UNIVERSIDAD AUTÓNOMA DE BARCELONA

DEPARTAMENTO DE DIDÁCTICA DE LA MATEMÁTICA Y DE LAS CIENCIAS EXPERIMENTALES

Tesis Doctoral

La práctica de la enseñanza de las matemáticas a través de las situaciones de contingencia.

Autor: Alicia Zamorano Vargas

Director: Jordi Deulofeu Piquet

Barcelona, Febrero 2015

UNIVERSIDAD AUTÓNOMA DE BARCELONA

DEPARTAMENTO DE DIDÁCTICA DE LA MATEMÁTICA Y DE LAS CIENCIAS EXPERIMENTALES

Tesis Doctoral

La práctica de la enseñanza de las matemáticas a través de las situaciones de contingencia.

Autor: Alicia Zamorano Vargas

Director: Jordi Deulofeu Piquet

Barcelona, Febrero 2015

Esta tesis doctoral se ha realizado gracias a una beca Conicyt, del programa de formación de capital humano avanzado, BECAS-CHILE, para doctorado en el extranjero.

La tesis se inició dentro del proyecto de investigación I+D "Factores de influencia en la discontinuidad del aprendizaje matemático entre primaria y secundaria" EDU 2009-07298, dirigido por Lourdes Figueiras, que sirvió para la definición del trabajo y la recolección de datos, y finalizó en el marco del proyecto de investigación I+D "Caracterización del conocimiento disciplinar en Matemáticas" EDU 2013-46083-R, del Ministerio de Economía y Competitividad de España, dirigido por Núria Gorgorió. En ambos proyectos participa como investigador Jordi Deulofeu, director de la tesis.

A mi madre

“La función de la investigación no es necesariamente la de trazar el mapa y conquistar el mundo, sino la de ilustrar su contemplación”

R. Stake

Agradecimientos

Como comenzar a agradecer sin repasar desde mis incipientes deseos de realizar este doctorado.

En primer lugar agradecer a mis padres, sin sus constantes estímulos a ser cada día mejor no habría desarrollado las ganas de seguir aprendiendo. A mi hermana que desde su posición de hermana menor apoyó – y sigue apoyando- mis decisiones.

A Gabriel, por ser primero mi amigo, y luego por ser mi compañero en el camino a un desarrollo profesional más profundo y, espero me siga acompañando en el resto de mi vida.

A Lourdes, por creer que podría llegar a ser una investigadora y comenzar conmigo en este camino. Agradecer sinceramente a Jordi, sin él, mi empuje inicial pudo no llegar a buen puerto, pero supo darme las palabras de aliento que necesité para continuar.

A mis amigas y amigos en Chile, que incluso a pesar de la distancia, han mantenido su confianza en que podría llegar a ser doctora, y que probablemente confiaron mucho más que yo en que lo lograría.

A las amigas y amigos que encontré en mi estancia en Barcelona y, que desde diferentes lugares del mundo han ayudado a que no solo aprendiera de didáctica, sino a apreciar las diferencias y las particularidades de cada uno.

Sin todas estas personas nada de esto hubiese sido posible, muchas gracias.

Índice

Introducción

El desarrollo de la investigación de la educación matemática ha pasado por diferentes fases. Tal como indica English (2008), hubo un período de un cierto estancamiento durante los años 90 que permitió redirigir los focos de la investigación.

En particular una de las líneas de investigación que ha tenido una mayor notoriedad en la última década es la preocupación por el crecimiento profesional de los docentes y la mejora de la práctica en el aula. Esto trajo como consecuencia la creación de revistas especializadas sobre el profesorado, el Journal of Mathematics Teacher Education (JMTE) y la revista Mathematics Teacher Education and Development, que nacen para evidenciar la alta investigación que se produce, como lo indican Adler, Ball, Krainer, Lin y Novotna (2005).

Estos últimos autores destacan la importancia de la enseñanza de la matemática debido a la alta demanda que existe de ella, por la masificación de la escuela en todo el mundo. Ante este escenario se hace claro la exigencia de aprender matemática de calidad, lo que influye directamente de la preparación de los profesores. Junto con esto, Sfard (2005) destaca la importancia que ha tenido la investigación sobre los profesores, algo que destaca como una nueva era que apunta a conocer sobre él y su enseñanza.

Si seguimos las investigaciones sobre el profesorado, estas se han realizado sobre las creencias, los conocimientos y la identidad, entre otros. En el caso de nuestra investigación, seguimos la línea de la indagación sobre el profesorado, en particular sobre su práctica y los conocimientos que se movilizan mientras enseña.

Cuando se inició la reforma en EE.UU, uno de los principales expositores que volteó la mirada sobre los conocimientos que el profesorado necesitaba para enseñar, fue Lee Shulman. En su presentación para la AERA en 1986, manifestó la necesidad de centrarse en lo que hacía el profesor y qué conocimientos necesitaba para ello, a lo que denominó Pedagogical Content Knowledge, es decir: "las formas en que se representan y formulan los contenidos de modo que sean comprensibles para otros" (Shulman, 1986, p.9) y por tanto, este término marcó un antes y un después de lo que se entendía el profesor debería conocer para realizar un trabajo profesional y que permitiera aprender a todos los estudiantes.

Pasaron algunos años antes que se pusiera acento en los conocimientos que debería poseer el profesor de matemáticas. Una de las primeras investigadores que se interesó en conocer cuál era el conocimiento que un profesor de matemáticas necesita tener o que utiliza para enseñar, fue Deborah Ball. Tal como describe Liping Ma en su libro "Conocimiento y enseñanza de las Matemáticas elementales" (Ma, 2010), Ball, primero en su tesis doctoral y luego junto a sus colegas en la Universidad de Michigan comenzó a indagar en los conocimientos que utilizaban los profesores cuando enseñaban y luego de varios trabajos llegó a construir un marco para la comprensión de este conocimiento, conocido como el MKT: Mathematical Knowledge for Teaching (Ball, Thames y Phelps, 2008).

Una utilización que se le está dando a este marco es la medición de los conocimientos que poseen los profesores de matemática para enseñar, ya que cada vez se hace más necesario establecer el vínculo entre el comportamiento de los profesores y el rendimiento de los alumnos (Mesa y Leckrone, 2014; Carreño, Rodríguez, Ochsenius y Muñoz, 2014).

Por otro lado, las ideas de Shulman también se han utilizado para la comprensión de las acciones que suceden dentro de la sala de clases. En este campo destaca el trabajo realizado por Rowland y su equipo de investigación de la Universidad de Cambridge, como parte de SKIMA (Subject knowledge in mathematics). Este grupo se interesó por conocer si un mayor manejo del Conocimiento de las Matemáticas marcaba una diferencia positiva en la práctica de los profesores; en definitiva, buscaban identificar y comprender de mejor manera como el conocimiento de las matemáticas influía en la enseñanza. Producto de esta investigación es el nacimiento de un nuevo marco para analizar la práctica del profesorado, el KQ: Knowledge Quartet (Rowland, Huckstep y Thwaites, 2005)

Este marco más que buscar los conocimientos que los profesores demuestran, intenta analizar qué hace el profesor mientras enseña, por lo que se fija en momentos de la clase y qué realiza el profesor en esos momentos, y a partir de aquí determinar los conocimientos que el profesor es capaz de movilizar en su acción.

El mismo Rowland explicita la relación y la diferenciación entre el MKT y el KQ: "En particular, la teoría que se desprende de ellos *(del MKT)* desentraña y clarifica las nociones anteriormente algo esquivas y teóricamente no desarrolladas de SMK y PCK. El SMK de Shulman se subdivide en: "conocimiento común del contenido" y "conocimiento especializado del contenido", mientras que su PCK se divide en: "el conocimiento de los contenidos y los estudiantes", y el "conocimiento del contenido y la enseñanza" (Ball, et al, 2008). En nuestra teoría, la distinción entre los diferentes tipos de conocimiento matemático es de menor importancia que la clasificación de las situaciones en las que el conocimiento matemático es visible en la enseñanza en el aula. En este sentido, las dos teorías pueden tener cada uno perspectivas útiles para ofrecer a la otra." (Rowland, 2008).

La investigación que mostraremos a continuación está centrada en analizar la práctica del profesorado de matemáticas, en particular apunta a describirla desde el punto de vista de uno de los componentes del Knowledge Quartet, la Contingencia, es decir aquellas situaciones no planificadas por el profesorado que se producen mientras éste enseña. Estudiar la contingencia, es entrar en las características propias de la enseñanza, según Ball y Forzani, 2009, "la práctica de enseñanza comprende la actividad diseñada intencionalmente para reducir el azar, es decir, de aumentar la probabilidad de que los alumnos alcancen las metas específicas propuestas" (p. 499)

Para poder realizar el análisis de la Contingencia hemos entrado a la sala de clases y esto nos ha permitido conocer cómo el profesorado enseña matemáticas y cuál es la incidencia del conocimiento para gestionar el profesor de enseñanza y de aprendizaje con sus alumnos.

Esta memoria de tesis la hemos estructurado en cinco capítulos. El primer capítulo tratará del Planteamiento del Problema y los Objetivos de la Investigación, que persiguen de manera particular identificar las situaciones de contingencia que se producen en la sala de clases mientras el profesorado enseña matemáticas y relacionar la contingencia con el tipo de conocimiento que se moviliza, y de manera general determinar un modelo que permita analizar situaciones de contingencia y el conocimiento movilizado para su gestión.

En el segundo capítulo, el Marco Teórico, describimos los referentes teóricos que nos han permitido construir nuestro problema de investigación y los trabajos que nos han servido para justificar la investigación que realizamos. Ponemos especial énfasis en el quehacer del profesorado y en los marcos que conceptualizan el Mathematics Teacher Knowledge, y que nos permite describir e interpretar la gestión que realiza el profesorado mientras realiza su práctica de enseñanza. Nuestros principales referentes son los trabajos de Tim Rowland y de Deborah Ball.

El tercer capítulo muestra la Metodología que seleccionamos para desarrollar los objetivos de la investigación. También damos cuenta de los casos de estudio que analizaremos: 12 episodios de clases que fueron videograbadas en centros educativos de la ciudad de Barcelona y, que se caracterizan por tratarse de situaciones de Contingencia interesantes de analizar por la gestión que realizan los docentes de las mismas.

El cuarto capítulo, el más extenso de esta tesis, muestra el análisis de cada uno de los 12 episodios que conforman nuestros casos de estudio. Este análisis tuvo en cuenta la complejidad de las acciones que ocurren en la sala de clases y tuvo como primer indicador explicitar cuál fue el desencadenante de cada episodio y la gestión posterior que realiza el profesorado, de acuerdo con los conocimientos matemáticos y los conocimientos para la enseñanza movilizados en dicha gestión.

Por último, en el quinto capítulo, desarrollamos los resultados y las conclusiones de nuestro trabajo, mostrando cómo se desarrollaron los objetivos de nuestra investigación.

Como resultado de nuestra investigación, creemos que el análisis de las situaciones de contingencia desde el punto de vista de la gestión que realiza el profesorado de matemáticas, puede ser una herramienta potente para la consolidación profesional de los docentes. Además, este tipo de análisis de la práctica puede ser utilizado por los futuros profesores y ser un material muy importante para su formación profesional.

Capítulo 1. Planteamiento del Problema

1.1 Antecedentes

Para contextualizar el por qué de esta investigación, debo remontarme a mi experiencia como profesora en el aula. Incluso antes de egresar de la carrera de Pedagogía en Matemáticas ya me encontraba realizando clases. Sin duda fue la experiencia más desafiante que me había tocado realizar hasta ese momento. Mis creencias de alumnos ordenados y en silencio para escuchar, atender y aprender lo que yo les llevaba planificado no estaban en lo correcto. La dificultad del manejo del grupo, solo eran superadas por mi incapacidad de transmitir los conocimientos que se suponía poseía. Ante esta situación tuve que reflexionar si podía seguir haciendo clases en el aula o si debía mejorar mi formación para continuar, porque sentía –con fundamentada razón- que mis conocimientos profesionales no eran suficientes para desarrollar una enseñanza para los alumnos que cada día tenía en la sala de clases. Y opté por lo segundo, dejé la sala de clases para comenzar a perfeccionar o adquirir las competencias que necesitaba para ejercer de profesora.

Luego de un largo andar, comencé mis estudios de Doctorado, buscando ayuda para mi trabajo profesional. Mi interés primero no era un problema que veía en los demás colegas o en los estudiantes, sino que sentía que mi propia formación no era suficiente para que mi enseñanza llegara a los alumnos.

Grata fue mi sorpresa cuando en el primer curso del Máster en Investigación en Didáctica de las Matemáticas, grado previo al Doctorado, llegó a mis manos el artículo de Ball, Thames y Phelps, Content knowledge for teaching: What makes it special? (2008). Y por fin me sentí identificada en las debilidades que los profesores manifestaban, además de explicitar una idea que mucho tiempo rondaba en mi cabeza: debe existir algo que nos haga unos profesionales diferentes al ingeniero o al matemático, el Specialized Content Knowledge.

Siguiendo mi búsqueda de herramientas para la enseñanza de las Matemáticas, llegué a un aspecto que no había considerado explícitamente de importancia anteriormente, aunque claramente era mi debilidad, la práctica de mi profesión. Era en mi quehacer cotidiano, en la imposibilidad de planificar y realizar esa planificación donde radicaba mi mayor dificultad, y como ahora lo veo en perspectiva, también evidenciaba deficiencias en el conocimiento para enseñar. Primero leí acerca de las creencias tanto de los alumnos como de los profesores de matemáticas acerca de lo que debe ser la enseñanza (Forgasz y Leder, 2008; Pajares, 1992; Climent, 2002, Giné y Deulofeu, 2014) y sobre las ideas de la importancia de la consciencia mientras de enseña (Mason y Spence, 1999), para llegar a la importancia del análisis de la práctica del profesorado (Sullivan, 2011; Boaler, 2003; Schoenfeld, 2011; Ma, 2010; Ball, 2000; Lampert, 2010; Rowland, 2008).

El problema que me sucedía como profesora de diseñar una planificación y no siempre poder implementarla, es descrito en la literatura como un problema global de la práctica de la enseñanza. En particular Rowland, Huckstep y Thwaites (2005), describen las características de una clase de matemáticas, donde se ponen en juego conocimientos específicos de la enseñanza y que ellos organizan en cuatro dimensiones de la enseñanza, que denominaron Knowledge Quartet. La cuarta de las dimensiones que describen en este modelo es lo que denominan Contingencia, es decir, aquellas situaciones no planificadas y que ocurren mientras se enseña. La explicitación de una dimensión de la clase que atiende a estas situaciones no planificadas me permite deducir que la práctica docente necesita de una investigación profunda para conocer y dar herramientas al profesorado para cuando tenga que enseñar.

Cómo declarábamos al principio y lo que la evidencia científica nos entrega, el conocimiento del profesorado para enseñar se manifiesta cuando realiza su práctica. Schön, (1992), nos indica que el profesor se enfrenta a problemas de su profesión cuando “es capaz de detectar algún tipo de confusión y, en simultáneo, algún tipo de comprensión intuitiva por el simple hecho de escuchar la pregunta que le hace un alumno y para la que no dispone de una respuesta a mano”(pág. 19). Schön entiende que es en estas situaciones indeterminadas cuando se pone en juego el conocimiento profesional, ya que interpreta que la solución no se reduce a la simple aplicación de teorías y técnicas.

Otra característica de la enseñanza es que la clase es un espacio dinámico; el profesor planifica su clase y luego la pone en práctica cuando enseña, pero no puede tenerlo todo planificado; lo que se puede reducir durante la enseñanza es el azar, o sea aumentar la probabilidad de que los alumnos alcancen las metas específicas de aprendizaje (Ball & Forzani, 2009), pero los profesores sabemos que esto no siempre es así.

Otros autores que también analizan las acciones del profesor mientras enseña fijan su atención en los conocimientos que se movilizan o las creencias que se manifiestan mientras realizan la enseñanza. En cambio nuestro interés está en describir la práctica del profesorado en las situaciones de contingencia en función de los conocimientos que los profesores movilizan, ya que como dice Ball & Cohen (1999) la enseñanza se da en los detalles, en particular en la interacción de los alumnos con los profesores sobre ideas particulares en circunstancias particulares (pág. 10).

A partir de todos estos antecedentes, tanto de mi experiencia personal como de los reportes de investigación, surgió la pregunta más amplia que guía esta tesis doctoral, ¿Qué características tienen las situaciones de contingencia y cómo estas se relacionan con el conocimiento matemático que posee el profesorado?

De esta pregunta tan amplia surgieron preguntas específicas, ¿Cómo identificamos las situaciones de contingencia? ¿Qué conocimientos disciplinares y de la enseñanza de la matemática son movilizados? ¿Qué consecuencias tienen las decisiones del profesorado en el desarrollo de la clase durante la contingencia?

Estas preguntas específicas apuntan a acciones particulares de la investigación: la descripción de las situaciones de contingencia, y la interpretación de la gestión del profesorado en relación con los conocimientos que se movilizan en esas situaciones.

Como se puede desprender de nuestra pregunta de investigación nos centraremos en un problema propio de la práctica del profesor de matemáticas y estudiaremos aquellas situaciones de enseñanza que el profesor no ha anticipado previamente y en las que necesita movilizar de manera especial sus conocimientos para la enseñanza. Estas situaciones pueden ocurrir durante la resolución de problemas, cuando se plantean tareas a los alumnos o cuando un alumno realiza una pregunta, a lo que Rowland et al. (2005) denomina Contingencia.

Los elementos constitutivos de la Contingencia son la preparación para responder a las ideas de los alumnos y por tanto una preparación consecuente del profesor que le permita responder a estas ideas. Si bien es cierto que las acciones que el profesor realiza en la clase se pueden planificar, no es posible hacerlo, de forma exhaustiva, con las preguntas y las respuestas de los estudiantes.

En nuestro caso nos fijaremos en las prácticas que realizan profesores experimentados y analizaremos los conocimientos que ponen en juego en estas situaciones particulares. Para realizar este análisis utilizaremos el marco propuesto por Ball a través del MKT y siguiendo las ideas de Turner (2012), identificaremos los diferentes dominios del MKT que se ponen en juego mientras ocurren situaciones de contingencia.

1.2 Objetivos de la Investigación

A partir de la descripción del problema de investigación, fuimos acotando lo que queríamos observar y analizar de la práctica del profesorado de matemáticas. En general, buscamos conocer y describir la práctica y la gestión del profesorado en relación a los conocimientos para enseñar puestos en juego durante la contingencia, de donde se desprenden los siguientes objetivos:

Objetivo General Analizar situaciones de contingencia y la incidencia del conocimiento matemático del profesor para su gestión.
Objetivos específicos 1. Identificar las situaciones de contingencia que se producen en la sala de clases mientras el profesorado enseña matemáticas a partir de indicadores sistemáticos para sus desencadenantes. 2. Relacionar las situaciones de contingencia con el conocimiento matemático para enseñar, tanto en lo que se refiere al conocimiento disciplinar como al conocimiento para la enseñanza. 3. Interpretar la gestión que el profesorado lleva a cabo de estas situaciones de contingencia a partir de su conocimiento.

Capítulo 2. Marco Teórico

Este apartado informará sobre las investigaciones previas relacionadas con la práctica del profesorado y los conocimientos para enseñar matemáticas que ponen en juego los profesores con el propósito de analizar las diferentes ideas que han permitido estudiar el conocimiento del profesor. Por tanto relacionaremos la práctica de enseñanza con los conocimientos en relación con nuestro problema de investigación, es decir las situaciones de contingencia, una de las dimensiones del Knowledge Quartet (KQ) y el marco del conocimiento para enseñar del Mathematical Knowledge for Teaching (MKT).

En las últimas décadas se han creado importantes grupos de investigación que muestran y divulgan los avances de la investigación acerca de la enseñanza de la matemática en distintas partes del mundo (PME, NTCM, ICMI, CERME, SEIEM, CIBEM, CIAEM, entre otros), y se han publicado Handbooks con reportes y síntesis de las diferentes áreas del conocimiento para la enseñanza.

English (2008) nos hace un recuento de los avances internacionales sobre la investigación en educación matemática. Destaca que desde los años 90 se ha avanzado significativamente en diferentes áreas tanto en lo teórico como en lo práctico y que en particular se ha logrado concretar una estrecha relación entre la investigación y la práctica. Además, indica la importancia que ha tomado el desarrollo teórico de la disciplina, y particularmente cómo se ha puesto el foco de atención en el profesor y en su práctica como consecuencia de hacer las matemáticas accesibles para todos.

Como resultado de este foco de atención, 2/3 de los investigadores consultados en el ICME 10 indicaron que su línea de investigación se relacionaba con el profesorado (Sfard, 2005), se crearon revistas que solo se dedican a este tópico: Journal of Mathematics Teacher Education (JMTE, Springer) y Mathematics Teacher Education and Development (MTED-Grupo Australiano); y la mayoría de revistas especializadas en educación matemática siguen publicando artículos de esta línea.

Al leer la editorial del primer número del JMTE, escrita por su editor, Thomas Cooney, nos encontramos con que su creación, “nos proporciona un foro singularmente dedicado a nuestro trabajo en la formación docente. De hecho, ahora tenemos más razones que nunca para integrar nuestro estudio de la formación docente con nuestra práctica de la formación docente.” Y agrega: “El inicio de una revista dedicada a la comprensión de los procesos de la educación de los maestros es particularmente oportuna y representa un importante paso adelante en la maduración de nuestra profesión.”. Además anexa la siguiente idea: “Una apreciación de la diversidad de ideas, de enfoques y de contexto sólo puede contribuir a nuestra comprensión de la formación del profesorado y para nuestro propio desarrollo profesional.” (Cooney, 1998)

Por otro lado, la revista MTED, tiene como historia fundacional la de fusionar dos grupos muy importantes, el grupo de investigación (MERGA) y la asociación profesores de matemáticas (MELA), cuya finalidad es, “mantener una vía para la difusión de prácticas innovadoras en la enseñanza de las matemáticas y la discusión de las cuestiones que afectan a las funciones de los profesores” (Klein, Putt y Stillman, 1999).

Estas declaraciones de principios de las revistas nos indica la importancia que tiene tanto para los profesores como para los formadores el estudio de las acciones del profesorado y que tiene como finalidad mejorar los aprendizajes de las matemáticas en los diferentes niveles educativos.

Ahora para realizar un acercamiento a nuestro trabajo de investigación nos referiremos tanto al conocimiento del profesorado como a la práctica y su interrelación.

2.1 Conocimiento para enseñar

Nuestro primer referente para esta investigación fueron las ideas propuestas por Shulman sobre el conocimiento del profesorado. Durante su trabajo más relevante, el principal interés que manifiesta se encuentra en las características que debe poseer una buena docencia, poniendo énfasis tanto al manejo de los alumnos como al manejo de las ideas.

Su primer gran aporte es a lo que él denomina el 'paradigma perdido' (1986). En su presentación para la AERA[1], manifestó la necesidad de centrarse en lo que hacía el profesor y qué conocimientos necesitaba para ello. A este conocimiento es lo que denominó Pedagogical Content Knowledge (PCK), es decir, las formas en que se representan y formulan los contenidos de modo que sean comprensibles para otros, y este término marcó un antes y un después de lo que se entendía que el profesor debería conocer para realizar un trabajo profesional que permitiera aprender a todos los estudiantes. También critica la falta de atención a los contenidos que se deben enseñar, y a lo que sucede en la formación del profesorado, en su práctica de formación, en la evaluación y en la investigación sobre la formación de los profesores. La mayoría de la literatura, hasta ese momento, se centraba en cómo los profesores manejaban sus aulas, cómo organizaban sus actividades, asignaban tiempos y turnos, ordenaban la estructura, formulaban los niveles de sus preguntas y sus planes de clases, y eran jueces de la comprensión general de los estudiantes.

Pero Shulman cambia las preguntas de investigación, se cuestiona acerca de las fuentes del conocimiento de los profesores, sobre qué sabe un profesor y cuándo llega a saberlo. Con este tipo de cuestionamientos y en una investigación con profesores en formación durante tres años, elabora categorías del conocimiento que debe poseer el profesorado para que los alumnos puedan a su vez comprender:

- Conocimiento del contenido
- Conocimiento didáctico general
- Conocimiento del currículo
- Conocimiento didáctico del contenido
- El conocimiento de los alumnos y sus características
- El conocimiento de los contextos educativos

[1] The American Educational Research Association.

- Conocimiento de los objetivos, las finalidades y los valores educativos y sus fundamentos filosóficos e históricos.

En particular, a nuestro trabajo le interesa la última de las categorías enunciadas por Shulman, el conocimiento didáctico del contenido.

El conocimiento didáctico del contenido (PCK), identifica los cuerpos de conocimiento distintivos para la enseñanza. Es la mezcla entre contenido y didáctica la que permite la comprensión de cómo se organizan, se representan y se adaptan a los intereses y capacidades de los alumnos, además de considerarlo un conocimiento del contenido que es único para la enseñanza, un conocimiento profesional específico de la materia que se enseña, el Pedagogical Content Knowledge (PCK), que lo define como:

> "Las formas más útiles de la representación de esas ideas, las analogías más poderosas, las ilustraciones, los ejemplos, las explicaciones y las demostraciones, en una palabra, las formas más útiles de representación y la formulación de la materia que lo hacen comprensible a los demás…el conocimiento didáctico del contenido también incluye una comprensión de lo que hace que el aprendizaje de temas específicos sea fácil o difícil: las concepciones e ideas preconcebidas que los estudiantes de diferentes edades y procedencias traen con ellos para el aprendizaje de los temas que más se enseñan y lecciones" (pág. 9).

Y además,

> "es la categoría que, con mayor probabilidad, permite distinguir entre la comprensión del especialista en un área del saber y la comprensión del pedagogo" (pág. 11).

El concepto del PCK ha sido ampliamente estudiado. Uno de los trabajos que hace una completa revisión es Depeape, Verschaffel y Kelchtermas (2013), quienes hacen un repaso de los diferentes campos de conocimiento donde se ha utilizado para la formación de profesores: Grossman en Lenguaje, Wilson y Wineburg en Ciencias Sociales; Smith y Anderson en Ciencias y Ball en Matemáticas.

En nuestro caso seguiremos profundizando en las ideas de Ball y su equipo de la Universidad de Michigan.

2.1.1 Conocimientos para la enseñanza de las matemáticas.

Luego de este trabajo de Shulman, pasaron varios años en que el PCK fue poco desarrollado. Ball, Thames y Phelps (2008) hacen un recuento de lo que ellos denominan un 'subdesarrollo del concepto' y en este reporte de investigación pretenden informar sobre los progresos en su desarrollo. Destacan que a pesar de que el PCK es un concepto ampliamente estudiado y en diferentes ámbitos del conocimiento, aun no es definido de manera que todos entendamos lo mismo cuando nos referimos a dicho concepto. Es por esta razón que Ball y su equipo deciden profundizar en su estudio, siguiendo la idea de que existe un tipo especial de conocimiento que es exigible a los profesores y que los investigadores pueden aportar a concreciones para su utilización en la enseñanza de las matemáticas.

Para conocer el progreso que el trabajo de Shulman tiene en matemáticas seguimos los referentes expuestos por Petrou & Goulding (2011). Estos autores dedican su artículo a realizar una revisión crítica de la utilización del PCK para la creación de diferentes modelos que apuntan a la enseñanza de las matemáticas. Comienzan con la revisión del trabajo mismo de Shulman y mencionan además que el PCK ha pasado por importantes refinamientos hasta convertirse en un elemento fundamental cuando se habla desde la enseñanza de las matemáticas.

Una de las más destacadas reformulaciones es la propuesta por Fennema & Franke, (1992), quienes crean un modelo basado en las ideas de Shulman, pero que incluye la noción de que los conocimientos necesarios para la enseñanza son interactivos y dinámicos. Construyen un modelo del conocimiento de los profesores que se puede utilizar para describir lo que los profesores necesitan para enseñar matemáticas: conocimiento del contenido, conocimiento de la pedagogía, el conocimiento del pensamiento de los alumnos y las creencias del profesorado. (Fig. 2.1).

Consideran que estos cuatro elementos deben definirse claramente para que aporten a la comprensión del conocimiento que poseen los profesores. Plantean que las investigaciones deben realizarse desde la comprensión de la interacción entre los diferentes componentes del conocimiento del profesor y sus creencias, los roles que juegan en el aula y como el conocimiento y las creencias de los profesores difieren de profesor a profesor.

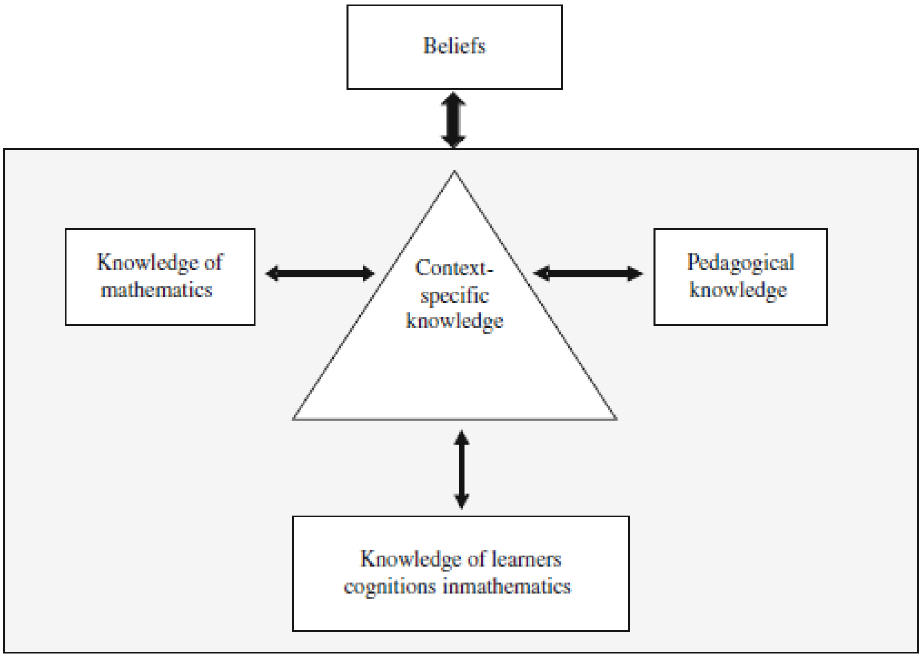


Fig.2.1. Conocimiento del profesor: desarrollo en contexto. Fennema y Franke, 1992, p. 162)

Por otro lado Petrou & Goulding (2011) revisan el modelo creado por Ball y su equipo en la Universidad de Michigan: la investigación que se basa en la práctica de los profesores para la construcción de un marco del conocimiento matemático para enseñar, lo que se denomina el MKT siglas en inglés del Mathematical Knowledge for Teaching. Indican que un elemento valioso aportado por esta investigación, es la identificación de la relación entre el conocimiento de los profesores y los logros de los estudiantes en matemáticas.

Finalizan el artículo describiendo el modelo creado por Rowland, el Knowledge Quartet. Consideran que el KQ hace aportaciones a la identificación de un marco para el pensamiento del profesorado y una forma de acercar los diferentes componentes del conocimiento de los profesores que entran en juego en el aula.

Como conclusión mencionan la importancia de seguir investigando en estos modelos para la construcción de un conocimiento para enseñar matemáticas que apoye al docente, además de aportar ideas para la elaboración de programas de desarrollo profesional inicial y continuo.

Estas últimas ideas son las que apoyan el trabajo de nuestra tesis, donde esperamos que el trabajo con el KQ y el MKT nos proporcione herramientas profesionales a los formadores para la formación y perfeccionamiento del profesorado de matemáticas.

2.2 Knowledge Quartet

Siguiendo las ideas de Shulman (1986) sobre el Pedagogical Content Knowledge y el Subject Matter Knowledge (SMK), Rowland y su equipo en la Universidad de Cambridge, comenzaron a investigar acerca de cómo el conocimiento disciplinario de los profesores de matemáticas se hace visible en las clases de matemáticas. Su investigación buscaba detectar si aquellos profesores que poseían un alto conocimiento de la materia (SMK) lograban hacer una enseñanza de las matemáticas elementales diferentes y si esto era observable en su práctica.

Para esto comenzaron trabajando con los futuros profesores de matemáticas de enseñanza primaria, ya que querían identificar y comprender mejor las formas en las que los profesores de primaria de matemáticas hacían evidente el conocimiento o la falta de él (Rowland, 2008).

Este estudio se realizó en un año de la formación de los futuros profesores de matemáticas, y participaron en él un total de 149 estudiantes. Para esto, primero aplicaron un cuestionario a los futuros profesores y luego observaron sus clases. Asignaron puntajes a los conocimientos observados y los separaron en tres niveles: alto, medio y bajo. Dados estos tres niveles decidieron observar un mismo número de participantes en cada uno de ellos. Finalmente hicieron un seguimiento detallado de 12 futuros profesores. Este seguimiento consistió en la observación y videograbación de dos clases separadas en el tiempo. Para esto se les pedía la planificación previa de la clase que sería videograbada, luego se asistía a la clase y si era necesario se tomaban notas de campo. Además, luego de terminada la clase, el investigador realizaba una Sinopsis descriptiva de la clase.

De toda esta información recolectada, 24 clases, los investigadores las observaron al menos 3 veces y con la ayuda de la teoría fundamentada, y emergieron códigos comunes que fueron apareciendo en episodios concretos de cada una de las clases. Finalmente se establecieron 17 códigos que correspondían tanto al PCK como al SMK. Posteriormente, siguiendo con el trabajo de los códigos generados, se construyeron cuatro categorías como unidades o dimensiones a lo que denominaron el Knowledge Quartet (KQ), que en adelante llamaremos Cuarteto de Conocimiento.

Las cuatro dimensiones del KQ se llamaron: Foundation (Fundamentación); Transformation (Transformación); Connection (Conexión); y Contingency (Contingencia).

Rowland y Turner (2007), resumieron de la siguiente manera el Cuarteto de Conocimiento:

"Cada unidad se compone de un pequeño número de subcategorías que juzgamos, después de largas discusiones, que eran de la misma o similar naturaleza. Específicamente los códigos que contribuyen a cada una de las cuatro unidades es el siguiente:

Fundamentación: adherencia a las ideas de los libros de texto; conciencia del propósito; concentración en los procedimientos; identificación de errores; conocimiento explícito del tema; base teórica; uso de terminología.

Transformación: elección de ejemplos; elección de representaciones; demostración.

Conexión: anticipación de complejidad; decisiones sobre la secuenciación; realización de conexiones; reconocimiento de la pertinencia conceptual.

Contingencia: desviación de la agenda; respuesta a las ideas de los alumnos; uso de las oportunidades." (p. 110)

Conceptualmente, las cuatro dimensiones del Cuarteto de Conocimiento, se describen de la siguiente manera. La primera dimensión, la Fundamentación consiste en los conocimientos, creencias y comprensión adquirida en la formación de los futuros profesores, para su rol en la sala de clases. El componente clave es el conocimiento y comprensión de las matemáticas per se y el conocimiento de literatura sobre la enseñanza y el aprendizaje de las matemáticas. Además se incluyen las creencias sobre la naturaleza del conocimiento matemático, los propósitos de la educación matemática y las condiciones bajo las cuales los alumnos aprenden mejor matemáticas.

La segunda dimensión, la Transformación, es el conocimiento en la acción, es decir demostrar como la planificación de la enseñanza y la enseñanza misma se realizan. Utiliza las ideas de Shulman sobre la presentación de ideas, de analogías, ilustraciones, ejemplos, explicaciones, demostraciones. En particular, representa la capacidad de modificar las matemáticas para que el alumno adquiera el lenguaje y los procedimientos matemáticos.

La tercera dimensión, la Conexión, conjuga las opciones y decisiones en algunas situaciones donde el conocimiento matemático aparece más o menos separado del concepto principal estudiado. Es lo que Ma (2010) denomina el conocimiento amplio y profundo de la materia. Además incluye la coherencia de la instrucción en la secuenciación y además la conciencia de las demandas cognitivas relativas de los diferentes tópicos y sus tareas.

La cuarta y última dimensión es la Contingencia, que se presenta en situaciones de la sala de calases que son casi imposibles de planificar. También se entiende como la capacidad de asistir a los alumnos de manera improvisada a sus preguntas, demandas o reacciones. Es únicamente visible en el aula, ya que se desarrolla principalmente por la interacción entre alumnos y profesor. En definitiva trata de la posibilidad de desviarse de lo planeado y responder a las demandas de los alumnos mientras se enseña matemáticas.

2.3 Mathematical Knowledge for Teaching

Luego de más de dos décadas que el trabajo de Shulman fue desarrollado, en todo ese tiempo no hubo mayor investigación para especificar y analizar la naturaleza del conocimiento didáctico del contenido. En el caso de matemáticas, Ball, desde finales de la década del 80 primero con el trabajo de su tesis doctoral y luego con los proyectos de investigación, comenzó a revelar importantes debilidades en los conocimientos necesarios para enseñar matemáticas en los docentes y futuros profesores. En su tesis mostró la aplicación de instrumentos desarrollados para sondear el conocimiento matemático que tienen los profesores en el contexto de las cosas comunes que utilizan al enseñar y encontró debilidades importantes. Como consecuencias de este trabajo, otra investigadora de la Universidad de Michigan, Liping Ma, siguió indagando en los conocimientos de los profesores de matemáticas.

Ma (2010), se basa en trabajos de Ball donde se evidencia que existe un conocimiento especial para enseñar matemáticas, que va más allá de conocer la materia y de conocer los elementos generales de la enseñanza, algo que hace a la enseñanza de las matemáticas especial y diferente de cualquier otro tipo de enseñanza. Si bien comienza a vislumbrarse y a concretarse la existencia de este conocimiento especial, aun no existían definiciones específicas. En su tesis doctoral y posteriormente en el libro que se basa en su investigación, al comparar las enseñanzas de las matemáticas en China y Estados Unidos, pone en evidencia que los profesores necesitan un tipo especial de conocimiento para enseñar matemáticas que no se adquiere al saber más disciplina matemática. Ella compara la formación de los profesores estadounidenses donde la mayoría tiene entre 16 y 18 años de educación formal, y en cambio los profesores chinos solo han tenido entre 11 y 12 años y, a pesar de eso, los alumnos chinos superan a los norteamericanos en las mediciones internacionales. Ma considera que los profesores chinos comienzan sus carreras pedagógicas con una mejor comprensión de las matemáticas elementales de la que tiene la mayoría de los profesores de educación primaria en norteamérica y evidencia una diferencia en la comprensión profunda de las matemáticas que enseñan, lo que en palabras de Shulman es el conocimiento didáctico del contenido.

Ball siguió profundizando en el conocimiento que deberían poseer los profesores para enseñar, por tanto siguió centrándose en las características de ese conocimiento pedagógico. Por eso en Ball et al (2008) muestran un estudio que se centra en la tarea de enseñanza y se preguntan, qué necesitan hacer los profesores en la enseñanza, y que tipo de demandas de razonamiento, comprensión, entendimiento y habilidad deben poner en juego en esos momentos.

Para responder a esta pregunta se centraron en la instrucción real que realizan los profesores, es decir su práctica, y revisaron las actividades exigidas para el logro de los objetivos de la clase. A esta aproximación de investigación se le denomina practice – based (teoría basada en la práctica). Para esto desarrollaron extensos estudios cualitativos de la práctica docente, además de diseñar mediciones de los conocimientos matemáticos.

Obtuvieron los datos del National Science Fundation, concretamente de una base de datos, que corresponde a la documentación de todo un año de la enseñanza de las matemáticas de una escuela pública. Los datos corresponden a videograbaciones y grabaciones de audio de lecciones en el aula, sus respectivas transcripciones, las copias de los trabajos de los alumnos, así como la planificación del profesor, sus notas y reflexiones. Por tanto su estudio correspondió tanto a episodios específicos de la enseñanza como a un estudio de la instrucción a través del tiempo.

De este extenso y exhaustivo análisis desarrollaron una teoría basada en la práctica de los conocimientos que se utilizan y que forman parte de la enseñanza de las matemáticas, el MKT, conocimiento matemático para la enseñanza.

Este conocimiento fue organizado y descrito en torno a dos grandes dominios, el Conocimiento de la Materia (el SMK de Shulman) y el Conocimiento didáctico del contenido (el PCK de Shulman).

A su vez estos dos dominios están compuestos por otros subdominios, que están expresados en la figura 2.2:

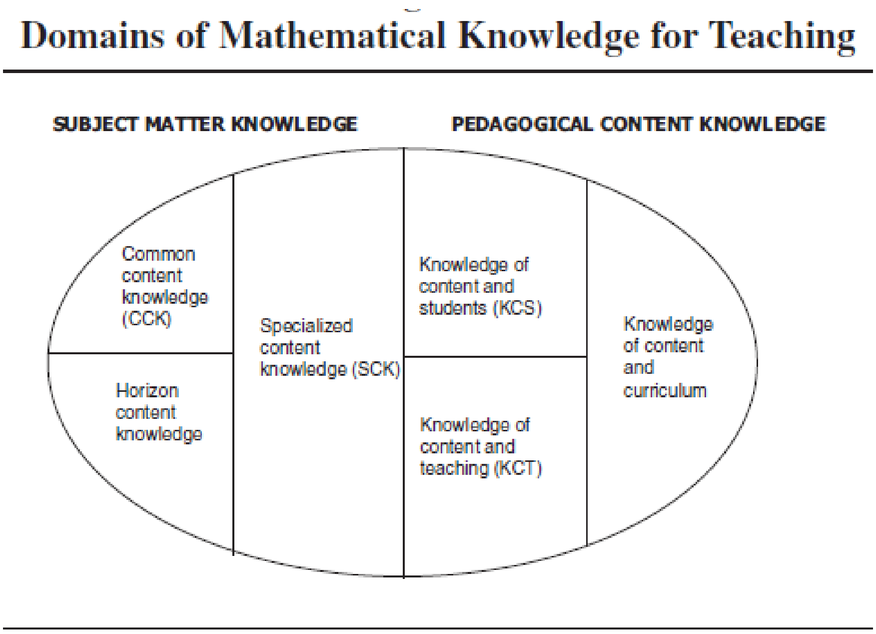


Fig 2.2: Dominios del conocimiento matemático para enseñar. Ball, Thames y Phelps, 2008, p. 403.

Esta figura muestra la correspondencia entre el dominio de conocimiento de los contenidos de la enseñanza enunciado por Ball y las dos categorías iniciales de Shulman (1986): conocimiento de la materia y el conocimiento didáctico del contenido.

El primer subdominio del Conocimiento de la Materia, es el conocimiento común del contenido (common conten knowledge, CCK), el cual se define como el conocimiento y la habilidad matemática utilizada en entornos diferentes a la enseñanza, pero no exclusivo de ella. Los profesores deben conocer el contenido que enseñan, además de reconocer cuando sus alumnos entregan respuestas incorrectas o el libro entrega una definición inexacta. En definitiva, el profesor debe saber realizar de manera exhaustiva la tarea que propone a sus alumnos. Pero parte de esto requiere de un conocimiento y una habilidad matemática que también es utilizada en otros entornos diferentes a la enseñanza, aunque esto no quiere decir que todas las personas lo posean.

El segundo subdominio del conocimiento de la materia, es el conocimiento especializado del contenido (specialized content knowledge, SCK). Está constituido por el conocimiento matemático y la habilidad para la enseñanza de las matemáticas. Este conocimiento es propio de la enseñanza, por lo tanto normalmente no es necesario para fines distintos de la misma. Es este conocimiento el que nos permite caracterizar al profesor como un profesional distinto de otro que también pude manejar los conceptos matemáticos. Además este conocimiento al ser una habilidad, indica las exigencias de la labor de enseñanza de las matemáticas y pone de manifiesto la necesidad de crear un cuerpo de conocimiento matemático especializado para la enseñanza. (p. 402)

El tercer subdominio y último subdominio del conocimiento de la materia es el conocimiento del horizonte matemático del contenido (horizon content knowledge, HCK). Está relacionado con la conciencia de cómo los contenidos matemáticos están relacionados en el tiempo en el plan de estudios. Esto también incluye una visión de las conexiones de ideas matemáticas anteriores y posteriores a lo que se está tratando en un momento concreto. Es quizás la menos elaborada de las conceptualizaciones del modelo, y se ha seguido desarrollado otros trabajos. (Fernández y Figueiras, 2014; Vale, McAndre y Krishnan, 2011; Zaskis y Mamolo, 2011, Figueiras et al., 2011)

Con respecto al segundo dominio del MKT, el conocimiento pedagógico del contenido (PCK), también se subdivide en tres categorías donde cada una pone atención a elementos propios de la práctica docente: los estudiantes, la metodología y el currículum. El conocimiento del contenido y los estudiantes (knowledge of content and student, KCS) es una combinación de la comprensión matemática y la familiaridad con el pensamiento matemático de los estudiantes. Este subdominio rescata aquellas acciones que el profesor debe conocer y que están relacionadas con las dificultades de sus alumnos. Además, tiene relación con escuchar e interpretar el pensamiento emergente e incompleto de los alumnos en las tareas que están resolviendo. Para esto es esencial que el profesor esté familiarizado con las concepciones de los alumnos y los errores comunes frente a un determinado contenido matemático.

El segundo subdominio del conocimiento pedagógico del contenido, es el conocimiento de los contenidos y la enseñanza (knowledge of content and teaching, KCT) y considera la comprensión matemática específica así como una comprensión de las cuestiones pedagógicas que afectan al aprendizaje del alumno. Este conocimiento está relacionado con el diseño y secuenciación de las tareas y de los ejemplos en función de la instrucción que quieren entregar.

El tercer subdominio del conocimiento pedagógico del contenido es el conocimiento del contenido y del currículum (knowledge of content and curriculum, KCC) que es definido como el conocimiento curricular necesario para la enseñanza.

Las ideas expuestas por Ball sobre el conocimiento para la enseñanza y la caracterización de la contingencia enunciada por Rowland en el cuarteto del conocimiento son nuestros referentes teóricos fundamentales y aquellos que hemos utilizado para construir la investigación.

Hasta ahora hemos descrito que nuestra idea es centrarse en la práctica, pero no en todas las acciones que suceden en la sala de clases, sino en situaciones específicas que ocurren mientras se enseña, situaciones que emergen por las preguntas de los alumnos o las respuestas que no habían sido previamente planificadas por el profesorado, es decir durante las situaciones de contingencia.

En el siguiente apartado vamos a mostrar la relación que la literatura evidencia entre estos dos modelos.

2.4 Relación entre el KQ y MKT

Rowland (2008), es explícito al indicar la relación entre el modelo del KQ con las ideas de Ball en el MKT. Aclara que ambos modelos tienen como punto en común las ideas de Shulman, pero que son diferentes: "la teoría que se desprende de Ball et al., revela y clarifica las nociones no desarrolladas de SMK y PCK. Separa el SMK (conocimiento de la materia) de Shulman en 'conocimiento común de contenido' y 'conocimiento especializado del contenido', mientras que el PCK (conocimiento pedagógico del contenido) se divide en 'el conocimiento de los contenidos y los estudiantes' y 'el conocimiento del contenido y la enseñanza'. En nuestra teoría, la distinción entre los diferentes tipos de conocimiento matemático es de menor importancia frente a la clasificación de las situaciones en las que el conocimiento matemático aparece en la enseñanza en el aula. En este sentido, las dos teorías pueden constituir perspectivas útiles para ofrecer a la otra" (p. 275)

Por otro lado el cuarteto del conocimiento se ha seguido desarrollando como un marco para la observación de las clases y para el desarrollo de la enseñanza de las matemáticas, además de sugerirlo como una herramienta para reflexionar sobre las formas en que el conocimiento matemático entre en juego en la sala de clases (Turner, 2012). En un reciente artículo de Rowland, Turner y Thwaites (2014) se explica que el cuarteto está siendo utilizado para crear conciencia de la importancia de algunos componentes de la didáctica, además de proporcionar nuevas herramientas a los formadores de docentes sobre su papel en la formación.

Siguiendo la idea de que el KQ puede ser una herramienta para analizar lo que ocurre en la sala de clases, Turner (2012) investiga sobre el desarrollo del conocimiento matemático para enseñar en maestros de primaria y en situaciones en las que se promovió el desarrollo del conocimiento del contenido matemático a través de la reflexión sobre la práctica docente.

Si bien el KQ tuvo la tarea principal de apoyar a los participantes a reflexionar sobre los contenidos matemáticos de la enseñanza, también se utilizó como un marco analítico para identificar el conocimiento matemático para enseñar a través de las observaciones de la práctica. Además, para realizar este análisis hizo uso de la clasificación de Ball, entendiendo que tanto el KQ como el MKT ofrecen marcos analíticos complementarios. Por un lado, el marco del KQ proporciona una clasificación de las situaciones en las que el conocimiento matemático surge de la enseñanza, por el otro con la clasificación del MKT se logra la identificación de diferentes tipos de conocimiento matemático.

En la tabla 2.1 podemos observar la relación entre estos modelos teóricos y su relación con las ideas de Shulman:

	Shulman (1986) Forms of knowledge	Shulman (1987) Categories of knowledge	Ball, Thames and Phelps (2008) Categories of knowledge
Foundation	Propositional Case study	Subject Matter Knowledge (SMK) 'Theoretical' Pedagogical Content Knowledge (PCK) Curricular Knowledge (CK)	Common Content Knowledge (CCK) Specialised Content Knowledge (SCK)
Transformation	Propositional Case study	'Active' Pedagogical Content Knowledge (PCK)	Knowledge of content and teaching (KCT) Knowledge of content and learners (KCL)
Connection	Propositional Case study	Subject Matter Knowledge (SMK) Curricular Knowledge (CK)	Common Content Knowledge (CCK) Specialised Content Knowledge (SCK) Knowledge of content and learners (KCL)
Contingency	Strategic Knowledge (This is a form of knowledge which can only come into play in the act of teaching and which involves making appropriate strategic decisions by drawing on relevant *propositional* and *case study* knowledge)	Subject Matter Knowledge (SMK) 'Theoretical' and 'active' Pedagogical Content Knowledge (PCK)	Common Content Knowledge (CCK) Specialised Content Knowledge (SCK) Knowledge of content and teaching (KCT) Knowledge of content and learners (KCL)

Tabla 2.1: Relación entre el KQ y las ideas de Shulman y el MKT. Turner, 2012. (p. 257)

La tabla 2.1 nos permite reafirmar que existe una relación entre el conocimiento para enseñar que poseen los profesores y los momentos de la enseñanza, es decir, se relacionan los componentes del KQ con algunos de los subdominios del marco de Ball.

Si observamos la categoría de la Contingencia, esta investigadora la conecta con el Conocimiento común del contenido, el Conocimiento especializado del contenido, el conocimiento del contenido y la enseñanza y con el conocimiento del contenido y los estudiantes, lo cual será de mucha utilidad para el desarrollo de nuestra investigación, puesto que será esta conexión la que utilizaremos como base para nuestras categorías de análisis de nuestros casos de estudio.

2.5 La Contingencia

Anteriormente hemos relacionado las ideas del marco del cuarteto del conocimiento con el marco del conocimiento para la enseñanza. Ahora nos centraremos en las acciones que nos interesan de la práctica del profesorado de matemáticas, es decir las situaciones de contingencia.

Las situaciones de contingencia se relacionan con lo que Mason describió como "el saber y el actuar en el momento" (Mason y Spence, 1999). Rowland (2011) describe que las situaciones contingentes surgen por qué el profesor no puede anticiparse a todos los momentos de la lección y que es necesario someterse a un cierto tipo de improvisación. Agrega que estas situaciones contingentes son más difíciles de prever en los profesores noveles y que profesores con mayor experiencia pueden responder de mejor manera a lo no planificado.

Otro aspecto interesante de las situaciones contingentes, es que la mayoría de estas situaciones se activan mediante contribuciones inesperadas de los alumnos, y que el profesor responde ya sea ignorando, reconociendo pero dejando a un lado, o bien reconociendo e incorporando.

También en Rowland (2011) se muestran aspectos más profundos de la contingencia que permiten mejorar su comprensión. En esta comunicación propone que los momentos contingentes durante la enseñanza de las matemáticas son desencadenados por tres tipos de ‘eventos’, que denominamos Desencadenantes de la Contingencia.

El primer desencadenante tiene relación con responder a las ideas de los alumnos. Cuando el docente responde a las ideas y/o contribuciones de los alumnos, es posible que no hubiese planificado algunas contribuciones que aparecen y por tanto debe improvisar durante la enseñanza.

El segundo desencadenante es iniciado por el propio docente. Se produce cuando el docente durante la clase, producto de la reflexión, visualiza que alguna de sus acciones no está resultando como estaba planeado. El tercer, y último, desencadenante, es resultado de la no disponibilidad de algún recurso o herramienta planificado para realizar la enseñanza.

Por otro lado las situaciones contingentes están siendo utilizadas recientemente como una herramienta para la formación continua de los profesores. Rowland y Zazkis (2013) describen y analizan tres episodios de clases de matemática, en los cuales los profesores se enfrentaron a situaciones contingentes.

Se describen y analizan tres episodios de las clases de matemáticas. En cada caso, el profesor se enfrenta a una situación contingente que no había previsto o planeado, pero que ofrece posibilidades de aprendizajes interesantes y fructíferos. Se propone que la capacidad del maestro para sacar provecho de estas situaciones contingentes se basa en el conocimiento y la conciencia del potencial matemático de la inesperada oportunidad y por el interés y el compromiso con la investigación matemática.

Concluyen que la respuesta del profesorado a situaciones contingentes depende fundamentalmente de su conocimiento matemático que impulsa su implementación pedagógica.

Esta última afirmación corrobora nuestra convicción de estudiar las situaciones de contingencia y conocer los conocimientos que el profesorado gestiona, para la comprensión de las acciones en el aula, además de ser un insumo para la reflexión de los profesores y de perfeccionamiento de sus competencias profesionales (Solar y Deulofeu, 2014; Zamorano, 2014; Solar y Zamorano, 2015).

Capítulo 3. Marco Metodológico

Como hemos mencionado en capítulos anteriores esta investigación tiene por objetivo general analizar situaciones de contingencia y la incidencia del conocimiento matemático del profesor para su gestión; esto quiere decir que tendremos que estudiar en profundidad situaciones particulares de la clase y describir la gestión que realiza el profesor. De manera más específica nuestros objetivos apuntan a la identificación de las situaciones de contingencia que se producen en la sala de clases mientras el profesorado enseña matemáticas, a partir de indicadores sistemáticos para sus desencadenantes; también a relacionar las situaciones de contingencia con el conocimiento matemático para enseñar, tanto en lo que se refiere al conocimiento disciplinar como al conocimiento para la enseñanza; y finalmente a interpretar la gestión que el profesorado lleva a cabo de estas situaciones de contingencia a partir de su conocimiento.

En este capítulo detallaremos los aspectos metodológicos que han guiado esta investigación. Para esto este capítulo está dividido en tres apartados que tratan primeramente de la perspectiva metodológica; en segunda instancia, de los datos de la investigación y, por último de las categorías de análisis, para el logro de los objetivos mencionados anteriormente.

3.1 Perspectiva Metodológica.

La naturaleza de los objetivos de esta investigación apuntan a una comprensión de la complejidad de la enseñanza para interpretar la gestión del profesor de matemáticas en situaciones de contingencia

Tal como describían Ball y Cohen (1999) la enseñanza se da en los detalles, en particular en la interacción de los alumnos con los profesores sobre ideas particulares en circunstancias particulares (pág. 10); por tanto, la gestión que el profesor realice son eventos complejos y difícilmente generalizables, lo que necesita de una comprensión detallada y minuciosa de las interacciones que se realizan en la sala de clases.

Teniendo esto en cuenta hemos optado por seguir una investigación de tipo cualitativo, ya que como indica Stake (2007) los investigadores cualitativos “destacan la comprensión de las complejas relaciones entre todo lo que existe” (p. 42). Esto quiere decir que para analizar la realidad hay que tener en cuenta que ésta es de una alta complejidad y que hay múltiples situaciones que ocurren en simultáneo y que, por tanto, se hace necesario observar y analizar episodios claves para una mejor comprensión de la situación. A diferencia de lo que sucede con los enfoques de tipo cuantitativo, que busca relacionar causa y efecto, nuestro interés final es la comprensión de la gestión del profesorado en situaciones de enseñanza.

Además, en nuestro caso, utilizamos la interpretación como método, lo que nos permitirá enriquecer el análisis de la práctica del profesorado y de las situaciones no planificadas que ocurren en la clase, ya que como sostiene Erickson (1986), en el método cualitativo la interpretación ocupa un lugar central. De esta manera los resultados de la investigación no son tanto descubrimientos sino aciertos del trabajo.

Además, tal como describe Stake (2007) los investigadores que siguen los métodos cualitativos buscan perfeccionar la búsqueda de la comprensión. Para realizar un trabajo con mayor profundidad y exhaustividad la investigación cualitativa se realiza a través de episodios o testimonios, ya que esto, además de dar a conocer una mejor comprensión del caso estudiado, permite una interpretación a partir de los marcos teóricos que sostienen la investigación. Por esta razón, nosotros hemos optado por utilizar el método de estudio de casos, y en concreto, nuestros casos serán episodios de enseñanza que se caracterizan por ser situaciones contingentes.

El estudio de casos puede ser considerada como un diseño de la investigación (Rodriguez, Gil y García, 1999) o como un método (Stake, 2007), aunque en ambos se reconoce que hay una forma característica de realizar una investigación: fase de diseño, de recolección de datos, de análisis y una fase informativa.

En el estudio de casos, el investigador se dedica a observar las características de la unidad a analizar, donde su potencialidad está en centrarse en un caso concreto o en una situación e identificar los diferentes procesos interactivos que lo conforman (Latorre, del Rincón y Arnal, 1996). A su vez, Yin (2006) indica que la utilización del método del estudio de caso es pertinente cuando la investigación se dirige a responder preguntas como ¿qué sucede?, es decir, la utilización del estudio de caso es viable cuando queremos explicar una situación particular a través de una perspectiva más cercana que nos permita comprender lo que sucede.

Existen diferentes definiciones sobre lo que es el estudio de casos, aunque todas "coinciden en que el estudio de casos implica un proceso de indagación que se caracteriza por el examen detallado, comprehensivo, sistemático y en profundidad del caso objeto de interés" (Rodríguez et al. 1999).

Por otro lado, es necesario indicar que la literatura nos informa que existe una diferenciación entre caso único y casos múltiples. Rodríguez et al. (1999), mencionan que el caso único se caracteriza por ser el estudio de un único caso y se fundamenta en que el caso permite confirmar, modificar o ampliar el conocimiento sobre el objeto de estudio; además, el caso tiene las características de ser único e irrepetible. Otra característica es que el caso nos entrega información relevante del objeto estudiado.

En los casos múltiples se utilizan varios casos únicos a la vez para estudiar la realidad. Y el estudio de casos colectivo se centra en la indagación de un fenómeno o condición general, pero no en un caso concreto, sino en un determinado número de casos conjuntos. Esto no quiere decir que sea un estudio colectivo, sino un estudio intensivo de varios casos (Stake, 2007). A su vez, es fundamental tener en cuenta que la selección de los casos que constituye el estudio se debe realizar sobre la base de la información potencial que cada caso concreto puede aportar a todo el estudio (Rodríguez et al., 1999).

Por la naturaleza de nuestro estudio seguiremos esta última alternativa. La información que recolectamos proviene de diferentes profesores y profesoras que realizan sus clases en distintos centros educativos, pero nuestro interés no recae en los profesores o en los centros, sino en las situaciones de contingencia que se generan mientras se enseña, por lo que no se trata de un caso único, sino de varios casos que cumplirán la regla de ser todos episodios de enseñanza contingentes. Estos casos (nuestros episodios) corresponden a situaciones de contingencia que ocurren en cualquiera de los centros y con cualquiera de los profesores o profesoras. Entonces, este estudio de casos colectivo se justifica por el hecho que nuestro interés está en la indagación del fenómeno (contingencia) y no en un caso concreto, sino en un número de casos conjuntamente.

En definitiva, coincidimos con Rodríguez en que la utilización del estudio de casos nos facilitará la comprensión del fenómeno estudiado (los conocimientos para enseñar matemáticas) y esto puede dar lugar al descubrimiento de nuevos significados, ampliar la experiencia o confrontar lo que ya se sabe.

Otra característica del estudio de casos y que fundamenta nuestra decisión de utilizarlo es que es necesario que los casos tengan algún límite físico o social que le confiera identidad. Esta es la misma idea que expone Schoenfeld (2008), en la necesidad de crear episodios que ilustren lo que nos interesa analizar.

Nuestra investigación está basada en la información que recolectaremos de la práctica del profesorado. Varios investigadores se han dedicado a analizar lo que ocurre al interior de la sala de clases, orientación teórica que Schoenfeld (2008) denominó “classroom-based research”.

La investigación basada en la sala de clases (classroom-based research), se basa en las ideas de Ball y Lampert (1999), Ball (2000), Ball y Bass (2003), Lampert (2001). Estas investigaciones ponen especial énfasis en las acciones que realiza el profesorado mientras está enseñando y de esta manera reconocer cuales son los conocimientos necesarios para que se realice una enseñanza efectiva. En particular Lampert (2001), muestra cómo su investigación logra conectar la enseñanza de las matemáticas con el análisis de su propia práctica docente, a través del estudio de la enseñanza realizada durante un año a alumnos de quinto curso de enseñanza primaria. Además, los trabajos realizados por Ball desde la década de los 90, han tenido como base el quehacer docente. En Ball (2000) hace referencia al trabajo desde dentro de la sala de clases como una herramienta para el estudio de la propia práctica y la importancia que esta tiene para desarrollar una teoría que permita reconocer la especificidad de la enseñanza de las matemáticas.

Ball y Bass (2003) en su investigación nos entregan herramientas para aportar al trabajo del profesorado que enseña matemáticas, pero no lo hacen desde la perspectiva tradicional, es decir indicando la cantidad de matemática que necesitan los profesores, ni analizando a los profesores, sino poniendo atención en los conocimientos que estos movilizan en relación con la enseñanza que realizan. Ellos hacen una exhaustiva revisión de cuáles podrían ser las variables que influyen en el aprendizaje de los alumnos, concluyendo que está claro que los profesores necesitan saber matemáticas, pero concluyen que es más importante la profundidad del manejo de esos conocimientos. Siguen una idea parecida a la expuesta por Ma (2010) en la cual indica la necesidad de un conocimiento profundo de las matemáticas, algo que rescató a través de la observación de las prácticas de profesores, tanto en China como en Estados Unidos.

Todas estas investigaciones tienen una idea en común, realizan el análisis a través de una teoría basada en la práctica

En nuestra investigación, lo que observamos y analizamos de la práctica de los profesores son las situaciones no planificadas, las situaciones de contingencia. Cada una de esas situaciones se ha organizado como un episodio de enseñanza. En términos de nuestro diseño de investigación, cada episodio analizado es un caso de estudio.

Cada episodio tiene un claro inicio y final. El inicio del episodio se basa en las ideas de Rowland et al. (2011) quienes nos indican que existen tres desencadenantes para este tipo de situaciones no planificadas. El primero ocurre luego de la intervención de un alumno para responder a una pregunta, o luego de intervenir espontáneamente en la resolución de una tarea o cuando un alumno entrega una respuesta incorrecta a una pregunta. El segundo tipo de desencadenante está directamente relacionado con el profesor, ya que este decide modificar por iniciativa propia (o de interacción de la clase) la tarea que inicialmente había propuesto. Y el tercer desencadenante proviene de la falta de una herramienta o recurso para completar la tarea planteada.

Para la finalización de cada episodio hemos determinado características de cierre que tienen relación con el momento en que el profesor o profesora da por terminada la tarea que se estaba realizando y cambian a otra actividad que estaba previamente planificada, de modo que se retoma la planeación inicial de la clase.

3.2 Recolección de los datos para el análisis

Como hemos declarado anteriormente nuestro interés radica en la práctica del profesorado de matemáticas, y por tanto estudiamos la realidad de la enseñanza de las matemáticas en el contexto de la sala de clases.

Es por esto que la recolección de la información la realizamos en la enseñanza de los profesores. Para esto asistimos a clases de diferentes profesores de sexto año de enseñanza primaria y primer año de enseñanza secundaria de la ciudad de Barcelona y observamos y videograbamos[2] las clases.

Decidimos utilizar la videograbación ya que nuestro interés se encuentra en realizar un análisis detallado de los episodios y consideramos que esta es una herramienta útil y consistente para poder recuperar la información de las acciones que ocurrían en las clases. Creemos que de esta manera logramos obtener información que nos permitió mejores oportunidades de análisis y descripción de las situaciones de contingencia. Compartimos la idea que las acciones que suceden al interior de la sala de clase son complejas y están llenas de matices desde donde es difícil extraer información solo con una lista de verificación o con notas de campo de quien observa. Por la misma razón es

[2] Estas videograbaciones formaron parte del Proyecto de Investigación I+D "Factores de influencia en la discontinuidad del aprendizaje matemático entre primaria y secundaria" EDU 2009-07298. Proyecto liderado por Lourdes Figueiras y el Jordi Deulofeu, académicos del Departamento de Didáctica de las Matemáticas y de las Ciencias Experimentales de la Universidad Autónoma de Barcelona

que entendemos que el detalle y la revisión de las situaciones de clases se puede realizar mejor desde las grabaciones y posterior transcripción de los episodios que analizaremos (Erickson, 2006).

Además, somos conscientes, tal como lo menciona Schoenfeld (2013), que para cumplir nuestros objetivos, debemos considerar la complejidad que acarrea el análisis de las diferentes dimensiones de la enseñanza, además de comprender la dificultad de capturar estas situaciones particulares. Seguimos sus ideas, según las cuales, una revisión detallada de lo que ocurre en las clases se puede realizar mediante un análisis reiterado de las actividades, ya sea en episodios aislados o en secuencias anidadas de episodios coherentes, que reflejen la actividad del aula. Es por esto que tomamos las ideas de Schoenfeld (2013), según el cual la práctica puede ser descompuesta en prácticas más pequeñas que tengan las características de identificar y estudiar los fenómenos, pero de tal manera que puedan volver a recomponerse y para poder observar la clase en su totalidad.

También elegimos la videograbación, ya que compartimos las ideas expuestas por Ball y Cohen (1990) quienes indican que mirar la práctica y analizarla no significa estar en situaciones escolares en tiempo real. Creemos que se pueden realizar mejores análisis y descripciones de las situaciones de clase a través de la obtención de información de documentación estratégica como son la videograbación de las lecciones en el aula.

Recoger los datos a través de la videograbación de las clases nos ha permitido visibilizar los conocimientos que el profesorado de matemáticas utiliza mientras está enseñando, es decir, desde el interior. Erickson (2006), menciona que el uso del video permite que el analista capte situaciones concretas y pueda conocer las prácticas; de esta manera son más susceptibles de ser analizadas con mayor profundidad que solo a través de la observación etnográfica.

Las clases videograbadas correspondieron a contenidos que estaban presentes en las dos etapas educativas del último curso de primaria y primero de secundaria de diferentes colegios e institutos durante dos años escolares y correspondieron a las temáticas de

Proporcionalidad y Geometría, que dependiendo del profesor o profesora tuvieron una duración de hasta tres semanas, y que fueron grabadas en video de manera completa.

En la tabla 3.1 podemos observar los diferentes centros donde se obtuvieron los datos, la cantidad de profesores y el número total de clases:

	Centro Primaria A	Centro Primaria B	Centro Primaria C	Centro Primaria D	Centro Secundaria A	Centro Secundaria B	Total
Profesores	1	1	2	1	2	1	6
Número de clases	2	5	12	13	13	24	69

Tabla 3.1: Tipología de centros, profesores y clases.

Para la fundamentación de este tipo de recolección de los datos, nos apoyamos en el trabajo realizado por Rowland y sus colegas (2013), que también siguen la metodología de trabajo expuesto por Ball y Bass (2003). Estos investigadores observaron clases en distintos países lo que les permitió desarrollar y consolidar las diferentes dimensiones del Knowledge Quartet (KQ). Los datos analizados fueron recopilados a través de videograbaciones, a partir de las cuales seleccionaron los episodios que correspondían a cada dimensión, acompañándolas con transcripciones y fotos de los momentos emblemáticos de la clase que correspondían a cada dimensión. Además realizaron una descripción detallada y profunda del episodio indicando por qué correspondía a cada una de las dimensiones del KQ. En este trabajo, los casos analizados correspondían a la videograbación de las clases que cada investigador poseía y donde realizó su análisis particular, el cual a continuación fue compartido con el resto de investigadores para llegar a una conclusiones que les permitieron generar teoría.

Nuestros casos de estudio serán los episodios de enseñanza que el profesor o profesora no tenía previamente planificado (contingencia), es decir, aquellos momentos de la clase (si es que ocurren) que no estaban planificados.

3.3 Estrategias para el análisis

Luego de videograbar cada clase, esta fue respaldada en un ordenador, con el nombre del centro, el nombre del docente, la fecha de grabación y el tema de la clase. Luego se observaron en tres oportunidades cada clase para seleccionar los episodios contingentes: cuando se observaron por primera vez se identificó los episodios que podrían ser las situaciones contingentes.

La segunda observación correspondió solo a estos episodios, para verificar que realmente correspondían a una situación de contingencia, es decir, que se evidenciara que el profesor se desviaba de la planificación. Finalmente, la tercera observación sirvió para definir claramente que se trataba de situaciones contingentes, mediante la identificación del desencadenante de la contingencia.

De esta triple observación finalmente obtuvimos 12 episodios, que constituyen el corpus de datos que analizaremos en profundidad y cuyas características (docente, curso y tema) se presentan en la tabla 3.2.

Docente	**Curso**	**Tema**
Antonio	Sexto Primaria	Transformación número decimal en fracción decimal
Víctor	Sexto Primaria	Proporcionalidad directa
Víctor	Sexto Primaria	Porcentaje de un número
Amalia	Sexto Primaria	Altura de un triángulo
Amalia	Sexto Primaria	Regla de tres
Amalia	Sexto Primaria	Tabla Proporcionalidad
Amalia	Sexto Primaria	Medición
Amalia	Sexto Primaria	Problema Proporcionalidad
Gabriela	Primero Secundaria	Escritura números decimales
Gabriela	Primero Secundaria	Problema Proporcionalidad
Gabriela	Primero Secundaria	Proporcionalidad inversa
Gabriela	Primero Secundaria	Números enteros con paréntesis

Tabla 3.2: Selección de episodios de contingencia.

Estos 12 episodios fueron ordenados según los desencadenantes, para lo cual construimos una tabla organizativa 3.3 de las características de cada uno de estos desencadenantes:

Codificación de los desencadenantes

1. Ideas de los alumnos
   1.1. Respuesta del alumno a una pregunta del profesor
   1.2. Respuesta espontánea del alumno a una actividad o discusión
   1.3. Respuesta incorrecta a una pregunta o durante una discusión.

   El profesor:

   A. Ignora
   B. Reconoce lo que dice el alumno a través de algún tipo de respuesta, pero no lo incorpora a la clase
   C. Reconoce lo que dice el alumno y lo incorpora a la clase

2. Ideas del profesor
   2.1 Profesor cambia a petición de la clase
   2.2 Profesor cambia por la propia reflexión

3. Uso de herramientas
   3.1 La herramienta planificada no está disponible
   3.2 Uso de una herramienta no planificada utilizada oportunamente

Tabla 3.3: Desencadenantes de la contingencia

A cada uno de estos 12 episodios se le asoció el desencadenante correspondiente y esto nos permitió elaborar la tabla 3.4.

Episodio / Temática	**Desencadenante**
Episodio Transformación decimal a fracción (1)	Ideas de alumnos: el alumno responde de manera espontánea a la actividad y el profesor incorpora lo que dice el alumno a la clase
Episodio Proporcionalidad reducción a la unidad (2)	Ideas de alumnos: el alumno responda a la pregunta del profesor y el profesor reconoce lo que dice, pero no incorpora lo que dice el alumno a la clase
Episodio Porcentaje de un número (3)	Ideas de alumnos: el alumno responde de manera espontánea a una actividad y el profesor incorpora la idea a la clase.
Episodio Altura de un triángulo (4)	Ideas de alumnos: el alumno entrega una respuesta incorrecta a una pregunta y el profesor reconoce lo que dice, pero no lo incorpora.
Episodio Regla de tres (5)	Ideas de alumnos: el alumno responde a una pregunta del profesor y este reconoce lo que dice y lo incorpora en la clase
Episodio Proporcionalidad en tablas (6)	Ideas de alumnos: el alumno responde a una pregunta del profesor y este reconoce lo que dice, y lo incorpora a la clase.
Episodio Medición del libro (7)	Ideas de alumnos: el alumno responde a una pregunta del profesor y este reconoce lo que dice y lo incorpora a la clase.
Episodio Problema de los pintores (8)	Ideas del profesor: el profesor se da cuenta que la actividad no funciona por la propia reflexión y la cambia.
Episodio Escritura números decimales (9)	Ideas de alumnos: un alumno responde espontáneamente a una actividad y el profesor reconoce lo que dice y lo incorpora a la clase
Episodio Razón de proporcionalidad (10)	Ideas de alumnos: el alumno responde a una pregunta del profesor y este lo reconoce y lo incorpora a la clase.
Episodio Problema de las pelotas (11)	Ideas del profesor: el profesor se da cuenta que la actividad no funciona por la propia reflexión y la cambia.
Episodio Números enteros (12)	Ideas de alumnos: el alumno entrega una respuesta incorrecta a una pregunta y el profesor incorpora la idea a la clase

Tabla 3.4: Temáticas y desencadenantes de los episodios seleccionados.

Por último, para realizar el análisis de cada uno de estos episodios, construimos una ficha descriptiva que tiene las características, detalladas en la tabla 3.5:

Número de episodio	Curso	Profesor
Unidad Didáctica	Tema matemático	Duración del episodio

1. Descripción de la clase en la que se encuentra el episodio
2. Desencadenante y respuesta del profesor
3. Gestión del profesor
4. Síntesis

Tabla 3.5: Ficha de organización del episodio.

En el punto 1 de la ficha de cada episodio anotamos una descripción de la clase en la que se encuentra el episodio, narramos las características iniciales de la clase y que son relevantes para la comprensión del contexto donde se encuentra el episodio, lo que puede ser el objetivo de la clase y/o el momento de la clase en que se desencadena la contingencia, además de incluir la tarea que resuelven los alumnos y las instrucciones entregadas por el profesor.

En el punto 2, Desencadenante y respuesta del profesor, indicamos explícitamente cuál la situación que desencadena la contingencia, es decir, si es una acción de los alumnos, del profesor o falta de una herramienta. Además explicamos cuál fue la respuesta inicial del profesor a esta situación no planificada, de acuerdo con el tipo de desencadenante. Si era dentro de las ideas de los alumnos, si ignoró, si escuchó al alumno pero no modificó la clase, o si escuchó e incorporó al desarrollo de la clase. Si era un desencadenante de las ideas del profesor, si modificó la tarea propuesta o si era un desencadenante por falta de herramienta si cambió la actividad.

El punto 3, Gestión del profesor, es una descripción detallada de las acciones del profesor considerando en primer lugar el conocimiento matemático necesario para abordar la situación contingente y el conocimiento que utilizó o que no utilizó el profesor. En segundo lugar se consideró el conocimiento para enseñar, según las categorías del MKT.

Por último, en el punto 4, Síntesis, se expone un resumen de la gestión del profesor considerando el desencadenante y el efecto que la esta gestión tuvo tanto en el desarrollo de la clase a través de la participación de los alumnos como del conocimiento visibilizado.

Con esta organización de los datos es que nos dispusimos al análisis que explicaremos en el capítulo siguiente.

Capítulo 4. Análisis de los datos.

Recordemos que los objetivos de nuestra investigación son:

Objetivo General

Analizar situaciones de contingencia y la incidencia del conocimiento matemático del profesor para su gestión.

Objetivos específicos

1. Identificar las situaciones de contingencia que se producen en la sala de clases mientras el profesorado enseña matemáticas a partir de indicadores sistemáticos para sus desencadenantes.

2. Relacionar las situaciones de contingencia con el conocimiento matemático para enseñar, tanto en lo que se refiere al conocimiento disciplinar como al conocimiento para la enseñanza.

3. Interpretar la gestión que el profesorado lleva a cabo de estas situaciones de contingencia a partir de su conocimiento.

Recordemos también que los datos recogidos corresponden a la selección de episodios de enseñanza de la matemática en cursos de sexto año de primaria y primer año de secundaria de diferentes establecimientos educativos de Barcelona.

En el capítulo anterior, correspondiente a la metodología, ya hemos mostrado la selección de los episodios y su relación con los desencadenantes de la contingencia. En conjunto seleccionamos 12 episodios que constituyen el cuerpo fundamental de datos que será objeto de análisis en este capítulo.

En el desarrollo del análisis de la contingencia y de la gestión de aula, nos encontramos con la necesidad de separar los episodios, es decir, según las características de estas situaciones de enseñanza hemos optado por organizarlos en episodios simples y episodios complejos, por tanto el análisis se desarrolla en dos fases, una que indaga en los episodios simples y otra sobre los episodios complejos. Hemos denominado episodios simples a aquellos donde el desencadenante de la contingencia provoca que el profesor modifique la clase, atienda al alumno, incorporando o no las ideas de él y luego retoma la tarea y la finaliza. En general, en estos episodios simples hay un único desencadenante claramente identificable. En cambio en los episodios complejos, luego del desencadenante que genera el episodio contingente, el profesor atiende al alumno, intentando retomar la tarea que están desarrollando, y sin embargo los alumnos siguen participando activamente del desarrollo de ésta, lo que propicia la aparición de nuevas contingencias. Esto permite que la finalización de la tarea se retrase y ocasiona que el episodio sea de una duración más extensa. Estas intervenciones continuas de los alumnos, además dificulta retomar la planificación previamente diseñada y le exige al profesor la gestión de nuevas contingencias.

Por lo descrito anteriormente, la organización de este capítulo se ha estructurado en tres apartados. El primer apartado se dedica a la relación entre el desencadenante y la gestión que realiza el profesorado. De esta relación aparece la diferenciación entre episodios simples y complejos, los cuales se distinguen por la gestión realizada por el profesorado y la cantidad de contingencias que se desarrollan en ellos. El segundo apartado está dirigido al análisis de la gestión en los episodios simples y el desarrollo del conocimiento matemático para enseñar. El tercer apartado, y final, se exhibe la síntesis interpretativa de los hallazgos encontrados al analizar los episodios de contingencia denominados complejos.

4.1. Desencadenantes de los episodios

Este apartado trata de las tareas que hemos realizado para el logro del segundo objetivo: Relacionar las situaciones de contingencia con el conocimiento matemático para enseñar, tanto en lo que se refiere al conocimiento disciplinar como al conocimiento pedagógico para la enseñanza. Las tareas efectuadas fueron:

- Observación de las interacciones posteriores al origen de la contingencia.

- Identificación de cómo el profesor respondió a la contingencia y cómo la resolvió para volver a la tarea inicial.

Para llevar a cabo estas tareas, nos centramos en la gestión que realizó el profesorado posteriormente al origen de la contingencia, es decir, analizaremos la gestión de los momentos no planificados a los que se enfrenta el profesorado cuando enseña matemáticas, los observaremos y analizaremos a la luz del desencadenante de la contingencia y de los conocimientos para enseñar y de los contenidos matemáticos utilizados.

En el capítulo anterior identificamos los desencadenantes en cada uno de los episodios, y ahora analizaremos cómo se gestiona el episodio. Para esto en primer lugar, observamos las interacciones que se produjeron luego del desvío de la planificación del profesor. En específico ponemos atención en cómo el profesor responde a la contingencia y de qué manera resuelve la contingencia para volver a su planificación inicial. De la observación de estas interacciones identificamos que en algunos casos la resolución de la tarea se logró resolver inmediatamente de ocurrida la contingencia, lo cual tiene como característica que el episodio sea de corta duración.

De esta observación del desencadenante y la posterior gestión del profesor de la contingencia en cada uno de los episodios, surgieron dos formas en que desarrolla la gestión. En algunos episodios, el desencadenante de la contingencia hace que el profesor modifique la clase, atienda al alumno, incorporando o no las ideas de él y luego retoma la tarea y la finaliza, siendo esto resuelto en un corto lapsus de tiempo. En otros episodios, luego de la contingencia que lo genera, el profesor gestiona la clase atendiendo al alumno, e intentando retomar la tarea que están desarrollando; sin embargo, los alumnos siguen participando activamente del desarrollo de ésta, lo que propicia la aparición de nuevas contingencias. Esto tiene como consecuencia que el episodio sea de una duración más extensa y su gestión más compleja de modo que se le exige al profesor mayores herramientas para responder de manera adecuada a nuevas preguntas/intervenciones de los alumnos; además estas interacciones continuas retrasan el retomar la tarea y por tanto el término de la misma, y hacen que la gestión de la contingencia sea mucho más compleja para el profesor.

Como resultado de esta diferenciación de la gestión de la contingencia hemos subdividido los episodios en dos tipos. Los primeros, los denominamos episodios ‘simples’, debido a que solo hay un desencadenante de la contingencia que resuelta por el profesor y posteriormente la tarea es finalizada. A los segundos episodios les llamaremos ‘complejos’, ya que la multiplicidad de intervenciones de los alumnos generan situaciones de contingencia encadenadas.

Una vez realizado un primer análisis del conjunto de los episodios seleccionados, obtuvimos 9 episodios simples y 3 complejos que organizamos en la tabla 4.1.

Episodios Simples	**Episodios Complejos**
Episodio 1: Transformación decimal a fracción	Episodio 7: Medición del libro
Episodio 2: Proporcionalidad reducción a la unidad	Episodio 8:Problema de los pintores
Episodio 3: Porcentaje de un número	Episodio 12:Números enteros
Episodio 4: Altura de un triángulo	
Episodio 5: Regla de tres	
Episodio 6: Proporcionalidad en tablas	
Episodio 9: Escritura números decimales	
Episodio 10: Razón de proporcionalidad	
Episodio 11:Problema de las pelotas	

Tabla 4.1: Subdivisión de los episodios de contingencia

Para realizar el análisis de la gestión del profesorado en los episodios de contingencia, y en concreto poder establecer los conocimientos movilizados, hemos optado por seguir el MKT, es decir, describir los conocimientos para enseñar que el profesor moviliza en la gestión de la contingencia.

En este caso buscamos un marco que relacionara el MKT y KQ y por eso seguimos las ideas de Turner (2012), quien trata de establecer un paralelismo entre las dimensiones del KQ y los dominios del MKT. En particular, con respecto a la Contingencia, esta investigadora indica que en esta dimensión se manifiestan cuatro subdominios del MKT: el conocimiento común del contenido (CCK), el conocimiento especializado del contenido (SCK), el conocimiento del contenidos y la enseñanza (KCT) y el conocimiento del contenido y los estudiantes (KCS) (pág. 257).

Teniendo como referencia estos cuatro subdminios hemos vuelto a observar los episodios y hemos identificado a partir de la gestión que hace el profesor la presencia (o ausencia manifiesta) de elementos pertenecientes a dichos subdominios. Iniciamos el análisis con los episodios simples, que son los que analizaremos a continuación.

4.2 Análisis de episodios simples

Para comenzar el análisis de estos episodios, utilizamos los desencadenantes de Rowland (2011). Lo primero que observamos es que ocho de los nueve episodios simples seleccionados, están desencadenados por las Ideas de alumnos. Entre ellos se diferencian en cómo los alumnos intervienen para desencadenar la contingencia, y además en el tipo de gestión que el profesor realiza para cada contingencia.

Por otro lado, como tenemos episodios que corresponden tanto a sexto de primaria como a primero de secundaria, decidimos colocarlos en orden ascendente, de manera que posteriormente podamos observar y analizar la gestión que realizan los docentes en cada uno de estos niveles de enseñanza.

Desencadenante Ideas de los Alumnos	Episodio
1.1-B El alumno responde a la pregunta del profesor y el profesor reconoce lo que dice, pero no incorpora lo que dice el alumno a la clase.	2. Proporcionalidad reducción a la unidad.
1.1-C El alumno responde a una pregunta del profesor y este reconoce lo que dice, y lo incorpora en la clase.	5. Regla de tres. 6. Proporcionalidad en tablas. 10. Razón de proporcionalidad.
1.2-C El alumno responde de manera espontánea a la actividad y el profesor incorpora a la clase lo que dice el alumno.	1. Transformación decimal a fracción. 3. Porcentaje de un número. 9. Escritura de números decimales.
1.3-B El alumno entrega una respuesta incorrecta a una pregunta y el profesor reconoce lo que dice, pero no lo incorpora en la clase.	4. Altura de un triángulo.

Tabla 4.2: Organización de análisis de los episodios, los códigos de los desencadenantes corresponden con los establecidos en la tabla 3.4 del capítulo anterior.

A continuación vamos a analizar cada uno de los 8 episodios simples siguiendo una misma estructura y de acuerdo con la clasificación dada en la tabla 4.2.

I. Episodios 1.1 B: la contingencia se origina en una respuesta del alumno a una pregunta del profesor, a lo que el profesor responde reconociendo lo que dice el alumno, pero no lo incorpora al desarrollo de la clase. Hemos encontrado un único episodio.

Número de episodio: 2. Proporcionalidad directa reducción a la unidad	**Curso**: Sexto de Primaria	**Profesor**: Víctor
Unidad didáctica: Proporcionalidad y porcentajes	**Tema matemático**: Proporcionalidad directa	**Duración de episodio**: 38 Segundos

1. Descripción de la clase en la que se encuentra el episodio

La clase en la que ocurre este episodio es la cuarta de una secuencia de actividades y tareas que los alumnos deben desarrollar para el tratamiento de la proporcionalidad y los porcentajes. En esta clase resolverán problemas de proporcionalidad a través de la reducción a la unidad.

El profesor propone diferentes problemas que los alumnos resuelven en la pizarra. Los alumnos levantan la mano cuando quieren resolver un problema y el profesor elige a quien saldrá a la pizarra a resolver.

El problema es el siguiente:

"Para hacer un sorbete de limón se han de mezclar 3 limones y 6 cucharadas de azúcar. ¿Cuántas cucharadas de azúcar se deben mezclar con 5 limones?"

A continuación el profesor escribe la tabla que relaciona el número de limones con el número de cucharadas de azúcar.

Limones	Cucharadas de azúcar
3	6
5	
1	

El profesor explica que el problema puede ser resuelto a través de la reducción a la unidad y empiezan a surgir dudas entre los alumnos. Para solucionar las dudas, el profesor decide que sean los propios alumnos quienes expliquen la resolución. La primera en salir a la pizarra es Marcela quien explica el procedimiento de reducción a la unidad con sus palabras para que el resto de sus compañeros lo entiendan. A continuación, complementando las ideas de Marcela, Iván lo explica desde su asiento y para terminar, Lorena sale a la pizarra para mostrar el procedimiento que ella realizó para resolver el problema

El episodio que analizaremos corresponde a la explicación de Lorena a sus compañeros de cómo realiza el problema, el cual tiene una duración de 38 segundos.

	Tiempo	**Transcripción del episodio**
Profesor	00:03	Sal
Lorena	00:07	Por ejemplo, si…
Profesor	00:09	Explícalo aquí
Lorena	00:12 00:17	No lo voy a escribir en la pizarra Si seis cucharadas son por tres limones, ¿no?
Profesor	00:18	No, cada tres limones usas seis cucharadas de azúcar
Lorena	00:19	Entonces aquí hay cinco, pero tres más dos son cinco y tres más tres son seis, entonces seis más seis son doce le quitas dos y te da el número. [Lorena indica la pizarra]
Iván	00:33	Y, ¿dónde está el seis?
Profesor	00:35	Un poco complicado, ¿no?
Iván	00:36	Ah vale, vale, ya lo entiendo, pero es fácil
Profesor	00:38	Si tú lo entiendes está bien, pero vamos a intentar esto de reducir a la unidad que es más fácil.

2. Desencadenante y respuesta del profesor

La contingencia se desencadena luego del planteamiento de una tarea por parte del profesor. Su forma de gestionar la resolución, consiste en pedir que un alumno lo resuelva frente a todo el curso. Un alumno levanta la mano de manera voluntaria y sale a la pizarra, pero al parecer la resolución no es la esperada, ante lo cual el profesor reacciona escuchando la idea propuesta, es decir reconoce lo que dice la alumna, pero no incorpora su forma de resolver al desarrollo de la clase.

Lorena es la alumna voluntaria para mostrar su resolución y cuando sale a explicarlo a la pizarra indica,

"Entonces aquí hay cinco, pero tres más dos son cinco y tres más tres son seis, entonces seis más seis son doce le quitas dos y te da el número"

A lo que el profesor le responde:

"Un poco complicado, ¿no?, Si tú lo entiendes está bien, pero vamos a intentar esto de reducir a la unidad que es más fácil."

El profesor tiene planeado que este problema se resuelva mediante reducción a la unidad, ya que ese era su objetivo de la clase, pero la respuesta de Lorena, aunque correcta, no corresponde a la aplicación de esta técnica por lo menos de manera explícita. El profesor no considera pertinente hacer partícipe a la clase de la resolución de Lorena y responde que esta forma de resolver parece ser más compleja de lo que él propone.

3. Gestión del profesor

a) Conocimiento matemático movilizado en el episodio

Este episodio se desarrolla frente a la tarea de completar la tabla con magnitudes proporcionales. La característica diferenciadora de este problema es que las magnitudes ya no siguen un patrón de doble o triple (de múltiplo o divisor), es decir la cantidad de cucharadas que deben completar en la tabla ya no se puede calcular haciendo el doble, el triple o una relación de múltiplos con la cantidad inmediatamente anterior de los datos. Para resolver el profesor propone que se calcule cuál es la cantidad de cucharadas de azúcar que se necesitan para un limón y luego esa cantidad multiplicarla por cinco.

En el desarrollo de la clase intervienen varios alumnos. En un momento previo al episodio analizado, tanto Marcela como Iván explican con sus palabras como se puede resolver, utilizan esta técnica de reducción a la unidad, pero Lorena decide utilizar una técnica informal distinta.

"Entonces aquí hay cinco, pero tres más dos son cinco y tres más tres son seis, entonces seis más seis son doce le quitas dos y te da el número"

+3

Limones	Cucharadas de azúcar
3	6
6 (a)	**12** (c)
5(b)	**10 = [6+6-2]** (d)
1	**2** (e)

+2

+6

Aquí la alumna lo que hace es establecer la proporcionalidad mediante compensaciones aditivas: cuando dice "3 + 3 es 6" no se refiere a 6 cucharadas de azúcar, sino a 6 limones (a). Luego dice "3 + 2 son 5" (b), aquí también se refiere al número de limones a los que tiene que ver cuántas cucharadas de azúcar le corresponde. A continuación, cuando dice "6+6 son 12" (c) se refiere a la cantidad de cucharadas de azúcar para 6 limones. Posteriormente cuando resta 2: "*entonces seis más seis son doce le quitas dos y te da el número*" (d), este número proviene de la explicación del profesor, además de las presentaciones anteriores de sus compañeros, donde la primera tarea que realizaron fue reducir a la unidad, es decir que por 1 limón se corresponden 2 (e) cucharadas de azúcar, y como en el problema le preguntan por 5 limones y no 6, tiene que restar dos cucharadas de azúcar lo que corresponde a un limón menos para hacer el sorbete de que se proponía en el problema inicial.

El profesor escucha a Lorena, pero le responde

"Un poco complicado, ¿no?"

Lo que se puede interpretar como que para el profesor el procedimiento propuesto por Lorena es complejo, y opta por recomendarle que utilice la técnica de reducción a la unidad:

"Si tú lo entiendes está bien, pero vamos a intentar esto de reducir a la unidad que es más fácil."

b) Conocimiento para enseñar del profesor

- *Conocimiento común del contenido, CCK.*

Según las características del conocimiento común del contenido, el profesor tiene un manejo del conocimiento común, es decir, sabe cual es la respuesta al problema según la técnica de reducción a la unidad, y además es capaz de realizar la tarea que le asigna a sus alumnos.

- *Conocimiento especializado del contenido, SCK*

De los indicadores de este conocimiento, este se manifestaría al evaluar la plausibilidad de la respuesta que entrega Lorena, además de evaluar la explicación matemática del proceso resolución de la alumna. El profesor, durante el episodio, no indaga en el procedimiento que utilizó la alumna y no logramos comprobar el uso de este conocimiento; lo que si hace es validar el procedimiento realizado por Lorena, al decir: "Si tú lo entiendes está bien".

- *Conocimiento del contenido y la enseñanza KCT*

En el caso de esta situación de contingencia, este conocimiento pudo expresarse introduciendo una pausa en la clase para usar una observación por parte de un alumno y de esta manera profundizar en la idea matemática que fundamente la intervención. En nuestro caso, el profesor sigue con su clase, por lo que este conocimiento no pudo ser comprobado.

- *Conocimiento del contenido y los estudiantes KCS*

En el caso del Conocimiento del Contenido y los Estudiantes, es esencial el conocimiento de las concepciones y errores comunes que poseen los alumnos sobre la proporcionalidad. Un indicador de su presencia y utilización, consiste en interpretar el pensamiento emergente e incompleto de los alumnos. Como vemos en el episodio, de la intervención de Lorena y la posterior respuesta del profesor, no se manifiesta acción que permita interpretar que se intentó comprender el procedimiento de Lorena. En todo caso, el profesor decide no hacer partícipe de dicho procedimiento a la clase.

4. Síntesis

Al analizar este episodio según las situaciones de contingencia, la situación no planificada se produce luego que Lorena interviniera en el desarrollo de la tarea propuesta por el profesor y el profesor atiende a la explicación, pero no la incorpora en el desarrollo de la clase, sino que vuelve a la técnica que él tenía planificada para enseñar, la reducción a la unidad.

Podemos interpretar que existe una relación directa entre el uso de los diferentes subdominios del MKT con la gestión que realiza el profesor. Durante el desarrollo de este episodio no podemos apreciar que el profesor indague en la forma de resolución de Lorena, por lo que se pierde la oportunidad tanto de evaluar la explicación matemática de su respuesta (SCK), como la posibilidad de interpretar el pensamiento de Lorena durante su explicación (KCS).

Existen distintas gestiones posibles de esta situación contingente. Por ejemplo, el profesor podría haber hecho una pausa en la clase para atender a la forma de resolución; de esta manera, pudo profundizar en la idea matemática (KCT) y tendría como consecuencia un aprovechamiento de las ideas de una alumna que le hubiesen permitido puntualizar en el pensamiento proporcional, además de relacionar diferentes métodos de resolución como son la razón proporcional y la reducción a la unidad, e incluir en la enseñanza los diferentes usos que este pensamiento tiene en problemas concretos de la vida cotidiana. Incluso mostrar que, en cierta manera, Lorena también había utilizado reducción a la unidad en su procedimiento cuando resta dos cucharadas que corresponden a un limón.

El permitir a Lorena explicar su procedimiento, pudo dar pie a resolver problemas de proporcionalidad mediante compensaciones aditivas o comparar por diferencia, que son los primeros pasos para el desarrollo del conocimiento de proporcionalidad (Fiol y Fortuny, 1990) y de ahí pasar a métodos más complejos como la reducción a la unidad o la aplicación de la regla de tres. Una gestión de la contingencia a través de la indagación del pensamiento de Lorena, pudo ser una oportunidad de reflexionar cómo enseñar la proporcionalidad incluyendo ejemplos pertinentes para un desarrollo progresivo del pensamiento proporcional, que es un conocimiento que los alumnos seguirán utilizando en su aprendizaje de la matemática.

II. **Episodios 1.1 C**: la contingencia se origina de una respuesta del alumno a una pregunta del profesor, a lo que el profesor responde reconociendo lo que dice el alumno e incorporándolo al desarrollo de la clase. Hemos encontrado tres episodios (5, 6 y 10) de acuerdo con la tabla 4.2.

Número de episodio: 5. Regla de tres	**Curso**: Sexto de Primaria	**Profesor**: Amalia
Unidad didáctica: Proporcionalidad	**Tema matemático**: Regla de tres	**Duración de episodio**: 1 minuto 53 segundos

1. Descripción de la clase en la que se encuentra el episodio

Esta clase ha tenido como objetivo el tratamiento del contenido de proporcionalidad. La profesora ha propiciado que los alumnos resuelvan problemas mediante tablas, encontrando la razón entre los datos y, en algunos casos, reduciendo a la unidad. En este momento de la clase, la profesora, busca ampliar la forma de resolver introduciendo la técnica de la regla de tres.

Para esto, modifica los datos de un problema anterior desarrollado en la clase y les plantea a los alumnos la siguiente situación:

Si 4 entradas cuestan 20 euros, ¿Cuánto cuestan 50 entradas?

4 entradas-------- 20 euros
50 " -------- ?

La profesora indica que tienen que multiplicar los datos en cruz y dividirlo por lo otro. Calculan el costo de las 50 entradas y hace le pregunta a los alumnos si entienden o no lo que acaba de explicarles.

A continuación el episodio:

	Tiempo	**Transcripción del episodio**
Profesora	00:15 00:21	Así que esto siempre lo pueden hacer así: 4 entradas valen 20, pues 50 entradas no sé. Y multiplico aquellos dos cruzados, los multiplico. ¿Ven que esto no está completo? Entonces los multiplico y los divido por la otra. ¿De acuerdo? ¿Lo entienden o no?
Alumnos	00:22	Sí…No
Profesora	00:23	¿No entienden esto?
Fernanda	00:24	No
Profesora	00:26 00:33	¿Quién dice no? Fernanda A ver, fijémonos…ah… Es que esto no sé cómo explicarlo
Alumnos	00:41	Es muy fácil…
Profesora	00:48 01:11	Sí, la mecánica sí. Tú por ejemplo tienes dos valores entonces se multiplican, es lo que se dice regla de tres. Pero a ver Fernanda, otra manera, es decir si 4 entradas valen 20, es lo mismo que eso, pero de una manera más rápida. Yo tengo, si 4 entradas valen 20, ¿Cómo averiguo que vale una entrada? Dividiendo 20 entre 4 y ¿qué sale?
Alumnos	01:21	5

Profesora	01:22 01:48	Una entrada vale 5 y ahora, ¿Cuánto valen 50 entradas? Pues multiplico el 5 por 50 y nos da 250. Es lo mismo, ¿vale? Lo que pasa es que así lo hacemos de una manera más rápida, pero es lo mismo. Es decir cuánto vale una entrada, si 4 valen 20, pues una vale 5. Lo entiendes o ¿no? Ahora si fuera de esta manera, lo multiplicamos en cruz y dividimos y ya está para hacerlo rápido.

2. Desencadenante y respuesta del profesor

Luego de que la profesora explicara la forma de resolver el problema mediante la regla de tres, pregunta a la clase si se entiende el procedimiento y obtiene como respuesta un No. Al parecer no estaba preparada para que algún alumno no entendiera, por lo que ella responde que no sabe como explicarlo.

Para tratar de explicarlo, resuelve el mismo problema de otra manera para mostrarles a los alumnos que no comprenden que es una forma equivalente de resolver, porque llegan al mismo resultado.

Esta es una situación de contingencia, ya que luego de una pregunta de la profesora, una alumna responde indicando que ella no entiende el procedimiento. La profesora frente a esta respuesta decide incorporarla al desarrollo de la clase.

Por tanto el desencadenante de esta contingencia es *Ideas de los Alumnos*, el alumno responde a una pregunta de la profesora y ésta decide incorporar esta duda al desarrollo de la clase.

3. Gestión del profesor

a) Conocimiento matemático movilizado en el episodio

Este episodio se desarrolla frente a la tarea de resolver el problema de las entradas utilizando la regla de tres. Hasta ahora estaban resolviendo problemas de proporcionalidad reduciendo a la unidad, pero la profesora busca ampliar las estrategias de resolución, además de hacerlo más económico al resolver de manera rápida y fácil de recordar, porque se reduce a multiplicar de manera cruzada y dividir por la cantidad restante para encontrar el resultado.

Luego de explicar cómo se realiza el problema con la regla de tres, pregunta a la clase si se ha entendido y recibió como respuesta un “No”. Ante esta situación, busca formas alternativas de explicación, porque como ella misma declara “Es que esto no sé cómo explicarlo”.

La regla de tres es un procedimiento que se utiliza en la resolución de problemas de proporcionalidad, en los cuales se conocen tres de los cuatro datos que forman parte de una proporción y que permite calcular el valor del cuarto dato de la proporción. Generalmente este algoritmo es utilizado porque es un proceso rápido y económico de resolución, pero a veces su utilización tiene como consecuencia la manipulación aleatoria de los números, además que no siempre se logra dar sentido a lo que se está resolviendo. Por otro lado, enmascara la naturaleza matemática del proceso de encontrar magnitudes proporcionales.

La regla de tres podría justificarse en la propiedad de las proporciones, donde el producto de medios, es igual al producto de extremos, aunque para esto en primera instancia debería comprobarse de que las cantidades que estamos relacionando efectivamente cumplen las condiciones de proporcionalidad. En el caso de la tarea propuesta por la profesora, se puede comprobar que existe correspondencia entre la cantidad de entradas y el precio pagado; por ejemplo si se compra el doble de entradas, se pagará el doble de dinero, si se compra el triple de entradas, se pagará el triple de dinero, por tanto la razón entre las cantidades es constante y se puede aplicar la propiedad de las proporciones.

b) Conocimiento para enseñar del profesor

- *Conocimiento común del contenido, CCK.*

Según las características del conocimiento común del contenido, el profesor tiene un manejo del conocimiento común, es decir, puede calcular el costo de las 50 entradas utilizando el algoritmo de la regla de tres, es decir, puede realizar la tarea que le pide a sus alumnos.

- *Conocimiento especializado del contenido, SCK*

De los indicadores de este conocimiento, este podría manifestarse cuando la alumna indica que no entiende el procedimiento de la regla de tres. La profesora pudo indicar que la regla de tres tiene su justificación en que son magnitudes proporcionales y de esta manera dar una explicación matemática al procedimiento.

- *Conocimiento del contenido y la enseñanza, KCT*

En el caso de esta situación de contingencia, este conocimiento se expresó cuando la profesora hizo una pausa en la clase para indicarle a la alumna que no podía profundizar en la idea matemática del uso de la regla de tres. Además, ella eligió y modificó un ejercicio de manera ad hoc para la utilización de la regla de tres.

- *Conocimiento del contenido y los estudiantes, KCS*

En el caso del Conocimiento del Contenido y los Estudiantes, es esencial el conocimiento de las concepciones y errores comunes que poseen los alumnos sobre la proporcionalidad. Un indicador de su presencia y utilización pudo destacarse en anticipar lo que podría ser confuso para algunos alumnos. En este episodio no hay muchas evidencias del uso de este conocimiento, posiblemente porque la profesora no esperaba la respuesta recibida.

4. Síntesis

Al analizar este episodio según las situaciones de contingencia, la contingencia se produce luego que Fernanda respondiera un “No” a la pregunta de la profesora sobre si se entendía el procedimiento de la regla de tres. La profesora escucha la respuesta de la alumna y decide tratar de explicarle, por lo que incorpora la respuesta de la alumna al desarrollo de la clase.

Cuando la profesora intenta justificar la regla de tres y mostrar que permite resolver el problema, indica que no sabe cómo explicarlo. La gestión de la profesora a esta situación contingente se desarrolla volviendo a mostrar que el resultado es correcto y volviendo a la técnica que anteriormente habían resuelto de reducción a la unidad, para de esta manera mostrar que las dos formas alternativas de resolver dan la misma respuesta al problema.

En cuanto a los conocimientos para enseñar que la profesora moviliza en este episodio, podemos evidenciar que maneja el conocimiento común (CCK), es decir, es capaz de realizar la tarea que propone a sus alumnos. En relación con el conocimiento especializado (SCK), su frase "Es que esto no sé cómo explicarlo" nos lleva a suponer que podría poseer elementos del conocimiento especializado del por qué la regla de tres es un procedimiento que sirve para resolver este tipo de problemas, pero frente a esta situación no planificada no logra explicarlo, como ella misma menciona, y no logra dar una explicación que permita validar el procedimiento.

En cuanto al conocimiento del contenido y la enseñanza (KCT) se manifiesta en algunas acciones de la profesora: cuando elige el ejemplo de la clase, cuando hace una pausa para tratar de aclarar a la alumna. Por último, el conocimiento del contenido y los estudiantes (KCS), es el que menos pudimos observar durante el episodio, porque no pudimos verificar si la profesora anticipó lo que podría serle confuso.

Dentro de la gestión de la profesora, una oportunidad de seguir ayudando a los alumnos a profundizar en la proporcionalidad y en las diferentes formas de resolución de los problemas fue dar una explicación matemática más profunda para el uso de la regla de tres. De esta manera los alumnos pudieron seguir interactuando en los diferentes procedimientos, para conocerlos y poder decidir en qué situaciones es mejor usar uno u otro.

Por otro lado, podemos destacar la transparencia de la profesora para decirle a sus alumnos que en esta situación de contingencia no poseía una explicación clara y directa para justificar la regla de tres y por eso su decisión de explicar de manera alternativa, volviendo a un procedimiento conocido como es la reducción a la unidad. La profesora mientras explica de manera alternativa, reduciendo a la unidad, utiliza implícitamente la comparación mediante razones y las operaciones que justifican la utilización de la regla de tres, aunque no es explícita ni completa. Estas dos formas de resolución, les permitió a los alumnos, comparar ambos procedimientos y decidir cuál de ellos era un procedimiento más fácil de aplicar y declaran explícitamente que es más fácil la regla de tres.

Segundo episodio que se desencadena por 1.1. C

Número de episodio: 6. Proporcionalidad en tablas	**Curso**: Sexto de Primaria	**Profesor**: Amalia
Unidad didáctica: Proporcionalidad	**Tema matemático**: Proporcionalidad	**Duración de episodio**: 1 minuto 15 segundos

1. **Descripción de la clase en la que se encuentra el episodio**

La clase comienza con la profesora mostrando ejemplos de situaciones proporcionales. Presenta un problema y organiza los datos en una tabla. De allí con la ayuda de los alumnos completa la tabla mostrando que son magnitudes proporcionales.

A continuación escribe problemas en la pizarra que los alumnos deberán desarrollar individualmente y luego mostrar cómo lo hicieron en la pizarra.

La tarea es completar las siguientes tablas:

Número de cocas	1	3	5	7
Número de huevos	4			

Número de entradas	1	2	4	9	10
Precio		10			

Le pide a una alumna salga a la pizarra a completar la primera tabla y esto es lo que sucede:

	Tiempo	**Transcripción del episodio**
Profesora	00:11	Completa la tabla de proporcionalidad. La de las cocas y los huevos. Es muy fácil porque sabemos cuántos huevos son para una. *[Una alumna, Verónica, sale a la pizarra a completar la tabla]*
Profesora	00:19 00:27	Para tres se ocupan 12….. Y ahora ¿Por cuál número has multiplicado y dividido?
Verónica	00:30	Por cuatro
Profesora	00:31	¿Por cuatro?
Verónica	00:33	No…sí
Profesora	00:38	¿No? Una coca. Si una coca…
María	00:43	Por cuatro
Profesora	00:44	A ver si una coca son cuatro huevos, tres cocas, son doce. Entonces para pasar *[La profesora se acerca a la pizarra y escribe]* $\frac{1}{4}$ $\frac{3}{12}$ De aquí a aquí, ¿Por cuánto tienes que multiplicar?
Verónica	00:56	Tres
Profesora	00:57 01:02 01:06	¿Vale? Por tres. Coloca. *[Verónica escribe en un costado de la tabla una flecha hacia abajo con x3 y una flecha en la dirección contraria :3]* Fijémonos también que si multiplicamos en cruz, da lo mismo. Uno por veinte es igual a cuatro por cinco. En todas
Profesora	01:15	Venga, sal a hacer la segunda María [*La profesora se queda observando la tabla que recién completó*]

2. Desencadenante y respuesta de la profesora

Este episodio es un caso singular. La contingencia que se presenta en este episodio ocurre cuando la profesora le pregunta a Verónica por cuál número ha multiplicado y dividido para completar la tabla. Verónica responde cuatro y si bien el resultado es correcto, la profesora le vuelve a preguntar por el resultado, porque al parecer esa no es la respuesta que ella esperaba.

Como la respuesta no es la esperada, la profesora busca una estrategia diferente para explicar a la alumna, y se acerca a la pizarra y escribe las magnitudes del problema como razones:

$$\frac{1}{4} \qquad \frac{3}{12}$$

Y le pregunta por cuánto debe multiplicar el 1 para que le de cómo resultado 3. A lo que la alumna responde tres y vuelve a retomar lo planificado.

La profesora se queda observando unos segundos lo que acaban de escribir, pero sigue con el siguiente problema.

En este episodio la contingencia se genera cuando la profesora le pregunta a Verónica y ésta no entrega el resultado esperado (por lo demás correcto) del problema y la profesora reconoce lo que dice, lo incorpora en la clase, y sólo corrige para seguir con el siguiente problema.

3. Gestión del profesor

a) Conocimiento matemático movilizado en el episodio

Este episodio es un caso particular de la contingencia: hay un desvío de la planificación de la clase debido a una respuesta de una alumna, que la profesora no esperaba, pero en este caso la respuesta de la alumna es correcta, a pesar de lo cual la profesora no la acepta, porque está esperando otra respuesta.

El problema planteado por la profesora corresponde a series proporcionales, es decir relación entre las cantidades de dos magnitudes (número de cocas y número de huevos), de manera que una de ellas (el número de huevos) se obtiene multiplicando por un mismo número las distintas cantidades de la otra (número de cocas).

De la tabla que la profesora entrega se desprende que para elaborar una coca se necesitan cuatro huevos, por tanto la razón de aumento de huevos, es cuatro por cada coca elaborada; este número es la respuesta entregada por la alumna, que proviene de las cantidades de la tabla que se le pide a los alumnos completen. Lo que se necesitan son el número de huevos, en relación con las cocas que se elaboran: Si son 3 cocas, entonces se necesitan 12 huevos; si son 5 cocas, se necesitan 20 huevos y si se elaboran 7 cocas, se necesitan 28 huevos. La razón de cambio es 4. Y esta fue la respuesta que indicó la alumna.

La profesora al parecer por su explicación posterior, observa las cantidades de las magnitudes relacionadas como fracciones equivalentes, y por eso escribe

$$\frac{1}{4} \qquad \frac{3}{12}$$

Cuando la profesora indica que el resultado correcto es tres (3), lo que está observando es el aumento del número de cocas que es 3 y, por tanto el aumento del número de huevos será también por 3.

La profesora al trabajar con las cantidades como razones, implícitamente trabaja con la idea de que si una cantidad sufre un aumento de tipo multiplicativo, en este caso del triple, la otra cantidad tendrá el mismo cambio multiplicativo de aumento (Mochón, 2012).

En el caso de que la tarea dada a los alumnos hubiera correspondido a razones y a la aplicación del teorema fundamental, la respuesta de la profesora es acertada, pero no en el caso del problema que están resolviendo, donde lo interesante, - y que la misma profesora plantea como una tarea a resolver- es encontrar la razón, es decir el factor de cambio entre las magnitudes involucradas y no la fracción equivalente que permite resolver la tarea propuesta de completar la tabla.

b) Conocimiento para enseñar del profesor

- *Conocimiento común del contenido, CCK*

En el caso de este problema el manejo de conocimiento común del contenido se observa en dos momentos: cuando se debe completar la tabla y luego cuando se debe encontrar la razón de cambio entre las cantidades de las magnitudes. En el primer caso, la profesora reconoce y completa correctamente la tabla, pero cuando debe encontrar la razón de cambio se produce una interpretación errónea de la razón de la proporcionalidad, lo que conduce a una confusión entre la razón entre los valores de una misma variable de la tabla y la fracción equivalente que permite resolver el problema.

- *Conocimiento especializado del contenido, SCK*

En este episodio no pudimos observar uso del conocimiento especializado del contenido. La profesora pudo evidenciar un manejo de este conocimiento al evaluar la veracidad de la respuesta de la alumna, pero como vimos en el apartado anterior del análisis del conocimiento matemático, la profesora confunde el encontrar la razón entre las variables con la fracción equivalente que resolvía el problema, por lo que no alcanza a evaluar la veracidad de la respuesta de la alumna.

- *Conocimiento del contenido y la enseñanza, KCT*

El conocimiento del contenido y la enseñanza se manifiesta en varios momentos en este episodio: cuando la profesora elige los ejercicios que determina presentar a los alumnos para el trabajo con tablas de proporcionalidad; además, cuando decide utilizar la contribución de la alumna para puntualizar sobre el procedimiento para resolver el problema.

- *Conocimiento del contenido y los estudiantes, KCS*

En la tarea que la profesora propuso a los alumnos, este conocimiento pudo manifestarse para comprender e interpretar el pensamiento de la alumna para resolver el problema. Por la forma como la profesora respondió a la contingencia, este conocimiento no pudo ser observado, ya que no indaga en las razones de por qué la alumna multiplica por cuatro (4) para encontrar la respuesta correcta.

4. Síntesis

Al analizar este episodio según las situaciones de contingencia, el desencadenante se manifiesta luego que Verónica saliera a la pizarra a completar la tabla con magnitudes proporcionales que la profesora les propuso a los alumnos de la clase. La profesora observa cómo la alumna completó correctamente y le pregunta, por un dato específico, la razón de cambio del problema. Lorena responde de manera acertada, pero la profesora no reconoce la respuesta como correcta y se produce una situación no planificada: explicar la razón de proporcionalidad con la ayuda de fracciones equivalentes.

Cuando indagamos en el porqué de la intervención de la profesora, lo primero en que pusimos atención fue en el conocimiento matemático que se manifiesta en el episodio. La estrategia utilizada parece ser poco apropiada, ya que oculta la relación entre las magnitudes involucradas en el problema: número de cocas y el número de huevos para su elaboración. Esta estrategia del uso de las fracciones equivalentes no permite encontrar la razón de cambio y por tanto descubrir el resultado correcto en relación con el problema.

En cuanto al conocimiento matemático para enseñar, su expresión se ve mermada por la estrategia utilizada por la profesora. En relación con el conocimiento común del contenido (CCK), la profesora confunde el procedimiento de encontrar la razón por lo que no logra realizar de manera correcta la totalidad de la tarea que le propone a los alumnos. Por ello, a partir de este episodio no podemos indicar con certeza que maneja el conocimiento matemático para resolver. A su vez, el conocimiento especializado (SCK) tampoco puede ser evidenciado en esta situación, ya que cuando evalúa la respuesta de la alumna hay una confusión de procedimientos, lo que pudo solucionarse a través del desarrollo de la definición matemática de la proporcionalidad que le permita resolver el problema. En cuanto al conocimiento del contenido y la enseñanza (KCT) hay exhibición de su manejo cuando eligió la tarea que le entregó a los alumnos con elementos cercanos a su realidad, además cuando realizó una pausa en la clase para aclarar la idea de Verónica, la profesora reconoce que cuando se presenta un error de un alumno tiene la labor de intervenir para ayudar a encontrar la respuesta adecuada. Por último, el conocimiento del contenido y los estudiantes (KCS), fue uno de los conocimientos que presenciamos en menor cantidad, ya que no logramos confirmar si se anticipó o no la facilidad/dificultad de la tarea propuesta.

Dentro de la gestión de la profesora, en este episodio ella muestra estar dispuesta a ayudar a sus alumnos en la comprensión de las tareas y sus diferentes formas de resolución, por eso le pregunta a Verónica cómo la resolvió. Así se muestra atenta a las posibles fortalezas y debilidades del aprendizaje.

Además, demuestra estar por la búsqueda de caminos alternativos que ayude a los alumnos a comprender; quizás por eso, además de la razón de proporcionalidad utiliza el conocimiento de las fracciones equivalentes como una forma de resolución. Por otro lado, la confusión de conceptos que la profesora muestra en esta situación de contingencia, le restan en la efectividad que podría desarrollar en la clase y en la fijación de conceptos de proporcionalidad y su relación con las fracciones equivalentes.

Tercer y último episodio que se desencadena por 1.1. C

Número de episodio: 10. Razón de proporcionalidad	**Curso**: Primer Año de Enseñanza Secundaria	**Profesor**: Gabriela
Unidad didáctica: Proporcionalidad	**Tema matemático**: Proporcionalidad entre magnitudes	**Duración de episodio**: 3 minutos 42 segundos

1. Descripción de la clase en la que se encuentra el episodio.

La clase comienza indicando que comenzarán a estudiar una nueva forma de relación entre las variables. Para mostrarlo a los alumnos, la profesora les propone un problema sobre la "Fórmula 1". En este caso analizarán la relación de proporcionalidad entre dos magnitudes que se ponen en juego mientras los automóviles están corriendo: los litros de gasolina utilizada y el número de vueltas al circuito. Para esto construye una tabla donde inicializa las variables y les asigna valores. La profesora completa la tabla con ayuda de los alumnos, hasta que llega a 120 litros y quiere conocer cuántas vueltas dará el automóvil.

Gasolina	Vueltas
10	1,2
90	10,8
50	6
120	

Pregunta a los alumnos cuál es el valor que falta para completar la tabla. Ana, responde y esto es lo que ocurre:

	Tiempo	**Transcripción del episodio**
Profesora	 00:07 00:10	¿Cuál ha sido el factor de paso de aquí? [*La profesora indica el número 10*] Este es el enunciado, esta es la clave, por eso la he marcado. ¿Cuál ha sido el factor de paso de aquí, hasta aquí abajo, Felipe? [*ahora la profesora indica el número 120*] ¿Por cuánto he multiplicado el 10?
Felipe	00:18	Por 10 [*Ana mientras tanto levanta su mano para responder*]
Profesora	00:20	Venga Ana
Ana	00:21	14,4
Profesora	00:22	14,4 fenomenal [*Indicando con su expresión aprobación a la respuesta*]
Ana	00:25	En 120

Profesora	00:25	Sí, sí, genial, está súper bien. Tadeo explícanos, porque Ana ha dicho el resultado, tú explícanos el proceso.
Tadeo	00:32	Pues haces 10 por 12
Profesora	00:38	Genial 10 por 12, que era lo que te preguntaba Felipe, y ahora el 1,2 por 12
Tadeo	00:47	1,2 por 12
Profesora	00:50	Que son 14,4
Ana	00:52	Yo lo he hecho de otra forma
Profesora	00:53	Venga Ana, cuéntanoslo
Ana	00:54	He hecho 50 que son 6 y como son 120, he sumado 50 y 50 que son 100 entonces son 12 vueltas y solo he tenido que sumar dos veces el 1,2
Profesora	01:10	A ver, vuélvemelo a explicar
Ana	01:12	A sea que 50 son 6 vueltas ¿no?, y como es 120, yo he cogido el 100 y he dicho 50 y 50 , 12
Profesora	01:20	Muy bien
Ana	01:22	Y después como me sobran 20, he sumado 10 y 10 que son 20 me sale 2,4
Profesora	01:28	Genial, súper bien, está bien. Ana lo que ha hecho, ha partido los 120, los ha partido en trocitos en los cuales ella se encontraba cómoda. Lo voy a explicar un momentín en la pizarra. Al final no utilizaremos esta técnica, pero me parece súper ingeniosa
María	01:44	Al final es como sumar 10,8 ; 1,2 y 1,2….
Profesora	01:50 02:04 02:23	Hay muchas maneras de hacerlo, pero conceptualmente vuestras dos maneras son diferentes. A mí me gustan las dos, lo que pasa es que en el tema que estamos, digamos que la tuya es la que busco, pero está muy bien y como está muy bien yo creo que está bien explicarla. Ana ha dicho, yo tengo 120, no? Que es todo este trozo |--------------------------------| Entonces el 120, lo puedo descomponer en trocitos que ya conozco que sería 50 y 50 y me faltan 20. Con 50 hago seis vueltas, porque ella lo está viendo y con 50 más hago otras seis vueltas y ahora el 20, entonces ha dicho: "Vale el 20, que hago, no tengo el 20 en la tabla, pero sí que tengo el 10" entonces

		puedo pensar que hay 10 dos veces, sería 1,2 y 1,2, 2,4, ¿todos estamos viendo? Entonces al final ha sumado 6 y 6, 12, oye 14,4, bueno genial. ¿Estamos entendidos como lo ha hecho Ana? Otra manera.
	02:47	Tadeo ha llegado a este 14,4 haciendo 1,2 por 12, porque la razón, la razón que Tadeo haya hecho 1,2 por 12, es que ha dicho: "Hombre, el factor de paso de aquí a aquí, el factor de paso de aquí a aquí es por 12"[*La profesora primero indica el 10 y luego el 120*]
	02:58	¿Todos lo vemos? Y…entonces, el factor de paso de aquí a aquí, también va a ser
	03:22	multiplicar por 12.
	03:31	¿Ok, todos?.

2. Desencadenante y respuesta del profesor

La profesora da la oportunidad de participar a los alumnos completando la tabla y en una de esas opciones de participación Ana responde a la demanda de la profesora y presenta una resolución. Durante el diálogo de esta intervención una respuesta de Ana genera la contingencia: la profesora espera que el dato que falta para completar la tabla sea 12, pero Ana le da el resultado final y la profesora no capta, en un primer momento, cómo llegó al resultado, pero reconoce que el resultado es el correcto y modifica por un momento la clase para incorporar esa respuesta a su desarrollo. Por lo tanto, el desencadenante de esta contingencia corresponde a la respuesta dada por una alumna a una pregunta de la profesora. En la gestión de la contingencia la profesora reconoce lo que dice la alumna y lo incorpora a la clase.

3. Gestión del profesor

a) Conocimiento matemático movilizado en el episodio

Al igual que en los dos episodios anteriores, en este el conocimiento matemático movilizado corresponde a la proporcionalidad de magnitudes, en particular a situaciones de proporcionalidad directa.

La profesora para acercarse al conocimiento matemático decide comenzar con un problema que es cercano a ellos, ya que en Barcelona es donde se celebra una de las carreras de la Fórmula 1, que se había realizado la semana anterior, y además uno de los principales pilotos de la competición es un español.

Las magnitudes relacionadas son la cantidad de litros de gasolina utilizada y el número de vueltas dadas al circuito y las cantidades asociadas a esas magnitudes las representa en una tabla de valores. La pregunta apunta a encontrar el valor desconocido de vueltas, si se dispone de 120 litros de gasolina. Para completar valores anteriores de la tabla la profesora instó a encontrar la fracción equivalente a la primera información dada, es decir, se conocía que para 10 vueltas se necesita 1,2 litros de gasolina, es por eso que pregunta por el factor de paso del 10 al 120, para que por ese mismo valor se multiplique a 1,2 y dé el resultado faltante en la tabla.

En términos de comprensión de la proporcionalidad como una función lineal, lo que la profesora pide es

$$f(120) = f(12 \cdot 10) = 12 \cdot f(10) = 12 \cdot 1{,}2 = 14{,}4$$

En cambio lo que indica Ana es:

$$f(120) = f(50 + 50 + 10 + 10) =$$

$$f(50) + f(50) + f(10) + f(10) = 6 + 6 + 1{,}2 + 1{,}2 = 14{,}4$$

La profesora al escucharlo por primera vez no comprende el proceso que llevó a cabo Ana, por eso detiene la clase y le pide que lo vuelva a explicar, para ella poder entenderlo, y luego transmitirlo al resto de la clase.

b) Conocimiento para enseñar del profesor

- *Conocimiento común del contenido, CCK*

La profesora manifiesta un manejo del conocimiento común, ya que conoce la respuesta al problema que plantea, además de utilizar los conceptos correctamente. En este caso conoce que el resultado es 14,4 vueltas y que la razón de proporcionalidad según los datos de la tabla es 12. Es quizás la razón por la que escucha a Ana y le pide explique cómo ella resolvió.

- *Conocimiento especializado del contenido, SCK*

El primer indicio en este episodio de manejo del conocimiento especializado del contenido queda de manifiesto cuando la profesora evalúa la plausibilidad y veracidad de la respuesta de Ana. La profesora rápidamente se da cuenta que la respuesta que entrega es correcta, aunque no es lo que ella preguntaba. Además, luego cuando Ana explica cómo resolvió, la profesora evalúa la explicación matemática y después la explica al resto de la clase.

De las características del conocimiento especializado, la profesora demuestra poseer un buen manejo del mismo.

- *Conocimiento del contenido y la enseñanza, KCT*

El conocimiento del contenido y la enseñanza en este caso de la proporcionalidad se manifiesta en este episodio cuando la profesora elige el ejemplo para el inicio de la clase. Además cuando propone tareas relacionadas con la determinación de valores de una tabla a los alumnos, lo hace con números múltiplos del inicial, de manera que no suponga una complicación la multiplicación de números más complejos. Aunque posiblemente donde se demuestra un mayor manejo de este conocimiento, es cuando decide hacer una pausa para usar la observación de Ana de cómo ella resolvió el problema y así ampliar formas de resolución de problemas de proporcionalidad, próximos a los razonamientos de los alumnos.

- *Conocimiento del contenido y los estudiantes, KCS*

De los indicadores de este tipo de conocimiento está el anticipar el pensamiento de los alumnos, que es quizás la parte más débil mostrada en este episodio por la profesora, aunque esto se logra compensar con el esfuerzo que hace por comprender e interpretar el pensamiento de Ana para resolver el problema.

4. Síntesis

Este episodio tiene como característica principal que hay una gestión de la clase que permite incluir las ideas, y en particular las resoluciones de los estudiantes utilizando métodos informales propios, lo cual permite ampliar las formas de resolución de la tarea propuesta.

La profesora confía en sus conocimientos matemáticos para comprender la estrategia de resolución que utiliza Ana, y decide pausar la clase de manera que el resto de los alumnos comprendan también ese desarrollo.

En relación con el conocimiento matemático para enseñar, se distingue que la profesora manifiesta poseer herramientas durante el desarrollo de su práctica.

El conocimiento común del contenido (CCK), se manifiesta en la resolución correcta del problema que propone a sus alumnos. En cuanto al conocimiento especializado (SCK), la profesora lo exhibe al evaluar y verificar la respuesta de Ana, además de validar matemáticamente la respuesta de esta alumna. El conocimiento del contenido y la enseñanza (KCT) se observa cuando elige el problema contextualizado para sus alumnos, además de hacer una pausa dentro de la clase para explicar el procedimiento que siguió Ana. Por último, el conocimiento del contenido y los estudiantes (KCS), fue uno de los conocimientos cuya presencia no podemos asegurar, porque no logramos verificar que anticipe la dificultad o facilidad de la tarea y otras posibilidades de resolución que los alumnos podrían desarrollar.

En definitiva, en este episodio podemos observar que el conocimiento matemático de la enseñanza que posee la profesora le permite gestionar con éxito la contingencia, separándose de su planificación y propiciando un aprendizaje más profundo de la proporcionalidad, así como nuevas estrategias de resolución. En este episodio la profesora demuestra manejar herramientas conceptuales y procedimentales para responder a una situación no planificada y de esta manera permitir una ampliación del aprendizaje de sus alumnos.

III.Episodios 1.2 C: la contingencia en estos episodios se desencadena por las ideas de los alumnos, donde estos responden de manera espontánea al desarrollo de una actividad y el profesor decide incorporar sus ideas en el desarrollo de la clase. Hemos encontrado tres episodios que se originan por este desencadenante (1, 3 y 9), de acuerdo a la tabla 4.2.

Número de episodio: 1. Transformación decimal a fracción	**Curso**: Sexto de Primaria	**Profesor**: Antonio
Unidad didáctica: Fracciones y números decimales	**Tema matemático**: Transformación de un número decimal en fracción decimal	**Duración de episodio**: 1 minutos 22 segundos

1. Descripción de la clase en la que se encuentra el episodio

El profesor inicia la clase entregándole a cada alumno una hoja con un listado de ejercicios por resolver. Los alumnos comienzan la resolución de los ejercicios en sus libretas de manera individual. Cuando algún alumno presenta dificultad para resolver, éste levanta la mano y llama al profesor. El profesor se acerca a cada alumno en su asiento.

Cuando un alumno pregunta por un ejercicio de los propuestos, él se lo explica, pero a la vez decide mostrarlo a toda la clase en la pizarra. La tarea es transformar el número decimal 0’075 en una fracción decimal.

A continuación se adjunta la transcripción del momento en que el profesor resuelve la tarea en la pizarra y que corresponde al episodio que analizaremos.

	Tiempo	**Transcripción del episodio**
Profesor	00:03	Un número decimal, un ejercicio que hay que hacer
	00:05	Un número decimal lo puedo expresar como una fracción, ¿sí?
	00:09	Pues ya está bien mira, [l*o dice indicando a un alumno que no pone atención a la clase*]
	00:12	0’075, ¿a ver que sí?

	00:17 00:21	¿Esto de donde va a salir? ¿De qué número ha de salir? Porque lo que se está colocando es que se puede dividir entre 10, ¿de qué número sale?
Alumno	00:26	De 75
Profesor	00:27 00:34 00:36 00:39	De un 75. A ver si yo divido 75 entre 10, ¿que da? Entre 10, ¿eh? Entre 10 quiere decir que si la coma… ¿Qué hacemos?……[*El profesor parece dudar de qué número escribir*]
Alumno	00:39	Entre 10
Profesor	00:41 00:44 00:46	Vale, ¿dónde queda? Aquí, ¿no? [*El profesor toma la tiza para escribir el número*] 7'
Alumno	00:47	No!, No
Profesor	00:47	Perdón, perdón, perdón [*El profesor borra la pizarra*]
Alumno	00:49	0'75
Profesor	00:51	0'75 ¿a que si?
Alumnos	00:53	Si
Profesor	00:54 00:58 01:08 01:14 01:15 01:18 01:22	Si dividimos entre 100..esto era entre 10 $\frac{75}{10}$ = 0'75 La coma se mueve en hacia atrás y entonces queda $\frac{75}{100}$ = 0'075 ¿Sí? ¿Sí o no? Y las otras son exactamente lo mismo. Hay que localizar de qué número sale.

2. Desencadenante y respuesta del profesor

El profesor para explicar cómo se puede realizar la tarea de transformar el número decimal en una fracción decimal utiliza la técnica de mover la coma un lugar cada vez, es decir del 75, mover la coma un lugar a la izquierda con lo cual el número debiese ser 7'5.

En este momento un alumno interviene en la clase, indicando que el resultado que el profesor está anotando en la pizarra no es correcto, el profesor duda de lo que está realizando y toma en consideración esta intervención y cambia el resultado en la pizarra.

La contingencia se desencadena por la intervención espontánea de un alumno a la tarea de transformar el número decimal en su fracción decimal, ante lo cual el profesor reconoce lo que dice el alumno y lo incorpora en la clase, a pesar de que la propuesta de solución del alumno es errada, es decir que 75 dividido entre 10 no es 0’75, pero es lo que el profesor anota en la pizarra y el alumno confirma. El profesor sigue resolviendo la tarea de encontrar la fracción decimal de la cual proviene el 0’075, y como ya tiene un error anterior, se llega al resultado de que la fracción decimal del cual proviene el decimal 0’075 es 75 dividido entre 100:

$$75/100 = 0'075$$

3. Gestión del profesor

a) Conocimiento matemático movilizado en el episodio

Para analizar el conocimiento matemático que se utiliza en este episodio es necesario poner atención a los errores comunes relacionados con el uso de los números decimales.

La tarea fue transformar el número decimal (0’075) en la fracción decimal equivalente, para lo cual lo primero que busca es el entero de donde proviene el número decimal, en este caso es el número 75 y que en términos de fracción corresponde al numerador y lo que falta por especificar es el denominador.

La técnica que generalmente se utiliza para hacer esta transformación consiste en encontrar una fracción cuyo denominador sea una potencia de 10, es decir escribir el numerador, contar en el numerador, empezando por la derecha, tantas cifras como ceros tiene el denominador y colocar la coma decimal.

En nuestro caso 0’075 = 75/1.000

Lo que sucede durante la realización de la tarea es que el profesor comienza a utilizar esta técnica moviendo la coma de a un lugar por vez, es decir del 75, mover la coma un lugar a la izquierda con lo cual el número debiese ser 7’5. Pero es aquí cuando el profesor duda de lo que está realizando, cuando un alumno interviene en la clase. El profesor toma en consideración esta intervención y cambia el resultado en la pizarra.

En este episodio podemos observar que el profesor se encuentra dudoso frente a la técnica de escribir el numerador, que en este caso es 75 y encontrar el denominador, con ayuda del número decimal, contando a partir de la derecha las cifras, lo que le indicará cuantos ceros debe tener el denominador (Godino, 2004). La duda se puede observar en que se demora unos segundos en escribir la división entre 75 y 10, y con la intervención del alumno, la imprecisión parece consolidarse, ya que borra la pizarra y escribe el 0’75, y el alumno le da la aprobación del resultado con lo que el profesor prosigue con la clase.

b) Conocimiento para enseñar del profesor

- *Conocimiento común del contenido, CCK.*

El primero de los conocimientos que analizaremos en este episodio corresponde al Conocimiento Común del Contenido (CCK). Este conocimiento es el que se utilizado en la transformación del número decimal 0’075 en la correspondiente fracción decimal.

Así, aunque el resultado correcto es: 75/1.000

El profesor concluye la tarea con la fracción decimal: 75/100

- *Conocimiento especializado del contenido, SCK*

En cuanto al Conocimiento Especializado del Contenido (SCK), en este episodio hay pocas evidencias de su uso. En este caso el profesor no evalúa la plausibilidad ni veracidad de la intervención del alumno. Además, para aclararse pudo dar una explicación matemática de cómo se resuelve, pero en este momento de la clase no lo hizo.

- *Conocimiento del contenido y la enseñanza, KCT*

Este conocimiento puedo evidenciarse en una decisión del profesor de cambiar la forma de resolución de la tarea, es decir, realizar la división larga entre 75 y 100 y así mostrar la ventaja o desventaja de una determinada técnica de resolución. El profesor considera y utiliza la contribución de un alumno para seguir con el desarrollo del ejercicio, lo cual es una de las características de este conocimiento, pero no evaluó correctamente la respuesta del alumno y además no hizo una pausa para profundizar en la idea matemática que estaba apoyando dicha respuesta.

- *Conocimiento del contenido y los estudiantes, KCS*

En el episodio este conocimiento pude exponerse anticipando donde podría estar el error y la posible confusión de los alumnos en este tipo de problemas de transformación de decimal a fracción. Tampoco se evidencia que logre prever las dificultades que presentan los alumnos en el desarrollo del problema.

4. Síntesis

Como se puede distinguir de las acciones que ocurren en este episodio, el profesor demuestra un conocimiento matemático insuficiente de la transformación de un número decimal en la fracción decimal correspondiente, porque da la tarea por finalizada aun cuando existe un error en su resultado.

En cuanto al conocimiento para enseñar matemáticas, el conocimiento común está desarrollado débilmente, al no demostrar que puede hacer la transformación de decimal a fracción. El conocimiento especializado está poco desarrollado, probablemente porque no demuestra manejar el conocimiento común. En cuanto al conocimiento del contenido y la enseñanza, el profesor toma como estrategia utilizar la contribución de un alumno para el desarrollo de la clase. Y para finalizar, el conocimiento del contenido y los estudiantes, es uno de los menos desarrollados, ya que no logramos evidenciar en el episodio.

Reconocemos que el profesor podría presentar debilidades del conocimiento matemático y del conocimiento para enseñar matemáticas, pero no podemos olvidar que durante el desarrollo de la clase hay más variables que pueden intervenir en su gestión.

Segundo episodio del tipo 1.2 C:

Número de episodio: 3. Porcentaje de un número	**Curso**: Sexto de Primaria	**Profesor**: Víctor
Unidad didáctica: Proporcionalidad y porcentajes	**Tema matemático**: Porcentaje de un número	**Duración de episodio**: 55 segundos

1. **Descripción de la clase en la que se encuentra el episodio**

La clase comienza con la revisión de problemas que el profesor indicó a los alumnos como tarea el día anterior. Estos problemas provienen del libro de texto que cada estudiante posee.

Para resolver los ejercicios, los alumnos se ofrecen voluntariamente levantando su mano y el profesor decide cual de ellos sale a la pizarra para mostrar como resolvieron la tarea. El profesor observa el desarrollo y luego corrige los resultados.

Uno de los ejercicios es el siguiente:

“¿Cuál es el 8% de 125?”

Sale Tadeo a resolver a la pizarra y este es el desarrollo:

$$8\% \text{ de } 125 = 8 * 125^{3} = \frac{964}{100} = 9'99^{4}$$

[3] Es visible que falta el denominador 100 bajo 8*125, lo que es matemáticamente incorrecto, pero esa división se encuentra implícita cuando los alumnos y el profesor resuelven ejercicios de este tipo, y por lo tanto, a pesar de no ser correcto ya que las igualdades no son ciertas, esto no afecta al resultado.

[4] La aparición errónea de 964 se puede atribuir a un error en la transcripción que realiza Tadeo de su libreta a la pizarra cuando sale a resolver el ejercicio

El profesor termina el ejercicio indicando que 9’99 → 10

De esta manera en la pizarra queda escrito lo siguiente:

$$8\% \text{ de } 125 = 8 * 125 = \frac{964}{100} = 9'99 \rightarrow 10$$

A continuación se encuentra la transcripción de lo sucedido en la clase a partir de este momento.

	Tiempo	**Transcripción del episodio**
Profesor		A ver aquí, lo que hizo Tadeo. Vale, el procedimiento es igual y nos da un número decimal que es nueve coma noventa y nueve.
Ana	00:05	No lo entiendo
Juan	00:06	Pero si pone novecientos sesenta y cuatro, el resultado tendría que ser nueve coma sesenta y cuatro
Tadeo	00:13	No
Profesor	00:14	No
Juan	00:15	Sí
Profesor	00:17 00:21 00:24 00:26	mm… es que claro, es que aquí…. ocho por…..ocho por…. Espera un poco [*El profesor revisa sus apuntes*] ocho por ciento veinticinco da mil, ¿no? es que esto no está bien
Tadeo	00:27	¿ah, sí?
Profesor	00:30 00:32 00:35 00:42 00:47	Esto da mil Y ahora sí que es diez, ¿vale? Ocho por cinco cuarenta, ocho por dos….da mil aquí Tadeo. Ocho por ciento veinticinco da mil, ¿vale? Corregir aquí que se ha equivocado el Tadeo, aquí da mil no novecientos sesenta y cuatro
Lorena	00:52	Y al final es 10
Profesor	00:55	Vale, al final es 10, sí , correcto

2. Desencadenante y respuesta del profesor

El profesor comienza a revisar el resultado del ejercicio que realizó Tadeo, y Ana interviene en la clase indicando que ella no entendía cómo se llegó al resultado, a lo que Juan complementa que al parecer el resultado no es correcto, porque si el resultado de Tadeo al realizar la multiplicación era 964, al dividir por 100, el resultado debió ser 9,64, pero lo que escribió Tadeo fue 9,99.

Estas intervenciones no las esperaba el profesor, que antes parecía satisfecho con la respuesta, ya que incluso "aproximó" el 9,99 de Tadeo a 10.

La contingencia fue desencadenada por la intervención de los alumnos de manera espontánea (no fue en respuesta a ninguna pregunta del profesor o de una discusión entre los alumnos), al no estar de acuerdo con el resultado del ejercicio.

Ante esto el profesor en primera instancia no lo incorpora a la clase, negando que hubiese un error en la respuesta, pero luego de la insistencia de Juan, decide tomar en cuenta la idea y revisar si el procedimiento y el resultado eran realmente correctos. Por tanto, el profesor reconoce lo que le dicen los alumnos y opta por incorporarlo a la clase, de manera que las ideas de los alumnos modifican las acciones que realiza el profesor en la clase.

3. Gestión del profesor

a) Conocimiento matemático movilizado en el episodio

La tarea a realizar es el cálculo del porcentaje de un número, en este caso calcular el 8% de 125. La técnica utilizada durante las clases anteriores correspondió a multiplicar el número del porcentaje con el número total y luego dividir ese producto entre 100, que en nuestro caso corresponde a:

$$8\% \text{ de } 125 = \frac{8 * 125}{100} = 10$$

Esta es la técnica empleada por Tadeo y que realiza lo siguiente:

$$8\% \text{ de } 125 = 8 * 125 = \frac{964}{100}$$

Y luego la fracción decimal la escribe como número decimal

$$\frac{964}{100} = 9'99$$

El conocimiento matemático que se pone en juego es una situación especial del razonamiento proporcional, cuando uno de los términos que intervienen en las proporciones corresponde al valor 100. Su utilidad proviene de comparar dos números entre sí de manera relativa, es decir conocer qué proporción representa uno del otro y donde el número 100 es una referencia. (Godino, 2004), (Fiol y Fortuny, 1990).

b) Conocimiento para enseñar del profesor

- *Conocimiento común del contenido, CCK.*

El episodio que estamos analizando corresponde al cálculo del porcentaje de un número: 8% de 125, cuyo resultado es 10. De la actuación directa del profesor en el episodio no logramos evidenciar que posea el conocimiento para resolver la tarea, pero recurre a sus apuntes para comprobar el resultado y de ellos sabe que el resultado es 10, y por eso hace la aproximación de 9'99 a 10. Por tanto podríamos indicar que maneja este conocimiento, pero no con total seguridad.

- *Conocimiento especializado del contenido, SCK*

En cuanto al Conocimiento Especializado del Contenido (SCK), a partir del cuestionamiento de Juan hace del resultado cuando el profesor evalúa la plausibilidad de la respuesta que había entregado Tadeo. Aunque no desarrolla una definición de los conceptos utilizados para aclarar la resolución

- *Conocimiento del contenido y la enseñanza, KCT*

El Conocimiento del Contenido y la Enseñanza (KCT) es exteriorizado cuando el profesor decide qué contribución de los alumnos utiliza y cual guarda o ignora. Aquí él decidió atender al interrogante de Juan tratando de aclararle la duda que presenta. También pudo profundizar en este conocimiento, relacionándolo con el contenido y la enseñanza a través del desarrollo que realizó Tadeo.

- *Conocimiento del contenido y los estudiantes, KCS*

Por último, el Conocimiento del Contenido y los Estudiantes (KCS); aquí el profesor posiblemente consideró que la multiplicación y la posterior división, serían tareas fáciles para todos los alumnos y no anticipó el error que cometió Tadeo. Por otro lado al atender a la pregunta de Juan tuvo la posibilidad de interpretar el pensamiento de Tadeo para conocer dónde estuvo su error mientras resolvía la tarea.

4. Síntesis

De la actuación del profesor vemos que, maneja las herramientas matemáticas para resolver el problema que entrega a sus alumnos.

Con respecto al conocimiento para enseñar matemáticas podemos hacer referencia a algunos de ellos que se manifiestan durante la gestión que realiza el profesor.

De los diferentes conocimientos que conforman el MKT, el que está desarrollado de manera más destacada es el conocimiento del contenido y la enseñanza. Este conocimiento tiene relación con las decisiones pedagógicas que afectan al aprendizaje y el contenido matemático. El profesor lo desarrolla al escuchar a Tadeo y de esta manera aclarar las posibles dudas que surgen durante la resolución de una tarea. Quizás el menos desarrollado corresponde al conocimiento del contenido y los estudiantes, junto con el conocimiento especializado. Estos conocimientos son propios de la formación del profesor en la enseñanza de la matemática, donde se deben seleccionar y desarrollar definiciones matemáticas, entre otras tareas que provienen de una comprensión de la enseñanza y el aprendizaje de las matemáticas, que también está relacionada con las concepciones que tienen los alumnos respecto al concepto matemático. El profesor no logró predecir si la tarea sería fácil o difícil ni dar o evaluar explicaciones matemáticas.

Tercer episodio del tipo 1.2 C:

Número de episodio: 9. Escritura de números decimales	**Curso**: Primer Año Enseñanza Secundaria	**Profesora**: Gabriela
Unidad didáctica: Números decimales	**Tema matemático**: Escritura de números decimales	**Duración de episodio**: 3 minutos 18 segundos

1. **Descripción de la clase en la que se encuentra el episodio**

Este episodio ocurre en una clase en la que se han dedicado a revisar los resultados de ejercicios para ser resueltos en casa. En esta sesión los alumnos pasan a la pizarra a mostrar la resolución para que luego la profesora revise si es correcta o no.

La tarea consiste en escribir en palabras números decimales, diferenciando entre la parte entera y la parte decimal.

El ejercicio que le correspondió a Lorena fue:

"Escribir en palabras el número 12,50"

Y su respuesta fue:

"12,50 = doce unidades y cincuenta centésimas"

Luego, cuando la profesora comienza a revisar el resultado, Lorena le hace una pregunta.

Lo que ocurre en el episodio está descrito a continuación:

	Tiempo	**Transcripción del episodio**
Lorena	00:04	Y si el cinco está en la primera, en el mío ¿eh?, si el cinco está en la primera, ¿no sería decena?
Ana	00:16	No, porque…
Profesora	00:17 00:24 00:33	Es muy buena pregunta, muy buena pregunta, voy a intentarlo yo, ¿vale? Sino después se lo explicas tú.[mirando a Ana] Si yo tengo 5 decenas de caramelos Si yo tengo 5 decenas de caramelos, ¿cuántos caramelos tengo?
Lorena	00:41	Eeehhh

Profesora	00:43	5 decenas
Lorena	00:45	Eeehhh
Profesora	00:51	Decenas de caramelos, ¿Cuántas unidades tengo? D U 5
Lorena	00:59	Cero
Profesora	01:01 01:04	Cómo que cero! Tengo cinco… Yo vengo aquí y digo “he traído 5 decenas”, ¿Tenemos caramelos para todos?
Lorena	01:09	Sí
Profesora	01:11	¿Por qué?
Lorena	01:13	Porque son decenas
Profesora	01:14 01:20 01:26 01:38 01:55	Porque son decenas. Y tengo 5 decenas quiere decir que tengo 5 grupos de 10, ¿cierto? De 10 unidades, porque yo ahora me he pasado al lenguaje de las unidades. Entonces si me paso al lenguaje de las unidades, tú puedes ir contando y decir, muy bien Gabriela: primer paquete de decenas: 10, segundo paquete de decenas: 20, tercer paquete de decenas: 30, bla bla 50, ¿cierto? ¿Sabes cómo lo hago yo de forma más rápida? Porque si yo estoy en el lenguaje de las decenas Por alguna razón, pero por alguna razón alguien dice que explique en el lenguaje de las unidades dirá que tienes 50 unidades eh D U 5 0 Por otra…., tu a veces dices “hello” y a veces dices “hola” depende de lo que convenga, ¿ah que sí?
Lorena	02:01	Entonces siempre que haya dos números, el último número…tienes que mirar donde cae, ¿no?
Profesora	02:10 02:15	Tienes que mirar la elección que ha hecho la persona que escribe. Hay diferentes maneras de referirse a una misma magnitud, a una misma cantidad. Este número que tú has hecho….

	02:24	La pregunta de Lorena a mi me parece muy buena, vamos a ver si la entendemos todos.
	02:28	Este número, esta distancia, como distancia es la misma que esta, como distancia
	02:38	|--------------| 12,5
	02:42	Como distancia es la misma, como distancia es la misma, pero por alguna razón en tu ejemplo, alguien me ha dicho quiero que me lo expreses en centésimas, y por alguna razón alguien me ha dicho quiero que lo expreses en décimas
	03:08	Pero como trozo, como longitud, -vamos a pensar que sea una longitud- es la misma, solo cambian las unidades en las que las mides, ¿entendido?
	03:18	Y ¿cómo pasas de unas unidades a otras? Ahora lo vemos en el 4.3 (si nos da tiempo)

2. Desencadenante y respuesta del profesor

El número decimal que Lorena debía escribir en palabras en la pizarra era el 12,50. A lo cual Lorena respondió correctamente indicando

12,50 = doce unidades y cincuenta centésimas

Si bien Lorena respondió acertadamente, la duda de Lorena se refiere a que en el número 12,50, si el 5 está en el primer lugar luego de la coma, entonces el 5 está en el lugar de las décimas (ella dice decenas) y ella esperaría que el resultado fuera doce unidades y cinco décimas.

La profesora observa el ejercicio y la respuesta de Lorena, y después de unos segundos opta por hacer un ejemplo con decenas, para hacer el canje a unidades. La pregunta que realiza Lorena no está planificada. La profesora escucha la pregunta y tarda unos segundos en comenzar a responder y opta por seguir la estrategia del canje de las unidades. Esta situación contingente es del tipo “ideas de los alumnos”, donde Lorena hace una intervención en la clase, en la que expresa una duda, sin mediar pregunta del profesor. Ante esto la profesora decide tomar la pregunta de Lorena e incorporarla en la clase, porque la encuentra interesante.

3. Gestión del profesor

a) Conocimiento matemático movilizado en el episodio

El conocimiento matemático que se pone en juego en este tipo de problemas, tiene relación con la escritura de números decimales. En general este tipo de expresiones tiene como conocimiento implícito que la representación decimal proviene de la equivalencia con una fracción (Konic, Godino y Rivas, 2010).

Las formas más utilizadas para la escritura (lectura) de los números decimales se realiza con coma y en lenguaje verbal, es decir, expresados en términos de unidades, décimas, centésimas, etc. En particular la duda de Lorena puede asociarse a una error del valor de posición de los decimales, que está asociado con una comprensión del sistema de numeración decimal, en cuanto a posición y valor posicional (Centeno, 1988).

En el caso del 12,50, escribir el número en su forma fraccionaria podría contribuir a la comprensión del número decimal, es decir, 12 + 50/100 lo que sería equivalente con la representación 12 + 5/10 ó 12 + ½ para referirse al número no solo como 12 unidades y 50 décimas, sino como 12 unidades y 5 décimas o 12 unidades y media.

Esto podrá contribuir a comprender las distinciones entre número y la expresión de un número, y además la relación de orden de los números decimales.

b) Conocimiento para enseñar del profesor

- *Conocimiento común del contenido, CCK*

La profesora muestra un manejo adecuado y pertinente del conocimiento común, ya que hace una utilización correcta del lenguaje coloquial del número decimal en cuestión, lo que queda evidenciado al revisar la respuesta de Lorena al ejercicio (12,50)

- *Conocimiento especializado del contenido, SCK*

Para la escritura de los números decimales (y su estudio) se requiere trabajar de manera adecuada nociones como la posición que ocupa un número y su valor.

En el caso de la escritura del número 12,50 y por la pregunta que realiza Lorena, la profesora encuentra un ejemplo que le permite mostrar un ejemplo que le permite hacer una puntualización sobre la posición del cinco en el número decimal, y entrega a la alumna una explicación matemática a través del canje entre las 5 decenas y las unidades para ejemplificar que el cinco tenía un determinador "valor" dependiendo de la unidad.

Además encuentra un ejemplo equivalente para realizar una puntualización matemática, como es el uso del número decimal como equivalencia de distancia.

- *Conocimiento del contenido y la enseñanza, KCT*

En relación con el conocimiento del contenido y la enseñanza, la profesora decide atender a la duda de Lorena, anticipando que esa duda puede ser fundamental para la comprensión del valor posicional de una cifra en un número decimal.

- *Conocimiento del contenido y los estudiantes, KCS*

Al enseñar la escritura de los números decimales, los profesores deben anticiparse a lo que puede ser confuso y difícil para los alumnos. En este caso el número 12,50 le parece confuso a la alumna. Si bien es cierto que la respuesta que entrega es correcta, esta no le satisface y le pregunta por qué no se escribe como décimas, pero es correcto como centésimas. Posiblemente Lorena no entiende que 12,50 pueda expresarse como 12 unidades y 50 centésimas y también como 12 unidades y 5 décimas

La profesora parece que espera una pregunta de ese tipo, porque le parece interesante, y le explica con la equivalencia entre D y U, pero no logró anticipar que el canje no será lo suficientemente esclarecedor para la alumna y decide explicar el 12,50 con una equivalencia de medidas. Además, la profesora parece interpretar el pensamiento incompleto o emergente de la alumna, ya que Lorena no se refiere a la cifra como décima, sino como decena, pero la profesora logra darse cuenta, a pesar del error de la alumna, que se refiere a la posición en la décima del número y comprender que la dificultad reside en que después del cinco hay un cero.

4. Síntesis

Si observamos el conocimiento matemático que se pone en juego en este episodio y siguiendo investigaciones sobre los números decimales, se sugiere que el inicio del estudio del número decimal requiere trabajar de manera adecuada nociones como la posición de una cifra y su valor. Por eso cuando se aborda el valor posicional de las cifras en un número decimal las décimas, centésimas, milésimas, etc., deberían cobrar significación. Ahora cuando se presentan solo como expresión lingüística (5 décimas, 50 centésimas) el valor de la cifra según su posición puede quedar enmascarada y acarrear dificultades en la comprensión, como le ocurrió a Lorena. Para subsanar estas dificultades se propone utilizar la representación fraccionaria, ya que proporciona medios para la argumentación.

En cuanto al conocimiento para enseñar, en este episodio la profesora manifiesta poseer elementos de él. Con respecto al conocimiento común del contenido, logra escribir el número decimal en lenguaje coloquial lo que ayudará a comprender el pensamiento de Lorena, que fue el desencadenante de esta situación de contingencia. En cuanto al conocimiento especializado, la profesora logra dar un ejemplo para hacer la puntualización matemática correspondiente, para tratar de responder a los por qué que les surgen a los alumnos. El conocimiento del contenido y la enseñanza se evidencia cuando decide parar la clase para responder la pregunta de Lorena, lo que permite profundizar en el concepto matemático que están trabajando. Y por último el conocimiento del contenido y los estudiantes, se ve manifestado cuando interpreta el pensamiento emergente de Lorena y utiliza su duda para profundizar en la matemática.

En resumen, a pesar de que la profesora se encuentra con una situación no planificada, logra gestionar la clase tomando en consideración las ideas de sus alumnos, profundiza en el concepto matemático y luego continúa con lo que tiene planificado sin que se evidencie una discontinuidad en su forma de gestión. Creemos que esto puede tener su fundamento en el conocimiento matemático de los números enteros y en el conocimiento matemático para enseñar que posee la profesora.

IV. **Episodios 1.3 B**: la contingencia se origina por una respuesta incorrecta del alumno a una pregunta y el profesor reconoce lo que dice, pero no lo incorpora en el desarrollo de la clase. Con estas características hemos encontrado solo un episodio.

Número de episodio: 4. Altura de un triángulo	**Curso**: Sexto Primaria	**Profesor**: Amalia
Unidad didáctica: Geometría	**Tema matemático**: Área del Triángulo	**Duración de episodio**: 30 segundos

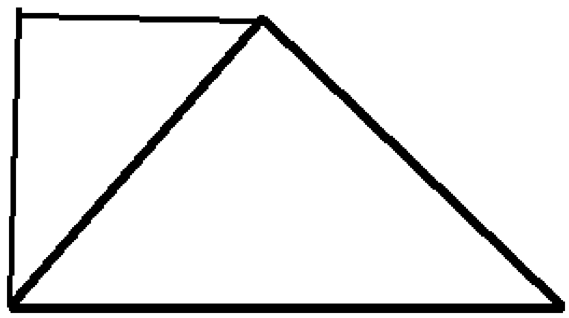
1. Descripción de la clase en la que se encuentra el episodio

La profesora desarrolla la clase recordando las características de los triángulos: tres lados, tres bases, y que por tanto también poseen tres alturas. Les recuerda cómo se calcula el área de un rectángulo y les indica que el triángulo es la mitad de un rectángulo, por tanto también es la mitad de su área. También les recuerda que la altura es la línea perpendicular desde la base hasta el vértice.

Dibuja un triángulo acutángulo en la pizarra y pide que algún alumno salga a dibujar una altura.

Esto es lo que sucede en la clase:

	Tiempo	**Transcripción de la clase**
Profesora	 00:03	A ver, ¿Quién quiere dibujar la altura? A ver Valentina…
Valentina	00:04	[*Valentina sale a la pizarra y dibuja la altura*]

		 *[Reproducción del dibujo que hizo Valentina*]
Profesora	00:24 00:29	A ver, esperen…. [*Lo dice mirando la altura que dibujó la alumna]* Ah…. Ahora van a ver un problema en el ordenador, a ver si esta es la altura o esta no es la altura. A ver, ahora lo miraremos, si es la altura o no es la altura.

2. Desencadenante y respuesta del profesor

Valentina sale a la pizarra respondiendo a la interpelación de la profesora de dibujar la altura del triángulo. Valentina dibuja una línea que comienza en un vértice del triángulo y es perpendicular a la base horizontal. Luego une esa línea perpendicular con el vértice más cercano del triángulo. Mira a la profesora, y ésta no le indica si es o no correcta la altura que dibujó, sino que pospone la respuesta al desarrollo de otra actividad.

La construcción de esa ‘altura’ por parte de la alumna, sorprendió a la profesora, quien se quedó mirando por un momento la construcción y pasó a la siguiente actividad.

En términos de contingencia, la respuesta de la alumna no es la acción esperada por la profesora y la profesora después de unos segundos de duda, no incorpora la respuesta al desarrollo de la clase, sino que comenta que en un momento posterior volverán a trabajar con ese tipo de problemas, pero ahora desde el ordenador. Este desencadenante se enmarca dentro de las ideas de los alumnos.

3. Gestión del profesor

a) Conocimiento matemático movilizado en el episodio

En clases anteriores a la que corresponde este episodio, la profesora indicó que la altura correspondía a la “línea perpendicular desde un vértice hasta el lado opuesto”, la cual correspondería a una definición en términos de construcción de la altura, sin necesariamente asignarle un valor numérico correspondiente a su medida. Si bien esta definición está cercana a la construcción, en las clases no hubo utilización de instrumentos para la construcción de la altura.

La altura que dibujó Valentina es un segmento de medida equivalente a la altura, pero trazada desde uno de los vértices de la base, y por tanto no corresponde a lo enseñado por la profesora.

b) Conocimiento para enseñar del profesor

- *Conocimiento común del contenido, CCK.*

En este caso el CCK no está desarrollado explícitamente durante el episodio analizado. Previamente la profesora había dibujado alturas en triángulos, pero en esta tarea no apunta a que esa no es la altura que ella había previamente definido (la recta perpendicular desde un lado al vértice opuesto).

En este caso demostrar que posee el conocimiento común, sería que la profesora reconoce, identifica y construye la altura de un triángulo cualquiera.

- *Conocimiento especializado del contenido, SCK*

En cuanto al Conocimiento Especializado del Contenido, en este episodio podría visualizarse cuando la profesora evaluara la plausibilidad y veracidad matemática de la altura dibujada por la alumna, pero en este caso no es así. La profesora observa la altura que dibujó la alumna y se muestra dubitativa y termina optando por no indicar si la altura es correcta o no.

- *Conocimiento del contenido y la enseñanza, KCT*

En el caso de esta situación de contingencia, la profesora pudo demostrar su manejo de este conocimiento en la decisión de no utilizar la respuesta de la alumna cuando construyó la altura. Además pudo hacer una pausa en su clase para aclarar lo que se entendía por altura de un triángulo, además de comparar lo que dibujó la alumna con la definición que ella había entregado previamente.

- *Conocimiento del contenido y los estudiantes, KCS*

Por último, el Conocimiento del Contenido y los Estudiantes, de la intervención de Valentina, la profesora no anticipa si el dibujar la altura puede ser una tarea compleja para los alumnos, además de que no se visualiza que interprete el pensamiento de la alumna cuando dibuja esa recta perpendicular a la base y pasando por un vértice como una altura del triángulo.

4. Síntesis

Este episodio es una situación de contingencia particular, el único donde un alumno da una respuesta incorrecta, pero interesante al ser un segmento de igual medida a la altura y la profesora no le indica su error ni le pide que explique por qué ese segmento es una altura del triángulo, pasando a la actividad siguiente.

El conocimiento matemático que está presente en este episodio, si bien es concreto en cuanto a su definición, al no ser tratado de manera más rigurosa en clase, pudo crear confusión en el aprendizaje que la alumna adquirió de él. La profesora se muestra dubitativa en cuanto al producto entregado por la alumna, por lo que en este episodio no podemos asegurar o descartar que la profesora maneje el conocimiento matemático de manera suficiente.

En cuanto al conocimiento matemático para enseñar, de la actuación de la profesora en este episodio no se evidencia que exista un manejo del conocimiento común del contenido. Respecto del conocimiento especializado no hay muchas posibilidades de verificar si la profesora lo maneja, ya que al ser un episodio de corta duración no tuvo la oportunidad de demostrarlo. En cuanto al conocimiento del contenido y la enseñanza no hay muchas evidencias de su utilización, salvo en la elección del ejemplo que utiliza para que dibuje la altura del triángulo. Finalmente, en relación con el conocimiento del contenido y los estudiantes, no hay muchas oportunidades de observarlo en este episodio.

Quizás lo más interesante en este episodio hubiera sido indagar en el pensamiento de Valentina y en su forma de dibujar la altura, y de esta manera contrastar el concepto de altura que la alumna manejaba. La indagación en el desarrollo del pensamiento de los alumnos, a los profesores nos entrega valiosa información sobre su aprendizaje. Por otro lado, dejar abierta la posibilidad de que la altura dibujada sea correcta o no, permite que el resto de los alumnos contraste sus propios conocimientos y en momentos posteriores de la clase retomar la discusión de la actividad.

Cuando se produce una contingencia desencadenada por una respuesta incorrecta a una pregunta del profesor, es una entrada interesante para analizar la gestión que los profesores desarrollan en sus clases, y así reconocer cuales son las debilidades y fortalezas de su propia formación.

V. **Episodio Ideas del profesor**: la contingencia se origina por la propia reflexión del profesor donde se da cuenta que la actividad no funciona como espera y decide cambiarla. Con estas características solo hemos encontrado un episodio simple.

Número de episodio: 11. Problema de las pelotas	**Curso**: Sexto primaria	**Profesor**: Amalia
Unidad didáctica: Proporcionalidad	**Tema matemático**: Proporcionalidad	**Duración de episodio**: 1 minutos 15 segundos

1. Descripción de la clase en la que se encuentra el episodio

Este episodio ocurre en una clase donde están trabajando con magnitudes directamente proporcionales.

Con el fin de resolver ejercicios que involucran estas magnitudes, les propone a los alumnos una situación que relaciona el número de pelotas y el precio a pagar por ellas.

El ejercicio es el siguiente: “Tres pelotas cuestan 4 euros, ¿Cuánto cuestan 15 pelotas?”

Y la profesora construye la siguiente tabla en la pizarra

Pelotas	3	15
Precio	4	

Para tratar de resolver ejemplifica con otra situación, para que el reducir a la unidad el resultado sea un número entero: “Si dos pelotas cuestan seis euros, ¿cuánto cuesta una pelota?”

A esta situación los alumnos le dan rápidamente la respuesta por lo que vuelve al problema inicial, que es donde se produce el desvío de lo planificado y cambia completamente el problema y ya no volverá al inicial

	Tiempo	**Transcripción del episodio**
Profesora	 00:02	A veces puede pasar como aquí ¿Aquí qué pasa?
Alumno	00:04	Es 1,5
Profesora	00:10	Si tres pelotas valen cuatro euros, entonces aquí, ¿qué vale una pelota?
Alumno	00:12	1,5!
Profesora	00:15 00:22 00:30	A ver ahora, habría que hacer, habría que hacer, dividir Dividir, ¿de acuerdo? $4\vert\underline{3}$
Alumna	00:32	Y sobra uno
Profesora	00:34 00:45	Claro Entonces aquí no da exacto No da exacto, ¿de acuerdo? Y entonces habría que multiplicar por el número de pelotas Fíjense que otra manera de hacer esto

	00:50	Porque cuando es así más complicado, lo que pueden hacer es lo siguiente ¿Se acuerdan de las fracciones equivalentes?
Alumnos	00:52	Sí
	00:55	Si tres pelotas valen 15 euros, cuatro pelotas, ¿cuánto valdrán? $\frac{3}{4} = \frac{15}{}$
Alumnos	01:00	20!
Profesora	01:05 01:15	Ay, no. Tres pelotas cuatro euros $\frac{3}{4} = \frac{4}{}$ Es que claro, les puse un ejemplo un poco difícil Fíjense 3 pelotas, valen 6 euros, entonces, ¿cuánto cuestan 7 pelotas?

2. Desencadenante y respuesta del profesor

La profesora y los alumnos están tratando de resolver el problema del costo de las pelotas reduciendo a la unidad, pero la profesora se da cuenta que el resultado no es entero y además el decimal es ilimitado. Luego intenta explicarlo mediante fracciones equivalentes, y se da cuenta que tampoco le funciona, por lo que decide cambiar el problema a uno donde sí se puede reducir a la unidad.

Aquí el desencadenante de la contingencia está dado por las Ideas del Profesor, es decir, la profesora considera que el ejercicio es demasiado difícil y que no servirá para los objetivos de la clase, y por ello decide cambiarlo.

3. Gestión del profesor

a) Conocimiento matemático movilizado en el episodio

Este episodio es un problema de proporcionalidad que la profesora quiere resolver o por reducción a la unidad o mediante fracciones equivalentes. La reducción a la unidad considera que no tiene mucho sentido porque la división resulta un número decimal no limitado (cuatro entre tres). Luego intenta mediante fracciones equivalentes, pero considera que tampoco es un procedimiento adecuado, por lo que cambia de problema, donde ahora sí la reducción a la unidad le entregará un resultado entero.

b) Conocimiento para enseñar del profesor

- *Conocimiento común del contenido, CCK.*

En este caso el CCK la profesora sabría cómo resolver el problema, aunque durante el episodio analizado no lo realiza. Lo que nos hace intuir que sabría resolverlo es que más que el resultado, la profesora quiere mostrar un procedimiento que le permita resolver en diferentes situaciones.

- *Conocimiento especializado del contenido, SCK*

El Conocimiento Especializado del Contenido, en este episodio podría visualizarse cuando la profesora quiere reducir a la unidad y observa que el resultado no es entero; entonces busca una manera alternativa de resolver mediante fracciones equivalentes, lo cual lo pudo realizar, pero no logra hacerlo y decide cambiar de problema en vez de explicar matemáticamente cómo se resolvía mediante fracciones equivalentes.

- *Conocimiento del contenido y la enseñanza, KCT*

En el caso de esta situación contingente, la profesora demostró su manejo al evaluar la desventaja de utilizar la reducción a la unidad en un problema que le entregaba un resultado decimal. Y muestra una debilidad de este conocimiento cuando decide no utilizar la respuesta correcta que le da un alumno al hacer la fracción equivalente a ¾, cuando el resultado era 20 euros.

- *Conocimiento del contenido y los estudiantes, KCS*

Este contenido se manifiesta de manera débil, porque la profesora no logró anticipar si la tarea era fácil o compleja, ni pensar en lo que los alumnos podían resolver.

4. Síntesis

Este episodio es una situación de contingencia diferente a las anteriores, ya que el desvío de la agenda es producto de las ideas de la profesora y no de un alumno.

Podríamos hipotetizar que la profesora no resolvió el ejercicio con anterioridad, y que por eso no detectó que reducir a la unidad le entregaba un resultado decimal. Además cuando busca una manera alternativa de resolución mediante fracciones equivalentes, si bien es un procedimiento que le permite llegar al resultado de manera directa, ella considera que tampoco es pertinente y por lo tanto cambia el problema.

Este cambio de problema puede deberse a la dificultad de responder a una situación que no se había planificado anteriormente y la inmediatez que se asocia a la enseñanza en la sala de clases. Además, como reconocen investigadores (Rowland, Turner, Thwaites y Huckstep, 2009), es muy difícil atender a todas las interacciones de los estudiantes mientras se enseña, lo cual pudo ser un factor para que la profesora no profundizara en la forma alternativa de resolución de la proporcionalidad y decidiera cambiar de problema.

4.3 Episodios complejos

Como mencionamos anteriormente en este mismo capítulo, los episodios complejos son episodios más extensos que los anteriores, ya que la multiplicidad de interacciones entre el profesor y los alumnos y entre los alumnos, propician la generación de numerosas contingencias, a menudo muy seguidas en el tiempo y hacen difícil la gestión del episodio y la finalización de la tarea que origina el episodio. A pesar de esta complejidad hemos optado por no recortar estos episodios, porque en todos los casos consideramos que se perdería la riqueza, tanto de la gestión que realiza el profesor para resolver cada una de las contingencias y volver a la tarea inicial, como de las interacciones para la resolución de la tarea. Además, siguiendo nuestra propia definición inicial de episodio, nos interesa cómo el profesor puede gestionar la clase para resolver el problema propuesto, y por lo tanto, el episodio finaliza cuando la tarea se da por terminada y se pasa a una nueva tarea.

Para el análisis de la complejidad de estos episodios hemos seguido las ideas fuerza que motivaron nuestro análisis de los episodios simples, es decir, describimos la clase en función de la tarea y luego describimos el desencadenante que generó el episodio. Lo que hemos considerado que debemos desarrollar con mayor profundidad es la caracterización de cada uno de los desencadenantes y cómo ese desencadenante ha influido en la gestión que realizan los docentes a través del conocimiento matemático y del conocimiento para enseñar matemáticas.

Al igual que en el análisis de los episodios simples, la primera parte se mantiene, es decir, elaboramos la ficha de cada uno y describimos tanto el episodio como la contingencia que genera cada uno de estos cuatro episodios, a la que hemos denominado contingencia inicial. Las contingencias que se producen dentro del episodio las hemos denominado contingencias anidadas.

La segunda tarea que realizamos fue identificar las diferentes contingencias anidadas con sus respectivos desencadenantes. Para esto, hemos agregado a la transcripción una columna donde se incluye el número de línea de la transcripción y que nos permitirá identificar la interacción donde se manifiesta el desencadenante. Caracterizamos cada uno de los desencadenantes de acuerdo al tipo de contenido que se está movilizando en él y lo relacionamos con la tarea propuesta.

La tercera tarea para el análisis de los episodios complejos fue identificar la gestión que cada profesor lleva a cabo con la finalidad de visualizar el desencadenante de la contingencia y la posterior gestión del profesor, para así continuar con la tarea propuesta y retomar la clase planificada con anterioridad.

Para la descripción y el análisis de la gestión hemos seguido el desarrollo de las ideas de Rowland, et al. (2009). Según estos autores existe una variedad de posibilidades y de herramientas que están a disposición del profesor con la finalidad de responder a una situación de contingencia.

Del desarrollo de la contingencia expresado por Rowland, et al., obtuvimos y hemos sistematizado las siguientes acciones como parte de la gestión de la contingencia:

- Intercambio de ideas entre profesor y alumno, o entre el profesor y un grupo de alumnos.
- Pausa del profesor para pensar en las implicaciones de responder, sugerir o repreguntar, antes de responder efectivamente la idea de un alumno.

- Responder a todas las dudas, preguntas y/o intervenciones de los alumnos.

Estos autores también destacan, que es importante tener en cuenta que realizar este tipo de análisis es una ventaja, porque no tenemos la presión ni la necesidad de responder a la inmediatez de la sala de clases (pág. 131). Por esto consideran que se deben tener en mente ciertas características de la enseñanza durante las situaciones de contingencia:

- El reconocimiento de la idea de un alumno es una acción meritoria.
- A veces es posible que un profesor simplemente no responda a todas las preguntas en profundidad por una cuestión de tiempo.
- Una intervención hábil del profesor permite al alumno crear nuevas conexiones con su propio conocimiento.

4.3.1. Análisis de los episodios complejos

Recordemos que se han identificado 3 episodios complejos, que son los que analizamos a continuación.

Desencadenante: ***Ideas de los alumnos***

I. Este primer episodio tiene como característica que la contingencia inicial se produce por la intervención espontánea de un alumno a una tarea y la profesora responde reconociendo lo que dice el alumno, e incorporándolo al desarrollo de la clase.

Número de episodio: 7. Medición del libro	**Curso**: Sexto primaria	**Profesor**: Amalia
Unidad didáctica: Geometría	**Tema matemático**: Medición de longitudes	**Duración de episodio**:

1. Descripción de la clase en la que se encuentra el episodio

La clase comienza con la profesora mostrando a los alumnos con qué herramientas se puede medir. Además les indica que la unidad de medida fundamental es el metro y con las transformaciones de unidad, apoyado con la siguiente escala:

Km hm dam m dm cm mm

Luego de esto, realizan ejercicios donde hay medidas que hay que expresar en una unidad distinta.

Para continuar con la clase, calcularán el perímetro del libro de matemáticas, para lo cual les pide que midan los costados del texto. La situación de contingencia se genera cuando los alumnos miden y se producen diferencias en las medidas.

	Línea	**Transcripción del episodio**
Profesora	1	¿Medirán los cuatro costados del libro?
Alumnos	2	No….Dos
Profesora	3 4 5	Dos, porque es un rectángulo… Tu apuntas en la libreta y haces las operaciones [*le indica a un alumno]* ¿Cuál es el largo? El largo más pequeño
Alumnos	6	23…28…28,9….28,6 [*indican en voz alta*]
Profesora	7	¿No todos tienen el mismo libro que les da medidas diferentes?
Alumnos	8	28,6….24…28,8!
Profesora	9 10 11 12 13	A ver, veamos Valeria [*la profesora toma la cinta de medir y mide un* *lado del libro*] No, porque tú estás midiendo el forro. [*le indica a un alumno]* El libro mide….28,7. ¿Y la otra cuánto mide?
Alumnos	14	23
Profesora	15	Vale, ahora calculen el perímetro
Alumnos	16	¿Cómo?
Profesora	17	A ver, pueden hacerlo de dos maneras
Andrés	18	Multiplicar por 2
Profesora	19	O sumar los cuatro costados o multiplicar por dos, ¿no?

	20 21 22 23	¿Cómo sabes cuánto miden los cuatro lados? O sumas este más este más este y más este o si aquel lo multiplicas por dos, este lo multiplicas por dos y lo sumas, ¿a qué es lo mismo? No calculen, no tienes que calcular nada ahora….
Andrés	24	Son cien
Profesora	25	Estas midiendo el forro
Andrés	26	No
Profesora	27	¿Quién va a salir a hacerlo a la pizarra?
Andrés	28	Yo
Profesora	29	El perímetro del libro…., ¿quién va a salir a hacerlo a la pizarra?
Sofía	30	Yo
Profesora	31 32	La Sofía. Venga calcula el perímetro del libro
Sofía	33 34 35	28,8 x [*Sofía borra el pizarrón*] 28,02 [*Sofía nuevamente borra el pizarrón*]
Profesora	36 37	¿Cuánto medía? 28,7
Alumnos	38	28,6…28,5….28,7….
Profesora	39	Bueno, es igual
Sofía	40 41	28,7 x 2
Profesora	42 43 44 45 46 47 48	Son 28 centímetros…a ver, miremos… Yo no sé…siempre…a ver, escuchen si son 28,7 centímetros puede decirse que la unidad de centímetros…miren si yo escribo aquí Km hm dam m dm cm mm Siempre la coma está…fijémonos, la coma está aquí en la unidad…entonces el 8 está aquí porque son centímetros. Por tanto ¿el 2 qué será?
Alumnos	49	Decímetros
Profesora	50	Decímetros y el 7?
Alumnos	51	Milímetros
Profesora	52 53	Milímetros, ¿está claro? Siempre la coma está donde dice la unidad si son centímetros el 8 son centímetros y el 7 milímetros.
Sofía	54 55	28,7 x 2

	57,4
Profesora	A ver, son importantes las unidades para saber que cada cosa es cada cosa y si algunos son centímetros y ahora veremos que el 2 son los decímetros {}
Sofía	23 x 2 46
Profesora	Ahora, ¿cuánto da el perímetro del libro?
Alumno	62
Profesora	¿Cómo que 62? Se tienen que sumar los cuatro lados no? Sumaremos los cuatro lados
Sofía	57,04 46,00 103,04
Alumna	Sofia tienes cero cuatro ahí…es solo cuatro y cuarenta y seis
Sofía	57,4 46,0 103,4
Profesora	A ver, muy bien…103,4 ¿qué es? ¿qué será eso? ¿en qué están todas las medidas?
Sofía	Centímetros
Profesora	Centímetros ¿cómo las pondrías?
Sofía	Km hm dam m dm cm mm 2 8, 7 1 0 3, 4
Profesora	Muy bien, por tanto, ¿qué tenemos ahora 103? Un metro y tres centímetros. Pasemos el 103,4 centímetros a metros, ´¿cuánto dará? A ver pasemos los 103,4 cm a metros, ¿quién lo hará en la pizarra? Venga Marina ¿Qué hay que hacer para pasar de centímetros a metros?
Marina	Dividir
Profesora	Sí, venga Marina
Marina	103,4 | 100
Profesora	Marina, se hace directamente tachando, se corre la coma, no se hace la división, no dividimos así y así 103,4 : 100 = ¿Qué hacemos para dividir por cien? ¿Qué hay que hacer para dividir? Si

	92	tienen una coma que hacen para dividir por cien?
Alumnos	93	Mover la coma….hacia la izquierda
Profesora	94	Entonces mueve la coma hacia la izquierda, y que da?
Marina	95	1,03 4 :100= 1,034 m
Profesora	96 97	Si los lados del libro fueran rectas medirían un metro coma treinta y cuatro,¿ vale?

2. Desencadenante inicial y desencadenantes anidados y respuesta del profesor

El desencadenante inicial de este episodio está originado por las ideas de los estudiantes: la profesora hace una pregunta al curso y los alumnos dan diferentes respuestas. La profesora reconoce estas diferencias:

Alumnos	6	23…28…28,9….28,6 [*indican en voz alta*]
Profesora	7	¿No todos tienen el mismo libro que les da medidas diferentes?

Los alumnos entregan respuestas diferentes a la medida del libro de texto, y ante esta situación la profesora duda si realmente están midiendo el mismo libro y opta por medir ella el libro y dar un resultado que es el considerado correcto para seguir con la tarea que es calcular el perímetro del libro. En lugar de seguir con el cálculo del perímetro decide realizar con los alumnos la medición, para posteriormente seguir con la tarea encargada.

La clase sigue, pero antes de hacer cálculo que era la tarea inicial, se producen nuevas contingencias que se describen a continuación.

Desencadenantes anidados:

Línea	**Desencadenante**
6	Desencadenante inicial: El alumno responde a una pregunta de la profesora y esta incorpora la respuesta a la clase
36	Alumno responde a una pregunta de la profesora y esta ignora
42	Profesora decide cambiar la tarea de la clase
64	Alumno responde incorrectamente y la profesora reconoce lo que dice, pero no lo utiliza

La clase sigue con el valor que la profesora asignó al largo del libro de texto y permite a que algún alumno o alumna pase a la pizarra a resolver el cálculo del perímetro, tratando de retomar la tarea del cálculo. En esta acción, la alumna Sofía, no parece tener claro aún cual sería es la longitud del libro que se considerará para el cálculo. La profesora le indica la longitud (28,7) y algunos alumnos siguen indicando otros valores. Esta vez la profesora los escucha, pero no incorpora la dificultad al desarrollo de la clase y dice, “Bueno, es igual”. Esta contingencia es generada por las ideas de los alumnos, donde la profesora los escucha, pero no incorpora al desarrollo de la clase.

Alumnos	38	28,6…28,5….28,7….
Profesora	39	Bueno, es igual

Luego de esto, Sofía sigue calculando y la profesora le interrumpe, generándose un nuevo desvío de la clase, pero esta vez dada por la misma profesora. Al parecer le interesa destacar que el uso de los decimales en la medición de la longitud del libro indica que están utilizando diferentes unidades de medida. Este tipo de desencadenante está dado por las Ideas del profesor, donde reflexiona que es necesario hacer una puntualización de un concepto para seguir la tarea del cálculo del perímetro del libro:

Profesora	42 43 44 45 46 47 48	Son 28 centímetros…a ver, miremos… Yo no sé…siempre…a ver, escuchen si son 28,7 centímetros puede decirse que la unidad de centímetros…miren si yo escribo aquí Km hm dam m dm cm mm Siempre la coma está…fijémonos, la coma está aquí en la unidad…entonces el 8 está aquí porque son centímetros. Por tanto ¿el 2 qué será?

Retoma el cálculo del perímetro del libro, donde los alumnos están realizando los cálculos parciales del doble de las medidas de ancho y de largo. Cuando ya han realizado esos cálculos, pregunta a los alumnos cuál es el perímetro y algunos alumnos responden:

Alumno	64	62
Profesora	65 66	¿Cómo que 62? Se tienen que sumar los cuatro lados no? Sumaremos los cuatro lados

Esta contingencia se genera cuando un alumno responde de manera incorrecta al cálculo del perímetro, la profesora lo escucha, le replica, pero no incorpora el comentario al desarrollo de la clase.

Luego la profesora nuevamente pide que los alumnos se fijen en el cambio de unidades de medida y se da por terminada la tarea, encontrando cual es el perímetro del libro.

3. Gestión del profesor

a) Conocimiento matemático movilizado en el episodio

En este episodio se producen desencadenantes de naturaleza distinta; por un lado se generan por ideas de los alumnos, pero también por las propias ideas de la profesora.

La tarea principal de este momento de la clase era el cálculo del libro de texto, para lo cual utilizan una regla graduada como herramienta. La utilización de instrumentos para la comprensión de la medida y de la cantidad de la medida, es un elemento fundamental.

En este caso los alumnos al realizar la medición entregan diferentes cantidades de medida para un mismo objeto (largo del libro de texto). En este caso la medida de la magnitud del libro de texto no está dada en números enteros, como los utilizados en la regla graduada, sino que existen subdivisiones entre los números enteros (las décimas). Es en estas subdivisiones donde los alumnos no observan la misma cantidad, por lo que cuando la profesora pregunta por la magnitud de la medida del libro se producen variadas respuestas.

Una de las complejidades que se presentan en la medición es la utilización de instrumentos pertinentes y además la utilización adecuada de esos instrumentos. En este caso la profesora atiende a la diferencia que los alumnos manifiestan entre ellos, y para solucionar esas diferencias decide que ella debe medir y entregar una medida para todos los alumnos. Esto le permitirá que todos los alumnos obtengan una misma cantidad de medida del perímetro del libro.

Si bien la tarea era encontrar el perímetro del libro, la profesora se centra en elementos anexos a ese cálculo como es que debe existir una única de medida, sin entrar en elementos que son propios de la medición y de la utilización de instrumentos como es la exactitud de la medida. Además, ella misma desvía el foco de la tarea durante el desarrollo cuando hace referencia al cambio de unidades de medida y la transformación según la escala de transformación de medidas inicial.

Si analizamos la gestión del conocimiento matemático utilizado podemos observar que la profesora pasa por diferentes conceptos (medición, unidades de medida, magnitud de la longitud) durante esta tarea, lo cual desvía el foco del cálculo y puede ser una complicación extra para los alumnos y su aprendizaje.

b) Conocimiento para enseñar de la profesora

Este conocimiento lo analizamos siguiendo las ideas de la gestión de Rowland y del MKT de Ball.

En primer lugar podemos destacar que la profesora permite el intercambio de ideas entre ella y los alumnos, aunque la última palabra la tiene la profesora.

Cuando se producen diferencias entre lo que espera la profesora y los alumnos realizan, no se producen suficientes espacios de tiempo para pensar en las implicaciones de responder o de sugerir acciones antes de ir directamente a la idea de los alumnos; la clase parece ir contra el tiempo y no tener espacio para reflexionar sobre las ideas y las respuestas que los alumnos entregan. Del mismo modo, al parecer por esta falta de tiempo, la profesora no logra responder a todas las dudas o intervenciones de los alumnos mientras resuelven la tarea.

En cuanto al conocimiento para enseñar del MKT:

- Conocimiento común del contenido.

En este episodio la profesora muestra que sabe resolver la tarea, es decir, calcular el perímetro del libro.

- Conocimiento especializado del contenido.

En este episodio no pudimos observar que la profesora utilizara este conocimiento. No se presentó la posibilidad de responder a preguntas de por qué, o de dar ejemplos o explicaciones matemáticas.

- Conocimiento del contenido y la enseñanza

Respecto de este conocimiento, este se manifiesta cuando la profesora decide qué contribución de los alumnos utilizar y cuando utilizarla. Aunque pudo hacer mayores pausas para aclarar las diferencias de medidas entre los alumnos y entre ella y los alumnos y así profundizar en los conceptos de medición y de medida.

- Conocimiento del contenido y los estudiantes

Este conocimiento se encuentra desarrollado de manera débil en este episodio. La profesora no logró anticipar la dificultad de la utilización del instrumento de medida, además de la complejidad del cálculo del perímetro con unidades decimales.

4. Síntesis

Este episodio se destaca que a veces las contingencias no son originadas solo por las ideas de los alumnos, sino que también intervienen las ideas de la profesora para desviarse de la tarea planificada.

La contingencia inicial demuestra la complejidad de la medición y de la medida para el cálculo de, en este caso, perímetro del libro de texto. Las continuas diferencias de medidas entre los alumnos nos ha permitido evidenciar que es un concepto que quizás debe trabajarse desde tareas más cercanas a la realidad de los alumnos para motivar discusiones que permitan profundizar en las ideas de medición y de su utilidad para el cálculo de perímetros, áreas y/o volúmenes.

En cuanto a la gestión de la profesora, del análisis podemos concluir que es importante que una gestión debe dedicar tiempo a las dificultades que presentan los alumnos. Muchas veces los profesores se encuentran presionados por el tiempo debido a la cantidad de contenidos que deben tratar con los alumnos, lo que puede influir en la gestión de la enseñanza que realizan. Esto puede justificar la falta de profundidad en el tratamiento del conocimiento especializado del contenido, donde no evidenciamos la utilización de conceptos matemáticos que pudieron ayudar a los alumnos a realizar un aprendizaje más eficaz.

II. **El segundo episodio complejo,** tiene como característica que la contingencia inicial se produce por la intervención de un alumno, pero donde entrega una estrategia de resolución incorrecta. La profesora escucha al alumno y decide incorporar su aportación al desarrollo de la clase

Este episodio se desencadena luego de que la profesora presentara la tarea que deben resolver durante la clase, a lo que un alumno (Jorge) interviene indicando cómo el la resolvería, estrategia que la profesora no espera.

Número de episodio: 12. Números enteros	**Curso**: Primer Año de Enseñanza Secundaria	**Profesor**: Gabriela
Unidad didáctica: Números enteros	**Tema matemático**: Operatoria de enteros con paréntesis	**Duración de episodio**: 16 minutos, 47 segundos

1. Descripción de la clase en la que se encuentra el episodio

La clase comienza con la revisión de problemas que la profesora extrae del libro de texto del estudiante.

Comienzan resolviendo el ejercicio 3.22:

"Elimina los paréntesis y calcula.

$$(-8) - (-4) + (-6) - (+2) - (-9) =\text{"}$$

Para resolverlo les recuerda que están trabajando con la regla de los signos:

$$+\bullet+=+$$
$$+\bullet-=-$$
$$-\bullet+=-$$
$$-\bullet-=+$$

Indica a sus alumnos que utilicen estas reglas para resolver el ejercicio y que, para calcular el resultado final, deben hacer como si "fuera una batalla", donde los números con signos positivos y negativos corresponden a soldados de un tipo y soldados de otro tipo.

Este tipo de ejercicios tienen como característica que desarrollan un procedimiento mecánico de la aplicación de la regla de los signos para la eliminación de los paréntesis.

La profesora insta a quitar los paréntesis, pero Jorge no logra entender por qué deben quitarse los paréntesis, si él puede llegar al resultado correcto sin necesidad de hacerlo.

	Línea	**Transcripción del episodio**
Profesora	1	Esto lo tienen
	2	Las vimos el otro día:
	3	Cuando tenemos un más y un más seguidos, ¿el resultado era?
Alumnos	4	Más
Profesora	5	Más, perfecto.
	6	Y cuando era un signo más y uno menos, es como si subo, pero en
	7	sentido contrario, en fin, un rollo que nosotros sabemos que eso
	8	se soluciona diciendo como si se fuera a marchar.
	9	Después cuando tenían dos signos menos aquí, ahora la solución
	10	era subir. Y como era que se habían de recordar estas reglas:
	11	cuando tenías dos signos combinados iguales el resultado final era
	12	signo más y cuando tenías uno de cada al final era signo menos.
	13	¿Todos me entienden?
	14	Esto es como si fuera una batalla, ¿no?
	15	Ahora vemos los soldados de un tipo y los soldados de otros, y
	16	miramos la batalla final a ver qué es lo que pasa.
	17	El Jorge nos decía que no veía en esta batalla donde estaba la
	18	operación matemática.

	Ahora (-8) – (-4) + (-6) – (+2) – (-9) = Para resolver estos paréntesis, yo tengo claro que este paréntesis nos está molestando y tenemos dos signos seguidos, [*Jorge levanta la mano*] ¿si, Jorge?
Jorge	Pero yo lo veo mejor así
Profesora	¿Lo ves mejor así?
Jorge	Porque veo que la operación está sin paréntesis
Profesora	Vale, y ¿qué propones entonces? Cuando haces el (-8) - (- 4)? ¿Cuál sería tu solución? Imagínate Jorge, que el problema solo fuera este. Imagínate. Bruno espera, estamos con Jorge. Cuéntamelo, ¿cuál sería el resultado de hacer a menos ocho quitarle?, porque le estoy quitando eh
Jorge	Pues sería menos cuatro
Profesora	A menos ocho le quito menos cuatro y el resultado es
Jorge	Menos cuatro
Profesora	Y ¿por qué?
Jorge	Porque le quitas a ocho cuatro
Profesora	A ocho no, porque yo no tengo ocho
Jorge	A menos ocho le quitas…
Lorena	No, porque estás en…estás en el sótano ocho y tienes que subir cuatro y te quedas en el menos cuatro
Profesora	¿Y por qué subes cuatro?, porque así fue como lo explicamos el otro día
Lorena	Porque son dos signos menos y te dice que es más, o sea que tienes que subir no bajar, no es porque sea resta
Leticia	¿Pero si lo hacemos en la vida real?
Alumnos	No se resta
Profesora	Ah, ¿No?
Leticia	No, porque estás en el menos ocho y dice que bajes menos cuatro…
Profesora	Oh!, pero es que aquí es el truco, aquí es el truco que nos discutimos la clase del lunes. Aquí es el truco vamos a imaginar por un momento –me gusta que haya salido esta discusión- vamos

	55 56 57 58 59 60 61 62 63 64	a imaginar por un momento que tuviéramos el menos ocho menos el menos cuatro, así como empezamos esta discusión y lo que ha dicho Lorena me parece genial. En realidad Lorena no te dice que estás en el piso menos ocho, te acuerdas que había como dos etapas, estaba en el menos ocho, entonces o bien bajaba y voy para allá o bien subía, voy para allá. En este caso bajaría, porque este es el que me indica, ese es el que me está indicando [la profesora muestra con el dedo el signo menos entre el (-8) y el (-4)] lo que me indica bajaría, pero bajaría en la dirección contraria
Jorge	65	¿Por?
Profesora	66	Porque tengo otro signo menos
Jorge	67	Entonces subirías
Alumnos	68	…entonces subiría….
Profesora	69	Tranquilos todos, estamos con Leticia
Álvaro	70	¿Y en la vida real, entonces?
Profesora	71 72 73 74 75 76 77 78	En la vida real te mareas bien te lo digo yo. Aparte de eso en la vida real es lo que ha dicho Lorena. No hay tantas indicaciones, en la vida real es como si alguien te estuviera dando muchas indicaciones, baja en la dirección contraria, en la vida real no dices eso. En la vida real no dices baja en la dirección contraria, cierto. (Álvaro, te estoy viendo ahora mismo voy por ti) Dices sube, que es lo que ha dicho Lorena Álvaro, ¿qué?
Álvaro	79	¿Se puede poner el resultado directamente?
Profesora	80 81 82	Por supuesto que sí, pero nosotros sabes vamos por etapas. Entonces Lorena en lugar de hacer baja en la dirección contraria o sube en……
Lorena	83	Directamente dices, subes
Profesora	84	Directamente dices subes
Lorena	85	Porque para decir baja, pero en la dirección contraria
Jorge	86	Pero, ¿cómo vas a subir bajando?
Lorena	87	Pero cuatro te quedas…
Ana, Ismael, Jorge	88 89 90	¿Cómo vas a subir bajando? Porque si tú a menos ocho le restas….. no le restas cuatro

Profesora	Ana, Ismael, Jorge, está genial que hablemos, pero tenemos que hablar ordenadamente. Jorge acaba tu argumento, después tiene la palabra Ana y después tiene la palabra Ismael
Jorge	Yo no entiendo porque si le restas, porque ahí hay un signo de restar subes
Profesora	Porque no le restas, es decir, le restaría Jorge, si le restara algo en la dirección….. Vamos a ver, resto, sí estoy restando por lo cual cuando resto es que bajo, ¿si? Baja, ahora estoy aquí, he dicho baja estoy solamente aquí he dicho que estoy aquí, pero baja en la dirección contraria, si tú bajas en la dirección contraria vas para arriba
Jorge	No, porque bajas
Profesora	No, porque bajas…no porque bajas en la dirección contraria
Jorge	Bajar en la dirección contraria es bajar por las escaleras de la derecha
Profesora	No, solo hay dos direcciones…ahora estoy viviendo en un espacio de dos dimensiones, no tengo tres, solo tengo estas, dirección hacia abajo, dirección hacia arriba. Entonces, nosotros el primer día que hablamos de esto decíamos, baja hacia abajo, baja hacia arriba, baja para aquí…en este caso te dicen baja … es como si te dieran dos órdenes, que eres un robot, te dicen baja en la dirección contraria. Vamos a ver Jorge si yo tuviera esto (-8) –(Menos ocho y me dijeran baja…me dijeran baja ahora tienes dos direcciones para escoger. Me dicen, ahora de momento me han dicho baja, pero ahora tengo dos direcciones para escoger: baja en la dirección de abajo, en la dirección de los negativos o baja en la otra dirección en la dirección contraria. Creo que estaban Ismael y Ana antes.
Ana	Déjame ver si entiendo
Profesora	A ver si nos ayudamos entre todos
Ana	En el menos ocho sabemos que estamos en el piso menos ocho y después entre los dos paréntesis hay un menos y después en el

	cuatro hay otro menos delante y mira bien la regla hay dos menos, entonces hacen un más
Jorge	Lo que no entiendo es porqué dos menos hacen un más
Alumnos	Porque sí, porque hay un paréntesis Porque sí Si tú ves dos números seguidos tu sabes la regla
Ana	Si es que pasa como en inglés no tiene explicación, pues es igual
Profesora	Perdona, pero ahí interrumpo yo, si es que tiene un poquito de explicación, lo que pasa es que no es fácil, pero tiene su explicación
Jorge	¿Cómo el paréntesis y las escaleras?
Alumnos	¿Gloria el paréntesis qué indica? No puedes subir bajando Es que puede estar apuntando para allá, entonces puede subir Es que es un lío Yo creo Gloria que físico haciéndolo lo entenderíamos mejor, ¿eh? Haciendo la escala eso de menos uno, menos dos…. La de la escalera O lo de antes eso de baja
Profesora	Bien, estamos
Jorge	Yo lo que no entiendo si el menos es una operación, entonces eso no es una operación.
Profesora	Silencio, recojo su petición de ir a las escaleras. La recojo y la meditaré. La recojo y la meditaré. Vamos a hacer la clase que tenemos hoy preparada entonces depende un poco de todos. Depende un poco de todos. Vamos a hacer la clase que tenemos preparada, además que está Mario con la cámara y para el también supone un trasvase y hasta allí. Vamos a hacer la clase preparada, vamos a intentar hacerlo un poquito rápido y entonces vamos a ver después en las escaleras esto se soluciona mejor, de acuerdo. Recojo su petición y vamos a trabajar. Ismael
Ismael	Bueno pues sería la nota de las escaleras bajas en la dirección contraria, sería por ejemplo que debes ocho caramelos, debes ocho caramelos y al meter deber cuatro más el amigo que le debes

	163 164	ocho caramelos te perdona cuatro y ese es el menos, el menos cuatro que le perdonas
Jorge	165 166	Por eso, tú solo quedarás debiendo cuatro caramelos, que es lo que te estaba diciendo yo desde el principio
Profesora	167 168	Yo también te decía lo mismo Jorge, yo también te decía lo mismo.
Jorge	169	Es ocho menos cuatro, te he dicho ocho y todos me han dicho no
Profesora	170	No, tú no has dicho no, no, no,
Jorge	171	Dije menos cuatro
Profesora	172 173 174 175 176 177 178 179 180 181	Jorge, tú no has dicho menos ocho…menos ocho menos menos cuatro, no has dicho menos ocho, has dicho bien desde el principio. Lo has dicho perfectamente desde el principio, desde el principio has dicho que el resultado era menos cuatro, que es ese, pero yo te he preguntado por qué Y Lorena te ha respondido porqué. Tadeo te ha respondido por qué. Ana te está intentando explicar por qué. El resultado lo entiendes, el resultado lo tienes. Lo que pasa es que tu luego has empezado la discusión y has dicho pero no entiendo por qué y entonces entre todos te lo estamos intentando explicar
Jorge	182 183	Lo que a mí me va bien es quitándole los signos y que sea como ocho menos cuatro y me quede cuatro, entonces ya está
Profesora	184	Es que eso es lo que hicimos el otro día
Jorge	185	Pero quitábamos los paréntesis no los signos
Profesora	186 187	Y los signos también los quitábamos Jorge. Estamos todos aquí atendiéndote a ti corazón…
Jorge	188	Yo no lo tengo apuntado
Profesora	189 190 191 192 193	Oh será que no copiaste bien lo que hicimos el otro día. Chicos a trabajar todos con ganas. Vamos a quitar los signos, vamos a quitar los signos que esta es una batalla ¿si? Atención Tenemos -8. Pedro
Pedro	194	Menos, menos cuatro es igual….. más
Profesora	195	Más cuatro, perfecto. Luis
Luis	196	Menos 6
Profesora	197	-6, Braulio
Braulio	198	Menos dos

Profesora	[-8+4-6-2],menos dos genial. Fernando
Fernando	Menos
Profesora	Cómo menos, ¿cuándo hay dos iguales?
Fernando	Más
Profesora	Más, ahí está más:[-8+4-6-2+9 =] Y ahora ¿qué hacemos? estamos preparándonos para la batalla final y en la batalla final miramos todos los de un equipo y todos los de otro. Mario, ¿Cuántos tienes del equipo de los negativos? ¿Cuántos tienes del equipo de los negativos?
Mario	Tres
Lorena	Menos ocho, menos seis y menos dos, júntalos
Lorena	Dieseis
Profesora	Dieseis negativo. ¿Cuántos tienes del equipo de los positivos? Tadeo…venga…
Tadeo	Trece
Profesora	[-16+13=] Batalla final, ¿Cuántos se cancelan?
Alumnos	Menos tres, Tres, trece….
Profesora	Menos tres. Ganan los negativos, en la batalla final ganan los negativos. Y quedan tres. Entendidos Jorge
Jorge	Pero no han quitado los signos! Yo quito los signos del menos ocho, menos cuatro, menos seis!
Alumno	Pero entonces lo haces mal
Profesora	Jorge, vamos a ver Jorge, tranquilos no pasa nada. Jorge ¿qué signos quitas?
Jorge	Los del número, los del menos ocho...los que están dentro de los paréntesis.
Profesora	Jorge el del menos ocho, es un signo que acompaña al menos ocho, te indica que….
Jorge	Pero luego lo añado sabiendo que es un menos ocho
Profesora	Lo añades, ¿adonde?
Jorge	A la..al resultado…es decir menos ocho menos, menos cuatro
Alumno	Que lo haga!
Jorge	Yo lo que hago es…
Profesora	No, no, explícaselo a todos, yo me pongo de alumna
Jorge	Yo lo que hago es quitar estos signos y acordándome de que era un menos ocho, luego hago ocho menos cuatro y me da cuatro y

	el menos.
Profesora	¿Por qué puedes quitar los dos signos asociados al ocho y al cuatro? ¿Por qué los puedes quitar? Explícanoslo.
Jorge	Porque son iguales
Profesora	Porque son iguales…¿quién te ha explicado eso?
Jorge	Yo…además no sé si es verdad
Profesora	Entonces si hay …mi pregunta es hay algo que sabes que es verdad…mi pregunta eh. ¿Si hay algo que tú sabes que es verdad, sí? que es lo que hemos aprendido en clases y además es que todos nosotros, además todos tus compañeros están tratando explicártelo, si hay algo que tú sabes que es verdad y que todos tus compañeros entienden, ¿por qué no lo haces? Ahora te explicaré porque es verdad, pero mi pregunta es
Jorge	Es que no he entendido tu pregunta
Profesora	No has entendido. Claro, tal como tú me lo has presentado es cierto, claro tal como tú me lo has presentado si aquí hubiera un signo menos y aquí hubiera un signo más [(-8) – (+4)] Tal y como tú me lo has presentado entonces, ah! pero tú no me has dado una razón para que esto se pudiera hacer
Jorge	Son signos iguales
Profesora	Vale, entonces yo cuando lo presente aquí diría pues porque estos dos son diferentes lo puedo quitar es una razón tan válida como la tuya o ¿No te parece a ti una razón tan válida?
Jorge	A mí me va mejor así, de la otra forma así me lío mucho viendo tantos signos raros...quitando los signos y haciéndolo como lo he hecho siempre.
Profesora	A ver Jorge, es cierto, los dos números son… debido a que los dos signos son iguales, utilizo tu argumento se puede hacer si los dos signos no son iguales no se puede hacer
Lorena	Sí, sí se puede hacer
Profesora	Se puede hacer con otro truco, pero ya no voy a entrar a explicarlo de más maneras. Quisiera por favor que todo el mundo retenga la regla de los signos porque a partir de ahora se empezarán a complicar y con

	271	esta técnica de los signos estamos salvados. Alvaro
Álvaro	272	Y esto era lo fácil
Profesora	273	Esto era lo fácil

2. Desencadenante inicial y desencadenantes anidados

La primera contingencia de este episodio complejo se desencadena luego que la profesora notara que un alumno, Jorge, levanta la mano para intervenir en el desarrollo de la tarea. La profesora comenta que para resolver de mejor manera, será necesario quitar los paréntesis, a lo que Jorge indica que él lo hace de otra manera, que a él le resulta mejor.

Jorge	25	Pero yo lo veo mejor así

La profesora atiende a Jorge en cómo él desarrollará la tarea, y desvía la clase para tratar de comprender el procedimiento que el alumno indica. La desviación de la clase se produce por la intervención de un alumno, es decir el desencadenante de esta primera contingencia se origina por la idea de un alumno, en particular una intervención espontánea al desarrollo de la tarea. La profesora atiende a su intervención se desvía de la tarea y toma algunos minutos resolver esa contingencia. Esto trae como consecuencia que luego de ese desencadenante inicial, se produzcan otras contingencias alrededor de la resolución de la tarea; en particular se trata de atender a las dudas que Jorge manifiesta sobre el uso de la regla de los signos.

Desencadenantes anidados:

De la transcripción del episodio destacamos que se presentan otras contingencias, que detallaremos a continuación, en la tabla 4.3

Línea	Desencadenante Ideas de los Alumnos
25	Desencadenante inicial: El alumno responde a una pregunta de la profesora y esta incorpora la respuesta a la clase
86	Alumno interviene espontánea y el profesor ignora
133	Alumno interviene espontánea y el profesor reconoce e incorpora
148	Alumno interviene espontánea y el profesor ignora
218	Alumno responde a profesor y el profesor reconoce pero no incorpora.
233	Alumno interviene espontánea y el profesor reconoce e incorpora
260	Alumno interviene espontánea y el profesor reconoce e incorpora en la clase
266	Alumno interviene espontánea y el profesor reconoce pero no incorpora

Tabla 4.3: Tabla de desencadenantes del episodio complejo 12.

Primera contingencia anidada:

Jorge	86	Pero, ¿cómo vas a subir bajando?

El desencadenante de esta contingencia está dentro de las Ideas de los alumnos: el alumno interviene de manera espontánea y el profesor ignora.

Esta intervención supone cuestionar lo que la profesora ha explicado con anterioridad que menos por menos es más, que en palabras de la profesora significa “baja en la dirección contraria”.

La profesora no atiende a esta pregunta de Jorge, quien seguirá pendiente de la resolución y volverá a intervenir en otro momento de este episodio.

Segunda contingencia anidada:

Ana	133	Si es que pasa como en inglés no tiene explicación, pues es igual

El desencadenante de esta contingencia está dentro de las Ideas de los alumnos: el alumno interviene de manera espontánea y el profesor reconoce e incorpora a la clase, respondiendo a la alumna.

Esta intervención de Ana nos indica que la regla de los signos no tiene más dificultad que aprenderse cada regla y aplicarla, como lo es para ellos aprender inglés, pero que no tiene explicación. La profesora capta esta idea y le indica a Ana que esta regla sí que tiene explicación, pero que no es fácil como para explicársela.

Tercera contingencia anidada:

Jorge	148 149	Yo lo que no entiendo si el menos es una operación, entonces eso no es una operación.

El desencadenante de esta contingencia está dentro de las Ideas de los alumnos: el alumno interviene de manera espontánea y la profesora ignora esta intervención.

La duda de Jorge parece desprenderse de manera natural al tratarse de una tarea que consiste en resolver adiciones y sustracciones de enteros. ¿Por qué un signo que siempre le ha indicado resta, ahora parece no ser una operación?

La profesora no responde a esta interpelación de Jorge y la clase sigue su curso sin solucionar por qué se pueden eliminar los paréntesis, ni se continúa con el desarrollo de la tarea.

Cuarta contingencia anidada

Jorge	218 219	Pero no han quitado los signos! Yo quito los signos del menos ocho, menos cuatro, menos seis!

El desencadenante de esta contingencia está dentro de las Ideas de los alumnos: Jorge interviene luego que la profesora le preguntara si comprende cómo es que han ganado ‘la batalla’ los negativos. La respuesta de Jorge expresa su irritación frente a la forma de resolver que utiliza la profesora, porque entiende que no han quitado los signos como él lo hace. Otro alumno le replica de manera inmediata indicando que entonces Jorge lo hace mal. Ante eso la profesora comprende que la duda de Jorge y su reacción comienza a exasperar al resto de la clase.

Este desencadenante muestra nuevamente que se presenta una baja comprensión de la regla de los signos y de su utilización, además que Jorge, y probablemente a otros alumnos, no encuentran sentido a la misma.

Quinta contingencia anidada:

Jorge	233 234 235	Yo lo que hago es quitar estos signos y acordándome de que era un menos ocho, luego hago ocho menos cuatro y me da cuatro y el menos.

Esta contingencia nace por la respuesta de Jorge a la pregunta de la profesora de cómo él resuelve el ejercicio. La profesora lo escucha y le contrapregunta por qué lo realiza de esa manera, si ella lo ha explicado de manera diferente.

Sexta contingencia anidada:

Jorge	260 261 262	A mí me va mejor así, de la otra forma así me lío mucho viendo tantos signos raros...quitando los signos y haciéndolo como lo he hecho siempre.

Esta respuesta de Jorge es otra situación inesperada, una contingencia que se origina de la pregunta de la profesora. Lo interesante de esta respuesta es que Jorge explica que a él le complican la presencia de los signos y los paréntesis, y los omite operando con los números como si fueran naturales. Lo que pasa a continuación es que la profesora no sigue indagando en el pensamiento de Jorge y no le aclara la diferencia entre los números naturales y los números enteros.

Séptima contingencia anidada:

Lorena	266	Sí, sí se puede hacer

Esta última contingencia del episodio se produce como intervención espontánea de una alumna a la afirmación de otro alumno y la profesora solo responde con una explicacón superficial. Frente a la intervención de la alumna, la profesora decide no incluirla en la clase, ni indagar en el procedimiento que al parecer le sirve para resolver.

Contingencias anidadas

En este episodio hemos identificado siete situaciones contingentes luego de la contingencia inicial, todas iniciadas por las ideas de los alumnos. Estas ideas se originan en respuesta a una pregunta de la profesora o como una intervención espontánea a la discusión de la clase y todas están relacionadas con el uso de la regla de los signos para resolver la tarea propuesta.

La regla de los signos es una herramienta necesaria para resolver este tipo de tareas de adición y sustracción de enteros, pero parece ser opaca para la comprensión de los alumnos, hasta el punto que un alumno decide realizar su propia estrategia, la cual no es subsanada dentro del episodio y no sabemos si Jorge logrará resolver otras tareas con las mismas características.

3. Gestión del profesor

a) Conocimiento matemático movilizado en el episodio

Como hemos podido observar en cada una de las contingencias, los desencadenantes son las ideas de los alumnos, pero estas intervenciones tienen como factor común la comprensión de la regla de los signos, herramienta propuesta por la profesora para resolver la tarea.

Históricamente los números enteros entraron tardíamente a considerarse números por la comunidad matemática, probablemente porque al reconocer números con signo se amplía la comprensión del número como medida de una longitud o de una magnitud absoluta (Godino, Cid y Batanero, 2003). En cuanto a su enseñanza en la escuela, generalmente se asocia a distintos contextos como haberes/deberes, desplazamientos en la recta, temperaturas. De esta manera, se introducen mediante diferentes modelos didácticos para su enseñanza como el modelo de neutralización, cuando la profesora indica que existen soldados de un tipo que se neutralizan con los de otro tipo diferente y opuesto. También utiliza el modelo de desplazamiento, cuando hay dos signos menos seguidos lo denomina como 'bajar en la dirección contraria'.

Si uno analiza desde el punto de vista matemático el desencadenante de las contingencias, todas ellas giran torno a la comprensión de por qué menos por menos es más. Algunos alumnos quedan satisfechos con la argumentación de la profesora: menos por menos equivale a bajar, pero en la dirección contraria; en el caso del ejercicio, se produce una aceptación por parte de algunos alumnos, pero otros, como Jorge, no comprenden y como no lo comprende no lo utiliza, y allí radica que intervenga en varias oportunidades y además crea su propia forma de resolver, que considera mejor y sobre la cual insiste.

La profesora manifiesta conocer que la utilización de la regla de los signos es solo una estrategia que permite resolver variados y amplios ejercicios, pero también considera que el nivel en el cual está (sexto de primaria) no es pertinente trabajar con estructuras algebraicas: "Ahí interrumpo yo, si es que tiene un poquito de explicación, lo que pasa es que no es fácil, pero tiene su explicación" (línea 134 a 136).

Por otro lado Jorge manifiesta explícitamente no comprender el significado del signo en los números enteros: "Yo lo que no entiendo si el menos es una operación, entonces eso no es una operación" (línea 148-149). Esta reflexión en voz alta de Jorge, se refiere a lo que matemáticamente se denomina las valencias de los signos. Ahora los signos + y – que en los números naturales indicaban operaciones de adición y sustracción respectivamente, pasan a tomar una doble representación, puesto que ahora también son signos predicativos, es decir, indica la cualidad de sumando o sustraendo de un número. Yes esta dualidad del significado de los signos la que produce un conflicto a Jorge.

b) Conocimiento para enseñar del profesor

Para analizar este apartado, comenzaremos utilizando las ideas de Rowland, Turner, Thwaites y Huckstep (2009) que mencionamos al inicio de este apartado.

Luego de producirse la contingencia inicial, la profesora gestionó la clase a través del intercambio de ideas entre ella y los alumnos, y también permitiendo que entre los alumnos se produzcan discusiones sobre la resolución de la tarea. Esto ocurre hasta el momento en que se presenta la primera contingencia anidada. La profesora escucha esta pregunta, y decide no involucrarse en la discusión. Opta por mantener silencio y hacer una pausa en sus intervenciones, antes de volver a incorporarse en la discusión. Esto puede ser una característica de su gestión, es decir, realizar una pausa para pensar en las implicaciones de sus respuestas, u organizar sus conocimientos para responder asertivamente a la pregunta de Jorge.

En las siguientes contingencias, la profesora toma un rol secundario y se desplaza a una esquina de la sala, mientras los alumnos siguen discutiendo entre ellos, hasta que Ana, produce la segunda contingencia anidada. La profesora, que no esperaba esta intervención, sale del lugar que ocupa en la sala y le indica a Ana que para eso sí hay explicación, pero que no es el momento de explicarla. Hasta ahora su gestión está basada en tratar de responder a las dudas o intervenciones que realizan los alumnos, pero al parecer por falta de tiempo o por la complejidad del contenido, decide no dedicar tiempo en profundizar en esta idea. Después de esta situación, siguen las discusiones entre los alumnos y la profesora intenta que retomen la tarea de resolver la tarea, cuando surge la tercera contingencia anidada. La profesora escucha la intervención de Jorge, pues le mira desde su lugar en una esquina de la sala de clases, pero no le responde a su duda.

En cambio, tomando las ideas de otros alumnos, indica a todos los alumnos que en una próxima clase hará un ejemplo práctico de las reglas de los signos en los números enteros. De esta manera intenta redirigir la clase para que se resuelva la tarea propuesta. Logra que los alumnos, y Jorge en particular, se vuelquen a resolver el ejercicio, hasta que nuevamente Jorge interviene, propiciando la cuarta contingencia anidada. Jorge interviene sin mediar pregunta de la profesora. El resto de alumnos parecen estar molestos por la continua interrupción de Jorge, pero la profesora intenta disminuir la ansiedad, tomando atención a lo que dice Jorge y pidiéndole que explique cómo lo resolvió, y sigue la idea de otro alumno indicándole que muestre en la pizarra lo que ha hecho y produciéndose la quinta contingencia anidada, en la cual Jorge intenta explicar su procedimiento, a lo que la profesora le vuelve a preguntar por qué lo hace de esa manera, pero sin aclararle la posible equivalencia con el uso de la regla de los signos. La última contingencia es una nueva oportunidad de la profesora para indagar y comprender la forma que tiene Jorge de resolver y aclarar los posibles errores de su pensamiento, pero decide no seguir profundizando y da por terminada la tarea y pasar a otra.

Si analizamos la gestión según los conocimientos para enseñar podemos concluir que la profesora maneja el conocimiento común del contenido (CCK), sabe resolver el problema y lo explicita al inicio del desarrollo del ejercicio.

En cuanto al conocimiento especializado (SCK), si bien trata de responder al por qué a las preguntas de los alumnos, solo se apoya en los modelos didácticos de la enseñanza de los números enteros, lo cual no le permite explicar la complejidad que supone justificar de manera general porque menos por menos es más. Si bien parece que conoce definiciones de las propiedades de los números enteros, no encuentra la manera de desarrollarlas para que sean útiles para sus alumnos.

Respecto del conocimiento del contenido y la enseñanza (KCT), la profesora se muestra dubitativa frente a la multiplicidad de intervenciones de los alumnos, por lo que en varias oportunidades utiliza contribuciones que solo apuntan a la explicación concreta del uso de la regla de los signos, y no para ampliar la comprensión del concepto de número entero y del significado de los signos. Por último, en relación al conocimiento del contenido y los estudiantes (KCS), la profesora no logra anticipar lo que puede llegar a ser confuso para sus alumnos, ni logra interpretar el pensamiento emergente de sus alumnos, como es el caso de Jorge.

4. Síntesis

Este largo y complejo episodio de contingencia es una situación muy interesante por la riqueza en cuanto a la complejidad de las interacciones y a la gestión que realiza la profesora. Está acotado a una dificultad concreta de los alumnos: la comprensión de la regla de los signos para operar con números enteros, y de manera más general, la ampliación del concepto de número.

Este fenómeno ha sido ampliamente estudiado, y como vemos en este episodio, manejar conocimiento matemático común no asegura que se pueda responder eficazmente a las dudas e interrogantes que pueden surgir en los alumnos.

Si miramos la situación de contingencia, de acuerdo con Rowland, la gestión de la contingencia debe propiciar el intercambio de ideas entre profesor y alumnos, y/o entre profesor y grupo de alumnos. Esto la profesora lo permite, además de dejar que los alumnos entre ellos intercambien ideas. Por otro lado, también la gestión se caracteriza por que el profesor realiza una pausa de manera que pueda pensar en las implicaciones de las respuestas, las sugerencias o contrapreguntas, a las ideas de los alumnos. La profesora realiza estas pausas, aunque no siempre logra aprovechar esos tiempos para profundizar en el pensamiento de los alumnos. Otra característica de la gestión es que el profesor debe responder a todas las dudas, preguntas y/o intervenciones de los alumnos. Quizás esta es la más débil de las características de la gestión de la contingencia que la profesora desarrolla. Muchas preguntas no las responde, ni profundiza en las ideas que manifiestan sus alumnos, lo cual puede ser una posible razón para que no se logren solucionar las dudas, ni se aclaren los posibles errores que, en particular, Jorge manifiesta para resolver este tipo de tarea con números enteros.

Desencadenante: Ideas del profesor (Teacher Insight)

III. **El tercer y último episodio** de nuestro análisis tiene como característica que la contingencia inicial es producida por la profesora que reflexiona sobre el ejercicio que están resolviendo y que causa dudas a varios alumnos, por lo que cambia a un problema que ella considera puede ejemplificar de mejor manera el concepto de proporcionalidad inversa. Termina de resolver este nuevo ejercicio y vuelve a la situación inicial que le había dado a los alumnos.

Número de episodio: 8. Problema de los pintores	**Curso**: Primer Año de Enseñanza Secundaria	**Profesor**: Gabriela
Unidad didáctica: Proporcionalidad	**Tema matemático**: Proporcionalidad inversa	

1. Descripción de la clase en la que se encuentra el episodio

La profesora comienza la clase indicando a los alumnos que deben resolver un problema del libro de texto.

"Si cinco obreros tardan seis horas para construir una tapia, ¿Cuánto tardarán dos obreros para hacer el mismo trabajo?"

Para esto la profesora organiza los datos del problema en una tabla e indica que para resolver, lo más directo es calcular cuánto tardará un obrero en hacer el trabajo.

Hace la siguiente pregunta a los alumnos: si solo un trabajador hace el trabajo, ¿se demorará más o menos? Las respuestas de los alumnos son variadas y producto de esto se genera la situación de contingencia.

	Línea	**Transcripción del episodio**
Profesora	1	Si cinco obreros tardan seis horas, para que no haya confusión,
	2	para construir una tapia,
	3	¿Cuánto tardarán dos obreros para hacer el mismo trabajo?
	4	[*escribe la tabla en el pizarrón]*
	5	N obreros | tiempo (horas)
	6	5 | 6

	Cinco personas hacen el trabajo que yo he encargado en seis horas. Esto es, ¿todo el mundo ve que son los datos del enunciado? [*Señalando la tabla*] Recuerdan que nosotros siempre apuntamos cuales son los datos, ¿sí? ¿Cuál es el siguiente paso, Felipe? De los datos pasamos a la información unitaria. ¿Cuánto tardará un obrero, Felipe, más o menos horas, si él lo hace solo?
Felipe	Menos
Profesora	Menos horas, ¿quién vota más?, ¿Quién vota más horas? Mira, tienes cinco obreros y tardan seis horas, si en lugar de contratar cinco para hacer un trabajo contrato a uno, ¿qué tardará más o menos?
Alumno	Más
Profesora	Más, entonces vota más, genial. Nadie vota menos espero, nadie vota más, vale entonces ahora para saber cuánto tarda ese obrero solo que lo hemos dejado abandonado es como si se tuviera que replicar por cinco no?
Alumnos	Sí
Profesora	¿Sí? Me tengo que replicar, tengo que hacer el trabajo de cinco personas, entonces me replico, uno, dos, tres, cuatro y cinco, me replico cinco veces, entonces estaríamos tardando seis por cinco horas, ¿no? ¿Sí?
Alumnos	Si
Profesora	¿Todo el mundo ve esto o no? ¿Quién no lo ve? Venga explícame que no ves Blanca
Blanca	Que por qué seis por cinco ahí
Ana	Yo sé Gabriela [*levanta la mano para aportar a la clase*]
Profesora	Venga explícaselo tu Ana
Ana	Si tu dices a mí, …yo no tengo mucho dinero entonces quiero puedo contratar solo a un obrero porque me llega para un obrero…si tú quieres que haga el trabajo de cinco es como si tuviera que hacer ….

Iván	Tiene que hacer el trabajo de cinco
Ana	Claro, entonces si cinco tardan seis horas, pues un obrero tendrá que hacer el trabajo de cinco, pues seis por cinco.
Rebeca	Pero, ¿no tendríamos que ver primer cada obrero cuanto hace?
Profesora	Por supuestísimo, por supuestísimo [indicando el número uno en la pizarra]
Rebeca	Entonces por qué seis por cinco?
Alumnos	Pues porque un obrero ….. porque seis por cinco es lo que vamos a hacer….
Rebeca	Es que las seis horas hay que partirlas entre cinco obreros
Alumnos	No….no
Profesora	Número de obreros…..tú tranquila….vamos a suponer por un momento –nadie copia, vale- vamos a suponer por un momento Rebeca que aquí hubieran dos. Boris ven aquí a hacer de obrero
Alumnos	¿Yo también, puedo?
Profesora	No, solamente Boris
Alumnos	De paleto
Profesora	Solamente vamos Boris y yo, vale. Nos contratan para pintar esta clase. Entonces Boris se pone por un lado, tu empiezas por allí y yo empiezo por aquí…chan chan chan vamos pintando hasta que nos encontramos allí al final, porque cada uno pinta un trozo, vale? ¿Cuánto tardamos Boris en pintar esta clase? ¿Seis horas?
Boris	Sí
Profesora	Vale seis horas en pintar esta clase, si?. Vale yo empiezo por aquí, empiezo por aquí chun chun chun [*imita el movimiento de estar pintando*] voy hasta el final y Boris justo inmediatamente coincidiendo en el tiempo porque está Boris, empieza por allá y va para allá pero en hacer todo este caminito tardamos seis horas, si estamos las dos? Si, claro, seis yo por aquí y Boris seis va por allá Entonces si ahora Boris se sienta y estoy yo sola la cosa irá igual…chun chun chun al cabo de seis horas llegaré allí [*apunta al final de la clase*] pero cuando llegue allí tendré que ir a hacer

	de Boris y me pondré aquí y chun chun chun y seis horas más, no? Me tengo que replicar
Alumnos	serían doce horas….vale doce horas…harías doce horas
Profesora	Harías doce horas, no Rebeca? Rebeca tendrías que hacerlo dos…..
Rebeca	Pero si dos personas hacen seis horas, una sola……
Iván	Una sola hará doce!
Profesora	Pero….
Tadeo	Las dos hacen el trabajo a la vez son las mismas horas
Profesora	Tranqui, tranqui…Tomás, si, Tadeo, pero nos estamos explicando todos a todos, entonces es mejor que lo hagamos ordenadamente, está genial que se lo expliques tu si ahora vas a hablar tu vale pero ordenadamente. Primero acabaré yo con Rebeca y después tú se lo vas a explicar a Laura y lo vamos a oir todos, pero ojo xxxxx
Rebeca	O sea tu te estás refiriendo a que ese dos… cada una de esas personas hace seis horas
Profesora	Cada una de esas personas tarda seis horas, esta si? El trabajo por el que contrato me viene la Montse y me dice “toma te contrato, os contrato Boris y Gabriela para pintar esta clase” de acuerdo, entonces Boris se pone por allí y yo me pongo por aquí, nos la partimos y llegamos al final al cabo de seis horas porque los dos somos igual de veloces, si somos unos operarios que estamos entrenando, entonces ¿por qué se tarda seis horas? Porque hay dos personas simultáneamente, dos personas simultáneamente, dos personas si-mul-tánea-mente se parten el trabajo, ¿de acuerdo?, pero las seis horas son del trabajo de todas, todas, desde el minuto uno hasta el minuto 360, ¿de acuerdo Rebeca? Entonces si estoy yo sola necesito el doble de tiempo, porque primero tengo que hacer de Gabriela y luego me tengo que ir al otro lado y hacer el de Boris, porque no puedo estar simul…no puedo partirme a la mitad y estar simultáneamente en dos sitios, ¿eso si lo entiendes? Entonces son …en realidad podemos pensarlo así, son seis horas de Gabriela y seis horas de Boris, si, vale? Seis más seis, que no

	es nada más que seis por dos, si, de acuerdo? Vale, ahora Tadeo explícale a Lorena que lo oímos todos. Le vas a decir igual, madre mía
Tadeo	Están pintando las paredes y tardan seis horas en llegar hasta acá, hacen el caminito todo…
Lorena	y eso son tres horas por persona
Alumnos	No
Profesora	No
Alumnos	Los dos tardan seis…. Y luego se van ……
Profesora	No, no, no, no…una pausa, una pausa….. He dicho una pausa Rebobino, no tardan tres horas, no es seis horas todo el trabajo y entonces serían tres para cada operario, si no el trabajo por el que me contratan es un trabajo de doce horas que yo voy con mi colega y me lo parto entre dos y hacemos seis cada uno, pero el trabajo por el que te contratan se llama aula de primero B, que cuesta doce horas y ese trabajo yo me lo puedo repartir con Boris, me lo puedo repartir con Lorena y con Boris, si? Y entonces me repartiré no solo el tiempo si vamos los tres vamos a tardar, no solo vamos a tardar menos tiempo pero también tendremos menos salario, no? Entonces el trabajo, y esta es la clave, el trabajo por el que se factura es toda la clase, entonces… van dos personas –que es el enunciado que me dice- van dos personas y tardan seis horas cada una….cada una, ¿estamos entendidos? Cada una, con lo cual si quieres contabilizar el trabajo total son doce horas de trabajo. Si fuéramos tres personas, el enunciado modificado – luego volveremos al del problema- el enunciado ,modificado te diría tres personas estarían tardando cuatro horas, porque el trabajo total son doce, doce…uno dos y tres; ahora trabajo total es de doce, el trabajo total es de doce y tu puedes llamar a todos los colegas que quieras
Lorena	Entonces es al revés de lo otro
Profesora	Ahora, es al revés de lo otro, aquí para encontrar lo unitario se multiplica y allí para encontrar lo unitario se divide, por eso el título aquí ponía proporcionalidad inversa, lo contrario, al revés, allí que ponía?, proporcionalidad di-recta. De hecho cuando yo

	empecé a hablar de proporcionalidad dije “Proporcionalidad Inversa”, porque es una constante multiplicativa lo primero que nos apareció, entonces proporcionalidad directa …. Proporcionalidad inversa es lo contrario de lo anterior, genial la palabra. Vamos por orden, Ana…
Jorge	Iba yo
Profesora	Ibas tu Jorge, cierto disculpa
Jorge	Pero si tú te demoras seis horas en pintar hasta aquí, pero Boris se demora seis en hacer solo esto
Profesora	Suponemos, suponemos como todos los modelos matemáticos, suponemos que los operarios son indistinguibles, lo cual quiere decir que son como copias uno del otro
Jorge	¿Y si no lo fueran?
Profesora	Me gusta porque tu siempre estás preocupado por la bondad de los modelos, eso es fenomenal, si?, los modelos siempre están afectados…no suelen describir la realidad cien por cien. Entonces…si, yo soy algo más alta que Boris y es posible que sea un poquito más rápida, pero si os pusierais… de aquí a unos años diré Boris! Pero es posible que uno sea más rápido que el otro, pero en este modelo no estamos en la realidad, estamos atajando la realidad habrá…aceptamos que haya una pequeña variación, pero podríamos inventarnos un modelo que mejorara ese e incorporara la velocidad de cada operario, pero eso ya llegará Más preguntas
Ana	Que tu dices, tu dices que tú y Boris haceis el trabajo hasta aquí, la mitad cada uno, o sea si los dos tardáis seis horas, tardais seis horas más
Alumno	Seis, porque lo hacen a la misma vez
Profesora	Lo hacemos simultáneamente, pero el trabajo total ….
Boris	…no primera lo hace ella y tarda seis horas y luego lo hago yo y tardo seis horas, vamos a la vez
Profesora	El trabajo total corresponde a doce horas de trabajo
Profesora	A la vez, son cinco personas en el enunciado. Lo dice el enunciado que ahora leeremos

2. Desencadenante inicial y desencadenantes anidados y respuesta del profesor

A diferencia de los episodios anteriores, este presenta una particularidad diferenciadora: la contingencia interesante de analizar es la que se produce por la decisión que toma la profesora, la decisión de cambiar el problema. El tema que se está trabajando en esta clase es la proporcionalidad inversa. La profesora propone un ejercicio tipo para iniciar el estudio de este concepto, que a menos trabajadores, más es el tiempo que se necesita para terminar una tarea.

Luego de presentado el ejercicio, los alumnos intervienen en la clase haciendo preguntas o comentando cómo cada uno lo resolvería y la profesora trata de encaminar la resolución con preguntas específicas y dirigidas a ciertos alumnos. En ese intercambio de ideas, una alumna, Blanca, hace la pregunta, ¿Por qué seis por cinco ahí?

Esta es la primera intervención que muestra la dificultad que se les presenta a los alumnos con la proporcionalidad inversa. El desarrollo de la clase sigue con la manifestación de dudas de los alumnos sobre la misma operatoria, y la clase comienza a tornarse ruidosa; ante eso la profesora toma una decisión:

Profesora	54 55 56 57	Número de obreros…..tú tranquila….vamos a suponer por un momento –nadie copia, vale- vamos a suponer por un momento Rebeca que aquí hubieran dos. Boris ven aquí a hacer de obrero

Consideramos que este momento de la clase es el más relevante y es el desencadenante del cambio de la planificación de la profesora. Ahora el problema no es de cinco obreros que realizar una obra en seis días, ahora son dos obreros que realizan un trabajo en seis horas. Además para ejemplificar el nuevo problema le pide ayuda a Boris para que haga de obrero junto a ella. Aquí se produce un cambio de la actividad que la profesora había planificado, de acuerdo con Rowland et al. (2011), se trata de un desencadenante de la contingencia que corresponde a las Ideas del Profesor (teacher insight). Proponen que al ser el profesor un profesional reflexivo (en el sentido de Schön) analiza sus decisiones y modifica su planificación según sus propios conocimientos y según la necesidad de la clase. En este caso la profesora se da cuenta que algo anda mal y decide cambiar el ejemplo.

Luego de esta decisión, la clase cambia de foco, y ahora se centra en comprender una nueva situación concreta, pintar la clase, para lo cual ella y Boris ejemplifican el trabajo a realizar.

Desencadenantes anidados:

Línea	Desencadenante
54	Desencadenante inicial: La profesora cambia el problema inicial y presenta un nuevo problema a resolver
120	Ideas de los alumnos: alumno entrega una respuesta incorrecta durante una discusión, el profesor reconoce lo que dice y lo incorpora al desarrollo de la clase
164	Ideas de los alumnos: alumno responde de manera espontánea a la actividad y el profesor incorpora a la clase lo que dice el alumno.

Tabla 4.4: Tabla de desencadenantes del episodio complejo 8.

Después del cambio de problema, la profesora intenta reproducir el trabajo que hacen dos obreros para pintar una clase, lo que permite a varios alumnos participar en la discusión sobre cuánto se demorará una sola persona en realizar el trabajo: en este caso una persona debería demorarse 12 horas, pero aquí hay una nueva intervención de una alumna.

Lorena	120	y eso son tres horas por persona

Esta respuesta de la alumna no estaba planificada por la profesora, por lo que la escucha y trata de responder a este error de Lorena, nuevamente ejemplificando con el trabajo que realizaría ella. Otros alumnos y la misma profesora indican que ese no es el resultado. Nuevamente los alumnos empiezan a interactuar entre ellos y se produce algo más de ruido, por lo que la profesora les indica hagan una pausa y que ella retomará las ideas para explicar nuevamente el proceso.

En esta nueva situación Lorena indica que este nuevo problema se resuelve "al revés" de los anteriores y la profesora ratifica esta idea indicando que ahora están trabajando con proporcionalidad inversa, donde el resultado se obtiene de una multiplicación, a la inversa que antes se obtenía mediante una división.

Luego se produce otra intervención, que al parecer la profesora esperaba, y tiene relación con el hecho de que ambos operarios realizan al trabajo en el mismo tiempo, señalando que están trabajando con un modelo matemático que hace que ambos operarios sean 'iguales'. Entonces Jorge le pregunta:

Jorge	164	¿Y si no lo fueran?

Esta contingencia se produce por la intervención espontánea de un alumno y la profesor reconoce lo que dice el alumno e incorpora la idea a la clase. Esta intervención genera un nuevo desvío de la tarea que realizan, ya que debe dedicar unos minutos de la clase para explicar algunas características de los modelos matemáticos y su relación con la realidad.

Luego de esta intervención cierra el problema con dos obreros y retoma el problema inicial de los 5 obreros y la tarea realizada en 6 horas de trabajo.

3. Gestión del profesor

a) Conocimiento matemático movilizado en el episodio.

El conocimiento puesto en juego en este episodio es el de proporcionalidad inversa. Hasta ahora los alumnos habían trabajado con proporcionalidad directa, y operando con reducción a la unidad para resolver problema, por lo que dividían para encontrar el resultado de la unidad. Ahora se encuentran con un problema que mediante la utilización de los términos anteriores no es posible encontrar el resultado correcto, y por tanto la relación entre las variables no sigue los mismos patrones que en los ejercicios de proporcionalidad directa.

La profesora utiliza los datos para encontrar cuanto demoraría una persona en hacer el mismo trabajo, lo que resulta de multiplicar 5 por 6, pero este resultado al parecer no le da sentido a los estudiantes, porque preguntan por qué se debe multiplicar. Al parecer algunos siguen con la idea de lo que realizaban en los ejercicios anteriores, es decir multiplicar, y por eso hay dudas en el procedimiento.

Ante la imposibilidad de que la explicación de la profesora tenga sentido para algunos de los alumnos, decide cambiar el problema y ahora utiliza números más pequeños que a su vez le permitan ejemplificar directamente en la clase al mismo tiempo que pretende seguir utilizando la reducción a la unidad (una persona en cuánto tiempo realizará el trabajo total) para y así poder resolver el problema.

Los conocimientos que se ponen en juego en este problema tienen que ver con el desarrollo de un pensamiento proporcional, en este caso a identificar que en esta situación no se cumple la propiedad fundamental de las proporciones, como era en el caso de la proporcionalidad directa y que la reducción a la unidad era un paso ‘lógico’ dentro de la resolución de los problemas.

b) Conocimiento para enseñar del profesor

En este episodio podemos observar que se produce un intenso intercambio de ideas entre la profesora y los alumnos, y a la vez permite el intercambio entre los alumnos. Esta es una característica de la gestión de la contingencia.

Además, la profesora pide pausas y realiza pausas dentro de la gestión de la clase para profundizar en el conocimiento matemático y con ello para tratar de responder de manera más efectiva a las ideas que expresan los alumnos.

Otra de las características de la gestión de la profesora es que trata de responder a las dudas e intervenciones que realizan los alumnos, todo esto a pesar de lo complejo que es manejar el tiempo de la clase y también tratar de responder las dudas de todos los alumnos.

Ahora si analizamos en relación al conocimiento para enseñar del MKT:

- *Conocimiento común del contenido, CCK.*

En este episodio podemos ver que la profesora maneja el conocimiento común del contenido, que en este caso es calcular cuánto demoran dos personas en pintar la reja y por tanto podemos concluir que sabe resolver la tarea que encomienda a sus alumnos.

- *Conocimiento especializado del contenido, SCK*

En cuanto a este conocimiento, la profesora intenta responder al por qué se debe multiplicar 5 por 6. Además al hacer un cambio del problema, lo que intenta realizar es un ejemplo que puntualice de mejor forma la proporcionalidad inversa. Quizás lo que demuestra tener débil es la realización de una explicación matemática adecuada al nivel que está enseñando y que le permita explicar de mejor manera el procedimiento que realiza multiplicar en lugar de dividir este tipo de proporcionalidad entre magnitudes.

- *Conocimiento del contenido y la enseñanza KCT*

En el caso de este episodio complejo, la profesora decide hacer una pausa en la clase para explicar desde otro problema la proporcionalidad inversa tratando con ello de atender a la duda que se estaba generando en la clase.

Quizás una debilidad de este conocimiento manifestado en este episodio es la elección del ejemplo con el que comienza el tratamiento de la proporcionalidad inversa, ya que posteriormente decidió cambiarlo.

c) Conocimiento del contenido y los estudiantes KCS

El Conocimiento del Contenido y los Estudiantes en este episodio está estrechamente relacionado con el conocimiento anterior, es decir la profesora no logró anticipar la dificultad del problema propuesto a los alumnos.

4. Síntesis

Este episodio catalogado dentro de los episodios complejos, muestra las interacciones que se pueden desarrollar luego del planteamiento de un problema de proporcionalidad inversa a los alumnos.

Si analizamos cómo se desencadena el cambio de lo planificado corresponde a una decisión de la profesora, pero del dialogo se puede inferir que el cambio está condicionado por las dudas que manifiestan algunos alumnos, y que la profesora supo escuchar y tomarlas en consideración para hacer posteriormente una modificación de la tarea que tenía planificada.

Esta modificación tuvo como objetivo la comprensión de la proporcionalidad inversa, y cuando la profesora se dio por satisfecha, volvió a retomar la tarea inicial.

Con respecto a la gestión de la contingencia en términos del conocimiento para enseñar, la profesora muestra características que puede ayudar a comprender el cambio de problema que realizó. El conocimiento común del contenido es dominado por la profesora, y el conocimiento especializado se manifiesta durante la gestión, cuando trata de responder al por qué se deben multiplicar los cinco obreros por las seis horas trabajadas. En este proceso de explicar el por qué y decidir un cambio de problema influye por un lado el tomar en consideración el pensamiento emergente e incompleto de los alumnos, que forma parte del conocimiento del contenido y los estudiantes, y por otro lado la elección poco adecuada del problema inicial como introducción a la proporcionalidad inversa, que acaba resultando una de las causas de la contingencia de este episodio.

Capítilo 5. Resultados y Conclusiones.

Para finalizar con esta memoria de tesis, dedicamos el último capítulo a presentar las conclusiones de nuestra investigación.

Recordemos que nuestro objetivo general de investigación era analizar situaciones de contingencia y la incidencia del conocimiento matemático del profesor para su gestión. Para ello establecimos tres objetivos específicos. Nuestras conclusiones se sistematizarán en torno a estos tres objetivos para mostrar tanto el proceso desarrollado en la investigación como los principales resultados obtenidos en el capítulo anterior correspondiente al análisis de los datos. Asimismo, concluiremos el trabajo con una conclusión final en la que destacamos nuestra aportación al estudio de la práctica docente del profesorado de matemáticas.

Objetivo específico 1:

Identificar las situaciones de contingencia que se producen en la sala de clases mientras el profesorado enseña matemáticas a partir de indicadores sistemáticos para sus desencadenantes.

Para la identificación de las situaciones de contingencia lo primero que realizamos consistió en detallar los desencadenantes de estas situaciones contingentes. Los indicadores que utilizamos para ello fueron los señalados por Rowland, Jared y Thwaites (2011): Ideas de los estudiantes, Ideas del profesor y disponibilidad de herramientas. Estos indicadores fueron los que nos permitieron descomponer la contingencia en las situaciones que los desencadenaban y la posterior gestión del profesorado. Por esta razón el análisis de nuestros episodios se organizaron en cuatro apartados: la descripción de cada uno, en el detalle del desencadenante, la respuesta del profesor y el análisis de la gestión de la contingencia.

A partir de los datos analizados pudimos identificar 12 episodios de contingencia con sus respectivos desencadenantes.

La detección de la contingencia durante la práctica necesita de una mirada detallada de la gestión que el profesor realiza. La contingencia, definida conceptualmente por Rowland (2005), hace referencia a aquellas situaciones no previstas por el profesor, que no fueron planificadas previamente. Establecer un conjunto de desencadenantes permite realizar una descripción con mayor rigurosidad de las acciones que se realizan en la práctica; en nuestro caso, nos permitió identificar y caracterizar con detalle las situaciones de contingencia para su posterior análisis.

Con respecto a este objetivo, pudimos distinguir 12 episodios de contingencia con sus respectivos desencadenantes. Los desencadenantes de estos episodios corresponden en su mayoría a Ideas de los alumnos: 10 de los 12 episodios analizados, y los episodios restantes corresponden a Ideas del profesor: 2 de 12.

Dentro de los 10 episodios desencadenados por las Ideas de los alumnos, 5 corresponden a una respuesta de un alumno a la pregunta del profesor, 3 provienen de una respuesta espontánea a una actividad o discusión y 2 a una respuesta incorrecta a una pregunta o producto de una discusión.

Estos resultados son coherentes con lo expuesto por Rowland, et al. (2011) quienes consideran que la mayoría de las contingencias que ellos han analizado corresponden al desencadenante Ideas de los alumnos.

Otro resultado, respecto de los desencadenantes de las Ideas de los alumnos, tiene relación con la respuesta del profesor frente a las Ideas de los alumnos. Rowland también indica que el profesor tiene tres formas de responder a este desencadenante: Ignorar; reconocer lo que dice el alumno, pero no incorporarlo en la clase; o, reconocer lo que dice el alumno e incorporarlo a la clase.

Dentro de los 10 episodios que corresponde a las ideas de los alumnos, en 8 de ellos el profesor reconoce lo que dice el alumno y lo incorpora al desarrollo de la clase. Sólo en 2 episodios, el profesor reconoce lo que dice el alumno, pero no lo incorpora a la clase.

De los 2 episodios que corresponden a Ideas del profesor, en ambos casos se producen porque el profesor/profesora reflexiona acerca de la tarea planteada y decide cambiarla.

Esto nos da cuenta que en nuestros casos analizados, la mayoría de los desencadenantes corresponde a las Ideas de los alumnos y como respuesta a estas contingencias, el profesor atiende a los alumnos e incorpora estas ideas al desarrollo de sus clases. En otros casos, el profesor cambia su planificación por la reflexión propia de la tarea planteada a sus alumnos. En la tabla 5.1 se muestra una síntesis de las características de los episodios según los desencadenantes y la acción del profesor.

<table>
<tr><th rowspan="4">12 Episodios</th><th>Desencadenante</th><th>Acción del profesor</th></tr>
<tr><td rowspan="2">10: Ideas de los alumnos</td><td>8: Reconocen lo que dice el alumno y lo incorporan al desarrollo de la clase</td></tr>
<tr><td>2: Reconocen lo que dice el alumno, pero no lo incorporan al desarrollo de la clase</td></tr>
<tr><td>2: Ideas del profesor</td><td>Ambos cambian por su propia reflexión.</td></tr>
</table>

Tabla 5.1: Características de los episodios analizados.

Una visión global del conjunto de datos analizados nos permite afirmar que la contingencia surge en la clase cuando el profesor promueve la interacción, tanto entre profesor y alumnos como entre iguales. Por ello, los momentos contingentes son relevantes para el proceso de enseñanza y de aprendizaje ya que permiten que emerjan las ideas de los alumnos, pero al mismo tiempo pueden significar momentos críticos para el profesor, puesto que debe decidir su gestión no planificada en un corto espacio de tiempo y para ello debe movilizar los distintos tipos de conocimiento que le permitirán una buena gestión de la contingencia.

Objetivo específico 2:

Relacionar las situaciones de contingencia con el conocimiento matemático para enseñar, tanto en lo que se refiere al conocimiento disciplinar como al conocimiento para la enseñanza.

Para lograr este segundo objetivo específico, las tareas que realizamos se basaron, luego de la determinación del desencadenante de la contingencia, en analizar las acciones del profesor para responder a esa contingencia, y lo hemos hecho en términos de los distintos tipos de conocimientos a los que recurre para la gestión de la clase, hasta que puede volver a la tarea inicial.

En esta observación y determinación de los conocimientos utilizados por el profesor detectamos que en algunos episodios la gestión era muy corta y el profesor/profesora podía volver de manera rápida a la tarea. Esto se veía reflejado en la duración de los episodios y el tipo de interacciones que se producen entre los profesores y los alumnos de cada caso estudiado. Por esta razón, vimos la necesidad, como paso intermedio de este objetivo, de separar los episodios seleccionados en dos clases que denominamos: episodios simples y episodios complejos.

Sostenemos que los episodios simples corresponden a episodios de corta duración donde el profesor/profesora modifica la clase, atiende al alumno y retoma la tarea inicial y vuelve a la clase planificada. Todos ellos tienen un desencadenante claro y un reducido número de interacciones para resolver la contingencia En cambio los episodios complejos corresponden a una modificación de la clase, a la atención del alumno, pero además incluyen la participación activa de otros alumnos de la clase, lo que facilita que se produzcan nuevas contingencias; ello tiene como consecuencia episodios de una mayor duración y de una gestión más compleja, que exige mayores herramientas profesionales y solo después de cierto tiempo y de la participación de varios alumnos se puede volver a la tarea inicial y retomar la clase planificada.

Al hacer esta diferenciación de los episodios encontramos 9 episodios simples y 3 episodios complejos. Por tanto, para relacionar la contingencia con su gestión realizamos análisis separados de estas dos categorías.

Los 9 episodios simples los analizamos según el tipo de desencadenante y la respuesta del profesor.

El primer episodio que analizaremos es el Episodio 2 cuyo desencadenante correspondía a las Ideas de los alumnos, en el cual un alumno pregunta al profesor y este reconoce lo que dice pero no lo incorpora al desarrollo de la clase. Analizando la gestión del profesor pudimos concluir que el profesor posee y manifiesta una estrategia previamente planificada para resolver la tarea: reducción a la unidad. Cuando la alumna le plantea una forma alternativa de resolución, el profesor la atiende, pero en este caso no pasa por conocer en el pensamiento y la comprensión del concepto estudiado por parte de la alumna, ya que no indaga en la forma alternativa que la alumna le presenta.

El episodio 4, cuyo desencadenante corresponde a las Ideas de los alumnos, donde un alumno entrega una respuesta incorrecta a una pregunta y este reconoce lo que dice, pero no lo incorpora al desarrollo de la clase. La gestión de la profesora al igual que en el episodio anterior, tiene una estrategia para dibujar la altura de un triángulo, pero la alumna sigue otro procedimiento. La profesora no le indica a la alumna si la altura es o no correcta, sino que decide posponer esa respuesta y seguir adelante con lo que tenía planeado.

En ambos episodios la decisión de los profesores de no indagar en cómo resuelven la tarea impide conocer el pensamiento de las alumnas para resolver la tarea y aclarar o encontrar caminos alternativos de resolución.

También encontramos tres episodios que corresponden a las Ideas de los alumnos, donde estos responden a una pregunta del profesor y este reconoce lo que dicen y lo incorpora en la clase.

En el episodio 5 la profesora pregunta si han comprendido la forma de resolver, una alumna indica que no ha comprendido por qué funciona la regla de tres y la profesora intenta atender a esta dificultad, pero indicando que ella tampoco podría explicarlo, pero que la técnica utilizada –regla de tres- es una técnica que siempre funciona en las situaciones de proporcionalidad y la justifica mostrando que si se utiliza la técnica de reducción a la unidad, se obtiene el mismo resultado.

El episodio 6, es de la misma naturaleza que el anterior, es decir, corresponde a Ideas de los alumnos y la profesora reconoce lo que dice y lo incorpora en la clase. En este caso, la respuesta de la alumna es correcta, la estrategia que sigue la alumna corresponde primero a la reducción a la unidad y posteriormente a una amplificación (multiplicar por

3). La profesora le indica que el resultado es correcto, pero que la multiplicación es por cuatro, aunque no justifica en profundidad esta acción lo que sucede es que se produce una confusión entre la razón de proporcionalidad y la razón entre los valores de una misma variable que la profesora no consigue identificar.

El tercer episodio, el episodio 10, que corresponde a las Ideas de los alumnos y la profesora reconoce lo que dice y lo incorpora en la clase. En él la profesora también tiene una estrategia previamente planificada para resolver la tarea, pero una alumna interviene indicando una forma diferente. La profesora atiende lo que dice la alumna, además de tratar de comprender su procedimiento y de explicarlo al resto de la clase, y de esta manera muestra a los alumnos una forma alternativa de resolver la tarea.

Como podemos observar en los tres episodios el desencadenante es las Ideas de los alumnos y los profesores atienden lo que dicen y lo incorporan a la clase, pero con diferentes modos de gestión, que creemos está relacionado con el conocimiento disciplinar y el conocimiento para la enseñanza que cada profesor es capaz de movilizar en el momento de la contingencia.

Para finalizar con los episodios simples, nos encontramos con otros tres episodios que corresponden a las Ideas de los alumnos y en concreto a una respuesta espontánea a la tarea de uno de los alumnos y el profesor optó por incorporar sus ideas al desarrollo de la clase.

En el episodio 1 una alumna pregunta si el procedimiento que realiza es el correcto y el profesor le responde haciendo el ejercicio en la pizarra; en este momento otros alumnos cooperan con la resolución llegando a una respuesta incorrecta, pero que el profesor no detecta y de esta manera siguen resolviendo el resto de los ejercicios. En este caso la intervención de un alumno distrae al profesor de la estrategia que tenía previamente planificada lo que induce a un error.

En el episodio 3, la intervención de un alumno a la posterior resolución de la tarea por parte de uno de sus compañeros, le indica al profesor que el resultado es incorrecto. El profesor al atender esta intervención permite modificar la respuesta, entregando la correcta a la clase.

En el episodio 9, la intervención de una alumna al resultado correcto de una tarea permite a la profesora subrayar la importancia del valor de posición de los números en el sistema decimal posicional y de esta manera seguir profundizando en su aprendizaje.

En estos tres episodios la gestión de los profesores frente a una intervención espontánea de los alumnos permite que los profesores profundicen en el conocimiento matemático que están aprendiendo sus alumnos, lo cual es altamente positivo, excepto en el episodio 1, donde los alumnos se quedan con un procedimiento erróneo para resolver ese tipo de tareas.

El último episodio simple corresponde al episodio 11. Este, a diferencia de los 8 anteriores, se desencadena por las Ideas del profesor. La profesora plantea una tarea, pero se da cuenta que no es un buen ejemplo para desarrollar el objetivo que ella había planeado, de encontrar un valor en una situación proporcional mediante la reducción a la unidad, por lo que decide cambiar el problema y así seguir con la clase. Este cambio se produce porque la profesora, ante las dificultades mostradas por los alumnos para resolver el ejercicio, considera que los valores implicados en la situación añaden complejidad a la tarea, por lo que opta por cambiar los datos de la misma

Los resultados anteriormente expuestos corresponden a los episodios simples; veamos los resultados correspondientes a los tres episodios complejos.

Para relacionar la contingencia con la gestión de la clase en estos episodios, seguimos una estrategia levemente diferente a los episodios simples. Destacamos el primer desencadenante de la contingencia, pero luego pusimos atención a las siguientes contingencias y sus desencadenantes.

El primer episodio complejo corresponde al episodio 7, en este caso el primer desencadenante, el que produce la contingencia inicial, corresponde a la intervención espontánea de un alumno y la profesora reconoce lo que dice y lo incorpora en la clase. En este caso la dificultad que exhibe el alumno es la medida de la longitud de un libro de texto mientras otros compañeros indican valores diferentes para dicha medida. En este caso, para resolver la contingencia y volver a la tarea que deben realizar, la profesora opta por entregar un valor único para la longitud lejos de resolver la dificultad, se producen 4 nuevas contingencias, que retrasan la resolución de la contingencia inicial y permiten hacer que el episodio sea de una extensa duración. Finalmente, para acabar con las diferencias de resultados, la profesora decide indicar los valores que son los correctos sin contrastarlos con los valores obtenidos por los alumnos.

El segundo episodio complejo que estudiamos es el episodio 12. En este caso, la profesora atiende a la idea que le propone un alumno, y la clase gira en torno a esta idea de modo que el resto de compañeros tratan de ayudarle a comprender el procedimiento que la profesora enseñó. Durante la duración de este episodio se producen 7 nuevas contingencias. Finalmente la profesora decide dar por terminada la contingencia, indicando que no hay más tiempo para seguir profundizando en la dificultad que presenta este alumno y que seguirán con lo que tenían planificado, sin aclarar las dudas que el alumno presentó al iniciar el episodio.

El tercer y último episodio complejo es el episodio 8. Este episodio tiene como característica que la contingencia está en las Ideas del profesor. La profesora propone una tarea a los alumnos, pero en el desarrollo de ella van apareciendo dificultades, por lo que decide cambiar la tarea y ejemplificar con otra, para luego finalizar volviendo a la tarea original.

En estos tres episodios complejos, existe una dificultad agregada al análisis, debida a la duración, la cantidad y la extensión de las intervenciones de los alumnos y los profesores.

El revisar el grupo de datos de nuestro análisis nos permite asegurar que existe una relación estrecha entre el conocimiento matemático y la gestión de las situaciones contingentes. Analizar los momentos contingentes a la luz del conocimiento nos puede entregar información relevante de esta relación y las consecuencias para la realización de una gestión de la contingencia que nos permita colocar atención en el conocimiento profesional del profesorado y en las implicaciones de dicha gestión en los procesos de enseñanza y de aprendizaje de la matemática.

Cuando revisemos los resultados del objetivo específico 3, daremos una posible interpretación a la gestión que realizan estos profesores, en cada uno de nuestros episodios y la conexión entre los conocimientos matemáticos y de la enseñanza y la gestión de los profesores y profesoras.

Objetivo específico 3:

Interpretar la gestión que el profesorado lleva a cabo de estas situaciones de contingencia a partir de su conocimiento.

La interpretación de la gestión de los profesores y profesoras de nuestros 12 episodios, la realizamos apoyándonos en el conocimiento matemático que se movilizaba en las tareas propuestas y en el conocimiento matemático para enseñar.

En cada uno de los 12 episodios, luego de identificar el desencadenante y la respuesta del profesor o profesora, analizamos la gestión teniendo como foco los conocimientos movilizados. Es por esta razón que en el análisis cada episodio, después de la descripción y de la identificación del desencadenante y el detalle de la respuesta del profesor, hemos añadido dos apartados: Conocimiento matemático movilizado en el episodio y Conocimiento para enseñar del profesor.

Para mostrar los resultados de los episodios analizados seguiremos el orden de los episodios que utilizamos en el objetivo específico anterior.

Episodio 2, Ideas de los alumnos: un alumno pregunta al profesor y este reconoce lo que dice pero no lo incorpora al desarrollo de la clase.

El conocimiento matemático que el profesor desaprovechó al no incorporar la forma alternativa de resolución que le indicó Lorena, tiene relación con la posibilidad de establecer la proporcionalidad, y por tanto de resolver problemas de magnitudes proporcionales mediante la utilización de compensaciones aditivas.

La explicación de Lorena es de compleja comprensión para una mirada superficial, pero al examinarla con más detalle se puede apreciar la riqueza matemática de su razonamiento.

En cuanto al conocimiento para enseñar expuesto en este episodio concluimos que la fortaleza del profesor es que el profesor conoce la respuesta correcta de la tarea, y las debilidades se expresan mayormente en torno al conocimiento especializado del contenido, ya que el profesor no indaga en la explicación matemática de Lorena, perdiendo una oportunidad importante de seguir profundizando en el concepto de proporcionalidad. En el episodio queda patente que, en ocasiones, el razonamiento informal de un alumno es difícil de interpretar por parte del profesor, seguramente por la inmediatez y la necesidad de una respuesta rápida en la clase.

Episodio 4, Ideas de los alumnos: un alumno entrega una respuesta incorrecta a una pregunta y este reconoce lo que dice, pero no lo incorpora al desarrollo de la clase.

Respecto del conocimiento matemático, la profesora manifestó durante la clase que la altura correspondía a la línea perpendicular desde un vértice al lado opuesto; la altura que dibujó Valentina no se corresponde a esa definición, aunque en términos de medida podríamos indicar que efectivamente es la misma que la de una altura del triángulo. Valentina no sigue la definición entregada por la profesora, lo cual puede ser una razón para que la profesora no se arriesgue a indicar si el dibujo de la alumna una altura o no, por el hecho de que, a efectos del valor de la medida, el segmento trazado por Valentina es equivalente a la altura. No se logra apreciar cuán profundo es el conocimiento matemático del concepto de altura de la profesora, ni si se ha percatado de cual es al auténtico problema, por lo que esto podría justificar que la profesora no incorporara la respuesta de Valentina en el desarrollo de la clase.

En cuanto al conocimiento para enseñar, hay pocos indicadores de este conocimiento que se logren apreciar en el episodio. No se manifiesta explícitamente que la profesora conozca el objeto geométrico altura, y en particular el hecho que segmentos paralelos determinados por rectas paralelas tienen la misma medida, resultado que forma parte del conocimiento especializado. Tampoco se evidencia que indague en qué hizo la alumna para construirla, ni realiza una pausa para aclarar posibles dudas de los alumnos, perdiendo con ello una oportunidad de aprendizaje sobre el concepto de altura de un triángulo.

Después de analizar los episodios anteriores según los conocimientos que se movilizan, creemos que una posible razón para que los profesores no incorporen algunas de las ideas de los alumnos al desarrollo de la clase, es por un lado un conocimiento matemático no suficientemente fundamentado de los objetos estudiados y por otro lado un reducido conocimiento matemático para enseñar. Por todo ello, en ciertos casos, los profesores no pudieron incorporar las ideas de los alumnos, ni anticiparse a las posibles respuestas, ni abordar la complejidad de las matemáticas utilizadas en la resolución de las tareas propuestas.

Los siguientes tres episodios corresponden a Ideas de los alumnos: responden a una pregunta del profesor el cual reconoce la intervención y la incorpora en la clase.

En el episodio 5, el conocimiento matemático expuesto en este episodio está relacionado con la utilización de la técnica de la regla de tres. La profesora la utiliza, pero manifiesta que no sabe por qué la usa y recurre a la técnica que conoce, reducción a la unidad.

En cuanto al conocimiento para enseñar, la fortaleza de la profesora se muestra en el conocimiento del contenido y la enseñanza, haciendo una pausa en lo que estaba enseñando, además de modificar la forma de explicar la resolución. Se aprecia un conocimiento especializado insuficiente, debido a la afirmación de la profesora sobre la justificación de la regla de tres.

En el Episodio 6, el conocimiento matemático que se moviliza en este episodio tiene relación con el uso de las magnitudes proporcionales, es decir, la relación entre las cantidades de las dos magnitudes del problema. La profesora, para resolver la tarea, relaciona la completación de la tabla con el uso de las fracciones equivalentes, sin hacer mención a la relación entre las variables del problema, lo que podría confundir a la alumna.

Respecto del conocimiento para enseñar, la profesora muestra un conocimiento común parcializado, ya que si bien conoce la respuesta a través del uso de las fracciones equivalentes, las formas de acceder a la respuesta se desvían de la tarea que consiste en relacionar las variables. También demuestra un manejo del conocimiento para la enseñanza cuando decide qué ejemplos formarán parte de las tareas para los alumnos y cuando detiene la clase para puntualizar sobre la forma de resolución. Los otros conocimientos, especializado y de los estudiantes no fueron observados en esta ocasión.

En el episodio 10, el conocimiento matemático que se utiliza, al igual que en los episodios anteriores (5 y 6), es la proporcionalidad de magnitudes. En este caso la profesora relaciona las magnitudes mediante el "factor de paso". La alumna muestra una forma alternativa de resolver y la profesora muestra al resto del curso esta nueva forma de resolver el problema, por lo que podemos inferir que la profesora posee conocimientos para un manejo de diferentes procedimientos para la resolución.

En relación con el conocimiento para enseñar, la profesora muestra un manejo del conocimiento común cuando indica el resultado que deben encontrar los alumnos. Otro punto fuerte de la profesora es el conocimiento especializado, escuchando y comprendiendo la explicación de Ana. Quizás uno de los conocimientos débiles en esta contingencia es el de los estudiantes, por no prever ni adelantarse a otras formas de resolución.

Estos últimos tres episodios, el 5, 6 y 10, corresponden al mismo desencadenante y el mismo tipo de respuesta de las profesoras, pero se verifica una gestión diferente en cada caso. Creemos que un manejo más profundo del contenido matemático y del conocimiento matemático para enseñar permite a los estudiantes adquirir nuevas formas de resolución y a su vez mayor confianza en sus capacidades, como puede observarse en el episodio 10.

Siguiendo con los resultados, revisaremos los siguientes tres episodios que corresponden a las Ideas de los alumnos, donde estos respondieron de manera espontánea a la tarea propuesta y el profesor optó por incorporar sus ideas al desarrollo de la clase.

En el episodio 1, el conocimiento matemático es la transformación de un número decimal en su fracción decimal equivalente. El profesor influenciado por la intervención de un alumno, muestra un desarrollo incorrecto de la transformación de un número decimal en su forma de fracción decimal y entrega un resultado con un error matemático.

En cuanto al conocimiento para enseñar en el episodio se demuestran debilidades en todos los subdominios que estudiamos.

En cuanto al episodio 3, el conocimiento matemático movilizado es el cálculo del porcentaje de un número. En este caso el alumno entrega una respuesta incorrecta y el profesor nota el error por la intervención de un alumno. Al verificar que el resultado es incorrecto, modifica el resultado y le muestra a los alumnos los cálculo para encontrar la respuesta correspondiente.

Al tomar en cuenta la idea del alumno, el profesor atendió al conocimiento de los estudiantes y el contenido y conocimiento del contenido y la enseñanza. Los otros subdominios estudiados en la contingencia no fueron visualizados.

En el episodio 9, el conocimiento matemático es la escritura de decimales, que la profesora demuestra conocer y manejar al responder a la duda que presenta una alumna.

La profesora al atender la duda de la alumna, demuestra poseer conocimiento para enseñar. El conocimiento especializado lo observamos cuando enfatiza en la importancia del valor posicional de los números y el conocimiento para la enseñanza cuando percibe que la pregunta le permitirá profundizar en el conocimiento matemático del sistema decimal posicional.

En estos tres episodios analizados, donde los alumnos intervienen de manera espontánea y los profesores incorporan sus ideas al desarrollo de la clase, el conocimiento matemático primero, y luego el conocimiento para enseñar de cada profesor parece ser determinante para la gestión que realiza de la contingencia. En el episodio 1, el profesor no detectó el error de la transformación del número decimal en la fracción decimal y en el episodio 3 el profesor solo se percató del error por la intervención del alumno. Con estos casos creemos que un profesor podría no manejar completamente el conocimiento matemático, pero si tiene herramientas del conocimiento para enseñar, como indagar en las ideas de los alumnos, la gestión de una situación contingente pudo ser mejor lograda, como ocurre en el episodio 9. En este último episodio, la profesora rescata la pregunta de la alumna y aprovecha esta intervención para profundizar en un concepto que ella considera relevante para el aprendizaje de los alumnos.

El episodio 11, que es desencadenado por la idea de la profesora, utiliza para la resolución de la tarea el contenido de proporcionalidad directa. En este caso la profesora muestra un manejo de esta proporcionalidad al conocer cuál es el resultado correcto.

Es posiblemente su manejo del conocimiento para enseñar lo que permite que modifique la tarea que presentó a la clase. En el momento de la enseñanza nota que el resultado será un número decimal ilimitado y, pensando en la dificultad que esto podría suponer a los alumnos, decide cambiar los datos para que la técnica de reducción a la unidad sea un procedimiento realizable por los alumnos.

En este caso, la propia reflexión de la profesora propició la contingencia y con las herramientas profesionales que poseía trata de gestionarla introduciendo un cambio, para propiciar un mejor aprendizaje en sus alumnos.

Los últimos tres episodios que revisaremos corresponden a los episodios complejos.

El episodio 7, moviliza el conocimiento de geometría que relaciona la medida con el cálculo del perímetro de una figura. La profesora está más centrada en el cálculo del perímetro que en las dificultades que la medición induce en los alumnos, lo que propicia la aparición de la contingencia inicial. Las siguientes situaciones contingentes dentro del episodio se relacionan con esta falta de previsión en cuanto a las dificultades de los alumnos para realizar de manera efectiva una medición.

La gestión de las situaciones de contingencia se ve influida por el conocimiento para enseñar que la profesora manifiesta. Una previsión acerca de que la medición puede entregar valores diferentes a los alumnos pudo prevenir la contingencia. Además, una posterior atención a esta dificultad también pudo aportar al aprendizaje de los alumnos.

El episodio 12, moviliza el contenido de la operatoria de números enteros, en particular la adición. La profesora muestra conocer y manejar el conocimiento matemático relativo a los números enteros. Además para su enseñanza toma la previsión de relacionar la operatoria con el modelo de enseñanza del desplazamiento y considera que eso es suficiente para que sus alumnos resuelvan diferentes ejercicios. Al no esperar que un alumno interrumpiera la clase por no comprender la operatoria, la clase se desvía de su objetivo y se produce la contingencia. Las situaciones contingentes dentro del episodio giran en torno a esta dificultad de un alumno en particular que no entiende porque la regla de los signos funciona. Como la profesora no posee estrategias alternativas de enseñanza, finalmente la contingencia es resuelta por la autoridad que tiene la profesora sobre la clase.

El episodio 8, es desencadenando por la propia reflexión de la profesora, cuando se percata que la tarea propuesta no le permitirá centrarse en su objetivo de clase que es la proporcionalidad inversa. La profesora gestiona esta contingencia cambiando la tarea y atendiendo a otras contingencias que aparecen durante su desarrollo.

En este caso, su conocimiento matemático y su conocimiento para enseñar le permiten terminar la nueva tarea con los alumnos y retomar la tarea inicial.

De los 12 episodios analizados, concluimos que el conocimiento matemático es esencial cuando se enseña, pero además cuando va acompañado de un conocimiento para enseñar, la gestión que realizan los profesores de las situaciones contingentes les permite salir de esas situaciones facilitando el aprendizaje matemático en sus alumnos.

Conclusión final

Finalmente, queremos destacar que el trabajo fundamental de esta tesis ha consistido en relacionar los marcos teóricos del MKT de Ball y el KQ de Rowland. Esta relación nos ha permitido analizar la contingencia, que es una de las categorías del KQ, a partir de algunos subdominios del modelo de Ball, en particular aquellos destacados por Turner (2012): conocimiento común, conocimiento especializado, conocimiento del contenido y la enseñanza, y conocimiento del contenido y los estudiantes. Producto de nuestro trabajo es que coincidimos con esta investigadora, en cuanto a los subdominios presentes en la contingencia.

Sin embargo, producto de este análisis, observamos la dificultad para detectar las lagunas de conocimientos que poseerían los profesores, por lo que no podemos asegurar que un determinado profesor no posee los conocimientos necesarios para una enseñanza efectiva; sólo podemos asegurar que en los episodios de contingencia analizados el profesorado no ha sido capaz de movilizarlo. Esto se puede deber al hecho que la contingencia es una situación no planificada y que requiere de una intervención inmediata. Si pensamos en la gestión de la enseñanza, concordamos con lo expuesto por Rowland, Turner, Thwaites y Huckstep (2009), que es meritorio reconocer las ideas de los alumnos y responder hábilmente a los alumnos para que estos creen nuevas conexiones y logren aprender; y que también es posible que el profesor no responda a todas las intervenciones de los alumnos por una cuestión de tiempo.

En definitiva, esta investigación nos ha permitido analizar la práctica del profesorado de matemáticas para conocer los conocimientos que se movilizan mientras se enseña. Creemos que esta forma de acercarse a la práctica puede ser un modelo para conocer de forma más cercana y con mayor profundidad la práctica del profesorado en situaciones de contingencia, el que ha sido el objetivo final de nuestro trabajo, y que tal como menciona Ball y Forzani, (2009) “la práctica de enseñanza comprende la actividad diseñada intencionalmente para reducir el azar, es decir, para aumentar la probabilidad de que los alumnos alcancen las metas específicas propuestas”, (p. 499)

Referencias

Adler, J., Ball, D., Krainer, K., Lin, F. L., & Novotna, J. (2005). Reflections on an emerging field: Researching mathematics teacher education. *Educational Studies in Mathematics*, *60*, 359–381.

Ball, D. L. (2000). Bridging Practices: Intertwining Content and Pedagogy in Teaching and Learning to Teach. *Journal of Teacher Education*, *51*(3), 241–247.

Ball, D. L., & Bass, H. (2003). Toward a practice-based theory of mathematical knowledge for teaching. En B. Davis & E. Simmt (Eds.), *Proceedings of the 2002 Annual Meeting of the Canadian Mathematics Education Study Group.* (pp. 3–14). Edmonton, AB: CMESG/GCEDM.

Ball, D. L., & Cohen, D. K. (1999). Developing Practice, Developing Practitioners: Toward a practice-based theory of professional education. En G. Sykes & L. Darling-Hammond (Eds.), *Teaching as the learning profession: Handbook of policy and practice* (pp. 3–32). San Francisco: Jossey Bass.

Ball, D., & Forzani, F. (2009). The work of teaching and the challenge for teaching education. *Journal of Teacher Education*, *60*(5), 497–511.

Ball, D. L., & Lampert, M. (1999). Multiples of evidence, time, and perspective: Revising the study of teaching and learning. En E. C. Lageman & L. Shulman (Eds.), *Issues in education research: problems and possibilities.* (pp. 371–398). San Francisco: Jossey-Bass.

Ball, D. L., Thames, M. H., & Phelps, G. (2008). Content knowledge for teaching: What makes it special? *Journal of Teacher Education*, *59*(5), 389–407.

Boaler, J. (2003). Studying and Capturing the Complexity of Practice-The Case of the “Dance of Agency”. *International Group for the Psychology of Mathematics Education*, *1*, 3–16.

Carreño, X. Rodriguez, B., Ochsenius, H. & Muñoz, V. (2014). ¿Cuánto saben de matemática los docentes que la enseñan y como se relaciona este saber con sus prácticas de enseñanza? III Congreso interdisciplinario de Investigación en Educación. Santiago de Chile.

Centeno, J. (1988). *Números decimales. ¿Por qué? ¿Para qué?*. Madrid: Síntesis.

Climent Rodríguez, N. (2002). *El desarrollo profesional del maestro de primaria respecto de la enseñanza de la matemática: un estudio de caso*. (Tesis doctoral inédita). Universidad de Huelva, Huelva.

Cooney, T. (1998). Editorial. *Journal of Mathematics Teacher Education*, *1*(1), 1–2.

Depaepe, F., Verschaffel, L., & Kelchtermans, G. (2013). Pedagogical content knowledge: A systematic review of the way in which the concept has pervaded mathematics educational research. *Teaching and Teacher Education*, *34*, 12–25.

English, L. D. (2008). Setting an agenda for international research in mathematics education. En *Handbook of international research in mathematics education (2nd Edition)* (pp. 3–19). New York & London: Taylor and Francis (Routledge).

Erickson, F. (1986). Qualitative methods in research on teaching. In M. C. Wittrock (Ed.), *Handbook of research on teaching* (3rd Ed., pp. 119–161). New York, NY: MacMillan Press.

Erickson, F. (2006). Definition and analysis of data fromm videotape: some research procedures and their rationales. En J. Green, G. Camilli, & P. Elmore (Eds.), *Handbook of complementary methods in education research* (pp. 177–191). Washington, D.C: American Educational Research Association.

Fennema, E., & Franke, M. L. (1992). Teachers' knowledge and its impact. En D. A. Grows (Ed.), *Handbook of research on mathematics teaching and learning: A project of the National Council of Teachers of Mathematics.* (pp. 147–164). New York, NY, England: MacMillan Publishing Co.

Fernández, S., & Figueiras, L. (2014). Horizon Content Knowledge: shaping MKT for a continuous mathematical education. *REDIMAT*, *3*(1), 7–29.

Figueiras, L., Ribeiro, M., Carrillo, J., Fernández, S. & Deulofeu, J. (2011). Teachers' advanced mathematical knowledge for solving mathematics teaching challenges: a response to Zazkis and Mamolo. *For the Learning of Mathematics*, *31*(2), 26-29.

Fiol Mora, M. L., & Fortuny, J. M. (1990). *Proporcionalidad directa: la forma y el número*. Madrid: Síntesis.

Forgaz, H., & Leder, G. (2008). Beliefs about mathematics and mathematics teaching. En T. Sullivan, P; Wood (Ed.), *International handbook of mathematics teacher education: Knowledge and Beliefs in Mathematics Teaching and Teaching Development* (pp. 173–192). Rotterdam, Netherlands: Sense Publishers.

Giné, C.,& Deulofeu, J. (2014). Conocimientos y Creencias entorno a la Resolución de Problemas de Profesores y Estudiantes de Profesor de Matemáticas *BOLEMA, 28(48),*191-208.

Godino, J. (2004). *Matemáticas y su Didáctica para Maestros*. Granada: Universidad de Granada. Recuperado de: http://www.ugr.es/~jgodino/edumat-maestros/manual/8_matematicas_maestros.pdf

Godino, J., Cid, E., & Batanero, C. (2003). Sistemas numéricos y su didáctica para maestros. In *Matemática para maestros* (pp. 167–412). Granada: Universidad de Granada. Recuperado de: http://www.ugr.es/~jgodino/edumat-maestros/manual/3_Proporcionalidad.pdf

Klein, M., Putt, I., & Stillman, G. (1999). Editorial: Sabre Rattling or Genuine Change. *Mathematics Teacher Education and Development (MTED), 1*, 1–3.

Konic, P., Godino, J., & Rivas, M. (2010). Análisis de la introducción de los números decimales en un libro de texto. *Números*, *74*, 57–74.

Lampert, M. (2001). *Teaching problems and the problems of teaching.* New Haven: Yale University Press.

Lampert, M. (2009). Learning Teaching in, from, and for Practice: What Do We Mean? *Journal of Teacher Education*, *61*(1-2), 21–34.

Latorre, A., del Rincón Igea, D., & Agustín, J. A. (1996). *Bases metodológicas de la investigación educativa*. Barcelona: GR92.

Ma, L. (2010). *Conocimiento y enseñanza de las matemáticas elementales: la comprensión de las matemáticas fundamentales que tienen los profesores en China y los EE.UU.* Academia Chilena de Ciencias.

Mason, J., & Spence, M. (1999). Beyond mere knowledge of mathematics: the importance of knowing-to act in the moment. *Educational Studies in Mathematics*, *38*, 135–161.

Mesa, V., & Leckrone, L. (2014). Assessment of Mathematics Teacher Knowledge. In S. Lerman (Ed.), *Encyclopedia of Mathematics Education SE - 13* (pp. 48–51). Springer: Netherlands.

Pajares, M. F. (1992). Teachers' beliefs and educational research: Claning up a messy construct. *Review of Educational Research*, *62*(3), 307–332.

Petrou, M., & Goulding, M. (2011). Conceptualising Teachers' Mathematical Knowledge in Teaching. En T. Rowland & K. Ruthven (Eds.), *Mathematical Knowledge in Teaching* (Vol. 50, pp. 9–25). Springer Netherlands.

Rodríguez, G., Gil, J., & García, E. (1999). *Metodología de la investigación cualitativa*. Málaga: Aljibe.

Rowland, T. (2008). Researching Teachers' Mathematics Disciplinary Knowledge. En P. Sullivan & T. Wood (Eds.), *International handbook of mathematics teacher education: Knowledge and Beliefs in Mathematics Teaching and Teaching Development* (Vol. 1, pp. 273–298). Rotterdam, the Netherlands: Sense Publishers.

Rowland, T., Huckstep, P., & Thwaites, A. (2005). Elementary Teachers' Mathematics Subject Knowledge: the Knowledge Quartet and the Case of Naomi. *Journal of Mathematics Teacher Education*, *8*(3), 255–281.

Rowland, T., Thwaites, A., & Jared, L. (2011). Triggers of contingency in mathematics teaching. In B. Ubuz (Ed.), *Proceedings of the 35th Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education* (pp. 73–80). Ankara, Turkey: PME.

Rowland, T., & Turner, F. (2007). Developing and using the "Knowledge Quartet": A framework for the observation of mathematics teaching. *The Mathematics Educator*, *10*(1), 107–123.

Rowland, T., Turner, F., & Thwaites, A. (2014). Research into teacher knowledge: a stimulus for development in mathematics teacher education practice. *ZDM*, *46*(2), 317–328.

Rowland, T., & Zazkis, R. (2013). Contingency in the Mathematics Classroom: Opportunities Taken and Opportunities Missed. *Canadian Journal of Science, Mathematics and Technology Education*, *13*(2), 137–153.

Schoenfeld, A. (2008). Research methods in (mathematics) education. In L. D. English (Ed.), *Handbook of international research in mathematical education (2nd Edition)* (pp. 467–519). New York: Taylor & Francis.

Schoenfeld, A. (2011). Toward professional development for teachers grounded in a theory of decision making. *ZDM*, *43*(4), 457–469.

Schoenfeld, A. (2013). Classroom observations in theory and practice. *ZDM*, *45*(4), 607–621.

Schön, D. A. (1992). *La Formación de profesionales reflexivos: hacia un nuevo diseño de la enseñanza y el aprendizaje en las profesiones*. Barcelona: Paidós.

Sfard, A. (2005). What could be more practical than good research? On mutual relation between research and practice of mathematics education. *Educational Studies in Mathematics*, *58*(3), 393–413.

Shulman, L. (1986). Those who understand: Knowledge growth in teaching. *Educational Researcher*, *15*(2), 4–14.

Solar, H.& Deulofeu, J. (2014) Tratamiento de la contingencia desde el desarrollo de la competencia de argumentación en el aula de matemáticas. Acta Latinoamericana de Matemática Educativa (27), 317-325.

Solar, H.& Zamorano, A. (2015) Análisis de las situaciones de contingencia a través de las estrategias comunicativas. *XIV Conferencia Interamericana de Educación Matemática*. Chiapas, México.

Stake, R. E. (2007). *Investigación con estudio de casos.* (Cuarta Ed.). Madrid: Ediciones Morata.

Sullivan, P., Mousley, J., & Zevenbergen, R. (2006). Teacher Actions to Maximize Mathematics Learning Opportunities in Heterogeneous Classrooms. *International Journal of Science and Mathematics Education*, *4*(1), 117–143. doi:10.1007/s10763-005-9002-y

Turner, F. (2012). Using the Knowledge Quartet to develop mathematics content knowledge: the role of reflection on professional development. *Research in Mathematics Education*, *14*(3), 253–271.

Vale, C., McAndrew, A., & Krishnan, S. (2011). Connecting with the horizon: developing teachers' appreciation of mathematical structure. *Journal of Mathematics Teacher Education*, *14*(3), 193–212.

Yin, R. K. (2006). Case study methods. In J. Green, G. Camilli, & P. Elmore (Eds.), *Handbook of complementary methods in education research* (pp. 111–122). Washington, D.C: American Educational Research Association.

Zamorano, A. (2014). El conocimiento matemático para enseñar movilizado en situaciones de contingencia. XVIII Jornadas de Educación Matemática. Santiago de Chile: USACH.

Zaskis, R., & Mamolo, A. (2011). Reconceptualizing knowledge at the mathematical horizon. *For the Learning of Mathematics*, *31*(2), 8–13.