(M)$) és densa en $\mathrm{Aff}(S_u)^+$, per [71, Theorem 3.5]. Notem també que $G(M)^+ = M$.

Si n és suficientment gran, existeixen elements $x_n \in M$ tals que

$$0 \ll g_n - 1/2^n \ll \phi_u(x_n) \ll g_{n+1} - 1/2^{n+1}.$$

Com que $\phi_u(x_n) \ll \phi_u(x_{n+1})$, obtenim que $x_n \leq x_{n+1}$, pel Lema 2.3.10. També, usant que $f = \sup g_n$, deduïm que $f = \sup \phi_u(x_n)$. Per tant $x_n \in X$ per a tot n. Ara, si $x \in X$, llavors $\phi_u(x) \ll \sup \phi_u(x_n)$. Com a la demostració del Lema 2.3.10, existeix $k \in \mathbb{N}$ tal que $\phi_u(x) \ll \phi_u(x_k)$. Com abans, la conclusió és que $x \leq x_k$. Per tant X és numerablement generat. De manera semblant, $\rho'(h)$ és numerablement generat. □

Estem ja en situació de traduir aquests resultats al context d'anells regulars i de C^*-àlgebres. Ens cal considerar encara la "flexibilitat" de l'interval $D(R)$, que en el nostre cas és immediata sempre que l'anell R no tingui unitat.

LEMA 2.3.14 *Sigui R un anell regular simple establement finit. Llavors, $D(R)$ és flexible si, i només si, R no té unitat.*

DEMOSTRACIÓ: Suposem que $D(R)$ és flexible, i que R té unitat $1 \in R$. Existeixen $n \in \mathbb{N}$ i un idempotent $f \in R$ tals que $(n+1)[1] \leq n[f] \leq n[1]$ a $V(R)$. Com que $V(R)$ és establement finit, deduïm que $[1] = 0$, que és una contradicció.

Recíprocament, suposem que $D(R)$ no és flexible i que R no té unitat. Podem assumir que $D(R) \neq 0$. Aleshores existeix $0 \neq x \in D(R)$ tal que per a tot $n \in \mathbb{N}$ i tot $y \in D(R)$ tenim que $(n+1)x \not\leq ny$. Posem $x = [e]$, per a un idempotent $e \in R$. Com que e no és una unitat per R, existeix $a \in R$ tal que $a - ea \neq 0$, i per tant $(1-e)R \neq 0$. Sigui $B = (1-e)R(1-e)$. Pel Lema 2.2.5, B és un anell regular, i $B \neq 0$, ja que en cas contrari $(1-e)R = (1-e)R(1-e)R = BR = 0$. Per tant existeix un idempotent $f \in B$ no nul, de manera que $e + f$ és un idempotent de R no nul. Usem la simplicitat de R per trobar $k \in \mathbb{N}$ tal que $[e] \leq k[f]$, i així $(k+1)[e] = k[e] + [e] \leq k[e+f]$, arribant a una contradicció. □

REMARCA 2.3.15 *A [42, Lemma 11.2], es caracteritza $D(A)$ com a flexible si i només si A no té quocients per ideals tancats amb unitat, per a una C^*-àlgebra A amb σ-unitat, rang real zero i rang estable 1, però sense assumir simplicitat. El mateix tipus de resultat, amb una demostració semblant, val pel cas d'anells regulars, però ens hem restringit al cas simple ja que seran els anells amb els quals treballarem en els capítols següents.*

TEOREMA 2.3.16 *Sigui R un anell regular sense unitat, i amb σ-unitat. Suposem que R és simple amb rang estable 1 i que $V(R)$ és estrictament no perforat. Suposem que $V(R)$ és no atòmic. Fixem un element $u \in V(R)$ diferent de zero. Siguin $D = D(R)$ i $d = \sup \phi_u(D)$. Llavors hi ha un isomorfisme de monoides normalitzat φ entre $(V(\mathcal{M}(R)), [1_{\mathcal{M}(R)}])$ i $(V(R) \sqcup W_\sigma^d(S_u), d)$.*

DEMOSTRACIÓ: Sigui $M = V(R)$. Llavors M és un monoide cònic. Donat que R és regular i té rang estable 1, M és de refinament i cancel·latiu. Es dedueix de la simplicitat de R que M és també simple. Com que R té unitat numerable, D és numerablement generat. Pel Lema 2.3.14, D és flexible. Apliquem el Teorema 2.2.12 per construir un isomorfisme de monoides normalitzat entre $(V(\mathcal{M}(R)), [1_{\mathcal{M}(R)}])$ i $(W_\sigma^D(M), D)$, essent el darrer isomorf a $(M \sqcup W_\sigma^d(S_u), d)$, pel Teorema 2.3.13. □

TEOREMA 2.3.17 *Sigui A una C^*-àlgebra sense unitat, i amb σ-unitat. Suposem que A és simple, amb rang real zero, rang estable 1 i que $V(A)$ és estrictament no perforat. Assumim també que $V(A)$ és no atòmic. Fixem un element $u \in V(A)$ diferent de zero. Siguin $D = D(A)$ i $d = \sup \phi_u(D)$. Llavors hi ha un isomorfisme de monoides normalitzat φ entre $(V(\mathcal{M}(A)), [1_{\mathcal{M}(A)}])$ i $(V(A) \sqcup W_\sigma^d(S_u), d)$.*

DEMOSTRACIÓ: Com al Teorema anterior, si $M = V(A)$, llavors M és un monoide cònic, simple, de refinament i cancel·latiu. Com que A té σ-unitat, tenim que D és un interval numerablement generat. Per [42, Lemma 11.2], D és flexible, i per tant, pel Teorema 2.2.14, existeix un isomorfisme de monoides normalitzat entre $(V(\mathcal{M}(A)), [1_{\mathcal{M}(A)}])$ i $(W_\sigma^D(M), D)$, i aquest darrer és isomorf a $(M \sqcup W_\sigma^d(S_u), d)$, pel Teorema 2.3.13. □

Tanquem aquesta secció construint una família d'exemples senzills d'àlgebres complexes ultramatricials simples i involutives. La completació de cada element de la família donarà lloc a una àlgebra AF simple. Analitzarem els corresponents monoides d'intervals i veurem com intervals generadors diferents estaran associats a membres de la família no isomorfs, d'acord amb el següent resultat:

TEOREMA 2.3.18 *(G.A. Elliott)[29] Siguin A i B àlgebres ultramatricials complexes. Aleshores $A \cong B$ si, i només si, existeix un isomorfisme de grups ordenats*

$$\varphi : K_0(A) \to K_0(B)$$

tal que $\varphi(D(A)) = D(B)$.

A més, si A és ultramatricial, aleshores $K_0(A)$ és un grup de dimensió numerable. Recíprocament, si G és un grup de dimensió numerable i $D \subseteq G^+$ és un interval sobre G^+, aleshores existeix una (única) àlgebra ultramatricial A i un isomorfisme de grups ordenats $\psi : K_0(A) \to G$ tal que $\psi(D(A)) = D$. $\square$

La segona part d'aquest resultat ens proporcionarà, en el següent capítol, un mètode de generació d'exemples més complexos.

Per a cada $k \in \mathbb{N}$, denotarem $M_k = M_k(\mathbb{C})$ i si $x \in \mathbb{R}^+$, denotarem per $e(x)$ la part entera de x (i.e., $e(x)$ és el nombre enter més gran tal que és més petit o igual que x). Sigui $n \in \mathbb{N}$, i denotem $V_n = (1/2^n)\mathbb{Z}^+$. Definim $\varphi_n : V_n \to V_{n+1}$ per $\varphi_n(1/2^n) = 2/2^{n+1}$. Aleshores (V_n, φ_n) és un sistema dirigit i el límit directe és $V = \{p/2^n \mid p \in \mathbb{Z}^+ \text{ i } n \in \mathbb{N}\}$, amb aplicacions $\psi_n : V_n \to V$ definides per $\psi_n(1/2^n) = 1/2^n$. Clarament V és un monoide numerable, cònic, simple, cancel·latiu, no perforat i no atòmic. És fàcil veure que V satisfà la propietat de Riesz. Per $\alpha \in \mathbb{R}^{++}$ posem

$$D_n^\alpha = \{p/2^n \in V_n \mid p < e(2^n\alpha)\} = V_n \cap [0, (e(2^n\alpha) - 1)/2^n].$$

Com que $\lim\limits_{n\to\infty} 2^n\alpha = +\infty$, tindrem que $D_n^\alpha \neq \{0\}$ per a $n \in \mathbb{N}$ prou gran. Observem que $\varphi_n(D_n^\alpha) \subsetneqq D_{n+1}^\alpha$ si $D_n^\alpha \neq \{0\}$.

Sigui $D^\alpha = \cup_{n=1}^\infty \psi_n(D_n^\alpha)$. Aleshores $D^\alpha = V \cap [0, \alpha)$. En efecte, és clar per construcció que $D^\alpha \subseteq V \cap [0, \alpha)$. Recíprocament, si $p/2^n < \alpha$, per $p \in \mathbb{Z}^+$ i si $2^n\alpha \in \mathbb{Z}^+$ llavors $p \leq 2^n\alpha - 1$ i per tant $p/2^n \in D_n^\alpha$. Si $2^{n+k}\alpha \in \mathbb{Z}^+$ per algun $k > 0$, llavors de manera semblant tenim que $p2^k/2^{n+k} \in D_{n+k}^\alpha$. Suposem doncs que $2^k\alpha \notin \mathbb{Z}^+$ per a tot $k \in \mathbb{N}$. És clar que $p \leq e(2^n\alpha)$. Si $p < e(2^n\alpha)$, llavors òbviament $p/2^n \in D_n^\alpha$. En cas contrari, és a dir, si $p = e(2^n\alpha)$, aleshores existeix $k \in \mathbb{N}$ tal que $2^kp \leq e(2^{n+k}\alpha) - 1$. Per veure això, notem que en general $2^ke(2^n\alpha) \leq e(2^{n+k}\alpha)$ per a tot $k \in \mathbb{N}$. Si tinguéssim igualtat per a tot k, aleshores escrivint $2^{n+k}\alpha = e(2^{n+k}\alpha) + \beta_k$ amb $\beta_k \in (0,1)$, veiem que $2^n\alpha = e(2^n\alpha) + \beta_k/2^k$, per a tot $k \in \mathbb{N}$, i així $2^n\alpha \in \mathbb{Z}^+$, la qual cosa és una contradicció. Per tant $p/2^n \leq (e(2^{n+k}\alpha) - 1)/2^{n+k}$ per algun k, d'on $p/2^n \in D_{n+k}^\alpha$.

Per a cada $n \in \mathbb{N}$, posem $A_n^\alpha = M_{e(2^n\alpha)-1}$. Atès que $2e(2^n\alpha) \leq e(2^{n+1}\alpha)$, podem definir morfismes $\phi_n^\alpha : A_n^\alpha \to A_{n+1}^\alpha$ per

$$\phi_n^\alpha(x) = \begin{pmatrix} x & 0 & 0 \\ 0 & x & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \text{ on } x \in A_n^\alpha.$$

Sigui A^α l'àlgebra ultramatricial complexa obtinguda com a límit del sistema dirigit $(A_n^\alpha, \phi_n^\alpha)$. Aleshores, notant que $V(A_n^\alpha) \cong V_n$, $D(A_n^\alpha) \cong D_n^\alpha$ i $V(\phi_n^\alpha) = \varphi_n$, obtenim que $V(A^\alpha)$ és isomorf a V. Si $\Psi_n : A_n^\alpha \to A^\alpha$ són les aplicacions de pas al límit, aleshores $D(A^\alpha) = \cup_{n=1}^\infty V(\Psi_n)(D(A_n^\alpha)) \cong \cup_{n=1}^\infty \psi_n(D_n^\alpha) = V \cap [0, \alpha)$.

Tenim doncs una família A^α d'àlgebres ultramatricials. Pel Teorema 2.3.18, $A^\alpha \cong A^\beta$ si, i només si, existeix un isomorfisme de monoides $V(A^\alpha) \to V(A^\beta)$ tal que la imatge de $D(A^\alpha)$ és $D(A^\beta)$, i això equival a dir que $\alpha = 2^i\beta$ per a $i \in \mathbb{Z}$. Resumim això en un diagrama commutatiu:

$$\begin{tikzcd}
V(A_n^\alpha) \arrow[r, "\phi_n^\alpha"] \arrow[d, "\cong"] & V(A_{n+1}^\alpha) \arrow[r] \arrow[d, "\cong"] & \cdots \arrow[r] & V(A^\alpha) \arrow[d, "\cong"] \\
V_n \arrow[r, "\varphi_n"] & V_{n+1} \arrow[r] & \cdots \arrow[r] & V
\end{tikzcd}$$

Siguin ara els intervals $D_n = V_n \cap [0, 2^n] = \{0, 1/2^n, \ldots, 4^n/2^n\}$ i considerem $A_n = M_{4^n}$, amb aplicacions $\phi_n : A_n \to A_{n+1}$ donades a través de

$$\phi_n(x) = \begin{pmatrix} x & 0 & 0 & 0 \\ 0 & x & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \text{ on } x \in A_n.$$

Sigui A_∞ l'àlgebra ultramatricial complexa obtinguda com a límit del sistema (A_n, ϕ_n). Aleshores es comprova que $V \cong \varinjlim(V_n, \psi_n)$, i que $D(A_\infty) \cong D_\infty = \cup_{n=1}^\infty \psi_n(D_n) = V \cap [0, \infty) = V$.

Estudiem ara les àlgebres de multiplicadors d'aquestes àlgebres que hem obtingut, tot utilitzant els resultats d'aquesta secció. D'acord amb el Teorema 2.2.12, si $\alpha \in \mathbb{R}^{++}$ tenim que $V(\mathcal{M}(A^\alpha))$ és isomorf a $W_\sigma^{D^\alpha}(V)$. Donat que si $0 < b < a$ són nombres reals aleshores $V\cap[0,b)+V\cap[0,a-b)=V\cap[0,a)$, veiem que $V(\mathcal{M}(A^\alpha))\cong W_\sigma^{D^\alpha}(V)=\Lambda_\sigma(V)\setminus\{V\}$.

Calculem l'escala de A^α. Notem primer que l'espai d'estats de $V(A_n^\alpha)$ consisteix d'un sol element, un cop fixada una unitat d'ordre per $V(A_n^\alpha)$. Sigui doncs $u^\alpha\in D(A^\alpha)$ un element no nul que correspon a $1/2^n$ (per a algun $n\in\mathbb{N}$) a través de l'isomorfisme entre $V(A^\alpha)$ i V, i notem que $1/2^n<\alpha$. Aleshores $V(A^\alpha)$ té un sol estat s^α normalitzat en u^α, i en conseqüència l'escala $d^\alpha : S_{u^\alpha}\to\mathbb{R}^{++}\cup\{\infty\}$ pren el valor $d^\alpha(s^\alpha)=\sup s^\alpha(V\cap[0,\alpha))=2^n\alpha$. En aquest context, el Teorema 2.3.16 afirma que $V(\mathcal{M}(A^\alpha))\cong V\sqcup\mathbb{R}^{++}$.

Observem ara que $V(\mathcal{M}(A_\infty))\cong W_\sigma^{D_\infty}=\Lambda_\sigma(V)$. Vegem que $\Lambda(V)=\Lambda_\sigma(V)$ és isomorf a $V\sqcup(\mathbb{R}^{++}\cup\{\infty\})$, on la suma en aquest darrer monoide es defineix estenent les operacions naturals d'addició a V i a $\mathbb{R}^{++}\cup\{\infty\}$, i posant una suma mixta d'elements de V i de $\mathbb{R}^{++}\cup\{\infty\}$ a través de la inclusió de V en $\mathbb{R}^{+}\cup\{\infty\}$. Donat $I\in\Lambda_\sigma(V)$, aleshores I té la forma $[0,p/2^n]$, per certs $p\in\mathbb{Z}^+$ i $n\in\mathbb{N}$, o bé I és flexible. En aquest darrer cas, sigui $\alpha=\sup\{p/2^n\mid p/2^n\in I\}$, on el nombre α pot ser infinit, i d'aquesta manera $I=V\cap[0,\alpha)$. Tenim doncs un isomorfisme de monoides $\eta:\Lambda_\sigma(V)\to V\sqcup(\mathbb{R}^{++}\cup\{\infty\})$ donat per $\eta[0,p/2^n]=p/2^n$ i $\eta(I)=\sup\{p/2^n\mid p/2^n\in I\}$, si I és flexible. Un càlcul de l'escala similar al que hem fet abans mostraria que en aquest cas val infinit.

Finalment, observem que, per $\alpha\in\mathbb{R}^{++}$, les àlgebres $\mathcal{M}(A^\alpha)/A^\alpha$ són simples, mentre que $\mathcal{M}(A_\infty)/A_\infty$ té un únic ideal no trivial (que correspon a $(V\sqcup\mathbb{R}^{++})/V$.

2.4 Algunes aplicacions

En aquesta darrera secció explotarem les tècniques desenvolupades anteriorment, per donar d'altres representacions de monoides associats a C^*-àlgebres. Cap dels resultats que segueixen és essencialment necessari per l'estudi del reticle d'ideals de $\mathcal{M}(A)$, que iniciarem en el capítol següent, i per tant la secció, d'interès en ella mateixa, pot ser omesa en primera lectura.

Comencem donant les definicions de classes d'equivalència d'elements positius per a una C^*-àlgebra A. Si $a,b\in A_+$, escrivim $a\lesssim b$ si i només si existeixen elements r_n,s_n en A tals que $a=\lim\limits_n r_nbs_n$. Diem que a i b són **equivalents**, i ho denotem com $a\sim b$, si $a\lesssim b$ i també $b\lesssim a$. Es comprova fàcilment que $\sim$ és una relació d'equivalència. Denotem per $M_\infty(A)_+=\cup_{n=1}^\infty M_n(A)_+$. Si $x,y\in M_\infty(A)_+$, aleshores $x\sim y$ si i només si, per definició, existeix $n\in\mathbb{N}$ tal que $x\sim y$ a $M_n(A)$. Denotem per

$\langle x\rangle$ la classe d'equivalència de l'element $x \in M_\infty(A)_+$ respecte la relació $\sim$, i definim

$$\langle x\rangle + \langle y\rangle = \langle \begin{pmatrix} x & 0 \\ 0 & y \end{pmatrix} \rangle.$$

Sigui $S(A)$ el conjunt de totes les classes d'equivalència d'elements de $M_\infty(A)_+$. Aleshores, $S(A)$ és un monoide abelià, parcialment ordenat a través de $\langle x\rangle \leq \langle y\rangle$ si i només si $x \precsim y$. És ben conegut que aquest ordre no és algebraic (vegeu, per exemple [76] o bé [78]). La relació $\precsim$ fou introduïda per Cuntz a [25], i ha estat estudiada per diversos autors: [15], [57], [62], [78], [84], entre altres. L'estudi del monoide $S(A)$ està relacionat amb preguntes de comparabilitat d'elements positius en C^*-àlgebres (vegeu [13], i també [78]).

Per [84, Proposition 2.1], la relació $\precsim$ dóna, quan la restringim a projeccions, la sub-equivalència usual de Murray-von Neumann. La relació $\sim$ dóna l'equivalència de Murray-von Neumann quan el monoide $V(A)$ és establement finit (per exemple, doncs, quan l'àlgebra té rang estable 1). Recollim en primer lloc, una conseqüència del Teorema 2.2.14. Si $x \in A_+$, denotem per A_x la C^*-subàlgebra hereditària de A generada per x, és a dir, $A_x = \overline{xAx}$.

COROL·LARI 2.4.1 *Sigui A una C^*-àlgebra simple, amb σ-unitat, rang real zero i rang estable* 1. *Siguin $n \in \mathbb{N}$ i $x \in M_n(A)_+ \setminus \{0\}$. Aleshores $V(\mathcal{M}(M_n(A)_x))$ és isomorf a un submonoide de $S(A)$.*

DEMOSTRACIÓ: Atès que $V(M_n(A)_x)$ és isomorf a $V(A)$ i $D(M_n(A)_x)$ s'identifica amb un subinterval de $nD(A)$, concloem a partir del Teorema 2.2.14 que existeix un isomorfisme entre $V(\mathcal{M}(M_n(A)_x))$ i un submonoide de $\Lambda_{\sigma,D(A)}(V(A))$. Ara bé, per [78, Theorem 2.8], existeix un isomorfisme (de monoides ordenats) entre $S(A)$ i $\Lambda_{\sigma,D(A)}(V(A))$. $\square$

Sigui M un monoide parcialment ordenat. Sigui $u \in M$ una unitat d'ordre i D un interval generador sobre M. Posem $d = \sup \phi_u(D)$. Fins ara, hem considerat el monoide d'intervals $W_\sigma^D(M)$, amb l'ordre algebraic com a ordre natural. Volem seguidament considerar el monoide $\Lambda_{\sigma,D}(M)$, equipat amb l'ordre (parcial) definit per la inclusió de conjunts. Una raó per això és que a [78, Theorem 2.8] es va obtenir un isomorfisme de monoides ordenats entre $S(A)$ i $\Lambda_{\sigma,D}(V(A))$, on A és una C^*-àlgebra amb σ-unitat, rang real zero, rang estable 1 i $D = D(A)$. L'ordre donat per la inclusió de conjunts a $\Lambda_{\sigma,D}(V(A))$ correspon en aquest context a l'ordre natural de $S(A)$. Considerem el monoide $M \sqcup \mathrm{LAff}_{\sigma,d}(S_u)^{++}$, amb addició definida com abans a través de $x + f = \rho[0,x] + f$, on $x \in M$ i $f \in \mathrm{LAff}_{\sigma,d}(S_u)^{++}$. Un argument similar al que hem fet servir al Teorema 2.3.13 mostra que $\Lambda_{\sigma,D}(M)$ i $M \sqcup \mathrm{LAff}_{\sigma,d}(S_u)^{++}$ són monoides isomorfs. Definirem doncs en aquest monoide un ordre que correspondrà a la inclusió de conjunts i, en conseqüència, donarem una altra representació de $S(A)$. L'ordre pot ésser expressat en els següents termes:

(1) $x \leq_1 y$ per $x, y \in M$ si, i només si, $x \leq y$ a M.

(2) $f \leq_1 g$ per $f, g \in \mathrm{LAff}_{\sigma,d}(S_u)^{++}$ si, i només si, $f(s) \leq g(s)$ per a tot $s \in S_u$.

(3) $x \leq_1 f$ per $x \in M$ i $f \in \mathrm{LAff}_{\sigma,d}(S_u)^{++}$ si, i només si, $\phi_u(x) \ll f$.

(4) $f \leq_1 x$ per $x \in M$ i $f \in \mathrm{LAff}_{\sigma,d}(S_u)^{++}$ si, i només si, $f \leq_1 \phi_u(x)$.

És fàcil comprovar que aquest ordre és parcial i invariant per translacions. Ometrem, per tant, els detalls.

COROL·LARI 2.4.2 *Sigui M un monoide cònic, simple i de refinament. Suposem que M és també no atòmic, estrictament no perforat i cancel·latiu. Siguin $u \in M$ una unitat d'ordre, D un interval flexible amb un subconjunt cofinal numerable i $d = \sup \phi_u(D)$. Llavors hi ha un isomorfisme normalitzat de monoides ordenats*

$$\psi : (\Lambda_{\sigma,D}(M), \subseteq, D) \to (M \sqcup \mathrm{LAff}_{\sigma,d}(S_u)^{++}, \leq_1, d),$$

donat per $\psi(X) = \rho(X)$ si X és flexible i $\psi([0,x]) = x$ per $x \in M$.

DEMOSTRACIÓ: Com al Teorema 2.3.13, obtenim un isomorfisme normalitzat de monoides. Per veure que de fet és un isomorfisme de monoides ordenats, procedim com segueix.

Siguin $X, Y \in \Lambda_\sigma^D(M)$. Si $X \subseteq Y$, hem de considerar quatre possibilitats. Si X i Y no són flexibles, llavors $X = [0,x]$ i $Y = [0,y]$ per elements $x, y \in M$. Per tant $x \leq y$ a M. Així $\psi(X) \leq \psi(Y)$. Si X és flexible i Y no, llavors $Y = [0,y]$ per algun $y \in M$ i $\psi(X) = \rho(X) \leq \phi_u(y)$, d'on tenim $\psi(X) \leq \psi(Y)$. Si X no és flexible (i per tant de la forma $[0,x]$ amb $x \in M$) i Y és flexible, trobem per [45, Lemma 7.4] (vegeu també la demostració del Lema 2.3.11) una unitat d'ordre $v \in M$ tal que $x + v \in Y$. Per tant $\phi_u(x) \ll \phi_u(x+v) \leq \rho(Y)$. El cas en que ambdós X i Y són flexibles es resol de manera trivial.

Recíprocament, suposem que $\psi(X) \leq \psi(Y)$, per $X, Y \in \Lambda_{\sigma,D}(M)$. Novament hem de considerar quatre casos. Si X i Y no són flexibles, llavors és clar que $X \subseteq Y$. Si X és flexible i Y no ho és, és a dir, $Y = [0,y]$ per algun $y \in M$, llavors

$$X = \rho'\rho(X) \subseteq \rho'(\phi_u(y)) = \{z \in M \mid \phi_u(z) \ll \phi_u(y)\} \subseteq [0,y],$$

ja que M és estrictament no perforat. Si $X = [0, x]$ i Y és flexible, posem $f = \psi(Y)$, i llavors $\phi_u(x) \ll f$. Si Y és generat per una successió creixent $\{y_n\}$ de M, llavors $f = \sup \phi_u(y_n)$. Com que S_u és compacte, existeix $n \in \mathbb{N}$ tal que $\phi_u(x) \ll \phi_u(y_n)$, d'on $x \leq y_n$. Per tant $[0, x] \subseteq Y$. Finalment, si X i Y són flexibles llavors es dedueix del Lema 2.3.11 (4) que $X \subseteq Y$. □

Si A és una C^*-àlgebra amb σ-unitat, llavors per [78, Lemma 2.2] $S(A)$ té una unitat d'ordre, que denotarem per $u_{S(A)}$.

TEOREMA 2.4.3 *Sigui A una C^*-àlgebra simple, amb σ-unitat (sense unitat). Suposem que A és no elemental, amb rang real zero, rang estable* 1, *i que $V(A)$ és estrictament no perforat. Fixem un element $u \in V(A)^*$, l'interval $D = D(A)$ i $d = \sup \phi_u(D)$. Llavors hi ha un isomorfisme normalitzat de monoides ordenats entre $(S(A), \leq, u_{S(A)})$ i $(V(A) \sqcup \mathrm{LAff}_{\sigma,d}(S_u)^{++}, \leq_1, d)$. En particular, $S(A)$ no és cancel·latiu.*

DEMOSTRACIÓ: Com al Teorema 2.3.16, $V(A)$ és un monoide cònic, de refinament, que també és simple, cancel·latiu i no atòmic. Per [78, Theorem 2.8] $(S(A), u_{S(A)})$ és isomorf com a monoide ordenat a $(\Lambda_{\sigma,D}(V(A)), D)$, on l'ordre en el darrer és donat per la inclusió de conjunts. La primera part del resultat es dedueix llavors del Corollari 2.4.2.

Per veure que $S(A)$ no és cancel·latiu, siguin $x \in V(A)^*$ i $f \in \mathrm{LAff}_{\sigma,d}(S_u)^{++}$. Llavors $x + f = \phi_u(x) + f$, mentre que $x \neq \phi_u(x)$. □

A la vista del Teorema anterior, una pregunta natural és la següent:

QÜESTIÓ: 2.4.4 *Quins elements de $S(A)$ es poden cancel·lar? Més en general, quan és $S(A)$ cancel·latiu?*

En el cas commutatiu, és a dir, per C^*-àlgebres de la forma $A = C_0(X)$, on X és un espai σ-compacte Hausdorff, es va donar una representació de $S(A)$ com a un cert monoide de funcions sobre X amb valors enters, i com a conseqüència d'això, es dedueix la propietat de cancel·lació a $S(A)$ (vegeu [77, Theorem 3.11]). Pel cas més general d'una C^*-àlgebra A amb σ-unitat, rang real zero i rang estable 1, una possibilitat seria estudiar quins intervals numerablement generats (sobre $V(A)$) cancel·len d'acord amb la representació de $S(A)$ donada a [78, Theorem 2.8].

En el cas que A no tingui rang real zero, relacionem tot seguit, i per concloure aquesta secció, els monoides $S(A)$ i $V(\mathcal{M}(A))$. Això pot fer-se per a qualsevol C^*-àlgebra amb σ-unitat, considerant un monoide addicional que ja fou definit a [13, Definition 6.1.2] (vegeu també [78]). Si $x, y \in M_\infty(A)_+$, diem que $x \sim_s y$ si i només si existeix $a \in M_\infty(A)$ tal que $\overline{xM_\infty(A)x} = \overline{a^*aM_\infty(A)a^*a}$, mentre que $\overline{yM_\infty(A)y} =$

$\overline{aa^* M_\infty(A) aa^*}$. Es pot veure que $\sim_s$ és una relació d'equivalència i que $x \sim_s y$ implica $x \sim y$. Denotem per $\{x\}$ la $\sim_s$-classe d'equivalència de $x \in M_\infty(A)_+$, i posem $W_s(A)$ com el conjunt d'aquestes classes. Aleshores $W_s(A)$ és un monoide abelià preordenat, a través de:

$$\{x\} + \{y\} = \{\begin{pmatrix} x & 0 \\ 0 & y \end{pmatrix}\},$$

$$\{x\} \leq \{y\} \text{ si i només si } x \precsim y.$$

Notem que hi ha una aplicació natural $\pi : W_s(A) \to S(A)$, donada per $\pi(\{x\}) = \langle x \rangle$. A [78, Corollary 2.4] es prova que si A és una C^*-àlgebra amb rang real zero i $\mathrm{sr}(A) = 1$, aleshores $W_s(A) = S(A)$.

PROPOSICIÓ 2.4.5 *Sigui A una C^*-àlgebra amb σ-unitat (sense unitat). Aleshores hi ha un morfisme de monoides injectiu $\xi : V(\mathcal{M}(A)) \to W_s(A)$.*

DEMOSTRACIÓ: Sigui $p \in \mathcal{M}(A)$ una projecció. Per la demostració de [42, Lemma 1.3(a)], la C^*-àlgebra hereditària pAp té també σ-unitat. Sigui $v_1 \leq v_2 \leq \dots$ una unitat aproximada per pAp, i considerem l'element $v = \sum_{n=1}^{\infty}(1/2^n)v_n \in pAp \subseteq A$. Aleshores v és un element estrictament positiu ([72], [68]) per pAp, de manera que $\overline{vAv} = pAp$. Suposem que $w_1 \leq w_2 \leq \dots$ és una altra unitat aproximada per pAp. Aleshores, considerant l'element $w = \sum_{n=1}^{\infty}(1/2^n)w_n$, obtenim de la mateixa forma que abans que $\overline{wAw} = \overline{vAv} = pAp$. Per tant, tenim que $v \sim_s w$.

Ara, si $p \sim q$ a $\mathcal{M}(A)$, existeix $z \in \mathcal{M}(A)$ tal que $p = zz^*$ i $q = z^*z$. Per tant obtenim un isomorfisme de C^*-àlgebres entre pAp i qAq donat per $x \mapsto z^*xz$. En particular, si (v_n) és una unitat aproximada per pAp, aleshores $w_n = z^*v_nz$ és una unitat aproximada per qAq. Sigui $w = \sum_{n=1}^{\infty}(1/2^n)z^*v_nz = z^*vz$, i sigui $a = z^*v^{1/2}$, de forma que obtenim $\overline{vAv} = \overline{a^*aAa^*a}$ i també $\overline{wAw} = \overline{aa^*Aaa^*}$. Per tant $v \sim_s w$.

Això ens permet definir una aplicació $\xi : V(\mathcal{M}(A)) \to W_s(A)$ per $\xi([p]) = \{v\}$, on $v = \sum_{n=1}^{\infty}(1/2^n)v_n$, i on (v_n) és una unitat aproximada per pAp. Per les observacions que acabem de fer, ξ està ben definida. També, és un morfisme de monoides. En efecte, prenem projeccions $p, q \in \mathcal{M}(A)$. Sigui (v_n) (respectivament, (w_n)) una unitat aproximada per pAp (respectivament, per qAq). Aleshores $(v_n \oplus w_n)$ és una unitat aproximada per $(p\oplus q)M_2(A)(p\oplus q)$, de manera que $\xi([p]+[q]) = \sum_{n=1}^{\infty}(1/2^n)(v_n\oplus w_n) = \xi([p]) + \xi([q])$.

Suposem ara que existeixen projeccions $p, q \in \mathcal{M}(A)$ tals que $\xi([p]) = \xi([q])$. Escrivim, segons la notació anterior, $pAp = \overline{vAv}$ (respectivament, $qAq = \overline{wAw}$), on $v = \sum_{n=1}^{\infty}(1/2^n)v_n$, per a una unitat aproximada (v_n) de pAp (respectivament, $w = \sum_{n=1}^{\infty}(1/2^n)w_n$, on (w_n) és una unitat aproximada per qAq). Tenim doncs que $v \sim_s w$. Per tant, existeix $a \in A$ tal que $pAp = \overline{a^*aAa^*a}$, mentre que $qAq = \overline{aa^*Aaa^*}$. Com que $a^*a \in \overline{a^*aAa^*a} = pAp \subseteq pA$, tenim que $\overline{a^*aA} \subseteq pA$. D'altra banda, sabem que (v_n) convergeix en la topologia estricta a p, de manera que si $x \in A$, aleshores $px = \lim_n v_n x$, i a més, per a tot $n \in \mathbb{N}$, tenim $v_n \in \overline{vAv} \subseteq \overline{a^*aA}$. Per tant $px \in \overline{a^*aA}$. En conseqüència, tenim $pA = \overline{a^*aA}$ i de manera semblant concloem que $qA = \overline{aa^*A}$. Amb arguments idèntics obtenim que $Ap = \overline{Aa^*a}$ i que $Aq = \overline{Aaa^*}$.

Per a cada $n \in \mathbb{N}$, escrivim $f_{1/n}(a^*a) = a^*ah_n = h_na^*a$ (per càlcul espectral). Posem $y_n = ah_{2n}^{1/2}$. Observem que $\overline{\cup_n f_{1/n}(a^*a)A} = \overline{a^*aA}$, així com que $\overline{\cup_n y_n f_{1/n}(a^*a)A} = \overline{aa^*A}$. Per tant, l'aplicació $\varphi(f_{1/n}(a^*a)x) = y_n f_{1/n}(a^*a)x$, per $x \in A$ estén per continuïtat a un isomorfisme de mòduls continu $\varphi : \overline{a^*aA} \to \overline{aa^*A}$. De manera semblant tenim un isomorfisme de mòduls continu $\psi : \overline{Aaa^*} \to \overline{Aa^*a}$ tal que $\psi(b) = by_n$ per a $b \in \overline{Af_{1/n}(a^*a)y_n^*}$. Aquests morfismes satisfan la següent propietat: si $x \in \overline{f_{1/n}(a^*a)A}$ i $z \in \overline{Af_{1/n}(a^*a)y_n^*}$, aleshores $z\varphi(x) = zy_nx = \psi(z)x$. Per continuïtat, concloem que $z\varphi(x) = \psi(z)x$, per $x \in \overline{a^*aA}$ i per $z \in \overline{Aaa^*}$. Amb arguments semblants, tenim que les aplicacions φ^{-1} i ψ^{-1} satisfan una propietat similar, és a dir, si $x \in qA$ i $y \in Ap$, aleshores $y\varphi^{-1}(x) = \psi^{-1}(y)x$.

Sigui (e_n) una unitat aproximada per A. Afirmem ara que $\varphi(pe_n)p$ és una successió de Cauchy estricta. Si $x \in A$, tenim que $\lim_n \varphi(pe_n)px = \lim_n \varphi(pe_npx) = \varphi(px)$. Si $y \in A$, aleshores $y\varphi(pe_n)p = yq\varphi(pe_n)p = \psi(yq)pe_np \to \psi(yq)p = \psi(yq)$. Sigui $b \in \mathcal{M}(A)$ el límit de $(\varphi(pe_n)p)$ en la topologia estricta. Treballant amb φ^{-1} obtenim que la successió $(\varphi^{-1}(qe_n)q)$ té un límit $c \in \mathcal{M}(A)$ en la topologia estricta.

Ara, pel Lema 2.1.6, tenim que cb és igual al límit, en la topologia estricta, de la successió $(\varphi^{-1}(qe_n)\varphi(pe_n)p)$. Afirmem que $cb = p$. Prenem $x, y \in A$ i $\varepsilon > 0$. Notem que $\varphi^{-1}(qe_n)\varphi(pe_n)px = \varphi^{-1}(qe_n\varphi(pe_npx))$, i també que $px = \varphi^{-1}(\varphi(px))$. Per tant, s $n \in \mathbb{N}$ és prou gran

$$||qe_n\varphi(pe_npx) - \varphi(px)|| \leq ||qe_n\varphi(pe_npx) - qe_n\varphi(px)|| + ||qe_n\varphi(px) - \varphi(px)|| \leq$$

$$\leq ||\varphi(pe_npx) - \varphi(px)|| + ||qe_n\varphi(px) - \varphi(px)|| < \varepsilon.$$

De manera semblant, tenim: $y\varphi^{-1}(qe_n)\varphi(pe_n)p = \psi(\psi^{-1}(yp)qe_nq)pe_np$. Per tant, si $n \in \mathbb{N}$ és prou gran

$$||\psi(\psi^{-1}(yp)qe_nq)pe_np - yp|| \leq$$

$$\leq ||\psi(\psi^{-1}(yp)qe_nq)pe_np - \psi(\psi^{-1}(yp))pe_np|| + ||ype_np - yp|| \leq$$

$$\leq \|\psi(\psi^{-1}(yp)qe_nq) - \psi(\psi^{-1}(yp))\| + \|ype_np - yp\| < \varepsilon.$$

El mateix tipus d'argument mostra que $bc = q$. Per tant $[p] = [q]$ a $V(\mathcal{M}(A))$ i tenim així que ξ és injectiva. □

Acabem amb la següent pregunta:

QÜESTIÓ: 2.4.6 *És possible calcular $S(\mathcal{M}(A))$ en termes de $S(A)$ i de $V(\mathcal{M}(A))$?*

Observem que si A és una C^*-àlgebra sense unitat tal que l'ordre algebraic a $V(\mathcal{M}(A))$ és parcial (per exemple; i a causa del Teorema 2.3.17, si A és simple amb σ-unitat, rang real zero, rang estable 1 i amb $V(A)$ no atòmic i estrictament no perforat), llavors $S(A) \cap V(\mathcal{M}(A)) = V(A)$, pensant $S(A), V(\mathcal{M}(A)) \subseteq S(\mathcal{M}(A))$ en aquest cas. En efecte, si $\langle x \rangle = \langle p \rangle$, per $x \in M_\infty(A)_+$ i una projecció $p \in M_\infty(\mathcal{M}(A))_+$, aleshores tenim que $p \lesssim x$ i per tant, si $\varepsilon < 1$ i fent servir [84, Proposition 2.4], existeix un nombre $\delta > 0$ i existeix un element $r \in M_\infty(\mathcal{M}(A))$ tals que $p = f_\varepsilon(p) = rf_\delta(x)r^*$. Concloem doncs que $p \in M_\infty(A)$.

Capítol 3

Ideals a l'anell corona

L'anàlisi d'un anell R a través del seu grup de Grothendieck $K_0(R)$ és una de les tècniques més usades els darrers anys. L'objectiu d'aquest procediment és estudiar l'estructura d'aquest grup associat, en principi més a l'abast, i traduir posteriorment les conclusions al context de l'anell.

Un dels exemples paradigmàtics el trobem en les àlgebres ultramatricials (o bé en les àlgebres AF), ja que aquestes són classificades completament pels seus grups de Grothendieck, com va provar Elliott a [29] (vegeu també el Teorema 2.3.18). Encara que aquest model de classificació no es pugui estendre a classes més àmplies (vegeu [14, 7.3]), el grup de Grothendieck ens proporciona informació útil de l'anell. Per exemple, Goodearl estableix a [42] un isomorfisme entre els ideals de $K_0(B)$ (és a dir, els subgrups convexos de $K_0(B)$) amb els ideals tancats i establement cofinits de B, per a una C^*-àlgebra B amb unitat i rang real zero. La falta de cancel·lació de B (si $\mathrm{sr}(B) \neq 1$) no ens permet però referir-nos a tots els ideals tancats. Això és degut a que la construcció del grup K_0 involucra una noció d'estabilització entre els idempotents, i per aquesta raó nosaltres considerarem el monoide $V(B)$, que reflecteix d'una forma més fidel les relacions entre idempotents. Al capítol anterior, hem vist que per anells de multiplicadors $\mathcal{M}(R)$ dins una classe àmplia d'anells R, el monoide $V(\mathcal{M}(R))$, tot i no ésser cancel·latiu, conté informació suficient per estudiar els ideals de $\mathcal{M}(R)$. Així mateix, n'hem donat una representació on aquest estudi és efectiu, i aporta nous punts de vista al treball fet prèviament per àlgebres AF. Així, per exemple, si una C^*-àlgebra A (simple, separable, amb rang real zero, rang estable 1 i amb $V(A)$ estrictament no perforat) té exactament n quasitraces extremes infinites, aleshores hi ha un quocient de $\mathcal{M}(A)/A$ que té exactament 2^n ideals tancats. Això generalitza un resultat de Lin ([56]).

Aquest capítol està dividit en cinc seccions, la primera de les quals es dedica a examinar els anells de multiplicadors d'anells regulars simples i C^*-àlgebres simples amb rang real zero tals que el seu monoide de classes d'equivalència d'idempotents és atòmic. Aquesta particularitat requereix un tractament diferenciat i permet la simplificació d'arguments en resultats posteriors. En la segona considerem el concepte d'escala, i caracteritzem una classe important dels anells regulars simples R amb σ-unitat i escala finita a través d'una propietat de cancel·lació d'un quocient de $V(\mathcal{M}(R))$. El resultat anàleg per C^*-àlgebres afirma, en casos rellevants, que A té escala finita si, i només si, el quocient de $\mathcal{M}(A)$ per a qualsevol ideal tancat I que conté pròpiament A té rang estable 1. Això respon afirmativament una pregunta de Goodearl a [42], en un context més ampli. La tècnica introduïda en aquesta secció esdevé crucial per a la resolució del problema plantejat, i és fonamental també en els resultats subsegüents.

La tercera secció tracta de funcions de pseudo-rang i quasitraces, que són funcions definides (respectivament), sobre anells regulars i C^*-àlgebres, l'objectiu de les quals és mesurar la "grandària" dels elements d'aquests anells. Per anells amb unitat, l'estudi d'aquestes aplicacions ha estat abordat extensament per diversos autors (vegeu, per exemple, [15], [37]). Presentem aquí un desenvolupament de la teoria bàsica quan l'anell no té unitat que ens permet establir un homeomorfisme entre l'espai d'estats del monoide de classes d'equivalència d'idempotents i un cert espai de funcions de pseudo-rang (respectivament, de quasitraces en el cas d'una C^*-àlgebra), el qual serà de gran utilitat a l'hora d'analitzar el reticle d'ideals dels corresponents anells de multiplicadors. Una altra conseqüència d'aquesta teoria permet caracteritzar les C^*-àlgebres A (amb σ-unitat, simples, rang real zero, rang estable 1 i $V(A)$ estrictament no perforat) amb escala acotada, generalitzant així un resultat de Blackadar ([11, Theorem 4.8]).

Les tècniques desenvolupades al capítol anterior i a la segona secció del present capítol cristal·litzen en les dues darreres seccions per presentar una anàlisi efectiva del reticle d'ideals de l'anell de multiplicadors per anells amb escala no finita. En particular, provem que l'anell de multiplicadors pot tenir una quantitat no numerable de quocients diferents, cadascun dels quals té una quantitat no numerable d'ideals que formen una cadena respecte la inclusió. Ens ocupem també, a la Secció 5, de la recerca del quocient establement finit més gran de $\mathcal{M}(A)/A$ quan l'escala no és finita.

Remarquem finalment que tant en el cas d'anells regulars com de C^*-àlgebres amb rang real zero, i sota les hipòtesis generals en que estem treballant, el monoide de classes d'isomorfisme d'idempotents és un monoide de refinament, simple, amb unitat d'ordre, estrictament no perforat i directament finit. Per [6, Corollary 1.8] (vegeu també [78, Lemma 3.7]) aquest monoide és cancel·latiu, i així la hipòtesi que l'anell té rang estable 1 es pot "relaxar" a directament finit. Per mantenir però el paral·lelisme amb resultats ja publicats sobre el tema, continuarem treballant amb la hipòtesi de rang estable 1.

3.1 El cas elemental

Abans d'abordar un estudi sistemàtic del reticle d'ideals dels anells de multiplicadors d'anells regulars i C^*-àlgebres de rang real zero, analitzarem alguns casos en que aquesta construcció no produeix més ideals a banda de l'anell base, essent els quocients $\mathcal{M}(R)/R$ simples. Com demostrem a les Proposicions 3.1.4 i 3.1.9, aquests anells es caracteritzen, dins la classe dels anells simples amb unitat aproximada, pel fet que el seu monoide $V(R)$ és atòmic, i per tant els considerem separadament. Anomenarem aquests anells *elementals*, i distingint-los aconseguirem una major claredat en l'exposició de les seccions següents.

Com a resultats previs, necessitem algunes propietats bàsiques referents a espais duals. Sigui D un anell de divisió. Siguin ${}_DV$ i W_D espais vectorials esquerra i dreta sobre D (respectivament), i suposem que ${}_DV, W_D$ és un parell dual (amb forma bilineal no degenerada $\langle\,,\rangle$). Sigui $R = \mathcal{F}_W(V)$. Recordem que, segons hem vist a la Secció 1 del Capítol 2, $\mathcal{M}(R) = \mathcal{L}_W(V)$. Dos conjunts de vectors $(v_i)_{i\in\mathbb{N}}$ de V i $(w_i)_{i\in\mathbb{N}}$ de W s'anomenen (mútuament) **duals** si $\langle v_i, w_j\rangle = \delta_{ij}$ per a $i,j \in \mathbb{N}$ (en particular, els vectors d'aquests conjunts són D-independents). Si $v \in V$ i $w \in W$ satisfan $\langle v, w\rangle = 1$, es defineixen les aplicacions $\gamma'_{w,v} : V \to V$ per $(v')\gamma'_{w,v} = \langle v', w\rangle v$, i $\gamma_{w,v} : W \to W$ per $\gamma_{w,v}(w') = w\langle v, w'\rangle$, on $v' \in V$ i $w' \in W$. Observem que $\gamma'_{w,v}$ té rang finit i de fet ${\gamma'_{w,v}}^* = \gamma_{w,v}$, de manera que $\gamma'_{w,v} \in \mathcal{F}_W(V)$.

Notem que per ser $\langle\,,\rangle$ no degenerada, l'aplicació $W \to V^*$ donada per $w \mapsto (v \mapsto \langle v, w\rangle)$ és un monomorfisme d'espais vectorials. Per [10, Theorem 4.3.1], tot conjunt de n vectors D-independents de V admet un conjunt de n vectors de W que li és dual. Usant aquest fet i l'observació anterior veiem que $\dim_D V = n$ si, i només si, $\dim W_D = n$. Clarament, a més, $\dim_D V < \infty$ exactament quan R té unitat, és a dir, quan $\mathcal{F}_W(V) = \mathcal{L}_W(V)$. El cas en que les dimensions de V i W són infinites numerables és tractat seguidament. Destaquem en primer lloc:

LEMA 3.1.1 *(Mackey, [65, Lemma 2]) Sigui D un anell de divisió i sigui ${}_DV, W_D$ un parell dual. Suposem que $\dim_D V = \dim W_D = \aleph_0$. Aleshores existeixen bases de V i W que són mútuament duals.* $\square$

PROPOSICIÓ 3.1.2 *Sigui D un anell de divisió i sigui ${}_DV, W_D$ un parell dual. Sigui $R = \mathcal{F}_W(V)$. Llavors:*

(*a*) *Si* $f \in R$, *aleshores* $\operatorname{rang}(f) = \operatorname{rang}(f^*)$.

(*b*) *R té σ-unitat (i no unitat) si, i només si,* $\dim_D V = \dim W_D = \aleph_0$.

(*c*) *Suposem que R té σ-unitat. Si* $e, f \in \mathcal{M}(R) = \mathcal{L}_W(V)$ *són idempotents, aleshores* $e \sim f$ *si, i només si,* $\operatorname{rang}(e) = \operatorname{rang}(f)$.

DEMOSTRACIÓ: Sigui $f \in R$. Suposem que $\operatorname{rang}(f) = n$. Sigui $v_1, \dots, v_n$ una D-base per $(V)f$. Posem $v_i = (v_i')f$ per a $i = 1, \dots, n$ i notem que els vectors v_i' són D-linealment independents. Per [10, Theorem 4.3.1], existeixen vectors $w_1', \dots, w_n' \in W$ tals que $\langle v_i, w_j' \rangle = \delta_{ij}$. Aleshores és fàcil veure que $w_i := f^*(w_i')$ és un conjunt de vectors D-linealment independents. D'altra banda, si $w \in W$, aleshores $f^*(w) = \sum_{i=1}^{n} w_i \langle v_i', f^*(w) \rangle$, i per tant $\operatorname{rang}(f^*) = n$. Amb això establim (*a*).

Per provar (*b*), suposem en primer lloc que R té σ-unitat (però no unitat). Com que R és regular, existeix una successió creixent d'idempotents $(e_n)_{n\in\mathbb{N}}$ tal que $R = \cup_{n=1}^{\infty} e_n R e_n$.

Sigui $V_n = (V)(e_n)$. Aleshores, podem suposar que $V_n \neq 0$ per a tot n, i tenim $V = \cup_{n=1}^{\infty} V_n$. Per veure-ho, sigui $v \in V$, i agafem $w \in W$ tal que $\langle v, w \rangle = 1$. Aleshores, com que $\gamma'_{w,v} \in R$, existeix $n \in \mathbb{N}$ tal que $\gamma'_{w,v} \in e_n R e_n$, d'on es desprèn que $v = (v)\gamma'_{w,v} \in (V)(e_n) = V_n$. Per tant $\dim_D V \doteq \aleph_0$. Un argument similar prova que $\dim W_D = \aleph_0$.

Recíprocament, si $\dim_D V = \dim W_D = \aleph_0$, triem pel Lema de Mackey (3.1.1) bases duals $(v_i)_{i\in\mathbb{N}}$ i $(w_i)_{i\in\mathbb{N}}$ per V i W respectivament. Sigui $p_n :_D V \to_D V$ la projecció sobre Dv_n. Notem que $p_n \in R$ ja que $\operatorname{rang}(p_n) = 1$ i p_n és adjuntable (de fet, $p_n = \gamma'_{w_n,v_n}$ i per tant $p_n^* = \gamma_{w_n,v_n}$).

Observem que $(p_i)_{i\in\mathbb{N}}$ és un conjunt d'idempotents ortogonals. Sigui $e_n = \sum_{i=1}^{n} p_i$, un idempotent de R. Afirmem que $(e_n)_{n\in N}$ és una σ-unitat per R. És clar que $(e_n)_{n\in\mathbb{N}}$ és una successió creixent. Donat $f \in R$, aleshores per [10, Theorem 4.3.2], f és una suma d'elements de la forma $x \mapsto \langle x, w \rangle v$, on $x, v \in V$ i $w \in W$. Sense pèrdua de generalitat podem assumir, doncs, que $(x)f = \langle x, w \rangle v$ per a uns certs $v \in V$ i $w \in W$. Escrivim $v = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i v_i$ i $w = \sum_{i=1}^{n} w_i \mu_i$, per a un cert n, i amb $\lambda_i, \mu_i \in D$. Aleshores $(x)fe_n = (\langle x, w \rangle v)e_n = \langle x, w \rangle v = (x)f$ i si $x = \sum_{i=1}^{\infty} \nu_i v_i$ (amb $\nu_i \in D$ per a tot i i $\nu_i = 0$ per a tot i llevat d'un nombre finit), llavors $(x)e_n f = (\sum_{i=1}^{n} \nu_i v_i)f = \sum_{i=1}^{\infty} \nu_i \langle v_i, w \rangle v = (x)f$. Per tant, $(e_n)_{n\in\mathbb{N}}$ és una σ-unitat per R.

Finalment, per establir (c), suposem que R té σ-unitat. Per (b), tenim que $\dim_D V = \dim W_D = \aleph_0$. Siguin $e, f \in \mathcal{M}(R)$ idempotents. Si $e \sim f$, aleshores existeixen $g, h \in \mathcal{M}(R)$ tals que $e = gh$ i $f = hg$. En particular $e = gfh$ i $f = heg$. D'això deduïm fàcilment que $\text{rang}(e) = \infty$ si, i només si, $\text{rang}(f) = \infty$. Podem suposar per tant que e i f tenen rang finit. Aleshores $(V)f \subseteq (V)eg$, i per tant $\text{rang}(f) \leq \text{rang}(e)$. De manera semblant tenim $\text{rang}(e) \leq \text{rang}(f)$.

Recíprocament, suposem que $\text{rang}(e) = \text{rang}(f)$. Fem només el cas en que aquest és infinit (ja que el cas finit és anàleg). Clarament, atès que $1 \in \mathcal{M}(R)$ té rang infinit, és suficient veure que $e \sim 1$, i en particular podem suposar que $e \neq 1$.

Observem en primer lloc que $\langle\, ,\rangle$ restringida a $(V)e \times e^*(W)$ indueix una forma bilineal no degenerada (per exemple, si $v \in (V)e$, llavors $0 = \langle v, e^*(W)\rangle = \langle (v)e, W\rangle = \langle v, W\rangle$ implica $v = 0$), i per tant ${}_D(V)e, e^*(W)_D$ és un parell dual. De manera anàloga veuríem que ${}_D(V)(1-e), (1-e^*)(W)_D$ és un parell dual. Triem pel Lema de Mackey (3.1.1) bases mútuament duals $(u_i)_{i\in\mathbb{N}}$ i $(u'_i)_{i\in\mathbb{N}}$ de V i W respectivament. Siguin també $(v_i)_{i\in\mathbb{N}}$ i $(v'_i)_{i\in\mathbb{N}}$ bases duals per $(V)e$ i $e^*(W)$; i siguin $(w_j)_j$ i $(w'_j)_j$ bases duals per $(V)(1-e)$ i $(1-e^*)(W)$ respectivament (aquestes últimes, si el rang de $1-e$ és finit, existeixen per [10, Theorem 4.3.1]). Definim $f \in \text{End}({}_DV)$ per $(v_i)f = u_i$ i $(w_j)f = 0$ per a tot i, j. Anàlogament definim $g \in \text{End}({}_DV)$ per $(u_i)g = v_i$. Aleshores $(v_i)fg = v_i = (v_i)e$, i $(w_j)fg = 0$ per a tot i, j, d'on $e = fg$; de manera semblant veiem que $1 = gf$.

Finalment observem que tant f com g són adjuntables. En efecte, definim $f^* \in \text{End}(W_D)$ per $f^*(u'_i) = v'_i$. Aleshores, per a tot i, j, k tenim

$$\langle (v_i)f, u'_k\rangle = \delta_{ik} = \langle v_i, f^*(u'_k)\rangle, \text{ així com}$$

$$\langle (w_j)f, u'_k\rangle = 0 = \langle (w_j)e, v'_k\rangle = \langle w_j, e^*(v'_k)\rangle = \langle w_j, v'_k\rangle = \langle w_j, f^*(u'_k)\rangle.$$

Anàlogament es veu que g és adjuntable. □

DEFINICIÓ 3.1.3 *Sigui R un anell simple. Diem que R és* **elemental** *si R té idempotents minimals. Aquí entendrem que un idempotent $e \neq 0$ d'un anell R és minimal si eR és un ideal dreta minimal.*

Si R és un anell semiprimer, aleshores eR és ideal dreta minimal si, i només si, Re és ideal esquerra minimal, si i només si eRe és un anell de divisió (vegeu, per exemple, [10, Proposition 4.3.3]). Si, d'altra banda, R és un anell simple amb unitat aproximada $(a_i)_{i\in I}$, llavors R és primer, ja que si $xRy = 0$ i $x \neq 0$, aleshores atès que $R = RxR$ obtenim que $Ry = 0$. Com que existeix $i \in I$ tal que $y = a_iy$, deduïm que $y = 0$.

PROPOSICIÓ 3.1.4 *Sigui R un anell simple amb unitat aproximada. Les següents afirmacions són equivalents:*

(a) *R és elemental;*

(b) *Existeixen un anell de divisió D i un parell dual ${}_DV, W_D$ tals que $R \cong \mathcal{F}_W(V)$;*

(c) *R és regular i $V(R) \cong \mathbb{Z}^+$;*

(d) *R és regular i $V(R)$ és atòmic.*

DEMOSTRACIÓ: $(a) \Rightarrow (b)$. Suposem que R és elemental. Sigui $e \in R$ un idempotent minimal. Prenem $V = eR$, $W = Re$ i $D = eRe$. Posem $\langle ex, ey \rangle = exye$, per $x, y \in R$. Com que R és primer i e és minimal, veiem que D és un anell de divisió i que ${}_DV, W_D$ és un parell dual. Si $x \in R$ definim $\phi_x : V \to V$ per $(ey)\phi_x = eyx$. Notem que posant $\phi_x^*(ye) = xye$ per $y \in R$ tenim que $\langle (ey)\phi_x, ze \rangle = \langle ey, \phi_x^*(ze) \rangle$ per $y, z \in R$. Per tant, tenim una aplicació $\phi : R \to \mathcal{L}_W(V)$, que és clarament un morfisme d'anells. Si $\phi_x = 0$, aleshores $eRx = 0$ i com que $e \neq 0$ deduïm que $x = 0$. Per tant ϕ és injectiu. La mateixa línia d'argumentació de [10, Theorem 4.3.9] prova que $\mathcal{F}_W(V) \subseteq \phi(R)$. D'altra banda, si $p \in \phi(R)$ és un idempotent de rang finit, aleshores $\phi(R) = \phi(R)p\phi(R) \subseteq \mathcal{F}_W(V)$, i per tant $R \cong \mathcal{F}_W(V)$.

$(b) \Rightarrow (c)$. Podem suposar que $R = \mathcal{F}_W(V)$, per a un parell dual ${}_DV, W_D$. Pel Teorema de Litoff ([10, Theorem 4.3.11]), tenim que R és regular.

Sigui $n \in \mathbb{N}$. Denotem per V^n la suma directa de n còpies de V. Definim un producte interior:

$$\langle\, , \rangle_n : V^n \times W^n \to D$$

per $\langle (v_i)_{i=1}^n, (w_i)_{i=1}^n \rangle_n = \sum_{i=1}^n \langle v_i, w_i \rangle$. Així ${}_DV^n, W_D^n$ és de manera natural un parell dual, i de fet $M_n(R) \cong \mathcal{F}_{W^n}(V^n)$.

Si $e \in M_\infty(R)$ és un idempotent, aleshores existeix $n \in \mathbb{N}$ tal que $e \in M_n(R)$. Denotarem per rang(e) el rang de l'element $e \in \mathcal{F}_{W^n}(V^n)$. (Aquesta és una notació no ambigua, per la forma en que es construeix $M_\infty(R)$.) Per la Proposició 3.1.2 (c), si $e, f \in M_n(R)$ són idempotents, llavors $e \sim f$ si i només si rang$(e) =$ rang(f). Definim doncs $\varphi : V(R) \to \mathbb{Z}^+$ per $\varphi[e] =$ rang(e). Clarament, φ és una aplicació ben definida. Si $e \in M_n(R)$ i $f \in M_m(R)$ són idempotents, aleshores $e \oplus f \in M_{n+m}(R)$ defineix un endomorfisme de $V^n \oplus V^m$ per $(x, y)(e \oplus f) = ((x)e, (y)f)$, on $x \in V^n$ i $y \in V^m$. Per tant, rang$(e \oplus f) =$ rang$(e) +$ rang(f). Deduïm que φ és un morfisme de monoides injectiu.

Per veure que és exhaustiu, sigui $0 \neq v \in V$ i triem $w \in W$ tal que $\langle v, w \rangle = 1$. Definim $e :_D V \to_D V$ per $(x)e = \langle x, w \rangle v$. Notem que $(x)e^2 = ((x)e)e = \langle x, w \rangle (v)e = \langle x, w \rangle \langle v, w \rangle v = (x)e$, i per tant $e = e^2$. A més $\mathrm{rang}(e) = 1$, de forma que $\varphi[e] = 1$, i així φ és exhaustiu.

$(c) \Rightarrow (d)$ és obvi.

$(d) \Rightarrow (a)$. Només cal veure que R té idempotents minimals. Sigui $e \in M_\infty(R)$ tal que $[e]$ és un àtom. Com que $V(R)$ és un monoide Riesz, podem suposar que $e \in R$. Clarament e és un idempotent minimal: si eR no és un ideal minimal per la dreta, aleshores com que R és regular existeix un idempotent $f \in R$ tal que $fR \subsetneq eR$. Per tant l'idempotent fe satisfà $0 \leq^* [fe] \leq^* [e]$, contradient així el fet que $[e]$ és un àtom. Per tant, R és elemental. $\square$

Observem que en el cas regular i simple (fins i tot sense unitat), un anell R és elemental si, i només si, és artinià.

TEOREMA 3.1.5 *Sigui R un anell simple amb σ-unitat i sense unitat. Si R és elemental, llavors $\mathcal{M}(R)/R$ és simple.*

DEMOSTRACIÓ: Com que R és simple i essencial en $\mathcal{M}(R)$, tot ideal $I \lhd \mathcal{M}(R)$ no nul conté R. D'altra banda, per la Proposició 3.1.4, existeixen un anell de divisió D i un parell dual ${}_DV, W_D$ tals que $R \cong \mathcal{F}_V(W)$. Sigui I un ideal no zero de $\mathcal{M}(R) \cong \mathcal{L}_W(V)$. Com que I és generat per idempotents (pel Teorema 2.2.8), si $I \not\subseteq R$, existeix un idempotent $p \in I \setminus R$. Per tant, $\mathrm{rang}(p) = \infty$.

Tenint en compte que R no té unitat, i per tant el rang de $1_{\mathcal{M}(R)}$ és també infinit, concloem per la Proposició 3.1.2 (c) que $p \sim 1_{\mathcal{M}(R)}$. Per tant, $1_{\mathcal{M}(R)} \in I$ i així $I = \mathcal{M}(R)$. $\square$

REMARCA 3.1.6 *Si D és un anell de divisió, definim $\mathbb{B}(D)$ com l'anell els elements del qual són matrius sobre D amb una quantitat numerable de files i de columnes, i on cada fila i cada columna té un nombre finit d'entrades no nul·les. Tenint en compte la Proposició 3.1.4, es pot demostrar que si R és un anell elemental amb σ-unitat, aleshores $\mathcal{M}(R) \cong \mathbb{B}(D)$ per a un cert anell de divisió D.*

Per C^*-àlgebres, la situació és molt similar. De fet, una noció de C^*-àlgebra elemental ja fou introduïda anteriorment (vegeu, per exemple [57]), per distingir el cas clàssic de l'àlgebra de Calkin. No hem sabut trobar, però, referències a la literatura en les quals es mencioni explícitament que les C^*-àlgebres elementals són essencialment aquelles A per les quals $V(A) \cong \mathbb{Z}^+$, encara que en la Proposició 3.1.9 ho relacionem amb un fet conegut i provat a [62].

Recordem que una C^*-àlgebra A es diu **simple** si $0 \neq A$ i A no té ideals tancats diferents de 0 i A.

DEFINICIÓ 3.1.7 *Sigui A una C^*-àlgebra simple amb σ-unitat. Diem que A és* **elemental** *si A té projeccions minimals.*

Un ideal especialment important en la teoria de C^*-àlgebres és l'anomenat **ideal de Pedersen**, del qual presentem la construcció seguidament. Sigui X un espai topològic localment compacte Hausdorff. Denotem per $C_c(X)$ el conjunt de les funcions contínues sobre X amb valors a $\mathbb{C}$ que tenen suport compacte. Sigui A una C^*-àlgebra; definim

$$K(A)_0 = \{f(x) \mid x \in A_+ \text{ i } f \in C_c((0,\infty))_+\}.$$

Sigui ara

$$K(A)_+ = \{x \in A_+ \mid x \leq \sum_{k=1}^{n} x_k, \text{ amb } x_k \in K(A)_0\}.$$

L'ideal de Pedersen de A és llavors l'espai vectorial (sobre $\mathbb{C}$) generat per $K(A)_+$, i es denota per $K(A)$. La propietat més bàsica, i potser la més fonamental, de $K(A)$, és reflectida en el següent

TEOREMA 3.1.8 *[72, Theorem 5.6.1] Sigui A una C^*-àlgebra. Aleshores $K(A)$ és un ideal dens i hereditari de A, i és mínim entre tots els ideals densos de A.* □

Tal i com es comenta a [72, 5.6.3], el càlcul de $K(A)$ és en general difícil. Com a exemples il·lustratius, tenim que si A té unitat, llavors $K(A) = A$, i si $A = C_0(X)$ per un espai localment compacte Hausdorff X, aleshores $K(A) = C_c(X)$.

Recordem que si $\mathcal{H}$ és un espai de Hilbert complex, un operador lineal $T : \mathcal{H} \to \mathcal{H}$ es diu **compacte** si $\overline{T(B_1)}$ és compacte, on B_1 és la bola unitat tancada de $\mathcal{H}$. Denotem per $\mathbb{K}(\mathcal{H})$ el conjunt dels operadors compactes i per $\mathbb{F}(\mathcal{H})$ els operadors de rang finit. Aleshores es té que $\mathbb{F}(\mathcal{H})$ és un ideal de $\mathbb{K}(\mathcal{H})$ i de fet $K(\mathbb{K}(\mathcal{H})) = \mathbb{F}(\mathcal{H})$ ([72, 5.6.3]). Notem que si $\mathcal{H}$ és separable i té dimensió infinita, llavors $\mathbb{F}(\mathcal{H})$ no és tancat (vegeu, per exemple, [74]).

PROPOSICIÓ 3.1.9 *Sigui A una C^*-àlgebra simple amb σ-unitat. Les següents condicions són equivalents:*

(*a*) *A és elemental;*

(*b*) *$K(A)$ és elemental;*

(*c*) *Existeix un espai de Hilbert complex $\mathcal{H}$ separable tal que $A \cong \mathbb{K}(\mathcal{H})$ (com C^*-àlgebres);*

(*d*) *A té rang real zero i* $V(A) \cong \mathbb{Z}^+$*;*

(*e*) *A té rang real zero i* $V(A)$ *és atòmic;*

(*f*) $A \otimes \mathbb{K}(\mathcal{H}) \cong \mathbb{K}(\mathcal{H})$*, per a algun espai de Hilbert separable* $\mathcal{H}$*.*

DEMOSTRACIÓ: $(a) \Leftrightarrow (b)$. Sigui $e \in A$ una projecció minimal. Llavors $e \in K(A)$ i és un idempotent minimal de $K(A)$. Si $0 \neq x \in K(A)$ satisfà que $xK(A) \subseteq eK(A) = eA$, llavors $xK(A)A \subseteq eA$ i per tant $eA = xK(A)A \subseteq xK(A)$. Així $xK(A) = eK(A)$. Recíprocament, sigui $e \in K(A)$ un idempotent minimal. Existeix una projecció $p \in K(A)$ tal que $eK(A) = pK(A)$ ([52] o bé [38, Proposition 19.1(b)]). Es veu fàcilment que p és una projecció minimal de A.

$(a) \Rightarrow (c)$. Sigui e una projecció minimal de A. Aleshores $eAe = \mathbb{C}e$, ja que eAe és una C^*-àlgebra de divisió ([38, Theorem 2.10]). Denotem per $\varphi : \mathbb{C}e \to \mathbb{C}$ l'isomorfisme de cossos (és a dir, $\varphi(\lambda e) = \lambda$), i observem que $\varphi(eae)e = e\varphi(eae) = eae$. Sigui $\mathcal{H} = eA$. L'estructura d'espai vectorial de $\mathcal{H}$ sobre $\mathbb{C}$ ve donada per la relació $(\lambda e) \cdot (ea) = \lambda ea = (ea) \cdot (\lambda e)$, on $\lambda \in \mathbb{C}$ i $a \in A$.

Definim $\langle\, ,\rangle : \mathcal{H} \times \mathcal{H} \to \mathbb{C}e$ per $\langle ea, eb\rangle = \varphi(eab^*e)$, on $a, b \in A$. És fàcil veure que $\langle\, ,\rangle$ és una forma lineal en la primera component, tal que $\langle ea, eb\rangle = \overline{\langle eb, ea\rangle}$, i tal que $\langle ea, ea\rangle \geq 0$. Clarament també, $\langle\, ,\rangle$ és no degenerada. Definim $\|ea\|_{\mathcal{H}} = \langle ea, ea\rangle^{1/2}$. Notem que de fet $\|ea\|_{\mathcal{H}} = \|eaa^*e\|^{1/2} = \|ea\|$. Per tant, $\mathcal{H}$ és un espai de Hilbert complex.

Si $a \in A$, aleshores a defineix un operador lineal $\widehat{a}$ sobre $\mathcal{H}$ per $(eb)\widehat{a} = eba$. Observem que $\|(eb)\widehat{a}\|_{\mathcal{H}} = \|eba\| \leq \|a\|\|eb\| = \|a\|\|eb\|_{\mathcal{H}}$, d'on veiem que $\widehat{a}$ és acotat. És fàcil comprovar que $(a+b)\widehat{\ } = \widehat{a} + \widehat{b}$ i que $\widehat{ab} = \widehat{a}\widehat{b}$. A més, $\widehat{a^*} = (\widehat{a})^*$, i $a = 0$ si, i només si, $\widehat{a} = 0$. Per tant, l'aplicació $A \to \mathbb{B}(\mathcal{H})$ donada per $a \mapsto \widehat{a}$ és un $*$-morfisme injectiu.

Sigui ara $a \in A$ tal que $\|ea\|_{\mathcal{H}} = \|ea\| = 1$, i considerem la projecció p_{ea} de rang 1 definida per $(eb)p_{ea} = \langle eb, ea\rangle ea$, on $b \in A$. Notem que $(eb)p_{ea} = \varphi(eba^*e)ea = (eba^*e)ea = eba^*ea = (eb)(a^*ea)\widehat{\ }$. Per tant $p_{ea} \in \widehat{A}$. Com que $\mathbb{F}(\mathcal{H})$ és l'espai vectorial (sobre $\mathbb{C}$) generat per les projeccions de rang 1 i totes tenen la forma p_v per algun $v \in \mathcal{H}$ (vegeu [68, Chapter 2]), deduïm que $\mathbb{F}(\mathcal{H}) \subseteq \widehat{A}$.

Observem que $K(\widehat{A}) = K(A)\widehat{\ }$. Sigui $q \in \mathbb{F}(\mathcal{H})$ una projecció de rang finit. Aleshores $K(\widehat{A}) = K(\widehat{A})qK(\widehat{A}) \subseteq \widehat{A}q\widehat{A} \subseteq \mathbb{F}(\mathcal{H})$. Per tant, $\widehat{A} = \overline{K(\widehat{A})} = \overline{\mathbb{F}(\mathcal{H})} = \mathbb{K}(\mathcal{H})$, d'on $A \cong \mathbb{K}(\mathcal{H})$.

Sigui $(e_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la σ-unitat de A. Aleshores és fàcil veure que $\mathcal{H} = eA = \overline{\cup_n \mathcal{H}e_n}$, i per tant $\mathcal{H}$ és separable.

$(c) \Rightarrow (d)$ és clar pel que hem vist al Capítol 1.

$(d) \Rightarrow (e)$ és obvi.

$(e) \Rightarrow (a)$. Sigui $e \in M_\infty(A)$ una projecció tal que $[e]$ és un àtom. Atès que $V(A)$ és un monoide Riesz, podem assumir que $e \in A$. Aleshores eA és un ideal minimal dreta de A. En efecte, si $xA \subseteq eA$ per algun $0 \neq x \in A$, aleshores com que A té rang real zero, existeix una projecció $0 \neq p \in xA$, per [7, Theorem 7.2 (c)]. Per tant $p \leq e$. Tenint en compte que $[e]$ és un àtom, concloem que $[e] = [p]$. D'altra banda $[e] = [e-p] + [p] = [e-p] + [e]$, d'on deduïm que $e = p$. Així, veiem que A té projeccions minimals, i per tant A és elemental.

$(e) \Rightarrow (f)$. Com en el paràgraf anterior, A té projeccions minimals. Per [62, Proposition 1.1], tenim que $A \otimes \mathbb{K}(\mathcal{H}) \cong \mathbb{K}(\mathcal{H})$ per algun espai de Hilbert $\mathcal{H}$ separable.

$(f) \Rightarrow (e)$. Si $A \otimes \mathbb{K}(\mathcal{H}) \cong \mathbb{K}(\mathcal{H})$, aleshores A s'identifica amb una C^*-subàlgebra hereditària de $\mathbb{K}(\mathcal{H})$, i per tant A té rang real zero. En segon lloc, notem que $V(A) \cong V(A \otimes \mathbb{K}(\mathcal{H}))$. Per tant, $V(A) \cong \mathbb{Z}^+$, que és atòmic. □

REMARCA 3.1.10 *De manera semblant als anells elementals, si $\mathcal{H}$ és un espai de Hilbert separable i p, q són projeccions de rang infinit, llavors $p \sim q$ (vegeu [68, Remark 4.1.5]). Per tant, una demostració similar a la del Teorema 3.1.5 prova que l'àlgebra de Calkin $\mathbb{B}(\mathcal{H})/\mathbb{K}(\mathcal{H})$ és simple. Aquest resultat ja és conegut, com hem comentat als exemples del Capítol* 1 *(una possible referència és [68, Theorem 4.1.16]), i aquest mateix enfocament és el que ens permet establir l'analogia en el cas d'anells elementals.*

REMARCA 3.1.11 *A la vista de la Proposició 3.1.9, podríem esperar que si A és una C^*-àlgebra amb σ-unitat, aleshores el seu ideal de Pedersen té σ-unitat com a anell. En general, però, això és fals. Prenem, per exemple, un espai de Hilbert $\mathcal{H}$ separable i de dimensió infinita, i sigui $A = \mathbb{K}(\mathcal{H})$, que té σ-unitat. Aleshores $K(A) = \mathbb{F}(\mathcal{H})$, i observem que $\dim_{\mathbb{C}} K(A) > \aleph_0$. Si $K(A)$ tingués una σ-unitat (a_n), aleshores $K(A) = \cup_{n=1}^{\infty} a_n K(A) a_n$. En particular, atès que $\dim_{\mathbb{C}} a_n K(A) a_n < \infty$ per a cada n, obtenim que la dimensió de $K(A)$ sobre $\mathbb{C}$ és com a molt numerable, contradicció.*

3.2 Escales en anells i C^*-àlgebres

Usant la representació de $V(\mathcal{M}(R))$ com una unió disjunta de $V(R)$ i un semigrup de funcions afins i semicontínues inferiors, iniciem l'estudi de l'estructura d'ideals d'anells de multiplicadors, dins la classe d'anells regulars simples amb σ-unitat i la de C^*-àlgebres simples amb σ-unitat i rang real zero; en ambdós casos suposarem, a més, que el rang estable és 1 i que el monoide de classes d'equivalència de projeccions és estrictament no perforat.