

ADVERTIMENT. La consulta d'aquesta tesi queda condicionada a l'acceptació de les següents condicions d'ús: La difusió d'aquesta tesi per mitjà del servei TDX (www.tesisenxarxa.net) ha estat autoritzada pels titulars dels drets de propietat intel·lectual únicament per a usos privats emmarcats en activitats d'investigació i docència. No s'autoritza la seva reproducció amb finalitats de lucre ni la seva difusió i posada a disposició des d'un lloc aliè al servei TDX. No s'autoritza la presentació del seu contingut en una finestra o marc aliè a TDX (framing). Aquesta reserva de drets afecta tant al resum de presentació de la tesi com als seus continguts. En la utilització o cita de parts de la tesi és obligat indicar el nom de la persona autora.

ADVERTENCIA. La consulta de esta tesis queda condicionada a la aceptación de las siguientes condiciones de uso: La difusión de esta tesis por medio del servicio TDR (www.tesisenred.net) ha sido autorizada por los titulares de los derechos de propiedad intelectual únicamente para usos privados enmarcados en actividades de investigación y docencia. No se autoriza su reproducción con finalidades de lucro ni su difusión y puesta a disposición desde un sitio ajeno al servicio TDR. No se autoriza la presentación de su contenido en una ventana o marco ajeno a TDR (framing). Esta reserva de derechos afecta tanto al resumen de presentación de la tesis como a sus contenidos. En la utilización o cita de partes de la tesis es obligado indicar el nombre de la persona autora.

WARNING. On having consulted this thesis you're accepting the following use conditions: Spreading this thesis by the TDX (www.tesisenxarxa.net) service has been authorized by the titular of the intellectual property rights only for private uses placed in investigation and teaching activities. Reproduction with lucrative aims is not authorized neither its spreading and availability from a site foreign to the TDX service. Introducing its content in a window or frame foreign to the TDX service is not authorized (framing). This rights affect to the presentation summary of the thesis as well as to its contents. In the using or citation of parts of the thesis it's obliged to indicate the name of the author

UNIVERSITAT POLITÈCNICA DE CATALUNYA
PROGRAMA DE DOCTORAT DE MATEMÀTICA APLICADA

DEPARTAMENT DE MATEMÀTICA APLICADA I

SUBESPACIOS HIPERINVARIANTES Y
CARACTERÍSTICOS: UNA APROXIMACIÓN
GEOMÉTRICA

M.EULÀLIA MONTORO LÓPEZ

Tesis Doctoral

Directores: Josep Ferrer-Llop
y Maria Dolors Magret Planas

Barcelona, Marzo 2015

*A la meva mare i a la meva tia, per estar sempre.
A la memòria del meu pare i del meu marit.
A David, per moltes coses.
A Mingu i a Lorens, per la seva amistat.
A Manuel, por darle color a mi vida.*

Agraïments

Vull expressar el meu agraïment a:

- Als meus directors de Tesi.
- Als meus companys del Departament d'Àlgebra i Geometría de la Universitat de Barcelona.
- Als meus companys del Departament de Matemàtica Aplicada I de la Universitat Politècnica de Catalunya.
- Als meus companys de recerca i d'àrea.
- A la meva família.
- Als meus companys del barri de Sants.

L'amistat duplica les alegries i divideix les angoixes per la meitat. Em considero una persona afortunada, al llarg de la meva vida m'he trobat moltes persones que m'han multiplicat les alegries i que m'han ajudat a minimitzar les angoixes. Per això vull aprofitar per donar les gràcies amb tot el meu cor als meus amics, per fer-me la vida més agradable i alegre i aguantar-me quan he sigut inaguantable.

Índice general

Agraïments	III
Índice general	v
Introducció	1
1 Preliminares	11
1.1. Formas canónicas para la semejanza de matrices	11
1.1.1. Primera descomposició	12
1.1.2. Forma canónica de Jordan	13
1.1.3. Forma canónica de Weyr	18
1.1.4. Deformaciones miniversales de Arnold	24
1.2. Subespacios invariantes	26
1.2.1. Definición y caracterizaciones	26
1.2.2. Propiedades estructurales	28
1.2.3. Subespacios marcados	30
2 Centralizadores de matrices de Weyr y de Jordan	35
2.1. Definiciones y descripción	35
2.1.1. Centralizador de una matriz de Weyr	36
2.1.2. Centralizador de una matriz de Jordan	39
2.1.3. El centralizador como deformación miniversal	42
2.2. Determinante de una matriz del centralizador	44
2.3. Descripción de imágenes por matrices del centralizador	49
2.3.1. Descripción de las imágenes de un vector	50
2.3.2. Descripción de la imagen de un subespacio marcado	55
<hr/>	
Subespacios hiperinvariantes y característicos: Una aproximación geométrica	v

3	Subespacios hiperinvariantes	57
3.1.	Subespacios hiperinvariantes y característicos	57
3.1.1.	Antecedentes	57
3.1.2.	Definición y caracterizaciones	59
3.1.3.	Propiedades estructurales	62
3.2.	Subespacios hiperinvariantes unidimensionales	64
3.2.1.	Caracterización mediante la característica de Weyr	64
3.2.2.	Caracterización mediante la característica de Segre	66
3.2.3.	Criterios para hiperinvariantes d -dimensionales .	69
3.3.	Caracterización general de los subespacios hiperinvariantes	70
3.3.1.	Caracterización mediante la característica de Weyr	71
3.3.2.	Caracterización mediante hipertuplas (de Segre) .	74
3.3.3.	Caracterización mediante estabilidad estructural .	76
3.4.	Hiperinvariantes con una hipertupla con valores prefijados	78
3.5.	Contando subespacios hiperinvariantes	82
3.5.1.	Contando hiperinvariantes de dimensión fija . . .	82
3.5.2.	Contando hipertuplas con valores prefijados . . .	86
4	Subespacios característicos no hiperinvariantes	95
4.1.	Introducción	95
4.2.	El subgrupo $Z^*(J)$	98
4.3.	Subespacios característicos no hiperinvariantes en $\text{GF}(2)$	99
4.3.1.	Criterios generales	99
4.3.2.	Chartuplas	101
4.3.3.	Hiperinvariantes asociados a una chartupla	101
4.3.4.	Subespacios minext	105
4.3.5.	Construcción de característicos no hiperinvariantes	106
4.4.	Contando subespacios característicos no hiperinvariantes	110
4.4.1.	Contando chartuplas	111
4.4.2.	Contando subespacios minext Z	113
4.4.3.	Contando hiperinvariantes asociados a chartupla .	118
	Bibliografía	127

Introducción

El objetivo principal de esta tesis es estudiar en profundidad los subespacios hiperinvariantes y característicos de una matriz, o equivalentemente, de un endomorfismo de un espacio vectorial de dimensión finita. Como en la mayor parte de la literatura sobre el tema, nos restringimos al caso de matrices A con polinomio característico totalmente descomponible, dejando para futuros trabajos la generalización a polinomios característicos con factores primos de grado superior a 1.

Los subespacios A -hiperinvariantes y A -característicos son subclases de los subespacios A -invariantes (aquellos que contienen su imagen por A), concepto clave en la teoría de matrices, así como en sus aplicaciones (por ejemplo, a sistemas dinámicos y a sistemas de control). Responden a la idea genérica de que sean también invariantes respecto a otras matrices relacionadas con A . Por ejemplo, es bien conocida la existencia de vectores propios (subespacios invariantes unidimensionales) comunes a dos matrices que conmutan. Concretamente, los subespacios A -hiperinvariantes son aquellos que también son invariantes para toda matriz que conmuta con A , mientras que a los A -característicos se les exige sólo que lo sean para las matrices inversibles que conmutan con A .

Ambos conceptos aparecen por primera vez a mediados de los años 30 dentro del contexto de la teoría de grupos. Pero no es hasta los años 70 en que empiezan a estudiarse como parte de la teoría de matrices. Concretamente en [12] se caracterizan los subespacios A -hiperinvariantes y se describe el retículo formado por tales subespacios. Posteriormente estos resultados son recogidos en [15] donde también se describen los subespacios hiperinvariantes en el caso de matrices $A \in M_n(\mathbb{R})$ con polinomio característico no necesariamente descomponible. En el año 2009 aparece un artículo de Astuti y Wimmer (ver [2]) donde se demuestra que en el caso de matrices $A \in M_n(\mathbb{F})$ con polinomio característico totalmente descomponible,

los subespacios característicos coinciden con los hiperinvariantes excepto si $\mathbb{F} = GF(2)$. En este caso, el Teorema de Shoda (ver [3]) da condiciones necesarias y suficientes para la existencia de subespacios característicos no hiperinvariantes. Pero la descripción de este tipo de subespacios era un problema abierto que resolvemos en esta tesis.

Nuestro primer objetivo, por tanto, será analizar (Capítulo 2) el comportamiento del centralizador de una matriz, (esto es, el conjunto de matrices que conmutan con ella), que supondremos en forma canónica (de Jordan o de Weyr). Concretamente, calculamos el determinante de las matrices de dichos centralizadores (ver [10]), lo que en particular, permite caracterizar las no singulares. Por otra parte, determinamos las imágenes de un subespacio vectorial dado respecto al conjunto de todas las matrices de dichos centralizadores, resultado que será clave para el posterior estudio de los subespacios hiperinvariantes.

Empezaremos dicho estudio (Capítulo 3), determinando condiciones para la existencia de subespacios hiperinvariantes 1-dimensionales (ver [22]). Más en general, usando los resultados mencionados en el párrafo anterior, caracterizamos los subespacios hiperinvariantes d -dimensionales asociándolos a las particiones triviales de la de Weyr, lo cual a su vez, permite una fácil demostración de la ya conocida asociada a ciertas particiones compatibles con la de Segre (que llamaremos “hipertuplas”). Estas caracterizaciones nos van a permitir contar explícitamente los subespacios hiperinvariantes de una dimensión dada, o los correspondientes a hipertuplas con algunos coeficientes prefijados, estos últimos serán utilizados en el último capítulo.

En la última parte de la tesis (Capítulo 4), abordamos el problema abierto de estudiar los subespacios característicos que no son hiperinvariantes, cuando existen (resultados de Astuti-Wimmer y Shoda ya mencionados). Concretamente damos una construcción explícita (ver [24]) a partir de un tipo de tuplas asociadas a ciertas subparticiones de la característica de Segre, que llamaremos “chartuplas”: a cada una de ellas asociamos dos clases de subespacios, de forma que los subespacios característicos no hiperinvariantes son precisamente las sumas directas de dos de ellos, uno de cada clase. Finalmente, a partir de esta construcción desarrollamos un algoritmo (ver [25]) que permite contar explícitamente el número de subespacios característicos no hiperinvariantes.

En toda la tesis trabajamos con matrices en forma canónica. El uso de éstas es habitual en la teoría de matrices, ya que presentan una estructura más simple y por lo tanto facilitan los cálculos a realizar. Para nuestro objetivo, dada una matriz nilpotente con coeficientes en un cuerpo \mathbb{F} cualquiera, $A \in M_n(\mathbb{F})$, usaremos, según corresponda en cada caso, su forma canónica de Jordan y de Weyr, que denotaremos por $J \in M_n(\mathbb{F})$ y por $W \in M_n(\mathbb{F})$,

respectivamente. Sobre la forma canónica de Jordan existe una amplia literatura y su uso es generalizado, mientras que la forma canónica de Weyr apenas ha sido explotada desde su descubrimiento, curiosamente unos años antes de la de Jordan. El paso de una forma canónica a otra se realiza mediante una reordenación de la base. El resultado de ello es que, si una matriz de Jordan queda determinada (para cada valor propio) por la partición llamada característica de Segre, la de Weyr lo es por la partición conjugada, llamada característica de Weyr. Ambas formas canónicas contienen, por tanto, la misma información, pero difieren en la forma, de modo que una u otra resulta más adecuada según el problema tratado. Así, para el estudio de los centralizadores hemos trabajado inicialmente con matrices en forma canónica de Weyr ya que su centralizador, que denotaremos por $Z(W)$, presenta una estructura de matriz triangular superior por bloques que facilita la obtención de fórmulas para la imagen respecto a las matrices de $Z(W)$ de un subespacio vectorial cualquiera. Ello permite ver más fácilmente qué tipo de subespacios les son invariantes, es decir, son hiperinvariantes para W . En general, en los últimos años parece haber resurgido el uso de esta forma canónica de Weyr (ver, por ejemplo, [21], [26] y [32]), que hasta ahora había sido relegada en un segundo plano respecto a la de Jordan.

Por otra parte, hemos ilustrado algunas definiciones y resultados mediante su aplicación a sistemas dinámicos o su relación con las llamadas deformaciones versales de Arnold. Finalmente, para los problemas de conteo hemos utilizado las técnicas de tabulación, así como las de polinomios generadores.

Esta tesis consta de cuatro capítulos, el contenido de los cuales va a ser detallado a continuación.

El Capítulo 1 lo dedicamos a recopilar conceptos y resultados ya conocidos, introduciendo la notación que va a ser utilizada a lo largo de toda la tesis. Tal y como hemos dicho anteriormente, partimos de una matriz $A \in M_n(\mathbb{F})$ con polinomio mínimo anulador de la forma:

$$m(t) = (t - \lambda_1)^{\alpha(1,1)} \dots (t - \lambda_r)^{\alpha(r,1)}. \quad (1)$$

El teorema de descomposición en suma directa de subespacios propios (Teorema 1.1.1), nos permitirá reducirnos al caso de matrices con un solo valor propio que podremos suponer 0. En definitiva podremos restringirnos al caso de matrices nilpotentes.

Las matrices con polinomio característico totalmente descomponible admiten representantes en forma canónica de Jordan, $J \in M_n(\mathbb{F})$ y en forma

canónica de Weyr, $W \in M_n(\mathbb{F})$. Usaremos la que más convenga para cada problema. Dada $A \in M_n(\mathbb{F})$, una matriz nilpotente, su característica de Segre $\alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_m)$ es la conjugada de $\omega = (\omega_1, \dots, \omega_{\alpha_1})$, con:

$$\omega_j = \dim \ker(A^j) - \dim \ker(A^{j-1}), \quad j = 1, \dots, \alpha_1, \quad (2)$$

llamada característica de Weyr. Su forma de Jordan queda determinada por α y es la que resulta en cualquier base de Jordan, esto es, de la forma (Teorema 1.1.5):

$$u_j, Au_j, \dots, A^{\alpha_j-1}u_j, \quad 1 \leq j \leq m, \quad (3)$$

con generadores u_1, \dots, u_m , de manera que

$$A^{\alpha_j}u_j = 0, \quad A^{\alpha_j-1}u_j \neq 0 \quad j = 1, \dots, m, \quad (4)$$

$$A^{\alpha_1-1}u_1, \dots, A^{\alpha_m-1}u_m, \text{ linealmente independientes.} \quad (5)$$

Aplicando un cambio de base, de hecho una reordenación, se obtiene la de Weyr, determinada por ω . Concretamente, tomamos como nueva base:

$$A^{\alpha_1-1}u_1, A^{\alpha_2-1}u_2, \dots, A^{\omega_1-1}u_{\omega_1}; \quad (6)$$

$$A^{\alpha_1-2}u_1, \dots, A^{\omega_2-2}u_{\omega_2}; \quad (7)$$

$$\dots, \dots, \dots;$$

$$u_1, \dots, u_{\omega_{\alpha_1}}. \quad (8)$$

Especificamos la matriz de cambio de base P que transforma una forma canónica en otra (Proposición 1.1.18).

La Sección 1.2 de este capítulo recoge los resultados básicos sobre subespacios A -invariantes, esto es, los subespacios V tales que $AV \subseteq V$. Tales subespacios admiten una descomposición en subespacios propios (Proposición 1.2.3) derivada de la anteriormente referida (Teorema 1.1.1), lo cual nos permite reducir al caso de matrices nilpotentes como habíamos anunciado. Los subespacios invariantes presentan una estructura de retículo, que denotaremos $\text{Inv}(A)$. Recordamos a su vez, distintas caracterizaciones conocidas (Proposición 1.2.5, Proposición 1.2.6 y Teorema 1.2.7), así como la descripción del retículo $\text{Inv}(A)$ (Subsección 1.2.2).

Finalmente, en la Subsección 1.2.3 se presentan un tipo especial de subespacios invariantes: los subespacios denominados “marcados”, esto es, aquellos que poseen una base de Jordan ampliable a una base de Jordan de todo el subespacio. Este tipo de subespacios juegan un papel importante en distintos problemas (ver [15]). Introducimos una notación para tales subespacios que nos será de utilidad para la descripción de los subespacios

hiperinvariantes, ya que estos son de hecho, un tipo especial de subespacios marcados (Teorema 3.1.14). Suponiendo $A \in M_n(\mathbb{F})$ con característica de Segre $\alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_{\omega_1})$ y fijada una base de Jordan con generadores u_1, \dots, u_{ω_1} , como en (3), denotaremos (Definición 1.2.21) como $V_{k_j}^j$ al subespacio vectorial generado por los últimos k_j vectores de la j -ésima cadena de Jordan, esto es, la j -ésima columna del diagrama de Young correspondiente:

$$V_{k_j}^j = \text{span}\{A^{\alpha_j - k_j}u_j, \dots, A^{\alpha_j - 1}u_j\}, \quad (9)$$

y escribiremos:

$$V(k_1, \dots, k_{\omega_1}) = V_{k_1}^1 \oplus \dots \oplus V_{k_{\omega_1}}^{\omega_1}. \quad (10)$$

Es evidente que tales subespacios son marcados y recíprocamente, que todo subespacio marcado puede escribirse en esa forma para una cierta base de Jordan.

Análogamente, si $\omega = (\omega_1, \dots, \omega_{\alpha_1})$ es la característica de Weyr, denotaremos (Definición 1.2.24) como $\tilde{V}_{l_j}^j$ al subespacio vectorial generado por los primeros l_j vectores de la fila j -ésima del diagrama de Young correspondiente:

$$\tilde{V}_{l_j}^j = \text{span}\{J^{\alpha_1 - j}u_1, \dots, J^{\alpha_j - j}u_{l_j}\}, \quad (11)$$

y escribiremos:

$$\tilde{V}(l_1, \dots, l_{\alpha_1}) = \tilde{V}_{l_1}^1 \oplus \dots \oplus \tilde{V}_{l_{\alpha_1}}^{\alpha_1}. \quad (12)$$

Observemos (Observación 1.2.26) que $\tilde{V}(l_1, \dots, l_{\alpha_1})$ es marcado si $l_1 \geq \dots \geq l_{\alpha_1}$ y que en este caso las dos notaciones son compatibles por conjugación, es decir, si $(k_1, \dots, k_{\omega_1})$ es la partición conjugada de $(l_1, \dots, l_{\alpha_1})$, se tiene que:

$$\tilde{V}(l_1, \dots, l_{\alpha_1}) = V(k_1, \dots, k_{\omega_1}). \quad (13)$$

El Capítulo 2 está dedicado al estudio del centralizador de una matriz dada (con polinomio característico totalmente descomponible como venimos suponiendo). En la Sección 2.1 recordamos la descripción de los centralizadores de sus formas canónicas de Weyr y de Jordan (Proposición 2.1.1 y Teorema 2.1.8). Empezamos por el centralizador de una matriz de Weyr $Z(W)$ (Subsección 2.1.1), ya que las matrices de $Z(W)$ presentan una estructura de matriz triangular por bloques que permite calcular de forma natural su determinante. Aunque toda matriz $T \in Z(J)$ es equivalente a una $K \in Z(W)$, el cálculo de $\det T$ no se sigue directamente del de $\det K$, puesto que no se dispone de una relación explícita entre los coeficientes de ambas, de forma que, hasta el momento no se conocía una fórmula para el

cálculo de $\det T$. La Sección 2.2 está dedicada a la obtención de una fórmula para dicho determinante $\det T$, que demostramos comparando el número de parámetros independientes y comprobando la coincidencia de la fórmula cuando los restantes se anulan (Teorema 2.2.7 y [10]).

La última parte del capítulo (Sección 2.3) describe la reunión de los subespacios imágenes de un subespacio vectorial marcado respecto a las matrices del centralizador. Ello es especialmente clave en nuestra construcción, ya que recordemos que estamos estudiando subespacios invariantes respecto a todas las matrices del centralizador. Calculamos pues, (Teorema 2.3.11):

$$\bigcup \{K\tilde{V}(l_1, \dots, l_{\alpha_1}), K \in Z(W)\}, \quad (14)$$

para $l_1 \geq \dots \geq l_{\alpha_1}$. Para ello, el elemento clave (Lema 2.3.10) es que para matrices de Weyr nilpotentes $W \in M_n(\mathbb{F})$, resulta:

$$\bigcup \{K\tilde{V}_{l_j}^j, K \in Z(W)\} = \tilde{V}(\omega_{\alpha_{l_j-j+1}}, \dots, \omega_{\alpha_{l_j}}, 0, \dots, 0). \quad (15)$$

De ahí, para matrices de Jordan nilpotentes $J \in M_n(\mathbb{F})$ (Corolario 2.3.9):

$$\bigcup \{TV_{k_j}^j \mid T \in Z(J)\} = V(k_j, \dots, \overset{(j)}{k_j}, \alpha_{j+1} - \alpha_j + k_j, \dots, \alpha_{\omega_1} - \alpha_j + k_j). \quad (16)$$

El Capítulo 3 se dedica al estudio de los subespacios A -hiperinvariantes, que denotaremos por $\text{Hinv}(A)$, que según ya hemos dicho son aquellos subespacios $V \in \text{Inv}(A)$ tales que también son B -invariantes para toda $B \in Z(A)$, esto es, para toda matriz B que conmuta con A . En cambio, para que $V \in \text{Inv}(A)$ sea A -característico basta con que sea B -invariante para toda $B \in Z^*(A)$, esto es, para toda matriz B inversible que conmuta con A . A estos últimos los denotaremos por $\text{Chinv}(A)$. Obviamente:

$$\text{Hinv}(A) \subseteq \text{Chinv}(A) \subseteq \text{Inv}(A). \quad (17)$$

Como ya hemos hecho notar, la restricción a matrices B inversibles sólo resulta significativa para $\mathbb{F} = GF(2)$, ya que ([3]):

$$\text{Hinv}(A) = \text{Chinv}(A) \text{ , si } \mathbb{F} \neq GF(2). \quad (18)$$

Al igual que $\text{Inv}(A)$, también $\text{Hinv}(A)$ forma un retículo cuyas propiedades recordamos en la Subsección 3.1.3.

Nuestro primer objetivo es caracterizar y describir los subespacios de $\text{Hinv}(A)$ utilizando las notaciones introducidas en el capítulo. En la Sección 3.2 estudiamos el caso particular de dimensión 1, esto es, vectores

proprios comunes a las matrices de $Z(A)$ (Teorema 3.2.1 y Teorema 3.2.4). En la Sección 3.3 lo generalizamos a dimensiones superiores. En ambos casos partimos de matrices en forma canónica de Weyr, debido a que la descripción de estos subespacios resulta más sencilla para tales matrices y de ella se deriva la correspondiente a matrices en forma canónica de Jordan. Concretamente tenemos que, para $A \in M_n(\mathbb{F})$ nilpotente, los subespacios de $\text{Hinv}(A)$ son de la forma (Teorema 3.3.2):

$$\tilde{V}(\omega_{j_1}, \dots, \omega_{j_k}, 0, \dots, 0), \quad (19)$$

$$1 \leq j_1 < \dots < j_k \leq \alpha_1. \quad (20)$$

O equivalentemente (Teorema 3.3.6):

$$V(k_1, \dots, k_m), \quad (21)$$

$$k_1 \geq \dots \geq k_m \geq 0, \quad (22)$$

$$\alpha_1 - k_1 \geq \dots \geq \alpha_m - k_m \geq 0. \quad (23)$$

A las particiones (k_1, \dots, k_m) de este tipo las denominamos hipertuplas. Remarcamos que (ver [12]), de hecho, hay una biyección entre subespacios hiperinvariantes e hipertuplas, quedando estos unívocamente determinados a partir de las hipertuplas.

Esta segunda caracterización de los subespacios hiperinvariantes por característica de Segre ya era conocida (ver [12]), pero en nuestro caso se ha obtenido a partir de la de Weyr, que resulta más intuitiva y que no había sido estudiada hasta ahora.

Identificar cada subespacio hiperinvariante con una hipertupla resulta tremendamente útil para el conteo de estos, que abordamos en la Sección 3.5. En [12] se obtiene el número total de subespacios hiperinvariantes en función de la partición α . Nosotros contamos, en la Subsección 3.5.1 los de cada dimensión y en la Subsección 3.5.2 aquellos con algunos valores fijados en su hipertupla asociada, los cuales van a jugar un papel relevante en nuestra descripción de los subespacios característicos no hiperinvariantes en el último capítulo. En el primer caso hemos identificado este problema con el conteo de soluciones para una determinada ecuación diofántica (Lema 3.5.2), cuya solución a su vez está asociada a los coeficientes de un cierto polinomio generador (Teorema 3.5.3). Para el segundo caso hemos demostrado, en primer lugar, que por concatenación podemos reducir el conteo al caso en que como máximo dos de los coeficientes estén prefijados. Para este caso particular, obtenemos una fórmula de recurrencia (Lema 3.5.9) que permite tabular los resultados (Teorema 3.5.11 y Tabla 3.4) y nuevamente reducirnos a la obtención de un coeficiente de un polinomio generador (Corolario 3.5.19).

En el Capítulo 4 se describen los subespacios característicos no hiperinvariantes, lo que constituye uno de nuestros objetivos centrales. Como ya hemos dicho, trabajaremos con matrices con coeficientes en el cuerpo $\mathbb{F} = GF(2)$, ya que este es el único cuerpo sobre el cual existen tales subespacios (ver [2]). El punto de partida para nuestra descripción es la condición necesaria y suficiente para que efectivamente $\text{Hinv}(A) \neq \text{Chinv}(A)$ en $GF(2)$, dada por Shoda en [35]: la existencia de r y s con $s > r + 1$ tales que la matriz $J \in M_n(GF(2))$ tenga exactamente un bloque de Jordan de tamaño r y uno de tamaño s .

Vemos por tanto que, para describir los subespacios $X \in \text{Chinv}(A) \setminus \text{Hinv}(A)$ los elementos únicos en la característica de Segre de A son claves. Es por ello que definimos el siguiente subconjunto (Definición 4.3.4) de los índices de $\alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_m)$ que corresponden a bloques de tamaño único:

$$\Omega = \{1 \leq i_1 < \dots < i_l \leq m : \alpha_{i_j} \text{ es único}\}. \quad (24)$$

Además, de entre los bloques de J de tamaño único, interesan los que difieran como mínimo 2, por lo que consideraremos subfamilias $\Omega_t \subseteq \Omega$ de manera que el tamaño de los bloques correspondientes difiera al menos en 2 (Definición 4.3.7):

$$\begin{aligned} \Omega_t = \{i_1, \dots, i_t\} \subseteq \Omega, \quad t \geq 2, \quad 1 \leq i_1 < i_2 < \dots < i_t \leq m, \\ \alpha_{i_1} \geq 2 + \alpha_{i_2}, \dots, \alpha_{i_{t-1}} \geq 2 + \alpha_{i_t}. \end{aligned} \quad (25)$$

El punto de partida de nuestra caracterización se encuentra en la Subsección 4.4.1 y son las hipertuplas “estrictas” relativas a bloques con subíndices en un $\Omega_t = \{i_1, \dots, i_t\}$ fijado. Esto es, $b = (b_{i_1}, \dots, b_{i_t})$ de manera que (Definición 4.3.7):

$$\begin{aligned} b_{i_1} > b_{i_2} > \dots > b_{i_t} > 0, \\ \alpha_{i_1} - b_{i_1} > \alpha_{i_2} - b_{i_2} > \dots > \alpha_{i_t} - b_{i_t} \geq 0. \end{aligned} \quad (26)$$

A las b de esta forma las llamaremos chartuplas.

A partir de cada chartupla definiremos dos tipos de subespacios Y, Z de forma que $Y \oplus Z \in \text{Chinv}(J) \setminus \text{Hinv}(J)$. La idea es que Y pertenezca a un cierto tipo de subespacios hiperinvariantes, que dejan de serlo al ampliarlos mediante suma directa con los Z (que impondremos sean “minimales”), pero manteniendo la condición de característicos. Dichos tipos Y, Z son introducidos en las Subsecciones 4.3.3 y 4.3.4 respectivamente.

Más concretamente, si $J \in M_n(GF(2))$ es una matriz de Jordan nilpotente con característica de Segre $\alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_m)$ y $b = (b_{i_1}, \dots, b_{i_t})$ es una

chartupla asociada a Ω_t , los subespacios Y son los hiperinvariantes de la forma:

$$Y = V(k_1, \dots, k_{i_1-1}, b_{i_1} - 1, k_{i_1+1}, \dots, \dots, k_{i_2-1}, b_{i_2} - 1, k_{i_2+1}, \dots, k_{i_t-1}, b_{i_t} - 1, k_{i_t+1}, \dots, k_m), \quad (27)$$

con la condición de que también sea hiperinvariante:

$$V(k_1, \dots, k_{i_1-1}, b_{i_1}, k_{i_1+1}, \dots, \dots, k_{i_2-1}, b_{i_2}, k_{i_2+1}, \dots, k_{i_t-1}, b_{i_t}, k_{i_t+1}, \dots, k_m), \quad (28)$$

A tales subespacios los denominamos hiperinvariantes asociados a b (Definición 4.3.12).

Los subespacios Z se definen como los que, para:

$$z_j = J^{\alpha_{i_j} - b_{i_j}} u_{i_j}, \quad 1 \leq j \leq t,$$

verifican las tres condiciones siguientes:

1. $z \in Z \Rightarrow z = z_{i_1} + \dots + z_{i_p}$ con $1 \leq i_1 < i_2 < \dots < i_p \leq i_t$, $p \leq t$.
2. $z_j \notin Z$, para $j = 1, \dots, t$.
3. Cada z_j es sumando para algún $z \in Z$, es decir

$$\dim(\text{span}\{z_1, \dots, \hat{z}_j, \dots, z_t\} + Z) = t, \quad \forall j = 1, \dots, t.$$

A tales subespacios los denominamos minext asociados a b (Definición 4.3.15)

La Subsección 4.3.5 está dedicada a nuestro teorema central (Teorema 4.3.18) que afirma que los subespacios construidos de esta forma, esto es, como suma directa de un hiperinvariante y un minext asociados a una chartupla, son precisamente todos los característicos no hiperinvariantes. Concluimos (Corolario 4.3.19):

Corolario ([24]). *Para $J \in M_n(GF(2))$ nilpotente, $X \in \text{Chinv}(J) \setminus \text{Hinv}(J)$ si y sólo si $X = Z \oplus Y$ para algún Z, Y definidos como antes; es decir, si existe una chartupla de forma que Z e Y son, respectivamente, un subespacio minext y un subespacio hiperinvariante asociados a ella.*

La sección final del capítulo está dedicada a contar los subespacios $X \in \text{Chinv}(J) \setminus \text{Hinv}(J)$. Este contaje lo realizamos en tres pasos. En primer lugar, en la Subsección 4.4.1, contamos el número de chartuplas (Lema 4.4.1). Este contaje se resuelve considerando una chartupla como

una hipertupla “estricta” y adaptando los resultados ya conocidos para el número total de hipertuplas. En la Subsección 4.4.2, contamos el número de subespacios minext Z para cada chartupla que se obtiene por recurrência (Teorema 4.4.14) con coeficientes variables, y con el término independiente expresado en función de los llamados coeficientes binomiales gaussianos. Hemos usado el paquete matemático Maple para programarla y poder así tabularla. En la Subsección 4.4.3, contamos el número de subespacios Y asociados a una chartupla. Partiendo de los resultados obtenidos en la Subsección 3.5.2 y procediendo como allí por concatenación, obtenemos este cardinal (Lema 4.4.19) como producto de cardinales parciales (Proposición 4.4.22, Corolario 4.4.30 y Teorema 4.4.31) en términos de las Tablas 3.4. Nuevamente estos resultados pueden remitirse a los coeficientes de ciertos polinomios generadores (Corolario 4.4.33).

Capítulo 1

Preliminares

1.1. FORMAS CANÓNICAS PARA LA SEMEJANZA DE MATRICES

En la presente sección recordaremos las bien conocidas formas canónicas de Jordan y de Weyr, fijando las notaciones que vamos a utilizar en lo que sigue. Asimismo, a partir de la característica de Segre, introducimos nuevas particiones que vamos a necesitar en nuestras construcciones (Definición 1.1.9).

Dado \mathbb{F} un cuerpo arbitrario, consideremos E un espacio vectorial sobre \mathbb{F} de dimensión n y $f \in \text{End}(E)$ un endomorfismo, esto es,

$$f : E \longrightarrow E \tag{1.1}$$

lineal. Para cada base de E , f tiene una representación matricial $A \in M_n(\mathbb{F})$, tomando como columnas las coordenadas en dicha base de las imágenes de los vectores de la misma. Por abuso de notación escribiremos

$$f(v) \equiv Av, \tag{1.2}$$

suponiendo el vector v y su imagen expresados en la base correspondiente. Es bien sabido que si $\bar{A} \in M_n(\mathbb{F})$ es la matriz en otra base, existe una matriz invertible de cambio de base $S \in GL_n(\mathbb{F})$ de manera que

$$\bar{A} = S^{-1}AS \tag{1.3}$$

diciéndose que A y \bar{A} son *semejantes*. Ello define una relación de equivalencia en el conjunto $M_n(\mathbb{F})$, que puede ser así particionado en clases de semejanza. Una “forma canónica” para tales clases puede verse como un

representante especialmente sencillo y significativo que queda determinado por una familia de invariantes de la equivalencia y al cual puede ser reducida cualquier otra matriz de la clase mediante algoritmos simples. Con ello, dos matrices son semejantes si se reducen a la misma forma canónica considerada.

En este capítulo nos vamos a referir a las formas canónicas llamadas de Jordan y de Weyr, que resultan inmediatamente de las características de Segre y de Weyr respectivamente. Ambas son familias completas de invariantes clasificatorios y fácilmente calculables una a partir de otra como veremos (por conjugación). Puede decirse, por tanto, que ambas formas canónicas contienen la misma información pero difieren en su representación, de manera que en cada caso puede resultar más útil una u otra, en función de las operaciones a realizar o de los resultados a deducir.

En todo lo que sigue nos limitaremos a considerar matrices $A \in M_n(\mathbb{F})$ que admiten una forma canónica de Jordan/Weyr, esto es, cuyo polinomio característico descomponga totalmente. En particular si \mathbb{F} es un cuerpo algebraicamente cerrado, ello ocurre para toda matriz $A \in M_n(\mathbb{F})$.

1.1.1. Primera descomposición

Supongamos por tanto que el *polinomio característico* de A , $\det(A - tI_n)$, descompone totalmente en potencias de factores primos de grado 1, esto es, que sus raíces (*valores propios*) pertenecen a \mathbb{F} . En tal caso la bien conocida “primera descomposición” de E en suma directa de subespacios propios generalizados ($\ker P_i^n(A)$, donde $P_i(t)$ es un factor primo del polinomio característico), se simplifica en la siguiente forma:

Teorema 1.1.1. (*Primera descomposición*) Sea $A \in M_n(\mathbb{F})$ con polinomio mínimo anulador:

$$m(t) = (t - \lambda_1)^{\alpha(1,1)} \dots (t - \lambda_r)^{\alpha(r,1)}. \quad (1.4)$$

Se verifica:

1. Los subespacios propios generalizados resultan:

$$E_i = \ker(A - \lambda_i I_n)^n = \ker(A - \lambda_i I_n)^{\alpha(i,1)}, \quad i = 1, \dots, r. \quad (1.5)$$

2. Para $i = 1, \dots, r$, E_i es A -invariante (esto es, $AE_i \subseteq E_i$).

3. $E = E_1 \oplus \dots \oplus E_r$.

Esta descomposición va a permitir en muchos casos reducir nuestro estudio a matrices con un solo valor propio, que además podremos suponer 0. En definitiva, podremos restringirnos a matrices A nilpotentes.

1.1.2. Forma canónica de Jordan

La forma canónica de Jordan apareció descrita por primera vez en 1870 en el libro de Camille Jordan “Treatise on substitutions and algebraic equations” para el caso $\mathbb{F} = GF(p)$, esto es, si \mathbb{F} es un cuerpo finito de orden un primo p .

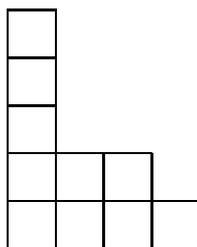
Como detallamos a continuación, una matriz de Jordan es una matriz diagonal por bloques, cada uno de los cuales (bloque de Jordan) tiene los elementos de la diagonal iguales a un mismo valor λ (un valor propio) y los de la subdiagonal iguales a 1. La característica de Segre es el conjunto de los valores propios junto con, para cada uno de ellos, los tamaños de los bloques de Jordan en los que figura. Dada una matriz de Jordan, la característica de Segre queda determinada de forma única, y recíprocamente, salvo reordenamientos de los bloques de Jordan.

Veremos también que la característica de Weyr es la partición conjugada de la de Segre (y recíprocamente). Recordemos que la *partición conjugada* $\omega = (\omega_1, \dots, \omega_{\alpha_1})$ de una partición $\alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_m)$ dada se define como:

$$\omega_j = \#\{i = 1, \dots, m : \alpha_i \geq j\}. \quad (1.6)$$

Es útil representarlas mediante los llamados *diagramas de Young*, donde α son las columnas y ω las filas.

Ejemplo 1.1.2. Dada la partición $\alpha = (5, 2, 2, 1)$ tenemos que $\omega = (4, 3, 1, 1, 1)$. Estas particiones vienen dadas respectivamente por la longitud de las columnas y las filas del siguiente diagrama de Young:



Definición 1.1.3. (1) Un *bloque de Jordan* es una matriz triangular inferior de la forma:

$$\begin{bmatrix} \lambda & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 1 & \lambda & \dots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & \lambda & 0 \\ 0 & 0 & \dots & 1 & \lambda \end{bmatrix}. \quad (1.7)$$

- (2) Una *matriz de Jordan* $J \in M_n(\mathbb{F})$ es una matriz diagonal por bloques de Jordan. Si agrupamos las que tienen un mismo valor diagonal, resulta

$$J = \begin{bmatrix} J(\lambda_1) & & \\ & \ddots & \\ & & J(\lambda_r) \end{bmatrix} \in M_n(\mathbb{F}) \quad (1.8)$$

con λ_i , $1 \leq i \leq r$, los distintos valores propios de J , y

$$J(\lambda_i) = \begin{bmatrix} J_1(\lambda_i) & & \\ & \ddots & \\ & & J_{m_i}(\lambda_i) \end{bmatrix}, \quad 1 \leq i \leq r, \quad (1.9)$$

donde

$$J_j(\lambda_i) = \begin{bmatrix} \lambda_i & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 1 & \lambda_i & \dots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & \lambda_i & 0 \\ 0 & 0 & \dots & 1 & \lambda_i \end{bmatrix} \in M_{\alpha(i,j)}(\mathbb{F}), \quad 1 \leq j \leq m_i \quad (1.10)$$

son las también llamadas *matrices básicas de Jordan*.

- (3) Para cada valor propio λ_i , $1 \leq i \leq r$, consideraremos que los bloques de Jordan correspondientes a $J(\lambda_i)$ están ordenados en orden decreciente respecto a su tamaño, esto es, $\alpha(i, 1) \geq \dots \geq \alpha(i, m_i)$, donde $\alpha(i, j)$ es el tamaño del bloque j correspondiente al valor propio λ_i . En particular, la partición

$$(\alpha(i, 1), \dots, \alpha(i, m_i)) \quad (1.11)$$

es la *característica de Segre* de J relativa a λ_i .

- (4) Es fácil ver que dicha partición es la conjugada de

$$(\omega(i, 1), \dots, \omega(i, q_i)) \quad (1.12)$$

donde

$$\omega(i, j) = \dim \ker(J - \lambda_i I_n)^j - \dim \ker(J - \lambda_i I_n)^{j-1}, \quad j = 1, \dots, q_i \quad (1.13)$$

llamada *característica de Weyr* de J relativa a λ_i . En particular,

$$m_i = \omega(i, 1), \quad (1.14)$$

$$\alpha(i, 1) = q_i. \quad (1.15)$$

El resultado fundamental es que toda matriz que tenga los valores propios coincidentes y la misma característica de Segre (Weyr) para cada uno, es reducible por cambio de base a J :

Teorema 1.1.4. (*Forma canónica de Jordan*) Sea $A \in M_n(\mathbb{F})$ con polinomio característico totalmente descomponible, con valores propios $\lambda_1, \dots, \lambda_r$ como antes. Si para cada uno, las características de Segre (Weyr) coinciden con las anteriores, esto es,

$$\dim \ker(A - \lambda_i I_n)^j = \dim \ker(J - \lambda_i I_n)^j, \quad j = 0, 1, \dots \quad (1.16)$$

entonces existe una matriz invertible de cambio de base $S \in GL_n(\mathbb{F})$ tal que:

$$J = S^{-1}AS. \quad (1.17)$$

Se dice entonces que J es la forma canónica de Jordan de A , estando bien definida salvo reordenamientos en los bloques $J(\lambda_1), \dots, J(\lambda_r)$.

Cualquier base en que la matriz tenga esta forma canónica se llama *base de Jordan*, que describiremos a continuación.

Como ya habíamos dicho, a partir de la primera descomposición (Teorema 1.1.1) es inmediato ver que podemos reducir nuestro estudio al caso en que A tenga un único valor propio, que además podemos suponer 0. Por consiguiente, en el resto del apartado supondremos A nilpotente.

Teorema 1.1.5. (*Bases de Jordan*) Si A es una matriz de Jordan nilpotente, escribiremos su característica de Segre simplemente como:

$$\alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_m). \quad (1.18)$$

Es decir, $m = \dim \ker(A)$, y $\alpha_1 \geq \dots \geq \alpha_m$ denotan los tamaños de los bloques de Jordan. Toda base de Jordan está formada por cadenas de Jordan:

$$u_j, Au_j, \dots, A^{\alpha_j-1}u_j, \quad 1 \leq j \leq m, \quad (1.19)$$

con generadores

$$u_1, \dots, u_m, \quad (1.20)$$

que han de verificar

$$A^{\alpha_j}u_j = 0, \quad A^{\alpha_j-1}u_j \neq 0 \quad j = 1, \dots, m, \quad (1.21)$$

y

$$A^{\alpha_1-1}u_1, \dots, A^{\alpha_m-1}u_m, \quad (1.22)$$

linealmente independientes.

Resulta intuitivo visualizar las bases de Jordan en un diagrama de Young, disponiendo las cadenas de Jordan por columnas, como muestra el siguiente ejemplo.

Ejemplo 1.1.6. Para $\alpha = (3, 3, 2, 2, 1)$, las bases de Jordan se presentan como:

u_1	u_2				
Au_1	Au_2	u_3	u_4	u_5	
A^2u_1	A^2u_2	Au_3	Au_4	Au_5	u_6

Observación 1.1.7. Si $\lambda \neq 0$ es el único valor propio de A , las bases de Jordan resultan de sustituir A por $A - \lambda I_n$ en las cadenas de Jordan anteriores.

Definición 1.1.8. En las condiciones del Teorema 1.1.5:

- (1) Para cada vector $w \in E$, $w \neq 0$, su *altura* (exponente en [2]) $p = \text{height}(w) \geq 1$ y su *profundidad* $q = \text{depth}(w)$ se definen como

$$\begin{aligned} \text{height}(w) = p &\Leftrightarrow w \in \ker A^p, \quad w \notin \ker A^{p-1}, \\ \text{depth}(w) = q &\Leftrightarrow w \in \text{Im } A^q, \quad w \notin \text{Im } A^{q+1}. \end{aligned}$$

En particular, $\text{height}(A^k u_j) = \alpha_j - k$ y $\text{depth}(A^k u_j) = k$.

- (2) Escribiremos como V^1, \dots, V^m los correspondientes subespacios monogénicos,

$$E = V^1 \oplus \dots \oplus V^m, \quad V^j = \text{span}\{u_j, Au_j, \dots\}.$$

A veces nos será de utilidad agrupar los subespacios monogénicos en función de su dimensión, para lo cual introducimos las siguientes particiones.

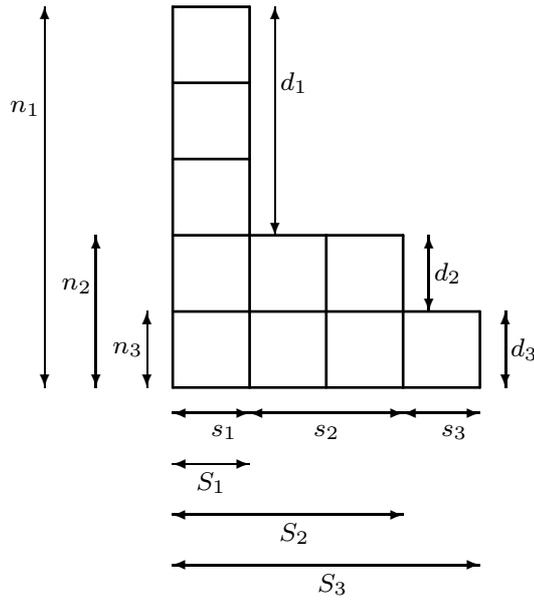
Definición 1.1.9. Si $n_1 > \dots > n_\tau$ son los distintos valores de la partición α y s_1, \dots, s_τ denota cuantas veces cada valor n_1, \dots, n_τ se repite en α , definimos las siguientes *tuplas asociadas a α* :

$$\begin{aligned} N(\alpha) &= (n_1, \dots, n_\tau), \\ S(\alpha) &= (s_1, \dots, s_\tau), \\ D(\alpha) &= (d_1, d_2, \dots, d_{\tau-1}, d_\tau), \end{aligned} \tag{1.23}$$

con $d_i = n_i - n_{i+1}$, $1 \leq i \leq \tau - 1$ y $d_\tau = n_\tau$.

Ejemplo 1.1.10. Si $\alpha = (5, 2, 2, 1)$, entonces $\tau = 3$, $N(\alpha) = (5, 2, 1)$, $S(\alpha) = (1, 2, 1)$, $D(\alpha) = (3, 1, 1)$. Esto puede visualizarse en el siguiente diagrama de Young (donde $\alpha_1, \alpha_2, \dots$ están representadas por las alturas de las columnas).

$$\alpha = (5, 2, 2, 1)$$



Usando la notación anterior:

$$E = U^1 \oplus \dots \oplus U^\tau, \tag{1.24}$$

$$U^1 = V^1 \oplus \dots \oplus V^{s_1}, U^2 = V^{s_1+1} \oplus \dots \oplus V^{s_1+s_2}, \dots \tag{1.25}$$

De forma análoga:

$$J = \begin{bmatrix} J_1 & & \\ & \ddots & \\ & & J_m \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \bar{J}_1 & & \\ & \ddots & \\ & & \bar{J}_\tau \end{bmatrix}, \tag{1.26}$$

donde $J_i \in M_{\alpha_i}(\mathbb{F}), i = 1 \dots, m$, son las correspondientes matrices básicas de Jordan. Y

$$\bar{J}_1 = \begin{bmatrix} J_1 & & \\ & \ddots & \\ & & J_{s_1} \end{bmatrix}, \quad \bar{J}_2 = \begin{bmatrix} \bar{J}_{s_1+1} & & \\ & \ddots & \\ & & \bar{J}_{s_1+s_2} \end{bmatrix}, \dots \tag{1.27}$$

Ejemplo 1.1.11. Para $\alpha = (3, 3, 2, 2, 2, 1)$, como en el Ejemplo 1.1.6 tenemos

$$U^1 = V^1 \oplus V^2, \quad U^2 = V^3 \oplus V^4 \oplus V^5, \quad U^3 = V^6, \quad (1.28)$$

$$J = \begin{bmatrix} J_1 & & \\ & \ddots & \\ & & J_6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \bar{J}_1 & & \\ & \bar{J}_2 & \\ & & \bar{J}_3 \end{bmatrix}, \quad (1.30)$$

$$\bar{J}_1 = \begin{bmatrix} J_1 & \\ & J_2 \end{bmatrix} = \left[\begin{array}{ccc|ccc} 0 & 0 & 0 & & & \\ 1 & 0 & 0 & & & \\ 0 & 1 & 0 & & & \\ \hline & & & 0 & 0 & 0 \\ & & & 1 & 0 & 0 \\ & & & 0 & 1 & 0 \end{array} \right], \quad (1.32)$$

$$\bar{J}_2 = \begin{bmatrix} J_3 & & \\ & J_4 & \\ & & J_5 \end{bmatrix} = \left[\begin{array}{cc|ccc} 0 & 0 & & & \\ 1 & 0 & & & \\ \hline & & 0 & 0 & \\ & & 1 & 0 & \\ \hline & & & & 0 & 0 \\ & & & & 1 & 0 \end{array} \right], \quad (1.34)$$

$$\bar{J}_3 = [J_6] = [0]. \quad (1.36)$$

1.1.3. Forma canónica de Weyr

La forma de Weyr fue introducida por el matemático checo Eduard Weyr en 1885. Esta forma ha sido redescubierta de forma periódica bajo distintos nombres como: forma de Jordan modificada, forma de Jordan reordenada, segunda forma de Jordan y H-forma. En particular, la forma de Weyr fue redescubierta por G. Belitskii con la motivación de encontrar una forma canónica con la propiedad de que toda matriz que conmutase con ella fuese triangular superior por bloques, ver [4] y [31]. En [32] y [26], pueden encontrarse exposiciones modernas acerca de esta forma así como numerosas aplicaciones. Empezamos considerando el caso de una matriz $A \in M_n(\mathbb{F})$ con un único valor propio λ y característica de Segre α .

Usando propiedades elementales de los diagrama de Young de la Definición 1.1.9, resulta el siguiente lema:

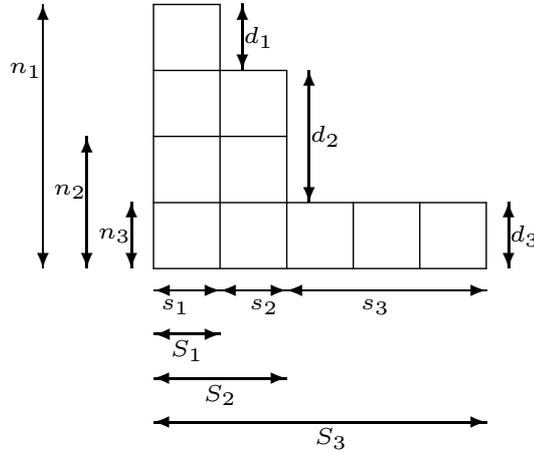
Lema 1.1.12. *Sea $A \in M_n(\mathbb{F})$ una matriz con un solo valor propio, y sean α y ω sus características de Segre y de Weyr respectivamente. Con las notaciones de la Definición 1.1.9 resulta que:*

$$\begin{aligned} N(\omega) &= (S_\tau, S_{\tau-1}, \dots, S_1) \\ S(\omega) &= (d_\tau, d_{\tau-1}, \dots, d_1) \\ D(\omega) &= (s_\tau, \dots, s_1) \end{aligned} \tag{1.37}$$

donde $S_i = \sum_{j=1}^i s_j$.

Ejemplo 1.1.13. Para α como en el Ejemplo 1.1.10: $\omega = (4, 3, 1, 1, 1)$, $N(\omega) = (4, 3, 1)$, $S(\omega) = (1, 1, 3)$ y $D(\omega) = (1, 2, 1)$.

$$\omega = (4, 3, 1, 1, 1)$$



Reordenando una base de Jordan por alturas crecientes y para una misma altura, profundidades decrecientes (ver Ejemplo 1.1.17) se obtiene la llamada forma canónica de Weyr.

Teorema 1.1.14. *(Forma canónica de Weyr) Dada una matriz $A \in M_n(\mathbb{F})$ con un único valor propio λ y con característica de Segre $\alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_m)$, conjugada de la de Weyr, $\omega = (\omega_1, \dots, \omega_{\alpha_1})$. Entonces, reordenando adecuadamente una base de Jordan, se obtiene la matriz $W \in M_n(\mathbb{F})$ particionada por $(\alpha_1)^2$ bloques $W_{i,j} \in M_{\omega_i \times \omega_j}(\mathbb{F})$ de la siguiente forma:*

1. Los bloques de la diagonal principal, $W_{i,i}$ son matrices escalares $\omega_i \times \omega_i$:

$$\lambda I_{\omega_i}, \quad (1.38)$$

para $i = 1, \dots, \alpha_1$.

2. Los primeros bloques de la superdiagonal $W_{i,i+1}$ son de la forma:

$$W_{i,i+1} = \begin{bmatrix} I_{\omega_{i+1}} \\ \mathbb{O} \end{bmatrix} \in M_{\omega_i \times \omega_{i+1}}(\mathbb{F}), \quad (1.39)$$

para $i = 1, \dots, \alpha_1 - 1$.

3. Todos los otros bloques son la matriz nula.

Definición 1.1.15. A la matriz W definida como en el teorema anterior la llamaremos *forma canónica de Weyr* de A .

Observación 1.1.16. Una diferencia importante entre la forma de Jordan y la de Weyr es que si consideramos una matriz de Jordan con un único valor propio λ , esta matriz es de hecho una suma (directa) de matrices de Jordan básicas. Esto en cambio no es cierto si consideramos una matriz en forma de Weyr.

Ejemplo 1.1.17. Siguiendo con el Ejemplo 1.1.10:

$$W = \left[\begin{array}{cccc|cccc} \lambda & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \lambda & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 & 0 & \lambda & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \lambda & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \lambda & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \lambda & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \lambda \\ \hline 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \lambda \end{array} \right]$$

En este caso si consideramos una base de Jordan asociada a J :

u_1			
$(A - \lambda I_n)u_1$			
$(A - \lambda I_n)^2u_1$			
$(A - \lambda I_n)^3u_1$	u_2	u_3	
$(A - \lambda I_n)^4u_1$	$(A - \lambda I_n)u_2$	$(A - \lambda I_n)u_3$	u_4

La matriz W resulta en la base

$$(A - \lambda I_n)^4u_1, (A - \lambda I_n)u_2, (A - \lambda I_n)u_3, u_4, (A - \lambda I_n)^3u_1, u_2, u_3, (A - \lambda I_n)^2u_1, (A - \lambda I_n)u_1, u_1.$$

En general, las bases de Weyr resultan de reordenar las bases de Jordan “por filas” en vez de “por columnas”: se ordenan las filas de “abajo a arriba”, y en cada una de ellas, los vectores de izquierda a derecha.

Proposición 1.1.18. (*Bases de Weyr*)

(1) Para $\alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_m)$ y $\omega = (\omega_1, \dots, \omega_{\alpha_1})$, tenemos que si una base de Jordan viene dada por:

$$u_1, (A - \lambda I_n)u_1, \dots, (A - \lambda I_n)^{\alpha_1 - 1}u_1; \tag{1.40}$$

$$u_2, (A - \lambda I_n)u_2, \dots, (A - \lambda I_n)^{\alpha_2 - 1}u_2; \tag{1.41}$$

..., ..., ...;

$$u_m, (A - \lambda I_n)u_m, \dots, (A - \lambda I_n)^{\alpha_m - 1}u_m, \tag{1.42}$$

entonces, la reordenación de la base anterior que da como resultado la matriz de Weyr es (recordemos que $m = \omega_1$):

$$(A - \lambda I_n)^{\alpha_1 - 1} u_1, (A - \lambda I_n)^{\alpha_2 - 1} u_2, \dots, (A - \lambda I_n)^{\alpha_{\omega_1} - 1} u_{\omega_1}; \quad (1.43)$$

$$(A - \lambda I_n)^{\alpha_1 - 2} u_1, \dots, (A - \lambda I_n)^{\alpha_{\omega_2} - 2} u_{\omega_2}; \quad (1.44)$$

$\dots, \dots, \dots;$

$$u_1, \dots, u_{\omega_{\alpha_1}}. \quad (1.45)$$

(2) La matriz resultante W se puede escribir:

$$W = P^t J P, \quad (1.46)$$

donde $P = [p_{i,j}]_{1 \leq i,j \leq n} \in GL_n(\mathbb{F})$ es una matriz de permutaciones con todos los coeficientes nulos excepto los siguientes que son iguales a 1 (recordemos que $\alpha_1 + \dots + \alpha_m = \omega_1 + \dots + \omega_{\alpha_1} = n$):

$$\begin{array}{ccc} p_{\alpha_1,1} & p_{\alpha_1-1,\omega_1+1} & \dots \quad p_{1,\omega_1+\dots+\omega_{\alpha_1-1}+1} \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ \vdots & \vdots & p_{1,n} \\ p_{\alpha_1+\dots+\alpha_i,i} & p_{\alpha_1+\dots+\alpha_{\omega_2}-1,\omega_1+\omega_2} & \\ \vdots & & \\ p_{n,\omega_1} & & \end{array} \quad (1.47)$$

Ejemplo 1.1.19. Para $\alpha = (5, 2, 2, 1)$ y $\omega = (4, 3, 1, 1, 1)$, la matriz P tiene como elementos no nulos e iguales a 1:

$$\begin{array}{cccccc} p_{5,1} & p_{4,5} & p_{3,8} & p_{2,9} & p_{1,10} & \\ p_{7,2} & p_{6,6} & & & & \\ p_{9,3} & p_{8,7} & & & & \\ p_{10,4} & & & & & \end{array} \quad (1.48)$$

y por lo tanto:

$$P = \left[\begin{array}{cccc|cccc|c|c|c} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right] \quad (1.49)$$

Hemos notado V^1, V^2, \dots , los subespacios generados por cada columna del diagrama de Young. Análogamente, notamos $\tilde{V}^1, \tilde{V}^2, \dots$ los generados por cada fila.

Definición 1.1.20. Escribiremos como $\tilde{V}^1, \dots, \tilde{V}^{\alpha_1}$ los siguientes subespacios

$$E = \tilde{V}^1 \oplus \dots \oplus \tilde{V}^{\alpha_1}, \quad \tilde{V}^j = \text{span}\{(A - \lambda I_n)^{\alpha_1 - j} u_1, \dots, (A - \lambda I_n)^{\alpha_{\omega_j} - j} u_{\omega_j}\}.$$

Para el caso general en que $A \in M_n(\mathbb{F})$ tenga más de un valor propio, su forma canónica de Weyr $W \in M_n(\mathbb{F})$ será de la forma:

Definición 1.1.21. (1) Una *matriz de Weyr* es una matriz diagonal por bloques de Weyr. Si agrupamos los que tienen un mismo valor diagonal, resulta:

$$W = \begin{bmatrix} W(\lambda_1) & & \\ & \ddots & \\ & & W(\lambda_r) \end{bmatrix} \in M_n(\mathbb{F}), \quad (1.50)$$

con λ_i , $1 \leq i \leq r$, los distintos valores propios de W , y

$$W(\lambda_i) = \begin{bmatrix} W_1(\lambda_i) & & \\ & \ddots & \\ & & W_{q_i}(\lambda_i) \end{bmatrix}, \quad 1 \leq i \leq r, \quad (1.51)$$

donde $W_j(\lambda_i)$ son matrices básicas de Weyr definidas como en el Teorema 1.1.14.

(2) Para cada valor propio λ_i , $1 \leq i \leq r$, consideraremos que los bloques de Weyr correspondientes a $W(\lambda_i)$ están ordenados en orden decreciente respecto a su tamaño, esto es, $\omega(i, 1) \geq \dots \geq \omega(i, q_i)$, donde $\omega(i, j)$ es el tamaño del bloque j correspondiente al valor propio λ_i .

En particular, la partición:

$$\omega(i, 1) \geq \dots \geq \omega(i, q_i) \quad (1.52)$$

es la característica de Weyr de W relativa a λ_i .

1.1.4. Deformaciones miniversales de Arnold

La reducción de una matriz a su forma de Jordan (o de Weyr) es una operación inestable en el sentido de que pequeñas perturbaciones en los coeficientes de la matriz pueden provocar cambios sustanciales en su tipo de semejanza.

Ejemplo 1.1.22. Si consideramos la familia de matrices:

$$A(\varepsilon) = \begin{bmatrix} 0 & \varepsilon \\ 1 & 0 \end{bmatrix}, \quad (1.53)$$

su forma reducida de Jordan para $\varepsilon = 0$ es:

$$A(0) = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}, \quad (1.54)$$

(esto es, un nodo degenerado) mientras que para $\varepsilon \neq 0$ es:

$$J(\varepsilon) = \begin{bmatrix} \sqrt{\varepsilon} & 0 \\ 0 & -\sqrt{\varepsilon} \end{bmatrix}, \varepsilon \neq 0, \quad (1.55)$$

(esto es, una silla para $\varepsilon > 0$ y un centro para $\varepsilon < 0$).

En 1971, Arnold abordó esta inestabilidad en el caso $\mathbb{F} = \mathbb{C}$, mediante la noción de deformación versal. En primer lugar vamos a recordar tal definición (ver [1], [36]).

Definición 1.1.23. Dada la variedad diferenciable $\mathcal{M} = M_n(\mathbb{C})$, una *deformación* $\varphi(t)$ de $A_0 \in \mathcal{M}$ es una aplicación diferenciable de la forma:

$$\varphi : \mathcal{U}_0 \longrightarrow \mathcal{M}, \quad (1.56)$$

de manera que $\mathcal{U}_0 \subseteq \mathbb{C}^l$ es un entorno abierto del origen y $\varphi(0) = A_0$. A $t = (t_1, \dots, t_l)$ los llamaremos *parámetros de la deformación*.

Definición 1.1.24. Una deformación $\varphi(t)$ de A_0 se dice que es *versal* si cualquier otra deformación $\psi(u)$ de A_0 , donde $u = (u_1, \dots, u_k) \in \mathcal{U}'_0 \subset \mathbb{C}^k$, puede escribirse en algún entorno del origen como:

$$\psi(u) = S^{-1}(u)\varphi(\theta(u))S(u), \quad u \in \mathcal{U}''_0 \subset \mathcal{U}'_0, \quad (1.57)$$

donde

$$\theta : \mathcal{U}''_0 \longrightarrow \mathbb{C}^l \quad (1.58)$$

y

$$S : \mathcal{U}_0'' \longrightarrow GL_n(\mathbb{C}) \quad (1.59)$$

son aplicaciones diferenciables tales que $\theta(0) = 0$ y $S(0) = I_n$. Las deformaciones versales con un número mínimo de parámetros se denominan *miniversales*.

Es decir, una deformación es versal cuando cualquier otra deformación es equivalente a la inducida por ella a través de una aplicación diferenciable de parámetros. Las deformaciones versales, por tanto, permiten conocer las posibles matrices resultantes de perturbar la matriz central A_0 . Más en general, facilitan el estudio de singularidades, diagramas de bifurcaciones,...

El punto clave de la teoría de Arnold es ver las clases de equivalencia como órbitas respecto a la acción de un grupo de Lie sobre una variedad diferenciable, de manera que resultan ser subvariedades diferenciables de la misma. En nuestro caso, está claro que las clases de semejanza son las órbitas respecto a la acción de conjugación:

Lema 1.1.25. *El grupo $\mathcal{G} = GL_n(\mathbb{C})$ actúa diferenciablemente sobre $\mathcal{M} = M_n(\mathbb{C})$ mediante:*

$$\alpha : \mathcal{G} \times \mathcal{M} \longrightarrow \mathcal{M}, \quad (1.60)$$

$$\alpha(S, A) = S^{-1}AS, \quad (1.61)$$

de modo que la órbita de A coincide con su clase de semejanza:

$$\mathcal{O} = \{S^{-1}AS, \quad S \in \mathcal{G}\}. \quad (1.62)$$

Del teorema de la órbita cerrada (ver [18]) se deduce el siguiente resultado:

Proposición 1.1.26. *En las condiciones del lema anterior, toda clase de semejanza es una subvariedad diferenciable localmente cerrada de \mathcal{M} y su frontera es la unión de clases de equivalencia (u órbitas) de dimensión estrictamente inferior. En particular, las clases de equivalencia (u órbitas) de dimensión mínima son cerradas.*

Esta interpretación de las clases de equivalencia permite la siguiente caracterización de las deformaciones versales/miniversales que culmina esta técnica de Arnold.

Teorema 1.1.27 ([1]). *Una deformación $\varphi(t)$ de $A_0 \in M_n(\mathbb{C})$ es versal si y sólo si es transversa en A_0 a la órbita de A_0 , es decir:*

$$T_{\varphi(0)}\mathcal{M} = T_{\varphi(0)}\mathcal{O}(A_0) + \text{Im } d\varphi_0. \quad (1.63)$$

En particular, es miniversal si la anterior suma es directa.

Observación 1.1.28. Del teorema anterior se sigue que el número de parámetros de cualquier deformación miniversal de A_0 coincide con la codimensión de la órbita $\mathcal{O}(A_0)$. Más en general, localmente en A_0 , \mathcal{M} es difeomorfo al producto cartesiano de $\mathcal{O}(A_0)$ por $\varphi(\mathcal{U}_0)$.

Observación 1.1.29. Las anteriores definiciones y resultados se generalizan de forma natural a otros espacios y relaciones de equivalencia. Véase, por ejemplo, [36], [7] y [11].

1.2. SUBESPACIOS INVARIANTES

1.2.1. Definición y caracterizaciones

En primer lugar, recordemos la definición de subespacio invariante para el caso de una aplicación lineal $f \in \text{End}(E)$ con matriz asociada A en una base de E .

Definición 1.2.1. Dado f un endomorfismo de E , sea A su matriz en una cierta base. Un subespacio vectorial $V \subseteq E$ se dice que es *f-invariante* (*A-invariante*) si:

$$f(V) \subseteq V \quad (AV \subseteq V). \quad (1.64)$$

Escribiremos $\text{Inv}(A)$ el conjunto de tales subespacios.

Observación 1.2.2. Por abuso de notación, designaremos también por V las matrices cuyas columnas forman una base del subespacio V . Con ello, la definición anterior puede reescribirse de la forma siguiente: un subespacio vectorial V es un subespacio *A-invariante* si y sólo si existe una matriz X tal que

$$AV = VX. \quad (1.65)$$

Si $S^{-1}AS = J$, entonces un subespacio V es *A-invariante* si y sólo si $S^{-1}V$ es *J-invariante*. Por lo tanto podemos reducirnos al caso de matrices de Jordan. Por otra parte, la propiedad siguiente permite reducirnos al caso de un solo valor propio, que podemos suponer 0 sin pérdida de generalidad.

Proposición 1.2.3 ([15]). *En las condiciones del Teorema 1.1.1, todo subespacio vectorial A-invariante V descompone en una suma directa de la forma:*

$$V = (V \cap E_1) \oplus \dots \oplus (V \cap E_r), \quad (1.66)$$

siendo $V \cap E_i$ invariante respecto a $A|_{E_i}$.

Definición 1.2.4. Dado $V \subset E$ un subespacio f -invariante, se define la *restricción* de f a V :

$$f_0 : V \longrightarrow V \quad (1.67)$$

de forma natural mediante $f_0(x) = f(x)$, $\forall x \in V$. También diremos que f es una *extensión* de f_0 .

La siguiente caracterización matricial resulta inmediatamente de la Definición 1.2.1.

Proposición 1.2.5. (*Caracterización matricial*) Sea $A \in M_n(\mathbb{F})$ y V un subespacio vectorial tal que $\dim(V) = d$. Entonces, V es A -invariante si y sólo si, en toda base S adaptada a V (esto es, una base de E obtenida por ampliación de una de V) es

$$A' = S^{-1}AS = \begin{bmatrix} A_1 & A_2 \\ \mathbb{O} & A_3 \end{bmatrix}, \quad (1.68)$$

donde $A_1 \in M_d(\mathbb{F})$ es la matriz asociada a la restricción.

Del resultado anterior se sigue la siguiente caracterización dinámica.

Proposición 1.2.6. (*Caracterización dinámica*) Consideremos el sistema dinámico lineal:

$$\dot{x}(t) = Ax(t) \quad (1.69)$$

con $A \in M_n(\mathbb{R})$. Entonces, un subespacio V es A -invariante si y sólo si se cumple:

$$x(0) \in V \Rightarrow x(t) \in V, \quad \forall t. \quad (1.70)$$

Otra caracterización de los subespacios invariantes es el siguiente teorema debido a Halmos.

Teorema 1.2.7 ([16]). Sea $A \in M_n(\mathbb{C})$ que admite reducida de Jordan. Todo subespacio A -invariante V puede escribirse como:

$$V = \ker B = \operatorname{Im} C, \quad (1.71)$$

siendo $B, C \in Z(A)$, esto es, matrices que conmutan con A .

1.2.2. Propiedades estructurales

La suma y la intersección de subespacios A -invariantes es también A -invariante, con lo que $\text{Inv}(A)$ es un retículo. En efecto, recordemos que se define un *retículo* como un conjunto parcialmente ordenado de manera que para todo par de elementos L_1 y L_2 podemos definir una intersección (máxima cota inferior), que escribimos $L_1 \cap L_2$, y una unión (mínima cota superior), que escribimos $L_1 + L_2$. Por tanto, $\text{Inv}(A)$ es un retículo respecto a la ordenación parcial de la inclusión. El retículo $\text{Inv}(A)$ está ampliamente descrito en [5]: $\text{Inv}(A)$ es un retículo que tiene elemento cero $\{0\}$ y elemento unidad E de manera que para todo $L \in \text{Inv}(A)$, $\{0\} \subset L \subset E$. En todo lo que sigue consideraremos retículos que tienen elemento cero y elemento unidad.

Observación 1.2.8. Dado un retículo \mathcal{L} , al invertir su relación de orden se obtiene también un retículo llamado *retículo dual*.

Definición 1.2.9. Un retículo \mathcal{L} diremos que es:

- a) *complementado* si para todo $L_1 \in \mathcal{L}$ existe al menos un elemento $L_2 \in \mathcal{L}$ tal que:

$$L_1 \cap L_2 = \{0\} \quad \text{y} \quad L_1 + L_2 = E. \quad (1.72)$$

- b) *distributivo* si y sólo si:

$$\forall L_1, L_2, L_3 \in \mathcal{L}, \quad L_1 \cap (L_2 + L_3) = (L_1 \cap L_2) + (L_1 \cap L_3). \quad (1.73)$$

- c) *modular* si y sólo si la identidad anterior se cumple siempre que

$$L_1 \subset L_3. \quad (1.74)$$

- d) *autodual* si y sólo si es isomorfo a su retículo dual.

Definición 1.2.10. Diremos que un retículo es un *álgebra booleana* si y sólo si es distributivo y complementado.

Observación 1.2.11. El retículo formado por todos los subespacios vectoriales de E es modular, por lo tanto también lo es el subretículo de los subespacios invariantes $\text{Inv}(A)$, siendo A la matriz de un endomorfismo de E en una base cualquiera.

Lema 1.2.12 ([5]). *Para el retículo $\text{Inv}(A)$ se cumple que:*

1. $\text{Inv}(A)$ es autodual.
2. $\text{Inv}(A)$ es distributivo si y sólo si A es cíclica (esto es, $E = \text{span}\{v, Av, \dots\}$).
3. $\text{Inv}(A)$ es un álgebra booleana si y sólo si A es cíclica y diagonaliza.

Teorema 1.2.13 ([5]). Sea $B \in M_n(\mathbb{F})$ tal que $B \in Z(A)$. Entonces $\text{Inv}(A) \subset \text{Inv}(B)$ si y sólo si B es un polinomio en A .

Observación 1.2.14. En el caso de que A y B no conmuten, el teorema anterior también se cumple cuando los polinomios mínimos de A y B coinciden.

En cuanto a la estructura diferenciable, resulta natural particionar $\text{Inv}(A)$ según la dimensión del subespacio invariante, de modo que cada parte es un subconjunto de la grassmaniana correspondiente:

$$\text{Inv}(A) = \bigcup_d \text{Inv}_d(A), \quad \text{Inv}_d(A) \subset \text{Gr}_d(E). \quad (1.75)$$

Con todo, en [33] se prueba que $\text{Inv}_d(A)$ no es una variedad diferenciable regular sino una variedad estratificada, agrupando en cada estrato los subespacios con una misma forma de Jordan de la restricción.

Proposición 1.2.15. Sea $A \in M_n(\mathbb{C})$ una matriz nilpotente con característica de Segre $\alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_m)$. Si designamos por $\alpha' = (\alpha'_1, \dots, \alpha'_{m'})$ las posibles características de Segre de la restricción a un subespacio invariante y por $\text{Inv}_d(A, \alpha')$ al conjunto de los subespacios invariantes con dicha restricción, entonces $\text{Inv}_d(A)$ es una variedad estratificada:

$$\text{Inv}_d(A) = \bigcup_{\alpha'} \text{Inv}_d(A, \alpha'), \quad (1.76)$$

donde cada estrato $\text{Inv}_d(A, \alpha')$ resulta ser una variedad diferenciable de dimensión:

$$\dim \text{Inv}_d(A, \alpha') = \sum_{i=1}^{\alpha'_1} \omega'_i (\omega_i - \omega'_i), \quad (1.77)$$

siendo $\omega = (\omega_1, \dots, \omega_{\alpha_1})$, $\omega' = (\omega'_1, \dots, \omega'_{\alpha'_1})$ las particiones conjugadas de α y de α' respectivamente.

Superando esa dificultad, en [7] se considera el conjunto de parejas (A, V) , con V un subespacio A -invariante de dimensión d :

Teorema 1.2.16. *El conjunto*

$$\{(A, V) : V \text{ } A\text{-invariante}, \dim V = d\} \subset M_n(\mathbb{C}) \times Gr_d(E) \quad (1.78)$$

es una variedad diferenciable de dimensión n^2 .

De manera natural se define la siguiente relación de equivalencia

Definición 1.2.17.

$$(A, V) \sim (A', V') \Leftrightarrow V' = S^{-1}V, \quad A' = S^{-1}AS, \quad (1.79)$$

para algún $S \in GL_n(\mathbb{C})$.

Representantes significativos de cada clase pueden obtenerse, por ejemplo, exigiendo $S^{-1}AS = J$ de Jordan o bien $S^{-1}V = \begin{bmatrix} I_d \\ \mathbb{O} \end{bmatrix}$.

Siguiendo las técnicas de Arnold (ver 1.1.4) tenemos el siguiente resultado.

Proposición 1.2.18. *Las anteriores clases de equivalencia coinciden con las órbitas de la acción del grupo lineal $GL_n(\mathbb{C})$ mediante:*

$$S \times (A, V) \longrightarrow (S^{-1}AS, S^{-1}V). \quad (1.80)$$

En particular, dichas clases son subvariedades diferenciables.

1.2.3. Subespacios marcados

Los subespacios marcados fueron introducidos en [15] como un tipo especialmente interesante de subespacios invariantes.

Definición 1.2.19. En las condiciones de la Definición 1.2.4, V se dice *marcado* si existe una base de Jordan de la restricción f_0 que puede ser ampliada a una base de Jordan de f . Escribiremos $\text{Mark}(A)$ el conjunto de tales subespacios.

Como consecuencia de la Proposición 1.2.3, tenemos que:

$$V \text{ es marcado} \Leftrightarrow V \cap E_i \equiv V \cap \ker(A - \lambda_i I_n)^n \text{ es marcado}, \quad (1.81)$$

para $1 \leq i \leq r$. Por tanto podemos considerar el caso en que A tiene un único valor propio, el cual podemos suponer 0 sin pérdida de generalidad.

Ejemplo 1.2.20. Si consideramos una matriz $A \in M_n(\mathbb{F})$ nilpotente, y una base de Jordan formada por las cadenas:

$$u_j, Au_j, \dots, A^{\alpha_j-1}u_j, \quad 1 \leq j \leq m. \quad (1.82)$$

Entonces, todo subespacio generado por “subcadenas”

$$A^{k_j}u_j, \dots, A^{\alpha_j-1}u_j, \quad 1 \leq j \leq m, \quad (1.83)$$

es marcado.

Más en general, la siguiente definición permite una descripción explícita de los subespacios marcados.

Definición 1.2.21. Sea $\alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_{\omega_1})$ la característica de Segre de una matriz nilpotente $A \in M_n(\mathbb{F})$. Se dice que $(k_1, \dots, k_{\omega_1})$ es una tupla *admisibile* si $0 \leq k_j \leq \alpha_j$. En tal caso, fijada una base de Jordan con generadores u_1, \dots, u_{ω_1} , escribiremos como $V_{k_j}^j$ al subespacio vectorial generado por los últimos k_j vectores de la cadena de Jordan correspondiente:

$$V_{k_j}^j = \text{span}\{A^{\alpha_j-k_j}u_j, \dots, A^{\alpha_j-1}u_j\}. \quad (1.84)$$

Asimismo escribimos:

$$V(k_1, \dots, k_{\omega_1}) = V_{k_1}^1 \oplus \dots \oplus V_{k_{\omega_1}}^{\omega_1}. \quad (1.85)$$

Podemos considerar el caso en que k_j sea negativo, mediante:

$$V_{k_j}^j = 0, \quad \text{si } k_j \leq 0. \quad (1.86)$$

Ejemplo 1.2.22. Si α es como en el Ejemplo 1.1.11, entonces:

$$V(2, 1, 1, 0, 0, 1) = \text{span}\{Ju_1, J^2u_1, J^2u_2, Ju_3, u_6\}.$$

Es evidente que:

Proposición 1.2.23. Para $A \in M_n(\mathbb{F})$ nilpotente con característica de Segre $\alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_{\omega_1})$. Los subespacios marcados son los de la forma:

$$V(k_1, \dots, k_{\omega_1}), \quad (1.87)$$

siendo $(k_1, \dots, k_{\omega_1})$ una tupla *admisibile*.

De forma análoga a la Definición 1.2.21, tenemos:

Definición 1.2.24. En las condiciones de la Definición 1.2.21, sea $\omega = (\omega_1, \dots, \omega_{\alpha_1})$ la característica de Weyr y $(l_1, \dots, l_{\alpha_1})$ una tupla admisible, esto es, $0 \leq l_j \leq \omega_j$. En tal caso, escribiremos como $\tilde{V}_{l_j}^j$ al subespacio vectorial generado por los primeros l_j vectores de la fila j -ésima del diagrama de Young correspondiente:

$$\tilde{V}_{l_j}^j = \text{span}\{A^{\alpha_1-j}u_1, \dots, A^{\alpha_j-j}u_{l_j}\}, \quad (1.88)$$

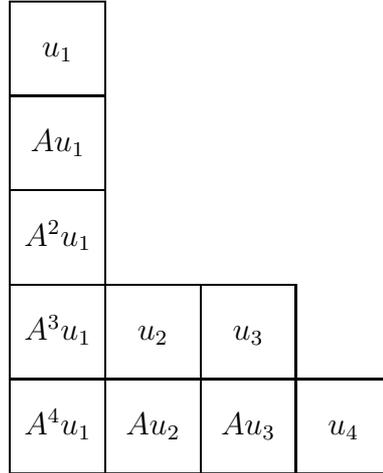
y escribimos:

$$\tilde{V}(l_1, \dots, l_{\alpha_1}) = \tilde{V}_{l_1}^1 \oplus \dots \oplus \tilde{V}_{l_{\alpha_1}}^{\alpha_1}. \quad (1.89)$$

Podemos considerar el caso en que l_j sea negativo, mediante:

$$\tilde{V}_{l_j}^j = 0, \quad \text{si } l_j \leq 0. \quad (1.90)$$

Ejemplo 1.2.25. Para $\omega = (4, 3, 1, 1, 1)$,



tenemos que:

$$\begin{aligned} \tilde{V}(2, 1, 0, 0, 0) &= \tilde{V}_2^1 \oplus \tilde{V}_1^2 \oplus \tilde{V}_0^3 \oplus \tilde{V}_0^4 \oplus \tilde{V}_0^5 = \\ &= \text{span}\{A^4u_1, Au_2\} \oplus \text{span}\{A^3u_1\}. \end{aligned}$$

Observación 1.2.26. 1. Observemos que $\tilde{V}(l_1, \dots, l_{\alpha_1}) \in \text{Inv}(A)$ si y sólo si $l_1 \geq l_2 \geq \dots \geq l_{\alpha_1}$.

2. Entonces, si:

$$l_1 \geq \dots \geq l_{\alpha_1}, \quad k_1 \geq \dots \geq k_{\omega_1}, \quad (1.91)$$

son particiones conjugadas (compatibles con las características de Weyr/Segre), se tiene:

$$\tilde{V}(l_1, \dots, l_{\alpha_1}) = V(k_1, \dots, k_{\omega_1}). \quad (1.92)$$

3. En particular,

$$E = V(\alpha_1, \dots, \alpha_{\omega_1}) = \tilde{V}(\omega_1, \dots, \omega_{\alpha_1}). \quad (1.93)$$

Asimismo, tenemos que:

Lema 1.2.27. *En las condiciones de las Definiciones 1.2.21 y 1.2.24:*

$$V(\alpha_j, \dots, \alpha_j, \alpha_{j+1}, \dots, \alpha_{\omega_1}) = \quad (1.94)$$

$$= \tilde{V}(\omega_1, \dots, \omega_{\alpha_j}, 0, \dots, 0) = \ker W^{\alpha_j}. \quad (1.95)$$

Demostración. Es evidente que $\ker W^{\alpha_j} = \{v \in E \mid \text{height}(v) \leq \alpha_j\}$, y estos vectores son precisamente aquellos que están en las α_j filas inferiores del diagrama de Young correspondiente. \square

Perturbando los subespacios marcados, se obtienen ejemplos típicos de subespacios invariantes no marcados.

Ejemplo 1.2.28. Si consideramos la siguiente matriz:

$$J = \left[\begin{array}{ccc|c} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right].$$

El subespacio:

$$V = \text{span} \{e_2 + \varepsilon e_4, e_3\}, \quad \varepsilon \neq 0$$

es J -invariante pero no es J -marcado. En efecto, si V fuese J -marcado, dado que toda base de Jordan ha de ser de la forma:

$$\{v_1, Jv_1, J^2v_1, v_4\},$$

de manera que $J^3v_1 = Jv_4 = 0$, entonces forzosamente:

$$e_2 + \varepsilon e_4 = Jv_1,$$

pero esto es una contradicción ya que $e_2 + \varepsilon e_4 \notin \text{Im}(J)$.

Teorema 1.2.29 ([15]). *Sea $A \in M_n(\mathbb{F})$ una matriz tal que para todo valor propio de A , λ se cumple al menos una de estas dos condiciones:*

1. $\dim \ker(A - \lambda I_n)$ coincide con la multiplicidad algebraica de λ .
2. $\dim \ker(A - \lambda I_n) = 1$.

Entonces, todo subespacio A -invariante es marcado.

En general, $\text{Mark}(A)$ no es un retículo tal y como muestra el siguiente ejemplo.

Ejemplo 1.2.30. Si consideramos la siguiente matriz de Jordan:

$$J = \left[\begin{array}{ccc|cc|c} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right].$$

Los subespacios:

$$V_1 = \text{span} \{e_4, e_5\},$$

$$V_2 = \text{span} \{e_2 + e_6, e_3\},$$

son marcados. Sin embargo, usando un razonamiento similar al del ejemplo anterior, tenemos que el subespacio

$$V_1 + V_2 = \text{span} \{e_4, e_5, e_2 + e_6, e_3\}$$

no es marcado.

Finalmente, el siguiente teorema muestra como la descripción de los subespacios invariantes marcados puede reducirse al caso de los subespacios invariantes marcados con respecto a una base fijada de Jordan.

Teorema 1.2.31 ([15]). *Sea $J \in M_n(\mathbb{F})$ una matriz de Jordan. Todo subespacio J -marcado V puede escribirse como $V = TM$, donde M es un subespacio marcado respecto a la base canónica y $T \in Z(J)$, esto es, $TJ = JT$.*

Centralizadores de matrices de Weyr y matrices de Jordan

2.1. DEFINICIONES Y DESCRIPCIÓN

Dada una matriz $A \in M_n(\mathbb{F})$, se define su *centralizador* $Z(A)$ como el conjunto de matrices que conmutan con A , esto es, $Z(A) = \{B \in M_n(\mathbb{F}) \mid BA = AB\}$. Es fácil demostrar que $Z(A)$ es un subespacio vectorial sobre \mathbb{F} . Asimismo escribiremos $Z^*(A)$ para denotar las matrices inversibles del centralizador de A . En particular, $Z^*(A)$ tiene estructura de grupo multiplicativo.

Es inmediato ver que si $S^{-1}AS = \bar{A}$, entonces

$$B \in Z(A) \Leftrightarrow S^{-1}BS \in Z(\bar{A}). \quad (2.1)$$

Podemos pues limitarnos a estudiar los centralizadores de formas canónicas \bar{A} . Lo haremos para formas canónicas de Weyr y formas canónicas de Jordan. En ambos casos, si

$$\bar{A} = \begin{bmatrix} \bar{A}(\lambda_1) & & \\ & \ddots & \\ & & \bar{A}(\lambda_r) \end{bmatrix}, \quad (2.2)$$

siendo $\lambda_1, \dots, \lambda_r$ los diferentes valores propios de A , entonces

$$\bar{B} \in Z(\bar{A}) \Leftrightarrow \bar{B} = \begin{bmatrix} \bar{B}(\lambda_1) & & & \\ & \ddots & & \\ & & \ddots & \\ & & & \bar{B}(\lambda_r) \end{bmatrix}, \quad (2.3)$$

$\bar{B}(\lambda_i) \in Z(\bar{A}(\lambda_i))$, $i = 1, \dots, r$. Con lo cual podemos restringirnos a matrices con un único valor propio.

2.1.1. Centralizador de una matriz de Weyr

En problemas relacionados con la conmutatividad de matrices suele ser más simple el uso de la forma canónica de Weyr respecto a la forma canónica de Jordan. Esto es debido al hecho de que toda matriz que conmuta con una matriz en forma de Weyr es triangular superior por bloques. Además las identidades entre bloques son más simples. Estos hechos son recogidos en el Teorema de Belitskii ([4], [17]), el cual enunciamos en el caso en que $W \in M_n(\mathbb{F})$ tenga un único valor propio.

Proposición 2.1.1 ([26]). *Si $W \in M_n(\mathbb{F})$ es una matriz de Weyr, con valor propio λ y característica de Weyr $\omega = (\omega_1, \dots, \omega_{\alpha_1})$, entonces todas las matrices $K \in Z(W)$ pueden escribirse de la forma:*

$$K = \begin{bmatrix} K_{1,1} & K_{1,2} & \dots & K_{1,\alpha_1} \\ \mathbb{O} & K_{2,2} & \dots & K_{2,\alpha_1} \\ \vdots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \mathbb{O} & \dots & \mathbb{O} & K_{\alpha_1,\alpha_1} \end{bmatrix}, \quad (2.4)$$

donde los bloques $K_{i,\alpha_1} \in M_{\omega_i \times \omega_{\alpha_1}}(\mathbb{F})$ son arbitrarios, y el resto de los bloques $K_{i,j} \in M_{\omega_i \times \omega_j}(\mathbb{F})$, para $1 \leq i \leq j < \alpha_1$, satisfacen:

1. Si $\omega_i = \omega_{i+1}$ y $\omega_j = \omega_{j+1}$, entonces

$$K_{i,j} = K_{i+1,j+1}. \quad (2.5)$$

2. Si $\omega_i = \omega_{i+1}$ y $\omega_j > \omega_{j+1}$, entonces

$$K_{i,j} = \begin{bmatrix} K_{i+1,j+1} & P \end{bmatrix}, \quad (2.6)$$

donde $P \in M_{\omega_i \times (\omega_j - \omega_{j+1})}(\mathbb{F})$ es una matriz arbitraria.

3. Si $\omega_i > \omega_{i+1}$ y $\omega_j = \omega_{j+1}$, entonces

$$K_{i,j} = \begin{bmatrix} K_{i+1,j+1} \\ \mathbb{O} \end{bmatrix}, \quad (2.7)$$

donde $\mathbb{O} \in M_{(\omega_i - \omega_{i+1}) \times \omega_j}(\mathbb{F})$.

4. Si $\omega_i > \omega_{i+1}$ y $\omega_j > \omega_{j+1}$, entonces

$$K_{i,j} = \begin{bmatrix} K_{i+1,j+1} & P \\ \mathbb{O} & Q \end{bmatrix}, \quad (2.8)$$

donde $P \in M_{\omega_{i+1} \times (\omega_j - \omega_{j+1})}(\mathbb{F})$ y $Q \in M_{(\omega_i - \omega_{i+1}) \times (\omega_j - \omega_{j+1})}(\mathbb{F})$ son dos matrices arbitrarias.

Ejemplo 2.1.2. Siendo α como en el Ejemplo 1.1.10, tenemos que $\omega = (4, 3, 1, 1, 1)$. Entonces:

$$K = \begin{array}{c} \left[\begin{array}{cccc|cccc|c|c|c} y_2 & y_{15} & y_{16} & y_{28} & y_1 & y_{27} & y_{17} & & y_{10} & y_3 & y_{18} \\ 0 & y_4 & y_5 & y_{19} & 0 & y_{20} & y_{21} & & 0 & y_6 & y_{22} \\ 0 & y_7 & y_8 & y_{23} & 0 & y_{24} & y_{25} & & 0 & y_9 & y_{26} \\ 0 & 0 & 0 & y_{11} & 0 & y_{12} & y_{13} & & 0 & 0 & y_{14} \\ \hline 0 & 0 & 0 & 0 & y_2 & y_{15} & y_{16} & & y_1 & y_{10} & y_3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & y_4 & y_5 & & 0 & 0 & y_6 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & y_7 & y_8 & & 0 & 0 & y_9 \\ \hline 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & & y_2 & y_1 & y_{10} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & & 0 & y_2 & y_1 \\ \hline 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & & 0 & 0 & y_2 \end{array} \right] \end{array}$$

Ejemplo 2.1.3. Si $\omega = (6, 5, 2)$:

$$K = \begin{array}{c} \left[\begin{array}{cccccc|cccccc|cc} y_1 & y_2 & y_{45} & y_{46} & y_{47} & y_{60} & y_5 & y_6 & y_{27} & y_{28} & y_{29} & y_{15} & y_{16} \\ y_3 & y_4 & y_{48} & y_{49} & y_{50} & y_{61} & y_7 & y_8 & y_{30} & y_{31} & y_{32} & y_{17} & y_{18} \\ 0 & 0 & y_{51} & y_{52} & y_{53} & y_{62} & y_9 & y_{10} & y_{33} & y_{34} & y_{35} & y_{19} & y_{20} \\ 0 & 0 & y_{54} & y_{55} & y_{56} & y_{63} & y_{11} & y_{12} & y_{36} & y_{37} & y_{38} & y_{21} & y_{22} \\ 0 & 0 & y_{57} & y_{58} & y_{59} & y_{64} & y_{13} & y_{14} & y_{39} & y_{40} & y_{41} & y_{23} & y_{24} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & y_{65} & 0 & 0 & y_{42} & y_{43} & y_{44} & y_{25} & y_{26} \\ \hline 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & y_1 & y_2 & y_{45} & y_{46} & y_{47} & y_5 & y_6 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & y_3 & y_4 & y_{48} & y_{49} & y_{50} & y_7 & y_8 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & y_{51} & y_{52} & y_{53} & y_9 & y_{10} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & y_{54} & y_{55} & y_{56} & y_{11} & y_{12} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & y_{57} & y_{58} & y_{59} & y_{13} & y_{14} \\ \hline 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & y_1 & y_2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & y_3 & y_4 \end{array} \right] \end{array}$$

Definición 2.1.4. Observemos que si usamos la notación introducida en la Definición 1.1.9 y el Lema 1.1.12, la matriz K de la proposición anterior

puede escribirse en la forma:

$$K = \begin{bmatrix} \tilde{K}_{1,1} & \tilde{K}_{1,2} & \dots & \tilde{K}_{1,\tau} \\ \mathbb{O} & \tilde{K}_{2,2} & \dots & \tilde{K}_{2,\tau} \\ \vdots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \mathbb{O} & \dots & \mathbb{O} & \tilde{K}_{\tau,\tau} \end{bmatrix} \quad (2.9)$$

siendo cada $\tilde{K}_{j,j}$ una matriz particionada por bloques, con la misma matriz $K'_j \in M_{S_{\tau-j+1}}(\mathbb{F})$ repetida $d_{\tau-j+1}$ veces en la diagonal, es decir,

$$\tilde{K}_{j,j} = \begin{bmatrix} K'_j & \dots & \dots & \dots \\ \mathbb{O} & K'_j & \dots & \dots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \mathbb{O} & \dots & \mathbb{O} & K'_j \end{bmatrix}. \quad (2.10)$$

Recordando la partición conjugada del Lema 1.1.12, más el hecho de que $S_{\tau-j+1} = \sum_{i=1}^{\tau-j+1} s_i$, y como se obtiene K'_j a partir de K'_{j+1} , es fácil deducir que K'_j puede escribirse como:

$$K'_j = \begin{bmatrix} K''_1 & \dots & \dots & \dots \\ \mathbb{O} & K''_2 & \dots & \dots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \mathbb{O} & \dots & \mathbb{O} & K''_{\tau-j+1} \end{bmatrix} \in M_{S_{\tau-j+1}}(\mathbb{F}), \quad (2.11)$$

donde $K''_j \in M_{s_j}(\mathbb{F})$.

Ejemplo 2.1.5. En el Ejemplo 2.1.2, $\tau = 3$, $s_1 = 1$, $s_2 = 2$, $s_3 = 1$ y

$$\begin{aligned} \tilde{K}_{1,1} &= \begin{bmatrix} y_2 & y_4 & y_{16} & y_{28} \\ 0 & y_4 & y_5 & y_{19} \\ 0 & y_7 & y_8 & y_{23} \\ 0 & 0 & 0 & y_{11} \end{bmatrix} = K'_1 = \begin{bmatrix} K''_1 & \dots & \dots \\ \mathbb{O} & K''_2 & \dots \\ \mathbb{O} & \mathbb{O} & K''_3 \end{bmatrix}, \\ \tilde{K}_{2,2} &= \begin{bmatrix} y_2 & y_{15} & y_{16} \\ 0 & y_4 & y_5 \\ 0 & y_7 & y_8 \end{bmatrix} = K'_2 = \begin{bmatrix} K''_1 & \dots \\ \mathbb{O} & K''_2 \end{bmatrix}, \\ \tilde{K}_{3,3} &= \begin{bmatrix} y_2 & y_1 & y_{10} \\ 0 & y_2 & y_1 \\ 0 & 0 & y_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} K'_3 & \dots & \dots \\ \mathbb{O} & K'_3 & \dots \\ \mathbb{O} & \mathbb{O} & K'_3 \end{bmatrix}, \quad K'_3 = K''_1, \\ K''_1 &= [y_2], \quad K''_2 = \begin{bmatrix} y_4 & y_5 \\ y_7 & y_8 \end{bmatrix}, \quad K''_3 = [y_{11}] \end{aligned}$$

Proposición 2.1.6 ([26]). *Sea $A \in M_n(\mathbb{F})$ tal que tiene un único valor propio con característica de Weyr $\omega = (\omega_1, \dots, \omega_{\alpha_1})$ y $W \in M_n(\mathbb{F})$ su forma reducida de Weyr. Entonces:*

$$\dim Z(A) = \dim Z(W) = (\omega_1)^2 + \dots + (\omega_{\alpha_1})^2. \quad (2.12)$$

2.1.2. Centralizador de una matriz de Jordan

Igual que antes consideraremos el caso en que $J \in M_n(\mathbb{F})$ tiene un único valor propio λ . Como en apartados anteriores escribiremos su característica de Segre como $\alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_{\omega_1})$. Es bien conocido que las matrices $T \in Z(J)$ pueden describirse a partir de las matrices de Toeplitz.

Definición 2.1.7. (1) Recordemos que una *matriz de Toeplitz triangular inferior*, $T_i \in M_i(\mathbb{F})$, es de la forma:

$$T_i = \begin{bmatrix} x_1 & 0 & \dots & \dots & 0 \\ x_2 & x_1 & 0 & \dots & 0 \\ x_3 & x_2 & x_1 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ x_i & x_{i-1} & x_{i-2} & \dots & x_1 \end{bmatrix}. \quad (2.13)$$

(2) Para $i > j$, llamaremos “Down Toeplitz Matrices” (DTM) las de la forma:

$$\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \dots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ x_1 & 0 & \dots & \dots & 0 \\ x_2 & x_1 & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \dots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ x_j & x_{j-1} & x_{j-2} & \dots & x_1 \end{bmatrix} \in M_{i \times j}(\mathbb{F}). \quad (2.14)$$

(3) Para $i < j$, llamaremos “Left Toeplitz Matrices” (LTM) las de la forma:

$$\begin{bmatrix} x_1 & 0 & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & 0 \\ x_2 & x_1 & 0 & \dots & \dots & \dots & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \dots & \dots & \dots & \dots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \dots & \dots & \dots & \vdots \\ x_i & x_{i-1} & x_{i-2} & \dots & x_1 & 0 & \dots & 0 \end{bmatrix} \in M_{i \times j}(\mathbb{F}) \quad (2.15)$$

Teorema 2.1.8 ([15]). *Sea $J \in M_n(\mathbb{F})$ una matriz de Jordan con un único valor propio λ y característica de Segre $\alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_{\omega_1})$. Con las notaciones de la definición anterior, podemos escribir $T \in Z(J)$ en la forma:*

$$T = \begin{bmatrix} T_{1,1} & \dots & T_{1,\omega_1} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ T_{\omega_1,1} & \dots & T_{\omega_1,\omega_1} \end{bmatrix} \quad (2.16)$$

donde los bloques $T_{i,j} \in M_{\alpha_i \times \alpha_j}(\mathbb{F})$, $1 \leq i, j \leq \omega_1$ son:

1. Si $i = j$, entonces $T_{i,i}$ es una matriz de Toeplitz triangular inferior.
2. Si $i < j$, entonces $T_{i,j}$ es una DTM.
3. Si $i > j$, entonces $T_{i,j}$ es una LTM.

A partir de la notación introducida en la Definición 1.1.9, podemos considerar una reagrupación de los bloques uniendo los que tienen el mismo tamaño con lo cual obtenemos la siguiente caracterización de la matrices $T \in Z(J)$.

Corolario 2.1.9. *Sea $J \in M_n(\mathbb{F})$ una matriz de Jordan con un único valor propio λ y característica de Segre $\alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_{\omega_1})$. Con las notaciones de la Definición 1.1.9, podemos escribir $T \in Z(J)$ en la forma:*

$$T = \begin{bmatrix} \bar{T}_{1,1} & \dots & \bar{T}_{1,\tau} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \bar{T}_{\tau,1} & \dots & \bar{T}_{\tau,\tau} \end{bmatrix}, \quad (2.17)$$

donde cada submatriz $\bar{T}_{i,j} \in M_{n_i s_i \times n_j s_j}(\mathbb{F})$ para $1 \leq i, j \leq \tau$ está particionada en $s_i \times s_j$ bloques del tipo:

1. Si $i = j$, entonces $\bar{T}_{i,i}$ está particionada por bloques en matrices Toeplitz triangular inferiores.

2. Si $i < j$, entonces $\bar{T}_{i,j}$ está particionada por bloques en matrices DTM.

3. Si $i > j$, entonces $\bar{T}_{i,j}$ está particionada por bloques en matrices LTM.

Observación 2.1.10. Observemos que en el teorema anterior, los coeficientes de los bloques Toeplitz son independientes entre los distintos bloques.

Ejemplo 2.1.11. Para $\alpha = (5, 2, 2, 1)$,

$$T = \begin{array}{c|c|c|c} T_{1,1} & T_{1,2} & T_{1,3} & T_{1,4} \\ \hline T_{2,1} & T_{2,2} & T_{2,3} & T_{2,4} \\ \hline T_{3,1} & T_{3,2} & T_{3,3} & T_{3,4} \\ \hline T_{4,1} & T_{4,2} & T_{4,3} & T_{4,4} \end{array} =$$

$$= \left[\begin{array}{ccccc|cc|cc|c} x_1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ x_2 & x_1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ x_3 & x_2 & x_1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ x_4 & x_3 & x_2 & x_1 & 0 & x_6 & 0 & x_8 & 0 & 0 \\ x_5 & x_4 & x_3 & x_2 & x_1 & x_7 & x_6 & x_9 & x_8 & x_{10} \\ \hline x_{11} & 0 & 0 & 0 & 0 & x_{13} & 0 & x_{15} & 0 & 0 \\ x_{12} & x_{11} & 0 & 0 & 0 & x_{14} & x_{13} & x_{16} & x_{15} & x_{17} \\ \hline x_{18} & 0 & 0 & 0 & 0 & x_{20} & 0 & x_{22} & 0 & 0 \\ x_{19} & x_{18} & 0 & 0 & 0 & x_{21} & x_{20} & x_{23} & x_{22} & x_{24} \\ \hline x_{25} & 0 & 0 & 0 & 0 & x_{26} & 0 & x_{27} & 0 & x_{28} \end{array} \right].$$

Para este caso tenemos que:

$$\bar{T}_{1,1} = \begin{array}{c|c|c|c|c} x_1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ x_2 & x_1 & 0 & 0 & 0 \\ x_3 & x_2 & x_1 & 0 & 0 \\ x_4 & x_3 & x_2 & x_1 & 0 \\ x_5 & x_4 & x_3 & x_2 & x_1 \end{array}, \quad \bar{T}_{1,2} = \begin{array}{c|c} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ x_6 & 0 \\ x_7 & x_6 \end{array} \left| \begin{array}{c|c} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ x_8 & 0 \\ x_9 & x_8 \end{array} \right., \quad \bar{T}_{1,3} = \begin{array}{c} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ x_{10} \end{array},$$

$$\bar{T}_{2,1} = \begin{array}{c|c|c|c|c} x_{11} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ x_{12} & x_{11} & 0 & 0 & 0 \\ x_{18} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ x_{19} & x_{18} & 0 & 0 & 0 \end{array}, \quad \bar{T}_{2,2} = \begin{array}{c|c} x_{13} & 0 \\ x_{14} & x_{13} \\ x_{20} & 0 \\ x_{21} & x_{20} \end{array} \left| \begin{array}{c|c} x_{15} & 0 \\ x_{16} & x_{15} \\ x_{22} & 0 \\ x_{23} & x_{22} \end{array} \right., \quad \bar{T}_{2,3} = \begin{array}{c} 0 \\ x_{17} \\ 0 \\ x_{24} \end{array},$$

$$\bar{T}_{3,1} = [x_{25} \ 0 \ 0 \ 0 \ 0], \quad \bar{T}_{3,2} = [x_{26} \ 0 \ | \ x_{27} \ 0], \quad \bar{T}_{3,3} = [x_{28}].$$

Ejemplo 2.1.12. Sea α definida en el Ejemplo 1.1.11. Las matrices $T \in Z(J)$ son de la forma:

$$T = \begin{bmatrix} T_{1,1} & \cdots & T_{1,6} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ T_{6,1} & \cdots & T_{6,6} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \bar{T}_{1,1} & \bar{T}_{1,2} & \bar{T}_{1,3} \\ \bar{T}_{2,1} & \bar{T}_{2,2} & \bar{T}_{2,3} \\ \bar{T}_{3,1} & \bar{T}_{3,2} & \bar{T}_{3,3} \end{bmatrix},$$

donde

$$\bar{T}_{1,1} = \begin{bmatrix} T_{1,1} & T_{1,2} \\ T_{2,1} & T_{2,2} \end{bmatrix}, \quad \bar{T}_{1,2} = \begin{bmatrix} T_{1,3} & T_{1,4} & T_{1,5} \\ T_{2,3} & T_{2,4} & T_{2,5} \end{bmatrix}, \dots$$

Más explícitamente,

$$T = \begin{bmatrix} x_1 & 0 & 0 & x_4 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ x_2 & x_1 & 0 & x_5 & x_4 & 0 & x_7 & 0 & x_9 & 0 & x_{11} & 0 & 0 \\ x_3 & x_2 & x_1 & x_6 & x_5 & x_4 & x_8 & x_7 & x_{10} & x_9 & x_{12} & x_{11} & x_{13} \\ \hline x_{14} & 0 & 0 & x_{17} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ x_{15} & x_{14} & 0 & x_{18} & x_{17} & 0 & x_{20} & 0 & x_{22} & 0 & x_{24} & 0 & 0 \\ x_{16} & x_{15} & x_{14} & x_{19} & x_{18} & x_{17} & x_{21} & x_{20} & x_{23} & x_{22} & x_{25} & x_{24} & x_{26} \\ \hline x_{27} & 0 & 0 & x_{29} & 0 & 0 & x_{31} & 0 & x_{33} & 0 & x_{35} & 0 & 0 \\ x_{28} & x_{27} & 0 & x_{30} & x_{29} & 0 & x_{32} & x_{31} & x_{34} & x_{33} & x_{36} & x_{35} & x_{37} \\ \hline x_{38} & 0 & 0 & x_{40} & 0 & 0 & x_{42} & 0 & x_{44} & 0 & x_{46} & 0 & 0 \\ x_{39} & x_{38} & 0 & x_{41} & x_{40} & 0 & x_{43} & x_{42} & x_{45} & x_{44} & x_{47} & x_{46} & x_{48} \\ \hline x_{49} & 0 & 0 & x_{51} & 0 & 0 & x_{53} & 0 & x_{55} & 0 & x_{57} & 0 & 0 \\ x_{50} & x_{49} & 0 & x_{52} & x_{51} & 0 & x_{54} & x_{53} & x_{56} & x_{55} & x_{58} & x_{57} & x_{59} \\ \hline x_{60} & 0 & 0 & x_{61} & 0 & 0 & x_{62} & 0 & x_{63} & 0 & x_{64} & 0 & x_{65} \end{bmatrix}.$$

A partir de esta descripción puede calcularse la dimensión de $Z(A)$.

Proposición 2.1.13 ([15]). *Sea $A \in M_n(\mathbb{F})$ tal que tiene un único valor propio con característica de Segre $\alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_{\omega_1})$. Entonces, si $J \in M_n(\mathbb{F})$ es su forma reducida de Jordan:*

$$\dim Z(A) = \dim Z(J) = \alpha_1 + 3\alpha_2 + \dots + (2\omega_1 - 1)\alpha_{\omega_1}. \quad (2.18)$$

2.1.3. El centralizador como deformación miniversal

En este apartado presentamos la interesante propiedad de $Z(A)$ de ser una deformación miniversal de A^t en el sentido de Arnold (ver la Subsección 1.1.4).

En efecto, con las notaciones de la Subsección 1.1.4, veamos que $Z(A^t)$ es el subespacio normal a $\mathcal{O}(A)$ con respecto a un cierto producto escalar, y por tanto verifica la condición de miniversalidad del Teorema 1.1.27.

Proposición 2.1.14 ([1]). *Dada $A_0 \in M_n(\mathbb{R})$ una matriz con polinomio característico totalmente descomponible. Si denotamos por $T_{\varphi(0)}\mathcal{O}(A_0)$ el espacio tangente a la órbita de A_0 en $\varphi(0) = A_0$ y por $N_{\varphi(0)}\mathcal{O}(A_0)$ el espacio normal con respecto al producto escalar:*

$$\langle A, B \rangle = \text{traza}(AB^t). \quad (2.19)$$

Entonces:

$$(a) \quad T_{\varphi(0)}\mathcal{O}(A_0) = \{\dot{S}A_0 - A_0\dot{S}, S \in T_{I_n}\mathcal{G}\}. \quad (2.20)$$

$$(b) \quad N_{\varphi(0)}\mathcal{O}(A_0) = \{Y \in \mathcal{M} : A_0^t Y - Y A_0^t = 0\} = Z(A_0^t). \quad (2.21)$$

Una primera consecuencia es la dimensión de las clases de semejanza (u órbitas).

Corolario 2.1.15. *Para toda $A \in \mathcal{M}$, se tiene:*

$$\dim \mathcal{O}(A) = \dim(Z(A)) = \sum_{i=1}^r (\alpha(i, 1) + 3\alpha(i, 2) + \dots + (2m_i - 1)\alpha(i, m_i)),$$

donde $(\alpha(i, 1), \dots, \alpha(i, m_i))$, $1 \leq i \leq r$, es la característica de Segre del valor propio $\lambda_1, \dots, \lambda_r$ correspondiente.

Más en general, $Z(A_0)$ da una deformación miniversal de A_0 ya que claramente, $N_{\varphi(0)}\mathcal{O}(A_0)$ es minitransversal a $\mathcal{O}(A_0)$ en A_0 (ver Teorema 1.1.27).

Corolario 2.1.16. *Si $\{v_1, \dots, v_d\}$ una base de $Z(A_0^t)$, la deformación*

$$\varphi : \mathbb{R}^d \longrightarrow \mathcal{M}, \quad \varphi(t) = A_0 + \sum_{i=1}^d t_i v_i \quad (2.22)$$

es una deformación miniversal de A_0 .

Ejemplo 2.1.17. Si consideramos

$$J = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix},$$

entonces

$$Z(J) = \begin{bmatrix} t_1 & 0 \\ t_2 & t_1 \end{bmatrix}$$

y por lo tanto una deformación miniversal de J es:

$$\varphi(t_1, t_2) = \begin{bmatrix} t_1 & t_2 \\ 1 & t_1 \end{bmatrix}.$$

2.2. DETERMINANTE DE UNA MATRIZ DEL CENTRALIZADOR

En esta sección vamos a dar una fórmula para calcular el determinante de cualquier matriz $T \in Z(J)$. Partimos del determinante de matrices $K \in Z(W)$, ya que siendo matrices triangulares superiores por bloques podemos encontrar una expresión más simple para su determinante. En particular, podremos caracterizar los elementos de $Z^*(W)$ y de $Z^*(J)$.

Lema 2.2.1 ([10]). *Sea $K \in Z(W)$, con W una matriz de Weyr con un solo valor propio y con característica de Weyr ω . Entonces, con las notaciones de la Definición 1.1.9:*

$$\det K = (\det K_1'')^{n_1} \cdots (\det K_\tau'')^{n_\tau} \quad (2.23)$$

En particular, este determinante sólo depende de $s = s_1^2 + \cdots + s_\tau^2$ variables.

Demostración. A consecuencia de la Definición 2.1.4, es inmediato ver que

$$\begin{aligned} \det K &= \det \tilde{K}_{1,1} \cdots \det \tilde{K}_{\tau,\tau} = (\det K_1')^{d_\tau} \cdots (\det K_\tau')^{d_1} = \\ &= (\det K_1'') \cdots (\det K_\tau'')^{d_\tau} (\det K_1'') \cdots (\det K_{\tau-1}'')^{d_{\tau-1}} \cdots (\det K_1'')^{d_1} = \\ &= (\det K_1'')^{n_1} \cdots (\det K_\tau'')^{n_\tau}. \end{aligned}$$

□

Ejemplo 2.2.2. Continuando con el Ejemplo 2.1.2, tenemos que:

$$\det K = (y_2)^5 \cdot \left(\det \begin{bmatrix} y_4 & y_5 \\ y_7 & y_8 \end{bmatrix} \right)^2 \cdot y_{11}. \quad (2.24)$$

Ejemplo 2.2.3. Para el Ejemplo 2.1.3:

$$\det K = \left(\det \begin{bmatrix} y_1 & y_2 \\ y_3 & y_4 \end{bmatrix} \right)^3 \cdot \left(\det \begin{bmatrix} y_{51} & y_{52} & y_{53} \\ y_{54} & y_{55} & y_{56} \\ y_{57} & y_{58} & y_{59} \end{bmatrix} \right)^2 \cdot y_{65}. \quad (2.25)$$

Observación 2.2.4. La función $\det A$, $A \in M_n(\mathbb{F})$, puede ser interpretada como una función:

$$D : \mathbb{F}^{n^2} \longrightarrow \mathbb{F}. \quad (2.26)$$

Dada una matriz de Weyr $W \in M_n(\mathbb{F})$, hemos visto en la Subsección 2.1.1 que su centralizador $Z(W)$ es un subespacio vectorial de $M_n(\mathbb{F})$ que puede parametrizarse con $d(= \dim Z(W) = (\omega_1)^2 + \dots + (\omega_{\alpha_1})^2)$ variables y_1, \dots, y_d . De hecho, el Lema 2.2.1 establece que el determinante de las matrices $K(y_1, \dots, y_d) \in Z(W)$, no depende de todas las variables, sino que depende sólo de $s = s_1^2 + \dots + s_\tau^2$ de esas variables: y_{i_1}, \dots, y_{i_s} , $1 \leq i_1 < \dots < i_s \leq d$. Es decir,

$$\det K(y_1, \dots, y_d) = D|_S(y_{i_1}, \dots, y_{i_s}), \quad (2.27)$$

siendo $S = \{(y_1, \dots, y_d) : y_i = 0 \text{ si } i \neq i_1, \dots, i_s\}$.

Vayamos ya con las matrices $T \in Z(J)$. Empezaremos estudiando el determinante de las submatrices $\bar{T}_{k,k}$ (ver Teorema 2.1.9) que corresponden a los bloques de Jordan de un mismo tamaño:

$$\bar{T}_{k,k} = \begin{bmatrix} T_{n_k}^{1,1} & \dots & T_{n_k}^{1,s_k} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ T_{n_k}^{s_k,1} & \dots & T_{n_k}^{s_k,s_k} \end{bmatrix}, \text{ donde } T_{n_k}^{i,j} = \begin{bmatrix} x_1^{i,j} & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \ddots & & \vdots \\ x_{n_k}^{i,j} & \dots & \dots & x_1^{i,j} \end{bmatrix}, 1 \leq i, j \leq s_k,$$

donde, para simplificar la notación, hemos omitido en las variables el cuarto subíndice k indicativo del bloque. En el Lema 2.2.6 vamos a dar una fórmula para $\det T_{k,k}$. El siguiente ejemplo nos va a servir para ilustrar el proceso de inducción que usaremos en su demostración.

Ejemplo 2.2.5. Si $\alpha = (3, 3, 2, 2, 2, 1)$, nos restringimos a los dos primeros bloques, entonces $n_1 = 3$, $s_1 = 2$. Por lo tanto para cualquier $T \in Z(J)$, $\bar{T}_{1,1}$ puede escribirse como:

$$\bar{T}_{1,1} = \left[\begin{array}{ccc|ccc} x_1^{1,1} & 0 & 0 & x_1^{1,2} & 0 & 0 \\ x_2^{1,1} & x_1^{1,1} & 0 & x_2^{1,2} & x_1^{1,2} & 0 \\ x_3^{1,1} & x_2^{1,1} & x_1^{1,1} & x_3^{1,2} & x_2^{1,2} & x_1^{1,2} \\ \hline x_1^{2,1} & 0 & 0 & x_1^{2,2} & 0 & 0 \\ x_2^{2,1} & x_1^{2,1} & 0 & x_2^{2,2} & x_1^{2,2} & 0 \\ x_3^{2,1} & x_2^{2,1} & x_1^{2,1} & x_3^{2,2} & x_2^{2,2} & x_1^{2,2} \end{array} \right].$$

Si aplicamos dos veces la fórmula de los menores complementarios de Laplace, obtenemos:

$$\det \bar{T}_{1,1} = \det \begin{bmatrix} x_1^{1,1} & x_1^{1,2} \\ x_1^{2,1} & x_1^{2,2} \end{bmatrix} \cdot \det \left[\begin{array}{cc|cc} x_1^{1,1} & 0 & x_1^{1,2} & 0 \\ x_2^{1,1} & x_1^{1,1} & x_2^{1,2} & x_1^{1,2} \\ \hline x_1^{2,1} & 0 & x_1^{2,2} & 0 \\ x_2^{2,1} & x_1^{2,1} & x_2^{2,2} & x_1^{2,2} \end{array} \right] = \left(\det \begin{bmatrix} x_1^{1,1} & x_1^{1,2} \\ x_1^{2,1} & x_1^{2,2} \end{bmatrix} \right)^3.$$

Lema 2.2.6 ([10]). *Usando la notación anterior:*

$$\det(\bar{T}_{k,k}) = \left(\det \begin{bmatrix} x_1^{1,1} & \dots & x_1^{1,s_k} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ x_1^{s_k,1} & \dots & x_1^{s_k,s_k} \end{bmatrix} \right)^{n_k} \quad (2.28)$$

En particular, este determinante sólo depende de s_k^2 variables.

Demostración. Aplicamos inducción sobre n_k . Si $n_k = 1$ entonces,

$$\bar{T}_{k,k} = \begin{bmatrix} T_1^{1,1} & \dots & T_1^{1,s_k} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ T_1^{s_k,1} & \dots & T_1^{s_k,s_k} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_1^{1,1} & \dots & x_1^{1,s_k} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ x_1^{s_k,1} & \dots & x_1^{s_k,s_k} \end{bmatrix}$$

y por lo tanto

$$\det(\bar{T}_{k,k}) = \det \begin{bmatrix} x_1^{1,1} & \dots & x_1^{1,s_k} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ x_1^{s_k,1} & \dots & x_1^{s_k,s_k} \end{bmatrix}$$

Si $n_k > 1$, aplicamos la fórmula de expansión generalizada de Laplace como en el Ejemplo 2.2.5:

$$\det \bar{T}_{k,k} = \det \begin{bmatrix} x_1^{1,1} & \dots & x_1^{1,s_k} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ x_1^{s_k,1} & \dots & x_1^{s_k,s_k} \end{bmatrix} \cdot \det \begin{bmatrix} T_{n_k-1}^{1,1} & \dots & T_{n_k-1}^{1,s_k} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ T_{n_k-1}^{s_k,1} & \dots & T_{n_k-1}^{s_k,s_k} \end{bmatrix},$$

$$\text{donde } T_{n_k-1}^{i,j} = \begin{bmatrix} x_1^{i,j} & 0 \dots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ x_{n_k-1}^{i,j} & \dots & x_1^{i,j} \end{bmatrix}, \quad 1 \leq i, j \leq s_k,$$

y el resultado sigue de manera inmediata por hipótesis de inducción. \square

Para el caso general, usaremos el Lema 2.2.1, y más concretamente la Observación 2.2.4.

Teorema 2.2.7 ([10]). Sea $T \in Z(J)$, con $J \in M_n(\mathbb{F})$ una matriz de Jordan con un único valor propio. Con las notaciones del Teorema 2.1.9, tenemos

$$\det T = \det \bar{T}_{1,1} \cdots \det \bar{T}_{\tau,\tau}, \quad (2.29)$$

donde cada $\det \bar{T}_{i,i}$, $1 \leq i \leq \tau$, puede calcularse usando el Lema 2.2.6. En particular, $\det T$ sólo depende de las diagonales de los bloques cuadrados.

Demostración. Sea W la forma canónica de Weyr de J y P la matriz de permutación tal que $W = P^t J P$. Entonces $T \in Z(J)$ puede expresarse como $T = P K P^t$, para un cierto $K \in Z(W)$. Con ello, las variables x_1, \dots , que hemos utilizado para parametrizar las matrices $T \in Z(J)$ coinciden, salvo permutaciones, con las y_1, \dots , que parametrizan las $K \in Z(W)$. En la Observación 2.2.4 hemos visto que se requieren exactamente $s = (s_1)^2 + \cdots + (s_\tau)^2$ de dichas variables. Por lo tanto podemos escribir

$$\det T(x_1, \dots, x_d) = D(x_{i_1}, \dots, x_{i_s}), \quad (2.30)$$

pero no con menos de s variables. Podemos suponer sin pérdida de generalidad que las variables (x_1, \dots, x_d) están ordenadas de manera que las d' primeras $x_1, \dots, x_{d'}$ son precisamente aquellas que aparecen en los bloques diagonales $\bar{T}_{1,1}, \dots, \bar{T}_{\tau,\tau}$ de T . Entonces, si definimos $Z'(J) \subset Z(J)$, como:

$$Z'(J) = \{T(x_1, \dots, x_{d'}, 0, \dots, 0) \in Z(J)\}, \quad (2.31)$$

es evidente que es un subespacio vectorial d' -dimensional. Sus elementos $T' \in Z'(J)$ son de la forma:

$$T' = \begin{bmatrix} \bar{T}_{1,1} & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & \bar{T}_{\tau,\tau} \end{bmatrix} \in Z(J). \quad (2.32)$$

Por lo tanto:

$$\det T(x_1, \dots, x_{d'}, 0, \dots, 0) = \det \bar{T}_{1,1} \cdots \det \bar{T}_{\tau,\tau}, \quad (2.33)$$

y a consecuencia del Lema 2.2.6:

$$\det T(x_1, \dots, x_{d'}, 0, \dots, 0) = \bar{D}(x_{j_1}, \dots, x_{j_s}), \quad (2.34)$$

con $1 \leq j_1 < \dots < j_s \leq d'$.

Si comparamos (2.30) y (2.34), se sigue que

$$\{x_{i_1}, \dots, x_{i_s}\} = \{x_{j_1}, \dots, x_{j_s}\} \quad y \quad D \equiv \bar{D}. \quad (2.35)$$

Por lo tanto:

$$\det T(x_1, \dots, x_d) = \det \bar{T}_{1,1} \cdots \det \bar{T}_{\tau,\tau}. \quad (2.36)$$

□

Ejemplo 2.2.8. Si J es una matriz de Jordan con valor propio λ y característica de Segre $\alpha = (3, 3, 2, 2, 2, 1)$. Entonces, cualquier $T \in Z(J)$ es de la forma:

$$T = \begin{array}{c} \left[\begin{array}{ccc|ccc|cc|cc|cc|c} x_1 & 0 & 0 & x_2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ x_{15} & x_1 & 0 & x_{17} & x_2 & 0 & x_{49} & 0 & x_{51} & 0 & x_{53} & 0 & 0 \\ x_{16} & x_{15} & x_1 & x_{18} & x_{17} & x_2 & x_{50} & x_{49} & x_{52} & x_{51} & x_{54} & x_{53} & x_{55} \\ \hline x_3 & 0 & 0 & x_4 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ x_{19} & x_3 & 0 & x_{21} & x_4 & 0 & x_{56} & 0 & x_{58} & 0 & x_{60} & 0 & 0 \\ x_{20} & x_{19} & x_3 & x_{22} & x_{21} & x_4 & x_{57} & x_{56} & x_{59} & x_{58} & x_{61} & x_{60} & x_{62} \\ \hline x_{32} & 0 & 0 & x_{34} & 0 & 0 & x_5 & 0 & x_6 & 0 & x_7 & 0 & 0 \\ x_{33} & x_{32} & 0 & x_{35} & x_{34} & 0 & x_{23} & x_5 & x_{24} & x_6 & x_{25} & x_7 & x_{63} \\ \hline x_{36} & 0 & 0 & x_{38} & 0 & 0 & x_8 & 0 & x_9 & 0 & x_{10} & 0 & 0 \\ x_{37} & x_{36} & 0 & x_{39} & x_{38} & 0 & x_{26} & x_8 & x_{27} & x_9 & x_{28} & x_{10} & x_{64} \\ \hline x_{40} & 0 & 0 & x_{42} & 0 & 0 & x_{11} & 0 & x_{12} & 0 & x_{13} & 0 & 0 \\ x_{41} & x_{40} & 0 & x_{43} & x_{42} & 0 & x_{29} & x_{11} & x_{30} & x_{12} & x_{31} & x_{13} & x_{65} \\ \hline x_{44} & 0 & 0 & x_{45} & 0 & 0 & x_{46} & 0 & x_{47} & 0 & x_{48} & 0 & x_{14} \end{array} \right] \end{array}$$

Observemos que $d = 65$, $d' = 31$ y $s = s_1^2 + s_2^2 + s_3^2 = 2^2 + 3^2 + 1^2 = 14$.

Entonces, $\det T =$

$$= \det \left[\begin{array}{ccc|ccc|cc|cc|cc|c} x_1 & 0 & 0 & x_2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & x_1 & 0 & 0 & x_2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & x_1 & 0 & 0 & x_2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \hline x_3 & 0 & 0 & x_4 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & x_3 & 0 & 0 & x_4 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & x_3 & 0 & 0 & x_4 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & x_5 & 0 & x_6 & 0 & x_7 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & x_5 & 0 & x_6 & 0 & x_7 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & x_8 & 0 & x_9 & 0 & x_{10} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & x_8 & 0 & x_9 & 0 & x_{10} & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & x_{11} & 0 & x_{12} & 0 & x_{13} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & x_{11} & 0 & x_{12} & 0 & x_{13} & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & x_{14} \end{array} \right] =$$

$$= \left(\det \begin{bmatrix} x_1 & x_2 \\ x_3 & x_4 \end{bmatrix} \right)^3 \cdot \left(\det \begin{bmatrix} x_5 & x_6 & x_7 \\ x_8 & x_9 & x_{10} \\ x_{11} & x_{12} & x_{13} \end{bmatrix} \right)^2 \cdot (x_{14}).$$

Observación 2.2.9. Para el caso general de varios valores propios, recor-

demos que, si

$$J = \begin{bmatrix} J(\lambda_1) & & \\ & \ddots & \\ & & J(\lambda_r) \end{bmatrix} \quad (2.37)$$

y $T \in Z(J)$, entonces $T = \begin{bmatrix} T_1 & & \\ & \ddots & \\ & & T_r \end{bmatrix}$, con $T_i \in Z(J(\lambda_i))$. Así pues,

tenemos que

$$\det T = \det T_1 \cdot \dots \cdot \det T_r, \quad (2.38)$$

donde cada $\det T_i$ puede calcularse mediante el Teorema 2.2.7.

2.3. DESCRIPCIÓN DE LAS IMÁGENES POR LAS MATRICES DEL CENTRALIZADOR

Si $F \subseteq \text{End}(E)$ es un subespacio vectorial, entonces para cada $v \in E$, el conjunto $\{g(v) \mid g \in F\} \subseteq E$ es un subespacio vectorial. En particular,

$$\{g(v) \mid g \in Z(f)\} \quad (2.39)$$

es un subespacio vectorial para cada $f \in \text{End}(E)$ y $v \in E$ fijos. Tal como hicimos notar en el Capítulo 1, por abuso de notación escribimos para cada base de E :

$$\{g(v) \mid g \in Z(f)\} = \{Bv \mid B \in Z(A)\}, \quad (2.40)$$

con lo cual,

$$\{Bv \mid B \in Z(A)\} = \{Kv \mid K \in Z(W)\} = \{Tv \mid T \in Z(J)\}, \quad (2.41)$$

donde $W \in M_n(\mathbb{F})$ y $J \in M_n(\mathbb{F})$ son las formas canónicas de Weyr y de Jordan de $A \in M_n(\mathbb{F})$, respectivamente.

Nuestro primer objetivo es describir tales subespacios cuando v pertenece a una base de Jordan. En segundo lugar, lo aplicaremos para determinar

$$\bigcup_{B \in Z(A)} BV \equiv \bigcup \{BV \mid B \in Z(A)\} = \{Bv \mid v \in V, B \in Z(A)\}, \quad (2.42)$$

cuando $V \subset E$ es un subespacio marcado de la forma $V(k_1, \dots, k_{\omega_1})$ con $k_1 \geq \dots \geq k_{\omega_1} \geq 0$.

Ya hemos visto que podemos reducirnos al caso en que $A \in M_n(\mathbb{F})$ tenga solo un valor propio λ . Además, a consecuencia del siguiente lema podemos considerar que $\lambda = 0$.

Lema 2.3.1. Sea $A \in M_n(\mathbb{F})$ y $\lambda \in \mathbb{F}$ cualquiera. Entonces, se cumple que:

$$Z(A) = Z(A - \lambda I_n) \quad (2.43)$$

Demostración. En efecto,

$$\begin{aligned} B \in Z(A - \lambda I_n) &\Leftrightarrow (A - \lambda I_n)B = B(A - \lambda I_n) \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow AB = BA \Leftrightarrow B \in Z(A). \end{aligned}$$

□

2.3.1. Descripción de las imágenes de un vector

Nuestro objetivo en esta subsección es describir el subespacio vectorial $\{Bv \mid B \in Z(A)\}$ cuando v es uno de los vectores de la base de Jordan.

Observemos que, si $A \in M_n(\mathbb{F})$ es una matriz nilpotente con característica de Segre $\alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_{\omega_1})$ y

$$u_j, Au_j, \dots, A^{\alpha_j-1}u_j, \quad 1 \leq j \leq \omega_1,$$

es una base de Jordan de A . Entonces, de forma inmediata tenemos que:

1. $\{Bu_j \mid B \in Z(A)\} \subseteq \ker A^{\alpha_j}$.
2. $\{BA^i u_j \mid B \in Z(A)\} \subseteq A^i(\ker A^{\alpha_j}) = \text{Im } A^i \cap \ker A^{\alpha_j-i}$.

Demostraremos la inclusión contraria mediante las matrices de $Z(W)$. Empezamos con un ejemplo ilustrativo.

Ejemplo 2.3.2. Consideremos una matriz de Weyr W nilpotente con $\omega = (4, 3, 1, 1, 1)$. Entonces, toda $K \in Z(W)$ es de la forma:

$$K = \left[\begin{array}{cccc|ccc|c|c|c} y_2 & y_{15} & y_{16} & y_{28} & y_1 & y_{27} & y_{17} & y_{10} & y_3 & y_{18} \\ 0 & y_4 & y_5 & y_{19} & 0 & y_{20} & y_{21} & 0 & y_6 & y_{22} \\ 0 & y_7 & y_8 & y_{23} & 0 & y_{24} & y_{25} & 0 & y_9 & y_{26} \\ 0 & 0 & 0 & y_{11} & 0 & y_{12} & y_{13} & 0 & 0 & y_{14} \\ \hline 0 & 0 & 0 & 0 & y_2 & y_{15} & y_{16} & y_1 & y_{10} & y_3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & y_4 & y_5 & 0 & 0 & y_6 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & y_7 & y_8 & 0 & 0 & y_9 \\ \hline 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & y_2 & y_1 & y_{10} \\ \hline 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & y_2 & y_1 \\ \hline 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & y_2 \end{array} \right], \quad y_i \in \mathbb{F}.$$

Las bases de Weyr resultan de reordenar las de Jordan en la forma:

$$W^4u_1, Wu_2, Wu_3, u_4; W^3u_1, u_2, u_3; W^2u_1; Wu_1; u_1$$

de manera que:

$$\text{height}(u_1) = 5, \text{height}(u_2) = 2, \text{height}(u_3) = 2, \text{height}(u_4) = 1.$$

Observemos que si consideramos el conjunto de todas las imágenes de uno de sus vectores cuando K recorre $Z(W)$ tenemos que:

$$\{Ku_4 \mid K \in Z(W)\} = \tilde{V}(4, 0, 0, 0, 0),$$

$$\begin{aligned} \{Ku_3 \mid K \in Z(W)\} &= \tilde{V}(4, 3, 0, 0, 0), \\ \{KWu_3 \mid K \in Z(W)\} &= \tilde{V}(3, 0, 0, 0, 0), \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \{Ku_2 \mid K \in Z(W)\} &= \tilde{V}(4, 3, 0, 0, 0), \\ \{KWu_2 \mid K \in Z(W)\} &= \tilde{V}(3, 0, 0, 0, 0), \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \{Ku_1 \mid K \in Z(W)\} &= \tilde{V}(4, 3, 1, 1, 1), \\ \{KWu_1 \mid K \in Z(W)\} &= \tilde{V}(3, 1, 1, 1, 0), \\ \{KW^2u_1 \mid K \in Z(W)\} &= \tilde{V}(1, 1, 1, 0, 0), \\ \{KW^3u_1 \mid K \in Z(W)\} &= \tilde{V}(1, 1, 0, 0, 0), \\ \{KW^4u_1 \mid K \in Z(W)\} &= \tilde{V}(1, 0, 0, 0, 0). \end{aligned}$$

Lema 2.3.3. *Sea $W \in M_n(\mathbb{F})$ una matriz de Weyr nilpotente, $\alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_{\omega_1})$ su característica de Segre y*

$$u_j, \quad 1 \leq j \leq \omega_1,$$

los vectores generadores de una base de Jordan de W . Entonces, se cumple que:

1. $\{Ku_j \mid K \in Z(W)\} = \ker W^{\alpha_j}, \quad 1 \leq j \leq \omega_1.$
2. $\{KW^i u_j \mid K \in Z(W)\} = W^i(\ker W^{\alpha_j}) = \text{Im } W^i \cap \ker W^{\alpha_j - i}, \quad 1 \leq j \leq \omega_1, \quad 1 \leq i \leq \alpha_j.$

Demostración. Sea $\omega = (\omega_1, \dots, \omega_{\alpha_1})$ la característica de Weyr de W y $j \in \{1, \dots, \omega_1\}$.

1. Como ya hemos dicho, una inclusión es trivial, con lo que bastará la igualdad de dimensiones. Por definición:

$$\dim \ker W^{\alpha_j} = \omega_1 + \dots + \omega_{\alpha_j}. \quad (2.44)$$

Las imágenes Ku_j corresponden a los bloques arbitrarios P, Q de la Proposición 2.1.1 y por tanto su dimensión es el número de parámetros que aparecen en dichas columnas (ver Ejemplo 2.3.2), así pues:

$$\dim\{Ku_j \mid K \in Z(W)\} = \omega_1 + \dots + \omega_{\alpha_j}. \quad (2.45)$$

2. Demostramos la inclusión no trivial:

$$v \in \text{Im } W^i \cap \ker W^{\alpha_j - i} \Rightarrow \begin{cases} v = W^i(w) \\ W^{\alpha_j - i}v = 0 \end{cases}$$

por lo tanto tenemos que $w \in \ker W^{\alpha_j}$ y por el apartado anterior $w = Ku_j$ para algún $K \in Z(W)$.

□

Se sigue, por tanto:

Teorema 2.3.4. *Sea $A \in M_n(\mathbb{F})$ una matriz nilpotente, $\alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_{\omega_1})$ su característica de Segre y*

$$u_j, Au_j, \dots, A^{\alpha_j - 1}u_j, \quad 1 \leq j \leq \omega_1,$$

una base de Jordan de A . Entonces,

1. $\{Bu_j \mid B \in Z(A)\} = \ker A^{\alpha_j}, \quad 1 \leq j \leq \omega_1.$
2. $\{BA^i u_j \mid B \in Z(A)\} = A^i(\ker A^{\alpha_j}) = \text{Im } A^i \cap \ker A^{\alpha_j - i}, \quad 1 \leq j \leq \omega_1, \quad 1 \leq i \leq \alpha_j.$

Observación 2.3.5. Como ya hemos hecho notar, el resultado anterior generaliza a matrices $A \in M_n(\mathbb{F})$ con un solo valor propio λ no necesariamente nulo:

$$\{B(A - \lambda I_n)^i u_j \mid B \in Z(A)\} = \text{Im } (A - \lambda I_n)^i \cap \ker(A - \lambda I_n)^{\alpha_j - i}. \quad (2.46)$$

Podemos reformular estos resultados en términos de los subespacios $\tilde{V}(l_1, \dots, l_{\omega_1})$ introducidos en la Definición 1.2.24:

Corolario 2.3.6. *En las condiciones del Teorema 2.3.4, sea $\omega = (\omega_1, \dots, \omega_{\alpha_1})$ su característica de Weyr. Entonces:*

$$\{BA^i u_j \mid B \in Z(A)\} = \tilde{V}(\omega_{i+1}, \dots, \omega_{\alpha_j}, 0, \dots, 0), \quad (2.47)$$

donde $j = 1, \dots, \omega_1$ y $i = 0, \dots, \alpha_j - 1$.

Demostración. Fijamos j y aplicamos inducción sobre i . Para $i=0$, el resultado es consecuencia de la Lema 2.3.3. Suponiendo el resultado cierto para $i - 1$, también se cumple para i :

$$\begin{aligned} \{BA^i u_j \mid B \in Z(A)\} &= A\{BA^{i-1} u_j, B \in Z(A)\} = \\ &= A(\tilde{V}(\omega_i, \dots, \omega_{\alpha_j}, 0, \dots, 0)) = \tilde{V}(\omega_{i+1}, \dots, \omega_{\alpha_j}, 0, \dots, 0) \end{aligned}$$

□

Nos interesa reformularlo también en términos de los subespacios $V(k_1, \dots, k_{\omega_1})$ introducidos en la Definición 1.2.21:

Ejemplo 2.3.7. En las condiciones del Ejemplo 2.1.12, es decir, $\alpha = (3, 3, 2, 2, 2, 1)$ y considerando una base de Jordan

$$\{u_1, Ju_1, J^2 u_1, u_2, Ju_2, J^2 u_2, u_3, Ju_3, u_4, Ju_4, u_5, Ju_5, u_6\}.$$

Entonces:

$$\{Tu_3 \mid T \in Z(J)\} = \left\{ \begin{array}{c} 0 \\ x_7 \\ x_8 \\ \hline 0 \\ x_{20} \\ x_{21} \\ \hline x_{31} \\ x_{32} \\ \hline x_{42} \\ x_{43} \\ \hline x_{53} \\ x_{54} \\ \hline x_{62} \end{array} \right\} = V(2, 2, 2, 2, 2, 1),$$

$$\{TJu_3 \mid T \in Z(J)\} = \left\{ \begin{array}{c} \left[\begin{array}{c} 0 \\ 0 \\ \frac{x_7}{0} \\ 0 \\ \frac{x_{20}}{0} \\ \frac{x_{31}}{0} \\ \frac{x_{42}}{0} \\ \frac{x_{53}}{0} \\ 0 \end{array} \right] \\ \dots \end{array} \right\} = V(1, 1, 1, 1, 1, 0),$$

En general,

Corolario 2.3.8. *En las condiciones del Teorema 2.3.4,*

1.

$$\{Bu_j \mid B \in Z(A)\} = V(\alpha_j, \dots, \alpha_j, \alpha_{j+1}, \dots, \alpha_{\omega_1}) \quad (2.48)$$

donde $j = 1, \dots, \omega_1$.

2. Fijado $j \in \{1, \dots, \omega_1\}$, para cada $1 \leq i \leq \alpha_j$ se tiene:

$$\{BA^i u_j \mid B \in Z(A)\} = V(\alpha_j - i, \dots, \overset{(j)}{\alpha_j - i}, \alpha_{j+1} - i, \dots, \alpha_{\omega_1} - i).$$

Demostración. Basta observar que $\ker A^{\alpha_j}$ está formado por los vectores de las primeras α_j cajas para las primeras j columnas y los de las columnas enteras para el resto. Esto es, los vectores:

$$V(\alpha_j, \dots, \alpha_j, \alpha_{j+1}, \dots, \alpha_{\omega_1}).$$

□

Corolario 2.3.9. *Para $1 \leq j \leq \omega_1$ y $1 \leq k_j \leq \alpha_j$:*

$$\bigcup \{BV_{k_j}^j \mid B \in Z(A)\} = V(k_j, \dots, \overset{(j)}{k_j}, \alpha_{j+1} - \alpha_j + k_j, \dots, \alpha_{\omega_1} - \alpha_j + k_j).$$

2.3.2. Descripción de la imagen de un subespacio marcado

Como ya hemos anunciado, vamos a aplicar los resultados de la subsección anterior para calcular

$$\bigcup\{BV \mid B \in Z(A)\} = \{Bv \mid v \in V, B \in Z(A)\}, \quad (2.49)$$

cuando $V \subset E$ es un subespacio marcado de la forma $V(k_1, \dots, k_{\omega_1})$ con $k_1 \geq \dots \geq k_{\omega_1} \geq 0$. Remarcamos que, en general, si consideramos subespacios vectoriales $V \subset E$ y $F \subset \text{End}(E)$, entonces el conjunto

$$\bigcup\{f(v) \mid v \in V, f \in F\} \subset E \quad (2.50)$$

no es necesariamente un subespacio vectorial.

Lema 2.3.10. *Dada $W \in M_n(\mathbb{F})$ una matriz de Weyr nilpotente con característica de Weyr $\omega = (\omega_1, \dots, \omega_{\alpha_1})$, entonces :*

$$\bigcup\{K\tilde{V}_{l_j}^j, K \in Z(W)\} = \tilde{V}(\omega_{\alpha_1-j+1}, \dots, \omega_{\alpha_1}, 0, \dots, 0), \quad (2.51)$$

donde $\tilde{V}_{l_j}^j$, $1 \leq j \leq \alpha_1$, $0 \leq l_j \leq \omega_j$ es como en la Definición 1.2.24 y $\alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_{\omega_1})$ es la característica de Segre de W .

Demostración. Recordemos que

$$\tilde{V}_{l_j}^j = \text{span}\{W^{\alpha_1-j}u_1, \dots, W^{\alpha_1-j}u_{l_j}\},$$

y aplicando el Corolario 2.3.6 tenemos que:

$$\begin{aligned} \{KW^{\alpha_1-j}u_1 \mid K \in Z(W)\} &= \tilde{V}(\omega_{\alpha_1-j+1}, \dots, \omega_{\alpha_1}, 0, \dots, 0), \\ \{KW^{\alpha_2-j}u_2 \mid K \in Z(W)\} &= \tilde{V}(\omega_{\alpha_2-j+1}, \dots, \omega_{\alpha_2}, 0, \dots, 0), \\ &\dots \\ \{KW^{\alpha_j-j}u_{l_j} \mid K \in Z(W)\} &= \tilde{V}(\omega_{\alpha_j-j+1}, \dots, \omega_{\alpha_j}, 0, \dots, 0), \end{aligned}$$

y al ser $\alpha_1 \geq \alpha_2 \geq \dots \geq \alpha_j$, entonces $\omega_{\alpha_1} \leq \dots \leq \omega_{\alpha_j}$ quedando demostrado el lema. □

Teorema 2.3.11. *Sea $A \in M_n(\mathbb{F})$ una matriz nilpotente.*

1. *Si $V \subset E$ es un subespacio vectorial marcado de la forma $V = V(k_1, \dots, k_{\omega_1})$, $k_1 \geq \dots \geq k_{\omega_1}$, entonces también:*

$$\bigcup\{BV \mid B \in Z(A)\} \in \text{Mark}(A). \quad (2.52)$$

2. Más explícitamente, si:

$$V = V(k_1, \dots, k_{\omega_1}) = \tilde{V}(l_1, \dots, l_{\alpha_1}), \quad (2.53)$$

con $l_1 \geq l_2 \geq \dots \geq l_{\alpha_1} \geq 0$, y si $q = \max\{j \mid l_j \neq 0\}$ entonces:

$$\bigcup \{K\tilde{V}(l_1, \dots, l_{\alpha_1}) \mid K \in Z(W)\} = \tilde{V}(m_1, \dots, m_q), \quad (2.54)$$

donde $\omega = (\omega_1, \dots, \omega_{\alpha_1})$ es la característica de Weyr de A y:

$$m_i = \max\{\omega_{\alpha_i}, \omega_{\alpha_{i+1}} - 1, \dots, \omega_{\alpha_q - (q-i)}\}, \quad (2.55)$$

o equivalentemente:

$$m_i = \omega_{j_i}, \text{ con } j_i = \min\{\alpha_i, \alpha_{i+1} - 1, \dots, \alpha_q - (q - i)\}. \quad (2.56)$$

Demostración. Basta demostrar 2. Como consecuencia del lema anterior, sabemos que:

$$\begin{aligned} \bigcup \{K\tilde{V}_{l_1}^1 \mid K \in Z(W)\} &= \tilde{V}(\omega_{\alpha_1}, 0, \dots, 0), \\ \bigcup \{K\tilde{V}_{l_2}^2 \mid K \in Z(W)\} &= \tilde{V}(\omega_{\alpha_2-1}, \omega_{\alpha_2}, 0, \dots, 0), \\ \bigcup \{K\tilde{V}_{l_3}^3 \mid K \in Z(W)\} &= \tilde{V}(\omega_{\alpha_3-2}, \omega_{\alpha_3-1}, \omega_{\alpha_3}, 0, \dots, 0), \\ &\dots \\ \bigcup \{K\tilde{V}_{l_j}^j \mid K \in Z(W)\} &= \tilde{V}(\omega_{\alpha_j-j+1}, \dots, \omega_{\alpha_j}, 0, \dots, 0), \\ &\dots \\ \bigcup \{K\tilde{V}_{l_{\alpha_1}}^{\alpha_1} \mid K \in Z(W)\} &= \tilde{V}(\omega_{\alpha_{\alpha_1}-\alpha_1+1}, \dots, \omega_{\alpha_{\alpha_1}}), \end{aligned}$$

de lo cual resulta el teorema de forma inmediata. □

Ejemplo 2.3.12. Si consideramos $W \in M_n(\mathbb{F})$ como en el Ejemplo 2.1.3, donde $\omega = (6, 5, 2)$ y por lo tanto $\alpha = (3, 3, 2, 2, 2, 1)$. Entonces:

$$\begin{aligned} \bigcup \{K\tilde{V}(4, 1, 0) \mid K \in Z(W)\} &= \tilde{V}(\omega_{\alpha_4}, \omega_{\alpha_1}, 0) = \\ &= \tilde{V}(\omega_2, \omega_3, 0) = \tilde{V}(5, 2, 0). \end{aligned}$$

Más en general, ω_{α_l} resultan:

l	1	2	3	4	5	6
α_l	3	3	2	2	2	1
ω_{α_l}	2	2	5	5	5	6

Subespacios hiperinvariantes

3.1. SUBESPACIOS HIPERINVARIANTES Y CARACTERÍSTICOS

3.1.1. Antecedentes

Existe una larga literatura sobre la existencia de subespacios invariantes comunes a dos o más matrices. Así, ya en 1878, F.G. Frobenius en [13] demuestra que dos matrices que conmutan tienen subespacios invariantes comunes; en 1930, N.H. McCoy en [23] demuestra que dos matrices que casi-conmutan (esto es, que conmutan con su conmutador) tienen subespacios invariantes comunes. Para el caso de vectores propios comunes, en 1984 D. Shemesh enuncia el siguiente teorema:

Teorema 3.1.1 ([34]). *Dos matrices $A, B \in M_n(\mathbb{C})$ tienen un vector propio común si y sólo si:*

$$\bigcap_{k,l=1}^n \ker[A^k, B^l] \neq \{0\}, \quad (3.1)$$

siendo $[,]$ el conmutador entre dos matrices, esto es $[A, B] = AB - BA$.

En 1999, A. George en [14] publica un método que permite determinar cuando para dos matrices $A, B \in M_n(\mathbb{C})$ dadas, existe un subespacio invariante común de dimensión $d > 1$ con la restricción de que al menos una de las dos matrices tenga todos sus valores propios distintos. En 2001, M. Tsatsomeros demuestra:

Teorema 3.1.2 ([37]). *Dos matrices $A, B \in M_n(\mathbb{C})$ tienen un subespacio invariante común de dimensión $d > 1$ si y sólo si se cumplen las siguientes condiciones:*

1. *Existe algún escalar $s \in \mathbb{C}$ de manera que $A + sI_n$ y $B + sI_n$ son inversibles.*
2. *Las matrices d -compuestas de A y B tienen un vector propio común.*

En particular, si dos o más matrices triangularizan simultáneamente, tienen en común una cadena completa de subespacios invariantes. En 1951, M.P. Drazin, J.W. Dungey y K.W. Gruenbeig encuentran la primera condición necesaria y suficiente para que un conjunto de matrices triangularicen simultáneamente:

Teorema 3.1.3 ([9]). *Una familia de matrices $A_1, \dots, A_k \in M_n(\mathbb{C})$ triangulariza simultáneamente si y sólo si:*

$$p(A_1, \dots, A_k)[A_i, A_j] \quad (3.2)$$

es una matriz nilpotente para todo polinomio de k variables $p(t_1, \dots, t_k)$.

En los años 70, T. Laffey demuestra:

Teorema 3.1.4 ([19]). *Dadas dos matrices $A, B \in M_n(\mathbb{C})$ tales que $\text{rk}[A, B] \leq 1$, entonces A y B triangularizan simultáneamente.*

Posteriormente en [20] demostró, añadiendo una hipótesis adicional, la triangularización simultánea de dos matrices $A, B \in M_n(\mathbb{C})$ cuando $\text{rk}[A, B] = 2$. En 1986, H. Radjavi demuestra:

Teorema 3.1.5 ([28]). *Una colección S de $n \times n$ matrices complejas tiene una cadena de subespacios invariantes comunes si y sólo si la traza es permutable, esto es:*

$$\text{Tr}(A_1 \dots A_p) = \text{Tr}(A_{\sigma(1)} \dots A_{\sigma(p)}), \quad (3.3)$$

para toda p -tupla $A_1, \dots, A_p, A_j \in S$ y toda permutación σ de $\{1, \dots, p\}$.

Por nuestra parte, estamos interesados en los subespacios que son invariantes para todas las matrices que conmutan respecto a una dada, tales subespacios se denominan *hiperinvariantes*. La noción de subespacio hiperinvariante fue introducida por primera vez en [8] en el ámbito del análisis funcional, determinándose subespacios hiperinvariantes para distintos tipos de operadores. Anteriormente, en teoría de grupos se usó la noción de “fully invariant” para denotar subgrupos invariantes para todos los endomorfismos de un grupo.

3.1.2. Definición y caracterizaciones

Como en capítulos anteriores consideraremos $f \in \text{End}(E)$ y $A \in M_n(\mathbb{F})$ la matriz de f en una base dada. Igualmente, consideraremos sólo el caso de endomorfismos que admiten forma canónica de Jordan (aunque las definiciones que siguen son válidas igualmente).

Definición 3.1.6. Sea $V \subseteq E$ un subespacio vectorial f -invariante (o A -invariante) es decir, $f(V) \subseteq V$.

- (1) Diremos que V es un *subespacio A -hiperinvariante* (o simplemente hiperinvariante si la matriz A está sobreentendida) si es invariante para todas las matrices que conmutan con A , esto es, matrices que pertenecen al centralizador de A , $Z(A)$:

$$BV \subseteq V \text{ para todo } B \in Z(A). \quad (3.4)$$

Escribiremos $\text{Hinv}(A)$, para denotar el conjunto de los subespacios hiperinvariantes.

- (2) Diremos que V es un *subespacio A -característico* (o simplemente característico si la matriz A está sobreentendida) si es invariante para todas las matrices no singulares que conmutan con A :

$$BV \subseteq V \text{ para todo } B \in Z^*(A). \quad (3.5)$$

Escribiremos $\text{Chinv}(A)$, para denotar el conjunto de los subespacios característicos.

La siguiente proposición nos da ejemplos significativos de subespacios hiperinvariantes.

Proposición 3.1.7 ([15]). *Para todo $\lambda \in \mathbb{F}$, la siguiente colección de subespacios:*

$$\ker(A - \lambda I_n)^k, \quad (3.6)$$

$$\text{Im}(A - \lambda I_n)^k, \quad (3.7)$$

$k = 1, 2, \dots$, son A -hiperinvariantes.

En particular, es obvio que:

$$\text{Hinv}(A) \subseteq \text{Chinv}(A) \subseteq \text{Inv}(A). \quad (3.8)$$

Las condiciones para la igualdad vienen dadas en el siguiente teorema.

Teorema 3.1.8 ([15]). $\text{Hinv}(A) = \text{Inv}(A)$ si y sólo si A es una matriz no derogatoria (esto es, $\dim \ker(A - \lambda I_n) = 1$ para todo valor propio λ de A).

Además, cuando $\text{card}(\mathbb{F}) > 2$, es decir, si $\mathbb{F} \neq GF(2)$, tenemos el siguiente teorema. La hipótesis $\mathbb{F} = GF(2)$ es fundamental como muestra el Ejemplo 3.1.10; el Capítulo 4 está dedicado a describir los subespacios en $\text{Chinv}(A) \setminus \text{Hinv}(A)$ cuando $\mathbb{F} = GF(2)$.

Teorema 3.1.9 ([2]). Si $\mathbb{F} \neq GF(2)$, entonces:

$$\text{Hinv}(A) = \text{Chinv}(A). \quad (3.9)$$

Ejemplo 3.1.10. Si $\mathbb{F} = GF(2)$ y consideramos la matriz:

$$J = \left[\begin{array}{ccc|c} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right].$$

En este caso las matrices T que conmutan con J son de la forma:

$$T = \left[\begin{array}{ccc|c} x_1 & 0 & 0 & 0 \\ x_2 & x_1 & 0 & 0 \\ x_3 & x_2 & x_1 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 & x_4 \end{array} \right], \quad x_i \in GF(2).$$

Y las matrices no singulares que conmutan con J son de la forma:

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & 0 \\ x_2 & 1 & 0 & 0 \\ x_3 & x_2 & 1 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right], \quad x_i \in GF(2).$$

Con ello es inmediato comprobar que el siguiente subespacio es característico:

$$V = \{e_2 + e_4, e_3\}.$$

Pero no es hiperinvariante ya que para toda T que conmuta con J se tiene que:

$$T(e_2 + e_4) = x_1 e_2 + x_2 e_3 + x_4 e_4,$$

en particular, para $x_1 = 1, x_2 = x_4 = 0$:

$$T(e_2 + e_4) = e_2 \notin V.$$

Como en capítulos anteriores podemos reducirnos a matrices $A \in M_n(\mathbb{F})$ con un sólo valor propio (que además podemos suponer 0, esto es, matrices A nilpotentes) gracias a la siguiente proposición análoga a la Proposición 1.2.3.

Proposición 3.1.11 ([15]). *En las condiciones del Teorema 1.1.1, todo subespacio vectorial A -hiperinvariante V descompone en una suma directa de la forma:*

$$V = (V \cap E_1) \oplus \dots \oplus (V \cap E_r), \quad E_i = \ker(A - \lambda_i I_n)^n, \quad (3.10)$$

siendo $V \cap E_i$ hiperinvariante respecto a $A|_{E_i}$.

Extendiendo esta descomposición como sigue, se obtiene una primera caracterización de los subespacios hiperinvariantes, que utilizaremos en el Ejemplo 3.1.10.

Lema 3.1.12 ([2]). *(Caracterización mediante descomposiciones) Sea $A \in M_n(\mathbb{F})$. Entonces:*

$$V \in \text{Hinv}(A) \Leftrightarrow V = (V \cap E_1) \oplus \dots \oplus (V \cap E_q), \quad (3.11)$$

para toda descomposición de E de la forma:

$$E = E_1 \oplus \dots \oplus E_q, \quad (3.12)$$

donde $E_i \in \text{Inv}(A)$.

Ejemplo 3.1.13. Siguiendo con el Ejemplo 3.1.10, para:

$$E_1 = \{e_1, e_2, e_3\}, \quad E_2 = \{e_4\}.$$

Se tiene que:

$$E_1, E_2 \in \text{Inv}(J), \quad E = E_1 \oplus E_2, \quad (3.13)$$

$$V \neq (V \cap E_1) \oplus (V \cap E_2) = \{e_3\}. \quad (3.14)$$

Para una segunda caracterización de $\text{Hinv}(A)$, clave para los capítulos siguientes, utilizaremos la notación introducida en la Definición 1.2.21. Como ya hemos hecho notar, nos restringimos a matrices $A \in M_n(\mathbb{F})$ nilpotentes. En el Teorema 3.3.6 presentaremos una demostración alternativa (y notablemente más sencilla) a la de [15].

Teorema 3.1.14 ([15]). *(Caracterización mediante tuplas) Sea $A \in M_n(\mathbb{F})$ una matriz nilpotente con característica de Segre $\alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_{\omega_1})$. Los subespacios en $\text{Hinv}(A)$ son de la forma:*

$$V(k_1, \dots, k_{\omega_1}) \quad (3.15)$$

con:

$$k_1 \geq \cdots \geq k_{\omega_1} \geq 0, \quad (3.16)$$

$$\alpha_1 - k_1 \geq \cdots \geq \alpha_{\omega_1} - k_{\omega_1} \geq 0. \quad (3.17)$$

En particular, si $\alpha_{j+1} = \alpha_j$, entonces $k_{j+1} = k_j$.

Ejemplo 3.1.15. En particular, se obtiene la Proposición 3.1.7, ya que:

$$\begin{aligned} \ker(A - \lambda I_n)^k &= V(k_1, \dots, k_{\omega_1}), \quad k_i = \min\{k, \alpha_i\} \\ \text{Im}(A - \lambda I_n)^k &= V(k_1, \dots, k_{\omega_1}), \quad k_i = \max\{\alpha_i - k, 0\} \end{aligned}$$

Finalmente, relacionamos $\text{Hinv}(A)$ y $\text{Chinv}(A)$ con los subespacios marcados referidos en la Subsección 1.2.3. (veáse en particular, la Proposición 1.2.23).

Corolario 3.1.16. Cualquiera que sea \mathbb{F} y $A \in M_n(\mathbb{F})$:

$$\text{Hinv}(A) \subseteq \text{Mark}(A). \quad (3.18)$$

Teorema 3.1.17 ([2]). Cualquiera que sea \mathbb{F} y $A \in M_n(\mathbb{F})$:

$$\text{Hinv}(A) = \text{Chinv}(A) \cap \text{Mark}(A). \quad (3.19)$$

3.1.3. Propiedades estructurales

En esta subsección señalaremos que el conjunto $\text{Hinv}(A)$ es un retículo y reseñaremos sus propiedades como tal.

Teorema 3.1.18 ([12]). $\text{Hinv}(A)$ es un retículo que está generado por los subespacios $\ker(A - \lambda I_n)^k$, $\text{Im}(A - \lambda I_n)^k$, $k = 1, 2, \dots$

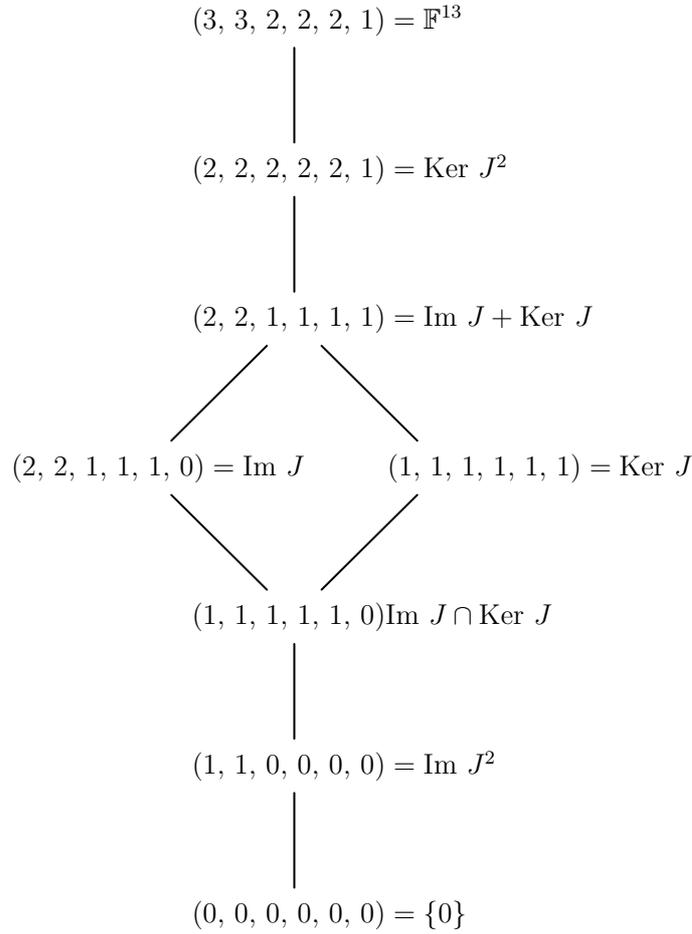
Cuando $A = J$ con un único valor propio, el retículo $\text{Hinv}(J)$ es isomorfo al retículo formado por el conjunto de las tuplas que cumplen las condiciones del Teorema 3.1.14. Además tiene como elemento $\{0\}$ la tupla trivial $(0, \dots, 0)$ y como elemento unidad la tupla que denota la característica de Segre, esto es $(\alpha_1, \dots, \alpha_{\omega_1})$.

Teorema 3.1.19 ([12]). En las condiciones del Teorema 3.1.14, la aplicación:

$$(k_1, \dots, k_{\omega_1}) \mapsto V(k_1, \dots, k_{\omega_1}) \quad (3.20)$$

es un isomorfismo de retículos.

Ejemplo 3.1.20. Para α como en el Ejemplo 1.1.11, las posibles tuplas no triviales son: $(1, 1, 0, 0, 0, 0)$, $(1, 1, 1, 1, 1, 0)$, $(1, 1, 1, 1, 1, 1)$, $(2, 2, 1, 1, 1, 0)$, $(2, 2, 1, 1, 1, 1)$, $(2, 2, 2, 2, 2, 1)$.



Además, para el caso general de una matriz $A \in M_n(\mathbb{F})$ con polinomio mínimo anulador de la forma:

$$m(t) = (t - \lambda_1)^{\alpha(1,1)} \dots (t - \lambda_r)^{\alpha(r,1)},$$

tenemos el siguiente teorema.

Teorema 3.1.21 ([12]). *Se cumple que:*

1. $\text{Hinv}(A)$ es distributivo y auto-dual.
2. $\text{Hinv}(A)$ es finito y su número de elementos siempre está comprendido entre 2 y 2^n .

3. $\text{Hinv}(A)$ es complementado (y por lo tanto un álgebra booleana) si y sólo si $m(t)$ tiene distintos factores irreducibles.
4. $\text{Hinv}(A)$ es irreducible si y sólo si $r = 1$.

Cuando $\mathbb{F} \neq GF(2)$, en virtud del Teorema 3.1.9, todos los resultados anteriores son aplicables a $\text{Chinv}(A)$.

3.2. SUBESPACIOS HIPERINVARIANTES UNIDIMENSIONALES

Los subespacios hiperinvariantes de dimensión 1 son los vectores propios comunes a todas las matrices del centralizador de una matriz dada y permiten un tratamiento directo sin necesidad de usar la caracterización general mediante tuplas (Teorema 3.1.14). Además, la caracterización de tales subespacios permite la obtención de resultados parciales para el caso de subespacios hiperinvariantes de dimensiones superiores que son generalizadas en la Sección 3.3. Todo ello está esencialmente recogido en [22], si bien las demostraciones están simplificadas mediante el uso de la forma canónica de Weyr siguiendo una sugerencia del Profesor Roger Horn.

3.2.1. Caracterización mediante la característica de Weyr

Sea $A \in M_n(\mathbb{F})$ una matriz reducible a una matriz de Jordan $J \in M_n(\mathbb{F})$. Tal y como hemos visto en el Capítulo 1, podemos limitarnos al caso nilpotente. En el teorema siguiente se enuncia una condición necesaria y suficiente para que todas las matrices que conmutan con A tengan un vector propio común.

Teorema 3.2.1. *Sea $A \in M_n(\mathbb{F})$ nilpotente con característica de Weyr $\omega = (\omega_1, \dots, \omega_{\alpha_1})$, entonces:*

- (1) *Las matrices $B \in Z(A)$ tienen un vector propio común si y sólo si $w_{\alpha_1} = 1$.*
- (2) *En tal caso, el subespacio de los vectores propios comunes es $\tilde{V}(1, 0, \dots, 0)$.*

Demostración. Podemos suponer $A = W$ en forma de Weyr. Para denotar una base asociada a W usaremos la notación habitual.

Por el Corolario 2.3.6 tenemos que:

$$\{KW^{\alpha_j-1}u_j \mid K \in Z(W)\} = \tilde{V}(\omega_{\alpha_j}, 0, \dots, 0), \quad (3.21)$$

con lo cual, es inmediato que si $\omega_{\alpha_1} = 1$, entonces $W^{\alpha_1-1}u_1$ es un vector propio para todas las matrices de $Z(W)$.

Supongamos ahora que v es un vector propio para toda $K \in Z(W)$. En particular $Wv = 0$ y por lo tanto:

$$v = \lambda_1 W^{\alpha_1-1}u_1 + \dots + \lambda_{\omega_1} W^{\alpha_{\omega_1}-1}u_{\omega_1}$$

En particular, otra vez aplicando el Corolario 2.3.6:

$$\{Kv \mid K \in Z(W)\} = \tilde{V}(\omega_1, 0, \dots, 0), \tag{3.22}$$

y por lo tanto, debe ser $\lambda_2 = \dots = \lambda_{\omega_1} = 0$ y por el Corolario 2.3.6, $\omega_{\alpha_1} = 1$. \square

Ejemplo 3.2.2. Si consideramos la matriz de Weyr:

$$W = \left[\begin{array}{cc|c|c|c|c} 2 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 1 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right], \tag{3.23}$$

y escribimos $\{e_1, e_2, e_3, e_4, e_5, e_6\}$ una base asociada a esta matriz.

El centralizador de W es:

$$Z(W) = \left\{ \left[\begin{array}{cc|c|c|c|c} x_1 & x_3 & x_2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & x_5 & x_4 & 0 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & x_1 & 0 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 & x_6 & x_7 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 & 0 & x_6 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & x_8 \end{array} \right] ; x_i \in \mathbb{F} \right\} \tag{3.24}$$

Observemos que $r = 3$, $q_1 = 2$, $q_2 = 2$, $q_3 = 1$ y:

$$\begin{aligned} \omega(1, 1) &= 2, \omega(1, 2) = 1, \\ \omega(2, 1) &= 1, \omega(2, 2) = 1 \\ \omega(3, 1) &= 1. \end{aligned}$$

Es pues inmediato ver que e_1, e_4, e_6 son vectores propios comunes a $Z(W)$.

Corolario 3.2.3. Si $A \in M_n(\mathbb{F})$ tiene más de un valor propio, el número de vectores propios comunes linealmente independientes para todas las matrices de $Z(A)$ es

$$\text{card}(\{i \in \{1, \dots, r\} \mid w(i, q_i) = 1\}). \tag{3.25}$$

3.2.2. Caracterización mediante la característica de Segre

En el teorema siguiente se enuncia una condición necesaria y suficiente respecto a la característica de Segre para que todas las matrices que conmutan con una matriz dada tengan un vector propio común.

Teorema 3.2.4. *Sea $A \in M_n(\mathbb{F})$ una matriz nilpotente con característica de Segre $\alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_{\omega_1})$, entonces:*

(1) *Las matrices $B \in Z(A)$ tienen un vector propio común si y sólo si $\omega_1 = 1$ o bien*

$$\alpha_1 > \alpha_2. \quad (3.26)$$

(2) *En tal caso, el conjunto de vectores propios comunes es $V(1, 0, \dots, 0)$.*

Demostración. Se deduce fácilmente por conjugación de particiones del Teorema 3.2.1 (para una demostración autónoma ver [22]). En efecto, si se cumple la condición necesaria y suficiente del Teorema 3.2.1, esto es, $\omega_{\alpha_1} = 1$ y consideramos la partición conjugada de:

$$(\omega_1, \dots, \omega_{\alpha_1})$$

resulta la característica de Segre:

$$(\alpha_1, \dots, \alpha_{\omega_1})$$

y por lo tanto tenemos que:

$$\omega_{\alpha_1} = 1 \Leftrightarrow \begin{cases} \omega_1 = 1 \\ \text{ó} \\ \alpha_1 > \alpha_2 \end{cases}$$

□

Ejemplo 3.2.5. Si consideramos la siguiente matriz:

$$A = \begin{bmatrix} 3 & -1 & 1 & -2 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & -2 & 4 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 11 & -18 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 6 & -10 & 0 & 0 \\ 2 & -1 & 8 & -14 & -2 & -1 \\ -3 & 4 & -17 & 30 & 2 & 1 \end{bmatrix} \quad (3.27)$$

con forma de Jordan J y base de Jordan S :

$$J = \left[\begin{array}{cc|cc|cc} 2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right], \quad S = \left[\begin{array}{cccccc} 2 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & -1 & -1 & -1 \\ -1 & 1 & -1 & -1 & 1 & 2 \end{array} \right] \quad (3.28)$$

El centralizador de J es:

$$Z(J) = \left\{ \left[\begin{array}{cc|cc|cc} x_1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ x_2 & x_1 & x_3 & 0 & 0 & 0 \\ \hline x_4 & 0 & x_5 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & x_6 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & x_7 & x_6 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & x_8 \end{array} \right] ; x_i \in \mathbb{F} \right\} \quad (3.29)$$

En este caso, $r = 3$, $m_1 = 2$, $m_2 = 1$, $m_3 = 1$ y:

$$\alpha(1, 1) = 2, \alpha(1, 2) = 1,$$

$$\alpha(2, 1) = 2,$$

$$\alpha(3, 1) = 1.$$

Si una base asociada a J es:

$$u_{1,1}, (A - 2I_6)u_{1,1}, u_{1,2}, u_{2,1}, (A + I_6)u_{2,1}, u_{3,1}.$$

Es inmediato ver que $(A - 2I_6)u_{1,1}, (A + I_6)u_{2,1}, u_{3,1}$ son vectores propios comunes a $Z(J)$ y haciendo el cambio de base correspondiente obtenemos que:

$$\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ -1 \\ 2 \end{bmatrix} \quad (3.30)$$

son vectores propios comunes de $Z(A)$.

Corolario 3.2.6. Si $A \in M_n(\mathbb{F})$ tiene más de un valor propio, el número de vectores propios comunes linealmente independientes para todas las matrices de $Z(A)$ es

$$\text{card}(\{i \in \{1, \dots, r\} \mid m_i = 1 \text{ o } m_i > 1 \text{ y } \alpha(i, 1) > \alpha(i, 2)\}). \quad (3.31)$$

Observación 3.2.7. Si consideramos sólo dos matrices $T_1, T_2 \in Z(J)$ que tienen un vector propio común v (es decir, $T_1 v = \lambda v$, $T_2 v = \mu v$ para algún $\lambda, \mu \in \mathbb{F}$), entonces T_1 y T_2 tienen como vectores propios comunes $Jv, J^2v, \dots, J^k v$ si $J^k v \neq 0$.

Ejemplo 3.2.8. Consideremos la matriz J del Ejemplo 3.2.5 y $T_1, T_2 \in Z(J)$:

$$T_1 = \left[\begin{array}{cc|cc|c} 2 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & -1 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 4 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right], \quad (3.32)$$

$$T_2 = \left[\begin{array}{cc|cc|c} -5 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -5 & 0 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 8 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right]. \quad (3.33)$$

Es inmediato ver que $T_1 u_{1,1} = 2u_{1,1}$ y que $T_2 u_{1,1} = -5u_{1,1}$, además;

$$T_1 J u_{1,1} = J T_1 u_{1,1} = 2J u_{1,1}, \quad T_1 J^2 u_{1,1} = J^2 T_1 u_{1,1} = 2J^2 u_{1,1}, \dots$$

$$T_2 J u_{1,1} = J T_2 u_{1,1} = -5J u_{1,1}, \quad T_2 J^2 u_{1,1} = J^2 T_2 u_{1,1} = -5J^2 u_{1,1}, \dots$$

Corolario 3.2.9. Sea V un subespacio hiperinvariante d -dimensional, con $d \geq 2$. Entonces, todas las matrices de $Z(A)$ tienen un vector propio común que pertenece a V si y sólo si la restricción de A sobre V cumple las condiciones del Teorema 3.2.4.

Demostración. Podemos remitirnos al caso $A = J$ matriz de Jordan.

Si consideramos $\{u_1, \dots, u_d\}$ una base cualquiera de V , las matrices de $Z(J)$ en una base de \mathbb{F}^n , $\{u_1, \dots, u_d, u_{d+1}, \dots, u_n\}$, son de la forma:

$$\left[\begin{array}{cc} X_1 & X_2 \\ 0 & X_3 \end{array} \right] \quad X_1 \in M_d(\mathbb{F}), X_3 \in M_{n-d}(\mathbb{F}), \quad (3.34)$$

con $X_1 \in Z(J|_V)$ y $X_3 \in Z(J|_G)$, siendo G un subespacio vectorial complementario V . \square

Ejemplo 3.2.10. Si consideramos la siguiente matriz:

$$J = \left[\begin{array}{cc|cc} 2 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \end{array} \right] \quad (3.35)$$

y escribimos una base asociada a J como:

$$u_{1,1}, (J - 2I_4)u_{1,1}, u_{1,2}, (J - 2I_4)u_{1,2}.$$

El centralizador de J es:

$$Z(J) = \left\{ \left[\begin{array}{cc|cc} x_1 & 0 & x_2 & 0 \\ x_3 & x_1 & x_4 & x_2 \\ \hline x_5 & 0 & x_6 & 0 \\ x_7 & x_5 & x_8 & x_6 \end{array} \right]; x_i \in \mathbb{F}, 1 \leq i \leq 8 \right\} \quad (3.36)$$

Tenemos que $V = \text{span}\{(J - 2I_4)u_{1,1}, (J - 2I_4)u_{1,2}\}$ es un subespacio invariante de dimensión 2 para todas las matrices de $Z(J)$. Si consideramos la base $\{(J - 2I_4)u_{1,1}, (J - 2I_4)u_{1,2}, u_{1,1}, u_{1,2}\}$, las matrices de $Z(J)$ son de la forma:

$$\left[\begin{array}{c|c} X_1 & X_2 \\ \hline 0 & X_3 \end{array} \right] \quad (3.37)$$

Como $J|_V = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}$ y $Z(J|_V) = \left\{ \left[\begin{array}{c|c} x_1 & x_2 \\ \hline x_3 & x_4 \end{array} \right]; x_i \in \mathbb{F} \right\}$, entonces no existe ningún vector propio común para las matrices de $Z(J|_V)$ y por lo tanto las matrices de $Z(J)$ no tienen ningún vector propio común que esté en V .

3.2.3. Criterios elementales para la existencia de subespacios hiperinvariantes d -dimensionales

De las construcciones anteriores se deducen criterios elementales para la existencia de subespacios hiperinvariantes de dimensión $d \geq 2$. En la Sección 3.4. obtendremos criterios generales.

Teorema 3.2.11. *Con las notaciones de la Definición 1.1.3, supongamos que existe $i \in \{1, \dots, r\}$, de manera que se cumple una de las siguientes condiciones:*

- (i) $m_i = 1$ y $\alpha(i, 1) \geq d \geq 2$,
- (ii) $m_i > 1$ y $\alpha(i, 1) \geq \alpha(i, 2) + d$, $d \geq 2$.

Entonces un subespacio hiperinvariante de dimensión d es el generado por

$$(A - \lambda I_n)^{\alpha(i,1)-d} u_{i,1}, \dots, (A - \lambda I_n)^{\alpha(i,1)-2} u_{1,1}, (A - \lambda I_n)^{\alpha(i,1)-1} u_{i,1}$$

Demostración. Podemos suponer $A = J$ en forma de Jordan. El subespacio vectorial

$$(A - \lambda_i I_n)^{\alpha(i,1)-d} u_{i,1}, \dots, (A - \lambda_i I_n)^{\alpha(i,1)-2} u_{1,1}, (A - \lambda_i I_n)^{\alpha(i,1)-1} u_{i,1}$$

es claramente un subespacio T_i -invariante, donde $T_i \in Z(J(\lambda_i))$ y por lo tanto es T -invariante para todo $T \in Z(J)$. \square

Ejemplo 3.2.12. Si consideramos otra vez la matriz A en el Ejemplo 3.2.5, la condición (i) del Teorema 3.2.11 se cumple para el valor propio $\lambda_2 = -1$. Por lo tanto, el subespacio:

$$\text{span}\{u_{2,1}, (A + I_6)u_{2,1}\}$$

es hiperinvariante. Mediante cálculo directo podemos encontrar todos ellos, como se recoge en la tabla siguiente.

$d = 2$	$\text{span}\{(A - 2I_6)u_{1,1}, u_{1,2}\}, \text{span}\{(A - 2I_6)u_{1,1}, (A + I_6)u_{2,1}\},$ $\text{span}\{(A - 2I_6)u_{1,1}, u_{3,1}\}, \text{span}\{u_{2,1}, (A + I_6)u_{2,1}\},$ $\text{span}\{(A + I_6)u_{2,1}, u_{3,1}\}$
$d = 3$	$\text{span}\{u_{1,1}, (A - 2I_6)u_{1,1}, u_{1,2}\}, \text{span}\{(A - 2I_6)u_{1,1}, u_{1,2}, (A + I_6)u_{2,1}\},$ $\text{span}\{(A - 2I_6)u_{1,1}, u_{1,2}, u_{3,1}\}, \text{span}\{(A - 2I_6)u_{1,1}, (A + I_6)u_{2,1}, u_{3,1}\},$ $\text{span}\{u_{2,1}, (A + I_6)u_{2,1}, u_{3,1}\}$
$d = 4$	$\text{span}\{u_{1,1}, (A - 2I_6)u_{1,1}, u_{1,2}, (A + I_6)u_{2,1}\},$ $\text{span}\{u_{1,1}, (A - 2I_6)u_{1,1}, u_{1,2}, u_{3,1}\},$ $\text{span}\{(A - 2I_6)u_{1,1}, u_{1,2}, u_{2,1}, (A + I_6)u_{2,1}\},$ $\text{span}\{(A - 2I_6)u_{1,1}, u_{1,2}, (A + I_6)u_{2,1}, u_{3,1}\},$ $\text{span}\{(A - 2I_6)u_{1,1}, u_{2,1}, (A + I_6)u_{2,1}, u_{3,1}\}$
$d = 5$	$\text{span}\{u_{1,1}, (A - 2I_6)u_{1,1}, u_{1,2}, u_{2,1}, (A + I_6)u_{2,1}\},$ $\text{span}\{u_{1,1}, (A - 2I_6)u_{1,1}, u_{1,2}, (A + I_6)u_{2,1}, u_{3,1}\},$ $\text{span}\{(A - 2I_6)u_{1,1}, u_{1,2}, u_{2,1}, (A + I_6)u_{2,1}, u_{3,1}\}$

3.3. CARACTERIZACIÓN GENERAL DE LOS SUBESPACIOS HIPERINVARIANTES

En esta sección presentamos nuevas caracterizaciones de los subespacios hiperinvariantes, que en particular permitirán demostrar fácilmente la ya conocida del Teorema 3.3.6.

3.3.1. Caracterización mediante la característica de Weyr

Consideramos una matriz nilpotente $A \in M_n(\mathbb{F})$ con forma de Weyr W y escribimos $\omega = (\omega_1, \dots, \omega_{\alpha_1})$ su característica de Weyr (la conjugada de la de Segre $\alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_{\omega_1})$).

Para la caracterización de $\text{Hinv}(A)$, es útil considerar la notación introducida en la Definición 1.2.24, en la cual denotamos como $\tilde{V}_{l_j}^j$ al subespacio vectorial generado por los primeros l_j vectores de la fila j -ésima del diagrama de Young correspondiente, además recordemos que:

$$\tilde{V}(l_1, \dots, l_{\alpha_1}) = \tilde{V}_{l_1}^1 \oplus \dots \oplus \tilde{V}_{l_{\alpha_1}}^{\alpha_1}.$$

Lema 3.3.1. *Dada una partición $\alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_{\omega_1})$ y su conjugada $\omega = (\omega_1, \dots, \omega_{\alpha_1})$, entonces, para $i = 1, \dots, \alpha_1$, se cumple que:*

$$\omega_{\alpha_{\omega_i}} = \omega_i. \quad (3.38)$$

Demostración. Por un lado tenemos que:

$$\omega_{\alpha_{\omega_i}} = \#\{l \mid \alpha_l \geq \alpha_{\omega_i}\} \geq \omega_i,$$

y por otro lado

$$\alpha_{\omega_i} = \#\{l \mid \omega_l \geq \omega_i\} \geq i \Rightarrow \omega_{\alpha_{\omega_i}} \leq \omega_i.$$

□

Usando la notación anterior tenemos la siguiente caracterización de $\text{Hinv}(A)$:

Teorema 3.3.2. *Sea $A \in M_n(\mathbb{F})$ nilpotente, con característica de Weyr $\omega = (\omega_1, \dots, \omega_{\alpha_1})$. Con la notación introducida en la Definición 1.2.24, $V \in \text{Hinv}(A)$ si y sólo si:*

$$V = \tilde{V}(\omega_{j_1}, \dots, \omega_{j_k}, 0, \dots, 0), \quad (3.39)$$

con:

$$1 \leq j_1 < \dots < j_k \leq \alpha_1. \quad (3.40)$$

Demostración. Nos podemos remitir al caso en que $A = W$ está en forma canónica de Weyr. Veamos primero que los subespacios de la forma:

$$\tilde{V}(\omega_{j_1}, \dots, \omega_{j_k}, 0, \dots, 0),$$

con:

$$1 \leq j_1 < \dots < j_k \leq \alpha_1,$$

son subespacios hiperinvariantes. Por el Teorema 2.3.11 basta demostrar que:

$$\text{máx}\{\omega_{\alpha_{\omega_{j_i}}}, \omega_{\alpha_{\omega_{j_{i+1}}} - 1}, \dots, \omega_{\alpha_{\omega_{j_k}} - (k-i)}\} = \omega_{\alpha_{\omega_{j_i}}} = \omega_{j_i}, \quad (3.41)$$

donde la última igualdad resulta del Lema 3.3.1. Equivalentemente:

$$j_i \leq \alpha_{\omega_{j_{i+1}}} - 1, \dots, \alpha_{\omega_{j_k}} - (k - i). \quad (3.42)$$

Esto es, que para $i + 1 \leq l \leq k$,

$$\alpha_{\omega_{j_l}} \geq j_i + (l - i), \quad (3.43)$$

lo cual se deriva del hecho de que:

$$\alpha_{\omega_{j_l}} = \#\{s \mid \omega_s \geq \omega_{j_l}\} \geq j_l. \quad (3.44)$$

Para la implicación contraria, supongamos que $V \in \text{Hinv}(W)$. Entonces como consecuencia de la Proposición 3.1.11 tenemos que:

$$V = (V \cap E_1) \oplus \dots \oplus (V \cap E_m) = V(k_1, \dots, k_m), \quad (3.45)$$

donde

$$V \cap E_i = \text{span}\{W^{\alpha_i - k_i} u_i, \dots, W^{\alpha_i - 1} u_i\}. \quad (3.46)$$

Veamos que $k_{i-1} \geq k_i$. En efecto, por (2) del Teorema 2.3.4:

$$\{KW^{\alpha_i - k_i} u_i \mid K \in Z(W)\} = \text{Im } W^{\alpha_i - k_i} \cap \ker W^{k_i} \subseteq V, \quad (3.47)$$

donde la última inclusión se deriva de que $W^{\alpha_i - k_i} u_i \in V$. Como:

$$W^{\alpha_{i-1} - k_i} u_{i-1} \in \text{Im } W^{\alpha_i - k_i} \cap \ker W^{k_i} \subseteq V, \quad (3.48)$$

debe ser $k_{i-1} \geq k_i$.

Con ello podemos escribir (ver Observación 1.2.26):

$$V = V(k_1, \dots, k_m) = \tilde{V}(l_1, \dots, l_{\alpha_1}), \quad (3.49)$$

$$l_1 \geq l_2 \geq \dots \geq l_{\alpha_1} \geq 0. \quad (3.50)$$

Por ser $\tilde{V}(l_1, \dots, l_{\alpha_1})$ hiperinvariante, debe ser:

$$\bigcup \{K\tilde{V}(l_1, \dots, l_k, 0, \dots, 0) \mid K \in Z(W)\} = \tilde{V}(l_1, \dots, l_k, 0, \dots, 0), \quad (3.51)$$

siendo $k = \text{máx}\{j \mid l_j \neq 0\}$. Por otra parte, por el Teorema 2.3.11:

$$\bigcup \{K\tilde{V}(l_1, \dots, l_k, 0, \dots, 0) \mid K \in Z(W)\} = \tilde{V}(\omega_{j_1}, \dots, \omega_{j_k}, 0, \dots, 0), \quad (3.52)$$

donde:

$$j_i = \min\{\alpha_{l_i}, \alpha_{l_{i+1}} - 1, \dots, \alpha_{l_k} - k + i\}. \quad (3.53)$$

Así pues, debe ser $l_i = \omega_{j_i}$, esto es:

$$V = \tilde{V}(\omega_{j_1}, \dots, \omega_{j_k}, 0, \dots, 0). \quad (3.54)$$

Falta ver finalmente, que $j_i < j_{i+1}$. Ello es obvio si $l_i > l_{i+1}$. Si $l_i = l_{i+1}$, tendríamos:

$$\begin{aligned} j_i &= \min\{\alpha_{l_{i+1}}, \alpha_{l_{i+1}} - 1, \dots, \alpha_{l_k} - k + i\} = \\ &= \min\{\alpha_{l_{i+1}} - 1, \dots, \alpha_{l_k} - k + i\} < \\ &< \min\{\alpha_{l_{i+1}}, \alpha_{l_{i+2}} - 1, \dots, \alpha_{l_k} - k + i + 1\} = j_{i+1}. \end{aligned}$$

□

Ejemplo 3.3.3. Siendo α como en el Ejemplo 1.1.10, tenemos que $\omega = (4, 3, 1, 1, 1)$ (conjugada de $\alpha = (5, 2, 2, 1)$). Entonces, tenemos los siguientes subespacios hiperinvariantes no triviales:

$$\begin{aligned} \tilde{V}(1, 0, 0, 0, 0) &= V(1, 0, 0, 0), \\ \tilde{V}(3, 0, 0, 0, 0) &= V(1, 1, 1, 0), \\ \tilde{V}(4, 0, 0, 0, 0) &= V(1, 1, 1, 1), \\ \tilde{V}(1, 1, 0, 0, 0) &= V(2, 0, 0, 0), \\ \tilde{V}(1, 1, 1, 0, 0) &= V(3, 0, 0, 0), \\ \tilde{V}(3, 1, 0, 0, 0) &= V(2, 1, 1, 0), \\ \tilde{V}(3, 1, 1, 0, 0) &= V(3, 1, 1, 0), \\ \tilde{V}(3, 1, 1, 1, 0) &= V(4, 1, 1, 0), \\ \tilde{V}(4, 1, 0, 0, 0) &= V(2, 1, 1, 1), \\ \tilde{V}(4, 1, 1, 0, 0) &= V(3, 1, 1, 1), \\ \tilde{V}(4, 1, 1, 1, 0) &= V(4, 1, 1, 1), \\ \tilde{V}(4, 3, 0, 0, 0) &= V(2, 2, 2, 1), \\ \tilde{V}(4, 3, 1, 0, 0) &= V(3, 2, 2, 1), \\ \tilde{V}(4, 3, 1, 1, 0) &= V(4, 2, 2, 1). \end{aligned}$$

$$K = \left[\begin{array}{cccc|ccc|c|c|c} y_2 & y_{15} & y_{16} & y_{28} & y_1 & y_{27} & y_{17} & y_{10} & y_3 & y_{18} \\ 0 & y_4 & y_5 & y_{19} & 0 & y_{20} & y_{21} & 0 & y_6 & y_{22} \\ 0 & y_7 & y_8 & y_{23} & 0 & y_{24} & y_{25} & 0 & y_9 & y_{26} \\ 0 & 0 & 0 & y_{11} & 0 & y_{12} & y_{13} & 0 & 0 & y_{14} \\ \hline 0 & 0 & 0 & 0 & y_2 & y_{15} & y_{16} & y_1 & y_{10} & y_3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & y_4 & y_5 & 0 & 0 & y_6 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & y_7 & y_8 & 0 & 0 & y_9 \\ \hline 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & y_2 & y_1 & y_{10} \\ \hline 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & y_2 & y_1 \\ \hline 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & y_2 \end{array} \right].$$

3.3.2. Caracterización mediante hipertuplas (de Segre)

Para su utilización posterior, nos conviene caracterizar los subespacios hiperinvariantes a través de la característica de Segre.

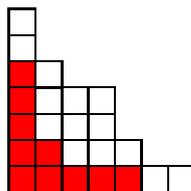
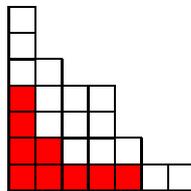
Definición 3.3.4. Llamaremos *hipertuplas* a las particiones $(k_1, \dots, k_{\omega_1})$ que aparecen en el Teorema 3.1.14, es decir, tales que:

$$k_1 \geq \dots \geq k_{\omega_1}, \quad (3.55)$$

$$\alpha_1 - k_1 \geq \dots \geq \alpha_{\omega_1} - k_{\omega_1} \quad (3.56)$$

Cada hipertupla puede verse como la selección de una casilla en cada columna del diagrama de Young de forma que las alturas y profundidades sean decrecientes. En particular han de ser constantes mientras α lo sea.

Ejemplo 3.3.5. Para $\alpha = (7, 5, 4, 4, 2, 1, 1)$, en el primer diagrama de Young está representada una hipertupla, mientras que el segundo simplemente una tupla admisible (correspondiente a un subespacio marcado no hiperinvariante).



Presentamos una demostración alternativa (y notablemente más sencilla) a la de [15], del Teorema 3.1.14 que enunciaremos usando la terminología introducida en la Definición 3.3.4.

Teorema 3.3.6 ([15]). *Si $A \in M_n(\mathbb{F})$ es una matriz nilpotente y su característica de Segre es $\alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_{\omega_1})$, entonces $Y \in \text{Hinv}(A)$ si y sólo si $Y = V(k_1, \dots, k_{\omega_1})$ para alguna hipertupla $(k_1, \dots, k_{\omega_1})$.*

Demostración. Podemos suponer que $A = J$ está en forma de Jordan. Basta con ver que las particiones del Teorema 3.3.2 son particiones conjugadas para las hipertuplas. Sea pues, $\omega = (\omega_1, \dots, \omega_{\alpha_1})$ la conjugada de α , y consideremos:

$$(\omega_{j_1}, \dots, \omega_{j_k}) \tag{3.57}$$

$$1 \leq j_1 < \dots < j_k \leq \alpha_1 \tag{3.58}$$

entonces, tenemos que si (k_1, \dots, k_p) es la conjugada de $(\omega_{j_1}, \dots, \omega_{j_k})$:

$$\begin{aligned} k_1 &= \#\{i \mid \omega_{j_i} \geq 1\} = k, & \alpha_1 &= \#\{i \mid \omega_i \geq 1\}, \\ k_2 &= \#\{i \mid \omega_{j_i} \geq 2\}, & \alpha_2 &= \#\{i \mid \omega_i \geq 2\}, \\ & \dots & & \\ k_p &= \#\{i \mid \omega_{j_i} \geq p\}, & \alpha_p &= \#\{i \mid \omega_i \geq p\}. \end{aligned}$$

Por definición de partición conjugada se cumple que:

$$k_1 \geq \dots \geq k_p$$

y además

$$\begin{aligned} k_1 - k_2 &= \#\{i \mid \omega_{j_i} = 1\} \leq \alpha_1 - \alpha_2 = \#\{i \mid \omega_i = 1\}, \\ k_2 - k_3 &= \#\{i \mid \omega_{j_i} = 2\} \leq \alpha_2 - \alpha_3 = \#\{i \mid \omega_i = 2\}, \\ & \dots, \\ k_{p-1} - k_p &= \#\{i \mid \omega_{j_i} = p - 1\} \leq \alpha_{p-1} - \alpha_p = \#\{i \mid \omega_i = p - 1\}. \end{aligned}$$

□

De este teorema se siguen los resultados de la sección anterior sobre hiperinvariantes unidimensionales.

Corolario 3.3.7. *Con las notaciones anteriores, dada una matriz $A \in M_n(\mathbb{F})$, entonces todos los elementos de $Z(A)$ tienen un vector propio común si y sólo si, $m_i = 1$ o bien para algún $i \in \{1, \dots, r\}$ se cumple que:*

$$\alpha(i, 1) > \alpha(i, 2) \geq \alpha(i, 3) \geq \dots \geq \alpha(i, m_i). \tag{3.59}$$

Demostración. Sabemos que existe un vector propio común si y sólo si $(1, 0, \dots, 0)$ es hipertupla para algún valor propio λ_i de A , y esto es equivalente a que $m_i = 1$, esto es, la característica de Segre del valor propio λ_i sólo tenga un elemento o si $m_i > 1$, se cumpla que $\alpha(i, 1) - 1 \geq \alpha(i, 2)$ y por lo tanto $\alpha(i, 1) > \alpha(i, 2)$. \square

3.3.3. Caracterización mediante estabilidad estructural

De la caracterización anterior de los subespacios hiperinvariantes se sigue la siguiente que pone de manifiesto su papel destacado como subfamilia de los subespacios invariantes: un subespacio marcado es estructuralmente estable si y sólo si es hiperinvariante.

Intuitivamente, un elemento se dice “estructuralmente estable” si ciertas propiedades características no se ven alteradas por pequeñas perturbaciones. De forma precisa, en nuestro caso:

Definición 3.3.8. Consideremos la variedad diferenciable (ver 1.2.16):

$$\{(A, V) : \dim V = d, \quad V \text{ es } A\text{-invariante}\} \subset M_n(\mathbb{C}) \times Gr_d(E). \quad (3.60)$$

Un par (A, V) se dice *estructuralmente estable* si todos los de un cierto entorno $\mathcal{U} \subset M_n(\mathbb{C}) \times Gr_d(E)$ le son equivalentes, esto es, para todo $(A', V') \in \mathcal{U}$ existe $S \in GL_n(\mathbb{C})$ tal que:

$$S^{-1}AS = A', \quad S^{-1}V = V'. \quad (3.61)$$

En otras palabras (ver 1.2.18), (A, V) es un punto interior a su órbita

$$\widetilde{(A, V)} = \{(S^{-1}AS, S^{-1}V), S \in GL_n(\mathbb{C})\} \subset M_n(\mathbb{C}) \times Gr_d(E)$$

Con ello (véase de nuevo 1.2.16):

Lema 3.3.9. (A, V) es estructuralmente estable si y sólo si:

$$\text{codim } \widetilde{(A, V)} = 0. \quad (3.62)$$

Podemos ya abordar el resultado anunciado. Recordemos (ver 1.3.12) que la familia de los pares (A, V) marcados contiene a la de hiperinvariantes. Veamos que éstos son precisamente los estructuralmente estables:

Teorema 3.3.10. *En las condiciones de la Definición 3.3.8, un par (A, V) marcado es hiperinvariante si y sólo si es estructuralmente estable.*

Demostración. Escribiremos como siempre $\alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_{\omega_1})$ la característica de Segre de A . Para calcular $\dim \widetilde{(A, V)}$, claramente podemos sustituir (A, V) por cualquier otro par equivalente. En particular, tomando S una base de E adaptada a V (esto es, obtenida por extensión de una base de V) resulta:

$$S^{-1}V = \mathbb{C}^d, \quad S^{-1}AS = \begin{bmatrix} A_1 & A_3 \\ \mathbb{O} & A_2 \end{bmatrix} \equiv A_0, \quad \dim \widetilde{(A, V)} = \dim \widetilde{(A_0, \mathbb{C}^d)}. \quad (3.63)$$

Evidentemente, mediante un nuevo cambio

$$S' = \begin{bmatrix} S_1 & \mathbb{O} \\ \mathbb{O} & S_2 \end{bmatrix},$$

podemos elegir una nueva base adaptada de forma que $A_1 = J_1 \in M_d(\mathbb{C})$ y $A_2 = J_2 \in M_{n-d}(\mathbb{C})$ sean matrices de Jordan. En particular escribiremos las características de Segre como:

$$\beta = (\beta_1, \dots, \beta_r), \quad \gamma = (\gamma_1, \dots, \gamma_s),$$

estas características de Segre están adaptadas a α y por lo tanto no son necesariamente decrecientes. Más concretamente, denotaremos por p el subíndice tal que:

$$\beta_1 \geq \dots \geq \beta_p, \quad \text{y} \quad \beta_p < \beta_{p+1}$$

Recordemos por otra parte (ver 1.1.26) que $\text{codim} \widetilde{(A, V)}$ es el número de parámetros de cualquier deformación miniversal. En [7] se demuestra que, para pares (A_0, \mathbb{C}^d) una tal deformación miniversal viene dada por

$$A_0 + \begin{bmatrix} X & Z \\ \mathbb{O} & Y \end{bmatrix} \quad (3.64)$$

donde X, Y, Z recorren las soluciones de:

$$J_1^* Z - Z J_2^* = 0 \quad (3.65)$$

$$[J_1^*, X] - Z A_3^* = 0 \quad (3.66)$$

$$[Y, J_2^*] - A_3^* Z = 0 \quad (3.67)$$

Por tanto, el par marcado (A, V) es estructuralmente estable si y sólo si la única solución es $X = Y = Z = 0$.

Estas ecuaciones se resuelven en [6] en el caso en que la matriz sea marcada y en particular se caracteriza A_0 para que la única solución sea $X = Y = Z = 0$. De hecho aparecen en un contexto equivalente al que

nos ocupa, cuando se perturban matrices marcadas A_0 (esto es, para las que el subespacio invariante \mathbb{C}^d es marcado) manteniendo el bloque 0 en el cuadrante inferior izquierda.

En cualquier caso, se concluye que las condiciones en A_0 para que la única solución sea $X = Y = Z = 0$ son las siguientes:

$$(i) \quad p = \min(r, s) .$$

$$(ii) \quad \beta_i \geq \beta_{i+1} .$$

$$(iii) \quad \gamma_i \geq \gamma_{i+1} .$$

Condiciones que son justamente las que caracterizan las hipertuplas. \square

3.4. SUBESPACIOS HIPERINVARIANTES ASOCIADOS A UNA HIPERTUPLA CON VALORES PREFIJADOS

En las construcciones del Capitulo 4 necesitaremos prefijar algunos coeficientes de las hipertuplas que determinan subespacios hiperinvariantes de la forma $V(k_1, \dots, k_m)$. Veamos por el momento algunos resultados previos sobre existencia y dimensión. En la próxima sección procederemos a su conteo.

Como antes, podemos restringirnos a matrices $A \in M_n(\mathbb{F})$ nilpotentes y supondremos $\alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_m)$ su característica de Segre. Recordemos que, si conviene, podemos suponer $\alpha_1 > \alpha_2 > \dots > \alpha_m$, ya que si $\alpha_i = \alpha_{i+1}$ necesariamente $k_i = k_{i+1}$ en cualquier hipertupla.

Proposición 3.4.1. *Sea $A \in M_n(\mathbb{F})$ nilpotente y $\alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_m)$ su característica de Segre. Dados enteros positivos:*

$$c_{i_1} \leq \alpha_{i_1}, \dots, c_{i_r} \leq \alpha_{i_r}, \quad 1 \leq i_1 < \dots < i_r \leq m, \quad (3.68)$$

existen subespacios hiperinvariantes:

$$V(k_1, \dots, k_m) \text{ con } k_{i_1} = c_{i_1}, \dots, k_{i_r} = c_{i_r}, \quad (3.69)$$

si y sólo si:

$$c_{i_1} \geq \dots \geq c_{i_r}, \quad (3.70)$$

$$\alpha_{i_1} - c_{i_1} \geq \dots \geq \alpha_{i_r} - c_{i_r} \quad (3.71)$$

Demostración. La condición es evidentemente necesaria por el Teorema 3.3.6. Para la suficiencia basta con construir una hipertupla de la forma:

$$(k_1, \dots, k_{i_j-1}, c_{i_j}, k_{i_j+1}, \dots, k_m). \quad (3.72)$$

Lo haremos por concatenación entre los índices $1, i_1, \dots, i_r, m$. Si $1 < i_1$, basta tomar:

$$k_1 = \dots = k_{i_1-1} = c_{i_1}. \quad (3.73)$$

Si $i_r < m$, basta tomar para $i_r < i \leq m$:

$$k_i = \text{máx}\{\alpha_i - (\alpha_{i_r} - c_{i_r}), 0\}. \quad (3.74)$$

Finalmente, para $i_j < i < i_{j+1}$, basta tomar:

$$k_i = \text{máx}\{\alpha_i - (\alpha_{i_j} - c_{i_j}), c_{i_{j+1}}\}. \quad (3.75)$$

□

Ejemplo 3.4.2. Para $\alpha = (11, 9, 8, 7, 5, 4, 3, 2, 1)$, prefijamos $c_3 = 5, c_7 = 2$, esto es, nos preguntamos por hipertuplas de la forma:

$$(k_1, k_2, 5, k_4, k_5, k_6, 2, k_8, k_9). \quad (3.76)$$

Según la demostración de la proposición anterior, podemos tomar:

$$k_1 = k_2 = 5, \quad (3.77)$$

$$k_4 = 7 - (8 - 5) = 4, k_5 = 5 - (8 - 5) = 2, k_6 = 2, \quad (3.78)$$

$$k_8 = 2 - (3 - 2) = 1, k_9 = 1 - (3 - 2) = 0, \quad (3.79)$$

que resulta:

$$(5, 5, 5, 4, 2, 2, 2, 1, 0). \quad (3.80)$$

Observemos que también podríamos haber tomado:

$$(8, 6, 5, 5, 5, 3, 2, 2, 1). \quad (3.81)$$

De hecho, como veremos a continuación, esas hipertuplas corresponden a los subespacios hiperinvariantes de dimensión mínima y máxima respectivamente (para las restricciones $c_3 = 5, c_7 = 2$).

Como ha mostrado el ejemplo anterior, la hipertupla construida en la Proposición 3.4.1 no es la única con las restricciones $k_{i_j} = c_{i_j}$ requeridas. Veamos a continuación cuáles de entre ellas corresponden a subespacios hiperinvariantes de dimensiones máxima y mínima, teniendo en cuenta que, obviamente:

$$\dim V(k_1, \dots, k_m) = k_1 + \dots + k_m. \quad (3.82)$$

De hecho, veremos que las construidas en la demostración de la Proposición 3.4.1 corresponden a dimensión mínima. Como allí, podemos proceder por concatenación, de modo que basta considerar tres casos particulares: prefijar $k_1 = c_1$, prefijar $k_m = c_m$, prefijar $k_1 = c_1$ y $k_m = c_m$.

Proposición 3.4.3. *Sea $A \in M_n(\mathbb{F})$ nilpotente y $\alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_m)$ su característica de Segre.*

1. *Para los subespacios hiperinvariantes de la forma:*

$$V(k_1, \dots, k_{m-1}, c_m), \quad c_m \leq \alpha_m, \quad (3.83)$$

las dimensiones máxima y mínima resultan respectivamente para las hipertuplas:

$$k_i = \alpha_i - (\alpha_m - c_m), \quad 1 \leq i < m, \quad (3.84)$$

$$k_i = c_m, \quad 1 \leq i < m. \quad (3.85)$$

2. *Para los subespacios hiperinvariantes de la forma:*

$$V(c_1, k_2, \dots, k_m), \quad c_1 \leq \alpha_1, \quad (3.86)$$

las dimensiones máxima y mínima resultan respectivamente para las hipertuplas:

$$k_i = \min\{c_1, \alpha_i\}, \quad 1 < i \leq m, \quad (3.87)$$

$$k_i = \max\{\alpha_i - (c_1 - \alpha_1), 0\}, \quad 1 < i \leq m. \quad (3.88)$$

3. *Para los subespacios hiperinvariantes de la forma:*

$$V(c_1, k_2, \dots, k_{m-1}, c_m), \quad c_1 \leq \alpha_1, c_m \leq \alpha_m, \quad (3.89)$$

$$c_1 \geq c_m, \alpha_1 - c_1 \geq \alpha_m - c_m, \quad (3.90)$$

las dimensiones máxima y mínima resultan respectivamente por las hipertuplas:

$$k_i = \min\{c_1, \alpha_i - (\alpha_m - c_m)\}, \quad 1 < i < m, \quad (3.91)$$

$$k_i = \max\{\alpha_i - (\alpha_1 - c_1), c_m\} \quad 1 < i < m. \quad (3.92)$$

Demostración. 1. Consideremos hipertuplas de la forma:

$$(k_1, \dots, k_{m-1}, c_m). \tag{3.93}$$

Apliquemos el Teorema 3.3.6 por recurrencia (reversa, en este caso):

$$\begin{aligned} c_m &\leq k_{m-1} \leq \alpha_{m-1} - (\alpha_m - c_m), \\ c_m &\leq k_{m-1} \leq k_{m-2} \leq \alpha_{m-2} - (\alpha_{m-1} - k_{m-1}) \leq \alpha_{m-2} - (\alpha_m - c_m), \\ &\dots\dots\dots \\ c_m &\leq k_{m-1} \leq \dots \leq k_i \leq \alpha_i - (\alpha_{i+1} - k_{i+1}) \leq \dots \leq \alpha_i - (\alpha_m - c_m), \\ &\dots\dots\dots \end{aligned}$$

Por tanto, la hipertupla “mínima” es la referida en (3.85) y la “máxima”, en (3.84).

2. Consideremos hipertuplas de la forma:

$$(c_1, k_2, \dots, k_m). \tag{3.94}$$

Entonces por el Teorema 3.3.6, procediendo como antes:

$$k_i \leq \alpha_i \text{ y } k_i \leq c_1, \tag{3.95}$$

$$k_i \geq 0 \text{ y } c_1 - k_i \leq \alpha_1 - k_i. \tag{3.96}$$

3. Consideremos hipertuplas de la forma:

$$(c_1, k_2, \dots, k_{m-1}, c_m). \tag{3.97}$$

Entonces por el Teorema 3.3.6, procediendo como antes:

$$k_i \leq c_1 \text{ y } k_i - c_m \leq \alpha_i - \alpha_m, \tag{3.98}$$

y que:

$$k_i \geq c_m \text{ y } c_1 - k_i \leq \alpha_1 - k_i. \tag{3.99}$$

□

Ejemplo 3.4.4. Siguiendo con el ejemplo anterior, $\alpha = (11, 9, 8, 7, 5, 4, 3, 2, 1)$, resulta:

$$26 \leq \dim V(k_1, k_2, 5, k_4, k_5, k_6, 2, k_8, k_9) \leq 37. \tag{3.100}$$

3.5. CONTANDO SUBESPACIOS HIPERINVARIANTES

Es ya conocido ([15]) el cómputo del número total de subespacios hiperinvariantes para una matriz J . Veremos en esta sección que, gracias a la caracterización por hipertuplas en 3.1.14, podemos contar separadamente los de cada dimensión prefijada. Igualmente los que resultan de prefijar algunos valores de las hipertuplas como en la Sección anterior. En ambos casos el resultado puede expresarse en términos de los coeficientes de determinados polinomios generadores.

3.5.1. Contando subespacios hiperinvariantes de dimensión fija

En primer lugar recordamos la teoría de las funciones generatrices (ver por ejemplo [29], [30]). Recordemos que dada una sucesión de números reales a_0, a_1, \dots se llama su *función generatriz* a la siguiente serie de potencias:

$$G(x) = a_0 + a_1x + \dots$$

Las funciones generatrices son utilizadas para resolver una gran variedad de problemas de contaje. En particular son una herramienta útil para contar soluciones de ecuaciones diofánticas, esto es, ecuaciones en las que sólo admitimos soluciones enteras. Por ejemplo, el número de soluciones enteras no negativas de una ecuación de la forma:

$$x_1 + x_2 + \dots + x_n = C,$$

donde C es una constante entera positiva, es el coeficiente de x^C en:

$$(1 + x + x^2 + \dots + x^C)^n.$$

Si tenemos restricciones sobre las variables x_i de la forma $a_i \leq x_i \leq b_i$, entonces hay que considerar otro polinomio generador:

$$(x^{a_1} + \dots + x^{b_1}) \dots (x^{a_n} + \dots + x^{b_n}).$$

Más en general:

Teorema 3.5.1 ([30]). *Siendo $a_1, \dots, a_n, b_1, \dots, b_n, C$ enteros no negativos, el número de soluciones de la ecuación diofántica:*

$$c_1x_1 + c_2x_2 + \dots + c_nx_n = C, \tag{3.101}$$

tales que $a_i \leq x_i \leq b_i$, es el coeficiente de x^C en:

$$(x^{c_1 a_1} + \dots + x^{c_1 b_1}) \dots (x^{c_n a_n} + \dots + x^{c_n b_n}). \quad (3.102)$$

Veamos que ello permite calcular el número de subespacios hiperinvariantes para cada dimensión.

Lema 3.5.2. *Dada $A \in M_n(\mathbb{F})$ nilpotente con característica de Segre $\alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_m)$, sean τ , s_i , d_i y S_i como en la Definición 1.1.9. El número de subespacios hiperinvariantes de dimensión d , $0 \leq d \leq n$, coincide con el número de soluciones de la siguiente ecuación diofántica:*

$$S_1 x_1 + \dots + S_\tau x_\tau = d \quad (3.103)$$

con la condición $0 \leq x_i \leq d_i$, $1 \leq i \leq \tau$.

Demostración. Según el Teorema 3.1.14, fijada una base de Jordan, un subespacio hiperinvariante viene determinado por una tupla

$$(y_1, \dots, y_1, \dots, y_\tau, \dots, y_\tau),$$

donde

$$\begin{aligned} y_1 &\leq n_1, \dots, y_\tau \leq n_\tau, \\ y_1 - y_2 &\leq d_1, \dots, y_{\tau-1} - y_\tau \leq d_\tau. \end{aligned}$$

Por tanto, los de dimensión d se corresponden con las soluciones enteras no negativas de la siguiente ecuación diofántica:

$$\begin{cases} s_1 y_1 + \dots + s_\tau y_\tau = d \\ y_1 - y_2 = x_1 \\ y_2 - y_3 = x_2 \\ \vdots \\ y_{\tau-1} - y_\tau = x_{\tau-1} \end{cases} \quad (3.104)$$

satisfaciendo que $0 \leq y_i \leq n_i$, $0 \leq x_i \leq d_i$. Para la resolución de este sistema despejamos $y_1, \dots, y_{\tau-1}$:

$$\begin{cases} y_{\tau-1} = x_{\tau-1} + y_\tau \\ y_{\tau-2} = x_{\tau-2} + y_{\tau-1} = x_{\tau-2} + x_{\tau-1} + y_\tau \\ \vdots \\ y_1 = \dots = x_1 + x_2 + \dots + x_{\tau-1} + y_\tau \end{cases} \quad (3.105)$$

Entonces, si sustituimos $y_1, \dots, y_{\tau-1}$ en la primera ecuación del sistema de ecuaciones (3.104) obtenemos que es equivalente a:

$$S_1 x_1 + S_2 x_2 + \dots + S_{\tau-1} x_{\tau-1} + S_\tau y_\tau = d,$$

con $0 \leq x_i \leq d_i$ y $0 \leq y_\tau \leq d_\tau$. \square

Aplicando el Teorema 3.5.1 a la ecuación (3.103) resulta:

Teorema 3.5.3. *Dada $A \in M_n(\mathbb{F})$ nilpotente con característica de Segre $\alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_m)$, sean τ , s_i , d_i y S_i como en la Definición 1.1.9. Entonces, el número de subespacios hiperinvariantes de dimensión d , $0 \leq d \leq n$, es el coeficiente de grado d del polinomio:*

$$(1+x^{S_1}+\dots+x^{d_1 S_1})(1+x^{S_2}+\dots+x^{d_2 S_2})\dots(1+x^{S_\tau}+\dots+x^{d_\tau S_\tau}). \quad (3.106)$$

Observación 3.5.4. En el caso en que la matriz A tenga varios valores propios: $\lambda_1, \dots, \lambda_r$, ($r > 1$), como consecuencia de la Proposición 3.1.11 el número de subespacios hiperinvariantes puede deducirse a partir de los resultados anteriores multiplicando los polinomios generadores correspondientes a cada valor propio (ver Ejemplo 3.5.7).

Finalmente, podemos deducir también el siguiente resultado ya conocido:

Corolario 3.5.5 ([12]). *El número total de subespacios hiperinvariantes para una matriz $A \in M_n(\mathbb{F})$ nilpotente con característica de Segre $\alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_m)$ es:*

$$(d_1 + 1) \cdots (d_{\tau-1} + 1)(d_\tau + 1), \quad (3.107)$$

siendo d_i como en la Definición 1.1.9.

Demostración. El número total de subespacios hiperinvariantes será la suma de todos los coeficientes del polinomio (3.106), que se obtiene haciendo $x = 1$. \square

Ejemplo 3.5.6. Consideremos una matriz J nilpotente con característica de Segre $\alpha = (3, 3, 2, 2, 2)$. A partir del Teorema 3.5.3 podemos calcular el número de subespacios hiperinvariantes de dimensión d sin necesidad de encontrarlos explícitamente. Al ser $N(\alpha) = (3, 2)$, $S(\alpha) = (2, 3)$ y $D(\alpha) = (1, 2)$, $S_1 = 2$, $S_2 = 5$, entonces el número de subespacios hiperinvariantes para cada dimensión puede deducirse a partir del siguiente polinomio generador:

$$(1+x^2)(1+x^5+x^{10}) = 1+x^2+x^5+x^7+x^{10}+x^{12}$$

De forma más precisa construimos la siguiente tabla:

Dimensión	0	2	5	7	10	12
Núm. de hiper.	1	1	1	1	1	1

Cuadro 3.1: Tabla 1

En particular $\tau = 2$ y $d_1 = 1, d_2 = 2$. Por lo que aplicando el corolario anterior tenemos que el número total de subespacios hiperinvariantes es $(d_1 + 1)(d_2 + 1) = 6$.

Veamos que en este ejemplo sencillo el cálculo directo es posible y reobtenemos el resultado de la tabla 3.1. De acuerdo con la Definición 3.3.4, tenemos cuatro hipertuplas no triviales posibles para la matriz J : $(1, 1, 0, 0, 0)$, $(1, 1, 1, 1, 1)$, $(2, 2, 1, 1, 1)$ y $(2, 2, 2, 2, 2)$. Los subespacios hiperinvariantes correspondientes a cada hipertupla son:

$$V(1, 1, 0, 0, 0) = \text{span}\{J^2u_1, J^2u_2\},$$

$$V(1, 1, 1, 1, 1) = \text{span}\{J^2u_1, J^2u_2, Ju_3, Ju_4, Ju_5\},$$

$$V(2, 2, 1, 1, 1) = \text{span}\{Ju_1, J^2u_1, Ju_2, J^2u_2, Ju_3, Ju_4, Ju_5\},$$

$$V(2, 2, 2, 2, 2) = \text{span}\{Ju_1, J^2u_1, Ju_2, J^2u_2, u_3, Ju_3, u_4, Ju_4, u_5, Ju_5\},$$

que son los no triviales de la tabla anterior.

Esto es, los cuatro anteriores más los dos triviales.

Ejemplo 3.5.7. Consideremos la matriz J de la forma

$$J = \left[\begin{array}{ccc|ccc|cccc|cccc|cc} 2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 & 2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 4 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 4 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 4 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 4 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 4 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 4 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 4 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 4 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 4 \end{array} \right].$$

La característica de Segre del valor propio 2 es $(3, 2)$, y su polinomio generador es:

$$1 + x + x^2 + x^3 + x^4 + x^5,$$

por lo tanto tenemos la siguiente tabla:

Dimensión	0	1	2	3	4	5
Núm.hiper.	1	1	1	1	1	1

Cuadro 3.2: Tabla 2

La característica de Segre del valor propio 4 es $(4, 4, 2)$. El correspondiente polinomio generador es:

$$1 + x^2 + x^3 + x^4 + x^5 + x^6 + x^7 + x^8 + x^{10},$$

y el número de subespacios hiperinvariantes de cada dimensión viene dado en la siguiente tabla:

Dimensión	0	2	3	4	5	6	7	8	10
Núm.hiper.	1	1	1	1	1	1	1	1	1

Cuadro 3.3: Tabla 3

Finalmente, para obtener el número de subespacios hiperinvariantes de la matriz J para cada dimensión d simplemente hemos de multiplicar los dos polinomios generadores anteriores:

$$\begin{aligned} (1 + x + x^2 + x^3 + x^4 + x^5)(1 + x^2 + x^3 + x^4 + x^5 + x^6 + x^7 + x^8 + x^{10}) &= \\ = 1 + x + 2x^2 + 3x^3 + 4x^4 + 5x^5 + 5x^6 + 6x^7 + 6x^8 + 5x^9 + 5x^{10} + 4x^{11} &+ \\ + 3x^{12} + 2x^{13} + x^{14} + x^{15} \end{aligned}$$

Dim.	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15
Núm.hiper.	1	1	2	3	4	5	5	6	6	5	5	4	3	2	1	1

3.5.2. Contando hipertuplas con valores prefijados

En esta subsección, dada una característica de Segre $\alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_m)$ vamos a dar un método para contar los subespacios hiperinvariantes asociados a hipertuplas con coeficientes prefijados como en la Sección 3.4. De hecho, como haremos notar (Corolario 3.5.14 y Ejemplo 3.5.16), basta considerar hipertuplas con el primer y el último valor prefijado, es decir, hipertuplas de la forma:

$$(c_1, k_2, \dots, k_{m-1}, c_m), \quad (3.108)$$

siendo c_1 y c_m valores prefijados, con $c_1 \geq c_m$, $\alpha_1 - c_1 \geq \alpha_m - c_m$.

Definición 3.5.8. Dada una característica de Segre $\alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_m)$, escribiremos:

$$H_{m+1-p}^\Delta(c) = \{\text{hipertuplas}(k_{m+1-p}, \dots, k_m) : k_m = c, k_{m+1-p} = c + \Delta\}, \quad (3.109)$$

$$n_{m+1-p}^\Delta(c) = \text{card}(H_{m+1-p}^\Delta(c)), \quad (3.110)$$

donde $0 \leq c \leq \alpha_m$, $1 \leq p \leq m$, $0 \leq \Delta \leq \alpha_{m+1-p} - c$.

Recordemos que la condición de hipertupla es:

$$\begin{aligned} k_{m+1-p} &\geq \dots \geq k_m \geq 0, \\ \alpha_{m+1-p} - k_{m+1-p} &\geq \dots \geq \alpha_m - k_m \geq 0 \end{aligned}$$

Esos cardinales $n_{m+1-p}^\Delta(c)$ serán fácilmente tabulables por recurrencia a partir del siguiente lema:

Lema 3.5.9. *En las condiciones de la definición anterior:*

(1) Para todo $0 \leq c \leq \alpha_m$:

$$n_{m+1-p}^\Delta(c) = n_{m+1-p}^\Delta(0). \quad (3.111)$$

(2) Para $\Delta = 0$ y para todo $1 < p \leq m$:

$$n_{m+1-p}^0(0) = 1. \quad (3.112)$$

(3) Para $p = 1$ y para $\Delta > 0$:

$$n_m^0(0) = 1, \quad n_m^\Delta(0) = 0. \quad (3.113)$$

(4) Para $1 \leq p \leq m$:

$$n_{m+1-p}^\Delta(0) = \sum_{i=0}^{\alpha_{m+1-p} - \alpha_{m+1-(p-1)}} n_{m+1-(p-1)}^{\Delta-i}(0). \quad (3.114)$$

Demostración. Son obvios (1), (2) y (3). Para (4) basta observar que:

$$k_{m+1-(p-1)} \leq k_{m+1-p} \leq k_{m+1-(p-1)} + \alpha_{m+1-p} - \alpha_{m+1-(p-1)}, \quad (3.115)$$

y por tanto:

$$k_{m+1-p} = \Delta \Rightarrow \Delta - (\alpha_{m+1-p} - \alpha_{m+1-(p-1)}) \leq k_{m+1-(p-1)} \leq \Delta. \quad (3.116)$$

□

Ejemplo 3.5.10. Para $p = 2$, tendremos:

$$n_{m-1}^{\Delta}(0) = 1, \quad \text{si } \Delta \leq \alpha_{m-1} - \alpha_m \quad (3.117)$$

$$n_{m-1}^{\Delta}(0) = 0, \quad \text{si } \Delta > \alpha_{m-1} - \alpha_m \quad (3.118)$$

Teorema 3.5.11. *Dada una característica de Segre $\alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_m)$, los valores de $n_{m+1-p}^{\Delta}(0)$ en la Definición 3.5.8 se recogen en la siguiente tabla, que se obtiene por recurrencia:*

- *La primera fila es: $1, 0, 0, \dots$*
- *Cada elemento de la fila p es la suma de los de la fila inmediatamente superior, situados en las $\alpha_{m+1-p} - \alpha_{m+1-(p-1)}$ columnas anteriores..*

$m+1-p \setminus \Delta$	0	1	...	$\alpha_{m-1} - \alpha_m$...	$\Delta - (\alpha_{m-p} - \alpha_{m+1-p})$...	Δ
m	1	0	...	0	0	0	0	0
$m-1$	1	...	1	0	0	0	0	0
\vdots	\vdots	\vdots	\vdots	\vdots	\vdots	\vdots	\vdots	\vdots
$m+1-(p-1)$	1	\vdots	\vdots	$n_{m+1-(p-1)}^{\alpha_{m-1}-\alpha_m}(0)$	\vdots	$n_{m+1-(p-1)}^{\Delta-(\alpha_{m-p}-\alpha_{m+1-p})}(0)$	\vdots	$n_{m+1-(p-1)}^{\Delta}(0)$
$m+1-p$	1	\vdots	\vdots	$n_{m+1-p}^{\alpha_{m-1}-\alpha_m}(0)$	\vdots	$n_{m+1-p}^{\Delta-(\alpha_{m-p}-\alpha_{m+1-p})}(0)$	\vdots	$n_{m+1-p}^{\Delta}(0)$
\vdots	1	\vdots	\vdots	\vdots	\vdots	\vdots	\vdots	\vdots
\vdots	\vdots	\vdots	\vdots	\vdots	\vdots	\vdots	\vdots	\vdots
1	1	\vdots	\vdots	\vdots	\vdots	\vdots	\vdots	$n_1^{\Delta}(0)$

Cuadro 3.4: Tabla que nos da el número de hipertuplas parciales con último valor prefijado

Corolario 3.5.12. *Dada $A \in M_n(\mathbb{F})$ nilpotente con característica de Segre $\alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_m)$, el número de subespacios hiperinvariantes de la forma:*

$$V(c_1, k_2, \dots, k_{m-1}, c_m), \quad c_1 \geq c_m, \alpha_1 - c_1 \geq \alpha_m - c_m, \quad (3.119)$$

viene dado por el valor $n_1^{\Delta}(0)$ de la tabla anterior, con $\Delta = c_1 - c_m$.

Ejemplo 3.5.13. Para $\alpha = (20, 18, 15, 10, 8, 5, 2)$, obtenemos la siguiente tabla:

$8 - p \setminus \Delta$	0	1	2	3	4	5	6	7	8
7	1	0	0	0	0	0	0	0	0
6	1	1	1	1	0	0	0	0	0
5	1	2	3	4	3	2	1	0	0
4	1	3	6	9	10	9	6	3	1
3	1	4	10	19	29	38	43	43	38
2	1	5	15	34	62	96	129	153	162
1	1	6	21	54	111	172	287	378	444

Con ello, el número de subespacios hiperinvariantes de la forma:

$$V(10, k_2, k_3, k_4, k_5, k_6, 2) \quad (3.120)$$

resulta:

$$n_1^8(2) = n_1^8(0) = 444. \quad (3.121)$$

Más en general, el número de hipertuplas de la forma:

$$(9, k_4, k_5, k_6, 2), \quad (3.122)$$

es:

$$n_3^7(2) = n_3^7(0) = 43. \quad (3.123)$$

Veamos que los resultados anteriores permiten contar el número de hipertuplas con coeficientes prefijados cualesquiera, como en la Proposición 3.4.1:

$$(k_1, \dots, k_m), k_{i_1} = c_{i_1}, \dots, c_{i_r} = k_{i_r}. \quad (3.124)$$

De hecho (vease Observación 3.5.15 y Ejemplo 3.5.16), procediendo por concatenación como en la Sección 3.4., basta estudiar los casos particulares $k_1 = c_1$ o $k_m = c_m$, además del $k_1 = c_1$ y $k_m = c_m$ ya resuelto en el Corolario 3.5.12. Veamos que, ambos se deducen de éste como sigue:

Corolario 3.5.14. *Sea $A \in M_n(\mathbb{F})$ nilpotente y $\alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_m)$ su característica de Segre.*

1. *El número de hipertuplas de la forma:*

$$(k_1, \dots, k_{m-1}, c_m), c_m \leq \alpha_m, \quad (3.125)$$

es:

$$\sum_{\Delta=0}^{\alpha_1 - \alpha_m} n_1^\Delta(0). \quad (3.126)$$

2. El número de hipertuplas de la forma:

$$(c_1, k_2, \dots, k_m), c_1 \leq \alpha_1, \quad (3.127)$$

es:

$$\sum_{k_m=k_m^{MIN}}^{k_m^{MAX}} n_1^{c_1-k_m}(0), \quad (3.128)$$

donde $k_m^{MIN} = \max\{\alpha_m - (c_1 - \alpha_1), 0\}$ y $k_m^{MAX} = \min\{c_1, \alpha_m\}$

Demostración. 1. Por las propiedades de hipertupla es evidente que:

$$c_m \leq k_1 \leq c_m + \alpha_1 - \alpha_m, \quad (3.129)$$

y por lo tanto, las hipertuplas que hemos de contar son las de la forma:

$$(c_m, k_2, \dots, k_{m-1}, c_m), \quad (3.130)$$

$$(c_m + 1, k_2, \dots, k_{m-1}, c_m), \quad (3.131)$$

$$\dots \dots \dots \quad (3.132)$$

$$(c_m + \alpha_1 - \alpha_m, k_2, \dots, k_{m-1}, c_m), \quad (3.133)$$

$$(3.134)$$

esto es:

$$\sum_{\Delta=0}^{\alpha_1-\alpha_m} n_1^{\Delta}(c_m) = \sum_{\Delta=0}^{\alpha_1-\alpha_m} n_1^{\Delta}(0). \quad (3.135)$$

2. Acotando a través de las propiedades de hipertupla tenemos que:

$$k_m^{MIN} = \max\{\alpha_m - (c_1 - \alpha_1), 0\} \leq k_m \leq \min\{c_1, \alpha_m\} = k_m^{MAX}, \quad (3.136)$$

y por lo tanto, las hipertuplas que hemos de contar son las de la forma:

$$(c_1, k_2, \dots, k_{m-1}, k_m^{MIN}), \quad (3.137)$$

$$(c_1, k_2, \dots, k_{m-1}, k_m^{MIN} + 1), \quad (3.138)$$

$$\dots \dots \dots \quad (3.139)$$

$$(c_1, k_2, \dots, k_{m-1}, k_m^{MAX}), \quad (3.140)$$

$$(3.141)$$

esto es:

$$\sum_{k_m=k_m^{MIN}}^{k_m^{MAX}} n_1^{c_1-k_m}(k_m) = \sum_{k_m=k_m^{MIN}}^{k_m^{MAX}} n_1^{c_1-k_m}(0). \quad (3.142)$$

□

Observación 3.5.15. Como ya hemos dicho, el número de hipertuplas con coeficientes prefijados cualesquiera puede calcularse a partir del Corolario 3.5.12 y del Corolario 3.5.14 por concatenación, esto es, multiplicando el de las posibles en cada “tramo”, como se ilustra en el siguiente ejemplo. Nótese que las tablas de cálculo en cada “tramo” son distintas, ya que corresponden a distintas “subparticiones” de α .

Ejemplo 3.5.16. Para $\alpha = (11, 9, 8, 7, 5, 4, 3, 2, 1)$, prefijamos $c_3 = 5$, $c_7 = 2$, esto es, queremos contar las hipertuplas de la forma:

$$(k_1, k_2, 5, k_4, k_5, k_6, 2, k_8, k_9). \quad (3.143)$$

1. Empezamos contando las de la forma $(k_1, k_2, 5)$. Construimos la tabla correspondiente a $(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3)$:

$4 - p \setminus \Delta$	0	1	2	3
3	1	0	0	0
2	1	1	0	0
1	1	2	2	1

y el cardinal correspondiente es:

$$\sum_{\Delta=0}^{11-8} n_1^\Delta(0) = 1 + 2 + 2 + 1 = 6. \quad (3.144)$$

2. A continuación contamos las de la forma $(5, k_4, k_5, k_6, 2)$. Construimos la tabla correspondiente a $(\alpha_3, \alpha_4, \alpha_5, \alpha_6, \alpha_7)$:

$8 - p \setminus \Delta$	0	1	2	3	4	5
7	1	0	0	0	0	0
6	1	1	0	0	0	0
5	1	2	1	0	0	0
4	1	3	4	3	1	0
3	1	4	7	7	4	1

y el cardinal correspondiente es:

$$n_1^3(0) = 7. \quad (3.145)$$

3. Finalmente contamos las de la forma $(2, k_8, k_9)$. Construimos la tabla correspondiente a $(\alpha_7, \alpha_8, \alpha_9)$:

$10 - p \setminus \Delta$	0	1	2	3
9	1	0	0	0
8	1	1	0	0
7	1	2	1	0

y el cardinal correspondiente es:

$$\sum_{k_9=\max\{1-(2-1),0\}}^{\min\{2,1\}} n_1^{2-k_m}(0) = n_1^2(0) + n_1^1(0) = 1 + 2 = 3. \quad (3.146)$$

Con lo cual, concluimos que el número total de hipertuplas de la forma:

$$(k_1, k_2, 5, k_4, k_5, k_6, 2, k_8, k_9), \quad (3.147)$$

es:

$$6 \cdot 7 \cdot 3 = 126. \quad (3.148)$$

La construcción recurrente en el Teorema 3.5.11 de la Tabla 3.4, recuerda la construcción del Triángulo de Pascal. En efecto, es fácil ver que los elementos en dicha tabla corresponden a los coeficientes de determinados polinomios generadores:

Proposición 3.5.17. *En las condiciones del Teorema 3.5.11, los coeficientes de la fila p , $2 \leq p \leq m$ en la Tabla 3.4 son los del polinomio:*

$$P_2(x) \dots P_p(x), \quad (3.149)$$

donde:

$$P_2(x) = 1 + x + \dots + x^{\alpha_m-1-\alpha_m}, \quad (3.150)$$

$$\dots, \quad (3.151)$$

$$P_p(x) = 1 + x + \dots + x^{\alpha_{m+1}-p-\alpha_{m+1}-(p-1)}, \quad (3.152)$$

$$\dots, \quad (3.153)$$

$$P_m(x) = 1 + x + \dots + x^{\alpha_1-\alpha_2}. \quad (3.154)$$

Ejemplo 3.5.18. Siguiendo con el Ejemplo 3.5.13:

$$P_2(x) = 1 + x + x^2 + x^3, \quad (3.155)$$

$$P_3(x) = 1 + x + x^2 + x^3, \quad (3.156)$$

$$P_4(x) = 1 + x + x^2, \quad (3.157)$$

$$P_5(x) = 1 + x + x^2 + x^3 + x^4 + x^5, \quad (3.158)$$

$$P_6(x) = 1 + x + x^2 + x^3, \quad (3.159)$$

$$P_7(x) = 1 + x + x^2. \quad (3.160)$$

Así pues:

$$P_2(x) \leftrightarrow (1, 1, 1, 1, 1), \quad (3.161)$$

$$P_2(x)P_3(x) \leftrightarrow (1, 2, 3, 4, 3, 2, 1), \quad (3.162)$$

$$P_2(x)P_3(x)P_4(x) \leftrightarrow (1, 3, 6, 9, 10, 8, 6, 3, 1), \quad (3.163)$$

$$etc. \quad (3.164)$$

Corolario 3.5.19. Dada $A \in M_n(\mathbb{F})$ nilpotente con característica de Segre $\alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_m)$.

1. El número de subespacios hiperinvariantes de la forma:

$$V(c_1, k_2, \dots, k_{m-1}, c_m), \quad c_1 \geq c_m, \quad \alpha_1 - c_1 \geq \alpha_m - c_m, \quad (3.165)$$

viene dado por el coeficiente de grado $\Delta = c_1 - c_m$ del polinomio:

$$(1 + x + \dots + x^{\alpha_{m-1} - \alpha_m}) \dots (1 + x + \dots + x^{\alpha_1 - \alpha_2}). \quad (3.166)$$

2. El número de subespacios hiperinvariantes de la forma:

$$V(c_1, k_2, \dots, k_{m-1}, k_m), \quad \alpha_1 \geq c_1, \quad (3.167)$$

viene dado por la suma de los coeficientes de grados entre $c_m - k_m^{MAX}$ y $c_m - k_m^{MIN}$ del polinomio:

$$(1 + x + \dots + x^{\alpha_{m-1} - \alpha_m}) \dots (1 + x + \dots + x^{\alpha_1 - \alpha_2}), \quad (3.168)$$

donde $k_m^{MAX} = \min\{c_1, \alpha_m\}$ y $k_m^{MIN} = \max\{\alpha_m - (c_1 - \alpha_1), 0\}$. Esto es, el coeficiente de grado $c_m - k_m^{MIN}$ del anterior polinomio multiplicado por:

$$1 + x + x^2 + \dots + x^{k_m^{MAX} - k_m^{MIN}}. \quad (3.169)$$

3. El número de subespacios hiperinvariantes de la forma:

$$V(k_1, k_2, \dots, k_{m-1}, c_m), \quad \alpha_m \geq c_m, \quad (3.170)$$

viene dado por la suma de los coeficientes del polinomio:

$$(1 + x + \dots + x^{\alpha_{m-1} - \alpha_m}) \dots (1 + x + \dots + x^{\alpha_1 - \alpha_2}), \quad (3.171)$$

es decir,

$$(1 + \alpha_{m-1} - \alpha_m) \dots (1 + \alpha_1 - \alpha_2). \quad (3.172)$$

Ejemplo 3.5.20. Siguiendo con el Ejemplo 3.5.16, con $\alpha = (11, 9, 8, 7, 5, 4, 3, 2, 1)$ y prefijando $c_3 = 5$, $c_7 = 2$, esto es, queremos contar las hipertuplas de la forma:

$$(k_1, k_2, 5, k_4, k_5, k_6, 2, k_8, k_9). \quad (3.173)$$

1. Para las de la forma $(k_1, k_2, 5)$, construimos el polinomio:

$$(1+x)(1+x+x^2) = 1+2x+2x^2+x^3, \quad (3.174)$$

y el cardinal correspondiente es la suma de los coeficientes de este polinomio, es decir, 6.

2. Para las de la forma $(5, k_4, k_5, k_6, 2)$, construimos el polinomio:

$$(1+x)(1+x)(1+x+x^2)(1+x) = 1+4x+7x^2+7x^3+4x^4+x^5, \quad (3.175)$$

y el cardinal correspondiente es el coeficiente de grado $5 - 2 = 3$, es decir, 7.

3. Finalmente para las de la forma $(2, k_8, k_9)$, construimos el polinomio:

$$(1+x)(1+x) = 1+2x+x^2, \quad (3.176)$$

y el cardinal correspondiente es la suma de los coeficientes de este polinomio que tienen grado entre $2 - \max\{1 - (2-1), 0\}$ y $2 - \min\{2, 1\}$, es decir, entre grado 1 y 2, por lo tanto el cardinal buscado es 3.

Subespacios característicos no hiperinvariantes

4.1. INTRODUCCIÓN

En el capítulo anterior hemos visto diversas caracterizaciones de $\text{Hinv}(A)$ (ver Lema 3.1.12 y Teoremas 3.1.14, 3.3.2, 3.3.10). Asimismo vimos (Teorema 3.1.9) que $\text{Chinv}(A) = \text{Hinv}(A)$ excepto para $\mathbb{F} = GF(2)$. Para este cuerpo, el Teorema de Shoda que enunciamos inmediatamente prueba que si $\mathbb{F} = GF(2)$, $\text{Chinv}(A) \neq \text{Hinv}(A)$ si y sólo si la matriz de Jordan de A tiene al menos dos bloques de tamaño único (es decir, no hay más bloques de este tamaño) y difiriendo en más de 1. La descripción de $\text{Chinv}(A)$ en este caso es un problema abierto (ver [3]) que vamos a resolver en este capítulo.

Teorema 4.1.1 ([35]). (*Shoda, 1930*) Sea $J \in M_n(GF(2))$ una matriz de Jordan nilpotente. Entonces, las siguientes afirmaciones son equivalentes:

- (i) Existe un subespacio característico no hiperinvariante para J .
- (ii) Para dos números r y s con $s > r + 1$, la matriz J tiene exactamente un bloque de Jordan de tamaño r y uno de tamaño s .

Ejemplo 4.1.2. El Ejemplo 3.1.10 muestra que efectivamente $\text{Chinv}(A) \neq \text{Hinv}(A)$ para $\alpha = (3, 1)$, que verifica la condición (ii) anterior. Veamos que todo subespacio característico es hiperinvariante para la matriz de Jordan

con característica de Segre $\alpha = (3, 2)$, que no la verifica:

$$J = \left[\begin{array}{ccc|cc} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{array} \right]. \quad (4.1)$$

Tenemos que:

$$Z(J) = \left\{ \left[\begin{array}{ccc|cc} x_1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ x_2 & x_1 & 0 & x_6 & 0 \\ x_3 & x_2 & x_1 & x_7 & x_6 \\ \hline x_8 & 0 & 0 & x_4 & 0 \\ x_9 & x_8 & 0 & x_5 & x_4 \end{array} \right], x_i \in GF(2) \right\}. \quad (4.2)$$

Las matrices inversibles de $Z(J)$ son de la forma:

$$Z^*(J) = \left\{ \left[\begin{array}{ccc|cc} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ x_2 & 1 & 0 & x_6 & 0 \\ x_3 & x_2 & 1 & x_7 & x_6 \\ \hline x_8 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ x_9 & x_8 & 0 & x_5 & 1 \end{array} \right], x_i \in GF(2) \right\}. \quad (4.3)$$

Por lo tanto, si escribimos $\{e_1, e_2, e_3, e_4, e_5\}$ una base asociada a J , $\forall T' \in Z^*(J)$ tenemos que:

$$T'e_1 = e_1 + x_2e_2 + x_3e_3 + x_8e_4 + x_9e_5 \quad (4.4)$$

$$T'e_2 = e_2 + x_3e_3 + x_8e_5 \quad (4.5)$$

$$T'e_3 = e_3 \quad (4.6)$$

$$T'e_4 = x_6e_2 + x_7e_3 + e_4 + x_5e_5 \quad (4.7)$$

$$T'e_5 = x_6e_3 + e_5 \quad (4.8)$$

Vamos a ver que en este caso todo subespacio característico es hiperinvariante.

Sea $X \in \text{Chinv}(J)$, entonces:

1. Si $e_5 \in X$, $\exists T' \in Z^*(J)$ tal que $T'e_5 = e_3 + e_5$, y por lo tanto $e_3 \in X$.
 - Si $e_4 \in X$, $\exists T' \in Z^*(J)$ tal que $T'e_4 = e_2 + e_4$ y por lo tanto $e_2 \in X$.
 Tenemos pues dos posibilidades:

$$X = \text{span} \{e_2, e_3, e_4, e_5\} = V(2, 2) \in \text{Hinv}(J) \quad (4.9)$$

ó

$$X = \text{span} \{e_1, e_2, e_3, e_4, e_5\} = V(3, 2) \in \text{Hinv}(J). \quad (4.10)$$

• Si $e_4 \notin X$, entonces $e_1 \notin X$ y por lo tanto tenemos dos posibilidades:

$$X = \text{span} \{e_3, e_5\} = V(1, 1) \in \text{Hinv}(J) \quad (4.11)$$

ó

$$X = \text{span} \{e_2, e_3, e_5\} = V(2, 1) \in \text{Hinv}(J). \quad (4.12)$$

2. $e_5 \notin X$, entonces $e_4 \notin X$ (si $e_4 \in X \exists T' \in Z^*(J)$ tal que $T'e_4 = e_4 + e_5$ y tendríamos que $e_5 \in X$).

Si $e_3 \in X$, entonces puede pasar que:

$$e_2 \in X \Rightarrow e_5 \in X \quad (4.13)$$

ó

$$e_2 \notin X \Rightarrow \begin{cases} e_1 + e_2 \in X \Rightarrow e_5 \in X \\ e_1 \in X \Rightarrow e_2 \in X \\ e_1 \notin X \Rightarrow X \in \text{Hinv}(J) \end{cases} \quad (4.14)$$

En este capítulo se presenta una descripción completa de los subespacios característicos que no son hiperinvariantes cuando A es una matriz nilpotente. Concretamente mostraremos una construcción algorítmica que nos permite obtenerlos todos. De hecho veremos que tales subespacios pueden expresarse como sumas $Y \oplus Z$, donde Y pertenece a una subclase de subespacios hiperinvariantes, y Z es un subespacio que llamaremos *minext* de Y (la “extensión” minimal directa de Y que convierte $Y \oplus Z$ en no hiperinvariante).

A lo largo de este capítulo mantendremos la misma notación que en capítulos anteriores. Esto es, partiremos de una matriz $A \in M_n(\mathbb{F})$ nilpotente y denotaremos por $\alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_m)$ su característica de Segre. Además (ver Definición 1.1.9), recordemos que si $n_1 > \dots > n_\tau$ son los distintos valores de α y s_1, \dots, s_τ cuantas veces cada valor n_1, \dots, n_τ se repite en α , definíamos las siguientes tuplas asociadas a α :

$$\begin{aligned} N(\alpha) &= (n_1, \dots, n_\tau), \\ S(\alpha) &= (s_1, \dots, s_\tau), \\ D(\alpha) &= (d_1, d_2, \dots, d_{\tau-1}, d_\tau), \end{aligned} \quad (4.15)$$

con $d_i = n_i - n_{i+1}$, $1 \leq i \leq \tau - 1$ y $d_\tau = n_\tau$.

Además, escribamos los correspondientes subespacios monogénicos de la forma:

$$\mathbb{F}^n = V^1 \oplus \cdots \oplus V^m, \quad V^j = \text{span}\{u_j, Au_j, \dots\}.$$

Finalmente, usando la notación anterior teníamos que:

$$\begin{aligned} \mathbb{F}^n &= U^1 \oplus \cdots \oplus U^r, \\ U^1 &= V^1 \oplus \cdots \oplus V^{s_1}, \quad U^2 = V^{s_1+1} \oplus \cdots \oplus V^{s_1+s_2}, \dots \end{aligned}$$

4.2. EL SUBGRUPO $Z^*(J)$

Para el estudio de los subespacios característicos necesitamos una descripción más precisa del subgrupo $Z^*(J)$ formado por las matrices no singulares de $Z(J)$, donde $J \in M_n(\mathbb{F})$ es una matriz de Jordan nilpotente.

Lema 4.2.1. *Sea $J \in M_n(\mathbb{F})$ una matriz de Jordan nilpotente, con característica de Segre $\alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_m)$. Entonces, $T \in Z(J)$ es no singular si y sólo si la submatriz formada por las columnas $\alpha_1, \alpha_1 + \alpha_2, \dots, \alpha_1 + \cdots + \alpha_m$ es de rango máximo.*

Demostración. Si $TJ = JT$, entonces T es no singular si y sólo si sus columnas forman una base de Jordan. Es bien conocido que esto sucede si y sólo si la submatriz formada por las últimas columnas de cada bloque tiene rango máximo. Esto es, si una base de Jordan asociada a J es:

$$v_1, Jv_1, \dots, J^{\alpha_1-1}v_1, \dots, v_m, Jv_m, \dots, J^{\alpha_m-1}v_m$$

entonces $T \in Z^*(J)$ si y sólo si los vectores $J^{\alpha_1-1}v_1, \dots, J^{\alpha_m-1}v_m$ son linealmente independientes. Claramente corresponden a las columnas $\alpha_1, \alpha_1 + \alpha_2, \dots$ de T . \square

Proposición 4.2.2. *Sea $J \in M_n(\mathbb{F})$ una matriz de Jordan nilpotente, con característica de Segre $\alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_m)$. Dada $T \in Z(J)$, particionada como en el Corolario 2.1.9:*

$$T = \begin{bmatrix} \bar{T}_{1,1} & \cdots & \bar{T}_{1,\tau} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \bar{T}_{\tau,1} & \cdots & \bar{T}_{\tau,\tau} \end{bmatrix}. \quad (4.16)$$

Entonces:

- (1) T es no singular si y sólo si las submatrices $\bar{T}_{1,1}, \dots, \bar{T}_{\tau,\tau}$ son también no singulares.

- (2) Cada $\bar{T}_{i,i}$ es no singular si y sólo si la matriz compuesta por los elementos inferiores de la izquierda de cada bloque en la $T_{i,j}$ -partición es no singular. En particular, si tenemos algún bloque de tamaño único α_i , el coeficiente de la diagonal de $T_{i,i}$ debe ser forzosamente distinto de cero.

Demostración.

- (1) Es inmediato ver que las columnas $\alpha_1, \dots, \alpha_1 + \dots + \alpha_{s_1}$ de T son linealmente independientes si y sólo si también lo son las mismas columnas de $\bar{T}_{1,1}$, esto es debido a que los elementos que hay debajo de $\bar{T}_{1,1}$ son todos 0. De manera análoga, las columnas $\alpha_1, \dots, \alpha_1 + \dots + \alpha_{s_1}, \alpha_1 + \dots + \alpha_{s_1+1}, \dots, \alpha_1 + \dots + \alpha_{s_1+s_2}$ serán linealmente independientes si también lo son las mismas columnas de $\bar{T}_{1,1}$ y $\bar{T}_{2,2}$. Y así sucesivamente...
- (2) Notemos que todos los coeficientes de las columnas $\alpha_1, \dots, \alpha_1 + \dots + \alpha_{s_1}$ de $\bar{T}_{1,1}$ son 0 excepto aquellos correspondientes a las filas $\alpha_1, \dots, \alpha_1 + \dots + \alpha_{s_1}$. De forma análoga para $\bar{T}_{2,2}, \dots$

□

Ejemplo 4.2.3. La matriz T del Ejemplo 2.1.12 es no singular si y sólo si:

$$\det \begin{bmatrix} x_1 & x_4 \\ x_{14} & x_{17} \end{bmatrix} \neq 0, \quad \det \begin{bmatrix} x_{31} & x_{33} & x_{35} \\ x_{42} & x_{44} & x_{46} \\ x_{53} & x_{55} & x_{57} \end{bmatrix} \neq 0, \quad \det [x_{65}] \neq 0.$$

Para los bloques de tamaño único el Corolario 2.3.8 puede reescribirse de la siguiente manera:

Lema 4.2.4. Si $\mathbb{F} = GF(2)$ y $i \in \Omega$ entonces,

$$\{T' J^{\alpha_i - k} u_i, T' \in Z^*(J)\} = J^{\alpha_i - k} u_i + V(k, \dots, k \stackrel{(i)}{-1}, k + \alpha_{i+1} - \alpha_i, \dots, k + \alpha_m - \alpha_i).$$

Demostración. A consecuencia de la Proposición 4.2.2(2), si α_i es un bloque de tamaño único, la diagonal de $T_{i,i}$ debe ser forzosamente 1. □

4.3. SUBESPACIOS CARACTERÍSTICOS NO HIPERINVARIANTES EN GF(2)

4.3.1. Criterios generales

Resultados previos que usaremos en este capítulo son los siguientes:

Teorema 4.3.1 ([3]). Sea $J \in M_n(\mathbb{F})$ una matriz de Jordan nilpotente, con característica de Segre $\alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_m)$. Si $X \in \text{Chinv}(J)$, entonces

$$\tilde{X} = (X \cap U^1) \oplus \dots \oplus (X \cap U^\tau) \quad (4.17)$$

es el mayor subespacio hiperinvariante contenido en X .

Corolario 4.3.2 ([3]). Sea $J \in M_n(\mathbb{F})$ una matriz de Jordan nilpotente, con característica de Segre $\alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_m)$ y sea $X \in \text{Chinv}(J)$. Entonces

$$X \text{ es hiperinvariante} \Leftrightarrow X = (X \cap U^1) \oplus \dots \oplus (X \cap U^\tau). \quad (4.18)$$

De forma equivalente,

$$\pi_{U^i}(x) \in X, \quad \forall x \in X, \quad i = 1, \dots, \tau \quad (4.19)$$

donde π_{U^i} denota la proyección sobre el subespacio U^i .

El lema siguiente confirma que sólo deben interesarnos los bloques de Jordan de tamaño único (esto es, hay exactamente un bloque de Jordan de dicho tamaño).

Lema 4.3.3 ([3]). Sea $J \in M_n(\mathbb{F})$ una matriz de Jordan nilpotente, con característica de Segre $\alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_m)$ y sea $X \in \text{Chinv}(J)$. Entonces (4.19) se cumple si $s_i > 1$.

Por ello definimos:

Definición 4.3.4. Sea $A \in M_n(\mathbb{F})$ una matriz con un único valor propio y característica de Segre $\alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_m)$, entonces diremos que α_{i_j} es de tamaño único si hay exactamente un bloque de Jordan de dicho tamaño y denotamos:

$$\Omega = \{1 \leq i_1 < \dots < i_l \leq m : \alpha_{i_j} \text{ es de tamaño único}\}. \quad (4.20)$$

Ejemplo 4.3.5. Si $\alpha = (12, 7, 5, 5, 5, 5, 4, 3, 3, 2, 1, 1)$, entonces $\Omega = \{1, 2, 7, 10\}$. Siendo $\alpha_1 = 12, \alpha_2 = 7, \alpha_7 = 4, \alpha_{10} = 2$ tamaños únicos. Observemos que $l = 4$ es el número de bloques de Jordan con tamaño único en α .

Combinando los resultados anteriores con el Teorema de Shoda, obtenemos el siguiente punto de partida para nuestra construcción.

Lema 4.3.6. Dada $J \in M_n(GF(2))$ y $X \in \text{Chinv}(J) \setminus \text{Hinv}(J)$, entonces existen $t \geq 2$, $i_1, \dots, i_t \in \Omega$, $x_1, \dots, x_t \in X$, tales que $\pi_{\alpha_{i_j}} x_j \notin X$, siendo $\pi_{\alpha_{i_j}}$ la proyección sobre el bloque de Jordan de tamaño α_{i_j} .

Demostración. Si para todo $x \in X$ y para todo $i = 1, \dots, \tau$, $\pi_{U^i}(x) \in X$ entonces, al ser $X \in \text{Chinv}(J)$, por el Corolario 4.3.2 tenemos que $X \in \text{Hinv}(J)$, y esto es una contradicción.

Por lo tanto, por el Lema 4.3.3, existen $i_1, \dots, i_t \in \Omega$ tales que $\pi_{\alpha_{i_j}} x_j \notin X$ para algún $x_1, \dots, x_t \in X$.

Por otro lado, podemos suponer $1 \leq i_1 < \dots < i_t \leq m$ y $t \geq 2$ ya que si $t = 1$, entonces $X \in \text{Hinv}(J)$ (ver [3]). \square

4.3.2. Chartuplas

El punto clave en la descripción de los subespacios característicos no hiperinvariantes son unas tuplas que denominaremos *chartuplas*. Cada una se asocia a una familia de índices correspondientes a bloques de tamaño único, difiriendo entre ellos en por lo menos 2. A su vez, a cada una de ellas le asociaremos subespacios vectoriales Y y Z , de manera que $Y \oplus Z \in \text{Chinv}(J) \setminus \text{Hinv}(J)$.

Definición 4.3.7. Dada $\alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_m)$, consideremos una familia de subíndices:

$$\begin{aligned} \Omega_t = \{i_1, \dots, i_t\} \subseteq \Omega, \quad t \geq 2, \quad 1 \leq i_1 < i_2 < \dots < i_t \leq m, \\ \alpha_{i_1} \geq 2 + \alpha_{i_2}, \dots, \alpha_{i_{t-1}} \geq 2 + \alpha_{i_t}. \end{aligned} \quad (4.21)$$

Diremos que una tupla $b = (b_{i_1}, \dots, b_{i_t})$ es una *chartupla asociada* a Ω_t si:

$$\begin{aligned} b_{i_1} > b_{i_2} > \dots > b_{i_t} > 0, \\ \alpha_{i_1} - b_{i_1} > \alpha_{i_2} - b_{i_2} > \dots > \alpha_{i_t} - b_{i_t} \geq 0. \end{aligned} \quad (4.22)$$

Observación 4.3.8. (1) Para cualquier Ω_t como antes, una chartupla asociada es $b = (t, t-1, \dots, 2, 1)$.

(2) En sentido contrario, la condición (4.21) es necesaria para la existencia de tuplas verificando (4.22).

Ejemplo 4.3.9. Dada una matriz de Jordan J con característica de Segre $\alpha = (12, 7, 4, 4, 3, 1)$, $b = (10, 2, 1)$ es una chartupla asociada a $\Omega_3 = \{1, 5, 6\}$.

4.3.3. Hiperinvariantes asociados a una chartupla

El siguiente lema caracteriza las chartuplas como aquellas tuplas que admiten ciertas hipertuplas asociadas.

Lema 4.3.10. *Con las notaciones de la Definición 4.3.7, sea $\alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_m)$ y $\Omega_t = \{i_1, \dots, i_t\}$ verificando (4.21).*

(i) *Si $b = (b_{i_1}, \dots, b_{i_t})$ verifica (4.22), entonces existen k_i , $1 \leq i \leq m$, $i \neq i_1, \dots, i_t$, de modo que las siguientes particiones:*

$$(k_1, \dots, k_{i_1-1}, b_{i_1} - 1, k_{i_1+1}, \dots, \dots, k_{i_2-1}, b_{i_2} - 1, k_{i_2+1}, \dots, k_{i_t-1}, b_{i_t} - 1, k_{i_t+1}, \dots, k_m), \quad (4.23)$$

$$(k_1, \dots, k_{i_1-1}, b_{i_1}, k_{i_1+1}, \dots, \dots, k_{i_2-1}, b_{i_2}, k_{i_2+1}, \dots, k_{i_t-1}, b_{i_t}, k_{i_t+1}, \dots, k_m), \quad (4.24)$$

son hipertuplas, esto es:

$$k_1 \geq \dots \geq k_{i_1-1} \geq b_{i_1} > k_{i_1+1} \geq \dots \geq k_{i_2-1} \geq b_{i_2} > k_{i_2+1} \geq \dots \dots \geq k_{i_t-1} \geq b_{i_t} > k_{i_t+1} \geq \dots \geq k_m, \quad (4.25)$$

y

$$\begin{aligned} \alpha_1 - k_1 &\geq \dots \geq \alpha_{i_1-1} - k_{i_1-1} > \alpha_{i_1} - b_{i_1} \geq \alpha_{i_1+1} - k_{i_1+1} \geq \dots \\ &\dots \geq \alpha_{i_2-1} - k_{i_2-1} > \alpha_{i_2} - b_{i_2} \geq \alpha_{i_2+1} - k_{i_2+1} \geq \dots \\ &\dots \geq \alpha_{i_t-1} - k_{i_t-1} > \alpha_{i_t} - b_{i_t} \geq \alpha_{i_t+1} - k_{i_t+1} \geq \dots \\ &\dots \geq \alpha_m - k_m. \end{aligned} \quad (4.26)$$

(ii) *Recíprocamente, si para $(b_{i_1}, \dots, b_{i_t})$ existen hipertuplas de ese tipo, entonces necesariamente $(b_{i_1}, \dots, b_{i_t})$ verifica (4.22), es decir, es char-tupla.*

Demostración. (i) El ejemplo 4.3.11 ilustra la construcción que sigue. En primer lugar podemos suponer que α no tiene bloques repetidos, ya que en caso contrario las hipertuplas correspondientes se definirían repitiendo valores en los bloques del mismo tamaño.

a) Si $i_1 > 1$, basta definir:

$$k_1 = \dots = k_{i_1-1} = b_{i_1}$$

b) Si $i_t < m$, basta definir:

$$k_{i_t+l} = \min\{b_{i_t} - 1, \alpha_{i_t+l}\}, \quad l = 1, \dots, m - i_t.$$

- c) Para los índices intermedios, claramente podemos reducirnos a considerar los consecutivos en Ω_t , ya que a partir de ahí procederemos por simple concatenación. Podemos por tanto, suponer $t = 2$. Denotemos $\alpha^{i_1, i_2} = (\alpha_{i_1}, \dots, \alpha_{i_2})$ y completémosla a una partición 1-decreciente: $\tilde{\alpha}^{i_1, i_2} = (\alpha_{i_1}, \alpha_{i_1} - 1, \dots, \alpha_{i_2} + 1, \alpha_{i_2})$. Sea $\Delta^{i_1, i_2} = (\alpha_{i_1} - \alpha_{i_2}) - (b_{i_1} - b_{i_2})$. Entonces es inmediato ver que tomando como hipertupla (4.24):

$$(b_{i_1}, \overbrace{b_{i_1} - 1, \dots, b_{i_1} - 1}^{\Delta^{i_1, i_2}}, b_{i_1} - 2, \dots, b_{i_1} - (b_{i_1} - b_{i_2} - 1), b_{i_2}, b_{i_2}),$$

se cumplen las condiciones del lema respecto a $\tilde{\alpha}^{i_1, i_2}$, esto es:

$$\begin{aligned} b_{i_1} &> b_{i_1} - 1 \geq b_{i_1} - 2 \geq \dots \geq b_{i_2}, \\ \alpha_{i_1} - b_{i_1} &\geq (\alpha_{i_1} - 1) - (b_{i_1} - 1) \geq \dots \geq (\alpha_{i_1} - \Delta^{i_1, i_2}) - (b_{i_1} - 1) \geq \\ &\geq (\alpha_{i_1} - \Delta^{i_1, i_2} + 1) - (b_{i_1} - 2) \geq \dots \geq \alpha_{i_1} - (\Delta^{i_1, i_2} + b_{i_1} - b_{i_2} - 1) - b_{i_2} > \alpha_{i_2} - b_{i_2}. \end{aligned}$$

La hipertupla para α^{i_1, i_2} se obtiene suprimiendo los términos correspondientes a las componentes de $\tilde{\alpha}^{i_1, i_2}$ que no aparecen en α^{i_1, i_2} , con lo cual las desigualdades anteriores se seguirán verificando.

- (ii) Es inmediato a partir de las ecuaciones (4.25) y (4.26). □

Ejemplo 4.3.11. Consideremos $\alpha = (19, 14, 11, 11, 10, 7, 7, 7, 6, 4, 3, 1)$. Vamos a seguir la demostración del Lema 4.3.10 para obtener una hipertupla como (4.24) asociada a esa chartupla. Como allí, trabajaremos con la partición de bloques de tamaño único $N(\alpha) = (19, 14, 11, 10, 7, 6, 4, 3, 1)$. Supongamos $\Omega_t = \{2, 7\}$ y consideremos la chartupla $b = (b_2, b_7), b_2 = 9, b_7 = 3$.

1. Como $i_1 = 2 > 1$, basta definir:

$$k_1 = b_2 = 9.$$

2. Como $i_2 = 7 < 9$, basta definir:

$$k_8 = \min\{b_7 - 1, \alpha_8\} = 2, \quad k_9 = \min\{b_7 - 1, \alpha_9\} = 1.$$

3. Completamos $N(\alpha)^{2,7} = (14, 11, 10, 7, 6, 4)$, a una partición 1-decreciente

$$\tilde{N}(\alpha)^{2,7} = (14, 13, 12, 11, 10, 9, 8, 7, 6, 5, 4).$$

Siendo $\Delta^{2,4} = (14 - 4) - (9 - 3) = 4$, tomamos como hipertupla (4.24) para $\tilde{N}(\alpha)^{2,7}$:

$$\begin{aligned} (b_2, b_2 - 1, b_2 - 1, b_2 - 1, b_2 - 1, b_2 - 2, b_2 - 3, b_2 - 4, b_2 - 5, b_7, b_7) = \\ = (9, 8, 8, 8, 8, 7, 6, 5, 4, 3, 3), \end{aligned}$$

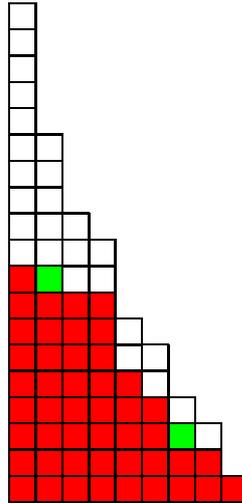
Así pues, para $N(\alpha)^{2,7}$:

$$\begin{aligned} (b_2, k_3, k_4, k_5, k_6, b_7) = \\ = (b_2, b_2 - 1, b_2 - 1, b_2 - 4, b_2 - 5, b_7) = \\ = (9, 8, 8, 5, 4, 3). \end{aligned}$$

Juntando los resultados anteriores podemos tomar como hipertupla 4.24:

$$(k_1, b_2, k_3, k_4, k_5, k_6, b_7, k_8, k_9) = (9, 9, 8, 8, 5, 4, 3, 2, 1)$$

que cumple las condiciones del lema respecto a $N(\alpha)$.



Y por lo tanto, la hipertupla:

$$(9, 9, 8, 8, 8, 5, 5, 5, 4, 3, 2, 1)$$

cumple las condiciones del lema respecto a α .

Definición 4.3.12. Dada una chartupla $b = (b_{i_1}, \dots, b_{i_t})$, llamaremos *hipertuplas asociadas a b* (o simplemente *b-hipertuplas* las de la forma (4.23):

$$\begin{aligned} (k_1, \dots, k_{i_1-1}, b_{i_1} - 1, k_{i_1+1}, \dots \\ \dots, k_{i_2-1}, b_{i_2} - 1, k_{i_2+1}, \dots, k_{i_t-1}, b_{i_t} - 1, k_{i_t+1}, \dots, k_m), \end{aligned} \quad (4.27)$$

verificando las condiciones (4.25) y (4.26).

Igualmente, llamaremos *subespacios hiperinvariantes asociados a b* a los de la forma:

$$Y = V(k_1, \dots, k_{i_1-1}, b_{i_1} - 1, k_{i_1+1}, \dots, \dots, k_{i_2-1}, b_{i_2} - 1, k_{i_2+1}, \dots, k_{i_t-1}, b_{i_t} - 1, k_{i_t+1}, \dots, k_m) \quad (4.28)$$

con las mismas condiciones (4.25) y (4.26).

Observación 4.3.13. Según el lema anterior, también es hiperinvariante el siguiente subespacio:

$$V(k_1, \dots, k_{i_1-1}, b_{i_1}, k_{i_1+1}, \dots, \dots, k_{i_2-1}, b_{i_2}, k_{i_2+1}, \dots, k_{i_t-1}, b_{i_t}, k_{i_t+1}, \dots, k_m). \quad (4.29)$$

Ejemplo 4.3.14. En la chartupla considerada en el Ejemplo 4.3.9, sólo tenemos un subespacio hiperinvariante asociada a ella: $Y = V(9, 5, 2, 2, 1, 0)$.

4.3.4. Subespacios minext

Como último paso de nuestra construcción, dada una chartupla vamos a determinar “extensiones” Z de modo que, para cualquier subespacio hiperinvariante Y asociado a la chartupla, $Y \oplus Z$ deje de ser hiperinvariante pero siga siendo característico.

Definición 4.3.15. Sea $J \in M_n(\mathbb{F})$ una matriz de Jordan nilpotente, con característica de Segre $\alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_m)$ y u_i , $1 \leq i \leq m$ una familia de generadores de una base de Jordan. Dada una chartupla $b = (b_{i_1}, \dots, b_{i_t})$, consideremos z_1, \dots, z_t definidas de la forma

$$z_j = J^{\alpha_{i_j} - b_{i_j}} u_{i_j}, \quad 1 \leq j \leq t.$$

Diremos que Z es un *subespacio minext* asociado a $(b_{i_1}, \dots, b_{i_t})$ si:

1. $z \in Z \Rightarrow z = z_{i_1} + \dots + z_{i_p}$ con $1 \leq i_1 < i_2 < \dots < i_p \leq i_t$, $p \leq t$.
2. $z_j \notin Z$, para $j = 1, \dots, t$.
3. Cada z_j es sumando para algún $z \in Z$, es decir

$$\dim(\text{span}\{z_1, \dots, \hat{z}_j, \dots, z_t\} + Z) = t, \quad \forall j = 1, \dots, t.$$

Ejemplo 4.3.16. Si consideramos la chartupla del Ejemplo 4.3.9, entonces $z_1 = J^2u_1$, $z_2 = Ju_5$ y $z_3 = J^0u_6 = u_6$. En este caso sólo existen dos subespacios minext Z asociados a esta chartupla:

$$\begin{aligned} & \text{span}\{z_1 + z_2 + z_3\} \\ & \text{span}\{z_1 + z_2, z_2 + z_3\} \end{aligned}$$

Observación 4.3.17.

(1) Por construcción $z_j \notin Y, Z$ para $1 \leq j \leq t$ y Y, Z como antes. De hecho:

$$z_1, \dots, z_t \notin Z \oplus Y. \quad (4.30)$$

Si, por ejemplo, $z_1 \in Z \oplus Y$ entonces $z_1 = z + y$ con $\pi_{\alpha_j} z = z_j$ para algún $j \neq 1$. Así pues, por una parte $\pi_{\alpha_j} z_1 = 0$, y por otra parte $\pi_{\alpha_j} z_1 = \pi_{\alpha_j}(z + y) = z_j + \pi_{\alpha_j} y$, de manera que $z_j = -\pi_{\alpha_j} y \in Y$. En particular, si $z \in Z$, para algún $1 \leq j \leq t$ tenemos que:

$$z \in Z \oplus Y, \quad \pi_{\alpha_j} z = z_j \notin Z \oplus Y, \quad (4.31)$$

y por lo tanto $Z \oplus Y$ no es hiperinvariante.

(2) Observemos que los subespacios Z de la Definición 4.3.15 son precisamente aquellos que, para cualquier subespacio Y definido como en la Definición 4.3.12 y cualquier $z \in Z$, tenemos:

$$z \notin Y, \quad Jz \in Y, \pi_{\alpha_j} z \neq 0 \Rightarrow \pi_{\alpha_j} z \notin Y. \quad (4.32)$$

En este sentido, Z es una “mínima extensión” directa de Y de manera que la suma de ambos deja de ser hiperinvariante pero sigue siendo invariante.

(3) En las condiciones de la Definición 4.3.12, el subespacio hiperinvariante:

$$Y \oplus \text{span}\{z_1, \dots, z_t\} \quad (4.33)$$

es el subespacio hiperinvariante en (4.29)

4.3.5. Construcción de subespacios característicos no hiperinvariantes

Finalmente veremos que los subespacios característicos no hiperinvariantes son precisamente los de la forma $Y \oplus Z$, donde Y, Z son los subespacios introducidos en los apartados anteriores como asociados a una chartupla.

Teorema 4.3.18 ([24]). *Sea $J \in M_n(GF(2))$ con característica de Segre $\alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_m)$, entonces:*

1. *Dada una chartupla $(b_{i_1}, \dots, b_{i_t})$, y*

(a) *Z un subespacio minext asociado a ella.*

(b) *Y un subespacio hiperinvariante asociado a ella.*

Entonces, $X = Z \oplus Y$ es un subespacio característico no hiperinvariante.

2. *Dada $X \in \text{Chinv}(J) \setminus \text{Hinv}(J)$, y*

(I) *$Y = (X \cap U^1) \oplus \dots \oplus (X \cap U^t)$ el subespacio hiperinvariante maximal contenido en X (ver Teorema 4.3.1).*

(II) *(k_1, \dots, k_m) la hipertupla tal que $Y = V(k_1, \dots, k_m)$, (ver Teorema 3.1.14).*

(III) *$\Omega_t = \{i_1, \dots, i_t\} \subset \Omega$, $t \geq 2$, tal que existen $x_1, \dots, x_t \in X$, $t \geq 2$ con $\pi_{\alpha_{i_j}} x_j \notin X$, (ver Lema 4.3.6). Asumiremos que $1 \leq i_1 < \dots < i_t \leq m$.*

(IV) *$b_{i_j} = k_{i_j} + 1$, $1 \leq j \leq t$.*

(V) *$z_j = J^{\alpha_{i_j} - b_{i_j}} u_{i_j}$, $1 \leq j \leq t$ y*

$$Z := \text{span}\{z_{i_1} + \dots + z_{i_q} \in X, 1 \leq i_1, \dots, i_q \in \Omega_t, q > 1\}.$$

Entonces:

2.1. *$(b_{i_1}, \dots, b_{i_t})$ es una chartupla.*

2.2. *Z es un subespacio minext e Y un subespacio hiperinvariante asociados a ella.*

2.3. *$X = Z \oplus Y$.*

Demostración.

1. En primer lugar consideremos el subespacio $X = Z \oplus Y$ con Z, Y definidas como en el enunciado. Basta con demostrar que este subespacio es característico ya que no es hiperinvariante como consecuencia de la Observación 4.3.17(2).

Probemos pues que X es un subespacio característico. Sabemos que todo vector $x \in X$ puede escribirse de la forma $x = z + y$ con $z \in Z$ y $y \in Y$.

Dada $T' \in Z^*(J)$ cualquiera, $T'y \in Y$ ya que Y es hiperinvariante. Además, para todo $z \in Z$ tenemos que por el Lema 4.2.4:

$$T'z = z + w'.$$

Por lo tanto, es suficiente ver que $w' \in Y$. Teniendo en cuenta que

$$z = \lambda_1 z_1 + \dots + \lambda_t z_t, \quad \lambda_i \in GF(2),$$

siendo

$$z_j = J^{\alpha_{i_j} - b_{i_j}} u_{i_j},$$

y usando el Lema 4.2.4:

$$T'z_j = z_j + y_j$$

donde $y_j \in V(b_{i_j}, \dots, b_{i_j}, b_{i_j} - 1, b_{i_j} + \alpha_{i_j+1} - \alpha_{i_j}, \dots, b_{i_j} + \alpha_m - \alpha_{i_j})$, y a consecuencia de la Condición (4.29) de la Definición 4.3.12 tenemos que este subespacio está contenido en Y .

2. En primer lugar, observemos que en (v): $z_j \notin X$, $1 \leq j \leq t$ ya que $X \cap V^{i_j} \subset Y$.

En segundo lugar, vamos a ver que en (iii) podemos tomar $x'_j \in X$ de manera que

$$x'_j \in X, \quad \pi_{\alpha_{i_j}} x'_j = z_j \notin X, \quad 1 \leq j \leq t.$$

De hecho, tenemos que:

$$\pi_{\alpha_{i_j}} x_j = z'_j, \quad \text{height}(z'_j) = b'_{i_j} > k_{i_j}.$$

Por lo tanto,

$$x_j = (J^{\alpha_{i_j} - b'_{i_j}} u_{i_j} + z''_j) + w_j, \quad \text{height}(z''_j) < b'_{i_j}, \quad \pi_{\alpha_{i_j}} w_j = 0.$$

Si $b'_{i_j} > b_{i_j}$, aplicando el Lema 4.2.4, tenemos que existe $T' \in Z^*(J)$ tal que

$$T' J^{\alpha_{i_j} - b'_{i_j}} u_{i_j} = J^{\alpha_{i_j} - b'_{i_j}} u_{i_j} + z_j, \quad T' w_j = w_j$$

de modo que

$$T' z''_j = z''_j + y''_j, \quad y''_j \in Y.$$

Por lo tanto:

$$T' x_j = J^{\alpha_{i_j} - b'_{i_j}} u_{i_j} + z_j + z''_j + y''_j + w_j = x_j + z_j + y''_j \in X,$$

lo cual contradice el hecho de que $x_j, y_j'' \in X$, $z_j \notin X$. Por lo tanto $b'_{i_j} = b_{i_j}$, de modo que $z_j'' \in Y$, y finalmente tomamos

$$x'_j = x_j - z_j''.$$

Además, vamos a ver que para algún $i_h \neq i_j$ tenemos que

$$x'_j = z_j + z_h + w'_j, \quad \pi_{\alpha_{i_j}} w'_j = 0.$$

Sabemos que,

$$x'_j = z_j + w_j.$$

Si escribimos

$$y_j = \sum_{i \notin \Omega_t} \pi_{\alpha_i} w_j \in Y,$$

tenemos que

$$x'_j = z_j + \sum_{i \neq i_j} \pi_i w_j = z_j + \sum_{i_h \neq i_j} \pi_{\alpha_{i_h}} w_j + y_j.$$

Al tener que $z_j \notin X$, para algún $i_h \neq i_j$, entonces:

$$\pi_{\alpha_{i_h}} w_j \notin X$$

tal y como queríamos. En particular,

$$Z \neq \{0\}.$$

2.1. Probemos ahora que $(b_{i_1}, \dots, b_{i_t})$ es una chartupla. Sea $i_j < i_h$ definidas como antes, y $z_j + z_h + w \in X$ tal que $\pi_{\alpha_{i_j}} w = \pi_{\alpha_{i_h}} w = 0$:

- Si $b_{i_j} \leq b_{i_h}$ entonces, por el Lema 4.2.4 existe $T' \in Z^*(J)$ de forma que

$$T' z_j = z_j, \quad T' z_h = z_h + z_j, \quad T' w = w,$$

y esto implica que $T'(z_j + z_h + w) = z_j + z_h + z_j + w = z_h + w \in X$. Por lo tanto $z_j \in X$, lo cual es una contradicción.

- Si $\alpha_{i_j} - b_{i_j} \leq \alpha_{i_h} - b_{i_h}$ entonces, tenemos otra vez que por el Lema 4.2.4 existe $T' \in Z^*(J)$ tal que

$$T' z_j = z_j + z_h, \quad T' z_h = z_h, \quad T' w = w$$

y esto implica que $T' z = z_j + z_h + z_h + w = z_j + w \in X$ y por lo tanto $z_h \in X$, lo cual es una contradicción.

2.2. Tenemos que, por construcción, Z es un subespacio minext asociado a la chartupla $(b_{i_1}, \dots, b_{i_t})$, por lo tanto, sólo necesitamos demostrar que Y es un subespacio hiperinvariante asociado a la misma chartupla. En particular la condición (4.28) de la Definición 4.3.12 se cumple, por lo cual sólo es necesario demostrar la condición (4.29), esto es:

$$k_{i_j-1} \geq b_{i_j}, \quad k_{i_j+1} \geq \alpha_{i_j+1} - \alpha_{i_j} + b_{i_j}.$$

La primera desigualdad es evidente cuando $k_{i_j-1} = b_{i_j-1}$, es decir, si el bloque precedente también forma parte de la chartupla. En caso contrario, existe $T' \in Z^*(J)$ de manera que:

$$\begin{aligned} T' z_j &= z_j + w, & w &= J^{\alpha_{i_j-1}-b_{i_j}} u_{i_j-1}, \\ T' x &= x, & \text{if } \pi_{\alpha_{i_j}} x &= 0. \end{aligned}$$

Entonces, siendo z' tal que $z_j + z' \in Z$, tenemos que:

$$T'(z_j + z') = z_j + w + z' \in X.$$

Así pues, $w \in X \cap V_{b_{i_j}}^{i_j-1} \subset Y$, y $k_{i_j-1} \geq b_{i_j}$.

Un razonamiento análogo tomando $w = J^{\alpha_{i_j}-b_{i_j}} u_{i_j+1}$, da lugar a la segunda desigualdad.

2.3. Finalmente, observemos que siempre se cumple que $Y \oplus Z \subset X$. Para demostrar la inclusión contraria, notemos que dado cualquier $x \in X$ nos encontramos con los siguientes dos casos:

- (a) Si existe $\pi_{\alpha_{i_j}} x \notin X$ para algún i_j , entonces $x = z + y$, con $z \in Z$ e $y \in Y$.
- (b) Si para todo i_j , $\pi_{\alpha_{i_j}} x \in X$, entonces $x \in Y$.

□

Corolario 4.3.19. *Para $J \in M_n(GF(2))$ nilpotente, $X \in \text{Chinv}(J) \setminus \text{Hinv}(J)$ si y sólo si $X = Z \oplus Y$ para algún Z, Y definidos como antes; es decir, si existe una chartupla de forma que Z e Y son, respectivamente, un subespacio minext y un subespacio hiperinvariante asociados a ella.*

4.4. CONTANDO SUBESPACIOS CARACTERÍSTICOS NO HIPERINVARIANTES EN $GF(2)$

En esta sección vamos a desarrollar un método para contar (para una base de Jordan fijada) el número de subespacios $X \in \text{Chinv}(J) \setminus \text{Hinv}(J)$

para una matriz de Jordan nilpotente $J \in M_n(GF(2))$ con característica de Segre $\alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_m)$. En la sección anterior hemos descrito la construcción de tales subespacios mediante los siguientes pasos: nos restringimos a Ω y fijamos $\Omega_t \subset \Omega$ (ver Definición 4.3.4); para cada chartupla b asociada a Ω_t (ver Definición 4.3.7) escogemos un subespacio hiperinvariante Y asociado (ver Definición 4.3.12) y un subespacio minext Z igualmente asociado a b (ver Definición 4.3.15); entonces $Y \oplus Z \in \text{Chinv}(J) \setminus \text{Hinv}(J)$ (ver Teorema 4.3.18). El mismo teorema asegura que mediante esta construcción se obtienen todos los subespacios en $\text{Chinv}(J) \setminus \text{Hinv}(J)$. Por consiguiente en las próximas subsecciones contaremos sucesivamente, fijadas una base de Jordan y un $\Omega_t \subseteq \Omega$:

- Las chartuplas b asociadas a Ω_t (Subsección 4.4.1).
- Los minext Z asociados a cada chartupla b (Subsección 4.4.2).
- Los hiperinvariantes asociados Y asociados a cada chartupla b (Subsección 4.4.3).

Obviamente, el producto de estos tres cardinales nos da el número total de subespacios en $\text{Chinv}(J) \setminus \text{Hinv}(J)$ para cada $\Omega_t \subseteq \Omega$.

4.4.1. Contando chartuplas

En primer lugar observemos que el número de chartuplas asociadas a Ω_t puede verse como un caso particular del Corolario 3.5.5:

Lema 4.4.1. *En las condiciones de la Definición 4.3.7. Si $\text{char}(\Omega_t)$ es el conjunto formado por todas las chartuplas asociadas a Ω_t , entonces*

$$\boxed{\text{card}(\text{char}(\Omega_t)) = \alpha_{i_t}(\alpha_{i_{t-1}} - \alpha_{i_t} - 1) \cdots (\alpha_{i_1} - \alpha_{i_2} - 1).} \quad (4.34)$$

Demostración. El conjunto de chartuplas asociadas a Ω_t pueden verse como hipertuplas “estrictas” y entonces aplicando el Corolario 3.5.5 para cada $\Omega_t \subset \Omega$ se tiene que:

$$\text{card}(\text{char}(\Omega_t)) = \alpha_{i_t}(\alpha_{i_{t-1}} - \alpha_{i_t} - 1) \cdots (\alpha_{i_1} - \alpha_{i_2} - 1).$$

□

Observación 4.4.2. Por tanto, si denotamos por $\text{char}(\alpha)$ al conjunto de todas las chartuplas asociadas a α y por $\text{char}(t)$ las de longitud t , se tiene:

$$\text{card}(\text{char}(\alpha)) = \sum_{t \geq 2} \text{card}(\text{char}(t)) = \sum_{t \geq 2} \sum_{\Omega_t \subset \Omega} \alpha_{i_t}(\alpha_{i_{t-1}} - \alpha_{i_t} - 1) \cdots (\alpha_{i_1} - \alpha_{i_2} - 1). \quad (4.35)$$

Ejemplo 4.4.3. Si $\alpha = (\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4, \alpha_5, \alpha_6, \alpha_7) = (12, 7, 6, 4, 4, 3, 1)$, entonces $\Omega = \{1, 2, 3, 6, 7\}$ y:

$$\begin{aligned}\{\Omega_2 \subseteq \Omega\} &= \{\{1, 2\}, \{1, 3\}, \{1, 6\}, \{1, 7\}, \{2, 6\}, \{2, 7\}, \{6, 7\}\}, \\ \{\Omega_3 \subseteq \Omega\} &= \{\{1, 2, 6\}, \{1, 2, 7\}, \{1, 3, 6\}, \{1, 3, 7\}, \{1, 6, 7\}, \{2, 6, 7\}\}, \\ \{\Omega_4 \subseteq \Omega\} &= \{\{1, 2, 6, 7\}, \{1, 3, 6, 7\}\}.\end{aligned}$$

Para $t = 2$, tendremos:

$$\begin{aligned}\text{card}(\text{char}(\{1, 2\})) &= \alpha_2(\alpha_1 - \alpha_2 - 1) = 28, \\ \text{card}(\text{char}(\{1, 3\})) &= \alpha_3(\alpha_1 - \alpha_3 - 1) = 30, \\ \text{card}(\text{char}(\{1, 6\})) &= \alpha_6(\alpha_1 - \alpha_6 - 1) = 24, \\ \text{card}(\text{char}(\{1, 7\})) &= \alpha_7(\alpha_1 - \alpha_7 - 1) = 10, \\ \text{card}(\text{char}(\{2, 6\})) &= \alpha_6(\alpha_2 - \alpha_6 - 1) = 9, \\ \text{card}(\text{char}(\{2, 7\})) &= \alpha_7(\alpha_2 - \alpha_7 - 1) = 5, \\ \text{card}(\text{char}(\{6, 7\})) &= \alpha_7(\alpha_6 - \alpha_7 - 1) = 1.\end{aligned}$$

$$\text{card}(\text{char}(2)) = 107.$$

Para chartuplas de longitud $t = 3$:

$$\begin{aligned}\text{card}(\text{char}(\{1, 2, 6\})) &= \alpha_6(\alpha_2 - \alpha_6 - 1)(\alpha_1 - \alpha_2 - 1) = 36, \\ \text{card}(\text{char}(\{1, 2, 7\})) &= \alpha_7(\alpha_2 - \alpha_7 - 1)(\alpha_1 - \alpha_2 - 1) = 20, \\ \text{card}(\text{char}(\{1, 3, 6\})) &= \alpha_6(\alpha_3 - \alpha_6 - 1)(\alpha_1 - \alpha_3 - 1) = 30, \\ \text{card}(\text{char}(\{1, 3, 7\})) &= \alpha_7(\alpha_3 - \alpha_7 - 1)(\alpha_1 - \alpha_3 - 1) = 20, \\ \text{card}(\text{char}(\{1, 6, 7\})) &= \alpha_7(\alpha_6 - \alpha_7 - 1)(\alpha_1 - \alpha_6 - 1) = 8, \\ \text{card}(\text{char}(\{2, 6, 7\})) &= \alpha_7(\alpha_6 - \alpha_7 - 1)(\alpha_2 - \alpha_6 - 1) = 3.\end{aligned}$$

$$\text{card}(\text{char}(3)) = 117.$$

Finalmente, para $t = 4$:

$$\begin{aligned}\text{card}(\text{char}(\{1, 2, 6, 7\})) &= \alpha_7(\alpha_6 - \alpha_7 - 1)(\alpha_2 - \alpha_6 - 1)(\alpha_1 - \alpha_2 - 1) = 12, \\ \text{card}(\text{char}(\{1, 3, 6, 7\})) &= \alpha_7(\alpha_6 - \alpha_7 - 1)(\alpha_3 - \alpha_6 - 1)(\alpha_1 - \alpha_3 - 1) = 10.\end{aligned}$$

$$\text{card}(\text{char}(4)) = 22.$$

Y el número total de chartuplas es

$$\text{card}(\text{chartup}(\alpha)) = 107 + 117 + 22 = 246.$$

4.4.2. Contando subespacios minext **Z**

Sea $\Omega_t = \{i_1, \dots, i_t\} \subseteq \Omega$ y $b = (b_{i_1}, \dots, b_{i_t})$ una chartupla asociada a Ω_t . Dados z_1, \dots, z_t como en la Definición 4.3.15 nos proponemos determinar el número de subespacios minext de dimensión d ($1 \leq d \leq t$) contenidos en $\text{span}\{z_1, \dots, z_t\}$.

Definición 4.4.4. Sea $b = (b_{i_1}, \dots, b_{i_t})$ una chartupla y $\{z_1, \dots, z_t\}$ como en la Definición 4.3.15. Denotaremos por $\mathcal{Z}_d(b)$ al conjunto formado por los subespacios minext de dimensión d asociados a b y por $N_d(b)$ su cardinal.

Ejemplo 4.4.5. Para cualquier chartupla b , es $N_1(b) = 1$, ya que el único subespacio minext de dimensión 1 es $z_1 + \dots + z_t$.

Observación 4.4.6. Como $\text{span}\{z_1, \dots, z_t\} \cong (GF(2))^t$, $N_d(b)$ no depende de las componentes b_{i_1}, \dots, b_{i_t} de b (ni tampoco de las de Ω_t), sino sólo de su longitud t . Podemos por tanto escribir:

$$N_d(t) = N_d(b), \quad \text{con } t = \text{longitud de } b. \quad (4.36)$$

En particular,

$$N_d(\Omega_t) = N_d(t) \text{card}(\text{char}(\Omega_t)), \quad (4.37)$$

donde $N_d(\Omega_t)$ indica el número total de subespacios minext de dimensión d asociados a Ω_t .

Se tiene la siguiente dualidad:

Lema 4.4.7. Con las notaciones de la Definición 4.4.4, dada una chartupla de longitud t , tenemos:

$$N_d(t) = N_{t-d}(t). \quad (4.38)$$

Demostración. Sea $Z = \text{span}\{w_1, \dots, w_d\} \subseteq \text{span}\{z_1, \dots, z_t\} \cong (GF(2))^t$ y z_1, \dots, z_t como en la Definición 4.3.15. Consideremos un producto escalar de manera que $\{z_1, \dots, z_t\}$ sea una base ortonormal. Entonces, si $F_i = \text{span}\{z_1, \dots, z_{i-1}, z_{i+1}, \dots, z_t\} = \{(x_1, \dots, x_t) \in (GF(2))^t \mid x_i = 0\}$, tenemos que $F_i^\perp = \text{span}\{z_i\}$.

Si Z un subespacio minext, las condiciones 2 y 3 de la Definición 4.3.15 se pueden escribir:

- $\text{span}\{z_i\} \not\subseteq Z$.
- $Z \not\subseteq F_i$.

Dualizando estas condiciones obtenemos que:

- $Z^\perp \not\subseteq \text{span}\{z_i\}^\perp = F_i$.
- $F_i^\perp = \text{span}\{z_i\} \not\subseteq Z^\perp$.

y por lo tanto Z^\perp es también minext. \square

Corolario 4.4.8. $N_d(d+1) = 1$. *Concretamente:*

$$\mathcal{Z}_d(d+1) = \{\text{span}\{z_1 + z_2, \dots, z_d + z_{d+1}\}\}. \quad (4.39)$$

Demostración. Como consecuencia del lema anterior tenemos que $N_d(d+1) = N_1(d+1)$ y es evidente que $N_1(d+1) = 1$ ya que el único subespacio minext 1-dimensional en este caso es $\{z_1 + \dots + z_{d+1}\}$. \square

Para el cálculo de $N_d(b)$ introducimos las siguientes notaciones:

Definición 4.4.9. Sea $b = (b_{i_1}, \dots, b_{i_t})$ una chartupla y z_1, \dots, z_t como en la Definición 4.3.15. Escribiremos $\mathcal{Z}_d^1(b)$ (respectivamente $\mathcal{Z}_d^{1,2}(b)$) al conjunto formado por los subespacios vectoriales de $\text{span}\{z_1, \dots, z_t\}$ de dimensión d que verifican la condición 1 (respectivamente las condiciones 1 y 2) de la Definición 4.3.15. Su cardinal lo notaremos por $N_d^1(b)$ (respectivamente $N_d^{1,2}(b)$). Obviamente:

$$\mathcal{Z}_d(b) \subset \mathcal{Z}_d^{1,2}(b) \subset \mathcal{Z}_d^1(b). \quad (4.40)$$

Como en la Observación 4.4.6, tenemos:

$$N_d^1(t) = N_d^1(b) \text{ y } N_d^{1,2}(t) = N_d^{1,2}(b) \quad \text{con } t = \text{longitud de } b. \quad (4.41)$$

Claramente $N_d^1(b)$ es el número de subespacios de dimensión d de $(GF(2))^t$, que es el llamado coeficiente binomial gaussiano $\binom{t}{d}_2$ (ver, por ejemplo [27]):

Lema 4.4.10. *Con las notaciones de la Definición 4.4.9, para toda chartupla b de longitud t , se tiene:*

$$N_d^1(b) = N_d^1(t) = \binom{t}{d}_2 = \frac{(2^t - 1)(2^t - 2) \dots (2^t - 2^{d-1})}{(2^d - 1)(2^d - 2) \dots (2^d - 2^{d-1})}. \quad (4.42)$$

Observación 4.4.11. Escribiremos $\binom{t}{k}_2 = 0$ cuando $k < 0$ y escribiremos $\binom{t}{0}_2 = 1$.

Calculemos ahora $N_d^{1,2}(b)$:

Proposición 4.4.12. *Con las notaciones de la Definición 4.4.9, para toda chartupla b de longitud t , se tiene::*

$$N_d^{1,2}(b) = N_d^{1,2}(t) = \sum_{k=0}^d (-1)^k \binom{t}{k} \binom{t-k}{d-k}_2. \quad (4.43)$$

Demostración. Sea $Z_i \subset \mathcal{Z}_d^1$ el subconjunto formado por los subespacios vectoriales en \mathcal{Z}_d^1 que contienen a z_i . Entonces, tenemos que:

$$N_d^{1,2}(t) = \text{card}(\bar{Z}_1 \cap \dots \cap \bar{Z}_t) = \text{card}(\overline{Z_1 \cup \dots \cup Z_t}) = \binom{t}{d}_2 - \text{card}(Z_1 \cup \dots \cup Z_t),$$

y además:

$$\begin{aligned} \text{card}(Z_1 \cup \dots \cup Z_t) &= \sum_{i=1}^t \text{card}(Z_i) - \sum_{i,j:1 \leq i < j \leq t} \text{card}(Z_i \cap Z_j) + \\ &+ \sum_{i,j,k:1 \leq i < j < k \leq t} \text{card}(Z_i \cap Z_j \cap Z_k) - \dots + (-1)^{t+1} \text{card}(Z_1 \cap \dots \cap Z_t). \end{aligned}$$

Observemos que todo subespacio contenido en:

$$Z_{j_1} \cap \dots \cap Z_{j_k},$$

contiene los elementos z_{j_1}, \dots, z_{j_k} y por lo tanto podemos deducir:

$$\text{card}(Z_{j_1} \cap \dots \cap Z_{j_k}) = \binom{t-k}{d-k}_2.$$

En particular, al ser:

$$\binom{t-k}{d-k}_2 = 0 \quad \text{si } k > d,$$

tenemos que:

$$\begin{aligned} \text{card}(Z_1 \cup \dots \cup Z_t) &= \sum_{i=1}^t \binom{t-1}{d-1}_2 - \sum_{i,j:1 \leq i < j \leq t} \binom{t-2}{d-2}_2 + \\ &+ \sum_{i,j,k:1 \leq i < j < k \leq t} \binom{t-3}{d-3}_2 - \dots + (-1)^{d+1} \sum_{i_1, \dots, i_d: 1 \leq i_1 \leq \dots \leq i_d \leq t} \binom{t-d}{0}_2 = \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \binom{t-1}{d-1}_2 \sum_{i=1}^t 1 - \binom{t-2}{d-2}_2 \sum_{i,j:1 \leq i < j \leq t} 1 + \\
&\quad + \binom{t-3}{d-3}_2 \sum_{i,j,k:1 \leq i < j < k \leq t} 1 - \dots + (-1)^{d+1} \sum_{i_1, \dots, i_d: 1 \leq i_1 \leq \dots \leq i_d \leq t} 1 = \\
&= \binom{t-1}{d-1}_2 \binom{t}{1} - \binom{t-2}{d-2}_2 \binom{t}{2} + \binom{t-3}{d-3}_2 \binom{t}{3} - \dots + (-1)^{d+1} \binom{t}{d} = \\
&= \sum_{k=1}^d (-1)^{k+1} \binom{t}{k} \binom{t-k}{d-k}_2.
\end{aligned}$$

Por tanto:

$$\begin{aligned}
N_d^{1,2}(t) &= \binom{t}{d}_2 - \sum_{k=1}^d (-1)^{k+1} \binom{t}{k} \binom{t-k}{d-k}_2 = \\
&= \sum_{k=0}^d (-1)^k \binom{t}{k} \binom{t-k}{d-k}_2.
\end{aligned}$$

□

Finalmente, imponiendo la condición 3, obtenemos el número de subespacios minext Z .

Proposición 4.4.13. *Para toda chartupla b de longitud t , el número de subespacios minext de dimensión d asociados a b viene dado por:*

$$N_d(b) = N_d(t) = N_d^{1,2}(t) - \sum_{k=1}^{t-1} \binom{t}{k} N_d(k). \quad (4.44)$$

Demostración. Tal y como hemos dicho antes, $\mathcal{Z}_d(b) \subset \mathcal{Z}_d^{1,2}(b)$ y por lo tanto los subespacios no minext son los elementos de $\mathcal{Z}_d^{1,2}(b)$ que no pertenecen a $\mathcal{Z}_d(b)$ y son precisamente aquellos subespacios Z' que no cumplen la condición 3.

De hecho, estos $Z' \in \mathcal{Z}_d^{1,2}(b) \setminus \mathcal{Z}_d(b)$ pueden interpretarse como subespacios minext asociados a una chartupla de longitud $k < t$ y teniendo en cuenta que $\text{card}(\{\Omega_k \subseteq \Omega_t\}) = \binom{t}{k}$ tenemos que el cardinal de estos minext es $\binom{t}{k} N_d(k)$. Por lo tanto,

$$N_d(t) = N_d^{1,2}(t) - \sum_{k=1}^{t-1} \binom{t}{k} N_d(k) \quad (4.45)$$

y la proposición queda demostrada. □

De los resultados anteriores, concluimos:

Teorema 4.4.14. *Dada una chartupla b de longitud t , el número de subespacios minext de dimensión d asociados a esta chartupla viene dado por la siguiente recurrencia:*

$$\boxed{N_d(t) = 0, t \leq d, \quad N_d(d+1) = 1,} \quad (4.46)$$

$$\boxed{N_d(t) = \sum_{k=0}^d (-1)^k \binom{t}{k} \binom{t-k}{d-k}_2 - \sum_{k=d+1}^{t-1} \binom{t}{k} N_d(k).} \quad (4.47)$$

Ejemplo 4.4.15. Para $t = d + 2$:

$$N_d(d+2) = \left[\sum_{k=0}^d (-1)^k \binom{d+2}{k} \binom{d+2-k}{2} \right] - (d+2). \quad (4.48)$$

Ejemplo 4.4.16. Si $t = 4$ sabemos que $N_3(4) = 1 = N_1(4)$. Vamos a calcular pues $N_2(4)$:

$$\begin{aligned} N_2(4) &= \sum_{k=0}^2 (-1)^k \binom{4}{k} \binom{4-k}{2-k} - \sum_{k=3}^3 \binom{4}{k} N_2(k) = \\ &= 13 - 4 = 9. \end{aligned}$$

Explícitamente:

$$\begin{aligned} Z_1 &= \text{span}\{z_1 + z_2, z_3 + z_4\}, Z_2 = \text{span}\{z_1 + z_3, z_2 + z_4\}, \\ Z_3 &= \text{span}\{z_1 + z_4, z_2 + z_3\}, Z_4 = \text{span}\{z_1 + z_2 + z_3, z_3 + z_4\}, \\ Z_5 &= \text{span}\{z_1 + z_2 + z_3, z_2 + z_4\}, Z_6 = \text{span}\{z_1 + z_2 + z_3, z_1 + z_4\} \\ Z_7 &= \text{span}\{z_1 + z_2 + z_4, z_1 + z_3\}, Z_8 = \text{span}\{z_1 + z_2 + z_4, z_2 + z_3\} \\ Z_9 &= \text{span}\{z_1 + z_3 + z_4, z_1 + z_2\}. \end{aligned}$$

Ejemplo 4.4.17. La siguiente tabla recoge $N_d(t)$ para $2 \leq t \leq 10$, $1 \leq d \leq 8$:

$t \backslash d$	1	2	3	4	5	6	7	8
1	0	0	0	0	0	0	0	0
2	1	0	0	0	0	0	0	0
3	1	1	0	0	0	0	0	0
4	1	9	1	0	0	0	0	0
5	1	35	35	1	0	0	0	0
6	1	115	445	115	1	0	0	0
7	1	357	3985	3985	357	1	0	0
8	1	1085	31157	87705	31157	1085	1	0
9	1	3271	229579	1583607	1583607	229579	3271	1
10	1	9831	1646185	26048985	62907909	26048985	1646185	9831

4.4.3. Contando subespacios hiperinvariantes asociados a una chartupla

Finalmente, nos falta contar el número de subespacios hiperinvariantes Y asociados a una chartupla $b = (b_{i_1}, \dots, b_{i_t})$, esto es (ver Definición 4.3.12), de las hipertuplas asociadas a b .

Definición 4.4.18. Dada una chartupla $b = (b_{i_1}, \dots, b_{i_t})$.

- (1) Llamaremos $hyp(b)$ al conjunto de b -hipertuplas, esto es, de las hipertuplas:

$$(k_1, \dots, k_{i_1-1}, b_{i_1}-1, k_{i_1+1}, \dots, k_{i_2-1}, b_{i_2}-1, k_{i_2+1}, \dots, k_{i_t-1}, b_{i_t}-1, k_{i_t+1}, \dots, k_m)$$

que verifican las condiciones siguientes, donde $0 < j < t$:

$$\begin{aligned} k_1 &\geq \dots \geq k_{i_1-1} \geq b_{i_1}, \\ \alpha_1 - k_1 &\geq \dots \geq \alpha_{i_1-1} - k_{i_1-1} > \alpha_{i_1} - b_{i_1}. \end{aligned} \quad (\text{h0})$$

$$\begin{aligned} b_{i_j} &> k_{i_j+1} \geq \dots \geq k_{i_j-1} \geq b_{i_{j+1}}, \\ \alpha_{i_j} - b_{i_j} &\geq \alpha_{i_{j+1}} - k_{i_j+1} \geq \dots \geq \alpha_{i_{j+1}-1} - k_{i_{j+1}-1} > \alpha_{i_{j+1}} - b_{i_{j+1}}. \end{aligned} \quad (\text{hj})$$

$$\begin{aligned} b_{i_t} &> k_{i_t+1} \geq \dots \geq k_m, \\ \alpha_{i_t} - b_{i_t} &\geq \alpha_{i_t+1} - k_{i_t+1} \geq \dots \geq \alpha_m - k_m. \end{aligned} \quad (\text{ht})$$

(2) Igualmente, llamaremos:

$$\begin{aligned} hyp(*, b_{i_1}) &= \{(k_1, \dots, k_{i_1-1}, b_{i_1} - 1) \text{ que verifican } (h_0)\}, \\ hyp(b_{i_j}, b_{i_{j+1}}) &= \{(b_{i_j} - 1, k_{i_j+1}, \dots, k_{i_{j+1}-1}, b_{i_{j+1}} - 1) \text{ que verifican } (h_j)\}, \\ hyp(b_{i_t}, *) &= \{(b_{i_t} - 1, k_{i_t+1}, \dots, k_m) \text{ que verifican } (h_t)\}, \end{aligned}$$

donde $0 < j < t$.

Lema 4.4.19. *En las condiciones de la definición anterior:*

$$\boxed{\text{card}(hyp(b)) = \text{card}(hyp(*, b_{i_1})) \prod_{i=1}^{t-1} \text{card}(hyp(b_{i_j}, b_{i_{j+1}})) \text{card}(hyp(b_{i_t}, *)).}$$

(4.49)

Ejemplo 4.4.20. Consideremos $\alpha = (30, 25, 23, 20, 18, 15, 10, 8, 5, 2, 1)$, $\Omega_2 = \{4, 10\}$ y $b = (13, 1)$. Entonces:

$$\text{card}(hyp(b)) = \text{card}(hyp(*, b_4)) \text{card}(hyp(b_4, b_{10})) \text{card}(hyp(b_{10}, *)).$$

(4.50)

Observación 4.4.21. Nótese que si $i_{j+1} = i_j + 1$, entonces:

$$\text{card}(hyp(b_{i_j}, b_{i_{j+1}})) = 1.$$

(4.51)

Para el primer factor, tenemos:

Proposición 4.4.22. *En las condiciones de la definición anterior, si $i_1 > 1$:*

$$\boxed{\text{card}(hyp(*, b_{i_1})) = (\alpha_1 - \alpha_2 + 1) \dots (\alpha_{i_1-2} - \alpha_{i_1-1} + 1)(\alpha_{i_1-1} - \alpha_{i_1}).}$$

(4.52)

Demostración. Basta con observar que $k_{i_1-1}, k_{i_1-2}, \dots, k_1$ han de verificar:

$$\begin{aligned} b_{i_1} &\leq k_{i_1-1} \leq b_{i_1} + (\alpha_{i_1-1} - \alpha_{i_1} - 1), \\ k_{i_1-1} &\leq k_{i_1-2} \leq k_{i_1-1} + (\alpha_{i_1-2} - \alpha_{i_1-1}), \\ &\dots\dots\dots \\ k_2 &\leq k_1 \leq k_2 + (\alpha_1 - \alpha_2). \end{aligned}$$

□

Ejemplo 4.4.23. Para el Ejemplo 4.4.20, tenemos que:

$$\text{card}(hyp(*, b_4)) = (30 - 25 + 1)(25 - 23 + 1)(23 - 20) = 54.$$

(4.53)

Para cada cardinal en el segundo factor:

$$\text{card}(\text{hyp}(b_{i_j}, b_{i_{j+1}})), \quad 0 < j < t, \quad (4.54)$$

claramente podemos reducirnos a considerar hipertuplas de la forma:

$$\begin{aligned} & (b_1 - 1, k_2, \dots, k_{r-1}, b_r - 1), \\ & b_1 > k_2 \geq \dots \geq k_{r-1} \geq b_r, \\ & \alpha_1 - b_1 \geq \alpha_2 - k_2 \geq \dots \geq \dots \alpha_{r-1} - k_{r-1} > \alpha_r - b_r. \end{aligned}$$

De forma más precisa, el cálculo de dicho factor se reduce al caso recogido en el siguiente lema:

Lema 4.4.24. *Para $0 < j < t$, definimos:*

$$\begin{aligned} r &= i_{j+1} - i_j + 1, \\ \bar{\alpha} &= (\alpha_{i_j}, \dots, \alpha_{i_{j+1}}), \\ \bar{b} &= (b_{i_j}, b_{i_{j+1}}). \end{aligned}$$

Entonces:

$$\text{card}(\text{hyp}(b_{i_j}, b_{i_{j+1}})) = \text{card}(\text{hyp}(\bar{b})). \quad (4.55)$$

Veamos primero un ejemplo ilustrativo:

Ejemplo 4.4.25. Consideremos la situación anterior con $r = 5$:

$$\begin{aligned} & (b_1 - 1, k_2, k_3, k_4, b_5 - 1), \\ & b_1 > k_2 \geq k_3 \geq k_4 \geq b_5, \\ & \alpha_1 - b_1 \geq \alpha_2 - k_2 \geq \alpha_3 - k_3 \geq \alpha_4 - k_4 > \alpha_5 - b_5. \end{aligned}$$

Si ignorásemos b_1 podríamos proceder por recurrencia como en la proposición anterior:

$$\begin{aligned} b_5 &\leq k_4 \leq b_5 + \alpha_4 - \alpha_5 - 1, \\ k_4 &\leq k_3 \leq k_4 + \alpha_3 - \alpha_4, \\ k_3 &\leq k_2 \leq k_3 + \alpha_2 - \alpha_3. \end{aligned}$$

Pero las desigualdades con b_1 obligan por una parte a limitar la elección inicial de k_4 :

$$\text{máx}\{b_5, b_1 + \alpha_1 - \alpha_4\} \leq k_4 \leq \text{mín}\{b_1 - 1, b_5 + \alpha_4 - \alpha_5 - 1\}, \quad (4.56)$$

y por otra parte a considerar sólo aquellas recurrencias para las que resulte

$$b_1 + \alpha_2 - \alpha_1 \leq k_2 < b_1. \quad (4.57)$$

Generalizando el ejemplo anterior, resulta:

Proposición 4.4.26. *Las hipertuplas de la forma $\text{hyp}(b_1, b_r)$, esto es:*

$$(b_1 - 1, k_2, \dots, k_{r-1}, b_r - 1) \quad (4.58)$$

$$b_1 > k_2 \geq \dots \geq k_{r-1} \geq b_r \quad (4.59)$$

$$\alpha_1 - b_1 \geq \alpha_2 - k_2 \geq \dots \geq \alpha_{r-1} - k_{r-1} > \alpha_r - b_r, \quad (4.60)$$

pueden obtenerse de la manera siguiente:

(1) *Considerar los valores k_{r-1} que verifican:*

$$\text{máx}\{b_r, b_1 - \alpha_1 + \alpha_{r-1}\} \leq k_{r-1} \leq \text{mín}\{b_1 - 1, b_r + \alpha_{r-1} - \alpha_r - 1\}. \quad (4.61)$$

(2) *Para cada uno de ellos, considerar las tuplas (k_2, \dots, k_{r-2}) construidas por recurrencia reversa mediante:*

$$k_{r-1} \leq k_{r-2} \leq k_{r-1} + \alpha_{r-2} - \alpha_{r-1}, \quad (4.62)$$

.....

$$k_3 \leq k_2 \leq k_3 + \alpha_2 - \alpha_3.$$

(3) *Seleccionar aquellas para las que:*

$$b_1 + \alpha_2 - \alpha_1 \leq k_2 < b_1. \quad (4.63)$$

Ejemplo 4.4.27. Para $\alpha = (20, 18, 15, 10, 8, 5, 2)$, consideremos $\Omega_2 = \{1, 7\}$ y la chartupla asociada $b = (b_1, b_7) = (13, 1)$. Por lo tanto, busquemos k_2, k_3, k_4, k_5, k_6 de manera que las hipertuplas verifiquen:

$$(12, k_2, k_3, k_4, k_5, k_6, 0),$$

$$13 > k_2 \geq k_3 \geq k_4 \geq k_5 \geq k_6 \geq 1,$$

$$20 - 13 \geq 18 - k_2 \geq 15 - k_3 \geq 10 - k_4 \geq 8 - k_5 \geq 5 - k_6 > 2 - 1.$$

En este caso $r = 7$, por lo tanto, siguiendo los pasos de la proposición anterior consideraremos los valores de k_6 que verifican:

$$\text{máx}\{b_7, b_1 - \alpha_1 + \alpha_6\} \leq k_6 \leq \text{mín}\{b_1 - 1, b_7 + \alpha_6 - \alpha_7 - 1\},$$

esto es:

$$\text{máx}\{1, 13 - 20 + 5\} \leq k_6 \leq \text{mín}\{12, 1 + 5 - 2 - 1\},$$

por tanto:

$$1 \leq k_6 \leq 3.$$

Por otra parte:

$$b_1 + \alpha_2 - \alpha_1 \leq k_2 < b_1,$$

esto es:

$$11 \leq k_2 \leq 12.$$

Veamos que el cómputo de las hipertuplas $\text{hyp}(b_1, b_r)$ puede realizarse a partir de la Tabla 3.4 en el Teorema 3.5.11.

Teorema 4.4.28. *En las condiciones de la Proposición 4.4.26:*

$$\text{card}(\text{hyp}(b_1, b_r)) = \sum_{c=c_{\min}}^{c_{\max}} \sum_{\Delta=b_1+\alpha_2-\alpha_1-c}^{b_1-1-c} n_2^\Delta(0), \quad (4.64)$$

donde $n_2^\Delta(0)$ está tabulado en la Tabla 3.4 y:

$$c_{\min} = \text{máx} \{b_r, b_1 - \alpha_1 + \alpha_{r-1}\}, \quad (4.65)$$

$$c_{\max} = \text{mín} \{b_1 - 1, b_r + \alpha_{r-1} - \alpha_r - 1\}. \quad (4.66)$$

Demostración. Basta tener en cuenta que:

$$\text{hyp}(b_1, b_r) = \bigcup_{k_{r-1}=\text{máx}\{b_r, b_1-\alpha_1+\alpha_{r-1}\}}^{\text{mín}\{b_1-1, b_r+\alpha_{r-1}-\alpha_r-1\}} \bigcup_{\Delta=b_1+\alpha_2-\alpha_1-k_{r-1}}^{b_1-1-k_{r-1}} H_2^\Delta(k_{r-1}), \quad (4.67)$$

donde $H_2^\Delta(k_{r-1})$ es como en la Definición 3.5.8 y que:

$$\text{card}(H_2^\Delta(k_{r-1})) = n_2^\Delta(k_{r-1}) = n_2^\Delta(0). \quad (4.68)$$

□

Ejemplo 4.4.29. Siguiendo con el Ejemplo 4.4.27, la Tabla 3.4 para $\alpha = (20, 18, 15, 10, 8, 5, 2)$ es:

$r-p \setminus \Delta$	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11
6	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
5	1	1	1	1	0	0	0	0	0	0	0	0
4	1	2	3	3	2	1	0	0	0	0	0	0
3	1	3	6	9	11	12	11	9	6	3	1	0
2	1	4	10	19	29	38	43	43	38	29	19	10

$$\begin{aligned}
 \text{card}(\text{hyp}(b_1, b_r)) &= \sum_{c=1}^3 \sum_{\Delta=11-c}^{12-c} n_2^\Delta(0) = \\
 &= (n_2^{10}(0) + n_2^{11}(0)) + (n_2^9(0) + n_2^{10}(0)) + (n_2^8(0) + n_2^9(0)) = \\
 &= n_3^8(0) + 2n_2^9(0) + 2n_2^{10}(0) + n_2^{11}(0) = \\
 &= 38 + 2 \cdot 29 + 2 \cdot 19 + 10 = 144.
 \end{aligned}$$

Corolario 4.4.30. *Para cada cardinal en el segundo factor del Lema 4.4.19, se tiene:*

$$\text{card}(\text{hyp}(b_{i_j}, b_{i_{j+1}})) = \sum_{c=c_{min}}^{c_{max}} \sum_{\Delta=b_{i_j}+\alpha_{i_{j+1}}-\alpha_{i_j}-c}^{b_{i_j}-1-c} n_{i_{j+1}}^\Delta(0), \quad (4.69)$$

donde $n_{i_{j+1}}^\Delta(0)$ está tabulado en la Tabla 3.4 y:

$$c_{min} = \max \{b_{i_{j+1}}, b_{i_j} - \alpha_{i_j} + \alpha_{i_{j+1}-1}\}, \quad (4.70)$$

$$c_{max} = \min \{b_{i_j} - 1, b_{i_{j+1}} + \alpha_{i_{j+1}-1} - \alpha_{i_{j+1}} - 1\}. \quad (4.71)$$

Finalmente:

Teorema 4.4.31. *Para el último factor del Lema 4.4.19:*

$$\text{card}(\text{hyp}(b_{i_t}, *)) = \sum_{c=c_{min}}^{c_{max}} \sum_{\Delta=b_{i_t}+\alpha_{i_t+1}-\alpha_{i_t}-c}^{b_{i_t}-1-c} n_{i_t+1}^\Delta(0), \quad (4.72)$$

donde $n_{i_t+1}^\Delta(0)$ está tabulado en la Tabla 3.4 y:

$$c_{min} = b_{i_t} - \alpha_{i_t} - \alpha_m, \quad (4.73)$$

$$c_{max} = b_{i_t} - 1. \quad (4.74)$$

Demostración. Para $j=t$, definimos:

$$\begin{aligned}
 r &= m - i_t + 1, \\
 \bar{\alpha} &= (\alpha_{i_t}, \dots, \alpha_m), \\
 \bar{b} &= (b_{i_t}).
 \end{aligned}$$

Resulta:

$$\text{card}(\text{hyp}(b_{i_t}, *)) = \text{card}(\text{hyp}(\bar{b})). \quad (4.75)$$

El estudio de $hyp(b_{ii}, *)$ se deduce fácilmente de la Proposición 4.4.26:
Las hipertuplas de la forma $hyp(b_1, *)$:

$$\begin{aligned} & (b_1 - 1, k_2, \dots, k_{r-1}), \\ & b_1 > k_2 \geq \dots \geq k_{r-1}, \\ & \alpha_1 - b_1 \geq \alpha_2 - k_2 \geq \dots \geq \dots \geq \alpha_{r-1} - k_{r-1}, \end{aligned}$$

pueden obtenerse como antes sustituyendo (1) por:

$$(1') \quad \text{máx}\{b_1 - \alpha_1 + \alpha_{r-1}, 0\} \leq k_{r-1} \leq \text{mín}\{b_1 - 1, \alpha_{r-1}\}. \quad (4.76)$$

En las condiciones de la Proposición 4.4.26:

$$\text{card}(hyp(b_1, *)) = \sum_{c=c_{min}}^{c_{max}} \sum_{\Delta=b_1+\alpha_2-\alpha_1-c}^{b_1-1-c} n_2^\Delta(0), \quad (4.77)$$

donde:

$$c_{min} = \text{máx}\{b_1 - \alpha_1 + \alpha_{r-1}, 0\}, \quad (4.78)$$

$$c_{max} = \text{mín}\{b_1 - 1, \alpha_{r-1}\}. \quad (4.79)$$

□

Ejemplo 4.4.32. Consideremos $\alpha = (11, 9, 8, 5, 2)$ y $b_1 = 8$. Buscamos calcular $\text{card}(hyp(b_1, *))$:

$$(b_1 - 1, k_2, k_3, k_4, k_5). \quad (4.80)$$

Aplicando las fórmulas anteriores tenemos que:

$$0 \leq k_5 \leq 2,$$

y

$$6 \leq k_2 \leq 7.$$

Por lo tanto, construimos la correspondiente tabla:

$r - p \setminus \Delta$	0	1	2	3	4	5	6	7
5	1	0	0	0	0	0	0	0
4	1	1	1	1	0	0	0	0
3	1	2	3	4	3	2	1	0
2	1	3	5	7	7	5	3	1

Finalmente, tenemos que:

$$\begin{aligned} \text{card}(\text{hyp}(b_1, *)) &= \sum_{c=0}^2 \sum_{\Delta=6-c}^{7-c} n_2^\Delta(0) = \\ &= (n_2^6(0) + n_2^7(0)) + (n_2^5(0) + n_2^6(0)) + (n_2^4(0) + n_2^5(0)) = 24. \end{aligned}$$

Veamos finalmente que los cardinales en la Proposición 4.4.22, en el Teorema 4.4.28, en el Corolario 4.4.30 y en el Teorema 4.4.31, pueden obtenerse mediante polinomios generadores como en la Sección 3.5.

Corolario 4.4.33. *Dada $A \in M_n(\mathbb{F})$ nilpotente con característica de Segre $\alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_m)$ y $b = (b_{i_1}, \dots, b_{i_t})$ una chartupla asociada a α . Entonces:*

1. $\text{card}(\text{hyp}(b_{i_j}, b_{i_{j+1}}))$, coincide con la suma de los coeficientes de grados entre $b_{i_j} + \alpha_{i_{j+1}} - \alpha_{i_j} - c$ y $b_{i_j} - 1 - c$ del polinomio:

$$(1 + x + \dots + x^{\alpha_{i_{j+1}} - 2 - \alpha_{i_j} - 1}) \dots (1 + x + \dots + x^{\alpha_{i_j} + 2 - \alpha_{i_j} + 3}), \quad (4.81)$$

cuando $c = c_{\min}, \dots, c_{\max}$, donde:

$$c_{\min} = \text{máx} \{b_{i_{j+1}}, b_{i_j} - \alpha_{i_j} + \alpha_{i_{j+1}} - 1\}, \quad (4.82)$$

$$c_{\max} = \text{mín} \{b_{i_j} - 1, b_{i_{j+1}} + \alpha_{i_{j+1}} - 1 - \alpha_{i_j} - 1\}. \quad (4.83)$$

2. $\text{card}(\text{hyp}(b_{i_t}, *))$, para $i_t < m$, coincide con la suma de los coeficientes de grados entre $b_{i_t} + \alpha_{i_t+1} - \alpha_{i_t} - c$ y $b_{i_t} - 1 - c$ del polinomio:

$$(1 + x + \dots + x^{\alpha_{m-2} - \alpha_{m-1}}) \dots (1 + x + \dots + x^{\alpha_{i_t} + 2 - \alpha_{i_t} + 3}), \quad (4.84)$$

cuando $c = c_{\min}, \dots, c_{\max}$, donde:

$$c_{\min} = \text{máx} \{b_{i_t} - \alpha_{i_t} + \alpha_{m-1}, 0\}, \quad (4.85)$$

$$c_{\max} = \text{mín} \{b_{i_t} - 1, \alpha_{m-1}\}. \quad (4.86)$$

3. $\text{card}(\text{hyp}(*, b_{i_1}))$, para $i_1 > 1$ viene dado por la suma de los coeficientes del polinomio:

$$(1 + x + \dots + x^{\alpha_{i_1-1} - \alpha_{i_1} - 1})(1 + x + \dots + x^{\alpha_{i_1-2} - \alpha_{i_1} - 1}) \dots (1 + x + \dots + x^{\alpha_1 - \alpha_2}), \quad (4.87)$$

es decir,

$$(\alpha_{i_1-1} - \alpha_{i_1})(1 + (\alpha_{i_1-2} - \alpha_{i_1-1})) \dots (1 + (\alpha_1 - \alpha_2)). \quad (4.88)$$

Bibliografía

- [1] V.I. Arnold. On matrices depending on parameters. *UspekhiMat. Nauk.*, 26, 1971.
- [2] P. Astuti and H. K. Wimmer. Hyperinvariant, characteristic and marked subspaces. *Operators and Matrices*, 3(2):261–270, 2009.
- [3] P. Astuti and H. K. Wimmer. Characteristic and hyperinvariant subspaces over the field $\text{GF}(2)$. *Linear Algebra Appl.*, 438(4):1551–1563, 2013.
- [4] G. Belitski. Normal forms in matrix spaces. *Integral Equations Operator Theory*, 38(3):251–283, 2000.
- [5] L. Brickman and P. A. Fillmore. The invariant subspace lattice of a linear transformation. *Can. J. Math.*, 19(35):810–822, 1967.
- [6] A. Compta, J. Ferrer, and F. Puerta. Miniversal deformations of marked matrices. *Linear Algebra and its Applications*, 361(0):181 – 201, 2003.
- [7] A. Compta, U. Helmke, M. Peña, and X. Puerta. Simultaneous versal deformations of endomorphisms and invariant subspaces. *Linear Algebra and its Applications*, 413(23):303 – 318, 2006. Special Issue on the 11th Conference of the International Linear Algebra Society, Coimbra, 2004 11th Conference of the International Linear Algebra Society, Coimbra, 2004.
- [8] R.G Douglas and C. Pearcy. On a topology for invariant subspaces. *Journal of Functional Analysis*, 2(3):323 – 341, 1968.

-
- [9] M.P. Drazin, J.W. Dungey, and K.W. Gruenberg. Some theorems on commutative matrices. *London Math. Soc.*, 26:221 – 228, 1951.
- [10] J. Ferrer, D. Mingueza, and M. E. Montoro. Determinant of a matrix that commutes with a jordan matrix. *Linear Algebra and its Applications*, 439(12):3945 – 3954, 2013.
- [11] J. Ferrer and F. Puerta. Versal deformations of invariant subspaces. *Linear Algebra and its Applications*, 332 - 334(0):569 – 582, 2001.
- [12] P.A. Fillmore, D. A. Herrero, and W.E. Longstaff. The hyperinvariant subspace lattice of a linear transformation. *Linear Algebra and its Applications*, 17(2):125 – 132, 1977.
- [13] F.G. Frobenius. Über lineare substitutionen und bilineare formen. *für Math.*, 84:1 – 63, 1878.
- [14] A. George and K. D. Ikramov. Common invariant subspaces of two matrices. *Linear Algebra and its Applications*, 287(13):171 – 179, 1999.
- [15] I. Gohberg, P. Lancaster, and L. Rodman. *Invariant Subspaces of Matrices with Applications*. Society for Industrial and Applied Mathematics, 2006.
- [16] P. Halmos. Eigenvectors and adjoints. *Linear Algebra and Its Applications*, 4:11–15, 1971.
- [17] C.R. Horn, R.A. ;Johnson. *Matrix Analysis*. Cambridge: Cambridge University Press, 1997.
- [18] J.E. Humphreys. *Linear Algebraic Groups*. Graduate Texts in Mathematics 21, Springer-Verlag, Berlin, 1981.
- [19] T.J. Laffey. Simultaneous triangularization of a pair of matrices. *J. of Algebra*, 44:550–557, 1977.
- [20] T.J. Laffey. Simultaneous triangularization of a pair of matrices whose commutator has rank two. *Linear Algebra and its Applications*, 29:195–203, 1980.
- [21] R. A. Lippert and G. Strang. The jordan forms of ab and ba . *Electronic Journal of Linear Algebra*, 18:281–288, 2009.
- [22] M. D. Magret and M. E. Montoro. On the existence of a common eigenvector for all matrices in the commutant of a single matrix. *Linear Algebra and its Applications*, 437(5):1285 – 1292, 2012.

-
- [23] N.H. McCoy. On quasi-commutative matrices. *Trans. American Math. Soc.*, 36:327 – 340, 1934.
- [24] D. Minguenza, M. E. Montoro, and J. R. Pacha. Description of characteristic non-hyperinvariant subspaces over the field. *Linear Algebra and its Applications*, 439(12):3734–3745, 2013.
- [25] D. Minguenza, M.E. Montoro, and A. Roca. *The number of characteristic non hyperinvariant subspaces*. ILAS 2014, Conference Book, 2014.
- [26] R. O’Meara, J. Clark, and C. I. Vinsonhaler. *Advanced Topics In Linear Algebra : Weaving Matrix Problems Through the Weyr Form*. Oxford: Oxford University Press, 2011.
- [27] A. Prasad. Counting subspaces of a finite vector space. *Resonance*, 15(11):977–987, 2010.
- [28] H. Radjavi. A trace condition equivalent to simultaneous triangularizability. *J.Math. Canada*, 38:378–386, 1986.
- [29] K. Ríbnikov. *Análisis combinatorio*. Editorial Mir, Moscú, 1985.
- [30] K. H. Rosen. *Discrete Mathematics and its Applications*. McGraw-Hill, 2012.
- [31] W. Sergeichuk. Canonical matrices for linear matrix problems. *Linear Algebra Appl.*, 317:53–102, 2000.
- [32] H. Shapiro. The weyr characteristic. *The American Mathematical Monthly*, 108(10):919–929, 1999.
- [33] M. A. Shayman. On the variety of invariant subspaces of a finite-dimensional linear operator. *Trans. Amer. Math. Soc.*, 274:721–747, 1982.
- [34] D. Shemesh. Common eigenvectors of two matrices. *Linear Algebra and its Applications*, 62(0):11 – 18, 1984.
- [35] K. Shoda. Über die charakteristischen untergruppen einer endlichen abelschen gruppe. *Math. Z.*, (31):611 – 624, 1930.
- [36] A. Tannebaum. *Invariance and System Theory: Algebraic and Geometric Aspects*. Lecture Notes in Mathematics 845, Springer-Verlag,Berlin, 1981.

- [37] M. Tsatsomeros. A criterion for the existence of common invariant subspaces of matrices. *Linear Algebra and its Applications*, 322(13):51 – 59, 2001.