Universitat
Autònoma
de Barcelona

Dept. de Didàctica de les Ciències i les Matemàtiques

TESI DOCTORAL

Sobre les estratègies de resolució de problemes d'estimació de magnituds no abastables

Treball presentat per **Lluís Albarracín i Gordo** a la Universitat Autònoma de Barcelona per assolir el grau de **Doctor en Didàctica de les Matemàtiques**.
Dirigit per **Núria Gorgorió i Solà**.

Bellaterra, febrer de 2011

Directora: **Núria Gorgorió i Solà**
Universitat Autònoma de Barcelona
Dep. Ciències de l'Educació

Fotografia de la contraportada: Jaume Aguadé i Bover

Aquest document ha estat escrit utilitzant LaTeX 2_ε.

Als meus pares i a la Krys.

I a l'Aura, el millor exemple que
puc posar d'una estimació no abastable.

Agraïments

Sempre m'ha costat centrar-me en fer només una cosa, sovint em distrec i el cap se me'n va cap a qualsevol altre lloc. De fet, no totes les coses que he fet en el procés d'elaboració d'aquesta tesi han estat estimulants o interessants. Per tot plegat, he utilitzat petits entreteniments que han permès que la feina fos menys feixuga en diferents aspectes. No m'atreviria a dir que han inspirat el meu treball, però estaven allà i es mereixen una menció.

Per començar, al portàtil en el que redactat el document, buscat i llegit la majoria d'articles i fet l'anàlisi de dades, hi tinc una carpeta amb música. Hi ha 127 discos, d'uns 50 grups. He sentit els nous discos de Metallica o Blind Guardian, he descobert a Mercenary o Opeth i crec que el disc que més vegades he posat a estat el *Wish you were here* de Pink Floyd. Així és com sona la meva tesi.

D'altra banda, en els moments en els que tenia menys força de voluntat, jugava. Així de simple. Sempre relaxa fer una partideta a un joc en flash que puguis trobar a qualsevol web. A ser possible, un joc que no et tingui enganxat i que puguis deixar fer sol de tant en tant. Res millor que un joc d'estratègia per torns, en especial el Vector Tower Defense. Proveu-lo i ja em direu si el podeu deixar.

Una altra dedicació essencial per perdre el temps i poder tornar a la feina amb energia és navegar per Internet. Entre manuals de LaTeX, pàgines de revistes serioses i altres coses, hi sobresurt el *Francis (th)E mule Science's News*[1] amb notícies fresques sobre física d'alt nivell que, senzillament, no entenc. Mirant l'historial del meu navegador hi podeu trobar de tot, però el més divertit és un simulador de trànsit de vehicles. M'agrada generar i observar embussos si jo no els haig de patir.

Però bé, tot això no deixen de ser curiositats diverses que em serveixen d'entreteniment. Parlem de persones.

[1] http://francisthemulenews.wordpress.com/

Per començar, i no podria ser d'una altra forma, cal fer esment de tots els alumnes que m'han patit a les classes en els anys que porto de professor. Alguns han après algunes cosetes amb mi (fins i tot algunes sobre matemàtiques) però és ben clar que jo he après molt amb ells. En especial, cal agrair la seva complicitat i esforç a tots els alumnes que han participat en les activitats directament relacionades amb els diferents estudis presentats en aquesta tesi. També es mereixen una abraçada tots els companys de feina amb els que he compartit sala de professors, que és sinònim de llargues discussions sobre qualsevol cosa relacionada amb l'educació.

D'altra banda, els membres del grup EMiCS són responsables d'una part important dels possibles encerts que es puguin trobar en aquest document. Compartir les seves vivències en el camp de la recerca ha servit perquè jo, un professor que fa d'investigador en el seu temps lliure, pugui optimitzar esforços. Sona a tòpic, però hem rigut i hem plorat i hem fet que els seminaris dels dimecres, que es poden fer en qualsevol altre dia de la setmana, siguin un espai de feina complaent. Per si un dia me n'oblido de dir-ho: Ha estat un plaer.

Com a directora, només puc considerar la tasca de la Núria com a excel·lent. Ha guiat i puntualitzat el meu treball sempre que ha estat necessari, ha controlat els meus impulsos d'anar-me'n per les branques i ha buscat el camí més fàcil en cada ocasió amb una visió excepcional del projecte. Us puc assegurar que la seva tasca no era senzilla, ja que sóc molt de fer la meva i no sóc fàcil de convèncer. Les nostres trobades de treball han estat enriquidores des del punt de vista formatiu, però també han estat plaents i divertides, crec que haurem de buscar alguna excusa per continuar-les. De fet, no veig a la Núria exclusivament com la directora de la meva tesi, sinó que ha esdevingut algú proper en qui es pot confiar. I això no és poca cosa.

Per finalitzar, només em queda agrair infinitament a l'Aura la seva comprensió i suport anímic en tot moment. De fet, m'ha ajudat en la tipografia del document, en la correcció ortogràfica i ha compartit les seves idees sobre com s'ha de portar a terme un projecte de recerca, així que és una component activa d'aquesta tesi. Com que jo he dedicat una quantitat ingent del meu temps lliure a aquesta recerca, ella ha estat la més gran perjudicada. Sempre ha estat al meu costat, no només en l'elaboració d'aquesta tesi, sinó en qualsevol altre projecte o decisió que m'hagi tocat prendre en els últims 12 anys. Així que s'ha guanyat el meu agraïment més tendre, el que no sé escriure en un paper.

Pròleg

El treball que presentem en aquest document és un estudi exploratori sobre resolució de problemes. Més concretament, el que pretenem és entendre amb més profunditat els processos de resolució proposats pels alumnes d'Ensenyament Secundari a una classe de problemes que introduïm en aquest treball. Aquest tipus de problemes són els que hem anomenat problemes d'estimació de magnituds no abastables (PEMNA).

Aquest treball és la continuació del que vàrem presentar com a Treball de Recerca del Màster d'Iniciació de la Recerca en Didàctica de les Ciències i les Matemàtiques el setembre de 2008 i que portava per títol *Sobre les organitzacions espontànies d'estimació de mesures de magnituds no abastables* (Albarracín [1]).

Descrivim a continuació els continguts dels diferents capítols que conformen aquest treball.

El primer capítol, *Introducció*, està centrat en presentar al lector els condicionants que indueixen aquesta recerca. S'introdueixen els primers pensaments sobre els PEMNA i es plantegen els diferents tipus de motivacions que ens han portat a dur a terme aquest estudi.

En els processos de resolució d'un PEMNA participen i influeixen diferents conceptes que ja han estat discutits a la literatura. El segon capítol, *Referents teòrics*, comença presentant els diferents coneixements establerts sobre resolució de problemes, des dels més genèrics fins als més propers al tipus de problemes que estudiem, com són la influència del context del problema en la seva resolució, l'autenticitat o la modelització.

A continuació es presenten els aspectes relacionats amb la mesura de magnituds i l'estimació, distingint les diferents vessants d'aquesta última així com les seves característiques. Finalment, es presenta el coneixement present a la literatura sobre els anomenats Problemes de Fermi, els quals tenen una relació directa amb els PEMNA.

El tercer capítol, *Plantejament del problema de recerca*, tracta de centrar el problema d'investigació que abordem en aquest treball. El capítol comença amb la presentació dels aspectes del nostre context educatiu que estan relacionats amb els PEMNA i continua amb la presentació de la recerca prèvia documentada al treball *Sobre les organitzacions espontànies d'estimació de mesures de magnituds no abastables* (Albarracín [1]). A continuació es defineixen formalment les magnituds no abastables i els PEMNA en el que suposa la primera aportació d'aquest treball.

Per finalitzar, es concreta la recerca i es defineixen els objectius d'aquesta. S'estableixen objectius relacionats amb l'estudi empíric que duem a terme relacionats amb la caracterització de les propostes de resolució dels alumnes i amb les estratègies de resolució detectades. A part, s'estableixen propòsits de caire teòric i les implicacions didàctiques de l'estudi.

En el quart capítol, *Disseny de la recerca i elaboració de l'instrument*, es descriu el disseny del nostre estudi empíric i es proposa una àmplia llista de PEMNA. Aquesta llista constitueix per ella mateixa una segona aportació d'aquest treball. A continuació es presenta el procés a través del qual aquesta llista de problemes permet construir i perfilar una eina de recollida de dades que ens és útil per caracteritzar les propostes de resolució dels alumnes de secundària als PEMNA proposats. Finalment es descriu la població que es va prestar a participar al nostre estudi i la forma en la que es van recollir les dades.

El cinquè capítol, *Anàlisi i resultats*, descriu la forma en la que s'ha efectuat l'anàlisi de les dades recollides en el nostre estudi. La nostra anàlisi es centra en l'elaboració dels arbres de categories que permeten caracteritzar les propostes de resolució de PEMNA que fan els alumnes. En aquest apartat del document es justifica la forma en la que s'han elaborat aquestes categories i s'exposen els resultats obtinguts. Finalment, es pot trobar una anàlisi relacional entre algunes de les característiques més rellevants.

El sisè capítol, *Conclusions, discussió i prospectiva*, es centra en la revisió dels objectius i propòsits de la recerca efectuada, tant aquells que es refereixen a l'estudi empíric realitzat com les aportacions teòriques sobre PEMNA i les implicacions didàctiques que se'n deriven.

En el darrer capítol, *Una experiència: Els PEMNA a l'aula*, s'exposa una de les diverses activitats d'aula en les que hem utilitzat PEMNA. Aquestes activitats no han estat incloses directament en el nostre estudi però mostren altres aspectes rellevants que no hem pogut reflectir la nostra recerca.

Índex

Índex de taules

Índex de figures

Capítol 1

Introducció

1.1 Problemes d'estimació de magnituds no abastables

El 10 de juliol de 2010, els carrers del centre de Barcelona es van omplir de gent per participar en una manifestació multitudinària. No entrarem aquí a discutir aspectes polítics, només ens interessa remarcar que part de l'èxit d'una manifestació d'aquest tipus es mesura a partir de les estimacions de participació que apareixen a la premsa.

L'entitat organitzadora de la manifestació, Òmnium Cultural, va afirmar que van assistir-hi 1.500.000 de persones[1], la Guàrdia Urbana de Barcelona va donar una xifra de 1.100.000 i l'empresa Lynce, especialitzada en recompte de persones, va donar una xifra[2] de 62.000. Amb aquestes xifres a la mà, qualsevol pot afirmar que alguna de les parts està donant una informació que no és adequada.

Ens trobem davant d'un cas en el que part de la rellevància social d'un fet es mesura a partir d'un valor obtingut en una estimació. Concretament, la d'un valor molt gran, un valor amb el que no estem acostumats a treballar.

Si aquesta situació fos exclusiva de les manifestacions, potser no ens suposaria un gran problema. Però moltes altres vegades hem de tractar amb quantitats que són tan grans que no podem interpretar. Quan hi ha incendis als boscos, es parla de centenars o milers d'hectàrees cremades[3], quan hi ha sequera es parla de la quantitat d'aigua en hectòmetres

[1] La Vanguàrdia, 11 de juliol de 2010, pàg. 1.

[2] www.lynce.es

[3] Alguns mitjans informatius tradueixen la superfície afectada a camps de futbol, però tampoc és clar

cúbics que caldria per omplir els embassaments o quan es parla dels pressupostos d'obres públiques es parla de molts milions d'euros.

Moltes de les vegades que sentim parlar d'aquestes quantitats podem tenir la sensació de no fer-nos una idea aproximada d'allò del que estem parlant, de pèrdua de precisió. Ens trobem en una situació en la que l'euro és la moneda d'ús corrent des de fa gairebé 10 anys, però els preus dels pisos es posen a les ofertes en milions de pessetes, potser perquè aquests valors econòmics grans encara ens porten confusions.

La motivació essencial d'aquesta tesi és tenir elements per saber com podem introduir problemes a les aules de matemàtiques de Secundària en els que es tracti l'estimació d'algunes d'aquestes *quantitats grans*. Pensem que, potser, treballant aquests problemes, podem ajudar a que els nostres alumnes siguin una mica més crítics, a la vegada que lliguen la realitat amb allò que estudien a les aules. Pensem que l'aula de matemàtiques pot ser un bon entorn per tractar aquests problemes. Al mateix temps, l'estudi d'aquests problemes pot enriquir les competències matemàtiques dels nostres alumnes.

Aquest és l'impuls que ha desencadenat tota la recerca que presentem en aquesta tesi. En aquest document ens centrarem en una petita part d'aquest repte i descriurem la recerca que hem portat a terme en els darrers anys sobre la resolució del que hem anomenat problemes d'estimació de magnituds no abastables (PEMNA). En essència, en la nostra recerca plantegem a alumnes d'ESO diversos d'aquests problemes, en els que cal estimar quantitats molt grans, i estudiem el tipus d'estratègies que proposen per resoldre'ls.

Així doncs, em plantejo donar una primera resposta a la pregunta d'investigació que guia la nostra recerca *què en podem extreure de les propostes d'estimació de magnituds no abastables que fan els alumnes de Secundària?* i donar una resposta concreta als següents objectius:

Obj1 Caracteritzar les estratègies de resolució de problemes d'estimació de magnituds no abastables que proposen els alumnes

Obj2 Identificar les propostes que estimen adequadament les quantitats demanades i contrastar aquesta informació amb el tipus d'estratègia proposada

Obj3 Estudiar la influència del context de la situació plantejada en el problema sobre l'estratègia utilitzada en la proposta de resolució

que això faciliti la situació a una part important de la població.

1.2 Motivacions de la recerca

A continuació presentem les motivacions que justifiquen la recerca que hem portat a terme sobre les estratègies de resolució de problemes d'estimació de magnituds no abastables. Considerarem tres tipus de motivacions: teòriques, socials i personals.

1.2.1 Motivacions teòriques

Els problemes d'estimació de magnituds no abastables, pel que sabem, no es troben als currículums de cap país del món i presenten una bona oportunitat d'aprenentatge a diferents nivells per als estudiants. Després de fer una cerca minuciosa i exhaustiva, no hem trobat a la literatura cap tipus de discussió sobre aquest tipus de magnituds i aquest treball pot ser una primera aproximació al seu estudi. Com veurem més endavant, es pot considerar els PEMNA com un tipus concret de problemes de Fermi, sobre els quals existeixen només un nombre reduït d'estudis i, per tant, dels que encara no existeix un coneixement suficient.

El primer dels estudis sobre problemes de Fermi és de Schoenfeld [146], i s'inclou en una recerca més general sobre resolució de problemes i no tracta els aspectes propis d'aquests problemes. D'altra banda, Peter-Koop [126, 126] porta a terme un llarg estudi en el que observa que els alumnes de Primària poden modelitzar situacions presentades com a problemes de Fermi adequades al seu nivell educatiu. Finalment, Ärlebäck [4] comprova que els processos que utilitzen els alumnes en els problemes de Fermi són multicíclics, és a dir, que els alumnes reformulen els seus procediments per aconseguir una solució més adequada.

Aquests estudis són un bon inici per arribar a una millor comprensió sobre els processos que envolten els problemes de Fermi, però queden per cobrir aspectes rellevants com els tipus d'estratègies que utilitzen els alumnes per resoldre'ls, les creences que condicionen la seva actuació o la importància del context del problema a la resolució dels alumnes.

Una altre tipus de problemes propers al tipus d'activitat que pretenem estudiar en la nostra recerca són els problemes de Numerically-Driven Inferencing (NDI)[4]. Aquests problemes es basen en un model d'aprenentatge que combina l'estimació, l'alfabetització

[4]Es pot trobar un desenvolupament més ampli als següents articles: Ranney, Cheng, Nelson i García de Osasuna [134], Munnich, Ranney, Nelson, García de Osasuna i Brazil [108] i Munnich, Ranney i Appel [107]

numèrica, el coneixement social i la presa de decisions.

La forma en que es plantegen els problemes NDI es basa en treballar amb els alumnes l'estimació d'una proporció referent a una gran població (e. g. el percentatge d'immigrants a una ciutat). En el moment en que els problemes NDI s'han introduït de forma experimental als currículums s'ha observat que les habilitats en l'estimació dels alumnes s'han incrementat en diversos aspectes i els alumnes han demostrat una major sensibilitat al valor de les proporcions, procurant minimitzar els errors amb una estimació més acurada. Aquest fet ens fa pensar que introduir els PEMNA als nostres currículums escolars podria ser una via per aconseguir una major capacitat estimativa dels nostres alumnes, així com un augment de les seves competències per enfrontar-se a situacions quotidianes que involucrin grans nombres.

1.2.2 Motivacions socials

Alfabetització matemàtica

El nivell educatiu en el que es centra el present estudi és l'ensenyament secundari, específicament en la seva etapa obligatòria (ESO). Aquesta etapa és la darrera oportunitat de tenir un contacte directe amb l'estudi de les matemàtiques per a una bona part dels nostres alumnes, que no continuaran la seva formació o la continuaran sense la presència d'aquestes. Hem de pensar que aquesta etapa els hauria d'oferir la formació bàsica sobre matemàtiques necessària per enfrontar la següent etapa de la seva vida, ja sigui en l'àmbit educatiu o fora d'aquest.

Des d'un punt de vista general, l'alfabetització ha estat sempre un dels temes més discutits en l'àmbit de l'Educació. Va aparèixer com a conseqüència dels processos d'industrialització, donat que la mà d'obra qualificada va passar a ser un recurs econòmicament valorat. Per tant, saber llegir, escriure i realitzar operacions matemàtiques senzilles ha estat a la base del sistema educatiu que ha arribat fins a nosaltres, tot i que aquesta percepció varia en el temps i es va adaptant a les necessitats de cada moment. Es pot trobar més informació sobre els orígens de l'alfabetització a Flecha, López i Saco [52].

Des del punt de vista de l'Educació Matemàtica, ens plantegem constantment la gens senzilla tasca de decidir quines matemàtiques han d'estudiar els nostres alumnes i quines són les competències matemàtiques mínimes que considerem que han d'assolir. El primer concepte utilitzat per capturar aquesta inquietud és el d'*alfabetització numèrica*, del qual no hi ha una definició completament acceptada. Acostuma a tractar-se com la part numèrica o quantitativa de l'alfabetització, tot i que en els darrers anys el concepte ha evolucionat fins el que es coneix com a *alfabetització matemàtica*, oferint una visió més general de la part matemàtica de l'alfabetització. Aquesta evolució no es restringeix exclusivament a l'Educació Matemàtica. Es dóna en altres disciplines i és conseqüència del canvi de concepte d'alfabetització que evoluciona de l'acumulació de coneixements especialitzats fins arribar a una idea més general, com és l'adquisició de les eines necessàries per raonar, interpretar o decidir.

L'expressió *alfabetització numèrica* (*numeracy*) és un neologisme introduït per les comunitats científiques de Gran Bretanya, Austràlia, Canadà i Estats Units i va ser utilitzat formalment per primera vegada pel Comité Crowther al 1959 [115].

El comité de Beazley (Austràlia), defineix l'alfabetització numèrica com "the mathematics for effective functioning in one's group and community, and the capacity to use these skills to further one's own development and that of one's community"[5]. Aquesta afirmació posa de manifest que aquest concepte és relatiu a uns objectius que difereixen per a cada comunitat.

Existeixen múltiples definicions d'alfabetització numèrica, i per aquest motiu O'Donoghue & O'Rourke [115] fan una síntesi de totes les definicions existents i les classifiquen en tres grups:

- les relacionades amb necessitats socials
- les que presenten relació amb l'aprenentatge de les matemàtiques
- les que l'engloben en un procés general d'alfabetització

En el document PISA 2000 [117], l'OECD destaca com a aspectes clau de l'alfabetització numèrica l'habilitat de resoldre problemes fent ús de les operacions adequades, el coneixement de les diverses tècniques i procediments de treball per resoldre problemes, la comprensió del significat dels problemes, l'habilitat d'aplicar idees matemàtiques i la creença en el valor de les matemàtiques. En la forma en que s'han de concretar aquests elements es destaquen temes com els nombres, el concepte de mesura, l'estimació, l'àlgebra, les funcions, la geometria, la probabilitat, l'estadística i les matemàtiques discretes. Tots

[5] Australia, Beazley Committee, citat a la International Life Skills Survey (ILSS) Numeracy Framework (pàg. 13 a Dingwall, 2000: 4-5).

aquests elements tenen un component instrumental molt fort i existeixen altres necessitats matemàtiques que cobreixen aspectes cognitius i afectius.

En l'àmbit de l'Educació Matemàtica, cada vegada està més acceptat que aprendre i saber matemàtiques té relació amb aspectes com les relacions entre objectes o la capacitat de preveure i fer estimacions. Per aquest motiu, la comunitat científica internacional ha passat a utilitzar el terme alfabetització matemàtica, en lloc d'alfabetització numèrica.

Gal [57] defineix l'*alfabetització matemàtica* com un terme que descriu un conjunt d'habilitats, coneixements, creences, disposicions, hàbits mentals, capacitats de comunicació i habilitats en la resolució de problemes que els individus necessiten per tal d'aconseguir autonomia i un control efectiu de les situacions que involucren nombres, informació quantificable o visual que estigui basada en idees matemàtiques o que contingui elements matemàtics. D'aquesta forma es defineix un concepte molt més ampli que relaciona les matemàtiques escolars amb aquelles necessàries a la vida diària, donant una gran importància al context en el que aquests coneixements es desenvolupen.

Aquests contextos són classificats per Ginsburg, Manly & Schmitt [60] en diferents categories, tal i com segueix:

- Familiar o personal: relacionat amb el paper d'un adult com a cap de família. S'inclouen les finances familiars, la cura de la salut familiar i els interessos personals i aficions

- Treball: relacionat amb l'habilitat de portar a terme tasques laborals i adaptar-se a les noves necessitats

- Comunitat: relacionat amb la ciutadania, i altres qüestions relatives a la societat en conjunt, com el medi ambient, la delinqüència, o la política

- Aprenentatge futur: relacionat amb els coneixements necessaris per prosseguir els seus estudis i formació, o per entendre altres disciplines acadèmiques

Altres autors com Van Groenestijn [67] o Alcalá [2] perfilen el concepte d'alfabetització matemàtica, que pren la seva forma més acceptada en el document PISA 2006, *Assessing Scientific, Reading and Mathematical Literacy* [116]. En aquest text, L'OECD defineix l'alfabetització matemàtica com segueix:

> Individual's capacity to identify and understand the role that mathematics plays in the world, to make well-founded judgements and to use and engage with mathematics in ways that meet the needs of that individual's life as a constructive, concerned and reflective citizen (pàg. 72).

En aquesta definició, el concepte es centra en les necessitats de l'individu i no en els conceptes matemàtics associats. Al mateix temps, el text del document remarca que el coneixement matemàtic necessari s'ha d'enfocar cap a l'ús funcional en diferents situacions i contextos en contraposició a l'ús de tècniques matemàtiques concretes. Amb tot això, s'afirma que "the extent of a person's mathematical literacy is seen in the way he or she uses mathematical knowledge and skills in solving problems" (pàg. 79). D'aquesta forma, la resolució de problemes passa a ser un aspecte important a tenir en compte per assolir l'objectiu de formar ciutadans preparats per entendre el seu entorn, és a dir, per obtenir ciutadans matemàticament alfabetitzats, i, per tant, aquesta ha de ser una de les direccions en les que es millori l'ensenyament a les escoles, tal i com argumenta Lott [98].

Des d'aquesta perspectiva, considerem que els problemes d'estimació de magnituds no abastables són una oportunitat per millorar les habilitats dels nostres estudiants per enfrontar-se a situacions que requereixin la comprensió de grans nombres.

1.2.3 Motivacions personals

Tota generació té dret a decidir què fa amb el temps que se li ha donat. De fet, cada generació hauria de replantejar-se totes aquelles decisions prèvies que fan que el seu món sigui com és. Crec que seria excessivament agosarat per part meva intentar replantejar la forma en la que funciona el món o el nostre sistema educatiu, però sí que em puc atrevir a introduir un nou tipus de tasques que facin que les meves classes de matemàtiques puguin ser un lloc més profitós per als meus alumnes.

En la meva pràctica professional com a professor de matemàtiques a Secundària, he sentit moltes vegades la pregunta *i això per a què serveix?* de part dels meus alumnes. Tinc diverses respostes preparades per a aquesta pregunta, en funció de qui la faci i de la seva predisposició a escoltar-me. Però de vegades penso que tenen raó en qüestionar determinats continguts o activitats que difícilment es treballen de forma que els alumnes en puguin treure massa profit.

Crec que ho puc exemplificar. Posem-nos a una classe de 4t d'ESO amb un grup d'alumnes que han estat considerats de baix nivell acadèmic en relació a les matemàtiques. Quan intento que els alumnes estableixin relacions mentals entre els diferents conceptes associats a les proporcions trigonomètriques i els utilitzin en petits problemes quotidians, me n'adono que sovint forço la situació fins a un límit gairebé ridícul. Ningú utilitza la tangent per trobar l'alçada a la que es pot arribar amb una escala de mà.

Alguns d'aquests alumnes tenen intenció de fer estudis que els portin a ser administratius, paletes, auxiliars d'infermeria o comercials i jo vull que quan desenvolupin aquestes tasques (o d'altres a la seva vida) siguin reflexius i tinguin una competència matemàtica suficient que els ajudi a ser eficients. Crec que s'hauran de fer preguntes que hauran de respondre ràpidament i que els han de permetre prendre bones micro-decisions (a quant pujarà el cost d'aquesta comanda? puc transportar tot aquest material en el temps que m'han encomanat?) i han de poder entendre les macro-decisions que es prenen al nostre entorn. Simplement, opino que el coneixement precís de la relació $\sin^2 x + \cos^2 x = 1$ no els aporta res en aquesta direcció[6].

Però és clar que els que algun dia vulguin ser arquitectes, enginyers o economistes han de tenir coneixements matemàtics d'alt nivell i, potser per això, fem passar a tota la població per l'estudi de la trigonometria o d'altres aspectes concrets del currículum de Secundària. Però també han d'assolir una gran varietat de competències que els permetin ser bons professionals. Algunes d'aquestes competències es poden desenvolupar i perfeccionar amb l'estudi dels conceptes matemàtics més abstractes, però jo crec que no perdríem gaire temps si aquests alumnes dediquessin part del seu esforç a intentar treballar amb un altre tipus de tasques. Qui sap, potser elaborarien propostes personals que els portarien a millorar la seva capacitat de desenvolupar totes aquestes altres competències que volem que assoleixin.

Em proposo fer una ullada als que hem anomenat problemes d'estimació de magnituds no abastables. Evidentment, no són una creació pròpia, Enrico Fermi en proposava a les seves classes (veure la secció 2.4) i jo en vaig prendre el primer contacte a través del llibre *El hombre anumérico* de John A. Paulos [125] quan encara era estudiant d'institut. Sempre he pensat que eren qüestions interessants i que mereixien més atenció. Personalment, em plantejo aquesta recerca com un catalitzador que em permeti canviar, encara que sigui només en l'enfocament, algunes de les coses que no m'agraden del que faig a una classe

[6] i que consti que no tinc res en contra de la trigonometria!

de matemàtiques. Tot plegat, per ajudar als meus alumnes a que siguin ciutadans millor preparats, potser així seran una mica millors ciutadans.

Capítol 2

Referents teòrics

El que el lector trobarà en aquest capítol és el conjunt de coneixements teòrics que ens han de permetre analitzar les propostes de resolució a les estimacions de magnituds no abastables que recollirem dels alumnes participants en el nostre estudi. Aquest conjunt de referents s'utilitzen per definir el nostre problema de recerca, ubicar el nostre estudi dins de l'àrea i com a base teòrica per establir les nostres conclusions.

Els camps que hem inclòs són aquells que tenen una relació directa amb els problemes d'estimació de magnituds no abastables. El més general d'aquests és la resolució de problemes. Aquí presentem un breu repàs de la seva evolució, així com els coneixements essencials establerts per diversos autors. Posteriorment, presentem alguns fets teòrics bàsics sobre magnitud i mesura, incloent-hi les dificultats del seu aprenentatge. La secció dedicada a l'estimació inclou la presentació de diferents tipus d'estimació presents en la literatura, així com la descripció de les característiques que presenta. Per acabar, introduïm els problemes de Fermi, dels quals els problemes d'estimació de magnituds no abastables en formen part.

2.1 Resolució de problemes

La resolució de problemes és un camp en el que s'ha treballat molt en l'àmbit de la recerca en Didàctica de les Matemàtiques. En aquest document no pretenem elaborar un recull exhaustiu de la literatura existent, sinó recollir els conceptes clau que intervenen en la resolució dels problemes d'estimació de magnituds. Primerament, presentem un breu resum de la recerca efectuada en les darreres dècades sobre resolució de problemes i, posteriorment, abordem els diferents aspectes teòrics relacionats amb el nostre estudi. En concret, ens interessa tot allò relacionat amb els processos de resolució d'un problema, així com establir quines tasques de caire matemàtic entenem com a problemes. Finalment, presentem els problemes d'enunciat literal i tractem la influència del context en els problemes relacionats amb el nostre entorn real.

2.1.1 Evolució de l'àmbit de recerca

La resolució de problemes és un camp estretament lligat a la pràctica matemàtica. No és d'estranyar que preocupés a grans matemàtics com René Descartes que, al seu llibre *El discurs del mètode* [36], escriu el que segueix:

> I believed that I should find the four (steps) which I shall state quite sufficient, provided that I adhered to a firm and constant resolve never on any single occasion to fail in their observance.
>
> The first of these was to accept nothing as true which I did not clearly recognize to be so: that is to say, carefully to avoid precipitation and prejudice in judgments, and to accept in them nothing more than what was presented to my mind so clearly and distinctly that I could have no occasion to doubt it.
>
> The second was to divide up each of the difficulties which I examined into as many parts as possible, and as seemed requisite in order that it might be resolved in the best manner possible.
>
> The third was to carry on my reflections in due order, commencing with objects that were the most simple and easy to understand, in order to rise little by little, or by degree, to knowledge of the most complex, assuming an order, even if a fictitious one, among those which do not follow a natural sequence relatively to one another.
>
> The last was in all cases to make enumerations so complete and reviews so general that I should be certain of having omitted nothing (pàg. 271).

Aquests quatre passos que descriu Descartes són, essencialment, els mateixos que recull Pólya a *How to solve it* [129], i són la comprensió del problema, l'elaboració d'un pla, l'execució d'aquest i una mirada retrospectiva final. Pólya és la primera gran referència per entendre l'evolució de la recerca contemporània en resolució de problemes. A partir de la publicació dels seus llibres sobre resolució de problemes, altres autors han portat a terme un gran nombre d'estudis que han fet avançar l'àrea.

Els més rellevants entre 1970 i 1994 es troben al recull elaborat per Lester [94] sobre l'estat de la recerca existent en resolució de problemes en aquest període. En aquest recull planteja les quatre àrees en les que hi ha hagut un major progrés. Utilitzarem aquí el mateix format de pregunta amb el que les presenta:

- *Què fa que un problema sigui difícil per als estudiants?*

  Inicialment es van estudiar aquelles variables que feien que un problema fos difícil (context, estructura, sintaxi i heurística). Posteriorment es va considerar que la dificultat d'un problema no es troba en les tasques que cal desenvolupar, sinó en les característiques del propi resolutor (Kilpatrick [83]), tals com la capacitat de visualització o la seva disposició enfront la tasca a realitzar.

- *En què es diferencien els bons dels mals resolutors?*

  Diferents estudis han portat a comprendre la forma en la que els bons resolutors resolen els problemes (Charles i Silver [27]), però es posa de manifest que comprimir aquestes formes de treballar i aplicar-les als mals resolutors o resolutors novells no proporciona, en general, els resultats esperats (Lesh [91]).

- *Què sabem sobre l'ensenyament de la resolució de problemes?*

  Inicialment, la recerca es va centrar en la instrucció per adquirir i utilitzar destreses i estratègies heurístiques, tot i que posteriorment es va centrar en la pràctica de la resolució, l'adquisició de mètodes generals i la reflexió sobre les tasques.

- *És la metacognició la força directriu de la resolució de problemes?*

  Lester afirma que el procés de resolució compta amb aspectes metacognitius i un ampli espectre d'altres aspectes no-cognitius, com les creences i actituds del resolutor (Lester, Garofalo i Kroll [95], Schoenfeld [147]).

En el mateix document, Lester afirma que la recerca sobre resolució de problemes va ser molt productiva durant la dècada de 1970 i la primera part de la dècada de 1980, però que a partir de finals de la dècada de 1980 es va anar perdent interès per aquest camp. Els motius que destaca per explicar aquesta disminució en l'interès per la recerca sobre resolució de problemes són els següents:

- Es centra l'atenció en altres aspectes fora de la resolució de problemes, com ara les creences de l'alumnat, l'avaluació o aspectes socio-culturals
- Existeix la sensació que la resolució de problemes és un camp ben conegut, opinió criticada pel propi Lester
- El constructivisme desplaça la resolució de problemes com a idea predominant en la recerca en Educació Matemàtica
- La resolució de problemes és molt més complexa del que es pensava inicialment

Lester argumenta que en aquell moment era massa d'hora per desviar l'atenció sobre la resolució de problemes. De fet, Schoenfeld [149], el 1992 fa referència a diverses necessitats per reforçar la recerca en el camp. Argumenta que és necessària una major claredat en el significat dels termes emprats, així com el perfeccionament dels mètodes de recerca, la necessitat de millora en els instruments d'avaluació i del paper d'altres aspectes diversos, com serien les creences de l'alumnat.

El mateix Schoenfeld [154] en un article publicat l'any 2007, elabora un nou recull, actualitzat, sobre l'estat de la recerca en resolució de problemes i les seves conseqüències sobre el sistema educatiu als Estats Units. En aquest article es centra en la influència de diferents recerques portades a terme en el camp de l'Educació Matemàtica sobre els currículums de 1990 i en les conseqüències de l'aplicació d'aquests. Destaca el fet que el National Council of Teachers of Mathematics [118] va proposar que "problem solving must be the focus of school mathematics in the 1980s" (pàg. 1) i que aquesta associació va elaborar una llista amb diverses recomanacions sobre resolució de problemes, que encara avui serien apropiades, però que no es van portar a terme amb èxit. De fet, Schoenfeld afirma que els llibres de text han canviat molt poc en les darreres dècades i que no han incorporat els nous coneixements obtinguts, amb el que afirma que "problem solving in American classrooms in the 1980s came to mean solving (simple) word problems" (pàg. 543).

Schoenfeld comparteix la visió de Lester sobre la disminució de l'interès de la recerca en la resolució de problemes a partir del final de la dècada de 1980, donant mostres dels camins que es van prendre en recerques posteriors en el camp de l'Educació Matemàtica. Un clar exemple són els treballs realitzats sobre comunitats de discurs (discourse communities), iniciats pel fet que la reforma educativa incitava a explorar els mecanismes que funcionaven a les classes, enteses com a *comunitats productives*. Alguns d'aquests estudis analitzen els patrons discursius a l'aula (Cobb i Yackel [28], Lampert, Rittenhouse, i Crumbaugh [86], O'Connor [111] i O'Connor i Michaels [112, 113]), d'altres es centren en el concepte de les normes sociomatemàtiques que governen les interaccions a l'aula (Cobb i Yackel [28], Yackel i Cobb [185]) o l'adaptació del concepte de *contracte didàctic* a l'aula de matemàtiques (Brousseau [15]).

Seguint a Schoenfeld, en els darrers anys, es comença a interpretar l'aprenentatge de les matemàtiques com a un instrument per dotar de significat el nostre entorn (*sense-making*). A partir d'aquest moment es realitzen aportacions al camp basades en els fonaments de la resolució de problemes amb l'objectiu d'aprofundir en fets com la comprensió dels conceptes per part dels alumnes, la seva competència en resolució de problemes, el desenvolupament de la seva pròpia autonomia com a estudiants o el creixement personal de l'alumne (Lampert [85], ARC Center [23], Boaler [11] i Senk i Thompson [158]).

Engle i Conant [48] realitzen una abstracció de les característiques que s'han de complir per aconseguir una bona classe de matemàtiques (o ciències) en la que es treballi la construcció de significat (sense-making) per part dels alumnes:

- els alumnes han de ser encoratjats a resoldre problemes
- els estudiants tindran autoritat per triar la direcció en la que es resolen aquests problemes
- el treball dels alumnes serà avaluat pels altres membres del grup i s'haurà d'ajustar a les normes
- els alumnes tindran els recursos necessaris per portar a terme tot el que se'ls demana

D'Ambrosio [33] exposa que es pot observar una transició en diferents concepcions sobre la resolució de problemes, que es resumeixen com segueix:

- Proposar problemes $\rightarrow$ Identificar problemes
- Treball individual $\rightarrow$ Treball cooperatiu
- Problemes amb una solució concreta $\rightarrow$ Problemes de solució oberta
- Solucions exactes $\rightarrow$ Solucions aproximades

En aquesta direcció, un dels objectius actuals és aconseguir caracteritzar els factors que porten a l'èxit o al fracàs en la resolució d'un problema. Per aconseguir-ho, el Teacher Model Group (TMG) de la University of California porta dues dècades desenvolupant un constructe teòric que permeti modelar les accions del professor a l'aula en funció dels seus coneixements, objectius, creences i sistema de valors. Aquest constructe hauria de permetre donar resposta a la pregunta de com prenen decisions els professors a l'hora de portar endavant una classe, especialment en el moment que s'ha de resoldre un problema (Schoenfeld [150, 151, 153]).

2.1.2 Factors que intervenen en la resolució

Si ens centrem en les darreres dècades, veiem que s'han elaborat diversos estudis sobre diferents aspectes relacionats amb la forma en que es pot resoldre un problema. La primera referència en l'àmbit de l'Educació Matemàtica són els llibres publicats per Pólya sobre resolució de problemes, en els que es centra en les estratègies a seguir per un resolutor.

El primer d'aquests llibres, *How to solve it* [129], conté un ampli glossari sobre Heurística[1] i estableix un model dividit en quatre fases per a la resolució d'un problema. Aquestes fases són les següents:

- Comprensió del problema
- Elaboració d'un pla
- Execució del pla
- Mirada retrospectiva

A partir de la introspecció, Pólya examina el comportament d'un resolutor que podríem anomenar ideal, i que és capaç d'autogestionar la seva tasca resolutora i que recorre linealment les quatre fases anteriors, passant a la següent només quan l'anterior ha estat finalitzada. El model presentat per Pólya va acompanyat d'un seguit de preguntes que el resolutor es pot plantejar per avançar en la seva tasca. La gran majoria d'aquestes preguntes són variacions de *coneixes un problema relacionat?* amb el que aquest sembla

[1] Estudi dels mètodes i regles del descobriment i la invenció. Prové de l'arrel grega *euriskô*, que significa *trobar*.

ser el motor de la resolució de problemes per a Pólya. Diversos autors han matisat el model de resolució de problemes proposat per Pólya, tot i que mantenen l'essència d'aquesta estructuració en quatre fases.

La primera fase consisteix en la identificació, definició i comprensió del problema. En aquesta fase es reconeix l'existència d'un problema per part del resolutor i la necessitat de resoldre'l. La definició del problema consisteix en la conversió de l'enunciat a una representació mental en forma d'un esquema coherent que pugui ser útil al resolutor.

La segona fase de la resolució es centra en la planificació de la solució. Es tracta de dissenyar l'esquema d'actuació a seguir i identificar els objectius a complir després d'examinar les possible estratègies generals que es poden aplicar.

La tercera fase és l'execució del pla que s'ha dissenyat prèviament, portant a terme les accions particulars que s'han planificat i regulant l'actuació amb l'objectiu que aquesta s'ajusti al pla fixat.

La quarta fase de la resolució és la retrospecció, en la que es realitza una verificació de la tasca i de les decisions preses, així com la validació de la solució i dels resultats obtinguts a partir del pla inicial.

El segon llibre de Pólya, *Mathematics and plausible reasoning* [130], està dedicat a l'estudi de l'estructura formal dels raonaments que es porten a terme en el procés de resolució d'un problema i que no es poden descriure a partir dels patrons clàssics deductius de la lògica. En el seu tercer llibre, *Mathematical discovery* [131], Pólya estudia els models generals que engloben les diferents formes d'elaborar plans de resolució de problemes. En aquesta obra, es suggereix que els estudiants poden aprendre a resoldre matemàtiques a partir de *raonaments plausibles*, que són aquells que utilitzen els professionals de les matemàtiques.

Es pot considerar que Schoenfeld és el continuador de l'obra de Pólya sobre mètodes heurístics. Schoenfeld [146] considera insuficients les estratègies considerades per Pólya i sosté que el procés de resolució d'un problema és més complex i inclou altres elements, com ara aspectes de caràcter emocional i afectiu, entre d'altres. Schoenfeld afegeix gradualment diferents components a l'avançar la seva recerca, i podem entendre que cada element que introdueix és el resultat d'intentar explicar per què els elements anteriors no són suficients i per explicar per què els resolutors tenen dificultats per resoldre problemes. A partir de les carències dels resolutors, considera aspectes cognitius com les heurístiques, la gestió (metacognició), els recursos i els sistemes de creences.

Schoenfeld considera les creences un aspecte transversal de la resolució de problemes, enteses com un conjunt d'idees o percepcions que els estudiants tenen sobre les matemàtiques i els processos relacionats amb el seu ensenyament i aprenentatge. Les creences que documenta són les següents:

- Les matemàtiques són de caràcter abstracte i no es relacionen amb la vida quotidiana
- Els problemes de matemàtiques s'han de resoldre en menys de 10 minuts. En cas contrari, no tenen solució
- Només els genis o superdotats són capaços de descobrir o crear matemàtiques.

Per la seva banda, i des d'un punt de vista més general, Goldin [62] ofereix una llarga llista de categories en les que es poden classificar les creences sobre les matemàtiques. Destaquem aquelles que es troben relacionades amb la resolució de problemes:

- Creences sobre el món físic i la seva correspondència amb les matemàtiques
- Creences sobre fets matemàtics, regles, equacions, teoremes...
- Creences sobre mètodes eficaços de raonament matemàtic i estratègies
- Creences sobre la forma en la que les veritats matemàtiques s'estableixen (validació)
- Creences sobre la relació d'un mateix amb les matemàtiques, incloent les pròpies habilitats, emocions, història personal, motivacions...

Les creences són un dels components afectius que intervenen en la resolució de problemes; d'altres són les actituds i les emocions del resolutor.

2.1.3 Definicions de problema, solució i estratègia de resolució

Amb tot el que hem descrit aquí sobre la resolució de problemes es posa de manifest que existeixen diverses vies d'acostament als processos relacionats amb la resolució de problemes. Una de les principals dificultats és definir amb precisió el que entenem per problema, concepte per al que no existeix un consens generalitzat. Aquest fet provoca que diversos autors es centrin en aspectes diferents per elaborar els seus estudis. De fet, existeixen definicions del concepte problema en l'àmbit de la Psicologia o de la Intel·ligència Artificial (per exemple, Banerji [6]) que recullen visions molt diferents. En aquesta última, un problema està caracteritzat per una definició formal i la qualitat de ser problema és independent del subjecte, del temps i del fet que es conegui una solució. Com veurem, aquesta és una postura molt distant de la que considerarem aquí, i farem notar el que observen Wilson, Fernandez i Hadaway [181] quan afirmen que quan dues persones parlen de resolució de problemes, no sempre parlen del mateix.

A nosaltres, en aquest treball, ens interessa la discussió sobre el que s'entén per problema en Educació Matemàtica, que no podem deslligar de la discussió sobre com es resol un problema. Segons Johnson, Herr i Kysh [77], resoldre un problema és "knowing what to do when you don't know what to do" (pàg. 3). D'altra banda, als *Principles and Standards* del NTCM [119] de l'any 2000, resoldre un problema es defineix com "engaging in a task for which the solution method is not known in advance" (pàg. 52).

Des d'aquesta perspectiva, abans de tenir una definició definitiva cal començar matisant la diferència entre el que entenem per problema i exercici, per anar centrant la qüestió. Brown [16] defineix un problema com una meta que un intenta aconseguir, sense conèixer el procediment necessari en el moment en el es planteja el problema. En la mateixa línia, Kantowski [82] afirma que un problema és una situació que es diferencia d'un exercici en el fet que el resolutor no té un procediment o algorisme que porti amb certesa a una solució. Aquestes definicions inclouen la concepció que si el problema es resol, la propera vegada que el resolutor es trobi una pregunta o tasca similar, no la podrà considerar un problema, pel fet que ja coneix algun procediment que el portarà a la solució.

Schoenfeld [146], per la seva banda, destaca el següent:

> The difficulty with defining the term *problem* is that problem solving is relative. The same tasks that call for significant efforts from some students may well be routine exercises for others, and answering them may just be a matter of recall for a given mathematician. Thus being a "problem" is not a property inherent in a mathematical task. Rather, it is a particular relationship between the individual and the task that makes the task a problem for that person (pàg. 74).

El nivell de matís existent en les definicions donades per diversos autors en la relació entre el resolutor i el problema és molt gran, tant que es pot trobar una classificació de problemes en funció del coneixement del resolutor sobre el procediment a seguir per resoldre'l a Goldin [61].

Donat que en la nostra recerca tractarem de problemes plantejats als alumnes per un professor en un entorn escolar, destaquem la següent definició de Puig [133]:

> Un problema escolar de matemáticas es una tarea de contenido matemático, cuyo enunciado es significativo para el alumno al que se ha planteado, que este desea abordar, y para la cual no ha producido sentido (pàg. 31).

L'altre aspecte a definir dins de l'entorn de la resolució de problemes és el de la pròpia resolució. Per començar, cal diferenciar la solució final d'un problema del procés realitzat per arribar-hi. Codina i Rivera [29] anomenen resolució a l'acció o procés que permet resoldre un problema, que té una meta a la que s'anomena solució. Per la seva banda, Puig [133] fa una distinció entre resultat, solució i resolució, en la que la resolució és el procés complet que realitza el resolutor i la solució és el procés depurat que presenta per justificar el resultat, que seria la resposta al problema, ja sigui un nombre, una fórmula, una construcció geomètrica...

Si ens centrem en les possibles formes de resoldre un problema apareix el concepte d'estratègia de resolució.

Les diverses definicions de la paraula estratègia que ofereix el diccionari de l'IEC són les següents:

Estratègia:

1. Art de projectar i dirigir grans moviments i operacions militars.
2. Coordinació de les forces polítiques, econòmiques i diplomàtiques per aconseguir els objectius d'un estat, d'un grup o d'un partit.
3. Art de coordinar les accions i de maniobrar per tal d'aconseguir una finalitat.
4. Manera com un organisme respon a les característiques del medi en què viu.

Cap d'aquestes definicions estan orientades a la resolució de problemes, però nosaltres prendrem com a punt de sortida la tercera. Si consultem el *The New Oxford Dictionnary of English* trobem les següents definicions per al concepte d'estratègia:

Strategy:

1. A plan of action or policy designed to achieve a major or overall aim.

2. The art of planning and directing overall military operations and movements in a war or battle. Often contrasted with tactics.

Si volem contrastar la definició d'estratègia amb la de tàctica que ofereix el mateix diccionari obtenim el següent:

Tactics:

1. An action or strategy to carefully planned to achieve a specific end.

Si pensem en les diferents fases de resolució d'un problema de Pólya [129] i ens centrem en la fase que descriu l'elaboració d'un pla, veiem que podem establir dos nivells de concreció: el de les estratègies i el de les tàctiques.

En el context del nostre treball, una estratègia serà una forma general d'establir un pla amb una direcció o objectiu i les tàctiques seran les accions concretes que s'especifiquen per adequar aquella estratègia a un problema concret.

Per posar un exemple genèric en el que puguem representar aquesta distinció que plantegem, proposem dos problemes de caire social: reduir el grau d'accidentalitat a un tram perillós de carretera i reduir les molèsties acústiques ocasionades als veïns per un acte de la festa major.

Com a mínim, existeixen dues estratègies generals per resoldre aquestes situacions. Per un costat es pot mirar de convèncer als usuaris (conductors i assistents a l'acte) de que adaptin la seva actuació als paràmetres necessaris. D'altra banda, es poden alterar les infraestructures per minimitzar els efectes negatius en els dos casos. Aquestes serien les dues estratègies que es poden aplicar als dos problemes, però cadascun d'ells necessitarà unes accions concretes per poder portar-les a terme.

En el cas que vulguem convèncer als usuaris de que han de canviar la seva actuació, els tipus de mesures poden ser informatives (cartells, anuncis, etc...) o a partir de prohibicions que comportin multes o penalitzacions. Aquests tipus d'accions concretes a efectuar són bastant semblants en els dos casos. En canvi, si volem alterar les infraestructures, posar barreres sòniques a la plaça del poble és una acció ben diferent de col·locar ressalts o bandes rugoses a una carretera.

En el nostre cas concret de la resolució de PEMNAs, ens centrarem en l'estudi general d'estratègies distingint-les de les accions[2] que els alumnes proposen per implementar

[2]Preferim no utilitzar la paraula *tàctica*, que té una connotació més propera a l'àmbit militar, esportiu o dels jocs d'estratègia.

l'estratègia triada.

2.1.4 Problemes d'enunciat literal i context

Problemes d'enunciat literal

En una classe de matemàtiques es poden portar a terme diferents tipus de tasques. Si ens centrem en els problemes escolars, es poden presentar als alumnes de forma literal, pictòrica, utilitzant simbologia matemàtica o alguna combinació d'aquestes tres formes (Chapman [26]). Considerem el següent enunciat que, en determinats contextos escolars, pot ser un problema per als estudiants:

Trobeu el valor de la suma dels cent primers nombres naturals

Aquest problema també es pot presentar als alumnes de la següent forma:

Trobeu el valor de $1 + 2 + 3 + 4 + \cdots + 97 + 98 + 99 + 100$

o bé, prescindint completament de la part verbal dels enunciats anteriors, es pot presentar de la forma:

$$\sum_{i=1}^{i=100} i = ?$$

En aquest cas, les tres formulacions del problema són equivalents i, per tant, hi ha casos en els que el component literal de l'enunciat no és indispensable. Tot i així, el primer dels tres enunciats es pot presentar a un conjunt més gran d'alumnes, ja que no pressuposa un coneixement previ de la notació matemàtica utilitzada. Cal tenir en compte que al proposar als alumnes un problema amb un enunciat literal escrit es poden presentar diverses dificultats ja que s'ha comprovat que la comprensió lectora dels alumnes és clau per a l'èxit en resolució (Vilenius-Tuohimaa, Aunola i Nurmi[178]).

Hi ha altres problemes que han estat utilitzats en diversos estudis i que han de presentar-se forçosament de forma literal. Alguns exemples són els següents:

- 1128 nois i noies han de fer un viatge en autobusos. A cada autobús hi caben 36 alumnes, quants autobusos són necessaris per transportar tots els alumnes?

- El millor temps d'un atleta per córrer una milla és de 4 minuts i 7 segons. Quan tardarà en córrer 3 milles?

- Un home vol tenir una corda suficientment llarga per unir dos punts que es troben a 12 metres de distància, però només té trossos de corda de 1.5 metres de llarg. Quants trossos de corda necessita lligar per poder unir els dos punts?

Els resultats obtinguts mostren que la majoria dels alumnes no utilitzen cap mena de coneixement de l'entorn real en el que es produeixen aquests problemes, donant solucions no enteres al nombre d'autobusos, aplicant proporcionalitat directa als temps de l'atleta o considerant que dues cordes es poden lligar sense perdre part de la seva longitud al fer un nus (Greer [64], Verschaffel, De Corte i Lasure [176]). Hi ha altres estudis en aquesta mateixa direcció, com els de Silver, Shapiro i Deutsch [162], Schoenfeld [148], Verschaffel i De Corte [175], i Verschaffel, Greer i De Corte [177], en els que els autors afirmen que els alumnes realitzen una suspensió de la relació amb la realitat (*suspension of sense making*), i que poden donar respostes a problemes que són irresolubles per manca d'informació essencial a l'enunciat. Una interpretació per a tota aquesta problemàtica és el fet que els alumnes es basen només en experiments mentals poc detallats que no contrasten amb la realitat. Una altra explicació es centra en les creences de l'alumnat sobre la resolució de problemes, ja que les normes escolars no escrites (el contracte didàctic) decideixen no considerar de forma usual situacions reals, donada la seva gran complexitat. Aquests problemes no rutinaris han estat utilitzats en altres estudis per avaluar programes de millora de l'ensenyament i aprenentatge de les matemàtiques (De Corte, Verschaffel i Masui [32]).

Context

En tots els problemes d'enunciat literal es fa referència a un conjunt de coneixements relacionats amb un determinat context. Aquest context pot ser purament matemàtic, com és el cas del problema de la suma dels cent primers nombres naturals, pot ser un context real, en el sentit que estigui directament relacionat amb una situació donada en el món real, com en el cas dels autobusos, o pot ser imaginari.

Segons Van Den Heuvel-Panhuizen [73], introduir un context real als problemes pot augmentar la seva accessibilitat i suggerir estratègies als alumnes. S'han realitzat múltiples recerques sobre problemes en contextos fora de les matemàtiques amb diferents objectius. Cal destacar els estudis que pretenen entendre millor la forma en la que les persones solucionen problemes al seu entorn laboral, tot i que no tots aquests estudis fan una comparació amb la resolució de problemes a l'aula de matemàtiques (Scribner [155], Lave [89], Pozzi, Noss i Hoyles [132]). Hi ha d'altres estudis que s'han centrat en les diferències de l'ús de les matemàtiques a l'aula i a la feina (Nunes, Schliemann i Carraher [110], Jurdak i Shahin [80, 81]). Aquests estudis mostren que existeix una distància important entre les matemàtiques que s'ensenyen a les escoles i les que s'utilitzen a la seva vida quotidiana. Segons Díez [37], aquesta distància és un dels motius que expliquen algunes actituds negatives de moltes persones cap a les matemàtiques.

Al mateix temps, alguns d'aquests estudis mostren que les matemàtiques informals són dominants en la resolució de problemes en la vida quotidiana i en el món laboral i, en canvi, les matemàtiques formals són predominants a l'aula. Lave [89] va comprovar que alguns alumnes que fracassen en les situacions matemàtiques escolars poden ser molt competents en activitats de la vida quotidiana en les que cal utilitzar els mateixos continguts matemàtics. S'ha observat que, en situacions de la vida real, les persones es senten implicades i utilitzen estratègies matemàtiques pròpies, que poden ser molt diferents de les que s'ensenyen a l'escola. Els problemes relacionats amb aspectes de la vida quotidiana possibiliten treballar les matemàtiques des d'allò concret a allò més abstracte, i, per tant, permeten aprendre matemàtiques en la mateixa línia de pensament defensada per Freudenthal [55], en la que estableix que presentar les matemàtiques des de la generalització és un error. Freudenthal afirma que la discussió a l'aula de problemes amb context real pot ser molt enriquidora pels alumnes, tot i que Chapman [26] observa que bona part dels professors els presenten d'una forma tancada i no permeten una anàlisi narrativa de les situacions proposades. Doerr [40, 41] explica aquest fet afirmant que la formació del professorat condiciona aquesta postura i que seria necessari que tinguessin un esquema ben desenvolupat dels diferents tipus de resposta que poden donar els alumnes.

Seguint a De Lange [88], hi ha quatre motius per incloure problemes en contextos reals als currículums educatius:

- Faciliten l'aprenentatge de les matemàtiques

- Ajuden a desenvolupar les competències dels alumnes com a ciutadans

- Ajuden a desenvolupar les competències i actituds dels alumnes relacionades amb la resolució de problemes

- Permeten veure als estudiants la utilitat de les matemàtiques per resoldre situacions d'altres àrees de coneixement i de la vida quotidiana

Per la seva part, Verschaffel [174] afirma que l'objectiu d'introduir els problemes amb enunciats literals i context real és el següent:

> to bring reality into the mathematics classroom, to create occasions for learning and practising the different aspects of applied problem solving, without the practical (...) inconveniences of direct contact with the real world situation. (pàg. 65)

Tot i la presència d'aquestes recomanacions d'incloure problemes amb context real, Hasemann [72] documenta que els alumnes amb més dificultats acadèmiques poden obtenir millors resultats seguint cursos basats en un ensenyament abstracte i simbòlic. Hasemann associa aquest fet a que aquests alumnes tenen majors dificultats per relacionar fets de la seva vida quotidiana amb les activitats plantejades en un curs que inclogui problemes amb contextos reals.

2.1.5 Problemes reals i autenticitat

A bona part de la literatura sobre resolució de problemes no es diferencia el tipus de context d'un problema i es tendeix a utilitzar la nomenclatura genèrica de *problemes reals*.

Si ens centrem en els diferents tipus de problemes en funció del seu nivell de contextualització, podem distingir entre problemes descontextualitzats, problemes escolars contextualitzats i problemes reals. Martínez [101] distingeix els següents tipus de context per a un problema:

- Context real: es refereix a la pràctica real de les matemàtiques i a l'entorn en el que es dóna aquesta pràctica

- Context simulat: té el seu origen en un context real, però és una representació d'aquest que reprodueix part de les seves característiques

- Context evocat: es refereix a situacions proposades pel professor a l'aula i que permeten imaginar la situació en la que es donen els fet representats

D'aquesta forma, hem d'entendre que el que anomenem problemes reals són problemes d'enunciat literal i context evocat. Tot i així, poden representar situacions que, a fora de l'aula, siguin reals i representatives per als alumnes. Segons Sriraman, Knott i Adrian [167] "the word *realistic*, refers not just to the connection with the real-world, but also refers to problem situations which are real in students' mind" (pàg. 206).

Segons Winter [182], la resolució de problemes de context real inclou la matematització d'una situació no-matemàtica, que implica la construcció d'un model matemàtic que respecti la situació real, el càlcul de la solució i la transferència del resultat obtingut a partir del model a la situació real. El pas més difícil d'aquest procés és determinar un model apropiat per a la situació real plantejada, ja que es requereix un bon coneixement d'aquesta i un alt nivell de creativitat.

Una característica rellevant que cal considerar sobre els problemes basats en la realitat és la seva autenticitat. Palm [123] descriu l'autenticitat d'una tasca escolar com el grau en el que es pot transportar aquesta tasca a una situació al món real, amb la condició que els aspectes més importants de la situació han de ser simulats en un alt nivell. En aquest mateix article es presenta un estudi realitzat amb l'objectiu de determinar la influència de l'autenticitat de l'enunciat dels problemes proposats en les respostes dels alumnes.

L'estudi es basa en les respostes dels alumnes a un determinat conjunt de problemes amb enunciat verbal, però establint dos grups diferenciats que els resolen amb enunciats amb un diferent grau d'autenticitat. Els resultats mostren que els alumnes que responen a qüestions amb un major grau d'autenticitat utilitzen coneixements reals del seu dia a dia i obtenen respostes més acurades i més consistents amb les solucions reals.

El mateix Palm [122] fa una proposta d'aquells aspectes de la vida real que són rellevants per als problemes reals. Centra la seva atenció en el tipus d'esdeveniment en el que s'emmarca el problema, en la pregunta, les dades que conté, el tipus d'enunciat, les estratègies de resolució, les circumstàncies i condicionants a l'aula, els requeriments que ha de complir la solució i el propòsit del problema. Stocker [169] hi afegeix la necessitat de centrar l'atenció en la rellevància dels problemes per als alumnes i en la capacitat transformativa del problema amb el propòsit de millorar el nostre entorn.

2.1.6 Modelització

Una de les activitats científiques actuals més rellevants és la de crear models que permetin recrear de forma abstracta els objectes o processos que pretenem entendre, amb l'objectiu de poder fer-ne prediccions i obtenir una descripció el més precisa possible. La producció de models per resoldre problemes no és exclusiva dels més alts nivells científics, sinó que s'ha documentat la seva presència en diferents estudis sobre les produccions dels estudiants. Lesh i Harel [92] afirmen que "the products that problem solvers produce generally involve much more than simply giving brief answers to well formulated questions" (pàg. 158). De fet, en els darrers anys, hi ha una tendència a portar la creació de models com a forma de resoldre problemes a les aules. Un exemple seria la inclusió dels processos de modelització als currículums alemanys.

Si ens centrem en la modelització en l'àmbit de l'Educació Matemàtica, Lesh i Harel [92] defineixen el concepte de model com segueix:

> *Models* are conceptual systems that generally tend to be expressed using a variety of interacting representational media, which may involve written symbols, spoken language, computer-based graphics, paper-based diagrams or graphs, or experience-based metaphors. Their purposes are to construct, describe or explain other system(s).
>
> Models include both: (a) *a conceptual system* for describing or explaining the relevant mathematical objects, relations, actions, patterns, and regularities that are attributed to the problem-solving situation; and (b) *accompanying procedures* for generating useful constructions, manipulations, or predictions for achieving clearly recognized goals.
>
> Mathematical models are distinct from other categories of models mainly because they focus on structural characteristics (rather than, for example, physical, biological, or artistic characteristics) of systems they describe (pàg. 159).

Segons la literatura hi ha dues diferències principals entre els problemes tradicionals amb enunciat literal i les activitats de modelització. La primera diferència és que en la modelització cal relacionar els conceptes matemàtics i les operacions amb la realitat, produint significat per a allò que estudien i descrivint simbòlicament una situació (Lesh i Zawojewski [93]). La segona diferència es centra en la pròpia modelització, ja que els estudiants han de generar models que siguin realment aplicables a una realitat donada i que les solucions que se'n derivin es puguin generalitzar i interpretar (English [49] i Doerr i English [39]).

El ventall de situacions que els estudiants poden arribar a modelar és molt ampli, Alsina [3] recull diversos exemples l'estudi dels quals pot ser beneficiós per a l'alumne. Alguns d'aquests exemples exemples proposats per Alsina són les distàncies a diferents llocs des de l'escola (i els temps), la geometria de diferents edificis de la ciutat, l'estudi estadístic de minories a una societat, el control del trànsit aeri o les localitzacions a partir del sistema GPS.

La forma en la que els estudiants elaboren models per resoldre problemes és objecte de discussió i existeixen diferents posicions al respecte (Borromeo Ferri [51]), però, en general, s'accepta que és un procés multicíclic. Això vol dir que els alumnes passen de la situació real al model i de la solució que els ofereix el model a una solució per al problema a partir d'un conjunt de processos que van revisant constantment. Ärlebäck [4] constata que aquests cicles es donen en la resolució de problemes de Fermi (veure la secció 2.4).

Seguint a Blum [10], els processos de modelització es poden estructurar en cinc fases principals:

1. Simplificar el problema real a un model real
2. Matematitzar el model real a un model matemàtic
3. Buscar una solució a partir del model matemàtic
4. Interpretar la solució del model matemàtic
5. Validar la solució en el context del problema real

La inclusió de diferents tecnologies de la informació a les aules permet als alumnes millorar els seus processos de modelització (Villarreal, Esteley i Mina [179]). Tot i que els processos propis de la modelització no sempre són senzills per als estudiants. S'han documentat dificultats en la modelització com ara la presència excessiva de models lineals en situacions que no ho requereixen (Esteley, Villarreal i Alagia [50]) que es pot atribuir a la tendència natural d'ensenyar d'allò més senzill al més complex i a l'ús abusiu a les aules d'activitats rutinàries (Greer [65]).

2.2 Magnitud i mesura

Mesurar longituds és una activitat que fem sovint a la nostra vida quotidiana, donat que, d'aquesta forma, podem aconseguir un cert control sobre l'espai que ens envolta. Però, què és la longitud? Seguint a Freudenthal [55], una bona forma de donar resposta a aquesta pregunta és pensar la longitud com una funció que prendrà valors depenent de l'objecte considerat. Des d'aquesta perspectiva, podem definir la relació $y = l(x)$ de forma que es compleixi l'afirmació "la longitud de x és y" amb el que la longitud és una funció que a cada objecte li proporciona un valor.

La primera dificultat que trobem en aquesta definició és el tipus de valor que pot prendre y, ja que aquests valors poden ser d'una naturalesa molt àmplia, com ara *petit*, *gran* o *enorme*. Per poder donar una estructura matemàtica a la longitud com a funció és necessari que els valors que prengui y siguin numèrics, amb el que l'afirmació "la longitud del meu llit és 1.90 m" es pot traduir com a l(llit)= 1.90 m. Algunes de les propietats que utilitzem de la funció $l(x)$ són l'addició de longituds, la seva ordenació per fer comparacions o el càlcul d'ampliacions o reduccions a través d'una escala.

Però no només podem mesurar longituds, també ens interessa mesurar el pes o el volum d'un objecte, la durada d'un interval de temps, la temperatura de l'aigua o el valor econòmic d'un producte. Tots aquests valors són magnituds que pretenem mesurar en diferents contextos. En l'ús quotidià, utilitzem els termes magnitud i mesura com a sinònims, però tal i com destaca Callís [19], són dos conceptes que es poden diferenciar en l'ús científic. Des d'un punt de vista col·loquial, una magnitud queda definida com a sinònim de *grandària*, però si preferim una aproximació al concepte des del seu significat mètric, podem utilitzar la definició del Centro Español de Metrología [34], que defineix magnitud de la següent forma:

Magnitud: "Atribut d'un fenomen, cos o substància que és susceptible de ser diferenciat qualitativament i determinat quantitativament".

A partir d'aquesta definició és clar que per a un mateix objecte podem determinar diferents magnituds. Per exemple, si omplim una olla amb aigua per cuinar, podem mesurar l'alçada a la que arriba l'aigua, el volum que ocupa, la temperatura a la que es troba abans de posar-la al foc o el preu que ens ha costat a partir del que apareix a la factura de l'aigua. El que pot no ser tan senzill és mesurar aquestes magnituds.

La mateixa problemàtica entre la definició formal i la col·loquial que hem trobat anteriorment, la trobem en el terme mesura. La Gran Enciclopèdia Catalana la defineix com l'*acció i efecte de mesurar* en la seva vessant quotidiana, però ofereix la següent definició mètrica:

Mesura: "Valor numèric d'un mesurament consistent en comparar una magnitud amb una altra de la mateixa espècie elegida com a unitat, amb la finalitat d'establir relacions o la deducció d'unes conclusions".

En aquesta definició apareix com a concepte clau el d'unitat de mesura, entesa com una magnitud particular, definida i adaptada per conveni. La tasca de determinar unitats per mesurar magnituds no és gens senzilla, un exemple clar és el metre, que encara no és acceptat de forma universal com a unitat de mesura de longituds i ha estat redefinit diverses vegades per adaptar-se a les necessitats de la comunitat científica.

Es poden fer diferents classificacions dels tipus de magnituds en funció de les seves característiques, però per a aquest estudi ens limitarem a diferenciar les magnituds contínues de les discretes. Entendrem que una magnitud és contínua quan es pot garantir la divisió de qualsevol quantitat de magnitud i entendrem que és discreta quan no es pugui. D'aquesta forma, la longitud, el temps o la temperatura són magnituds contínues i el valor econòmic d'un objecte o el cardinal d'un conjunt són magnituds discretes. En tot cas, si mesurem una magnitud contínua amb una unitat i no permetem la seva subdivisió, podem treballar amb aquesta magnitud com si es tractés d'una magnitud discreta. Un cas concret d'aquesta forma de procedir es pot trobar a Bessot i Eberhard [9] que, en un estudi teòric, diferencien dos models de designació del valor d'una longitud:

- Utilitzar una escala graduada de forma regular i numerada, col·locant l'objecte a l'origen de l'escala i llegint el número de la graduació final
- Utilitzar un patró de forma repetida, transportant-lo sobre la mesura a determinar i comptant el nombre de patrons necessaris per cobrir l'objecte

Com a exemple, pensem en mesurar l'alçada d'una persona. Podem utilitzar una cinta mètrica, donant com a valor la lectura que obtindrem en funció de la precisió que ens doni la cinta. Treballant d'aquesta forma, obtindrem valors per a aquesta mesura a $\mathbb{Q}^+$ o $\mathbb{R}^+$. D'altra banda, podem mesurar l'alçada d'una persona a pams, establint el pam com a patró de comparació, però és clar que la precisió que obtindrem és menor que si utilitzem una referència menor, com podria ser una polzada. En aquests darrers casos, obtindrem valors a $\mathbb{N}$.

Seguint a Callís [19], per obtenir el valor d'una mesura, sovint s'han de realitzar operacions físiques o mentals, amb o sense instruments i és necessari diferenciar aquest procés de la comprensió significativa que té aquest valor mètric.

2.2.1 Dificultats en l'aprenentatge de la mesura

Tot procés d'aprenentatge comporta dificultats. En el cas de la mesura de longituds i superfícies, Chamorro [24] assenyala els següents obstacles la forma de portar a terme el seu ensenyament i aprenentatge:

- Els objectes de suport de les diferents magnituds són objectes idealitzats, dibuixats en la majoria de casos
- La pràctica constant del canvi d'unitats no permet fixar l'ordre de magnitud dels objectes comuns, dificultant l'estimació
- El costum habitual de donar superfícies dibuixades, en lloc de retallades, no afavoreix la identificació de perímetre i superfície com a conceptes diferenciats
- Els canvis d'unitats de mesura s'ensenyen a partir de procediments algorísmics que s'han de memoritzar i que no permeten desenvolupar les representacions sobre la mesura que es pot fer l'estudiant

Per superar aquests obstacles, Chamorro proposa que les activitats a l'aula es centrin en mesures reals d'objectes i que s'asseguri que l'alumne descobreix amb la pràctica les relacions entre les diverses unitats. Per la seva banda, Maranhão i Campos [100] afirmen que l'ús d'aparells de mesura no convencionals, així com d'unitats de mesura informals, pot ajudar a resoldre els problemes d'escala que demostren els alumnes.

Altres autors han estudiat les dificultats en l'aprenentatge d'àrees i volums. Aquestes són un tipus de magnitud que cal diferenciar de la temperatura o la longitud pel fet que es poden interpretar com a magnituds multidimensionals. El fet que l'àrea es pugui expressar com la quantitat de superfície d'una figura i, al mateix temps, es pugui determinar a partir de determinades longituds (alçada i amplada en un rectangle) suposa diverses dificultats als alumnes (Simon i Blume [163]).

Outhred and Michelmore [120, 121] afirmen que comparar una figura amb una matriu de quadrats és clau per entendre la forma en que els estudiants entenen el concepte d'àrea.

Quan es proposa als alumnes que calculin àrees a partir d'aquest raonament s'observen diverses formes de procedir, com ara el recompte individual de quadrats, la suma per files o la multiplicació de la quantitat de files per la de columnes. Aquests autors proposen que lligar aquestes dues activitats reforça el concepte d'àrea en els alumnes i reconeixen que aquesta és una activitat més complicada del que sembla a primera vista, ja que s'ha documentat que els alumnes no tenen un coneixement suficient de la tessel·lació del pla per quadrats (Callingham [18]).

L'estudi de la comprensió del volum per part dels alumnes assenyala dificultats equivalents a les presentades per a l'àrea. Saiz [144] observa que algunes de les concepcions errònies dels alumnes provenien d'alguns dels seus professors, que només entenen el volum com el producte de tres longituds i que transmeten aquesta concepció als seus alumnes. D'aquesta forma, aquests professors que documenta Saiz consideren que els objectes que tenen formes irregulars no tenen volum donat que no es pot calcular a partir de la seva alçada, amplada i profunditat.

També s'han estudiat les dificultats que presenten els alumnes a l'estudiar canvis d'escala en figures i tenen a veure amb la forma que una ampliació o reducció afecta a l'àrea o perímetre d'una figura. De Bock, Verschaffel i Janssens [12] observen que els alumnes acostumen a utilitzar mètodes de proporció directa tant en el tractament de perímetres com àrees i Modestou, Gagatsis i Pitta-Panzani [103] ho corroboren en problemes relacionats amb volums.

2.3 Estimació i significació numèrica

Són moltes les preguntes que ens podem plantejar per les que una estimació numèrica pot representar una resposta vàlida: Quanta pintura necessito per pintar el menjador? Porto diners suficients per pagar aquesta compra? Quant temps tardaré en arribar a la parada del bus a aquest ritme? Quant pesa aquest objecte? Això que marca \$124.95, quant val en euros? He preparat menjar suficient pel dinar familiar? Si continuo a aquest ritme, tindré tots aquests exàmens corregits per aquesta tarda?

Per a totes aquestes preguntes és més eficient trobar una solució aproximada que pretendre calcular la solució exacta, tenint en compte que no sempre disposarem de totes les dades necessàries ni del temps o coneixements per elaborar aquesta resposta. De fet, algunes d'aquestes preguntes no accepten *una solució* en el sentit més estricte de l'expressió, donat que diferents condicionants poden fer variar el valor final d'aquesta en funció de la situació concreta que ens plantegem i de la forma en que és plantejada.

És clar que preguntes com aquestes poden aparèixer en múltiples situacions i que la necessitat de donar una resposta ens pot transformar en estimadors.

Sowder [166] afirma el següent al respecte:

> Good estimators are flexible in their thinking, and they use a variety of strategies. They demonstrate a deep understanding of number and operations, and they continually draw upon that understanding. Poor estimators seem to be bound, with only slight variations, to one strategy—that of applying algorithms more suitable for finding an exact answer. Poor estimators have only a vague notion of the nature and purpose of estimation; they believe it to be inferior to exact calculation and equate it with guessing (pàg. 375).

Allò que és comú a les preguntes abans exposades és la necessitar d'efectuar un petit conjunt de càlculs, aproximant algunes de les quantitats desconegudes. Tal i com afirma Sowder [166], per tal que el valor resultant sigui considerat correcte "the answer must fall within a certain interval, as determinated by the problem itself or some external source" (pàg. 371).

Rubenstein [142, 143] amplia el nombre de situacions que entenem per estimacions, afegint-hi aquelles en les que és necessari decidir si un nombre donat és una solució raonable, si aquest nombre és major o menor que la resposta real o si el valor donat és del mateix ordre de magnitud que la solució.

Pensant en la forma en que es fa una d'aquestes estimacions, cal considerar que estimar una quantitat pot ser una tasca recursiva (Ross [141]). Per trobar una estimació de la superfície d'una habitació rectangular, pot ser necessari estimar prèviament les longituds de les dues parets, i aquestes estimacions es poden fer per diferents mètodes, com ara comptant rajoles o comparant amb altres mides ja conegudes. Bright [14] defineix estimació com el procés necessari per arribar a mesurar un objecte sense utilitzar instruments de mesura, considerant que mesurar un objecte és comparar un atribut d'un objecte físic amb una unitat de mesura. Aquesta definició de caire geomètric (està concebuda dins l'àmbit de la mesura) posa de manifest que es pot estimar el valor d'una magnitud d'un objecte mitjançant la comparació amb una referència prèvia. De fet, Bright remarca que els bons estimadors tenen un conjunt d'unitats mentals de referència ben definit, amb el que podrien estimar la superfície d'una habitació a partir de la seva pròpia experiència i sense la necessitat de realitzar càlculs.

Cal tenir en compte que l'estimació és un coneixement situat (Greeno [63]) i que es basa en la creació mental de models per a l'aprenentage en contextos de la vida real. Aquests models mentals utilitzats en estimacions de mesures han d'estar basats en referències properes a l'estimador, com poden ser diferents parts del seu propi cos (Tretter, Jones, Andre, Negishi i Minogue [173] o Jones, Taylor i Broadwell [99]).

2.3.1 Diferents formes d'estimació

Sense entrar en una discussió més detallada, en l'àmbit de l'Estadística s'utilitzen estimadors per aconseguir estimar el valor d'un paràmetre d'una mostra. Els estimadors són funcions que depenen d'una successió de variables aleatòries i que permeten obtenir resultats puntuals o intervals per a la solució amb un determinat nivell de confiança. Aquest valor o interval és una estimació (Rao [135]). Les estimacions estadístiques s'utilitzen en una gran varietat de camps científics amb l'objectiu d'aconseguir valors que siguin característics d'una població a partir dels valors concrets d'una mostra. Alguns exemples de les variables estimades serien el grau d'eficiència d'un medicament o l'augment de l'IPC. Aquest tipus d'estimacions poden oferir respostes a algunes de les preguntes que hem plantejat anteriorment, però no és aquesta la perspectiva que prendrem en aquest treball.

En una revisió de la literatura en Educació Matemàtica podem apreciar que es tracten de forma ben diferenciada els diversos tipus d'estimació entre les que destaquen l'estimació de quantitats (*numerosity*), l'estimació computacional i l'estimació de mesures.

L'estimació de quantitats s'associa a la capacitat de l'estimació visual del nombre d'elements d'un conjunt, presentats de forma que s'eviti el recompte exacte d'aquests elements. Un cas concret àmpliament estudiat en l'àmbit de la Psicologia és la capacitat d'estimar un conjunt de punts que apareix durant breus instants a una pantalla. S'han portat a terme diversos estudis i s'han observat les capacitats d'infants i adults. S'accepta que aquesta capacitat és present en els infants a partir dels 6 anys (Baroody i Gatzke [7]) i que es basa en mecanismes diferents que els altres tipus d'estimació (Dehaene i Cohen [35]).

D'altra banda, diversos estudis tracten la vessant computacional de l'estimació, centrant-se en la forma que es poden aconseguir resultats aproximats per a valors com els de

$[6 \times 347] \div 43$ o de 424×0.76. Alguns d'aquests estudis es centren en observar les formes en les que es pot arribar a estimar una d'aquestes quantitats i analitzen les diferents tècniques utilitzades (Reys, Rybolt, Bestgen i Wyatt [138, 139], Trafton [171], Levine [96], Threadgill-Sowder [170]). Altres aprofundeixen en la relació entre l'estimació computacional i altres aspectes relacionats amb l'aprenentatge dels alumnes. Així, Morgan [105] compara els resultats oferts pels estudiants a càlculs descontextualitzats i al valor de les mateixes expressions en el context d'un problema amb enunciat, observant que alguns dels problemes presentats a l'hora de computar els resultats es redueixen en situacions contextualitzades. Hall [69] observa que l'habilitat per fer estimacions computacionals està relacionada amb l'habilitat de resoldre problemes i Paull [124] conclou que està relacionada amb l'habilitat d'expressar-se verbalment. Com afirma Sowder [166], l'estimació computacional és el tipus d'estimació del que s'han portat a terme més estudis, amb alguns bons exemples com Dowker [44, 45], Hanson i Hogan [70] o LeFevre, Greenham i Waheed [90].

El tipus d'estimació que tractarem en el nostre estudi és l'estimació de mesures. Realitzar estimacions de mesures és donar un valor aproximat per a una longitud, pes, volum, temps o una altra magnitud física o abstracta, com el valor monetari. Alguns exemples quotidians serien l'estimació del pes d'una bossa de supermercat amb el seu contingut, la longitud d'una corda o el valor d'un objecte. O'Daffer [114] també inclou en l'estimació de mesures aquelles referides a trobar el cardinal d'un conjunt i els problemes amb grans nombres, entre els que cita els problemes de Fermi, dels que parlarem a la secció 2.4. Alguns exemples de treballs sobre estimació de mesures són els de Forrester, Latham, i Shire [53], en el que s'estudia la influència del context en estimacions de distàncies, àrees i volums o la recerca de Forrester i Pike [54] en la que es conclou que les estimacions de mesures tenen un component verbal i discursiu i no exclusivament computacional. De fet, en un estudi comparatiu, Hogan i Brezinski [75] conclouen que l'estimació de mesures està directament relacionada amb habilitats espacials, mentre que l'estimació computacional ho està amb habilitats numèriques i quantitatives. Per la seva banda, els treballs de Siegler i Opfer [161] i Siegler i Booth [160] fan pensar que la forma de visualització dels nombres per part dels estimadors influeix en l'exactitud de les estimacions que realitzen.

Existeixen altres tipus d'estimacions, menys presents a la literatura, descrites per Smart [164], com ara les de valors de funcions trigonomètriques, del pendent d'una funció en un punt o l'estimació de valors numèrics concrets (com ara $6.159^{2.317}$). Un camp en el que l'estimació pot ser de gran ajut per a una bona comprensió de la matèria és l'estadística, en la que es poden estimar dades com la mitjana d'una mostra o el valor d'una probabilitat. Callís [19] destaca que, de fet, existeix una estimació relacionada amb la percepció que utilitzem de forma constant, per exemple al decidir si un got està al nostre abast serà necessari aixecar-nos per agafar-lo. Aquest autor afirma que en el nostre aprenentatge som capaços de passar de la percepció a la intuïció, que podem utilitzar en diferents estimacions com algunes de les que hem citat anteriorment.

2.3.2 Característiques de l'estimació i estratègies

Cal destacar que alguns autors no diferencien entre els termes *estimar* i *aproximar*. Per exemple, Smart [164] defineix estimació com "forming an approximate opinion of size, amount, or number that is sufficiently exact for a specified purpose" (pàg. 642). Però Hall [68] afirma que aquests dos termes no són sinònims i escriu que "whereas estimation is usually a mental exercise, approximating usually requires a tool of some kind" (pàg. 517). Aquesta distinció no està totalment acceptada. Així, Siegel, Goldsmith i Madson [159] consideren que estimar és tot un procés que ens ha de permetre solucionar un problema i que el que entenem per aproximació s'hauria de referir a una estimació computacional.

Segovia, Castro, Castro i Rico [157] defineixen l'estimació matemàtica com el judici del valor del resultat d'una operació numèrica o de la mesura d'una quantitat en funció de les circumstàncies individuals del que la fa i enumeren un conjunt de condicions que la defineixen. Aquestes condicions són una relectura del que escriuen Reys, Bestgen, Trafton i Zawojewski a [137] sobre l'estimació computacional i són les que es troben a continuació:

1. Consisteix en valorar una quantitat o el resultat d'una operació
2. El subjecte que la fa té alguna informació, referència o experiència sobre la situació
3. Es realitza, generalment, de forma mental
4. Es fa amb rapidesa i fent servir quantitats el més senzilles possibles
5. El valor assignat no ha de ser exacte, però sí adequat per poder prendre decisions
6. El valor assignat admet diferents aproximacions, depenent de qui faci la valoració

Aquest conjunt de propietats i característiques de l'estimació ens porta a la idea que estimar és *simplificar per entendre*, que es pot aplicar a diverses situacions de la nostra vida quotidiana i que hauria de ser útil per aportar significat.

Si ens centrem en les estratègies per fer estimacions, existeixen diversos estudis que caracteritzen i descriuen les diferents estratègies utilitzades per diferents col·lectius i es centren en diferents aspectes de l'estimació. Trobem estudis sobre les estratègies utilitzades per elaborar estimacions computacionals per part de bons i mals estimadors (Reys [139], Brame [13], Wyatt [184]) o per matemàtics professionals (Dowker [43]). D'altres estudis mostren la influència del context en l'estimació, comparant les estratègies utilitzades per fer estimacions computacionals amb les estratègies emprades en activitats contextualitzades, amb el que s'observa que el context pot oferir noves estratègies per realitzar estimacions (Morgan [106], Reehm [136]).

Una estratègia per estimar longituds és la iteració de la unitat (*unit iteration*). Aquesta consisteix en aplicar diverses vegades la imatge mental d'una unitat de mesura (centímetre, metre, etc) sobre un objecte per aconseguir l'estimació corresponent. En el cas d'intentar estimar l'alçada d'un arbre seria necessari situar-se en una posició des de la que tinguéssim una vista completa d'aquest i, mentalment, comptar quantes vegades podríem col·locar un llistó d'un metre de longitud des de la base de l'arbre fins al seu punt més alt. Diversos estudis han corroborat que aquesta estratègia és la més utilitzada per estimar mesures entre aquelles persones que no han treballat específicament altres estratègies possibles (Friebel [56], Hartley [71] o Hildreth [74]).

Una millora de la iteració de la unitat per mesurar longituds és introduir un objecte quotidià del que la seva longitud és ben coneguda per estimar la longitud d'un altre objecte. Aquesta estratègia és anomenada la del punt de referència (*reference point*) on la paraula punt denota un objecte que l'estimador pot connectar fàcilment amb la seva mida i que pot ser més útil que una unitat de mesura (Carter [22]). Sobre aquesta estratègia, Sowder [166] afirma que, per fer una estimació, "one must have a mental reference unit, that is, a mental picture or feel for the size of the unit" (pàg. 371). Un punt de referència pot estar lligat a una unitat de mesura (això és més senzill als països anglosaxons si pensem en polzades o peus) o pot ser-hi proper, com ho serien un metre i la longitud de la passa d'un adult. Joram, Gabriele, Bertheau, Gelman i Subrahmanyam [79] han comprovat que aquells estimadors que utilitzen l'estratègia del punt de referència són significativament més precisos que aquells que utilitzen la iteració d'unitats.

També existeixen estudis que tracten les estratègies d'estimacions d'altres tipus de mesures, com àrees, temps o pesos (Corle [31], Hildreth [74], Forrester [53], Callís [19]). Aquest fet posa de manifest que les estratègies identificades en aquests estudis per realitzar estimacions depenen fortament del tipus de magnitud que cal estimar i del perfil del grup de persones sobre el que es realitza l'estudi.

2.3.3 Sentit numèric i nombres grans

Carpenter, Coburn, Reys i Wilson [21] analitzen diferents dades recollides en diverses estimacions i conclouen que per tal que els alumnes puguin realitzar bones estimacions han de desenvolupar algun tipus d'intuïció quantitativa. Aquestes sensacions numèriques mostrades per part dels alumnes participants en l'estudi són les que posteriorment han formalitzat el concepte de sentit numèric (*number sense*). Estimar el valor d'una magnitud no té cap sentit si aquest procés no ofereix un resultat que aporti informació significativa que l'estimador pugui comprendre. Per tant, el sentit numèric ha d'estar present en els processos d'estimació, en el sentit que és una forma d'aritmètica mental que aporta capacitat per comparar nombres (Edwards [46]).

Segons l'NCTM [109] el sentit numèric és una intuïció sobre els nombres que prové dels diversos significats d'un nombre. En aquest document s'afirma que els estudiants amb un bon sentit numèric entenen els nombres i les seves diverses relacions, reconeixen les magnituds relatives dels nombres i tenen referents per a les quantitats de diverses mesures. Al mateix document, s'afirma que el desenvolupament del sentit numèric en els alumnes requereix entendre el significat dels nombres, tenir desenvolupades relacions múltiples entre nombres, reconèixer les magnituds relatives dels nombres, conèixer els efectes relatius de les operacions amb nombres i desenvolupar referents per a mesurar.

Sowder [165] afirma que el sentit numèric és una xarxa de conceptes ben organitzada que permet relacionar els nombres i les propietats de les operacions, proporcionant l'habilitat per treballar amb magnituds numèriques. Per la seva banda, Greeno [63] el relaciona amb altres capacitats, com la flexibilitat en el càlcul mental, l'estimació numèrica o el judici quantitatiu. En la mateixa direcció trobem a Howden [76], que descriu el sentit numèric com una intuïció que sobrepassa els processos algorísmics:

> Number sense can be described as a good intuition about numbers and their relationships. It develops gradually as a result of exploring numbers, visualising them in a

> variety of contexts, and relating them in ways not limited by traditional algorithms (pàg. 11).

A l'actualitat es poden trobar un gran nombre de documents que analitzen diferents aspectes del sentit numèric. Gersten i Chard [58] fan notar que cada investigador utilitza la seva pròpia definició, i que els investigadors que es centren en l'estudi dels processos cognitius utilitzen definicions considerablement diferents de les que utilitzen els investigadors del camp de l'Educació Matemàtica. Berch [8] recull fins a 30 components del sentit numèric, que el descriuen des de diferents punts de vista. Alguns d'aquests components estan relacionats amb habilitats de càlcul (com l'habilitat de descomposar nombres de forma àgil), habilitats de comprensió (com comprendre el significat d'un valor o la capacitat d'interpretar informació numèrica), estimació numèrica o de resolució de problemes (com la capacitat de desenvolupar estratègies per resoldre problemes, relacionar situacions del món real amb procediments numèrics o reconèixer valors erronis per a una quantitat).

Donada la seva complexitat, les dificultats més importants que presenta el sentit numèric són aquelles referides a l'ensenyament dels alumnes. Trafton [172] afirma que, donat que aquest és un concepte molt ampli i poc definit, intentar instruir directament el sentit numèric dels estudiants no serà fructífer. En aquest cas, segons Trafton, és preferible centrar-se en aquells aspectes concrets del sentit numèric relacionats amb els processos que els alumnes utilitzen al resoldre problemes numèrics. De fet, es pot aconseguir una millora substancial en les capacitats dels alumnes relacionades amb el sentit numèric a partir d'activitats no instructives, com ara la introducció de jocs de taula a l'aula, que poden ajudar a millorar la seva capacitat per representar mentalment els nombres (Griffin, Case i Siegler [66], Siegler i Booth [160]).

Si ens centrem en els problemes d'estimació de magnituds no abastables, en el moment que intentem visualitzar i comprendre un nombre associat a una magnitud molt gran ens apareix la següent pregunta: És possible desenvolupar una intuïció per a grans quantitats, o estem condemnats a treballar amb elles amb la sensació que són més grans del que podem comprendre? Zaslavsky [187] evidencia que el sentit numèric varia entre cultures i això ens permet pensar que és una habilitat apresa.

Segons Wagner i Davies [180], si s'encoratja als alumnes a donar una imatge mental a un valor com 10.000 (el seu exemple és el nombre de grans d'arròs que caben a un bol de cuina) es pot donar significat a altres valors més grans. En aquest cas, 1.000.000

seria el nombre de grans d'arròs que caben a un sac d'uns 15 litres i podríem representar la probabilitat de guanyar la Lotto 6/49[3] com la probabilitat d'encertar un gra d'arròs entre els de 14 sacs. En aquest cas, Wagner i Davies argumenten que el valor d'aquesta estratègia es troba en la connexió d'experiències amb quantitats amb les habilitats de càlculs dels alumnes, amb el que afirmen el següent:

> The development of quantity sense is dependent on making connections between comparisons of large quantities and the critical concerns of students, some of which would align with social concerns (pàg. 48).

Al mateix text, Wagner i Davies [180] afirmen que el sentit numèric ha de treballar-se amb els alumnes fins assolir un sentit numèric crític, que els hauria de permetre no només manipular valors de grans quantitats, sinó poder obtenir un significat mental per a aquests que pogués ser útil per a prendre decisions.

2.4 Problemes de Fermi

Ja hem vist que el procés d'estimar una quantitat no és, en general, una tasca senzilla, i encara menys si aquesta quantitat es troba allunyada de la nostra quotidianitat. Aquest treball es centra en l'estimació de mesures que no són abastables, tals com el valor de tots els cotxes que hi ha en un poble o el nombre de gallines que han d'abastir d'ous una comarca. Aquest tipus de problemes s'han utilitzat anteriorment en països anglosaxons per introduir els problemes de modelització, en els àmbits de l'Educació Matemàtica, Física o Química sobretot a nivell universitari, tot i que existeixen experiències a l'ensenyament secundari.

2.4.1 Què és un problema de Fermi?

La millor estratègia possible per estimar una magnitud molt gran és trencar el problema en parts més petites i abastables en algun sentit. Aquesta estratègia és coneguda com la del problema de l'afinador de pianos de Chicago, proposada per Enrico Fermi[4], de la que Von

[3]Loteria en la que cal encertar una combinació guanyadora de 6 nombres d'entre 49 possibles.

[4]Enrico Fermi (1901-1954) va ser un investigador guanyador del Premi Nobel de Física l'any 1938, molt popular com a professor, amb fama de proposar i resoldre el tipus de problemes que porten el seu nom. Es pot trobar una petita ressenya sobre la seva tasca com a professor a Lan [87].

Baeyer [5] n'explica les seves característiques i exposa diversos exemples. L'objectiu és esquivar la dificultat de no poder establir un marc de referències fiable degut a la magnitud de la quantitat estudiada i centrar-se en aspectes concrets que poden ser estimats.

La definició de problema de Fermi que ofereix Ärlebäck [4] és la següent:

> Open, non-standard problems requiring the students to make assumptions about the problem situation and estimate relevant quantities before engaging in, often, simple calculations (pàg. 331).

En aquest sentit, el problema *quants afinadors de piano hi ha a Chicago?* és un cas concret de problema de Fermi. L'estratègia de la resolució proposada per Fermi (recollida per Efthimiou i Llewellyn [47]) a aquesta pregunta és la que descriurem a continuació.

Evidentment, si volem saber quants afinadors de piano hi ha a Chicago sense conèixer la dada real, són necessaris alguns coneixements demogràfics, socials i/o tècnics que ens han de permetre determinar un valor aproximat per als factors parcials que utilitzarem. En aquest cas, és necessari saber que Chicago té uns tres milions d'habitants, que una família americana mitjana està formada per quatre membres i que una de cada cinc famílies té un piano. Aquestes dades estan associades al grau de coneixement de l'entorn del problema i poden ser estimades amb una dificultat comparativament menor que la pregunta inicial.

A partir del coneixement del nostre entorn social, podem suposar que un afinador de pianos treballa unes 48 setmanes a l'any, amb una jornada de 8 hores diàries i de dilluns a divendres, i que un afinador pot treballar en 4 pianos en un sol dia. Aquestes dades requereixen un coneixement de la feina d'un treballador qualsevol amb la dificultat de saber quant temps requereix afinar un piano.

Una vegada ja tenim clares aquestes dades, i pensant que un piano s'ha d'afinar un cop a l'any, només ens resta calcular que un afinador podrà afinar $48 \times 5 \times 4 = 960$ pianos en un any. Com que podem determinar que a Chicago hi haurà $3.000.000 \div 4 \div 5 = 150.000$ pianos, el nombre d'afinadors haurà de ser de $150.000 \div 960$, uns 160 afinadors aproximadament.

La validesa d'aquest resultat depèn, òbviament, de la validesa de les estimacions parcials utilitzades. Tot i així, els errors d'estimació per defecte es poden corregir amb els errors per excés i podem aconseguir una dada fiable en el sentit que marca l'ordre de magnitud de la xifra final que volíem estimar. A partir d'aquest resultat, podria ser interessant dedicar-se a afinar pianos a Chicago si només hi hagués 10 afinadors o podem pensar que no seria creïble una xifra de 15.000 afinadors ja que el volum de negoci existent no permetria mantenir uns ingressos estables a tots els potencials afinadors.

D'aquesta forma es poden aproximar altres magnituds, que poden ser no abastables, com ara la quantitat d'aigua consumida per la població de Catalunya, el nombre de cabells que té una persona al cap o altres qüestions com ara el nombre de metges d'una població.

Un altre problema de Fermi que ha aparegut a la literatura és un problema proposat per Schoenfeld [146] a alumnes voluntaris, en el que els demanava estimar la quantitat de cèl·lules que té un cos humà. De forma més concreta, els demanava un valor tan acurat com fos possible del nombre cèl·lules que té un cos humà mitjà, donant unes cotes màxima i mínima per a aquest valor.

Per resoldre aquest problema cal determinar el volum del cos humà i el volum d'una cèl·lula i, a partir d'aquesta informació, determinar el nombre de cèl·lules a partir de dividir aquestes quantitats. Schoenfeld considera que un alumne pot simplificar la forma d'una cèl·lula a un cub i que, si posseeix un mínim bagatge científic, sap que una cèl·lula no és visible a ull nu però que es pot observar amb un microscopi que no ha de ser necessàriament molt potent. Pensant en la forma d'estimar el cos humà, és suficient pensar en una caixa en la que ens poguéssim encabir. Schoenfeld documenta diversos tipus d'estratègies per a l'estimació d'aquestes quantitats i observa que els resolutors utilitzen estratègies més factibles quan treballen en parelles que quan ho fan de forma individual.

2.4.2 Recerques prèvies sobre problemes de Fermi

Tal i com afirma Robinson [140], la capacitat d'estimar l'ordre de magnitud d'una mesura abans de realitzar un llarg càlcul va ser fonamental pels físics abans de l'arribada de l'ús dels ordinadors dedicats a aquestes tasques. Avui en dia, amb aquesta situació superada, els motius donats per incloure els problemes de Fermi als currículums de Física o Matemàtiques són altres.

Sobre el procés de resolució dels problemes de Fermi, Chandler [25] afirma que aquest ha de finalitzar amb l'estimació de la potència de deu més propera sense utilitzar llibres de referència o calculadores per garantir una solució adequada. Per la seva banda, Carlson [20] ofereix una visó més elaborada i descriu el procés de resolució d'un problema de Fermi com "the method of obtaining a quick approximation to a seemingly difficult mathematical process by using a series of *educated guesses* and rounded calculations" (pàg. 308) i afirma que tenen un clar potencial de motivació en els alumnes. Seguint la mateixa direcció, Efthimiou i Llewellyn [47] caracteritzen els problemes de Fermi afirmant que sempre semblen difusos en la seva formulació, donant poca informació o pocs fets rellevants sobre la forma d'atacar el problema. Al mateix temps, a partir d'una anàlisi més acurada es poden descompondre en problemes més senzills que permetin arribar a la solució de la pregunta original. Aquest autors argumenten que aquests problemes fomenten el raonament crític en els alumnes.

Centrant-se en l'estimació del valor de les magnituds estudiades en els problemes de Fermi, Moore [104] afirma el següent:

> Because it is often impossible to judge the veridicality of a given answer (...) problem solvers tend to evaluate the process by wich they arrived at their solutions. For example, if a number has been estimated the solver evaluates the procedure used to generate the answer. They attempt to justify their answer to each component or subgoal in the problem, doing this for each segment of the problem (pàg. 8).

Altres autors s'han interessat directament en aspectes concrets de la resolució d'aquests problemes, com Peter-Koop [126, 127, 128], que proposa problemes de Fermi senzills a alumnes de primària per, entre d'altres, investigar sobre les estratègies de resolució que utilitzen.

Les seves conclusions es poden resumir com segueix:

- els alumnes resolen els problemes de Fermi de formes molt diferents
- els alumnes generen nou coneixement matemàtic per ells mateixos
- el procés de resolució és multicíclic

Aquestes conclusions són un punt d'inici que requereix un major grau de profunditat en la recerca, com el que mostra Ärlebäck [4] en el que adapta les següents subactivitats proposades per Schoenfenfeld [146] per caracteritzar els diferents passos de la resolució d'un problema de Fermi:

- Llegir: que implica la lectura del problema i una comprensió inicial

- Desenvolupar un model: simplificar i estructurar la tasca matemàtica
- Estimar: fer les estimacions necessàries
- Calcular: portar a terme els càlculs
- Validar: interpretar, verificar i validar els resultats i el model en ell mateix
- Escriure: resumir els resultats i escriure la solució

A partir de l'observació de la resolució dels problemes per part dels estudiants, conclou que els processos que descriuen aquestes activitats "are richly and dynamically represented when the students get engaged in solving Realistic Fermi problems" (pàg. 355). Així mateix afirma que aquest tipus de problemes són una bona oportunitat per introduir als alumnes en activitats de modelització matemàtica.

Per a Ärlebäck [4], les característiques principals dels problemes de Fermi són les següents:

- La seva accessibilitat: es poden proposar individualment o a grups d'alumnes a diferents nivells educatius, ja que no demanen coneixements matemàtics específics
- La seva relació amb situacions del món real: estan relacionats amb les activitats de la vida quotidiana i, al presentar situacions obertes, ofereixen una gran diversitat de possibilitats pedagògiques
- És necessari que l'alumne estructuri la informació pertinent per resoldre el problema
- Absència de dades numèriques: són els alumnes qui han de fer les estimacions necessàries per a la resolució
- Promouen la discussió entre els alumnes

Ross i Ross [141] destaquen que un resolutor ben informat pot trobar una solució aproximada a un problema de Fermi a partir d'una cadena d'estimacions. Aquests autors ofereixen una visió dels problemes de Fermi deslligada de la realitat, ja que afirmen que "solving Fermi problems presents an artificial challenge" (pàg. 181). Al respecte d'aquesta darrera afirmació existeixen diferents opinions. Peter-Koop [127], així com Sriraman i Lesh [168], exposen que els problemes de Fermi són millors i més útils si no es tracten com a exercicis purament intel·lectuals i es centren en situacions del món real i en contextos del nostre entorn habitual. Sobre aquest punt, Sriraman, Knott i Adrian [167] afirmen el següent:

> We argue that Fermi problems which are directly related to the daily environment are more meaningful and offer more pedagogical possibilities than purely intellectual exercises such as computing the number of piano tuners in a city or the number of grains of sand in a glass. Fermi problems involving estimates of fresh water consumption, gasoline consumption, wastage of food, amount of trash produced and so on have the potential to lead to a growing awareness of ecological problems related to the environment we live in as well as provoke critical thought when checking the accuracy of computations with different governmental and corporate resources. (...) Students would learn so much more about their world, how to live in it, deal with it, understand it, influence it, make it a better world. What a concept for education!!! (pàgs. 20-21)

Un altre aspecte rellevant de la naturalesa dels problemes de Fermi és el fet que la seva accessibilitat és ajustable a diferents nivells educatius, en els que es poden resoldre a partir d'arguments de diferent complexitat, tal i com afirmen Kittel i Marxer [84]. Tal i com exposa Sowder [166], un dels fets que presenta més dificultats als resolutors és la possibilitat que el problema no tingui una solució exacta ben definida, i cal entendre que "such problems *must* be answered with an estimate, since the exact answer is not available" (pàg. 372).

Seguint a Ross i Ross [141], el principal motiu per als professors per utilitzar problemes de Fermi a les aules té dos components. El primer és educatiu, ja que "problem-solving ability is often limited not by incomplete information but the inability to use information that are already available" (pàg. 175). L'altre component és de caire més general, ja que es pot oferir als estudiants la perspectiva que "doing mathematics is not always about getting exact answers through well-defined procedures" (pàg. 175). Un argument més recent per a l'ús de problemes de Fermi en l'educació matemàtica és la possibilitat d'utilitzar-los com a pont entre les matemàtiques i altres matèries escolars, acostant els estudiants a diferents tasques interdisciplinàries, tal i com argumenten Sriraman i Lesh [168].

Alguns autors han discutit les diferents habilitats que ha de reunir un resolutor per aconseguir una solució per a un problema de Fermi. Dirks i Edge [38] enumeren una llista amb les que ells anomenen les quatre habilitats típicament necessàries per resoldre un problema de Fermi. Són les següents:

- comprensió suficient del problema per decidir quines dades haurien de ser útils per resoldre'l
- visió per concebre assumpcions útils simplificadores
- habilitat per estimar les quantitats físiques rellevants
- un mínim de coneixement científic específic del problema

Per finalitzar, oferim una llista amb tots els problemes de Fermi dels que s'han estudiat aspectes relacionats amb els processos de resolució dels estudiants en el context de l'educació matemàtica que hem trobat a la literatura:

- Quantes cèl·lules té un cos humà? (Schoenfeld [146])
- Quant paper s'utilitza a la teva escola en un mes? (Peter-Koop [127])
- A quants alumnes equival el pes d'un ós polar? (Peter-Koop [127])
- Si volem anar a la catedral de Colònia[5], és millor anar-hi en autobús o en tren? (Peter-Koop [127])
- Hi ha 3 km de retencions a una autopista. Quants vehicles estan atrapats a la cua? (Peter-Koop [127])
- A l'Empire State Building, quant temps es tarda en pujar en ascensor fins a la part més alta? (Ärlebäck [4])
- A l'Empire State Building, quant temps es tarda en pujar per les escales fins a la part més alta? (Ärlebäck [4])

[5] Plantejat a alumnes residents a la rodalia de la ciutat de Colònia.

Capítol 3

Plantejament del problema de recerca

En aquest capítol exposarem el plantejament i la concreció del procés empíric per respondre els objectius del nostre problema de recerca. Primerament ens centrarem en el context educatiu de la nostra recerca. Posteriorment farem un resum de la recerca efectuada per al treball de Màster titulat *Sobre les organitzacions espontànies d'estimació de mesures de magnituds no abastables* (Albarracín [1]), que va ser el nostre primer acostament als PEMNA i que prenem com a punt de partida. Després, dedicarem un apartar a definir els conceptes de magnitud no abastable i de problema d'estimació de magnituds no abastables. Per finalitzar el capítol, exposarem la forma definitiva de l'estudi que realitzarem en la nostra recerca i concretarem els objectius d'aquesta.

3.1 Context de la recerca

L'estimació, en les seves diverses formes, ha estat considerada una part important de les matemàtiques que s'han d'incloure als estudis obligatoris a diversos països. En concret, Mitchell, Hawkins, Stancavage i Dossey [102] han documentat la inclusió de l'estimació als currículums educatius als Estats Units des de la dècada de 1970.

A Catalunya, els currículums escolars vigents d'Educació Primària[1] i Educació Secundària[2] van aparèixer al DOGC l'any 2007.

[1]Currículum d'Educació Primària – Decret 142/2007 DOGC núm. 4915

[2]Currículum d'Educació Secundària Obligatòria – Decret 143/2007 DOGC núm. 4915

Els continguts matemàtics del currículum d'Educació Primària estan dividits en cinc blocs: numeració i càlcul; relacions i canvi; espai i forma; mesura, i estadística i atzar. En el bloc de numeració es fa èmfasi en la comprensió dels nombres i les seves relacions, així com en l'estimació:

> Ensenyar i aprendre numeració i càlcul ha de significar potenciar la comprensió dels nombres, dels seus usos diversos, de les seves formes de representació i del sistema de numeració en el qual s'expressen; també la comprensió dels significats de les operacions i de les relacions que hi ha entre unes i altres, i la comprensió de la funcionalitat del càlcul i l'estimació. (Decret 142/2007 DOGC núm. 4915)

Entre els objectius matemàtics del currículum d'Educació Secundària hi trobem els següents:

> Comprendre el significat dels diferents tipus de nombres i de les operacions. Calcular amb fluïdesa, fer estimacions raonables i utilitzar els mitjans tecnològics per obtenir, tractar i representar informació, així com per calcular. (Decret 143/2007 DOGC núm. 4915)

> Reconèixer la importància de la mesura tant en la vida quotidiana com en el desenvolupament de la ciència i aplicar tècniques, instruments i fórmules apropiades per a obtenir mesures (de manera directa i indirecta) i fer estimacions raonables, en contextos diversos. (Decret 143/2007 DOGC núm. 4915)

En la concreció dels processos i aptituds relacionats amb l'estimació que han de desenvolupar els alumnes es troben referències a l'estimació des del punt de vista computacional i referències a l'estimació de mesures.

Als currículums de Batxillerat de Matemàtiques[3], tant en la matèria de les modalitats de Ciències i Tecnologia com la modalitat de Ciències Socials, trobem una única referència a l'estimació. Aquesta es troba en un dels objectius i es refereix explícitament a estimacions computacionals:

[3]Currículum de Batxillerat – Decret 142/2008 DOGC núm. 5183

> Saber fer càlculs senzills, tant aritmètics com algèbrics per, entre altres, poder fer estimacions raonables i controlar possibles errors en l'aplicació dels nous procediments apresos. (Decret 142/2008 DOGC núm. 5183)

En els decrets que hem esmentat en aquesta secció es presenten els objectius sobre mesura i estimació en l'àmbit de les matemàtiques. Aquests són els currículums intencionals, però no podem garantir que tots els objectius que presenten es treballin a les aules amb la mateixa intensitat. Un dels propòsits del nostre estudi és aconseguir elements per intentar incidir en els processos d'aprenentatge i ajudar a professors i alumnes a assolir els objectius plantejats a la normativa.

3.2 Antecedents

En aquest capítol pretenem resumir els continguts del treball *Sobre les organitzacions espontànies d'estimació de mesures de magnituds no abastables* (Albarracín [1]) presentat al Màster d'Iniciació de la Recerca en Didàctica de les Ciències i les Matemàtiques el setembre de 2008.

Aquest treball recull la recerca desenvolupada fins aquell moment sobre els PEMNA, incloent un primer estudi de caire exploratori i una segona part de la recerca enfocada a obtenir informació sobre les estratègies de resolució que utilitzen els alumnes per acostar-se als PEMNA.

3.2.1 Primera aproximació als PEMNA

En aquesta secció presentarem breument el que es pot considerar un estudi preliminar al que abordem en aquesta tesi. Va ser realitzat durant el curs acadèmic 2006-2007 i es va enfocar com una recerca de caire exploratori que permetés resoldre preguntes bàsiques al voltant de les capacitats dels alumnes de l'ESO i Batxillerat a l'hora d'enfrontar-se a l'estimació de magnituds no abastables.

Amb aquest punt de partida, es van establir com a finalitat general d'aquella recerca clarificar si els alumnes de l'ESO i Batxillerat, a partir dels currículums treballats a classe en aquest període educatiu, desenvolupen capacitats i aptituds suficients per enfrontar-se amb eficàcia a qüestions que involucrin l'estimació de magnituds no abastables.

Els objectius concrets que van definir l'estudi preliminar tractaven sobre les possibilitats dels alumnes de Secundària per resoldre PEMNAs i una primera observació de les estratègies que proposaven per a la seva resolució. Per la seva formulació, aquest estudi preliminar estava enfocat a determinar si els PEMNA podien esdevenir un camp vàlid per establir un problema de recerca en el que es poguessin obtenir resultats.

L'estudi es va centrar en dos grups d'alumnes d'un mateix centre privat concertat de la província de Barcelona. El primer grup el van formar alumnes de 1r i 2n d'ESO que constituïen els grups del desdoblament de matemàtiques amb un major nivell acadèmic en la matèria. El segon grup el van formar els alumnes de Batxillerat del mateix centre.

El primer grup va ser anomenat Grup Inicial i estava format per 48 persones. El segon va ser anomenat Grup Final i estava format per 23 persones. L'objectiu d'aquesta tria de grups va ser comparar els resultats obtinguts, considerant al Grup Final com a una representació del pas del temps sobre el Grup Inicial.

Per a la recollida de dades es va elaborar un qüestionari amb dues parts diferenciades. La primera contenia la pregunta directa del nombre total de diferents col·lectius de persones en el marc total del territori de Catalunya i una pregunta sobre el nombre de diferents productes consumits en un any a Catalunya. En la segona part del qüestionari es van incloure preguntes sobre l'actuació personal de l'alumne, és a dir, sobre les seves pròpies respostes a les preguntes anteriors. Aquest qüestionari va passar per un procés d'elaboració que va incloure diverses proves amb alumnes de 1r i 3r d'ESO i 1r de Magisteri d'Educació Primària a la UAB per assegurar que era útil com a eina de recollida de dades.

Una vegada les dades van ser recollides, es va realitzar l'anàlisi d'aquestes amb la intenció d'observar el grau de validesa de les respostes a les preguntes directes i buscar estratègies de resolució en la segona part.

Els resultats de l'anàlisi van mostrar que el Grup Final tenia un percentatge de respostes vàlides més elevat que el Grup Inicial, tot i que la diferència no era significativa. A més, en els dos casos, el nivell d'èxit dels resultats es podia considerar baix. Des del punt de vista de les estratègies utilitzades no es va poder aprofundir-hi de forma significativa, i allò que es va poder intuir no oferia diferències en la forma d'enfrontar-se als problemes pels alumnes que constituïen els dos grups.

D'aquesta forma, es va concloure que les diferències en els resultats i en la qualitat de les respostes entre els alumnes del Grup Inicial i els del Grup Final no eren suficients per poder afirmar que l'ESO aporta d'una forma directa o indirecta habilitats als alumnes per enfrontar-se als PEMNA. També vàrem concloure que l'eina de recollida de dades no aprofundia en les estratègies utilitzades pels alumnes i per això no va ser possible caracteritzar de cap forma els seus procediments ni identificar les diferents d'estratègies que van utilitzar.

A partir d'aquestes idees es va decidir continuar la recerca en la direcció d'aprofundir el nostre coneixement sobre les estratègies de resolució que els alumnes de Secundària utilitzen per resoldre problemes d'estimació de magnituds no abastables. Estàvem convençuts que aquest era un problema d'investigació en el que es podia aprofundir.

3.2.2 Primer estudi d'estratègies

Tenint com a base l'experiència prèvia aconseguida amb l'anterior estudi, es va decidir dissenyar una continuació d'aquest que es centrés en les estratègies de resolució que podien oferir els alumnes de Secundària davant del plantejament d'un PEMNA.

A partir de l'experiència anterior, es va decidir que es plantejarien diversos problemes als alumnes i els demanaríem exclusivament una proposta de resolució escrita, de forma que l'estudi es centraria en l'estructura de la seva proposta de resolució, no en la totalitat de la resolució del problema. Aquest estudi és, doncs, el primer pas de la recerca que presentem per obtenir el grau de doctor.

Els objectius que es van marcar anaven enfocats a aconseguir una descripció de les estratègies de resolució que proposen els alumnes per resoldre PEMNAs, identificar les propostes que estimarien adequadament les quantitats demanades i decidir si les estratègies proposades pels alumnes podrien ser portades a la pràctica.

Per aconseguir aquests objectius es va iniciar el procés d'elaboració d'una nova eina de recollida de dades i es van triar quatre problemes per passar als alumnes. Els problemes triats inicialment van ser els següents:

A. Quant valen tots el cotxes de St. Joan Despí?

B. Quantes gallines ha de tenir una granja per què pugui proporcionar ous a tota la població del Baix Llobregat?

C. Quanta aigua gasteu a casa en un mes?

D. Quantes famílies podrien viure amb el que es gasta a Catalunya en videojocs?

A partir d'aquests problemes es van crear quatre qüestionaris, un per a cada problema, que els alumnes participants de l'estudi haurien de complimentar. Cadascun d'aquests qüestionaris contenia un enunciat concret per al seu problema i un espai en blanc suficient per tal que l'alumne pogués exposar per escrit la seva proposta de resolució. Al girar el full, l'alumne es trobava diverses preguntes adaptades a cada problema en les que havien de marcar possibles dificultats en la resolució. Aquestes preguntes intentaven oferir-nos el màxim d'informació possible sobre l'explicació dels alumnes.

Per tal que aquesta part posterior fos el més ajustada a les nostres intencions es van passar un petit nombre de qüestionaris a un petit grup d'alumnes de 4t d'ESO a mode de prova pilot. Vam observar dos fets diferenciats. Per una banda les propostes de resolució dels problemes C i D no oferien informació suficient per poder realitzar el tipus d'anàlisi que ens havíem plantejat. D'altra banda es va decidir que l'enunciat del problema no havia de suggerir als alumnes la necessitat de l'obtenció d'una resposta concreta al problema, ja que altrament els alumnes es concentraven en els càlculs i no feien explícits els mecanismes que pretenien utilitzar per obtenir la resposta. No som els únics que han documentat aquest fet, per la seva banda Van Dooren, De Bock, Vleugels i Verschaffel [42] han detectat dificultats similars a l'oferir dades numèriques en problemes d'enunciat literal.

Com a mostra, l'enunciat definitiu del problema A que van contestar els alumnes és el següent:

> Sant Joan Despí és una ciutat moderna on hi viu molta gent. Els santjoanencs tenen unes necessitats de transport considerables. De cotxes n'hi ha un munt, i mantenir aquest parc mòbil ha de ser costós, a part que contaminen més del que voldríem.
>
> Si ara volguéssim comprar a **tots** els veïns del poble els seus cotxes (**tots**, els vells i els nous) per tal que ja no en quedés cap al poble, quants diners ens costaria?
>
> Descriu els passos que faries servir per calcular aquesta quantitat. No cal que ho calculis, només que expliquis l'estratègia a seguir.

Els qüestionaris complets per als problemes utilitzats es poden consultar a l'Apèndix A.

A partir d'aquest moment es va procedir a efectuar la recollida de dades. Donat que aquest estudi era exploratori es van triar alumnes de 1r, 2n i 3r d'ESO així com estudiants de 1r de Batxillerat, del mateix centre en el que vam realitzar l'estudi anterior, un centre privat concertat d'una ciutat de les rodalies de Barcelona, sense tenir en compte el grup de desdoblament de matemàtiques al que pertanyien. El nombre de qüestionaris recollits per a cada problema a cada curs es pot veure a les següents taules:

Curs	Nombre de qüestionaris
1r i 2n ESO	35
4t ESO	17
1r Batxillerat	17
Total	69

Taula 3.1: Problema A: Cotxes

Curs	Nombre de qüestionaris
1r i 2n ESO	57
4t ESO	13
1r Batxillerat	23
Total	93

Taula 3.2: Problema B: Gallines

D'aquesta forma vàrem obtenir un total de 162 qüestionaris per a l'anàlisi. Aquest va consistir en elaborar un conjunt de categories disjuntes en les que classificar cadascuna de les propostes de resolució que van realitzar els alumnes.

Des del punt de vista de l'estratègia de la proposta de resolució, vàrem observar diferents tipus de propostes. Vam detectar propostes que pel seu format no es podien estudiar, d'altres que no contenien cap estratègia i les que presentaven diferents tipus d'estratègies. Entre les estratègies detectades en aquest estudi, només vam distingir les que tractaven el problema com un tot i les que trencaven el problema en parts.

Al centrar-nos en aspectes qualitatius de la resposta, vam decidir estudiar tres característiques de les propostes. La més rellevant d'aquestes característiques va ser l'èxit en la resolució del problema, però també vam estudiar la possibilitat de que les propostes dels alumnes fossin pràctiques i factibles.

En aquest capítol no detallarem la forma en la que vàrem etiquetar cada proposta de resolució, donat que era un estudi encarat a tenir elements per poder prendre decisions per al disseny de l'instrument de dades definitiu. Remarcarem el fet que les reflexions efectuades per determinar aquestes dues classificacions guiaran l'estudi definitiu presentat en aquesta tesi doctoral i, per tant, estableixen les bases del que es troba més endavant.

L'anàlisi de les dades recollides a partir de la classificació aquí esmentada va aportar els següents resultats que exposem a mode de resum:

- **Sobre l'estratègia utilitzada:** La majoria dels alumnes utilitzen una estratègia global, intentant resoldre qualsevol dels dos problemes de forma exhaustiva. Tot i així, un petit nombre utilitzen una estratègia de Fermi.

- **Sobre l'èxit en la proposta de resolució:** En aquest cas existeixen diferències significatives entre els dos problemes plantejats. El problema A seria resolt per un nombre proper a la meitat dels alumnes (en el cas que la seva proposta es pogués portar a la pràctica). En canvi, només es pot dir el mateix d'una cinquena part de les propostes de resolució per al problema B.

- **Sobre l'estratègia utilitzada per aquells que resolen:** Centrant-se en les propostes que es va considerar que portarien a l'alumne a la resolució exitosa del problema B ens trobem que la gran majoria utilitzen una estratègia de Fermi. Per al problema A, ens vam trobar una majoria d'alumnes que proposaven una estratègia global, tot i que l'estratègia de Fermi es donava en una quarta part de les propostes amb èxit.

- **Sobre les estratègies que resoldrien:** Centrant-nos en les estratègies basades en trencar el problema en parts, es pot afirmar que tenen un alt grau d'èxit en la resolució de qualsevol dels dos problemes.

La primera conclusió d'aquest primer estudi va ser que el tipus d'estratègies més utilitzades eren les estratègies per aproximació global. Aquest fet fa pensar que els alumnes entenen la situació com un tot, amb les dificultats que això comporta, denotant una baixa capacitat d'interpretació del seu entorn.

Al mateix temps, vàrem concloure que aquells alumnes que obtenen els millors resultats són els que trenquen el problema en parts més petites, tot i que hi va haver alumnes capaços de crear propostes que podrien arribar a una solució des d'una aproximació global.

Amb tot això en ment, vam observar la necessitat d'estudiar amb un major detall les estratègies de resolució proposades pels alumnes, així com d'altres factors que puguin influir en les propostes que elaboren. Una altra necessitat que vàrem detectar és la de tenir un ventall més gran de problemes per poder observar altres elements presents en les propostes de resolució. Durant aquest primer procés d'anàlisi de les estratègies, vam decidir que seria rellevant poder aportar una definició *a priori* sobre els conceptes lligats a les magnituds no abastables i que l'estudi principal que presentem en aquesta tesi ens permetés ampliar el nostre coneixement sobre aquest tipus de magnituds.

3.3 Conceptualització de magnitud no abastable

Aquesta secció del treball està centrada en donar contingut als diferents conceptes que introduïm en aquesta recerca, així com relacionar-los amb els diferents coneixements teòrics exposats en el Capítol 2. Els conceptes clau a definir són el de *magnitud no abastable* i el de *problema d'estimació de magnituds no abastables.*

3.3.1 Magnitud no abastable

Recordem aquí la definició de magnitud que ofereix el diccionari del Centro Español de Metrología[4], que és la següent:

Magnitud:

1. Atribut d'un fenomen, cos o substància que és susceptible de ser diferenciat qualitativament i determinat quantitativament.

D'altra banda, obtenim del Diccionari de la Llengua Catalana de l'Institut d'Estudis Catalans les següents definicions:

Abast:

1. Distància a la qual hom pot arribar a tocar o a heure una cosa.

Abastar:

[4] Traduïda de l'original en llengua castellana.

1. Ésser capaç per grandària, alçària, potència, d'arribar (a alguna cosa).

2. Arribar a tocar (una cosa distant).

3. Heure, allargant la mà o fent servir algun instrument (una cosa que és en un lloc alt o distant).

Abastable:

1. Que pot ésser abastat.

Nosaltres pretenem estudiar aquelles magnituds que no podem estimar perceptivament sense un procés d'aprenentatge. Aquelles magnituds que ens podem plantejar i imaginar, però per les que no podem interpretar el seu valor, perquè aquest valor es troba més enllà del que podem entendre o donar significat. És en aquest sentit que utilitzem l'expressió *no abastables*.

Si pensem en les magnituds per a les que tenim un coneixement concret i a les que hem donat significat (la mida d'un bolígraf, el temps que passa en el transcurs d'un partit de futbol o el nombre de persones que hi ha a una classe) podem afirmar metafòricament que són magnituds properes.

Per deixar clar el que pretenem transmetre posarem un exemple que utilitzarem posteriorment en la nostra recerca: Quan volem determinar la possible repercussió d'una manifestació ens interessa conèixer el nombre de persones que hi ha pres part. Tots som capaços de determinar fàcilment un valor aproximat de persones que participen en una petita reunió de posem, 20 o 30 persones. Hi haurà gent que per diferents motius, podrà determinar amb facilitat el nombre de persones que es troben en un grup més gran. Per exemple, els responsables de seguretat d'una discoteca acostumen a aproximar el nombre de persones que hi ha al seu local amb un cop d'ull al local. Aquesta capacitat els permet respectar les normatives sobre l'aforament màxim del seu establiment. Podria ser que una persona qualsevol no fos capaç d'estimar la quantitat de persones que hi ha a la discoteca i que el responsable de seguretat de la discoteca només ho faci en l'entorn en el que acostuma a treballar. Possiblement, ni un ni l'altre poden estimar de forma perceptiva amb èxit el nombre de persones que hi ha en una manifestació amb un alt grau de participació.

Altres exemples de magnituds no abastables podrien ser la quantitat de runa generada en els moviments de terres associats a la construcció d'un edifici o al nombre de cotxes que passen per un punt determinat d'una autopista en un dia. Certament, existeixen professionals que es dediquen a treballar amb aquestes quantitats i que tenen les seves eines per determinar-les quan altres persones no tindrien cap forma ni tan sols per estimar-les. En aquest treball, nosaltres ens centrem en aquestes magnituds, les que es troben més enllà de l'abast de la nostra capacitat de donar significat quantitatiu a una magnitud.

És en aquest sentit que definim una *magnitud no abastable* com segueix:

> Una magnitud (física o abstracta) que es troba fora del nostre abast d'interpretació i per a la qual no hem generat significat

A partir d'aquesta definició, la concreció del que considerem com una magnitud no abastable dependrà de cada individu. Estarà marcada pels seus coneixements, competències o experiència, tal i com hem explicat anteriorment.

Els propòsits de la recerca que aquí presentem es centren en obtenir un major coneixement sobre els processos pels quals es pot millorar la comprensió d'aquestes magnituds i observar les diferents estratègies que poden portar als alumnes a estimar la quantificació d'aquestes magnituds.

3.3.2 Estimació de magnituds no abastables

A la secció 2.3 hem recollit els elements principals del que es pot llegir a la literatura sobre l'estimació. L'estimació del valor d'una magnitud no abastable és un cas concret d'estimació, concretament, és una estimació de mesures, però té un conjunt de característiques que fan que sigui una activitat diferent d'altres tipus d'estimació.

Tretter, Jones, Andre, Negishi i Minogue [173] i Jones, Taylor i Broadwell [99] afirmen que les estimacions es basen en la creació de models mentals basats en referències properes a l'estimador, però pensem que la creació de models no hauria de ser possible per a l'estimació de magnituds no abastables, per la pròpia definició d'aquestes. Per la seva banda, Bright [14] afirma que els bons estimadors tenen un conjunt d'unitats mentals de referència ben definit, però en el cas de les magnitud no abastables pensem que no hauria d'existir cap mena de conjunt de referències que permetessin establir el valor de la magnitud a estimar, o bé hauria de ser un conjunt de referències parcial o incomplet, altrament no consideraríem que les magnituds fossin no abastables.

Respecte al que afirmen Segovia, Castro, Castro i Rico [157] (veure pàg. 36), no tenim clar si una magnitud no abastable es pot estimar amb processos mentals i de forma ràpida i senzilla després d'un procés d'aprenentatge adequat. El que podem afirmar és que la persona que realitza aquesta estimació pot tenir alguna informació, referència o experiència sobre la situació però ha de ser parcial, incompleta o insuficient.

3.3.3 Problemes d'estimació de magnituds no abastables

Una vegada hem definit magnitud no abastable i hem recollit algunes característiques *a priori* de la seva estimació, ens centrarem en els problemes d'estimació de magnituds no abastables, que són l'objecte principal d'estudi d'aquesta tesi. Començarem proposant alguns exemples concrets d'aquest tipus de problemes per després donar-ne una definició.

Els següents són exemples de problemes de magnituds no abastables que hem considerat durant el nostre estudi:

- Quants arbres hi ha a un bosc?
- Quanta gent passa en un dia per la plaça del poble?
- Quants contenidors d'escombraries s'omplen al poble en un dia?

Proposar qualsevol d'aquestes tasques als alumnes de secundària és una tasca escolar de contingut matemàtic, ja que s'han de construir estratègies de resolució i fer càlculs, mesures i estimacions. Al mateix temps, l'alumne pot comprendre l'enunciat del problema però no necessàriament coneix mètodes ni estratègies concrets per abordar aquesta tasca. Seguint a Puig [133] (veure pàg. 20), aquestes tasques són realment problemes per als alumnes.

Respecte al que afirma Ärlebäck [4] (veure pàg. 41), els PEMNA es poden entendre com a casos concrets de problemes de Fermi, ja que són preguntes obertes en les que es poden fer diferents suposicions sobre una situació i estimar diferents quantitats rellevants per trobar la solució. Les diferents suposicions sobre la situació a estudiar poden realitzar-se a partir de la seva modelització.

En la línea del que afirma Moore [104] (veure pàg. 43), el que dóna consistència a la resposta és el mètode pel que arribem a la solució, ja que alguns PEMNA no tenen una solució concreta que pugui ser determinada directament.

Amb aquestes consideracions, proposem la següent definició de Problema d'Estimació de Magnituds No Abastables:

> Un Problema d'Estimació de Magnituds No Abastables és una tasca plantejada a un alumne en la que, sense conèixer un procediment, algorisme o esquema previ que porti a la seva resolució, ha d'estimar el valor d'una magnitud no abastable amb l'objectiu de crear significat per aquesta magnitud

3.4 Concreció del problema i objectius

En aquesta tesi pretenem realitzar un estudi sobre la resolució, per part dels alumnes de Secundària, dels problemes d'estimació de magnituds no abastables. Donat que aquests problemes no es treballen habitualment a les aules i la bibliografia al respecte és escassa, ens plantegem aquesta recerca com una oportunitat d'obrir camí en la comprensió del camp que s'obre al plantejar-nos la introducció d'aquests problemes a les aules. Per això, el nostre estudi es centrarà exclusivament en la primera part del procés de resolució: la proposta inicial de resolució que elaboren els alumnes quan s'enfronten a un d'aquests problemes. Tot just el que Pólya anomenaria comprensió del problema i elaboració d'un pla.

En el treball previ ja vam poder comprovar que les propostes inicials dels alumnes per tal de resoldre un d'aquests problemes oferien una gran quantitat d'informació analitzable i que podien ser estudiades des de diferents punts de vista. Per tant, la pregunta que guia la nostra recerca és: *què en podem extreure de les propostes d'estimació de magnituds no abastables que fan els alumnes de Secundària?* El que pretenem és caracteritzar aquestes propostes i aportar nous resultats estudiant-les des de diferents perspectives.

Els nostres propòsits principals es refereixen a tres àrees, els relacionats amb l'estudi empíric, els relacionats amb aspectes teòrics i les implicacions didàctiques que es puguin obtenir.

Pel que fa a l'estudi empíric, en aquest treball analitzarem les propostes d'estimació dels alumnes i les caracteritzarem. Un dels nostres propòsits és determinar les estratègies de resolució que proposen i detectar diferents aspectes que puguin intervenir en la resolució.

Un aspecte rellevant és decidir *si els alumnes són capaços d'oferir propostes vàlides amb els seus propis recursos i les eines matemàtiques de que disposen* per resoldre el problema. Aquestes mateixes propostes ens poden aportar, al mateix temps, dades sobre les diferents fonts d'informació i formes de recollida de dades que té en ment l'alumne a l'hora d'entendre el seu entorn.

Aquests propòsits es concreten a través de l'estudi empíric que haurà de donar resposta als següents objectius:

Obj1 Caracteritzar les estratègies de resolució de problemes d'estimació de magnituds no abastables que proposen els alumnes

Obj2 Identificar les propostes que estimen adequadament les quantitats demanades i contrastar aquesta informació amb el tipus d'estratègia proposada

Obj3 Estudiar la influència del context de la situació plantejada en el problema sobre l'estratègia utilitzada en la proposta de resolució

Des del punt de vista del desenvolupament teòric, és necessari partir d'una definició inicial de magnitud no abastable, per poder concretar la bateria de problemes que pretenem que estudiïn els alumnes. També és possible que aquesta definició evolucioni a partir de l'anàlisi dels resultats, o pot ser que detectem característiques comunes amb altres tipus de problemes.

En aquest sentit, un altre dels propòsits d'aquesta recerca és establir una definició raonada de magnitud no abastable, així com del que entenem per un problema d'estimació associat a aquestes magnituds. Des de la perspectiva de l'estudi de les estratègies proposades, serà necessari també definir conceptes com la validesa d'aquestes, donat que els problemes que tractem no tenen una resolució definida. Per tant, a partir del que puguem observar a l'estudi empíric pretenem determinar les característiques pròpies d'un problema d'estimació de magnituds no abastables.

Sobre les implicacions didàctiques d'aquest estudi, i des del punt de vista curricular, cal tenir en compte que els currículums educatius vigents a Catalunya presenten l'estimació de mesures com una competència a desenvolupar, i que aquesta no és present en les concrecions que es poden trobar en els textos desenvolupats per les editorials. Per això, un dels propòsits de la nostra recerca és omplir aquest buit oferint un conjunt de problemes que es puguin treballar a l'aula, desenvolupant competències relacionades amb l'estimació i que facilitin el seu desenvolupament. Aquest conjunt de problemes, que en el nostre estudi té caràcter instrumental, pot constituir, juntament amb la informació sobre les propostes de resolució dels PEMNA que aporti el treball, una guia per a la implementació d'aquests problemes a l'aula de Secundària.

Capítol 4

Disseny de la recerca i elaboració de l'instrument

4.1 Tipologia de la recerca

En aquesta secció detallem el disseny i la metodologia que pretenem utilitzar per afrontar el nostre estudi.

Aquesta recerca es planteja com un estudi exploratori d'una realitat educativa. Seguint a Yin [186], pretenem estudiar una situació actual en el seu context real. Lodico, Spaulding i Voegtle [97] recomanen aquest tipus de disseny quan l'investigador no té cap mena de control sobre la situació. Es justifica el seu ús com a metodologia vàlida per a la recerca a partir del fet que relaciona dades que s'originen en situacions reals i que ens permet descriure el context real en el que es donen.

En el nostre cas, intentem esbrinar els tipus d'estratègies que els alumnes proposen per a l'estimació de magnituds no abastables. Al mateix temps, pretenem determinar diferents components que influeixen en aquesta proposta, pensant-la des del punt de vista de la resolució de problemes.

La forma d'aconseguir una descripció completa de la situació que volem estudiar seria analitzar el procés complet de resolució d'un PEMNA per part dels alumnes (comprensió del problema, elaboració d'un pla, execució d'aquest i mirada retrospectiva) però nosaltres ens limitarem a estudiar exclusivament les propostes de resolució dels alumnes.

Com ja hem explicat, els estudis relacionats amb la resolució de problemes similars als

PEMNA són escassos i encara no tenim un coneixement detallat dels diferents processos que intervenen en l'actuació dels alumnes a l'hora de resoldre un d'aquests problemes. En la nostra recerca prèvia vam constatar que la primera part de la resolució (comprensió del problema i elaboració d'un pla) ens podria proporcionar un ampli ventall d'informacions que ens permet caracteritzar les estratègies proposades pels alumnes i observar components més generals sobre la resolució de problemes i sobre la forma en que els alumnes relacionen els problemes plantejats amb la realitat.

Centrem aquest estudi en l'etapa obligatòria de l'ensenyament secundari, que podria ser un bon moment per introduir aquest tipus de problemes als currículums de matemàtiques. A partir de les propostes de resolució als PEMNA dels alumnes de l'ESO i utilitzant un plantejament inductiu-deductiu, tractem de trobar patrons en les respostes dels alumnes per tal d'establir una nova descripció del fenomen que ens permeti anar més enllà del que observem inicialment. L'anàlisi de les dades que obtenim a l'estudi generen un conjunt de propietats que són les que ens permeten la caracterització de les mateixes.

La nostra recerca és qualitativa i utilitzem eines de recollida de dades que ens aporten detalls. Per aquest motiu no passem enquestes de resposta tancada a grans grups de població sinó que elaborem diferents qüestionaris oberts, de forma que ens exigeixen un nivell d'anàlisi més profund. L'objectiu és poder representar la complexitat de la matèria del nostre objecte d'estudi.

Per portar a terme la nostra recerca és necessari elaborar raonadament les eines que utilitzem. El primer pas és crear una àmplia bateria de problemes que es puguin plantejar als alumnes. Aquests problemes han de complir diferents condicions, com ara que siguin d'un nivell adequat o que ens puguin aportar dades significatives a l'estudi.

El següent pas és portar a terme una selecció justificada dels problemes definitius que utilitzem per al nostre estudi. Realitzem una prova pilot amb un grup reduït d'alumnes que ens permet determinar els problemes més adequats per assolir els objectius que ens hem plantejat.

Quan la llista de problemes està elaborada, és necessari elaborar els qüestionaris que han de contestar els alumnes i recollir les dades que, posteriorment, analitzem. Aquest procés és el que descrivim en les properes pàgines d'aquest capítol, al que segueix el capítol 5 amb l'anàlisi de les dades recollides.

4.2 Primera llista de problemes

El primer pas per elaborar l'eina que ens permet recollir les dades per a la recerca que aquí presentem és establir un conjunt de problemes que puguin ser el focus d'atenció de la investigació. Aquests problemes ens han de permetre extreure la màxima informació possible sobre les competències dels alumnes per resoldre diferents tipus de PEMNAs.

Per tal de poder fer una tria de problemes que ens sigui útil comencem amb una llista àmplia per poder retallar-la posteriorment en funció dels nostres interessos. La llista ha d'estar integrada per problemes de magnituds no abastables que es puguin treballar amb els alumnes de Secundària i que representi un alt grau de variabilitat, tant en les temàtiques abordades com en els coneixements matemàtics necessaris per a la seva resolució. Al mateix temps, és de gran importància que siguin de l'interès dels alumnes, tant des del punt de vista del seu entorn social com d'aquells aspectes que un educador pretendria transmetre als seus alumnes.

Tal i com hem explicat al capítol 3, ja hem plantejat problemes amb anterioritat a diversos estudiants de Secundària i tenim una idea prèvia del tipus d'enunciats que els són propers, així com de la forma en la que els enunciats són comprensibles per a ells.

Per generar la llista de problemes s'han utilitzat diverses fonts. Inicialment es van consultar diversos llistats de problemes de Fermi publicats a la Web. Els llistats consultats són els que es citen a continuació:

- *A Collection of Estimation Problems* al *Fermi Problems Site* de la Universitat de Maryland[1].
- *Classic Fermi Questions with annotated solutions* a la web del *Collin County Community College District*[2].
- *Fermi Questions - General Collection* a l'espai de Sheila Talamo al *Math Forum*[3].

Aquests llistats són reculls heterogenis de problemes de Fermi i estan orientats a diferents nivells acadèmics, estudis secundaris i universitat. Són de diferents matèries,

[1] Allotjat a `http://www.physics.umd.edu/perg/fermi/fermi.htm`, comprovada la seva disponibilitat per a la seva consulta per darrera vegada el 06-12-2010.

[2] Allotjat a `http://iws.ccccd.edu/mbrooks/demos/fermi_questions.htm`, comprovada la seva disponibilitat per a la seva consulta per darrera vegada el 16-07-2009.

[3] Allotjat a `http://mathforum.org/workshops/sum96/interdisc/fermicollect.html`, comprovada la seva disponibilitat per a la seva consulta per darrera vegada el 06-12-2010.

com ara matemàtiques, física o química. També es troben problemes que reflecteixen diferents aspectes relacionats amb la cultura anglosaxona, com ara esports com el beisbol, unitats de mesura com el galó o el dòlar com a moneda. Quan hem utilitzat un d'aquests problemes per a la nostra llista, s'ha modificat l'enunciat per adaptar-los al nostre entorn cultural i aconseguir que siguin adequats per als nostres alumnes.

A partir del coneixement d'aquests problemes es realitza una sessió de treball del grup EMiCS[4] en la que, a partir d'una triangulació d'idees, es concreta la llista definitiva de problemes, que es troba a l'apèndix B i està formada per 36 problemes.

Els problemes triats demanen estimar una magnitud no abastable que ha d'estar relacionada amb el seu context social dels alumnes, a l'aula o a fora d'ella, tractant temàtiques que poden ser del seu interès o que seria desitjable que centressin la seva atenció. Al mateix temps, aquests problemes cobreixen diferents tipus de continguts matemàtics. Essencialment, els problemes són preguntes sobre recomptes o mesures de magnituds en els que intervenen conceptes com l'àrea, el volum, la quantitat o el temps.

Cal aclarir que amb la intenció de donar uniformitat a la llista, hem modificat l'enunciat de tots els problemes referents a magnituds contínues introduint algun factor que el transformi en el recompte o mesura d'una magnitud discreta a partir d'utilitzar un patró de mesura de forma repetida (del que hem parlat a la secció 2.2). Un exemple seria el problema 28, en el que el càlcul del volum d'una piscina es mesura en gots.

Donat que el nostre treball es centra en les propostes de resolució dels alumnes a problemes de magnituds no abastables i ens cal un ampli nombre de respostes per reflectir la variabilitat i la complexitat d'aquestes per a cadascun dels problemes, una llista que contingui 36 problemes és massa extensa i poc practicable. El que pretenem és reduir-la fins a una mida que ens permeti un estudi profund però mantenint part de la diversitat que requerim.

El procés de reducció d'aquest llistat de problemes es trenca en dues etapes. Primerament, es porta a terme una selecció tenint en compte la temàtica i continguts tractats en cada problema. Donat que l'estudi de la influència del context en les respostes dels alumnes és un dels objectius d'aquesta recerca, es descarten aquells problemes que no poden ser comparats amb d'altres en aquest sentit. Aquest criteri permet descartar problemes que poden donar molt de joc, com el 26 (nombre de cabells al cap) o el 35 (nombre de

[4]El grup EMiCS és un grup de recerca consolidat reconegut per la Generalitat de Catalunya

llapis necessaris per pintar l'Equador). De la mateixa forma, alguns enunciats equivalents poden portar a diferents tipus de resolució en funció del seu context, però n'hi ha d'altres que, pel seu enunciat, són massa semblants. Amb aquest criteri es descarten alguns dels problemes com el 17 o el 18 (trànsit a un tram d'autopista o a davant de l'institut), ja que són massa semblants al que demanen els problemes 15 o 16. També es descarten aquells problemes que tracten aspectes temporals, perquè es decideix restringir el tipus de magnituds estimables que volem estudiar.

D'aquesta forma, i a partir d'aquest procés de selecció realitzat sobre el paper, la llista de problemes, classificada per tipus de magnituds tractades, es redueix a la següent:

- Lineals: 35 36
- Superfície: 6 7 8 9 10 11 12 13 14 25 26
- Volum: 24 28 32 33 34
- Trànsit: 15 16 17 18 19
- Coneixement Social: 1 2 3 4 5 20 21 22 23 27 29
- Temporals: 29 30 31

La segona etapa d'aquest procés de reducció del llistat de problemes, realitzat a partir d'una recollida de dades entre alumnes de diferents cursos d'ESO i Batxillerat, l'explicarem a la següent secció.

4.3 Procés de correcció de l'instrument

El segon pas en la reducció de la llista original consisteix en donar uns enunciats amigables als problemes per poder efectuar una petita recollida de dades que ens permeti seleccionar els més adequats per al nostre estudi. Tots els enunciats contenen una petita introducció i una pregunta directa que demana a l'alumne que escrigui el procediment que utilitzaria per estimar aquella quantitat. Tal i com hem explicat a la secció 3.2.2, l'enunciat dels problemes demana explícitament als alumnes que descriguin els passos que farien servir per estimar cadascuna de les quantitats que es demanen.

Com a exemple, l'enunciat concret per al problema 23, és el següent:

> Els serveis de recollida d'escombraries de les nostres ciutats tenen molta feina per recollir, classificar i reciclar totes les escombraries que generem. Hi treballa molta gent i s'hi dediquen molts recursos.
>
> Per això us pregunto, quants contenidors s'omplen al poble en un dia?
>
> Descriu els passos que faries servir per aproximar aquesta quantitat. No cal que donis un resultat, només que expliquis l'estratègia a seguir.

L'objectiu d'aquesta recollida de dades és poder valorar quins són els problemes que ofereixen les dades que més s'ajusten als objectius que ens hem marcat. Com que aquestes dades no s'utilitzen en l'estudi definitiu que presentarem al proper capítol, no és necessari recollir una gran quantitat de qüestionaris.

Es passen els qüestionaris a alumnes de 2n i 4t d'ESO, així com alumnes de 1r de Batxillerat que ja havien realitzat l'estudi previ a aquesta tesi (que es troba descrit a 3.2.2). El nostre propòsit és decidir quins d'aquests problemes ens permeten obtenir dades riques i obtenir el màxim d'informació sobre les estratègies de resolució proposades pels alumnes. Amb tot això, es recollen 6 propostes de resolució per a cada problema, totes del mateix grup classe per a cada problema, amb el que s'obtenen $16 \times 6 = 96$ qüestionaris en total.

La forma en la que es porta a terme la recollida de dades és la següent: per a cada grup, en el període d'una hora de classe, es demana a cadascun dels alumnes que, de forma completament individual, facin la seva proposta de resolució a un problema. En el moment que l'alumne decideix entregar la seva resposta, se li proposa que en respongui un altre diferent, amb el que la majoria d'alumnes presenten propostes per a dos problemes diferents.

El següent pas és l'anàlisi de les dades obtingudes en aquesta primera recollida de dades. Per a cadascun dels problemes es determinen aspectes com si els alumnes entenen la situació plantejada, hi tenen coses a dir, ho fan amb un discurs intel·ligible o fan propostes interessants en relació amb els objectius d'aquest estudi, com ara presentant una certa varietat d'estratègies de resolució o mostrant mancances en el procés de resolució.

A partir d'aquests criteris, es descarten problemes com el 5 (entrades de cinema venudes) perquè els alumnes no fan explícits de cap forma els seus mètodes de recollida d'informació. També es descarta el problema 9 (arbres a un bosc) ja que és un problema equivalent als problemes 6 (gent a un concert) i 7 (gent a una manifestació) però ofereix menys variabilitat en les estratègies proposades en la resolució. El problema 10 (totxanes per fer un institut) presenta grans dificultats ja que no tots els alumnes consideren els mateixos espais i les respostes no són comparables. Com que ens interessa obtenir un qüestionari escrit i no donar massa instruccions als alumnes, aquest problema no s'adequa a les nostres necessitats. D'altra banda, a problemes com el 13 (ciutat enorme) o el 16 (trànsit a la plaça del poble) els alumnes ofereixen molt poca informació, i no ens permetrien realitzar un estudi sobre les estratègies utilitzades.

Des d'aquesta perspectiva, en una discussió en la que van intervenir els membres del grup EMiCS, es tanca la tria amb els problemes 6, 7, 20, 24, 28 i 33. Els enunciats presentats als alumnes per a aquests problemes són els següents:

Problema 6: Organitzem un concert

Pel festival de final de curs, una bona opció seria portar a un grup ben conegut i organitzar un concert. Podríem aprofitar la pista del pati per encabir a tothom que vulgui venir.

En aquesta situació, una bona pregunta seria: *quantes entrades podríem vendre si omplíssim el pati per fer un concert?*

Problema 7: Gent a una manifestació

Quan hi ha una manifestació és important saber la gent que hi ha anat per valorar la força que tindrà la protesta. Moltes vegades, la policia i l'organització no es posen d'acord.

En aquesta situació, una bona pregunta és: *quanta gent hi ha en una manifestació?*

Problema 20: SMS

Avui en dia, els telèfons mòbils serveixen per una barbaritat de coses (fotos, música, vídeos, jocs. . .) però la gent encara els fa servir per comunicar-se, trucar i enviar missatges. Nosaltres no hi pensem, però hi ha una gran xarxa de comunicacions per permetre aquests serveis.

En aquesta situació, una bona pregunta és: *quants missatges SMS enviem en un dia entre tots els catalans?*

Problema 24: Goteres, gotes i galledes

Els problemes mai vénen sols. L'altre dia va aparèixer una gotera a la sala de professors, amb la mala sort que l'aigua cau a sobre dels ordinadors. La solució és senzilla, arreglar la gotera. Mentrestant hi tenim una galleda, però no sabem si podem marxar a casa i deixar que s'ompli, ens deixaria sense poder preparar exàmens.

En aquesta situació, una bona pregunta seria: *quantes gotes d'aigua calen per omplir una galleda?*

Problema 28: Gots per omplir una piscina

Normalment, les reserves d'aigua baixen a l'estiu, perquè plou menys i el consum no disminueix. Un ús habitual de l'aigua a l'estiu és el d'omplir la piscina, que si és privada, utilitza molts litres i només l'aprofiten uns quants.

En aquesta situació, una bona pregunta és: *quants gots d'aigua omplen una piscina?*

Problema 33: El que ocupa una caixa forta

> A les pel·lícules sempre ensenyen unes caixes fortes enormes plenes de bitllets i monedes. Suposo que la majoria dels diners els guarden en forma de bitllets, però podria ser que també acumulessin moltes monedes, i podrien tenir problemes d'espai.
>
> En aquesta situació, una bona pregunta seria: *quantes monedes d'euro caben en un metre cúbic?*

Amb aquesta tria, el conjunt final de problemes que utilitzarem en el nostre estudi està format per dos problemes de recompte d'objectes en una superfície (6 i 7), dos problemes de relació de diferents volums (24 i 28), un de recompte en un espai delimitat (33) i un altre de recompte discret que requereix un cert coneixement social (20).

Els problemes 6 i 7 són problemes equivalents en el seu plantejament tot i que hi podem trobar diferències. Els dos es basen en el recompte de persones en un determinat espai, però la primera diferència es troba en que en el problema del concert l'espai és ben conegut per als alumnes (el pati del seu centre), en canvi, l'espai en el que es planteja la manifestació del problema 7 no està concretat a l'enunciat. D'altra banda, la forma en la que s'organitzen un concert o una manifestació, o la forma en la que es concentra i distribueix la gent és diferent. Aquestes últimes diferències ens han de permetre observar si la proximitat al problema té alguna influència en les propostes de resolució que ens proporcionin els alumnes.

Si ens fixem en els problemes 24 i 28, trobem que també són equivalents com a problema matemàtic. En els dos es tracta d'estimar el nombre de vegades que un determinat volum és omplert per una unitat de volum més petita. En aquest cas, els quatre objectes que intervenen en els enunciats (gota i galleda per una banda i got i piscina per l'altra) no estan concretats de forma particular en l'enunciat del problema. Els dos problemes estan plantejats per obtenir una resposta al nombre d'unitats que omplen un volum determinat per aconseguir que la pregunta sigui equivalent, però el context en el que es plantegen és diferent. En el cas de la gotera presentem una situació quotidiana, però en el problema dels gots que omplen una piscina, l'enunciat està dirigit a entendre el valor de l'aigua, tot i que l'activitat de comptar el nombre gots que omplen una piscina és banal per ella mateixa.

El problema 20, en el que demanem als alumnes una estimació del nombre de SMS que s'envien a Catalunya introdueix la possibilitat d'observar propostes amb estratègies de resolució amb plantejaments diferents als altres problemes que hem inclòs a l'estudi. Per a aquest problema esperem propostes que incloguin recollides de dades en forma d'enquestes o equivalents. En aquest cas partim d'una situació que dota al problema d'un context social proper als alumnes, com és l'ús de les noves tecnologies.

Per últim, el problema 33 combina elements geomètrics i de recompte i pot permetre observar els models mentals que es plantegen els alumnes en la distribució de les monedes a la caixa forta. Des del punt de vista del context del problema, en aquest cas ens trobem amb un plantejament poc rellevant des del punt de vista social, que només pot ser considerat com una curiositat, creant un contrapunt a la resta de problemes.

Amb tot això, el nostre recull definitiu de problemes ens ha de permetre obtenir un ampli espectre d'estratègies de resolució, donat que els problemes cobreixen diferents aspectes matemàtics i ens han de permetre estudiar la influència del context proporcionat als enunciats. Els contextos que hem introduït pertanyen essencialment a l'àmbit familiar o personal i al de comunitat, seguint les categories definides per Ginsburg, Manly & Schmitt [60].

En qualsevol cas, les respostes obtingudes en la prova pilot realitzada ens fan pensar que les propostes de resolució que obtindrem en la recollida de dades final seran riques i permetran una anàlisi que ens permeti contrastar els objectius de la nostra recerca.

4.4 L'instrument definitiu

Una vegada ja tenim els problemes que presentarem als alumnes, ens cal concretar la forma en que es presentarà el qüestionari. Aquest és un full en el que a la plana del davant es planteja el problema i es demana a l'alumne que escrigui una proposta de resolució per a aquest i es recullen les dades personals necessàries per a la identificació dels alumnes. A la plana del darrera es plantegen preguntes relacionades amb la resolució que ha proposat l'alumne, amb la intenció d'aconseguir informació que faciliti la seva lectura de cara a l'anàlisi que realitzarem posteriorment. Aquestes preguntes tenen diferents propostes que l'alumne podrà triar, ja que en experiències anteriors havíem observat que no tots els alumnes ens oferien la informació necessària, tot i que es deixa un espai en blanc que ha de ser suficient per permetre que facin les seves aportacions personals.

Es decideix portar a terme dues sessions de recollida de dades amb alumnes de Batxillerat i discutir amb ells els enunciats i els problemes. L'objectiu d'aquestes sessions prèvies a la recollida dades és poder perfilar els enunciats dels problemes amb la intenció que siguin clars per als alumnes i no portin a confusions no desitjades, així com per obtenir informació per elaborar les preguntes de la part posterior del qüestionari.

Les sessions són d'una hora de classe amb un grup de 16 alumnes de 1r de Batxillerat tecnològic i un altre grup d'alumnes de 2n de Batxillerat científic. Es trien aquests grups per la seva maduresa com a estudiants de matemàtiques i com a alumnes que acaben de cursar els estudis als que està enfocada la nostra recerca. Cadascuna de les sessions comença com les recollides de dades anteriors, amb els alumnes fent les seves propostes de resolució a un problema de forma individual, amb el que a cada sessió es va dividir el grup en tres parts per poder obtenir informació de tres problemes. Una vegada escrites les seves propostes de resolució, els alumnes fan una lectura pública i es genera una discussió sobre els diferents aspectes de la proposta i sobre les possibles dificultats generades. La informació obtinguda en aquestes discussions serveix per elaborar les preguntes i respostes de la part del darrera i per fer petits retocs als enunciats per concretar millor alguns problemes. Per exemple, l'enunciat inicial del problema 24 incitava a donar una resposta sobre el temps en el que s'omplia la galleda, en lloc del nombre de gotes necessàries. Els qüestionaris, en el seu format definitiu, que utilitzem en el nostre estudi es troben a l'apèndix C.

4.5 Participants i recollida final de dades

En aquesta secció descrivim el grup d'alumnes a qui passem els qüestionaris i detallem la forma en la que es produeix la recollida de dades. El nostre estudi es centra en les propostes de resolució de diferents PEMNAs per part dels alumnes de dos centres d'Educació Secundària que anomenarem X i Y, per mantenir la privacitat i confidencialitat de les dades dels alumnes que s'han prestat a l'estudi.

Els dos centres es troben al mateix barri d'una gran ciutat de l'àrea metropolitana de Barcelona. El centre X és un centre privat concertat que té una única línia per a l'ESO amb uns 30 alumnes per curs. Aquests grups-classe es desdoblen a l'assignatura de matemàtiques en dos grups, un amb els alumnes amb millors resultats acadèmics a la matèria, que conté dues terceres parts del total d'alumnes, i un altre grup amb els alumnes que obtenen pitjors resultats acadèmics i presenten majors dificultats en l'aprenentatge de les matemàtiques. Els alumnes d'aquest centre pertanyen a famílies de nivell socioeconòmic mig-alt. El centre Y és un centre públic que té 3 línies. Els alumnes d'aquest centre pertanyen a famílies de nivell socioeconòmic mig-baix.

El nostre qüestionari es passa a tots els alumnes d'ESO del centre X i als d'un grup-classe per curs del centre Y. Amb aquesta selecció d'alumnes enquestats no pretenem que la mostra sigui representativa dels alumnes de secundària catalans, sinó que ens aporti un grau suficient de diversitat per poder observar diferents estratègies de resolució proposades.

Les diferents sessions de recollida de dades es porten a terme en períodes de classe d'una hora. La persona encarregada de la recollida inicia la sessió donant les instruccions bàsiques als alumnes, com ara que el qüestionari s'ha de respondre de forma completament individual i que cal que primer redactin la seva proposta de resolució i, posteriorment, procedeixin a respondre les preguntes de la part del darrera del qüestionari, sense tornar a canviar la seva proposta.

A cadascun dels alumnes se li entrega un qüestionari per omplir amb un problema diferent. L'encarregat de la recollida porta els diferents qüestionaris intercalats per tal que el nombre de propostes per a cada problema sigui equivalent, sense que això signifiqui una dificultat que pugui afectar al procés de recollida. Com que el temps en el que un alumne elabora la seva proposta de resolució i respon a les preguntes de la part posterior del qüestionari va dels 15 als 40 minuts, molts dels alumnes tenen temps d'elaborar una proposta per a diversos problemes. D'aquesta forma la majoria dels alumnes poden omplir 2 qüestionaris diferents en una única sessió de recollida de dades.

Per tal de poder estudiar les propostes de resolució dels alumnes, ens cal organitzar els qüestionaris que hem recollit d'una forma que ens permeti identificar-los. A cadascun dels qüestionaris li assignem un codi que inclogui informació sobre l'alumne que l'ha realitzat, com ara el centre al qual pertany i el seu curs. D'aquesta forma assignem el codi CNMP a on cadascuna de les variables anteriors pot tenir els següents valors:

- C: designa el centre al que pertany l'alumne i pot prendre els valors X o Y
- N: designa el curs de l'alumne i pot prendre els valors 1, 2, 3 o 4
- M: designa el número de l'alumne en ordre alfabètic a la llista del seu grup classe

- P: designa el problema al que s'ha donat una proposta de resolució.

Amb aquesta forma d'assignar un codi a cada qüestionari, aquell que hem etiquetat com a X312B correspon a la proposta de resolució del problema de la manifestació per part de l'alumne 12 de 3r d'ESO del centre X. Aquesta forma de codificar ens permet identificar fàcilment els qüestionaris recollits que resolen un mateix problema, els d'un curs concret o els d'un alumne en particular, mantenint la seva privacitat i facilitant la seva identificació.

La taula 4.1 mostra el nombre d'alumnes participants a l'estudi per cada curs.

Curs	X	Y	Total
1r	30	17	47
2n	26	24	50
3r	30	25	55
4t	26	38	64
	112	104	216

Taula 4.1: Nombre d'alumnes participants

Per la seva banda, la taula 4.2 mostra el nombre qüestionaris recollits per a cada curs i cada problema per al nostre estudi.

Curs	PA	PB	PC	PD	PE	PF	Total
1r	18	18	20	19	18	18	111
2n	22	21	22	20	21	21	127
3r	25	22	20	24	22	20	133
4t	31	31	28	25	25	27	167
Total	96	92	90	88	86	86	538

Taula 4.2: Nombre de qüestionaris recollits

Capítol 5

Anàlisi i resultats

5.1 Descripció del procés d'anàlisi

La recerca presentada en aquest document és un estudi exploratori realitzat a partir de les propostes de resolució dels alumnes de Secundària a diversos PEMNA. Com hem esmentat anteriorment, els nostres objectius són aconseguir una caracterització de les diferents propostes de resolució i identificar els diferents tipus d'estratègies proposades pels alumnes. Per poder assolir aquests objectius, enfoquem la nostra anàlisi amb la intenció d'identificar les estratègies proposades i d'altres característiques que ens permetin decidir si aquestes estratègies permetrien resoldre els problemes proposats utilitzant els recursos dels alumnes.

Per aconseguir resultats interpretables a partir de les dades que hem recollit, pretenem realitzar una anàlisi qualitativa basada en categories descriptives. Entenem les diferents categories com el conjunt dels diferents passatges dels textos a analitzar que defineixen un mateix concepte teòric. Seguint a Gibbs [59], aquesta forma de codificació de les propostes dels alumnes ens ha de permetre establir un marc de referència per interpretar les dades.

En general, organitzem aquestes categories en una estructura jeràrquica en forma d'arbre, on cadascuna de les branques principals conté totes les subcategories relacionades amb els diferents aspectes que considerem rellevants per a la descripció de les nostres dades, sempre que això ens sigui possible.

Cal tenir en compte que l'eina de recollida de dades és un qüestionari obert i que no totes les dades recollides tenen el mateix format, amb el que hi ha elements que no es troben presents en totes les propostes dels alumnes. Com a contrapartida, aquest fet ens permet observar característiques que no podríem detectar en un format de qüestionari tancat.

Si ens centrem, per exemple, en les estratègies de resolució, donada una proposta d'un alumne a un problema concret, a partir del nostre coneixement matemàtic i de la nostra experiència docent podem determinar els diferents aspectes que ens interessen, com ara el tipus d'estratègia que proposa o si aquesta proposta permet obtenir una estimació vàlida. Per a cada fet observable detectat, introduïm una nova categoria d'anàlisi a l'arbre. Aquesta forma de realitzar l'anàlisi qualitatiu de dades és dinàmica, ja que són les pròpies dades les que determinen el tipus de categories utilitzades per a l'anàlisi i ens pot portar a diverses redefinicions de les categories detectades i a una variació de l'estructura que les relaciona.

Per poder portar a terme aquesta anàlisi d'una forma àgil, utilitzem un software per a l'anàlisi qualitativa de dades. Existeixen diverses alternatives vàlides al mercat, com poden ser ATLAS.ti, MAXQDA, AQUAD o NVivo. En el nostre cas, ens hem decantat pel programa NVivo 8[1], ja que compleix tots els requisits que necessitem per enfrontar-nos a la nostra recerca i que compta amb una gran varietat de processos per creuar les dades. Aquest software ens ha de permetre l'organització de les dades que hem recollit, la codificació del text proporcionat pels alumnes a partir de les categories d'anàlisi que nosaltres decidirem i el creuament d'informació per a obtenir els resultats finals d'una forma dinàmica. Tots aquests processos es poden portar a terme de forma manual, però el temps i esforç necessaris per portar-los a terme creix de forma considerable amb el volum de dades recollides.

Per portar a terme l'anàlisi de les dades generades pel nostre estudi el primer ha estat una digitalització dels documents per poder tractar les dades amb NVivo[2]. A la figura 5.1 es pot observar una mostra del format original en el que van recollir les dades. Es poden trobar altres exemples de les propostes recollides a l'apèndix D.

Posteriorment s'importen a l'NVivo 8 en 24 documents, un per a cada problema i curs. No s'intenta separar les dades per centre perquè en cap moment la nostra recerca pretén ser un estudi comparatiu entre aquests.

[1]www.qsrinternational.com

[2]Aquí cal agrair el seu esforç i dedicació a la Carolina per transcriure les dades analitzades en aquesta tesi i a la Begoña per la transcripció de les del treball de Màster.

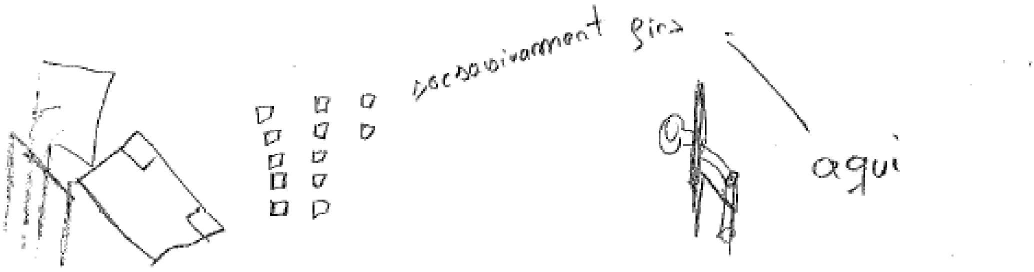
Situació: Organitzem un concert

Pel festival de final de curs, una bona opció seria portar un grup de música ben conegut i organitzar un concert. Podríem aprofitar la pista del pati per encabir a tothom que vulgui venir.

En aquesta situació, una bona pregunta seria:

quantes entrades podríem vendre si omplíssim el pati per fer un concert?

Descriu els passos que seguiries per calcular de forma aproximada aquesta quantitat amb els recursos dels que puguis disposar. No cal que donis un resultat, només que expliquis com ho faries. 1r agafaria moltes cadires i les miria possant 7 cadires per files, i on esta la porteria i entra fila fila un espai d'uns ~~30 centimetres~~ 1 meltre i les cadires miria possant fins al final de la paret i cadaria una cosa aixi:



Cada enttrada costaria ~~8~~ 10 euros i on laces el pati per passar-hi unes taquilles amb un senyor rebises les enltrades i les venges.

Per fer propaganda li donaria als alumnes i que els donguin a casa.

Figura 5.1: Una mostra de les dades originals recollides.

En un primer moment, es crea un primer projecte, a mode de prova, per comprovar el funcionament de l'NVivo 8 i assegurar-nos que permet respondre al tipus de consultes que necessitem per a elaborar la nostra anàlisi. En l'entorn del programari d'anàlisi qualitatiu de dades s'entén que un projecte és el document base sobre el que es treballa. Aquest inclou els documents analitzats i les relacions establertes per al seu estudi. És important crear un primer projecte de prova per assegura-nos que la creació, eliminació, reorganització i fusió de categories són processos assequibles i que no suposen entrebancs a l'anàlisi de dades.

A partir d'aquest punt, l'anàlisi es centra en la realització de diverses lectures de les propostes dels alumnes per determinar les categories que analitzarem i, posteriorment, per encabir cadascuna de propostes en les seves categories corresponents.

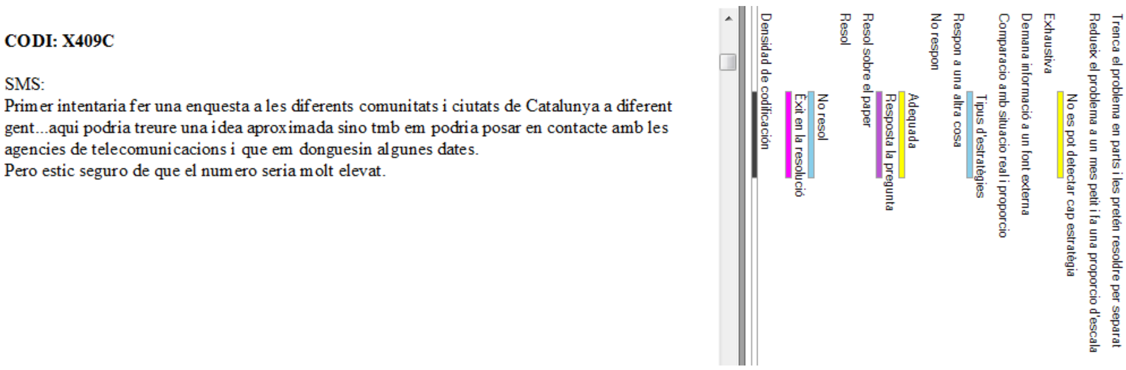


Figura 5.2: Una proposta codificada amb NVivo 8.

Primerament es fa una lectura preliminar de les dades per decidir els camps que havien de ser coberts per les categories a definir. Es defineixen diverses categories mare que han de respondre al tipus de caracterització que volem per a les nostres dades, incloent categories referides a si les propostes pretenien resoldre el problema presentat, les estratègies proposades pels alumnes, el fet de si les propostes permeten resoldre la situació plantejada amb èxit o a l'ús de les matemàtiques en les propostes.

Algunes de les característiques que preteníem detectar inicialment han estat descartades, com ara l'estudi de la factibilitat de les propostes, ja que aquesta característica es pot estudiar a partir de detallar les subcategories adequades per a l'èxit en la resolució. Aquest és només un dels exemples que mostra que el procés d'anàlisi és dinàmic.

A partir de diverses lectures posteriors es perfilen les subcategories adequades per a cada categoria i es fa la codificació de les dades. Per assegurar la coherència en l'anàlisi es porta un registre escrit de les decisions preses en els casos de més difícil codificació. D'aquesta forma els criteris utilitzats es poden mantenir durant tot el procés, i, en els casos en els que és necessari, permet una reformulació de les categories relativament àgil.

En el procés efectuat per generar les categories d'anàlisi, així com per decidir a quina categoria pertany una de les propostes dels alumnes, hem hagut de prendre diversos tipus de decisions en funció d'uns criteris que no sempre han estat fàcils de determinar. Aquesta anàlisi ha estat dinàmica i ha estat realitzada per una sola persona en un ampli espai de temps. Amb tot això, és indispensable que el producte final estigui format per categories ben definides que permetin obtenir uns resultats vàlids.

Per aconseguir minimitzar els errors i evitar incoherències es porten a terme diferents tipus d'accions. Els tipus d'errors més bàsics i més difícil d'evitar durant la codificació són els provocats per distraccions i mal ús del software utilitzat. Per detectar aquests errors es fan consultes sobre les diferents categories utilitzades fins aconseguir que el nombre de dades obtingudes coincideixi amb el nombre de qüestionaris analitzat per a cada problema. D'aquesta forma, les propostes dels alumnes que han estat codificades inicialment en més d'una opció incompatible d'una mateixa categoria poden ser detectades i corregides.

D'altra banda, el tipus d'error més greu és l'induït per la dificultat de mantenir criteris coherents en una anàlisi qualitativa en el que les pròpies dades ens proporcionen la forma en la que cal establir les categories d'anàlisi. Per evitar aquest tipus d'error es comproven algunes relacions entre les categories que són clares a priori. Per exemple, una proposta en la que no es pot trobar cap tipus d'estratègia de resolució no pot pertànyer a la categoria *Resol*. Per detectar errors d'aquest estil en la codificació es realitzen diverses consultes sobre les dades relacionant aquelles categories que es condicionen de forma directa.

Per acabar, el tipus d'actuació que ens permet confiar en el nivell de coherència de la nostra anàlisi és el fet que les diferents categories definides estan formades per un conjunt homogeni de propostes. Per assegurar-nos aquest fet, es llisten totes les diferents codificacions de cadascuna de les categories per comprovar aquesta coherència.

5.2 Arbre de categories elaborat

A continuació presentem els arbres de categories definitius que han sorgit de la nostra anàlisi. L'entenem com un primer resultat de la nostra recerca ja que és fruit de l'anàlisi, ha estat creat amb aquest objectiu i esdevé l'eina que ens permet caracteritzar les propostes de resolució de PEMNA que elaboren els alumnes. La seva descripció, justificació, exemplificació i quantificació de les categories i subcategories forma íntegrament el contingut de la secció 5.3.

En el procés d'anàlisi realitzar hem elaborat arbres de categories per a tres aspectes que descriuen les dades obtingudes, com són el tipus de resposta a la pregunta formulada, la possibilitat d'èxit de la proposta de resolució i l'estratègia proposada.

Presentem a la figura 5.3 la configuració final de l'arbre de categories que descriu les propostes estudiades en funció del tipus de resposta a la pregunta plantejada en els problemes estudiats.

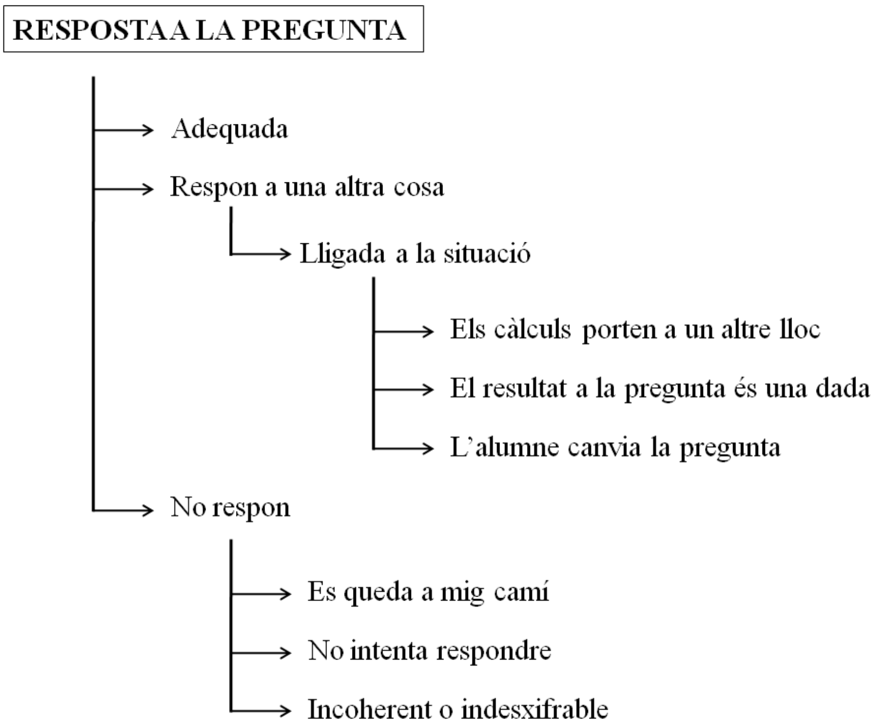


Figura 5.3: Arbre de categories per a la resposta a la pregunta

La figura 5.4 conté l'arbre de categories definitiu generat en l'anàlisi per a l'èxit en la resolució per a les propostes estudiades.

L'arbre de categories de les estratègies detectades en les propostes de resolució analitzades es troba a la figura 5.5.

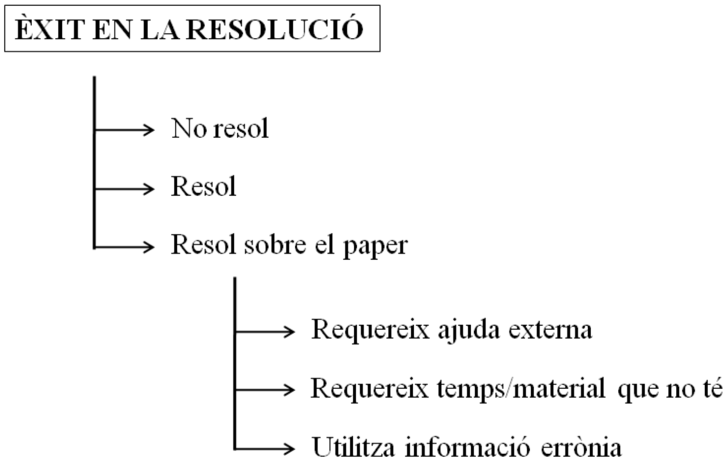


Figura 5.4: Arbre de categories per a l'èxit en la resolució

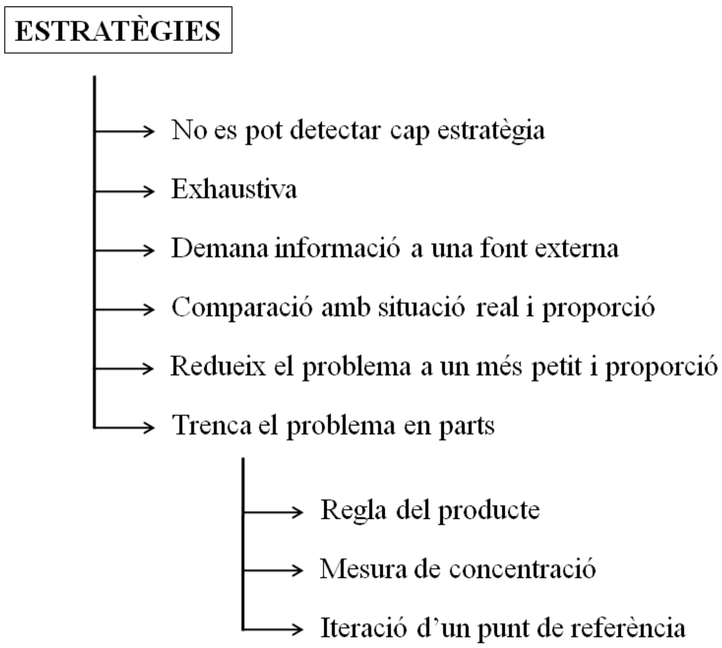


Figura 5.5: Arbre de categories per a les estratègies de resolució

Aquests arbres de categories són resultat de l'anàlisi que detallem en la següent secció. Per tant, podem concloure aquesta secció amb el següent fet:

Fet 1: Una vegada realitzat l'anàlisi de dades hem aconseguit una estructura de categories que permet caracteritzar les propostes dels alumnes estudiades.

5.3 Justificació de categories i resultats

El primer pas per a realitzar l'anàlisi de les dades que hem obtingut en el nostre estudi és decidir el tipus d'informació que ens interessa obtenir. Necessitem detectar si els alumnes ofereixen una proposta adequada a la situació plantejada, decidir si aquesta proposta pot portar a una solució satisfactòria i observar el tipus d'estratègia utilitzada.

Amb aquesta intenció es defineixen unes categories d'anàlisi relacionades amb aquests observables. A les següents pàgines fem una descripció detallada i exemplificada de les diferents opcions observades per a cadascuna de les categories que justifica la seva presència a l'arbre. Les categories són les següents:

- Resposta a la pregunta
- Èxit en la resolució
- Estratègia proposada
- Altres fets rellevants

5.3.1 Resposta a la pregunta

Justificació de categories

Els PEMNA que hem utilitzat en el nostre estudi són problemes que van associats a una situació concreta, descrita breument en cadascun dels enunciats, i que plantegen una pregunta per a la que s'espera una resposta de tipus numèric, ja sigui un valor concret o un interval de possibilitats. Tal i com hem descrit a 2.1.3, i seguint a Puig [133], anomenem resolució al conjunt d'accions o procés que permet resoldre un problema i anomenem solució al procés depurat que es presenta per justificar la resposta al problema. En el nostre cas, nosaltres hem demanat als alumnes participants en l'estudi que elaborin una proposta de resolució per al problema. Això vol dir que els alumnes han de descriure els passos o procediments que utilitzarien per obtenir la resposta numèrica demanada.

En una primera lectura de les propostes dels alumnes es va observar que no totes les propostes anaven dirigides a trobar la resposta numèrica demanada en la pregunta. Des d'aquesta perspectiva, el que ens interessa és observar si al seguir els passos descrits pels alumnes en la seva proposta es pot obtenir una resposta adequada a la pregunta plantejada. Cal que deixem clar que en la nostra anàlisi no ens interessa observar si els alumnes ens responen a nosaltres com a investigadors (això seria observar si omplen el qüestionari), sinó si un executor de les propostes que seguís els passos descrits per l'alumne arribaria a obtenir una resposta final adequada a la pregunta que planteja el problema.

En el cas que volguéssim estimar el nombre de rajoles que són necessàries per enrajolar una habitació i ho preguntéssim a alumnes, l'execució fidel dels passos descrits per l'alumne a la seva proposta ens hauria de portar a un nombre que pertanyi a un interval de valors adequat per a la quantitat de rajoles necessàries. Si la seva proposta ens porta a calcular el valor econòmic de les rajoles o el temps necessari per transportar-les entendrem que no està responent a la pregunta plantejada. Una altra opció és que la proposta de l'alumne sigui incompleta i que no produeixi un resultat final de cap tipus, amb el que entendríem que la proposta no respon a la pregunta plantejada.

Recordarem aquí les preguntes concretes que hem plantejat als alumnes en cadascun dels problemes[3]:

- **PA - concert:** quantes entrades podríem vendre si omplíssim el pati per fer un concert?
- **PB - manifestació:** quanta gent hi ha en una manifestació?
- **PC - SMS:** quants missatges SMS enviem en un dia entre tots els catalans?
- **PD - galleda:** quantes gotes d'aigua calen per omplir una galleda?
- **PE - piscina:** quants gots d'aigua omplen una piscina?
- **PF - caixa forta:** quantes monedes d'euro caben en un metre cúbic?

L'esquema en forma d'arbre de subcategories presentat a la figura 5.6 que hem generat amb el programa NVivo 8 per al tipus de respostes a la pregunta plantejada en cada problema és el següent:

[3]els enunciats concrets dels problemes que hem utilitzat al nostre estudi es poden trobar a la secció 4.3

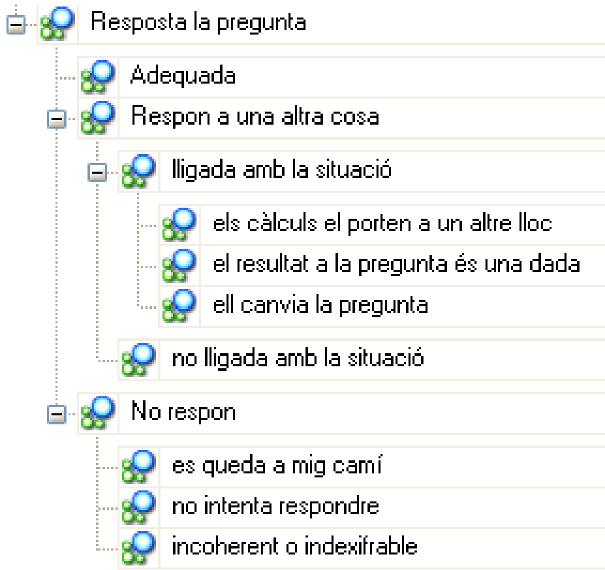


Figura 5.6: Arbre de categories del tipus de resposta a la pregunta

En la nostra anàlisi hem marcat a la categoria *Respon adequadament a la pregunta plantejada* totes aquelles propostes que porten a una resposta adequada a la pregunta. Això vol dir que la seva proposta està orientada a estimar la quantitat demanada a cada problema.

Un exemple per al Problema A és el següent[4]:

PA2 - concert

Agafaria moltes cadires i las posaria al pati fins que s'omplis despres les contaria i vendria entrades amb el mateix nombre de les cadires.

En aquest cas es pot observar que l'alumne proposa posar cadires per tot el pati amb l'objectiu de comptar-les, aquest seria el nombre d'entrades que proposa com a resposta, amb el que podem concloure que aquesta proposta ha de pertànyer a la categoria *Respon adequadament a la pregunta plantejada*.

Un altre exemple per al Problema D és el següent:

[4]Transcriurem directament les propostes dels alumnes, mantenint la seva expressió i la seva ortografia. Hem decidit no posar els seus textos manuscrits perquè la cal·ligrafia es torna difícil de desxifrar al ser escanejada.

PC4 - SMS

Posant un tope de SMS a tots els telèfons mòvils i despres multiplicar-los per el nombre de catalans.

En aquest altre cas, la resposta que obtindríem si seguíssim els passos descrits en la proposta de l'alumne ens portaria a determinar un nombre de missatges SMS enviats, encara que aquest no sigui el millor procediment possible ni el més adequat a la situació plantejada. Tot i així, en aquesta categoria només valorem el fet que la proposta intenta donar resposta a la pregunta plantejada.

També hem trobat propostes que permeten obtenir una resposta però que no respon a la pregunta plantejada. Aquestes les hem etiquetat a la categoria de *Respon a una altra cosa* i, a priori, hi hauria d'haver propostes de dos tipus: aquelles propostes que responen a aspectes relacionats amb la situació del problema i les que responen a fets que no tenen cap relació amb la situació. En el cas de que la proposta no doni resposta a la pregunta però estigui relacionada amb el problema, hem observat les següents tres opcions:

- Els càlculs el porten a un altre lloc
- El resultat de la pregunta és una de les dades
- L'alumne canvia la pregunta

En les següents línies detallem i exemplifiquem aquestes categories.

Per començar posarem alguns exemples de propostes que no responen a la pregunta en el sentit que hem descrit anteriorment:

PC1 - SMS

Mirar les dades de missatges enviats pels catalans. I agafas 100 persones a l'atzar i fas un diagrama amb el signe.

Aquest alumne ens proposa que busquem dades dels missatges enviats, agafant dades d'una part de la població, però el seu objectiu és aconseguir un gràfic, un diagrama de barres amb percentatges. Aquesta proposta inclou aspectes rellevants en la resolució del problema però la resposta que es pot obtenir no és la demanada.

Un altre cas és el següent:

PE3 - piscina

Calcularia el volum de la piscina i el volum del got i desprès multiplicaríem el volum de la piscina per el del got.

Aquest alumne identifica dues dades que poden permetre trobar una estimació del nombre de gots necessaris per omplir una piscina, però si realitzem els càlculs que proposa no obtindrem el resultat que pretenem per un error conceptual, ja que l'alumne proposa realitzar el producte del volum de la piscina per el volum del got. Aquest és un exemple de les propostes que hem marcat a la subcategoria de *Els càlculs el porten a un altre lloc*, ja que podem valorar que l'alumne pretén realitzar una estimació del que se li demana però la seva proposta no és adequada per aconseguir-ho.

Les propostes d'altres alumnes no porten a una resposta adequada i responen a una altra cosa perquè utilitzen el valor que considerem com a resposta vàlida com un punt de partida o intermedi per a la seva resolució. Aquest és un exemple:

PF2 - caixa forta

Hem de saber quantes monedes hi ha, i quantas metres cúbics necessitem. Quantitat monedes/ Metres cúbics = la raó entre monedes i metre cúbic.

En aquest cas és clar que la proposta de resolució no portarà a obtenir la quantitat de monedes d'euro que caben a la caixa forta perquè l'alumne utilitza aquesta dada per aconseguir un altre resultat, com és la proporció entre la quantitat de monedes i el volum de la caixa forta. En aquest cas, no és fàcil decidir quin és el motiu que porta a l'alumne a voler calcular aquesta proporció, i, molt possiblement, es deu a un error conceptual o de comprensió de l'enunciat.

Hi ha altres casos en els que s'observa que l'alumne té una intenció explícita de respondre a una pregunta diferent de la que se li ha plantejat. Aquestes propostes les hem classificat en la subcategoria *Ell canvia la pregunta* i aquesta és una mostra:

PD4 - galleda

Em pasaria uns minuts daban de la galleda i amb el rellotje calcularia quants minuts hi ha per que caigui nomes una gota. Després miraria quantes hores estara la galleta, així calcularia els minuts aproximadament més les hores en omplir-se, sabria més o menys de quines dimensions agafar la galleda per que no s'ompli, també depen de quant triguin.

En aquest altre cas es pot veure que la proposta va encaminada a determinar la mida de la galleda necessària per no permetre que l'aigua faci malbé el ordinadors en tota una nit. Aquesta és una interpretació de l'enunciat que no pretén respondre a la pregunta plantejada però que té una clara relació amb la interpretació de la situació donada a l'enunciat. Un altre exemple de proposta que canvia la pregunta, tot i que està relacionada amb la situació plantejada és la següent:

> **PB1 - manifestació**
> *Miraria el nombre de carrers per on passaria la manifestacio i buscaria carrers força omples perque hi capiga mes gent.*

En aquesta proposta podem observar que l'objectiu de l'alumne és facilitar la manifestació, buscant carrers suficientment espaiosos per tal que es pugui portar a terme i descuidant completament l'estimació de la gent que hi participa. Tot i així, aquesta darrera proposta té una clara relació amb la situació plantejada a l'enunciat del problema. Inicialment, ens havíem plantejat la possibilitat de que alguna de les propostes donés resposta a algun fet que no estigués relacionat de cap forma a la situació donada al problema, però no hem trobat cap exemple entre totes les dades analitzades. Per aquest motiu, no hem inclòs cap categoria que descrigui aquest tipus de propostes en l'arbre de categories, encara que inicialment es va incloure en l'estructura d'anàlisi utilitzada amb l'NVivo 8.

Per acabar la casuística de les diferents opcions de formes de donar resposta a la pregunta formulada al problema, ens trobem aquelles propostes que no permeten arribar a un producte final i que, per tant, no permeten arribar a cap tipus de solució. Aquestes propostes les hem inclòs en la categoria *No respon a la pregunta* i hem trobat tres opcions diferents per a no donar resposta a la pregunta.

El primer cas que exposem són aquelles propostes que comencen explicant un procediment però que el deixen inacabat o no especifiquen la forma d'obtenir una dada rellevant per a la seva resolució. Un exemple de les propostes que hem posat a la subcategoria *Es queda a mig camí* és el següent:

> **PA3 - concert**
> *Calcularia el numero de metres que fa el pati, el de metres que fa l'estadi del concert, despres o sumaria tot. Despres restaria el nombre de metres que ocupa l'estadi vers al pati i a partir d'aquesta resta miraria com posar les cadires i bancs per que més gunt i capigues. I com més cadires millor.*

Aquesta proposta comença amb l'intent de determinar la superfície hàbil per encabir la gent al concert però no especifica els procediments posteriors per aconseguir saber el nombre de persones que hi caben i determinar la quantitat d'entrades que es poden arribar a posar a la venda.

Un altre exemple en el que el procediment a seguir queda inacabat és el següent:

> **PB4 - manifestació**
> *Demanaria a algún mitja de comunicació que fes una fotografia aèria amb un helicòpter/avió de tot el carrer que ocupés la gent.*

Una altra opció que hem destacat com a subcategoria són les propostes que no intenten donar una resposta a la pregunta formulada. Un exemple és el següent:

> **PA3 - concert**
> *Depen de la capacitat que tingui el pati, de si hi posem cadires o si estan de peu. Depen de si estan molt prims o si ocupen mès.*

En aquest cas no es pot aconseguir una resposta al seguir la proposta d'aquest alumne perquè només recull algun dels factors que poden intervenir en la resolució però no ofereix un procediment per actuar. Aquest tipus de propostes les hem inclòs en la subcategoria *No intenta respondre*. Finalment, ens trobem aquelles propostes que no donen una resposta perquè són incoherents o indesxifrables, un exemple és el següent:

> **PF1 - caixa forta**
> *Primer mesuraria el gruix i el diametre total d'una moneda d'un euro. Despres dibidiria el resultat de les dimensions de la moneda entre 3 metres. Llavors tindiria el resultat total de quantes monedes hi caben en aquella caixa forta pero tindria que resta un quart o la meitat del quart perque si no no es podria agafa re, ja que si no es caura tot. Les monedes es posarian una sobre l'altre en columnes.*

Resultats

El primer tipus de resultats que presentarem són els relacionats amb la direcció en la que van enfocades les propostes dels alumnes. La taula 5.1 mostra els resultats del nombre de propostes per a cada categoria en funció del problema.

	PA	PB	PC	PD	PE	PF
Resposta adequada	53	62	59	22	48	29
No respon	31	22	23	31	22	27
Respon a una altra cosa	12	8	8	35	16	30

Taula 5.1: Resposta a la pregunta per problema

D'aquests resultats destaquem que el nombre de propostes que tracten de trobar una valor aproximat per a la quantitat demanada en cadascun dels problemes és propera al 60% per als problemes A, B, C i E. En canvi, és bastant més baixa per als problemes D i F, on podem veure que es troba aproximadament a la meitat. Podem observar que, en aquests dos problemes, el nombre d'alumnes que no responen a la pregunta plantejada és equivalent al dels altres quatre i que el que obtenim és un gran nombre de respostes encarades a trobar una resposta diferent a la proposada.

Per poder observar els motius que provoquen aquest fet presentem els resultats obtinguts per a les subcategories obtingudes a l'anàlisi per a la categoria *Respon a una altra cosa*. En aquest cas cal destacar que havíem definit dues subcategories inicials, a partir d'una lectura parcial de les dades, la de les propostes que responien a fenòmens lligats amb la situació i la de les propostes que responien a fenòmens completament aliens a la situació proposada. Després d'analitzar totes les dades no hem trobat cap proposta per a aquesta darrera opció, amb el que les propostes dels alumnes que responen a preguntes diferents a les plantejades als problemes sempre tenen relació amb la situació plantejada.

La taula 5.2 mostra les dades obtingudes per a les subcategories de *Respon a una altra cosa – lligada amb la situació*.

	PA	PB	PC	PD	PE	PF
Resultat com a dada	5	2	1	1	0	1
Canvia la pregunta	1	1	1	28	2	4
El càlcul els porta una altre lloc	6	5	6	6	14	25
Total	12	8	8	35	16	30

Taula 5.2: Respon a una altra cosa – lligada a la situació per problema

Les categories aquí representades són les de les propostes que no poden contestar al que se'ls demana perquè utilitzen aquest valor com una dada per respondre a una altra cosa, les que responen a una altra pregunta que no se'ls ha formulat i les que intenten respondre a la pregunta formulada però diversos errors conceptuals o de càlcul els porten a respondre a una altra pregunta.

Si observem els valors obtinguts, podem veure que la gran majoria de les respostes aquí representades per al problema F són provocades per errors conceptuals o de càlcul. En aquest cas, bona part són provocades per les dificultats de treballar amb el concepte de volum.

En el cas del problema D, tenim que una part significativament important dels alumnes han intentat donar resposta a una pregunta diferent a la formulada. En el problema D, es planteja la situació d'una gotera a la sala de professors i es pregunta pel nombre de gotes necessàries per omplir una galleda.

A partir de l'observació de les propostes dels alumnes a aquest problema, podem veure que 28 dels 88 alumnes (prop d'un 30%) han donat resposta a preguntes com les següents:

- En quant de temps s'omplirà la galleda que posi sota la gotera?
- La galleda que posi sota la gotera, s'omplirà abans de demà al matí?
- Quina mida ha de tenir la galleda que posi sota la gotera per tal que no s'ompli en el temps que hem d'estar a fora?

Podem observar que aquestes preguntes tenen més sentit i són més útils si tenim en compte la situació plantejada.

Tot això ho podem resumir com segueix:

Fet 2: Una majoria dels alumnes tracta de respondre a la pregunta formulada, excepte pels problemes D i F. En el problema F s'observa un conjunt ampli d'alumnes que, degut a errors conceptuals o de càlcul, fan propostes que no pretenen respondre al que es demana. D'altra banda, per al problema D s'observa una quantitat considerable d'alumnes que canvien la pregunta per una més adient a la situació.

5.3.2 Èxit en la resolució

Justificació de categories

En el nostre estudi ens hem centrat en la resolució dels PEMNA que hem definit a la secció 3.3.3. Anteriorment hem explicat que en els qüestionaris utilitzats per recollir dades hem demanat exclusivament als alumnes que fessin una proposta de resolució per a cada problema. D'aquesta forma podem aconseguir un major control sobre les dades, sabent a partir d'experiències anteriors que aquesta recollida de dades és enormement rica en informació analitzable. Amb tot això, en els nostres qüestionaris, els alumnes han fet explícita la forma en la que pensen que es poden resoldre els PEMNA proposats. Concretament, hem demanat als alumnes que cobreixin les dues primeres de les quatre fases de resolució d'un problema tal i com les planteja Pólya [129], que són la comprensió del problema i l'elaboració d'un pla d'acció.

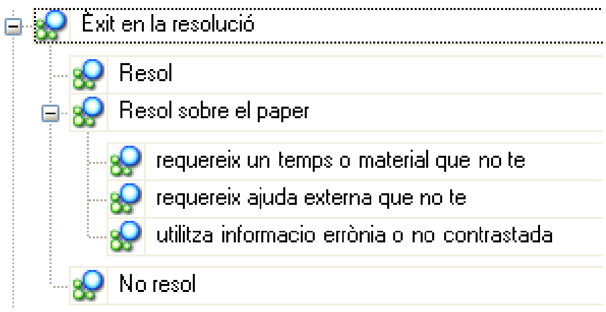


Figura 5.7: Arbre de categories de l'èxit en la resolució

En conseqüència d'aquestes decisions, no podem pretendre determinar si el treball produït pels alumnes resol els problemes plantejats, per la pròpia natura del material que hem demanat que elaboressin. El que considerem per a la nostra anàlisi és el fet de si les seves propostes poden arribar a solucionar el problema si fossin aplicades per un executor eficient. No tenim coneixement ni eines per decidir si els propis alumnes serien capaços de portar a terme amb fidelitat les seves pròpies propostes (aquest fet no entra en els límits que ens hem marcat en aquesta recerca) però, a partir de la nostra pròpia experiència i coneixements podem decidir si algú amb els materials, temps, coneixements i aptituds adequats ho podrien fer.

Des d'aquesta perspectiva, les categories d'anàlisi que hem utilitzat per classificar els diferents nivells en l'èxit en la resolució es troben detallades a la figura 5.7.

A continuació descriurem el contingut de cadascuna de les categories generades en l'anàlisi.

Hem inclòs a la categoria de *Resol* aquelles propostes per a les que un executor eficient podria trobar una estimació adequada per a la pregunta formulada al problema.

Un exemple per al problema A és el següent:

PA1 - concert

Jo agafaria un grup de persones i miraria quantes persones cabrien en un metre quadrat. Després mesuraria quantes metres quadrats hi ha en el pati i ho multiplicaria pel nombre de persones que hi cabessin en 1 metre quadrat. Ja tindria el resultat.

Aquest alumne proposa, per una banda, trobar un valor mitjà per a la densitat de població i, posteriorment, multiplicar-la per la superfície hàbil per al públic en el concert. El resultat obtingut al portar a terme aquesta proposta depèn de les mesures que cal fer, però el consideraríem vàlid en el sentit que el procediment utilitzat és adequat, tal i com afirma Moore [104]. Una proposta que utilitza procediments matemàtics diferents per intentar resoldre el mateix problema és la següent:

PA3 - concert

Agafaria a 10 alumnes i calcularia l'espai que ocupa cada un. Després, en faria la mitja per saber més o menys el número d'alumnes que poden caber al pati. Calcularia la superfície total del pati i restaria els metres que ocuparia l'escenari. l'espai restant, que seria l'espai disponible per posar gent,, el dividiria entre la mitja d'espai ocupat per cada alumne. Llavors, posant per exemple que hi cabessin 108 alumnes vendria 100, ja que si no, no hi hauria espai al pati ni per respirar.

L'element clau en aquesta proposta és trobar la superfície mitjana que ocupa una persona i dividir la superfície total entre aquest valor. Aquesta proposta és essencialment diferent de l'anterior, però les dues ens han de permetre obtenir un valor adequat per al valor demanat.

Un exemple de proposta pel problema C que hem marcat a la categoria de *Resol* és la següent:

PC4 - SMS

Faria una enquesta als meus coneguts de quants missatges envia per dia, intentant agafar un numero equilibrat de dones i homes i de joves, d'adults i de persones gran. D'aqui faria una mitjana i llavors ho multiplicaria per el nombre d'habitants de catalunya entre les franjes d'edat que se sol tenir telefon mobil actiu (fen una altre enquesta i repetint el procediment anterior).

En aquest darrer cas, l'alumne ens proposa realitzar una enquesta raonada per obtenir el valor mitjà de SMS enviats per una persona per, posteriorment, multiplicar pel nombre total de persones que tenen mòbil a Catalunya. En aquests tres casos, tots els procediments descrits es poden realitzar amb els recursos dels que disposa un alumne de Secundària.

A continuació mostrem altres propostes que no compleixen aquesta condició.

Hem marcat a la categoria *Resol sobre el paper* aquelles propostes que són procedimentalment correctes però que no poden ser portades a terme per un alumne de Secundària per algun dels següents motius, que són els que hem detectat en les propostes dels alumnes:

- requereix un temps o material que no té
- requereix una ajuda externa que no té
- utilitza informació errònia o no contrastada

El següent és un cas en el que el procediment és correcte però que no pot ser portat a la pràctica perquè el temps i la quantitat de gots necessaris per buidar la piscina sencera és excessiu:

PE3 - piscina

Agafar uns gots i començo a omplirus de aigua de la picina. Si m'hen calent mes gots els agafo aixi fints agotari l'aigua de la piscina. Una vegada acabat de esgotar l'aigua contu els gots omplerts hi aixi se quants gots nececito.

Una proposta equivalent per al problema F és la següent:

PF3 - caixa forta

Jo agafaria una caixa i l'ompliria en monedes d'euro, una per una. Un cop la tingues plena les treuria i contaria quantes monedes hi ha capigut.

En aquest cas, el temps i el nombre de monedes d'euro necessàries per portar a terme el procés de resolució són excessius.

Hi ha altres propostes que no poden ser portades a la pràctica per un alumne de Secundària perquè demanen col·laboració o informació a tercers, amb el que aquesta participació no compleix el requisit de resoldre el problema amb els seus propis recursos. Posem, a continuació, un exemple:

PB2 - manifestació

Contar aproximadament quanta gent hi ha o si no posar una bulleta i que la gent i pases un paper.

Aquest alumne proposa que els propis manifestants col·laborin en la seva pròpia resolució del problema, amb el que aquest alumne requereix una ajuda externa amb la que considerem que no pot comptar.

Un altre cas, per al problema D, és el que posem tot seguit:

PC3 - SMS

Primes, averiguaria el nombre de persones que hi ha a Catalunya, despres, aniria a totes les companyies de telèfons mòbils i els convensaria per que em diguessin quants SMS han enviat en tot un dia els seus clients. Despres ho sumaria tot i em donaria el resultat.

Aquí podem observar que la proposta depèn de la informació que obtinguem de les operadores de telefonia mòbil, que, en general, són molt geloses amb aquestes dades.

Per finalitzar el repàs de les propostes que resolen sobre el paper, tenim aquelles que utilitzen una informació errònia o no contrastada que es podria arribar a estimar a partir de processos que els alumnes podrien proposar i portar a terme. En la següent proposta, el procediment és correcte, però seria necessari realitzar una estimació del nombre de persones que es poden encabir en un metre quadrat de superfície:

PA1 - concert

Jo el que faria seria, primer, calcular quant medeix la pista. Després calcularia una persona per metre quadrat més o menys. I llavors, com que ja sabrem quants metres quadrats faria la pista, podríem calcular les: persones que hi cabrien i vendre les entrades que fessin falta.

Ens trobem el mateix fet en la següent proposta per al problema D, en el que es poden trobar el volum de la galleda i una estimació per al volum d'una gota:

PD4 - galleda

Primer miraria quan hi cap en una galleda, i pensaria una gota a 0.01 litre i en una galleda i cap per alla a 8 litros només falta calcular.

Per finalitzar amb les categories d'anàlisi des del punt de vista de l'èxit en la resolució, tractarem ara les propostes que hem inclòs en la categoria *No Resol.* Aquestes són les propostes que en ser portades a la pràctica, encara que utilitzin més recursos que els propis dels alumnes, no ens proporcionaran una estimació raonada per a la quantitat demanada en cada problema. Una primera mostra és la que segueix:

PF4 - caixa forta

Mesuraria el diametre de la moneda i multiplicaria sabent quan fa un metre cúbic, sabent les dades faria la operació. Sabent aixó també hauria de saber el gruix de la moneda doncs saber quan és l'espai d'1 m^3 i multiplicar.

En aquest cas és clar que l'alumne observa que les mides de la moneda han de ser d'ajuda per determinar el nombre de monedes que caben a la caixa forta, però no especifica amb claredat els procediments i càlculs que proposa i no es pot obtenir cap resultat amb aquesta proposta. En aquesta categoria ens trobem diferents nivells en les respostes. Algunes de les opcions proposades estan lluny de poder-nos portar a una solució vàlida, tot i que d'altres podrien ser reformulades o retocades per aconseguir-ho.

Una proposta que no resol però que només necessita un càlcul ben proposat és la següent:

PE4 - piscina

Podríem calcular quanta capacitat te la piscina,i també la dels gots llavors ya sabríen quants gots hauríem de posar.

També hem trobat propostes que no poden portar a cap valor relacionat amb la pregunta al problema, com seria el següent exemple:

PD3 - galleda

Possar més paper al terra i més galledes i el dia seguent possar una altre vegada la mateix.

Resultats

Una vegada realitzada l'anàlisi de les dades, la informació obtinguda sobre el nombre propostes que pertanyen a cadascuna d'aquestes tres categories relacionades amb l'èxit en la resolució es troba a la taula 5.3.

	PA	PB	PC	PD	PE	PF
Resol	23	14	20	20	32	14
Resol sobre el paper	29	44	38	10	17	18
No resol	44	34	32	58	37	54
Total	96	92	90	88	86	86

Taula 5.3: Èxit en la resolució per problema

Com es pot observar a la taula, només una petita part de la població enquestada ofereix propostes que ens poden portar a resoldre el problema. Podem observar que aquestes propostes representen al voltant d'un 20% del conjunt de propostes recollides. El problema que presenta un índex més alt en aquest aspecte és el problema E, en el que les propostes que resolen arriben fins al 37%.

D'altra banda, les propostes que no ens poden portar de cap forma a una solució vàlida representen una part àmplia de la població, propera al 50%.

Cal destacar que les propostes que resolen el problema sobre el paper representen una part important del total de propostes estudiades. En la nostra anàlisi hem detectat diversos motius que fan que aquestes propostes no puguin ser portades a la pràctica amb el recursos propis dels alumnes. La informació obtinguda es mostra a la taula 5.4.

	PA	PB	PC	PD	PE	PF
Ajuda externa	2	26	19	0	5	0
Temps o material	16	13	5	5	9	16
Informació errònia	11	5	14	5	3	2
Total	29	44	38	10	17	18

Taula 5.4: Motius per no resoldre per problema

Com hem vist, existeixen diversos motius que no permeten que una proposta amb un argument vàlid pugui ser portada a la pràctica. Per començar, podem observar que hi ha dos problemes en els que els alumnes recorren a demanar algun tipus d'ajuda externa, aquests problemes són el B i el C. En el cas del problema C, hem de pensar que les operadores de telefonia mòbil han de posseir la informació demanada al problema, per poder facturar als seus clients els SMS que envien, amb el que trobem que és un recurs no accessible però lògic. En el cas del problema B, hi ha diversos alumnes que proposen demanar la informació referent al nombre de participants en la manifestació als organitzadors o a la policia. Destaquem el fet que el problema B és equivalent al problema A (fer un recompte del nombre de persones a un determinat espai) però en el cas del problema A només trobem dues propostes que pretenen obtenir informació d'alguna font externa, en aquest cas, el professorat.

Pel que fa a les propostes que requereixen un temps o material no disponible per a l'alumne, podem observar que les hem detectat en un major nombre en els problemes A, B i F. Més endavant veurem que aquests són els problemes en els que els alumnes proposen un major nombre de recomptes exhaustius.

Per acabar amb aquesta part, trobem que una part dels alumnes utilitza dades no contrastades per intentar resoldre el problema, com ara donar un valor arbitrari per a la densitat de població o decidir sense argumentació que una persona envia 10 SMS al dia. Algunes de les estratègies que trobem en aquesta subcategoria podrien permetre arribar a una solució si detallessin un procés per aconseguir alguns dels resultats parcials que proposen utilitzar. Com podem veure a la taula, aquestes propostes estan més presents al problema C i al problema A, en el que es presenten diversos casos com els que hem exposat.

Un altre aspecte rellevant sobre l'èxit en la resolució dels problemes proposats el trobem en les dades classificades per curs de l'alumne. Donat que en aquest cas el nombre de qüestionaris recollits canvia notablement amb el curs i es fa més difícil avaluar les diferències, oferim a la taula 5.5 els mateixos resultats sobre l'èxit en la resolució classificats per curs amb el percentatge que representa cada categoria.

En aquesta taula es pot observar que el percentatge de propostes que resolen els PEMNA proposats augmenta conforme avancem de curs. Aquest és un fet desitjable per a qualsevol activitat de caire acadèmic, tot i que no podem afirmar que en el cas que estem estudiant arribem a un alt nivell de resolució, ja que passem del 16% dels alumnes de 1r d'ESO al 29% dels de 4rt. Al mateix temps, els alumnes que fan propostes que hem inclòs en la categoria de *no resol* disminueix al mateix ritme que augmenta el de les que

	1r	2n	3r	4t
Resol	18 (16%)	22 (17%)	35 (26%)	48 (29%)
Resol sobre el paper	32 (29%)	32 (25%)	45 (34%)	47 (28%)
No resol	61 (55%)	73 (58%)	53 (40%)	72 (43%)
Total	111	127	133	167

Taula 5.5: Èxit en la resolució per curs

resolen, passant del 55% per a 1r d'ESO fins al 43% per als alumnes de 4t.

Per complementar aquesta informació, incloem en la taula 5.6 el nombre concret de respostes que resolen i el percentatge que representen per a cada problema i curs.

	1r	2n	3r	4t
PA	2 (11%)	5 (23%)	6 (24%)	10 (32%)
PB	3 (17%)	0 (0%)	5 (23%)	6 (19%)
PC	4 (20%)	5 (23%)	4 (20%)	7 (25%)
PD	3 (16%)	0 (0%)	10 (42%)	7 (28%)
PE	4 (22%)	9 (43%)	6 (27%)	13 (52%)
PF	2 (11%)	3 (14%)	4 (20%)	5 (19%)
Total	18 (16%)	22 (17%)	35 (26%)	48 (29%)

Taula 5.6: Propostes que resolen per problema i curs

En la taula 5.6 es pot veure una lleugera variació en els percentatges que representen les propostes que resolen per a cada curs i problema. En general, es pot observar que els valors per als cursos de 3r i 4t són superiors als de 1r i 2n, encara que no es pot afirmar que per a cada problema, el percentatge de propostes que resolen augmenti amb el curs. En canvi, si comparem el nombre de propostes que resolen pels alumnes de 1r i 2n per un costat amb els de 3r i 4t junts per l'altre, queda clar que els alumnes més grans tenen un índex d'èxit en la resolució superior. Els percentatges de propostes que assoleixen èxit en la resolució passen del 16% − 17% per a 1r i 2n al 26% − 29% per a 3r i 4t, amb el que podem observar un increment lleugerament superior al 10% del total de dades. El que no inclou el nostre estudi és una forma d'avaluar els motius pels que succeeix aquest fet, però és plausible pensar que és degut a una combinació dels majors coneixements matemàtics dels alumnes i del major coneixement social i de la realitat que comporta una major edat.

El que hem observat en aquesta secció es pot resumir de forma objectiva com segueix:

Fet 3: Una gran majoria de les propostes recollides no podrien resoldre el problema plantejat. Una part important d'aquestes propostes no el podrien resoldre per presentar propostes incorrectes, però existeixen propostes en les que els alumnes proposen utilitzar recursos dels que no disposen.

Fet 4: Existeixen propostes que podrien resoldre el problema, encara que en una proporció petita. En general els alumnes de 3r i 4t tenen un índex de resolució superior als de 1r i 2n. Aquest augment és proper al 10% del total de propostes.

5.3.3 Estratègia proposada

Justificació de categories

En el que segueix, descriurem les estratègies detectades en les dades recollides a l'estudi. A la figura 5.8 es troba l'arbre de categories que hem generat al programa NVivo 8 en relació a les estratègies proposades.

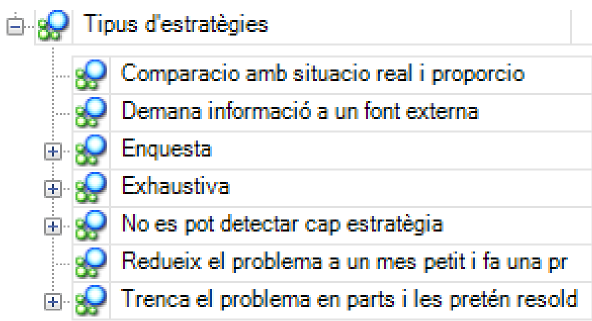


Figura 5.8: Arbre de categories d'estratègies

En aquesta anàlisi entenem per estratègia una forma general d'establir un pla amb una direcció o objectiu, d'acord amb el que hem tractat a la secció 2.1.3, diferenciant aquest concepte de les accions concretes que s'especifiquen per adequar aquella estratègia a un problema concret.

En la nostra anàlisi d'estratègies, el primer que destacarem és que una part del alumnes enquestats no expressen cap tipus d'estratègia en la seva resposta al qüestionari. Tot i així, existeix una gran diversitat en les respostes que hem marcat en la categoria *No es pot detectar cap estratègia*. Un primer exemple seria el següent:

> **PF2 - caixa forta**
> *Medim el perimetre de la caixa i ho dividim pels metres cúbics.*

Aquesta proposta combina elements que podrien estar lligats a la resolució sense un criteri clar. Interpretem que en una resposta com aquesta no es proposa una estratègia a seguir perquè l'alumne està intentant oferir una resposta qualsevol per evitar una possible incomoditat al no fer una proposta i entregar el qüestionari en blanc.

També trobem propostes que contenen elements presents en la resolució amb més criteri, tot i que no presenten cap intenció d'explicitar un pla d'acció:

> **PD4 - galleda**
> *Depèn del tamany de les gotes d'aigua i de la velocitat de caiguda d'aigua.*

En aquest cas l'alumne expressa algunes de les dades que considera necessàries per trobar l'estimació que es demana a l'enunciat però no explicita de cap forma un pla per trobar-la. Un altre exemple, és el següent:

> **PE2 - piscina**
> *Si volem omplir una piscina, amb gots d'aigua ens estariem una eternitat, així que jo crec que no es pot omplir una piscina amb gots d'aigua.*

En aquest cas, no ens trobem una proposta sinó una observació de l'alumne sobre la possibilitat d'aconseguir èxit en la resolució.

També hem detectat alumnes que comencen una proposta però aquesta queda inacabada. En alguns casos l'alumne considera que la seva proposta és suficient i som nosaltres els que la valorem com inacabada, en altres casos és l'alumne que la deixa a mitges. Una mostra és la següent proposta:

> **PB4 - manifestació**
> *Primer de tot tendriem de saver quant medeix la superficie de el lloc on es fara la manifestacio i quant tinguem aquestes dades savem quanta gent pot estar-hi en una zona determinada.*

El que podem veure en aquesta proposta de resolució és que l'alumne detecta una dada rellevant com és la superfície ocupada per la manifestació, però no ens descriu de quina forma aconseguirà trobar una estimació del nombre de persones assistents a la manifestació.

Una estratègia que hem detectat en un gran nombre de casos és el que considerem una *estratègia exhaustiva*. Considerem que aquelles propostes que utilitzen aquest tipus d'estratègia són aquelles que es basen en fer un recompte total dels elements que formen el conjunt per al que pretenem estimar el valor del seu cardinal. En general, els alumnes que pretenen utilitzar aquest tipus d'estratègia proposen recomptes de tots els elements possibles de conjunt, ja sigui de forma organitzada o sense cap patró d'actuació concret.

Una mostra de proposta que presenta una estratègia exhaustiva a partir d'un recompte total per al problema de la manifestació és el següent:

> **PB3 - manifestació**
> *Normalment sempre que hi ha una manifestació els organitzadasdeixen papers amb l'informació a les casas, jo el que faria ès que en aquell paper confirmessin asistència i així tenir més o menys un nombre aproximat de participació.*

En aquesta proposta l'acció que ens permet fer el recompte és demanar a tots els assistents que confirmin la seva assistència prèviament, sense descriure explícitament el procediment a utilitzar.

Un exemple d'aquesta estratègia per al problema dels SMS enviats en un dia a Catalunya és la que presentem a continuació:

> **PC2 - sms**
> *Totes les companyies les posaria comunicades amb un servidor comú; aquest tindria un sistema de contador, amb un ordinador central. A la que l'antena central captés senyal de moviment per un SMS enviaria una data al servidor. D'aquesta manera el comptador aniria enmagatzamant dades i els missatges, que enviem els catalans. Però l'antena haura d'estar conectada a uns cables elèctrics que arribesin aquest servidor central.*

En aquest cas, la forma en la que es pretén realitzar el recompte total és a partir d'un servidor, que hauria de registrar tots els SMS enviats.

Alguns alumnes comencen amb una proposta elaborada que inclou conceptes clau en la resolució del problema i, quan no veuen una forma de realitzar una proposta adequada, proposen un recompte exhaustiu:

PE3 - piscina

Per començar el que faria es medir el perimetre de les piscines de sabadell (per exemple) i faria la mitjana per saber mès o menys la mida. Desprès calcularia el volum i despres calcularia quants litres hi caben en la piscina. Un cop tinc les dades agafaria un got de una mida mitjana i hi calcularia quanta aigua hi cap El resultat de litres de la piscina ho pasaria a una unitat per la quantitat d'aigua del got; un cop ho tinc tot en la mateixa unitat agafaria la pisicina i els gots i aniria omplint, un got y despres un altre... Al final sabries quants gots i els litres que hi caben.

Un altre tipus d'estratègia detectat en les nostres dades és el de *demanar informació a una font externa*. En aquest tipus d'estratègies l'alumne delega la responsabilitat de trobar l'estimació demanada en un tercer, com pot ser un professor, una companyia de telefonia o un constructor de piscines, depenent de la situació plantejada. Un exemple d'aquesta estratègia és el següent:

PC4 - sms

Primer localitzaria totes les companyies telefoniques que tenen els seus serveis a Catalunya. Despres d'aixo intentar posarme en contacte amb elles, i que cadascuna em dones les xifres de SMS al dia, quan las tingues de totes les companyies fer una suma total.

En aquest exemple, l'alumne pretén que siguin les companyies responsables del servei telefònic les que li proporcionin la informació necessària.

Un cas molt explícit d'aquesta estratègia per esbrinar el nombre de persones que participen a una manifestació és el següent:

PE3 - piscina

Trucas a la policia i ho preguntes.

El següent tipus d'estratègia que presentem és la *reducció a un problema més petit* (abastable) per després fer una proporció amb la situació real proposada. La forma de procedir en aquesta estratègia és replantejar el problema en una situació en la que aconseguir informació de forma directa sigui factible i, a partir d'un factor de proporcionalitat, aconseguir una estimació per a la situació real proposada.

Un exemple per esbrinar el nombre de SMS que s'envien en un dia a Catalunya és el següent:

> **PC3 - sms**
> *Primer agafaria 10 adolecents, 10 adults, 10 madurs o avis, a partir d'aqui els hi preguntaria quants SMS envien per dia a cada grup ho sumaria i faria factors de conversió amb el total habitants que hi ha a Catalunya.*

En aquest cas, l'alumne proposa una enquesta en una mostra reduïda per aconseguir la informació que necessita.

El següent exemple, per la seva banda, proposa omplir la galleda amb gotes, però només fins a una centèsima part de la seva capacitat. Amb aquest resultat parcial, pretén multiplicar per cent la dada aconseguida:

> **PD3 - galleda**
> *Calcularia la quantitat d'aigua que cap a la galleda. Després, dividiria aquesta quantitat entre cent, i calcularia el número de gotes que calen per omplir una centena part de la galleda. Després multiplicaria aquest número per cent i obtindria la quantitat de gotes que calen per omplir la galleda.*

Posarem un darrer exemple:

> **PF4 - caixa forta**
> *Buscaria una caixa que medis 5 centímetres cúbics. Hi posaria monedes d'euro i miraria quantes en caben, i ho multiplicaria per 20, per obtenir aproximadament el nombre de monedes que caben en un metre cúbic.*

En aquest cas, l'alumne proposa utilitzar una caixa forta més petita, però a l'hora de trobar el valor demanat s'equivoca amb el factor de proporció que proposa.

Presentarem a continuació aquelles estratègies que trenquen el problema en parts més petites i les resolen per separat. Donat que els PEMNA es plantegen com a problemes que difícilment es poden resoldre com un tot, aquest tipus d'estratègies són de les més nombroses. Al mateix temps, hem trobat diverses formes d'implementar aquest tipus d'estratègies, amb el que la riquesa de mètodes i propostes és molt àmplia. Destaquem les següents subestratègies detectades que detallarem tot seguit:

- Aplica un model a partir de la regla del producte

- Iteració d'un punt de referència
- Mesura de concentració
- Estratificació de la mostra

Començarem centrant-nos en les propostes basades en *models que utilitzen la regla del producte*. Hi ha alumnes que consideren que els elements a comptar es poden distribuir d'una certa forma i apliquen un model mental per a la distribució dels objectes que pretenen comptar (com la distribució en forma de quadrícula, per exemple). El primer exemple que posem és el d'un alumne que proposa comptar les cadires que caben al pati a partir de posar-les en files i columnes seguint una distribució equivalent a una quadrícula:

> **PA4 - concert**
> *Primer de tot marcaria la zona de l'escenari, despres ficaria una filera de cadires fins al limit que es cregues oportu, el seguent pas seria fer el mateix pero a lo llarg, ja que l'altre s'hauria fet a lo ample. Finalment es multiplicaria lo ample per lo llarg, ja que es un quadrat o un rectangle i el nombre que sortis serien el nombre de entrades.*

A partir de la informació parcial obtinguda, aplica la regla del producte per determinar una estimació del nombre total de cadires. Aquesta forma de pensar la distribució de les cadires és habitual ja que és la més natural en un cinema, però no és espontània.

Un exemple de l'ús de l'estratègia d'aplicar la regla del producte en una situació en la que no es dóna habitualment és el següent:

> **PB1 - manifestació**
> *Necessitaria quanta llargada fa la manifestació i quanta amplada fa cada persona i quantes files hi ha. Llavors miraria quanta llargada hi ha quantes persones hi caven en una fila i multiplicar-lo per el nombre de files.*

En aquesta proposta es fa ús de la regla del producte encara que les persones participants no estiguin realment en una distribució rectangular de files i columnes.

El mateix tipus de raonament es pot observar en la següent proposta de resolució del problema de la caixa forta:

PB1 - manifestació

1er: faria una pila de monedes d'euro fins que arribés a dalt, al línit de la part superior de la caixa forta. (i les contaria).
2n: aniria posant monedes d'euro en horitzontal al "terra" de la caixa forta fins que no hi cabéssin i les contaria.
3r: multiplicaria una quantitat per l'altre i aquesta seria el resultat.

A continuació ens centrarem en la *iteració d'un punt de referència.* Aquest és el tipus de subestratègia en el que es trenca el problema en parts que hem detectat en un major nombre de casos. Tal i com hem explicat a la secció 2.3.2, la iteració d'un punt de referència és una forma d'estimar longituds a partir de la mida d'un objecte quotidià conegut. Nosaltres proposem ampliar aquest concepte per als PEMNA. Considerarem que una proposta d'estimació utilitza la iteració d'un punt de referència quan inclogui la mesura (no cal que sigui la seva longitud) d'un determinat objecte com a factor clau per poder determinar la seva quantitat.

Un exemple en el que es pot veure clarament la intenció d'utilitzar un punt de referència és el següent:

PA1 - concert

Calcula la grandia del pati i comprovant una persona que no sigui ni gros ni prim. I el dividim. Per tenir que costa el lloc que ocupa els dels concert.

En aquest cas tenim com a referent la superfície que ocupa una persona. Observem que aquest punt de referència es pot utilitzar també al problema de la manifestació, com es pot veure a la següent proposta:

PB4 - manifestació

Primer de tot aniria a la organització, i preguntaria quants correus ha enviat als seus seguidors. A continuació agafaria el lloc de la manifestació i calcularia els m^2 de la superficie, despres els m^2 de una superficie que ocupa una persona, i ho multiplicaria fins que arribes a superficie en m^2 de la manifestació. Així ens sortirian el nombre de persones, aproximadament.

Una mostra diferent de punt de referència és el volum d'una moneda, proposat en el problema de la caixa forta:

PF2 - caixa forta

Primerament, em fixaria en el volum de les monedes d'euro i, llavors ho passaria també a cm^3*. M'asseguraria de que tant l'espai lliure de la caixa forta com l'espai que ocupa cada moneda estiguéssin representats en la mateixa unitat de volum (cm*^{3} *suposo) i llavors dividiria l'espai de la caixa forta amb el que ocupa una moneda i em sortiria la quantitat de monedes d'euro que hi caben.*

La següent subestratègia detectada en la nostra anàlisi és la de l'ús de la *mesura de concentració*. Aquesta estratègia es basa en determinar un valor total que es multiplica per un valor de proporcionalitat que es correspon amb una concentració. Un primer exemple en el que es proposa utilitzar com a mesura de concentració la densitat de població és el que presentem a continuació:

PA1 - concert

Jo agafaria un grup de persones i miraria quantes persones cabrien en un metre quadrat. Després mesuraria quantes metres quadrats hi ha en el pati i ho multiplicaria pel nombre de persones que hi cabessin en 1 metre quadrat. Ja tindria el resultat.

Un altre exemple que utilitza la densitat de població és el següent:

PB1 - manifestació

Primer calcular quants metres o kilometres ocupen tota la gent, i despres calcular quin nombre de persones hi ha en un metre quadrat i calcular-ho.

Però no només trobem densitats com a mesures de concentració. El nombre mitjà de SMS enviats al dia per una persona també és proposat per resoldre el problema C. Una mostra és la següent proposta:

PC3 - sms

Faria com una enquesta, ja que no tots envien els mateixos. Aniria pel carrer i em proposaria de preguntar-li a 100 persones quants missatges han enviats aquell dia. Llavors apuntaria a un paper quants envien. Al tenir-los apuntats els sumaria tots i els dividiria entre els 100. el resultat de dividir-los seria la mitjana, és a dir, quants enviaria cada persona. Al tenir-lo multiplicaria el número per persones catalanes. I tindria el resultat.

La darrera subestratègia que hem detectat és *l'estratificació de la mostra*. Aquesta estratègia es basa en aconseguir informació d'un conjunt d'objectes trencant-lo en parts a partir d'alguna característica diferenciadora. En el cas que presentem, aquesta característica és l'edat de les persones, pressuposant que aquesta característica condiciona l'ús del telèfon mòbil:

> **PC4 - sms**
> *Faria una enquesta agafan una persona diferencian homes de dones Avia (60-70) anys, adult gran (40-60) adult (18-40) adolescent (14-18) petits (9-14). Li preguntaria quants missatges envian diariament, suposant-ne que tots son iguals la resposta la multiplicaria per la cantitat de ciutadans catalans masculins despres repetiria el procediment pero amb persones femenines. Agafaria les dos respostes multiplicades (homes i dones) i les sumaria, aixo m'hauria de donar un resultat molt aproximat.*

Pel tipus de problemes plantejats, aquesta estratègia només l'hem pogut observar en el Problema C, el de comptar el nombre de sms que s'envien en un dia a Catalunya.

Un altre exemple és el següent:

> **PC1 - sms**
> *7.000.000 catalans Mes o menys uns 1.000.000 no tenen mobil perque encara son petits. Uns 500.000 ja son masa grans i mes o menys els 5.500.000 que ceden enviaran uns 3 sms per dia per lo tant el 5.500.000 enviarien 16500000 SMS diaris.*

Resultats

Una vegada hem descrit les diferents subcategories associades a les estratègies de resolució detectades, ens centrarem en exposar la seva quantificació a partir dels resultats obtinguts a partir de les consultes realitzades amb el software d'anàlisi utilitzat.

La taula 5.7 mostra el nombre de propostes que han estat codificades amb cadascuna de les estratègies detectades.

Com es pot comprovar hem trobat un nombre important de propostes en les que no és possible detectar cap tipus d'estratègia. Aquest tipus de propostes representen entre el 20% i el 40%, amb el valor més alt per al problema A i el més baix per al problema E.

	PA	PB	PC	PD	PE	PF
Sense estratègia	37	28	22	25	17	32
Exhaustiva	16	35	7	9	10	19
Font externa	3	4	10	0	2	0
Reducció i proporció	2	2	2	21	2	2
Trencar en parts	37	23	49	33	55	33
Situació real i proporció	1	0	0	0	0	0
Total	96	92	90	88	86	86

Taula 5.7: Tipus d'estratègies per problema

Podem observar que les estratègies exhaustives, aquelles que pretenen fer un recompte total dels elements, es troben presents en tots els problemes, però són notablement més baixes per als problemes C, D i E.

Les estratègies basades en demanar informació a fonts externes es troben presents en aquells problemes en els que la situació proposada té sentit en un context social (un concert, una manifestació, una piscina pública o l'ús de SMS). No trobem cap proposta amb aquestes característiques per als problemes D i F, ja que no és fàcil trobar fonts externes que semblin adequades en seves situacions presentades en cadascun dels seus enunciats.

Si ens centrem en les estratègies basades en resoldre un problema equivalent reduint les mides amb les que treballem i fent una proporció d'escala, podem observar que és present en tots els problemes, però destaca el nombre de propostes d'aquest tipus per al problema D, que representen un 24% del total.

Aquelles propostes centrades en dividir el problema en parts més petites i resoldre-les per separat són, en general, el tipus d'estratègia més detectat. Cal destacar que existeix una diferència important entre el nombre d'aquest tipus de propostes entre els problemes A i B, que representen el mateix problema en dues situacions diferents.

Per finalitzar aquest repàs, destacarem que només un alumne proposa resoldre el problema plantejat a partir de la proporció amb una situació real coneguda. Aquest alumne proposa estimar el nombre de persones que caben al pati del centre com a públic per un concert (problema A) a partir de la gent que es pot encabir al Palau St. Jordi de Barcelona.

Fet 5: La caracterització de les diferents estratègies proposades és molt àmplia. Trobem propostes que no contenen cap tipus d'estratègia i hem detectat estratègies que són exhaustives, que utilitzen una font externa d'informació, que redueixen el problema a un més petit i utilitzen factors de proporcionalitat, que trenquen el problema en parts i les resolen per separat i que fan una proporció a partir d'una situació real.

Aprofundint en les estratègies en les que es trenca el problema en parts

Per poder anar més enllà en la interpretació dels resultats, ens centrarem en els diferents tipus de subestratègies detectades per a les estratègies que pretenen trencar el problema en parts més petites (subproblemes) i resoldre-les per separat.

En el nostre estudi hem trobat quatre formes diferents de plantejar aquest tipus d'estratègia, en funció dels subproblemes que pretén resoldre l'alumne.

El primer d'aquest tipus de plantejament és aplicar la *regla del producte*. Els alumnes plantegen realitzar recomptes de conjunts més petits (abastables) a partir d'una representació mental de l'organització dels objectes i multipliquen els subresultats obtinguts. Hi ha uns altres alumnes que utilitzen una *iteració d'un punt de referència* per obtenir l'estimació demanada i obtenir el resultat a partir de dividir la mesura total entre la mesura del punt de referència. Un tercer grup utilitza mesures de concentració d'objectes per estimar el valor demanat, multiplicant la mesura de concentració per la mida total del conjunt. Un últim grup d'alumnes, bastant reduït utilitza una estratificació de la població estudiada per obtenir el resultat demanat. El procediment proposat es centra en establir classes o estrats en la població a estudiar i assignar valors a cadascun dels estrats.

Les dades obtingudes sobre el nombre de propostes per a cadascun d'aquests tipus de subestratègies es presenten en la següent taula 5.8.

En aquesta taula podem observar que hi ha un petit grup d'alumnes que utilitzen la regla del producte, especialment com a estratègia per resoldre el problema F. En general, aquests alumnes proposen comptar el nombre de monedes necessàries per omplir cadascuna de les dimensions de l'espai i, posteriorment, multiplicar els tres valors. Per als problemes A i B observem una forma d'actuar semblant, pensant que la gent es distribueix en una posició de quadrícula, disposats en files i columnes.

Aquesta forma de procedir es pot associar a una representació mental per part dels

	PA	PB	PC	PD	PE	PF
Regla del producte	2	5	0	0	0	8
Punt de referència	23	4	0	24	52	25
Concentració	12	14	43	9	3	0
Estratificació	0	0	6	0	0	0
Total	37	23	49	33	55	33

Taula 5.8: Subestratègies que trenquen el problema en parts per problema

alumnes d'una possible disposició dels objectes a comptar. Encara que els objectes no es trobin realment en aquesta forma de distribució, el valor aconseguit és una bona estimació per al valor que demanem.

Si ens centrem en l'ús de la *iteració d'un punt de referència*, podem observar que hi ha uns problemes en el que els alumnes els proposen en major nombre. A la taula 5.8 podem observar que aquests són els problemes B i C. En els cas del problema C no hem detectat cap punt de referència, ja que en aquest problema es demana estimar la quantitat d'un objecte no tangible (un missatge SMS) que no té els atributs físics de mesura necessaris per establir un punt de referència.

El fet sorprenent és que trobem poques propostes que proposin un punt de referència en el problema B. Aquest problema tracta sobre l'estimació del nombre de persones presents en una manifestació, i, des d'aquest punt de vista, és equivalent al problema A (nombre de persones al pati per fer un concert). La diferència entre el plantejament d'aquests dos problemes rau en la determinació de l'espai cobert per la gent a comptar. En el cas del pati de l'institut, aquest és un espai concret, ben determinat i conegut pels alumnes. En el cas de la manifestació, no es dóna a l'enunciat del problema cap concreció de l'espai ocupat pels manifestants. Donat que l'ús d'un punt de referència implica el coneixement de la superfície ocupada pels manifestants, i que en aquest cas és difícil de determinar, trobem en aquest problema un nombre més gran d'alumnes que fan propostes exhaustives, amb la corresponent reducció de l'ús de punts de referència.

Per finalitzar els aspectes relacionats amb les estratègies basades amb el punt de referència, detallarem els diferents punts de referència que hem detectat:

- **Cadira per persona:** Superfície mitjana ocupada per una persona asseguda a una cadira. Detectat al problema A

- **Persona mitjana:** Superfície mitjana ocupada per una persona dreta. Detectat als problemes A i B.
- **Pes d'una gota:** Pes mitjà d'una gota. Detectat al problema D.
- **Volum d'un got:** Volum mitjà d'un got. Detectat al problema E.
- **Volum d'una gota:** Volum mitjà d'una gota. Detectat al problema D.
- **Volum d'una moneda:** Volum mitjà d'una moneda. Detectat al problema F.

Si ens centrem en les propostes que pretenen utilitzar *mesures de concentració* per resoldre el problema, podem observar que es troben presents en tots els problemes excepte el problema F. Algunes d'aquestes mesures de concentració són conceptes utilitzats en altres àmbits (com la densitat de població) però d'altres no són habituals i els alumnes les generen de forma específica per resoldre el problema proposat. Les mesures de concentració que hem detectat en el nostre estudi són les següents:

- **Densitat de població:** Nombre mitjà de persones en un metre quadrat. Detectat als problemes A i B.
- **Mitjana de SMS:** Nombre mitjà de SMS enviats per una persona en un dia. Detectat al problema C.
- **Gots en un volum d'aigua:** Nombre mitjà de gots necessaris per omplir una certa quantitat d'aigua. Detectat al problema E.
- **Aigua en un temps determinat:** Quantitat mitjana d'aigua omplerta a un recipient en un temps determinat. Detectat al problema D.

La forma en la que els alumnes plantegen la resolució del problema es centra en estimar, a partir d'una mostra reduïda, un valor per a aquesta mesura de concentració i multiplicar-lo per un valor global associat a la població total. En el cas de la densitat de població, multipliquen aquest valor per la superfície ocupada pels manifestants o els assistents al concert. En el cas de la mitjana de SMS enviats, els alumnes proposen multiplicar-la pel nombre total de persones que viuen a Catalunya.

L'últim tipus de subestratègia que hem detectat és el de l'*estratificació de la població*. Els alumnes proposen dividir la població total en estrats per als que assignen un valor associat. Aquest tipus de plantejament només l'hem trobat proposat al problema C, que és l'únic que es refereix a hàbits i actituds socials. Els alumnes trenquen en grups el total de la població pensant que tindran hàbits diferents respecte a l'ús dels SMS. Aquesta forma d'estructurar la població per aconseguir una resposta es pot aplicar a altres dels problemes proposats (diferents nivells de densitat als problemes A i B, per exemple) però no n'hem trobat cap referència.

> **Fet 6:** Existeixen estratègies que permeten diferents tipus de concreció. Hem trobat diverses subestratègies per a les propostes que es centren en trencar el problema en parts, com són l'ús de la regla del producte, la iteració de la unitat, l'ús de mesures de concentració i l'estratificació de la mostra.

A continuació ens centrarem en els processos de modelització associats a les propostes de resolució que hem analitzat. A la secció 2.1.6 hem donat els referents teòrics per definir els processos de modelització en la resolució de problemes. Els models són sistemes conceptuals que tenen com a propòsit descriure o explicar altres sistemes. Els models inclouen relacions, accions, patrons o singularitats per descriure o explicar els objectes matemàtics associats i estan acompanyats per procediments per aconseguir construccions o prediccions útils[5].

Cal destacar que hem trobat diverses propostes de resolució per als PEMNA que clarament no contenen cap element de modelització. Evidentment, aquelles propostes que no presenten cap tipus d'estratègia es troben en aquesta classe. Al mateix temps, aquells alumnes que no tracten de resoldre el problema per ells mateixos i deleguen aquesta responsabilitat a una font externa tampoc ofereixen elements de modelització en les seves propostes.

En canvi, diverses de les estratègies detectades presenten elements clars de modelització. Les estratègies centrades en la reducció d'un problema i el càlcul posterior de proporcionalitat utilitzen la relació de proporcionalitat entre dos objectes. El mateix criteri es pot aplicar a les estratègies basades en la proporcionalitat entre una situació real i la del problema.

Les estratègies que parteixen el problema en parts provenen de diferents models. La regla del producte es troba condicionada per una distribució mental prèvia de la disposició dels objectes a comptar. Les estratègies basades en l'estratificació d'una població responen

[5] En aquesta descripció del concepte de model seguim a Lesh i Harel [92]

també a una imatge mental prèvia que representa una població. Les estratègies que es basen en l'ús d'un punt de referència introdueixen un element extern al problema, justament la unitat definida com a punt de referència, que podem entendre com un patró propi de la situació que pretenen resoldre. Per finalitzar, les estratègies que utilitzen mesures de concentració inclouen aquesta mesura com a forma de relació entre els diferents objectes participants en la resolució del problema.

Fet 7: S'han detectat diverses estratègies que contenen elements de modelització.

5.3.4 Altres fets rellevants

Tal i com hem explicat anteriorment, el nostre instrument de recollida de dades és un qüestionari format per l'enunciat d'un problema i diverses preguntes que ens han de permetre poder interpretar la proposta de resolució presentada. Donat que la informació principal que obtenim és a partir d'una pregunta oberta, les respostes dels alumnes presenten una gran diversitat de formulacions. Aquesta riquesa en les dades ens permet obtenir una informació variada per observar diferents estratègies de resolució però ens limita a l'hora d'observar determinats aspectes que poden estar presents en les propostes del alumnes.

Com que a l'enunciat present al qüestionari demanem als alumnes que descriguin els passos que seguirien per resoldre el problema i no donem instruccions específiques per tal que segueixin un patró determinat, trobem que les respostes dels alumnes ofereixen informacions molt diverses. Per aquest motiu, hi ha determinades característiques que no apareixen en totes les propostes que hem recollit. Algunes d'aquestes característiques ens aporten informació rellevant per caracteritzar les propostes dels alumnes i considerem que han de formar part de l'anàlisi de dades que presentem encara que es trobin presents en una petita part del qüestionaris recollits.

Per aquests motius, les que segueixen són característiques de les propostes recollides als alumnes que no permeten una anàlisi per categories com el que hem realitzat per als apartats anteriors. Aquests fets detectats són els que presentem a continuació.

Interferències provocades pel context del problema

En el nostre propòsit d'introduir els PEMNA vam decidir donar a cada problema un enunciat que plantegés una situació concreta en un context simulat. En la nostra anàlisi hem detectat diversos casos en els que la proposta dels alumnes es veu influïda de forma negativa per aquest context.

Una mostra de proposta en la que el context desvia a l'alumne de descriure els passos a seguir per resoldre el problema és la següent:

PC4 - sms

Jo faria que els nens i nenes que no envien gaires SMS despres tindras poc saldo. I la mara et mira el movil si tens un sms de la novia o un amic. Et mira si as trucat la novia fes que trucas la novia? Per dirli algo.

Aquest que hem presentat és un cas clar en el que un fet relacionat amb l'enviament d'sms condiciona la resposta de l'alumne al nostre qüestionari.

Un altre exemple és el següent:

PF2 - caixa forta

Yo, el que faria es agafar una maquina que conta els diners i una vegada que sapiga tots els diners que hi ha. Organitzaria els bitllets amb bitllets, monedes amb monedes. De forma organitzada i correcta perque hi hagues mes espai.

En aquest altre exemple podem observar que la pregunta concreta per a aquest problema es refereix exclusivament a comptar monedes d'euro, però a l'enunciat hem fet referència a monedes i bitllets i l'alumne pretén fer un recompte de la quantitat de diners en qualsevol d'aquests formats per aconseguir el màxim d'espai possible.

A continuació presentem a les següents taules el nombre de propostes en les que hem detectat que el context determinat per l'enunciat del problema provoca interferències als alumnes. A la taula 5.9 es poden veure les dades classificades per problema, on presentem el nombre d'interferències detectades per a cada problema, presentant els percentatges corresponents.

	PA	PB	PC	PD	PE	PF
Interferències	6 (6.3%)	21 (22.6%)	3 (3.3%)	7 (8.0%)	5 (5.7%)	1 (1.2%)
Total	96	93	90	88	86	86

Taula 5.9: Interferències provocades pel context per problema

A la taula 5.10 presentem els mateixos resultats sobre les interferències provocades per l'enunciat del problema, però classificats per cursos.

	1	2	3	4
Interferències	14 (12.6%)	14 (11.0%)	8 (6.0%)	7 (4.2%)
Total	111	127	133	167

Taula 5.10: Interferències provocades pel context per curs

En aquestes dues taules es poden observar diversos fets. Per començar, el problema B, en el que cal comptar el nombre d'assistents a una manifestació, és el que presenta un nombre més gran de propostes en les que el context del problema exposat en l'enunciat genera més interferències en la resolució del problema.

Observant les propostes dels alumnes en les que hem detectat interferències per a aquest problema podem observar factors socials que es troben presents en tot el que envolta una manifestació. En concret, hem detectat diferents possibilitats que distreuen l'atenció de l'alumne cap a la solució demanada com poden ser la presència de cossos policials, el fet que l'èxit d'una manifestació es mesura pel nombre d'assistents o la necessitat d'espai per encabir gent. La quantitat de fets d'aquest tipus que han influït en les propostes dels alumnes es troben en aquest problema en un nombre molt superior al que es troben en altres problemes.

Altres fets que provoquen confusions als alumnes que hem trobat per a altres problemes són la forma de posicionar la galleda per evitar que caigui a terra o la necessitat d'omplir el pati de gent per aconseguir un bon ingrés de diners amb les entrades.

De fet, es pot intuir una relació directa entre la concreció de la situació plantejada i el nombre de respostes que presenten interferències. En particular, els problemes que tenen un enunciat més concret (el C i l'F) són pels que hem obtingut un nombre menor de propostes que presenten confusions degudes a l'enunciat.

D'altra banda, si mirem els resultats mostrats a la taula podem veure que el percentatge de propostes en les que es produeixen interferències provocades pel context representat a l'enunciat del problema decreix amb el curs. Es pot observar que per als dos primers cursos de l'ESO aquest tipus de propostes representen més d'un 10% i que van decreixent fins arribar a un 4.2% en les propostes de 4t d'ESO.

Aquest fet es pot explicar a partir d'una major comprensió de la situació representada en el problema deguda, possiblement, a la major maduresa que comporta l'edat. D'aquesta forma els alumnes de major edat es distancien de la situació plantejada i poden fer propostes més orientades a resoldre el problema.

Fet 8: El context proposat en els enunciats dels problemes pot provocar confusions en la resposta dels alumnes. Si l'enunciat és més concret es redueixen aquestes confusions.

La manca de dades és considerada un impediment?

Algunes de les propostes recollides evidencien que la manca de dades proporcionades en els enunciats dels problemes proposats provoquen grans dificultats als alumnes. En alguns casos aquestes dificultats impedeixen als alumnes l'elaboració d'una proposta de resolució. Un exemple seria la següent resposta d'un alumne a la pregunta formulada al problema A:

> **PA2 - concert**
> *Si hem doneu l'aforament màxim del pati el numero d'entrades i de persones que hi aniran et podria dir el resultat, fins llavors no.*

En aquest cas l'alumne explicita la necessitat de conèixer dades per poder elaborar la seva proposta, sense tenir en compte la possibilitat d'estimar-les per ell mateix o recorrent a una font externa.

Un altre exemple d'aquest fet en el que l'alumne fa explícita la manca de dades és el següent:

> **PD1 - galleda**
> *No ho se, no se les mides ni de la galleda ni de les gotes.*

També hem trobat propostes menys explícites per a aquesta categoria. La següent és una mostra d'un alumne que exposa totes les dades que necessitaria conèixer per portar a terme una proposta de resolució i que no coneix. Per aquest motiu no explicita cap tipus de procediment:

> **PD1 - galleda**
> *Primer tindria que saber el diàmetre de la galleda i l'alçada, per tan el bolum de la galleda serà els ml d'aigua que es podrien posar el cubo. També tenim que tenir en compte que si la gota es una mateixa liena o no. Perquè pot caure més o menx aigua, també el temps en el que la gota generi un altre gota perquè pot ser molt len o mot rapid.*

Per a aquesta categoria hem detectat 35 respostes dels alumnes, que tenen la distribució per problemes i el percentatge obtingut en relació al total de propostes recollides per a cada problema que es pot observar a la taula 5.11.

	PA	PB	PC	PD	PE	PF
Impediments	7 (7.3%)	5 (5.4%)	3 (3.3%)	10 (11.4%)	8 (9.3%)	2 (2.3%)
Total	96	93	90	88	86	86

Taula 5.11: Impediments per a la resolució per problema

Els resultats per a aquesta categoria són bastant uniformes quant al problema en el que trobem aquestes impossibilitats però es poden observar petites diferències. El problema que en presenta menys és el problema F, que és el que presenta un enunciat més concret, ja que es proporcionen dades sobre tots els objectes participants (la caixa forta és d'1 m^3 i la moneda d'euro és ben coneguda pels alumnes). El següent problema amb menys propostes detectades en aquesta categoria és el problema C, on essencialment els alumnes volen tenir com a dada del problema el nombre d'SMS que envia de mitjana un català al dia.

Els altres quatre problemes presenten un nombre major de propostes en les que es posa de manifest que l'alumne requereix més dades per resoldre el problema. Alguns directament afirmen no tenir dades suficients i d'altres en demanen algunes concretes, com el volum de la galleda o d'una gota o les mides de la piscina.

Si presentem les dades classificades per curs obtenim la taula 5.12.

	1	2	3	4
Impediments	4 (3.6%)	22 (17.3%)	5 (3.8%)	4 (2.4%)
Total	111	127	133	167

Taula 5.12: Impediments per a la resolució per curs

En aquesta taula obtenim una distribució curiosa. Si presentéssim els resultats per cicles (1r i 2n per una banda i 3r i4t per l'altra) obtindríem un resultat coherent, en el que els alumnes de menor edat necessiten un major nombre de dades per elaborar les seves propostes. Com que les hem presentat per cursos, podem observar que els alumnes de 2n d'ESO són els hem detectat un major percentatge de propostes en les que la manca de dades en els enunciats no els permet elaborar la seva resolució.

Fet 9: La manca de dades en els enunciats proposats provoca que alguns alumnes no siguin capaços de realitzar cap mena de proposta de resolució.

Ús deficient de les matemàtiques conegudes

No hem plantejat aquest estudi amb la intenció de detectar mancances en els coneixements matemàtics dels alumnes, sinó amb la voluntat de detectar els tipus d'estratègies que poden utilitzar per resoldre PEMNA. És evident que no totes les propostes recollides són vàlides i que existeixen diversos tipus d'errors. En la majoria de casos, com a conseqüència del format de les dades recollides, no es poden determinar els motius que provoquen que un alumne presenti errors conceptuals en la seva proposta de resolució. Tot i així, hem pogut detectar diversos casos en els que l'alumne fa un ús deficient dels conceptes matemàtics que proposa.

Alguns dels aspectes que hem detectat tenen un origen pràctic, com ara utilitzar sumes reiterades per obtenir el valor d'una divisió, però aquestes simplificacions no estan justificades en el sentit que no els estem demanant que les realitzin, només que les proposin.

Un exemple d'aquest tipus de propostes amb un ús deficient de les matemàtiques conegudes és el següent:

PC1 - sms

Primer mesuraria quant és un metre cubic a continuació mesuraria quant volum ocupen les monedes d'un euro. Una vegada se quant ocupa cada moneda vaig multiplicant el volum de cada moneda pel nombre que ha donat el total d'un metre cubic i aixins sortira el total de monedes que hi caben. Un altre forma de ferlo és utilitzant el conte de la vella, és a dir una vegades se el volum de les monedes, les multiplico per diferents nombres fins que arribi a un metre cúbic.

En aquesta proposta podem observar que l'alumne identifica els elements rellevants per resoldre el problema i realitza una proposta que porta a una solució vàlida. El que també podem observar és que en lloc de dividir el metre cúbic entre el volum de la moneda pretén multiplicar aquest valor per un altre, que serà el resultat al problema, fins obtenir un metre cúbic.

Una altra proposta en la que trobem un procediment de càlcul equivalent és la següent:

> **PF3 - caixa forta**
> *Agafem una mostra, en aquest cas persones, unes 100 de diferents edats en proporció a les que hi ha al país. Després podriém anar doblant els resultats de les muestres fins arribar a 7.5 milions.*

En aquest cas, podem observar que la forma de determinar la constant de proporcionalitat entre la mostra escollida i la població real es troba doblant una quantitat fins arribar a l'altra en lloc de fent una divisió.

Quant al nombre de propostes que hem trobat en les que hem detectat aquests tipus d'ús deficient de les matemàtiques conegudes només podem afirmar que hi ha pocs casos. En concret hem detectat 11 propostes d'aquest caire. Si hem decidit que aquest és un factor interessant per al nostre estudi és per la rellevància del fet que manifesten i que posen al descobert. Ja hem comentat anteriorment que el tipus de dades que hem obtingut és molt dispers i no tots els alumnes ens presenten el mateix tipus d'estructura a la seva resposta. En concret, una gran part de les propostes que hem obtingut no intenten resoldre el problema plantejat o porten la seva proposta en direccions que no són les que esperaríem en principi i que en moltes ocasions no tenen cap tipus de contingut matemàtic. Una vegada hem observat aquest fet, no podem deixar de considerar l'opció que aquests alumnes haurien pogut mostrar els mateixos usos deficients de les matemàtiques que coneixem que hem detectat en altres casos.

Entre aquestes 11 propostes ubicades en aquesta categoria hem detectat diversos usos deficients per a fer càlculs de proporcions. Aquests alumnes no proposen utilitzar factors de conversió, constants de proporcionalitat o la regla de tres, sinó que proposen usos que són més costosos i menys precisos. Tenint en compte que no hem demanat als alumnes que realitzin aquests càlculs i que no és necessari aconseguir una resposta ràpida, considerem que l'ús d'aquest tipus de càlculs és deficient.

Per al cas en el que un alumne es planteja traslladar a una població (de mida N) les proporcions obtingudes per a una mostra (on pensem que posseeixen una característica n individus en una mostra de m), hem detectat els següents usos deficients del càlcul de proporcions:

- Duplicar iteradament els valors de n i m fins que m s'apropa a N. En aquest cas, el valor obtingut de duplicar n és l'aproximació al nombre d'individus de la població que tenen la característica estudiada.

- Multiplicar m per diferents valors fins aconseguir una bona aproximació de N. El nombre aconseguit serà una aproximació del factor de proporcionalitat entre la mostra i la població.

El problema en el que trobem un nombre més gran d'usos deficients de les matemàtiques conegudes és el problema E, però considerem que amb aquest nombre de dades no podem determinar cap motiu de causalitat.

Fet 10: Alguns alumnes fan un ús deficient de les matemàtiques apreses per realitzar la seva proposta de resolució.

5.4 Anàlisi relacional

Al fer una anàlisi relacional ens centrem a continuació en la relació entre el tipus d'estratègia proposada i l'èxit en la resolució, amb l'objectiu d'observar el tipus de propostes que permetrien resoldre el problema als alumnes.

A la taula 5.13 recollim les dades que relacionen el nombre de propostes de cada estratègia que pertanyen a cada categoria possible de l'èxit en la resolució. El percentatge mostrat es refereix a la proporció que representa aquella dada dins del conjunt de propostes amb la mateixa estratègia.

	Resol	Resol sobre paper	No resol	Total
Sense estratègia	0 (0%)	0 (0%)	160	160
Exhaustiva	0 (0%)	84 (87%)	12 (13%)	96
Font externa	0 (0%)	14 (70%)	6 (30%)	20
Reducció i proporció	13 (42%)	4 (13%)	14 (45%)	31
Trencar en parts	109 (47%)	52 (23%)	69 (30%)	230
Situació real i proporció	1 (100%)	0 (0%)	0 (0%)	1
Total	123	154	261	538

Taula 5.13: Estratègia proposada vs èxit en la resolució

Una primera lectura de la taula ens presenta diverses obvietats, com ara que aquells alumnes que fan propostes sense cap mena d'estratègia detectada no resolen o que les estratègies exhaustives, en general, només permeten resoldre sobre el paper. Aquells resultats que considerem més interessants en aquesta secció són els referents a les estratègies que permetrien resoldre als alumnes.

Per començar, podem observar que hem trobat un únic alumne que ha proposat una estratègia a partir del coneixement d'una situació real coneguda (la quantitat de gent que hi ha en un concert a un local conegut) per poder estimar la quantitat de gent que hi cap al pati per fer d'espectadors a un concert. Donat que aquesta proposta representa un cas aïllat, no podem comparar el seu percentatge d'èxit amb el de les altres subestratègies.

A part d'aquest cas trobem que el 42% dels alumnes que proposen resoldre un problema més petit (abastable) i fer una proporció per adequar els resultats a la situació estudiada aconsegueixen una proposta que permet resoldre el problema. Per la seva part, són un 47% els alumnes que resolen entre els que proposen trencar el problema en parts i resoldre-les per separat.

Detallem a la taula 5.14 la informació obtinguda per a les diferents subestratègies que hem detectat per a les estratègies que proposen trencar el problema en parts més petites i resoldre-les per separat:

	Resol	Resol sobre el paper	No resol
Regla del producte	11	0	4
Punt de referència	63	18	47
Concentració	33	30	18
Estratificació	2	4	0
Total	69	109	52

Taula 5.14: Subestratègies de trencar el problema en parts vs èxit en la resolució

En aquesta taula podem observar que les subestratègies detectades tenen percentatges de propostes que resolen a l'entorn del 40%, excepte la regla del producte, per a la que aquest percentatge arriba fins al 73%. Tot i així, podem observar que aquesta és una opció que no presenta un nombre elevat de propostes, tal i com passa amb l'estratificació de la població. Les estratègies que tenen un major nombre de propostes que resoldrien són l'ús d'un punt de referència i l'ús de mesures de concentració.

Aquests resultats es poden resumir en el següent Fet:

Fet 11: Per un costat, les estratègies exhaustives i les que es basen en obtenir informació d'una font externa no permeten resoldre els problemes proposats. Per l'altra banda, hi ha diversos tipus d'estratègies que permeten resoldre. Només sembla que la regla del producte permet resoldre als alumnes els problemes proposats amb un alt grau d'èxit.

En la nostra anàlisi de dades hem detectat una situació no casual que mereix una anàlisi detallada. Ja hem explicat anteriorment que una part important dels alumnes que han fet propostes per al problema D han donat una resposta a una pregunta diferent a la plantejada. En concret, en lloc de respondre al nombre de gotes que omplen una galleda, han dirigit els seus esforços a estimar el temps necessari per omplir la galleda.

Donat que la nostra anàlisi sobre l'èxit en la resolució del problema s'ha centrat en la pregunta formulada en l'enunciat, hem perdut la informació associada a aquestes propostes i no ha pogut quedar reflectida en la darrera secció. En concret, per a aquest problema hem trobat 28 propostes que responen a una altra cosa, tenint en consideració que és l'alumne que deliberadament pretén respondre a una altra pregunta lligada amb la situació plantejada.

La següent taula mostra els diferents tipus d'estratègia detectades per a aquestes 28 propostes:

Sense estratègia	Exhaustiva	Reducció i proporció	Trencar en parts
5	5	9	9

Taula 5.15: Estratègia dels que responen a una altra cosa al problema D

Si ens centrem en les propostes que presenten estratègies que poden tenir un major detall, observem que les propostes que realitzen una reducció a un problema més petit pretenen calcular el temps per omplir una certa part de la capacitat de la galleda. En el cas de les que trenquen el problema en parts, tenim com a punt de referència l'estimació del temps en el que cau una gota o com a mesura de concentració la quantitat d'aigua caiguda en un temps determinat.

Com a punt final, ens manca decidir si aquestes propostes aconseguirien resoldre amb èxit el problema que ells mateixos s'han plantejat. És clar que totes aquelles propostes que no ofereixen una estratègia de resolució no resoldran el problema. Les que presenten estratègies exhaustives només resolen sobre el paper, en general degut a que requereixen un temps del que no disposen.

Les estratègies de reducció a un problema més petit i proporció són, en general exitoses, ja que hem trobat que 7 de les 9 detectades porten a una proposta que permetria resoldre el problema. Les estratègies que trenquen el problema en parts també tenen un bon índex d'èxit, ja que 6 dels 9 casos permetrien resoldre el problema.

Aquests casos que permetrien resoldre el problema s'han de sumar als que ja hem obtingut per al problema D en el cas que responguessin a la pregunta que se'ls planteja, amb el que aquest problema passaria a tenir 33 propostes que resolen amb èxit entre les dues opcions plantejades.

Fet 12: Alguns dels alumnes que han canviat la pregunta del problema realitzen propostes que resolen el problema que ells han plantejat.

D'aquesta forma podem integrar els casos dels alumnes que canvien la pregunta al problema D a les taules que hem presentat sobre les estratègies que resolen. Considerem que aquests alumnes aporten una visió interessant sobre el problema plantejat i no podem menysprear la seva aportació. Per això s'ha revisat la categoria de l'èxit en la resolució incloent aquells alumnes que resolen la seva pròpia variant del problema D. Amb això, es recullen a la taula 5.16 les dades definitives que relacionen les estratègies proposades amb l'èxit en la resolució.

	Resol	Resol sobre paper	No resol	Total
Sense estratègia	0 (0%)	0 (0%)	160	160
Exhaustiva	0 (0%)	84 (87%)	12 (13%)	96
Font externa	0 (0%)	14 (70%)	6 (30%)	20
Reducció i proporció	20 (64%)	4 (13%)	7 (23%)	31
Trencar en parts	115 (50%)	52 (23%)	63 (27%)	230
Situació real i proporció	1 (100%)	0 (0%)	0 (0%)	1
Total	136	154	248	538

Taula 5.16: Estratègia proposada vs èxit en la resolució revisada

Amb la inclusió d'aquest detall, podem observar que les estratègies basades en una reducció del problema i l'ús d'un factor de proporcionalitat i les estratègies que trenquen el problema en parts per resoldre-les per separat tenen uns percentatges d'èxit superiors als observats anteriorment.

Fet 13: Les estratègies que permetrien resoldre el problema són les basades en la reducció del problema, en trencar el problema en parts i la comparació amb una situació real. Per aquesta última el conjunt de dades disponible és massa petit, però les altres dues opcions tenen uns bons nivells d'èxit en la resolució.

Capítol 6

Conclusions, discussió i prospectiva

A l'inici d'aquest treball que presentem per obtenir el grau de doctor ens proposàvem com a directriu la següent pregunta: *què en podem extreure de les propostes d'estimació de magnituds no abastables que fan els alumnes de Secundària?*

Així vam establir els següents objectius per al nostre estudi empíric:

Obj1 Caracteritzar les estratègies de resolució de problemes d'estimació de magnituds no abastables que proposen els alumnes

Obj2 Identificar les propostes que estimen adequadament les quantitats demanades i contrastar aquesta informació amb el tipus d'estratègia proposada

Obj3 Estudiar la influència del context de la situació plantejada en el problema sobre l'estratègia utilitzada en la proposta de resolució

En aquest capítol discutirem les conclusions de la recerca que hem presentat en aquesta tesi doctoral, tractarem l'èxit en l'assoliment dels objectius proposats, recollirem les contribucions de la recerca i detallarem les limitacions del treball i farem propostes del que entenem que podrien ser noves vies d'estudi obertes per aquesta tesi.

Abans de tot això i per poder centrar les conclusions en els focus d'atenció que ens hem fixat, farem una recapitulació de tot el que hem fet en aquest treball i que ens ha portat fins aquest punt.

Per començar, en un període de temps anterior al de l'elaboració d'aquesta tesi, vam portar a terme dues recerques centrades en els PEMNA. La primera pretenia observar si l'estudi d'aquests problemes podia donar lloc a un tema de recerca interessant en algun aspecte. Una vegada corroborat aquest extrem vam decidir que els PEMNAs constituïen un tema molt ampli i ens vam centrar en l'anàlisi d'estratègies per resoldre PEMNAs. El segon estudi es va concretar en un treball de màster (Albarracín [1]) que es centrava en les propostes de resolució de PEMNA per a dos problemes concrets. Aquest segon estudi va ser útil per determinar que aquestes propostes eren riques en detalls i estratègies i que era preferible no demanar als alumnes que intentessin fer els càlculs associats a la seva proposta de resolució, d'aquesta forma es centràvem en elaborar la proposta.

L'estudi que hem presentat en aquesta tesi s'inicia en aquest punt. Per començar veiem clar que necessitem una definició inicial del concepte de magnitud no abastable, que ha d'anar acompanyada per la definició d'estimació d'una magnitud no abastable i de la de problema d'estimació de magnituds no abastables. D'aquesta forma es pot elaborar una llista de problemes suficientment àmplia per començar a treballar.

D'aquesta primera llista fem una primera selecció de problemes que utilitzem en una prova pilot que ens permet determinar aquells que ofereixen més informació i que estan relacionats amb els nostres objectius de recerca. Una vegada hem triat els 6 problemes que han de formar part del nostre estudi fem una petita prova amb alumnes de Batxillerat per perfilar l'instrument de recollida de dades.

Posteriorment fem la recollida de dades entre alumnes d'ESO de dos centres diferents. Aquestes dades s'han digitalitzat i analitzat. Aquesta anàlisi és un procés en el que les categories generades sorgeixen de les pròpies dades, amb la qual cosa un primer producte d'aquesta tesi és l'arbre de categories que ens ha permès caracteritzar les propostes dels alumnes.

Els resultats de la nostra recerca tenen relació amb els fets més rellevants observats en les respostes dels alumnes i giren al voltant de les estratègies proposades pels alumnes. El resum d'aquests resultats són els fets que hem destacat al capítol anterior.

Tal i com hem comentat anteriorment, la nostra recerca estava orientada a assolir objectius relatius a l'estudi empíric, aportar contribucions de caire teòric i establir algunes implicacions didàctiques.

En relació als objectius relacionats amb el treball empíric, hem caracteritzat les estratègies de resolució de problemes d'estimació de magnituds no abastables que proposen els alumnes. Aquesta caracterització es concreta en els arbres de categories que hem generat.

Aquests arbres de categories representen una contribució al coneixement de les propostes de resolució que elaboren els alumnes per resoldre PEMNA i descriuen aspectes relacionats amb els tipus de resposta obtinguts en els qüestionaris utilitzats. Aquests arbres contenen una gran informació sobre els diferents tipus d'estratègia que proposen els alumnes i hem pogut caracteritzar l'èxit d'aquestes propostes per resoldre els problemes proposats, fet que ens ha permès realitzar un anàlisi relacional entre aquestes dues categories, per establir quines estratègies permetrien resoldre els problemes plantejats.

El nostre procés d'anàlisi està enfocat a trobar els aspectes que poden explicar les propostes de resolució de PEMNA i donar-ne una caracterització que, finalment, es centra en els arbres de categories elaborats. Presentem l'arbre de categories que descriu les propostes estudiades en funció del tipus de resposta a la pregunta plantejada a la figura 6.1.

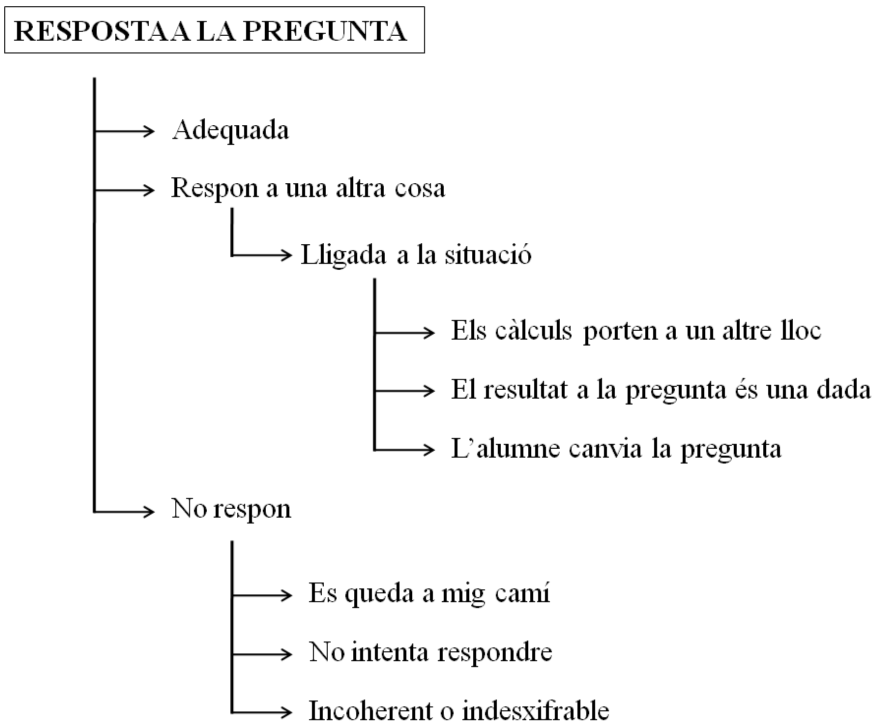


Figura 6.1: Arbre de categories per a la resposta a la pregunta

A la figura 6.2 es mostra l'arbre de categories generat per a l'èxit en la resolució per a les propostes estudiades.

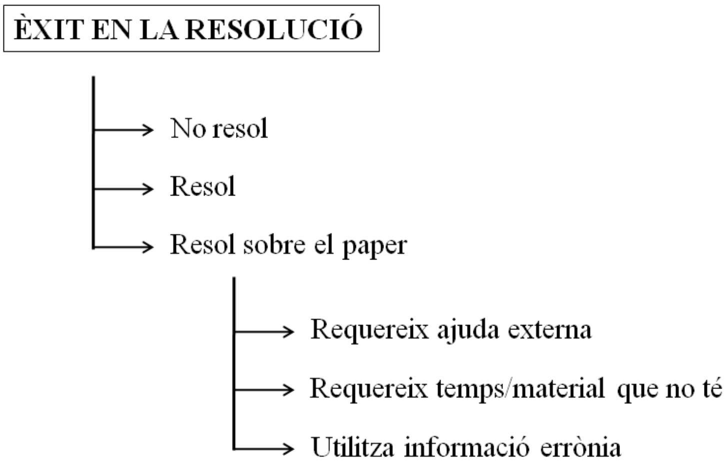


Figura 6.2: Arbre de categories per a l'èxit en la resolució

En últim terme, la figura 6.3 conté l'arbre de categories de les estratègies detectades en les propostes de resolució analitzades.

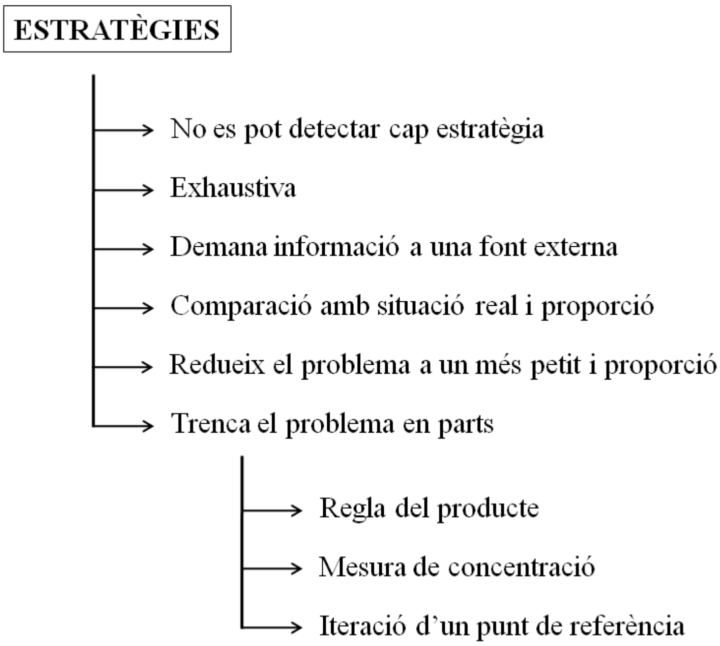


Figura 6.3: Arbre de categories per a les estratègies de resolució

També hem trobat altres característiques de les propostes que no han generat categories que es puguin aplicar a la totalitat de les dades i només expliquen algunes de les propostes estudiades.

No podem afirmar que aquests arbres de categories caracteritzi totes les possibles propostes de resolució de PEMNA que podrien arribar a generar els alumnes ja que el nostre és un estudi de caire exploratori. Tot i així representa una primera contribució a l'estudi dels PEMNA i inclou els elements bàsics que poden presentar aquestes propostes. De fet, aquest arbre de categories és una proposta dinàmica i situada. En futurs estudis, quan es presentin PEMNAs amb enunciats diferents a un altre grup d'alumnes, algunes d'aquestes categories es mantindran i altres podrien desaparèixer. Al mateix temps, la proporció de propostes ubicades a cadascuna de les categories podria variar. Per aquests motius diem que és dinàmica. Diem que és una proposta situada perquè creiem que l'enunciat de cadascun dels problemes juga un paper important en el tipus de propostes de resolució que generen els alumnes.

De totes formes, aquesta proposta, tot i ser dinàmica i situada, mantindria la seva estructura general. Així creiem que si ampliéssim el rang dels problemes plantejats el tipus de resposta a la pregunta i les categories obtingudes per a l'èxit en la resolució podrien quedar invariables, tot i que podrien aparèixer nous motius per assignar les propostes a la seva categoria. Per la seva banda, diferents tipus de problemes podrien generar nous tipus d'estratègies que no hem detectat en el nostre estudi.

D'altra banda, si plantegéssim aquests problemes a alumnes de major nivell educatiu possiblement observaríem estratègies similars que es concretarien en accions amb tècniques matemàtiques més elaborades. En el nostre estudi hem observat que amb l'augment de l'edat dels alumnes participants augmenta el nombre de propostes que resoldrien el problema. Tot i així, en el cas de proposar aquests problemes a alumnes de Batxillerat o universitaris descartem la possibilitat d'obtenir uns nivells d'èxit en la resolució que no fossin tant alts com es podria pensar d'entrada. Per als alumnes de menor edat que els participants en el nostre estudi, com ara els dels últims cursos de Primària, podríem esperar un gran nombre d'estratègies exhaustives, però una vegada observats els resultats dels alumnes de 1r d'ESO, tenim motius per pensar que alguns alumnes podrien proposar estratègies adequades.

En el nostre cas, les dades estudiades, tal i com destaquem als Fets 2, 3, 4 i 5, presenten una gran diversitat dins de cadascuna d'aquestes categories. Per començar no totes les propostes intenten respondre la pregunta formulada, al mateix temps, una part important de les propostes estudiades no portarien a resoldre el problema. Aquestes propostes que no resoldrien el problema segueixen diferents patrons i posen en evidència diferents tipus d'acostament a problemes estudiats. Quant a la diversitat d'estratègies proposades, només podem afirmar que existeix un gran nombre de formes d'enfrontar aquests problemes, tant entre les que resoldrien el problema com les que no ho farien. Algunes d'aquestes estratègies contenen elements de modelització.

Tal i com hem destacat al Fet 11, les estratègies exhaustives, les que es basen en obtenir informació d'una font externa o aquelles que no contenen elements de modelització no permeten als alumnes elaborar propostes que els portin a resoldre el problema.

Si ens centrem en el tipus d'estratègies que poden permetre als alumnes aconseguir propostes que resolguin els problemes plantejats, podem afirmar que l'anàlisi relacional de les dades estudiades ens porta a veure que aquelles propostes que contenen elements de modelització són les que poden portar als alumnes a una proposta que resolgui amb èxit els problemes proposats.

En concret, hem trobat les següents estratègies que poden portar als alumnes a resoldre els problemes plantejats:

- Reducció a un problema més petit i ús d'un factor de proporció
- Trencar el problema en parts més petites i resoldre-les per separat
- Comparació amb una situació real i ús d'un factor de proporció

A la secció 5.4 hem vist que diverses subestratègies derivades de trencar el problema en parts poden portar a propostes que resoldrien el problema. Són les següents:

- Regla del producte
- Ús d'un punt de referència
- Ús de mesures de concentració
- Estratificació de la població

D'aquesta forma podem concloure que els estudiants de l'ESO tenen recursos adequats per formular propostes que resolguin PEMNA, tenint en compte que els alumnes participants en l'estudi no han treballat prèviament amb aquests problemes. Això ens fa pensar que si els incloguéssim en els currículums i es treballessin a les aules, podríem obtenir propostes més acurades i amb un major índex en l'èxit en la resolució.

També hem observat que els processos de modelització són essencials per tal que els alumnes facin propostes que els puguin portar a resoldre aquest tipus de problemes. De fet, les dades estudiades ens fan pensar que els problemes d'estimació de magnituds no abastables poden representar una bona opció per introduir l'estudi dels processos de modelització a Secundària.

En relació al que afirmen English [49] i Doerr i English [39], hem pogut observar que alguns dels alumnes del nostre estudi fan propostes que inclouen diferents elements de modelització i que aquests poden ser generalitzats a altres tipus de problemes. Al mateix temps, s'ha documentat que els alumnes abusen de procediments purament lineals en la resolució de problemes de modelització (Esteley, Villarreal i Alagia [50]) i en el nostre estudi hem detectat diverses estratègies que utilitzen aquest tipus de procediments però centrats en subproblemes que permeten aquest tipus d'aproximació. Alguns dels problemes estudiats permeten aproximacions per a la seva resolució que es poden reduir a processos lineals, un exemple seria el de calcular el nombre de persones que caben al pati, ja que es pot obtenir un valor per a la superfície del pati i multiplicar per un valor de densitat de població adequat. En aquests casos, el problema es redueix fins a processos lineals que incorporen l'estructura bidimensional del problema i l'ús de la proporcionalitat és adequat.

Fins aquí hem vist de quina forma hem donat resposta als objectius relacionats amb la caracterització de les propostes obtingudes i de les estratègies que permetrien resoldre els problemes. El tercer objectiu està relacionat amb l'estudi de la influència del context dels problemes proposats en la proposta de resolució dels alumnes.

El fet més rellevant que hem detectat és que els alumnes poden arribar a canviar la pregunta que ha estat formulada si consideren que hi ha una pregunta més adient. El cas més clar que hem detectat es refereix al problema D en el que els alumnes havien d'estimar el nombre de gotes que omplen una galleda en una situació en la que es troba una gotera a la sala de professors. Una part important dels alumnes decideixen donar resposta a una altra pregunta, com ara el temps necessari per omplir una galleda, tal i com recollim al Fet 2. A la secció 5.4 hem vist que alguns d'aquests alumnes plantegen propostes que els portarien a resoldre el problema que ells s'han plantejat en base a la situació proposada.

D'altra banda, en la nostra anàlisi hem detectat diversos casos en els que el context del problema presenta dificultats no superables als alumnes, de forma que la seva proposta se'n veu ressentida. Tal i com hem recollit al Fet 8, els problemes que presenten una situació més oberta, sense que les dades aportades siguin específiques, són els que presenten un índex més alt de propostes en les que el context desorienta als alumnes.

Al mateix temps, i tal i com hem recollit al Fet 9, la forma en la que es plantegen els problemes, que no estan pensats per treballar sobre objectes definits, sinó en situacions obertes, provoca que alguns alumnes percebin directament que la manca de dades és la causant de que no puguin resoldre el problema.

Al mateix temps, el context dels problemes condiciona les estratègies utilitzades pels alumnes. Si comparem els problemes A i B, podem observar que el fet que el recinte en el que s'organitza el concert estigui clarament delimitat i el de la manifestació no ho estigui genera una diferent distribució dels tipus d'estratègies detectades. D'altra banda, hem observat que els alumnes proposen obtenir informació d'una font externa en aquells problemes amb un context social ben definit. Aquest fet ens fa pensar que utilitzen coneixement adquirit sobre el seu entorn real per resoldre aquests problemes.

Una vegada revisats els objectius que ens havíem proposat i els hem donat resposta, podem valorar l'eficàcia de l'instrument de recollida de dades utilitzat. El primer aspecte rellevant és que només ens hem centrat en propostes de resolució i no hem estudiat la resolució com un tot, sinó que, de forma premeditada, hem decidit estudiar la comprensió del problema i l'elaboració d'un pla d'acció (Pólya [129]). En l'estudi previ a la tesi doctoral vam poder observar que si els alumnes tenen com a objectiu aconseguir un resultat per a un problema els costa explicitar els procediments o estratègies emprats. De fet, una part dels alumnes es centren en aconseguir un número i empobreixen la seva actuació. Aquest fet havia estat ja documentat recentment per Van Dooren, De Bock, Vleugels i Verschaffel [42] en un estudi sobre problemes d'enunciat literal. Per tant, vam decidir que l'enunciat del problema no havia de suggerir als alumnes la necessitat de l'obtenció d'una resposta concreta al problema.

D'aquesta forma l'instrument de recollida de dades s'ha plantejat com un qüestionari obert en el que els alumnes han d'escriure la seva proposta de resolució per a un PEMNA. Aquest format ens ha permès observar un gran nombre d'estratègies diferents i hem detectat diversos fets rellevants que només es manifesten en una petita part dels qüestionaris. Pensem que si haguéssim plantejat un qüestionari tancat no hauríem observat aquesta riquesa en les dades.

Al mateix temps, seria interessar observar la forma en la que els alumnes segueixen les seves propostes de resolució per obtenir un resultat adient per als problemes proposats. Possiblement alguns alumnes reformularien les seves propostes i al portar-les a la pràctica es veurien obligats a canviar diferents detalls que els permetessin obtenir un resultat. És d'esperar que iniciessin un procés multicíclic com el que proposen Peter-Koop [126, 127, 128] o Borromeo Ferri [51]. Creiem que una part d'aquells alumnes que fan propostes exhaustives canviarien la seva proposta incloent elements que modelitzessin la situació. D'altra banda, aquells alumnes que fan propostes amb estratègies que permeten resoldre el problema, però que les concreten amb errors conceptuals o de càlcul, tindrien l'oportunitat de refer la seva proposta i aconseguir les estimacions desitjades.

El nostre estudi s'ha centrat en les estratègies de resolució de PEMNAs. Durant tot el temps en el que hem realitzat aquest treball hem pogut estudiar una gran quantitat de propostes en les que es detallaven diferents formes de trobar estimacions per a magnituds no abastables.

Donat que alguns dels nostres propòsits inicials estan directament relacionats amb l'establiment de conceptes teòrics lligats a les magnituds no abastables, ens centrarem en el coneixement adquirit per fer una revisió d'alguns d'aquests conceptes. Per començar, hem de dir que el nostre estudi no ens ha fet replantejar la nostra definició de magnitud no abastable. Per això mateix mantenim la definició inicialment establerta, que és la següent:

> una magnitud (física o abstracta) que es troba fora del nostre abast d'interpretació i per a la qual no hem generat significat.

Possiblement, la incorporació de nous problemes i d'una població d'estudi més àmplia ens permetria matisar l'arbre de categories elaborat i obtenir característiques pròpies del concepte de magnitud no abastable que en el nostre estudi no hem trobat.

D'altra banda, el nostre estudi ens permet realitzar una relectura de les característiques de l'estimació de Segovia, Castro, Castro i Rico [157] però des del punt de vista de l'estimació de magnituds no abastables. Ens limitarem a matisar les aportacions d'aquests autors, de forma que el text en cursiva és la nostra aportació a aquestes característiques de l'estimació de magnituds no abastables:

- Consisteix en valorar una quantitat referent a una *magnitud no abastable*

- El subjecte que la fa té alguna informació, referència o experiència *sobre alguna part* de la situació, *però no té un coneixement global de la situació ja que d'aquesta forma la magnitud no seria no abastable*

- Es realitza, generalment, *a partir d'un procés de modelització de la situació*

- Es fa *utilitzant una estratègia de resolució elaborada* i fent servir quantitats el més senzilles possibles

- El valor assignat no ha de ser exacte, però sí adequat per poder prendre decisions

- El valor assignat admet diferents aproximacions, depenent de qui realitzi la valoració

Tal i com hem discutit més amunt, per poder millorar les característiques relacionades amb el valor obtingut com a solució seria necessari un estudi relatiu a la resolució completa dels PEMNA. Tot i això, a partir del coneixement generat pel nostre estudi podem introduir noves propietats de l'estimació de magnituds no abastables.

Per començar, una primera característica és que *en funció de la magnitud no abastable a estudiar, poden no existir mètodes per validar numèricament la solució.* Un exemple clar és el del problema del recompte de gent a una manifestació, en la que els organismes oficials i les empreses encarregades dels recomptes no aconsegueixen establir criteris que permetin estimacions equiparables. En altres casos, la solució podria no estar ben definida, com en el problema F, ja que diferents formes de distribuir les monedes a la caixa forta poden portar a diferents solucions en funció de l'espai no utilitzat.

Una segona característica és que *la capacitat estimativa de magnituds no abastables no es posseeix d'entrada i s'adquireix a posteriori, ja que és fruit de l'ús de diversos coneixements previs.* Aquesta característica apareix a partir d'una relectura de les propietats de l'estimació de magnituds que recull Callís [19]. En el cas de les magnituds no abastables són necessaris diversos coneixements i processos matemàtics que han de ser apresos per tal de poder construir les propostes de resolució que hem estudiat. En qualsevol cas són necessàries tècniques de recollida de dades elaborades i conceptes matemàtics no trivials per aconseguir les estimacions desitjades encara que l'estimador sigui un estimador expert.

A continuació ens centrarem en la discussió de la definició que hem ofert de problema d'estimació de magnituds no abastables que recordem aquí:

> Un Problema d'Estimació de Magnituds No Abastables és una tasca plantejada a un alumne en la que, sense un procediment, algorisme o esquema previ que porti a la seva resolució, ha d'estimar el valor d'una magnitud no abastable amb l'objectiu de crear significat per a aquesta magnitud.

Recordem la definició que ofereix Ärlebäck [4] de problema de Fermi:

> Open, non-standard problems requiring the students to make assumptions about the problem situation and estimate relevant quantities before engaging in, often, simple calculations (pàg. 331).

Com hem pogut observar, les estratègies que resoldrien els problemes estudiats es centren en l'estimació de diferents factors clau del problema i comporten càlculs relativament senzills, com ara el càlcul de proporcions o mitjanes. Per aquest motiu, podem considerar els problemes d'estimació de magnituds no abastables com un subconjunt dels problemes de Fermi.

Efthimiou i Llewellyn [47] afirmen que els problemes de Fermi fomenten el raonament crític en els alumnes. D'aquesta forma considerem que alguns dels problemes que hem estudiat, així com d'altres que es troben al recull de problemes que hem elaborat, poden ajudar als alumnes a prendre consciència de diferents realitats del seu entorn i potenciar el seu esperit crític.

Volem destacar que no hi ha gaire estudis de problemes de Fermi i que en el nostre treball hem utilitzat una quantitat equivalent a la de tots els altres estudis realitzats junts. D'aquesta forma, hem aconseguit una caracterització molt detallada d'un tipus de problemes que encara no han estat massa estudiats en l'àmbit de la Didàctica de les Matemàtiques, fet que constitueix una de les aportacions d'aquest treball.

Malgrat tot, el nostre és un treball limitat en el temps i acotat en els seus propòsits. Amb la qual cosa es poden proposar diverses vies d'actuació futura que poden continuar i millorar aquest treball.

El primer punt en el que es pot completar la caracterització d'estratègies que hem presentat és en la tria de problemes, ja que si s'utilitzessin problemes essencialment diferents els arbres de categories creixerien i podrien ser més complets. En el nostre estudi ens hem centrat en sis PEMNA en els que es pretén l'estimació d'una magnitud discreta. Una opció interessant és la d'incloure en l'estudi altres tipus de problemes en els que intervinguin magnituds contínues, així com altres conceptes matemàtics. Al mateix temps, els problemes amb component social poden presentar una bona oportunitat per treballar conceptes socialment rellevants a l'aula de matemàtiques.

Una altra opció interessant és la d'ampliar el rang d'edat dels alumnes que han de treballar amb el problemes, ja que aquest tipus de problemes es poden adaptar a diferents nivells de complexitat (Kittel i Marxer [84]) tot i que es poden elaborar llistes de problemes adients a cada moment educatiu. Peter-Koop [126, 127, 128] ha proposat problemes més senzills a alumnes de Primària i l'abast de les magnituds no abastables ens permet pensar que els estudiants universitaris en podrien treure profit. Per exemple, en el disseny d'un edifici públic en el que ha de conviure una gran quantitat de gent, l'estructura ha de ser calculada per suportar el pes del mobiliari i la gent que l'ocuparà. Una aproximació del valor d'aquest càlcul es pot portar a terme com una estimació i és de vital importància per a un arquitecte.

Una de les limitacions del nostre estudi és el fet que, per poder acotar el procés d'anàlisi, vam decidir centrar-nos en les propostes de resolució dels alumnes i no en tot el procés de resolució. Les experiències realitzades a l'aula evidencien que es poden obtenir nous resultats sobre la forma en la que els alumnes es replantegen la seva actuació. Al mateix temps es podria observar la forma en la que l'alumne arriba a una resposta numèrica de la seva estimació i la possible millora de sentit numèric assolit per l'alumne treballant amb aquests problemes.

Per finalitzar aquest capítol, detallarem algunes de les implicacions didàctiques que es poden desprendre del nostre estudi. Per començar, hem elaborat una àmplia llista de PEMNA que es poden utilitzar a l'aula. Aquesta llista es troba a l'apèndix B i és una altra de les aportacions del nostre treball. Considerem que aquests problemes poden permetre als alumnes treballar amb aspectes que no s'acostumen a treballar a les aules, com poden ser la resolució de problemes amb context real o l'estimació, i que poden permetre la introducció dels processos de modelització.

Les estratègies detectades ens permeten observar el tipus de mecanismes que pretenen utilitzar els alumnes i poden representar un patró per al professor que el permeti conduir l'actuació dels alumnes cap als processos més adequats. Schoenfeld [146] va estudiar la resolució per part dels alumnes del problema de comptar el nombre de cèl·lules que formen un cos humà i va observar que els resolutors utilitzen estratègies més factibles quan treballen en parelles que quan ho fan de forma individual. Així els PEMNA es podrien treballar en grup per aconseguir resultats més enriquidors per als alumnes.

En el moment que els alumnes es plantegin la resolució completa de PEMNA, l'ús de problemes contextualitzats pot permetre una anàlisi crítica de les situacions proposades i pot incrementar la valoració que l'alumne prengui de les Matemàtiques i dels seus propis recursos. Per aquest motiu considerem els PEMNA una eina útil i versàtil, que podria ser incorporada a la nostra pràctica educativa habitual.

Capítol 7

Una experiència: Els PEMNA a l'aula

Mentre desenvolupàvem la recerca que hem presentat en aquest document, no ens vam poder estar de realitzar diverses experiències relacionades amb els PEMNA en els darrers anys. Algunes han estat pensades per observar diferents reaccions per part dels alumnes o per obtenir idees o material per aquesta tesi. D'altres s'han plantejat com una proposta complementària a les activitats desenvolupades a classe amb els alumnes. Aquestes experiències van des de la inclusió d'algun problema o qüestió en el desenvolupament normal d'una unitat didàctica fins a un projecte en el que els alumnes han de resoldre un seguit de PEMNAs que presenten diversos punts en comú.

En aquest capítol farem una ràpida exposició d'un d'aquests projectes, en el que alumnes de 3r d'ESO van resoldre diversos PEMNA, relacionats amb el recompte de persones o objectes en diferents espais. Com que aquest projecte es va portar a terme com una activitat d'aula amb caràcter formador i avaluatiu, aquesta experiència no té el format necessari per presentar-se com una recollida de dades formal per a un treball de recerca. Per aquest motiu no ha estat inclosa en el cos de l'estudi presentat en aquesta tesi. Tot i així, considerem que, per la seva riquesa, mereix ser explicada.

A un grup de 21 alumnes de 3r d'ESO d'un centre de secundària concertat se'ls va demanar inicialment que resolguessin el problema A del nostre estudi, amb el següent enunciat:

Quantes persones caben al pati del centre si hi volem fer un concert?

Per començar, es va demanar als alumnes que fessin una proposta de resolució individual. Posteriorment, els alumnes es van organitzar en 6 grups de treball (formats per 3 o 4 persones) i cadascun d'aquests grups va haver de consensuar una proposta de resolució, a partir de les propostes individuals elaborades i detallant les actuacions i materials necessaris. A la següent sessió, els alumnes van sortir al pati a obtenir les dades necessàries i quan les van aconseguir van tornar a la classe per començar a realitzar els càlculs que havien especificat en la seva proposta. La part inicial de la tercera sessió es va utilitzar per redactar un petit informe amb les dades recollides, el procés de resolució definitiu i una estimació del valor demanat com a solució del problema. Amb els resultats de cada grup es va fer una posada en comú, comparant les metodologies emprades i els resultats obtinguts. En aquest punt es va finalitzar la primera part del projecte[1].

La segona part del projecte va consistir en proposar als alumnes diversos problemes *semblants però diferents*, que tractessin sobre l'estimació del nombre de persones o objectes que es poden encabir en una determina superfície. Els problemes proposats van ser els següents:

- Quanta gent cap al Palau Sant Jordi en un concert?
- Quanta gent cap a la plaça de l'ajuntament si algú hi convoca una manifestació?
- Quanta gent cap a la Plaça de Catalunya a Barcelona si algú hi fa una manifestació?
- Quants arbres hi ha a Central Park? (un parc situat a Manhatan, New York)

En aquest cas, era clar que els alumnes no es desplaçarien per obtenir les dades necessàries i se'ls va proposar que fessin ús de les noves tecnologies. La primera sessió d'aquesta segona part del projecte es va dedicar a que els mateixos grups de treball fessin propostes de resolució per estimar cadascuna de les quantitats demanades i es repartissin la responsabilitat d'aconseguir les dades necessàries com a deures per a la següent sessió. Amb bona part d'aquestes dades recollides, els alumnes van realitzar els càlculs necessaris per resoldre els problemes i van elaborar un petit informe per a cadascun dels problemes. La tercera sessió d'aquesta segona part del projecte es va dedicar a acabar els informes i a fer una darrera posada en comú.

Durant tot aquest procés vam poder observar diversos fets relacionats amb la nostra recerca sobre estratègies de resolució de PEMNAs i d'altres que no hem tractat en el nostre estudi.

[1]Tres sessions són una setmana de classes per a la matèria de matemàtiques a 3r d'ESO.

Per començar, si comparem les propostes individuals per al primer problema amb la proposta definitiva del grup que formen aquests alumnes vam poder observar que, com a norma general, la proposta del grup adoptava com a base la proposta d'un dels membres del grup i es negociaven els detalls. Els alumnes van discutir quina de les seves propostes era més adequada i van intentar millorar-la amb idees de tots els integrants del grup. D'aquesta forma, les estratègies resultants permetien aconseguir estimacions raonables per al nombre de persones que cabien al pati.

Les estratègies proposades pels grups es van centrar en tres tipus diferents: el punt de referència (a partir de la superfície que ocupa una persona), la densitat de població i la distribució dels alumnes en una quadrícula. Aquesta darrera opció és la que va proporcionar un mètode de resolució més senzill, ja que no requereix cap mena d'eina de mesura, només cal que els alumnes es posin un al costat de l'altre i comptin les vegades que caben en cadascuna de les dues direccions que defineixen el pla. Per a les altres dues formes de procedir és necessari mesurar la longitud i amplada del pati així com fer mesures d'1 m^2 o de la superfície que ocupen un petit grup de persones.

Els procediments utilitzats pels alumnes per obtenir les dades i els càlculs posteriors van ser assessorats pel professor i es poden considerar adequats als objectius de l'activitat. Amb això, els resultats obtinguts per a la quantitat de persones que caben al pati són els que mostrem a la següent taula:

	Estratègia	Superfície	Resultat
Grup 1	P. referència	353 m^2	1179
Grup 2	Densitat	348 m^2	2175
Grup 3	Quadrícula	—	2132
Grup 4	Densitat	360 m^2	2160
Grup 5	Densitat	365 m^2	1462
Grup 6	Densitat	275 m^2	1651

A partir de la discussió efectuada amb els alumnes, es va donar per adequada una superfície per al pati d'uns 350 m^2, que es pot considerar adequada per a un pati de 28 metres de llarg i 12 metres d'ample segons el plànol a escala del centre, amb el que obtindríem una superfície de 336 m^2. Les mesures de densitat o de superfície que ocupa una persona donen un valor aproximat de 6 persones per m^2. Cal destacar que els alumnes acaben decidint que aquestes mesures estan fetes amb adolescents i que persones d'edats diferents poden tenir altres necessitats d'espai, encara que a un concert la densitat de població acostuma a ser molt alta. Amb tot això, els alumnes van acordar un valor de 5 persones per m^2, amb el que s'estima de comú acord que al pati del centre hi caben $350 \cdot 5 = 1\,750$ persones, sense considerar aspectes de seguretat, que depenen d'altres factors no estudiats.

Pel que fa als problemes de la segona part del projecte, podem observar que a partir d'enfocar l'atenció en aspectes com la densitat de població i la superfície que ocupa una persona en un concert o en una manifestació, els alumnes es van centrar en resoldre els problemes proposats en la segona part del projecte. Van proposar utilitzar els serveis Google Maps i Google Earth, que els van permetre realitzar les mesures de superfície necessàries. Per a cadascun dels problemes, els alumnes van discutir aspectes com l'espai necessari per fruir d'un concert o caminar a una manifestació, així com l'espai vital que requereix un arbre, ja sigui gran o petit.

A partir de les diferents estratègies utilitzades es van arribar a diferents resultats diversos, però que tenien els mateixos ordres de magnitud, encara que les mesures preses i algunes consideracions rellevants no van ser les mateixes per tots els grups.

També es va poder observar que els alumnes realitzen consideracions diferents per a cadascun del problemes. Per calcular la capacitat del Palau St. Jordi van tenir en compte que en aquest recinte hi ha una part del públic que està asseguda i una altra que està dreta. Per calcular el nombre d'arbres que hi ha a Central Park van fer una estimació del percentatge de superfície del parc que té bosc i van estimar la densitat de població dels arbres a partir de paràmetres diferents als utilitzats als altres problemes.

Durant el període de temps en el que els alumnes van estar treballant en aquest projecte, alguns van trobar diverses fonts en les que es donaven resultats a les preguntes plantejades. En la darrera sessió es van comparar els resultats obtinguts pels diferents grups entre ells amb d'altres aconseguits de diverses fonts a Internet amb valors molt diversos.

Un exemple interessant va ser el de la quantitat de gent que es pot encabir al Palau St. Jordi. Els alumnes van trobar dades sobre diferents events en els que es facilitava el nombre màxim de persones assistents, aquests valors oscil·laven entre 15.000 i 24.000, però el valor que més va sobtar als alumnes va ser la notícia que a un acte del PSC es van encabir més de 40.000 persones[2] amb la controvèrsia generada entre els diferents partits

[2]http://www.libertaddigital.com/nacional/el-aforo-del-palau-sant-jordi-es-de-18000-personas-el-psoe-

polítics.

A partir d'aquesta discussió es va obrir un debat i es va introduir un nou tema a tenir en compte. El debat es va centrar en el següent text:

> El 10 de juliol de 2010, els carrers del centre de Barcelona es van omplir de gent per participar en una manifestació multitudinària. L'entitat organitzadora, Òmnium Cultural, va afirmar que van assistir-hi 1.500.000 de persones[3], la Guàrdia Urbana de Barcelona va donar una xifra de 1.100.000 i l'empresa Lynce, especialitzada en recompte de persones, va donar una xifra de 62.000[4].

A partir de la seva experiència els alumnes van afirmar que diferents interessos podien influir en la publicació d'aquestes dades i van considerar que no seria molt complicat fer una estimació en la mateixa direcció de les que havien realitzat anteriorment. Un alumne es va encarregar d'utilitzar el servei Google Earth en un ordinador connectat a un projector i va fer els càlculs de les mides corresponents a la longitud i amplada dels carrers en els que es va convocar la manifestació, es van fer els càlculs de superfície i es va considerar que s'hauria d'incrementar en un 50%, per ajustar-se a la realitat (alguns alumnes afirmaven que els carrers propers també tenien una gran quantitat de manifestants) i es va assignar un valor màxim de 4 persones per metre quadrat. D'aquesta forma es va obtenir un valor màxim de 612.000 persones. De la mateixa forma, les 62.000 que va estimar Lynce, en repartir-se entre els 152.000 m^2 de superfície estimats donaven una densitat massa petita, adequada per al moment en el que aquesta empresa va realitzar les seves mesures (al voltant de les 21h), però no per al moment en el que es va iniciar la manifestació (18h). Es va finalitzar l'activitat amb aquestes reflexions.

Aquesta és la descripció d'una activitat d'aula amb uns alumnes de 3r d'ESO. Hi intervenen conceptes matemàtics potents que requereixen eines de càlcul senzilles, permetent fomentar l'esperit crític de l'alumnat. No sempre és fàcil aconseguir activitats que engresquin als alumnes i els permetin fer una passa més enllà en el seu coneixement no curricular. Aquesta vegada cap alumne em va preguntar per a què servien aquests problemes.

dice-que-fueron-40000-1276325246/

[3]La Vanguàrdia, 11 de juliol de 2010, pàg. 1.

[4]www.lynce.es

Capítol 8

Epíleg

En la realització d'aquesta tesi hi han col·laborat 384 alumnes, que han generat 771 qüestionaris que han estat utilitzats d'alguna forma en algun dels estudis presentats en aquest document. El nostre document d'NVivo conté 1831 segments codificats i la carpeta que conté els articles utilitzats per crear la bibliografia conté 371 articles, sense comptar els 15 que hem utilitzat en format paper. Aquest document conté unes 59.000 paraules.

Aquests són els grans números d'aquest treball i, sincerament, esperem que aquest estudi, amb les seves virtuts i defectes, afegeixi un granet de sorra al coneixement i millora de l'ensenyament de les matemàtiques. Així de simple, així de complicat.

Apèndix A

Qüestionaris utilitzats al primer estudi d'estratègies

A les següents pàgines es poden trobar els qüestionaris per als dos problemes utilitzats en el primer estudi d'estratègies de PEMNA.

Estimació de magnituds reals a gran escala

No gireu aquest full fins que us avisin!!!

Curs:...............

Aquest qüestionari està dirigit a estudiar les estratègies que podeu utilitzar per estimar quantitats que poden ser realment molt grans, però que es troben al nostre voltant. No pateixis, no té cap intenció avaluativa ;)

Situació: Ara comprarem molts cotxes

Sant Joan Despí és una ciutat moderna on hi viu molta gent. Els santjoanencs tenen unes necessitats de transport considerables. De cotxes n'hi ha un munt, i mantenir aquest parc mòbil ha de ser costós, a part que contaminen més del que voldríem.

Si ara volguéssim comprar a **tots** els veïns del poble els seus cotxes (**tots**, els vells i els nous) per tal que ja no en quedés cap al poble, quants diners ens costaria?

Descriu els passos que faries servir per calcular aquesta quantitat. No cal que ho calculis, només que expliquis l'estratègia a seguir.

Indica quines dificultats has trobat per respondre a la pregunta anterior. Aquí tens una llista, pots marcar les que creguis i comentar-les.

- No entenc la situació que ha estat plantejada.

- No sé com fer-ho per saber quants cotxes hi ha a St. Joan Despí.

- No sé com saber el tipus de cotxes que tenen els santjoanencs.

- No sé com baixa el valor d'un cotxe quan es fa vell.

- No sé si hi ha registres de totes les dades que necessito.

- Altres:

Creus que si provéssim amb la teva proposta es podria trobar un valor aproximat acceptable?

Hi ha algun punt en el t'hagis encallat?

Indica quina informació que no tens et seria útil per fer el càlcul.

- El nombre de cotxes per família.
- El nombre de cotxe venuts cada any.
- El valor mitjà dels cotxes venuts.
- Quanta gent viu a St. Joan Despí.

  Altres:

Gràcies per la teva col·laboració!!!

Estimació de magnituds reals a gran escala

No gireu aquest full fins que us avisin!!!

Curs:...............

Aquest qüestionari està dirigit a estudiar les estratègies que podeu utilitzar per estimar quantitats que poden ser realment molt grans, però que es troben al nostre voltant. No pateixis, no té cap intenció avaluativa ;)

Situació: Obrirem una granja de gallines

El Baix Llobregat és una comarca altament poblada i amb unes necessitats d'aliments considerables. He pensat crear una granja de gallines per vendre ous i fer uns calerons.

El problema el tinc en saber com de gran ha de ser aquesta granja i si em portarà molta feina. Per això et demano que pensis quantes gallines em fan falta per aconseguir els ous necessaris per tal que tota la població del Baix Llobregat en pugui menjar quan vulgui.

Descriu els passos que faries servir per calcular aquesta quantitat. No cal que ho calculis, només que expliquis l'estratègia a seguir.

Indica quines dificultats has trobat per respondre a la pregunta anterior. Aquí tens una llista, pots marcar les que creguis i comentar-les.

- No entenc la situació que ha estat plantejada.
- No sé com fer-ho per saber quants ous menja una família a la setmana.
- No sé com saber els ous que posa una gallina al dia.
- No sé si hi ha registres de totes les dades que necessito.
- Altres:

Creus que si provéssim amb la teva proposta es podria trobar un valor aproximat acceptable?

Hi ha algun punt en el t'hagis encallat?

Indica quina informació que no tens et seria útil per fer el càlcul.

- Els ous que es venen a tots els supermercats en un any.
- La mida dels ous que compra la gent.
- Quanta gent viu al Baix Llobregat.
- Quants ous posen a la truita a una casa qualsevol.

  Altres:

Gràcies per la teva col·laboració!!!

Apèndix B

Primera llista de problemes

A les següents pàgines es troba la llista completa de PEMNA elaborada per al nostre estudi.

Problema 1: Comprarem molts cotxes

Sant Joan Despí és una ciutat moderna on hi viu molta gent. Els santjoanencs tenen unes necessitats de transport considerables. De cotxes n'hi ha un munt, i mantenir aquest parc mòbil ha de ser costós, a part que contaminen més del que voldríem.

Si ara volguéssim comprar a **tots** els veïns del poble els seus cotxes (**tots**, els vells i els nous) per tal que ja no en quedés cap al poble, quants diners ens costaria?

Problema 2: L'aigua que es gasta a casa

Ja fa temps que no plou massa i uns quants anys que les sequeres amenacen amb restriccions d'aigua. Potser seria bo intentar estalviar-ne tanta com puguem.

Per això us pregunto, quanta aigua gasteu cada mes a casa vostra?

Problema 3: El valor dels videojocs

Avui vivim en una societat d'alt consum. Un dels mercats que ofereix més beneficis (i més diversió) és el dels videojocs. Això contrasta amb aquella gent d'altres parts del planeta que gairebé no té recursos.

Per això us pregunto, quantes famílies podrien viure un any sencer amb els diners que gasten els alumnes del centre en consoles i videojocs?

Problema 4: Obrirem una granja de gallines

El Baix Llobregat és una comarca altament poblada i amb unes necessitats d'aliments considerables. He pensat crear una granja de gallines per vendre ous i fer uns calerons.

El problema el tinc en saber com de gran ha de ser aquesta granja i si em portarà molta feina. Per això et demano que pensis quantes gallines em fan falta per aconseguir els ous necessaris per tal que tota la població del Baix Llobregat en pugui menjar quan vulgui.

Problema 5: Anem al cinema

L'entreteniment és una font d'ingressos considerable perquè la gent sempre està disposada a gastar-se uns dinerons en oci. En un territori la província de Barcelona, segur que hi ha molta gent que va al cinema a veure alguna pel·lícula.

Per això us pregunto, quantes entrades de cinema es venen en un any a la província de Barcelona?

Problema 6: Organitzem un concert

Pel festival de final de curs, una bona opció seria portar a un grup ben conegut i organitzar un concert. Podríem aprofitar la pista del pati per encabir a tothom que vulgui venir.

Per això us pregunto, quantes entrades podríem vendre si omplíssim el pati per fer un concert?

Problema 7: Gent a una manifestació

Quan hi ha una manifestació és important saber la gent que hi ha anat per valorar la força que tindrà la protesta. Moltes vegades, la policia i l'organització no es posen d'acord.

Per això us pregunto, quanta gent hi ha a una manifestació?

Problema 8: Escombrem el poble

Penseu en la nit de Sant Joan: fogueres, petards i música fins a altes hores de la matinada. Evidentment, el poble s'embruta i al matí següent cal que estigui ben net per poder continuar amb les activitats usuals.

Per això us pregunto, quanta gent és necessària per netejar el poble en dues hores?

Problema 9: Arbres a un bosc

Els boscos fan de pulmons per a les nostres ciutats i cal que en tinguem cura. Però si estan massa poblats d'arbres podria ser que un incendi fos incontrolable, per això és important tenir-los nets de brossa i amb el nombre adequat d'arbres.

Per això us pregunto, quants arbres hi ha a un bosc?

Problema 10: Fem un institut

La construcció d'un institut no és precisament una obra petita i requereix molts recursos i hores de feina.

Per fer-nos una idea de tot plegat us pregunto, quantes totxanes són necessàries per construir un centre com aquest?

Problema 11: Fulles que cauen a la tardor a un bosc

Quan acaba l'estiu, molts arbres perden les fulles i es preparen per l'hivern. Això genera una gran quantitat de fulles al terra.

Per fer-nos una idea de tot plegat us pregunto, quantes fulles cauen durant la tardor a un bosc?

Problema 12: El tros de món que em toca

El món és molt gran i té una gran superfície de terra, però cada dia està més poblat i vivim més apretadets.

Per això us pregunto, quina superfície ens tocaria a cadascun si ens repartíssim tota la terra del món?

Problema 13: Una ciutat enorme

A les ciutats hi viu molta gent, i bastant apretats. Per sort, encara hi ha zones properes en les que un pot passejar pels camps o pels carrers de pobles més tranquils.

Per això us pregunto, quanta gent viuria a Catalunya si la ciutat de Barcelona creixés fins a omplir tot el territori?

Problema 14: Quant ocupa un byte?

Tots sabem que un CD és molt petit i que hi podem posar molta informació, des de fotos a música passant per programes i d'altres coses.

Per això us pregunto, quina superfície ocupa un byte a un CD?

Problema 15: Gent a la carretera

A les notícies del matí sempre parlen de retencions a les carreteres, sobretot per entrar a Barcelona.

Per fer-nos una idea de tot plegat us pregunto, quants cotxes entren a Barcelona cada matí?

Problema 16: Trànsit a la plaça del poble

La vida als pobles i les ciutats es concentra en determinats espais que tothom utilitza: el mercat, les escoles, l'estació de tren... Evidentment, a una ciutat hi ha llocs més concorreguts que d'altres.

Per això us pregunto, quanta gent passa en un dia per la plaça del poble?

Problema 17: Cotxes en un tram d'autopista

Per anar a la platja podem agafar el tren o altres transports públics si vivim a prop de la costa, però si vivim més lluny podem agafar el cotxe. Al final, molta gent acaba agafant l'autopista per anar el dissabte a la platja.

Per això us pregunto, quants cotxes circulen un dissabte al matí d'estiu a un tram d'autopista?

Problema 18: Cotxes que passen per davant de l'institut

Si ens posem a la porta de l'institut veurem que van passant cotxes: ara un, ara una altre. . . Al final del dia acaben passant molts cotxes.

Per això us pregunto, quants cotxes passen cada dia per davant de l'institut?

Problema 19: Gent que agafa el bus a la parada

Els transports públics urbans permeten la comunicació entre ciutats i dins d'aquestes mateixes. Tot i així, no deu ser fàcil decidir (amb criteri) quins són els recorreguts que han de fer els autobusos ni triar les freqüències de pas per cada parada.

Per això us pregunto, quantes persones agafen el bus a la parada del costat del centre en un dia?

Problema 20: SMS

Avui en dia, els telèfons mòbils serveixen per una barbaritat de coses (fotos, música, vídeos, jocs. . .) però la gent encara els fa servir per comunicar-se, trucar i enviar missatges. Nosaltres no hi pensem, però hi ha una gran xarxa de comunicacions per permetre aquests serveis.

Per això us pregunto, quant missatges SMS s'envien en un dia a Catalunya?

Problema 21: Spam

El correu electrònic és una de les formes de comunicació que més s'utilitza en els darrers temps, pots contestar quan vulguis i tot queda per escrit. A més, enviar un e-mail és completament gratuït. Això fa que la gent ho aprofiti per enviar-te publicitat, i al final acabes amb la bústia plena de correu no desitjat, el que s'anomena Spam.

Per això us pregunto, quants correus electrònics no desitjats reben a l'any entre tots els alumnes del centre?

Problema 22: L'aigua del lavabo

L'aigua és un bé escàs i cal aprofitar-la com cal. Si hi penseu, veureu que la fem servir per una quantitat ingent de coses i, al final, la proporció d'aigua que gastem per beure no és gran cosa. Una de les formes en la que gastem aigua més sovint és en l'ús de la cisterna del lavabo. Potser no és bona idea deixar de fer-ne ús però podria ser interessant aprofitar l'aigua sobrant d'altres llocs en les que l'aigua no s'embruti massa (aigües grises).

Per això us pregunto, quanta aigua es gasta a una casa en un mes utilitzant la cisterna del lavabo?

Problema 23: Escombraries

Els serveis de recollida d'escombraries de les nostres ciutats tenen molta feina per recollir, classificar i reciclar totes les escombraries que generem. Hi treballa molta gent i s'hi dediquen molts recursos.

Per això us pregunto, quants contenidors s'omplen al poble en un dia?

Problema 24: Goteres, gotes i galledes

Els problemes mai vénen sols. L'altre dia em va aparèixer una gotera al menjador, amb la mala sort que l'aigua cau a sobre del parquet i se'm farà malbé. La solució és senzilla, arreglar la gotera. Mentrestant hi tinc una galleda, però s'omple sovint i l'haig d'anar buidant.

Per això pregunto, quantes gotes d'aigua omplen una galleda?

Problema 25: Paraules en un llibre

Escriure un llibre és una tasca dura. És alguna cosa més que posar paraules una darrera de l'altra. Això sí, al final un llibre sempre en té moltes.

Per fer-nos una idea, quantes paraules té un llibre?

Problema 26: Nombre de cabells al cap

Cada dia ens pentinem i cuidem els nostres cabells, perquè ens aporten personalitat i perquè són nostres. Això sí, no acostumem a pensar quants en tenim.

Per això pregunto, quants cabells tenim al cap?

Problema 27: Alumnes que passaran per l'institut en 100 anys

Un institut és un lloc per on acaben passant totes les generacions en la seva etapa educativa. No ho sembla però els nostres avis un dia van ser joves i nosaltres ens acabarem fent vells.

Per fer-nos una idea, quants alumnes passaran per l'institut en els propers 100 anys?

Problema 28: Gots per omplir una piscina

Normalment, les reserves d'aigua baixen a l'estiu, perquè plou menys i el consum no disminueix. Un ús habitual de l'aigua a l'estiu és el d'omplir la piscina, que si és privada, utilitza molts litres i només en frueixen uns quants.

Per això pregunto, quants gots d'aigua omplen una piscina?

Problema 29: Temps per copiar un llibre

Quan no hi havia fotocopiadores, ni ordinadors ni impremtes ni res per l'estil, hi havia uns senyors que es dedicaven a copiar a mà els llibres.

Per fer-nos una idea, quant temps necessitaríem per copiar un llibre a mà?

Problema 30: Temps per beure's l'estany de Banyoles

L'estany de Banyoles és el llac natural més gran de Catalunya. Si fos la nostra darrera reserva d'aigua donaria per beure força temps, però tot depèn de quanta gent n'hagi d'obtenir aigua.

Per això us pregunto, quant temps tardaríem la gent de la classe en veure'ns tota l'aigua de l'estany de Banyoles?

Problema 31: Temps per anar a Pekín en bicicleta

Pekín és molt lluny i anar-hi caminant potser és passar-se, però potser hi podríem anar en bicicleta.

Per això pregunto, quant temps tardaríem en anar a Pekín en bicicleta?

Problema 32: Camions per buidar el Montseny

El Montseny és una muntanya força alta que està a prop de Barcelona. Ja sabeu que per construir un edifici ens calen diverses matèries primes i la sorra n'és una, per això es fan canteres a algunes muntanyes.

Per això us pregunto, quants camions de sorra són necessaris per buidar el Montseny?

Problema 33: El que ocupa una caixa forta

A les pel·lícules sempre ensenyen unes caixes fortes enormes plenes de bitllets i monedes. Suposo que la majoria dels diners els guarden en forma de bitllets, però podria ser que també acumulessin moltes monedes, i podrien tenir problemes d'espai.

Per això pregunto, quantes monedes d'euro caben en un metre cúbic?

Problema 34: El volum d'un milió

Un milió d'euros són molts diners, i crec que no em cabrien a la guardiola de casa, però no n'estic segur.

Per això pregunto, quin volum ocupa una milió d'euros en monedes d'un euro?

Problema 35: Pintar l'Equador amb llapis

L'Equador és la línia imaginària que divideix la Terra en els dos hemisferis (nord i sud). Com que és una línia imaginària no l'ha pintat mai ningú, però podria ser una tasca dura i feixuga.

Per això us pregunto, quants llapis són necessaris per pintar l'Equador?

Problema 36: Una fotografia per cap

A la Terra hi viu molta gent. Tanta que és una mica difícil fer-se'n una idea clara i podríem buscar alguna forma de representar aquesta quantitat. Potser si posem les fotos de la gent de la classe en una pila no serà gaire alta, però podem pensar de fer una pila amb les fotos de tota la gent del món.

Per això pregunto, quina alçada tindria una pila amb una fotografia de cada persona que hi ha al món?

Apèndix C

Qüestionaris utilitzats en l'estudi

A les següents pàgines es troben els qüestionaris utilitzats com a instrument de recollida de dades en el nostre estudi. Contenen l'enunciat de cadascun dels sis problemes utilitzats tal i com s'han presentat als alumnes.

No gireu aquest full fins que us avisin!!!

Aquest qüestionari està dirigit a estudiar les estratègies que utilitzeu per estimar quantitats que poden ser realment molt grans, però que es troben al nostre voltant. No patiu, no té cap intenció avaluativa ;)

Estimació de magnituds reals a gran escala

Nom i cognoms:................................ Curs:...............

Situació: Organitzem un concert

Pel festival de final de curs, una bona opció seria portar un grup de música ben conegut i organitzar un concert. Podríem aprofitar la pista del pati per encabir a tothom que vulgui venir.

En aquesta situació, una bona pregunta seria:
quantes entrades podríem vendre si omplíssim el pati per fer un concert?

Descriu **els passos que seguiries** per calcular de forma aproximada aquesta quantitat amb **els recursos dels que puguis disposar**. No cal que donis un resultat, només que expliquis com ho faries.

Indica quines dificultats has trobat per respondre a la pregunta anterior. Aquí tens una llista, pots marcar les que creguis i comentar-les.

□ No entenc la situació que ha estat plantejada

□ No sé com fer-ho per saber les mides del pati

□ No sé com delimitar la zona en la que es pot situar la gent

□ No sé com fer-ho per saber quanta gent es pot encabir en un espai determinat

□ Altres:

. . . .
. . . .
. . . .

Creus que si provéssim la teva proposta es podria trobar un valor aproximat acceptable? Per què?

. . . .
. . . .
. . . .
. . . .

Creus que hi ha algun lloc on puguis preguntar i on facilitin informació per respondre a aquesta pregunta? Quin?

. . . .
. . . .
. . . .
. . . .

Vols afegir-hi alguna cosa?

. . . .
. . . .

Gràcies per la teva col·laboració!!!

No gireu aquest full fins que us avisin!!!

Aquest qüestionari està dirigit a estudiar les estratègies que utilitzeu per estimar quantitats que poden ser realment molt grans, però que es troben al nostre voltant. No patiu, no té cap intenció avaluativa ;)

Estimació de magnituds reals a gran escala

Nom i cognoms:. . . . . Curs:. . . . .

Situació: Gent en una manifestació

Quan hi ha una manifestació és important saber la gent que hi ha anat per valorar la força que tindrà la protesta. Moltes vegades, la policia i l'organització no es posen d'acord.

En aquesta situació, una bona pregunta és:
quanta gent hi ha en una manifestació?

Descriu **els passos que seguiries** per calcular de forma aproximada aquesta quantitat amb **els recursos dels que puguis disposar**. No cal que donis un resultat, només que expliquis com ho faries.

Indica quines dificultats has trobat per respondre a la pregunta anterior. Aquí tens una llista, pots marcar les que creguis i comentar-les.

☐ No entenc la situació que ha estat plantejada.

☐ No sé com fer-ho per saber quina superfície ocupa la gent en una manifestació

☐ No sé com fer-ho per saber quanta gent es pot encabir en un espai determinat

☐ Altres:

. . . .
. . . .
. . . .
. . . .

Creus que si provéssim la teva proposta es podria trobar un valor aproximat acceptable? Per què?

. . . .
. . . .
. . . .
. . . .

Creus que hi ha algun lloc on puguis preguntar i on facilitin informació per respondre a aquesta pregunta? Quin?

. . . .
. . . .
. . . .
. . . .

Vols afegir-hi alguna cosa?

. . . .
. . . .
. . . .

Gràcies per la teva col·laboració!!!

No gireu aquest full fins que us avisin!!!

Aquest qüestionari està dirigit a estudiar les estratègies que utilitzeu per estimar quantitats que poden ser realment molt grans, però que es troben al nostre voltant. No patiu, no té cap intenció avaluativa ;)

Estimació de magnituds reals a gran escala

Nom i cognoms:. . . . . Curs:. . . . .

Situació: SMS

Avui en dia, els telèfons mòbils tenen moltíssimes aplicacions (fotos, música, vídeos, jocs. . .) però la gent encara els fa servir per comunicar-se, trucar i enviar missatges. Nosaltres no hi pensem, però hi ha una gran xarxa de comunicacions per permetre aquests serveis.

En aquesta situació, una bona pregunta és:
quants missatges SMS enviem en un dia entre tots els catalans?

Descriu **els passos que seguiries** per calcular de forma aproximada aquesta quantitat amb **els recursos dels que puguis disposar**. No cal que donis un resultat, només que expliquis com ho faries.

Indica quines dificultats has trobat per respondre a la pregunta anterior. Aquí tens una llista, pots marcar les que creguis i comentar-les.

☐ No entenc la situació que ha estat plantejada.

☐ No sé com fer-ho per calcular quants SMS envia una persona

☐ No sé com saber quanta gent té mòbil

☐ Altres:

. . . .

. . . .

. . . .

. . . .

Creus que si provéssim la teva proposta es podria trobar un valor aproximat acceptable? Per què?

. . . .

. . . .

. . . .

. . . .

Creus que hi ha algun lloc on puguis preguntar i on facilitin informació per respondre a aquesta pregunta? Quin?

. . . .

. . . .

. . . .

. . . .

Vols afegir-hi alguna cosa?

. . . .

. . . .

. . . .

Gràcies per la teva col·laboració!!!

No gireu aquest full fins que us avisin!!!

Aquest qüestionari està dirigit a estudiar les estratègies que utilitzeu per estimar quantitats que poden ser realment molt grans, però que es troben al nostre voltant. No patiu, no té cap intenció avaluativa ;)

Estimació de magnituds reals a gran escala

Nom i cognoms:................................ Curs:...............

Situació: Gotes, goteres i galledes

Els problemes mai vénen sols. L'altre dia va aparèixer una gotera a la sala de professors, amb la mala sort que l'aigua cau a sobre dels ordinadors. La solució és senzilla, arreglar la gotera. Mentrestant hi tenim una galleda, però no sabem si podem marxar a casa i deixar que s'ompli, ens deixaria sense poder preparar exàmens.

En aquesta situació, una bona pregunta seria:
quantes gotes d'aigua calen per omplir una galleda?

Descriu **els passos que seguiries** per calcular de forma aproximada aquesta quantitat amb **els recursos dels que puguis disposar**. No cal que donis un resultat, només que expliquis com ho faries.

Indica quines dificultats has trobat per respondre a la pregunta anterior. Aquí tens una llista, pots marcar les que creguis i comentar-les.

□ No entenc la situació que ha estat plantejada.

□ No sé com fer-ho per saber les mides d'una gota

□ No sé com saber les mides d'una galleda

□ Altres:

. . . .
. . . .
. . . .
. . . .

Creus que si provéssim la teva proposta es podria trobar un valor aproximat acceptable? Per què?

. . . .
. . . .
. . . .
. . . .

Creus que hi ha algun lloc on puguis preguntar i on facilitin informació per respondre a aquesta pregunta? Quin?

. . . .
. . . .
. . . .
. . . .

Vols afegir-hi alguna cosa?

. . . .
. . . .
. . . .

Gràcies per la teva col·laboració!!!

No gireu aquest full fins que us avisin!!!

Aquest qüestionari està dirigit a estudiar les estratègies que utilitzeu per estimar quantitats que poden ser realment molt grans, però que es troben al nostre voltant. No patiu, no té cap intenció avaluativa ;)

Estimació de magnituds reals a gran escala

Nom i cognoms:.................................. Curs:...............

Situació: Gots per omplir una piscina

Normalment, les reserves d'aigua baixen a l'estiu, perquè plou menys i el consum domèstic augmenta. Un dels usos habituals de l'aigua a l'estiu és el d'omplir la piscina. Penseu que si la piscina és privada, utilitza molts litres i només l'aprofiten uns quants.

En aquesta situació, una bona pregunta és:

quants gots d'aigua omplen una piscina?

Descriu **els passos que seguiries** per calcular de forma aproximada aquesta quantitat amb **els recursos dels que puguis disposar**. No cal que donis un resultat, només que expliquis com ho faries.

Indica quines dificultats has trobat per respondre a la pregunta anterior. Aquí tens una llista, pots marcar les que creguis i comentar-les.

☐ No entenc la situació que ha estat plantejada.

☐ No sé com fer-ho per saber quanta aigua cap en una piscina

☐ No sé com saber quanta aigua cap en un got

☐ Altres:

. . . .
. . . .
. . . .
. . . .

Creus que si provéssim la teva proposta es podria trobar un valor aproximat acceptable? Per què?

. . . .
. . . .
. . . .
. . . .

Creus que hi ha algun lloc on puguis preguntar i on facilitin informació per respondre a aquesta pregunta? Quin?

. . . .
. . . .
. . . .
. . . .

Vols afegir-hi alguna cosa?

. . . .
. . . .
. . . .

Gràcies per la teva col·laboració!!!

No gireu aquest full fins que us avisin!!!

Aquest qüestionari està dirigit a estudiar les estratègies que utilitzeu per estimar quantitats que poden ser realment molt grans, però que es troben al nostre voltant. No patiu, no té cap intenció avaluativa ;)

Estimació de magnituds reals a gran escala

Nom i cognoms:. . . . . Curs:. . . . .

Situació: El que ocupa una caixa forta

A les pel·lícules d'atracaments sempre ensenyen unes caixes fortes enormes plenes de bitllets i monedes. Suposo que la majoria dels diners d'un banc es guarden en forma de bitllets, però podria ser que també acumulessin moltes monedes, i podrien tenir problemes d'espai.

En aquesta situació, una bona pregunta seria:
quantes monedes d'euro caben en un metre cúbic?

Descriu **els passos que seguiries** per calcular de forma aproximada aquesta quantitat amb **els recursos dels que puguis disposar**. No cal que donis un resultat, només que expliquis com ho faries.

Indica quines dificultats has trobat per respondre a la pregunta anterior. Aquí tens una llista, pots marcar les que creguis i comentar-les.

☐ No entenc la situació que ha estat plantejada

☐ No sé com fer-ho per saber com de gran és una moneda

☐ No sé com s'haurien de col·locar les monedes en l'espai

☐ Altres:

. . . .
. . . .
. . . .
. . . .

Creus que si provéssim la teva proposta es podria trobar un valor aproximat acceptable? Per què?

. . . .
. . . .
. . . .
. . . .

Creus que hi ha algun lloc on puguis preguntar i on facilitin informació per respondre a aquesta pregunta? Quin?

. . . .
. . . .
. . . .
. . . .

Vols afegir-hi alguna cosa?

. . . .
. . . .
. . . .

Gràcies per la teva col·laboració!!!

Apèndix D

Mostres de les dades recollides

A continuació presentem una petita mostra de les propostes de resolució recollides al nostre estudi per a cadascun dels problemes.

Mostra per al problema A

Situació: Organitzem un concert

Pel festival de final de curs, una bona opció seria portar un grup de música ben conegut i organitzar un concert. Podríem aprofitar la pista del pati per encabir a tothom que vulgui venir.

En aquesta situació, una bona pregunta seria:

quantes entrades podríem vendre si omplíssim el pati per fer un concert?

Descriu **els passos que seguiries** per calcular de forma aproximada aquesta quantitat amb **els recursos dels que puguis disposar**. No cal que donis un resultat, només que expliquis com ho faries.

Jo primer miraria quants estudiants estudien en aquell lloc i ho multiplicaria per dos (els pares) després hi sumaria els professors i treballadors del lloc hi afegiria unes 50 entrades més o menys per la gent que vingui amb els estudiants, amics, avis o gent que visqui a prop i li interesi.

Mostra per al problema A

Situació: Organitzem un concert

Pel festival de final de curs, una bona opció seria portar un grup de música ben conegut i organitzar un concert. Podríem aprofitar la pista del pati per encabir a tothom que vulgui venir.

En aquesta situació, una bona pregunta seria:

quantes entrades podríem vendre si omplíssim el pati per fer un concert?

Descriu **els passos que seguiries** per calcular de forma aproximada aquesta quantitat amb **els recursos dels que puguis disposar**. No cal que donis un resultat, només que expliquis com ho faries.

Agafaria a 10 alumnes i calcularia l'espai que ocupa cada un. Després, en faria la mitja per saber més o menys el número d'alumnes que poden caber al pati.
Calcularia la superfície total del pati i restaria els metres que ocuparia l'escenari. L'espai restant, que seria l'espai disponible per posar gent, el dividiria entre la mitja d'espai ocupat per cada alumne. Llavors, posant per exemple que hi cabessin 108 alumnes, vendria 100 entrades, ja que si no, no hi hauria espai al pati ni per respirar.

Mostra per al problema B

Situació: Gent en una manifestació

Quan hi ha una manifestació és important saber la gent que hi ha anat per valorar la força que tindrà la protesta. Moltes vegades, la policia i l'organització no es posen d'acord.

En aquesta situació, una bona pregunta és:

quanta gent hi ha en una manifestació?

Descriu **els passos que seguiries** per calcular de forma aproximada aquesta quantitat amb **els recursos dels que puguis disposar**. No cal que donis un resultat, només que expliquis com ho faries.

Primerament si disposes d'un aparell d'aquell que passes i va contant les persones, doncs ja tindria solució.

Si no disposes de cap aparell, intentaria preguntar a la organització de la manifestació.

Mostra per al problema B

Situació: Gent en una manifestació

Quan hi ha una manifestació és important saber la gent que hi ha anat per valorar la força que tindrà la protesta. Moltes vegades, la policia i l'organització no es posen d'acord.

En aquesta situació, una bona pregunta és:

quanta gent hi ha en una manifestació?

Descriu **els passos que seguiries** per calcular de forma aproximada aquesta quantitat amb **els recursos dels que puguis disposar**. No cal que donis un resultat, només que expliquis com ho faries.

1. Contaria la gent que hi ha ~~aproximadam~~ en un metre quadrat aproximadament.
2. Desde un helicòpter faria una fotografia on es pogués contemplar tot l'espai que ocupa la manifestació.
3. Esbrinaria l'escala a la qual està feta la fotografia
4. Calcularia la superfície que ocupa la manifestació.
5. Finalment multiplicaria la superfície pel nombre de persones que hi ha en la manifestació en un metre quadrat i obtindria el resultat.

Mostra per al problema C

Situació: SMS

Avui en dia, els telèfons mòbils tenen moltíssimes aplicacions (fotos, música, vídeos, jocs...) però la gent encara els fa servir per comunicar-se, trucar i enviar missatges. Nosaltres no hi pensem, però hi ha una gran xarxa de comunicacions per permetre aquests serveis.

En aquesta situació, una bona pregunta és:

quants missatges SMS enviem en un dia entre tots els catalans?

Descriu **els passos que seguiries** per calcular de forma aproximada aquesta quantitat **amb els recursos dels que puguis disposar**. No cal que donis un resultat, només que expliquis com ho faries.

Agafem una mostra, en aquest cas persones, unes 100 de diferentes edats en proporció a les que hi ha al país. ~~Podríem a~~ Després podríem anar doblant els resultats de les mostres fins arribar a 7'5 milions.

Ex:

Mostra real: 0 3 1 5 5 1 0 2 0 10

Doblada: 0 0 3 3 1 1 5 5 5 5 1 1 0 0 2 2 0 0 10 10

Mostra per al problema C

Situació: SMS

Avui en dia, els telèfons mòbils tenen moltíssimes aplicacions (fotos, música, vídeos, jocs...) però la gent encara els fa servir per comunicar-se, trucar i enviar missatges. Nosaltres no hi pensem, però hi ha una gran xarxa de comunicacions per permetre aquests serveis.

En aquesta situació, una bona pregunta és:

quants missatges SMS enviem en un dia entre tots els catalans?

Descriu **els passos que seguiries** per calcular de forma aproximada aquesta quantitat amb **els recursos dels que puguis disposar**. No cal que donis un resultat, només que expliquis com ho faries.

En primer llac realitzaria una taula de calcul en la qual s'hi trobessin els noms de 25 persones (entre amics i familiars) i tots els dies d'un més. Per tal de poder completar aquesta taula amb el nombre de SMS que envia cada persona durant cada dia de un mes, els hi donaria un full de càlcul; el qual cada dia s'haurien de comprometre a omplir amb el nombre de SMS's que envien.

Un cop hagués passat el mes; recolliria els resultats i els classificaria a la Taula de calcul principal.

I de tots el SMS's que haguessin enviat les 25 persones faria la mitgana. Un cop em sortis la mitgana la multiplicaria pel nombre d'habitants de Catalunya.

Mostra per al problema D

Situació: Gotes, goteres i galledes

Els problemes mai vénen sols. L'altre dia va aparèixer una gotera a la sala de professors, amb la mala sort que l'aigua cau a sobre dels ordinadors. La solució és senzilla, arreglar la gotera. Mentrestant hi tenim una galleda, però no sabem si podem marxar a casa i deixar que s'ompli, ens deixaria sense poder preparar exàmens.

En aquesta situació, una bona pregunta seria:

quantes gotes d'aigua calen per omplir una galleda?

moltessímes!! Perque les gotes cayen molt poc espai. així que moltes.

Descriu **els passos que seguiries** per calcular de forma aproximada aquesta quantitat amb **els recursos dels que puguis disposar**. No cal que donis un resultat, només que expliquis com ho faries.

Posaria la galleda i una camara de video per gravar cuantes gotes ~~queden~~ caiguen, però al proceso es que ningú es posaria a contarles.
No se, veurien ~~que~~ en quan temps tregan a caure ~~unes~~ una gota i despres de mitja hora tornaria i sabria per el temps quantes han caigut.

Mostra per al problema D

Situació: Gotes, goteres i galledes

Els problemes mai vénen sols. L'altre dia va aparèixer una gotera a la sala de professors, amb la mala sort que l'aigua cau a sobre dels ordinadors. La solució és senzilla, arreglar la gotera. Mentrestant hi tenim una galleda, però no sabem si podem marxar a casa i deixar que s'ompli, ens deixaria sense poder preparar exàmens.

En aquesta situació, una bona pregunta seria:

quantes gotes d'aigua calen per omplir una galleda?

Descriu **els passos que seguiries** per calcular de forma aproximada aquesta quantitat amb **els recursos dels que puguis disposar.** No cal que donis un resultat, només que expliquis com ho faries.

hauria de calcular el radi de la galleda (fer el volum) i calcular quanta aigua hi cap

tambe quin volum te la gota d'aigua

V_T galleda / V gota d'aigua.

Trobaria quantes gotes.

Mostra per al problema E

Situació: Gots per omplir una piscina

Normalment, les reserves d'aigua baixen a l'estiu, perquè plou menys i el consum domèstic augmenta. Un dels usos habituals de l'aigua a l'estiu és el d'omplir la piscina. Penseu que si la piscina és privada, utilitza molts litres i només l'aprofiten uns quants.

En aquesta situació, una bona pregunta és:

quants gots d'aigua omplen una piscina?

Descriu **els passos que seguiries** per calcular de forma aproximada aquesta quantitat amb **els recursos dels que puguis disposar**. No cal que donis un resultat, només que expliquis com ho faries.

Primer de tot, calcularia el volum de la piscina i ho passaria a litres. (Per poder calcular el volum, he hagut de mesurar les seves mides abans).
Un cop se la capacitat que té la piscina, multiplicaria la seva capacitat (ie calculada en litres) per quatre.

Per què ho multiplicaria per quatre? Perque, en un principi, els gots tenen una capacitat d'un quart de litre.

Mostra per al problema E

Normalment, les reserves d'aigua baixen a l'estiu, perquè plou menys i el consum domèstic augmenta. Un dels usos habituals de l'aigua a l'estiu és el d'omplir la piscina. Penseu que si la piscina és privada, utilitza molts litres i només l'aprofiten uns quants.

En aquesta situació, una bona pregunta és:

quants gots d'aigua omplen una piscina?

Descriu **els passos que seguiries** per calcular de forma aproximada aquesta quantitat amb **els recursos dels que puguis disposar**. No cal que donis un resultat, només que expliquis com ho faries.

- Agafar uns gots i començo a omplir-los de aigua de la piscina,
- Si m'en calen mes gots els agafo aixi fins agotari l'aigua de la piscina.

- Una vegada acabat de esgotari l'aigua contu els gots omplerts hi aixi se quants gots necesito.

Mostra per al problema F

Situació: El que ocupa una caixa forta

A les pel.lícules d'atracaments sempre ensenyen unes caixes fortes enormes plenes de bitllets i monedes. Suposo que la majoria dels diners d'un banc es guarden en forma de bitllets, però podria ser que també acumulessin moltes monedes, i podrien tenir problemes d'espai.

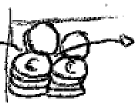
En aquesta situació, una bona pregunta seria:

quantes monedes d'euro caben en un metre cúbic?

Descriu **els passos que seguiries** per calcular de forma aproximada aquesta quantitat amb **els recursos dels que puguis disposar**. No cal que donis un resultat, només que expliquis com ho faries.

Primer mesuraria quan fa de radi una moneda i quina es la seva alçada.
Calcularia el volum d'una moneda i el dividiria entre el metre cubic.
El resultat seria el nombre aproximat de monedes que hi caben.
Clar que hi ha un petit marge d'error, el resultat es major al real ja que les monedes no encaixen perfectament com al seguent dibuix:

E.S.C



espai sense calcular

Mostra per al problema F

Situació: El que ocupa una caixa forta

A les pel.lícules d'atracaments sempre ensenyen unes caixes fortes enormes plenes de bitllets i monedes. Suposo que la majoria dels diners d'un banc es guarden en forma de bitllets, però podria ser que també acumulessin moltes monedes, i podrien tenir problemes d'espai.

En aquesta situació, una bona pregunta seria:

quantes monedes d'euro caben en un metre cúbic?

Descriu **els passos que seguiries** per calcular de forma aproximada aquesta quantitat amb **els recursos dels que puguis disposar**. No cal que donis un resultat, només que expliquis com ho faries.

1er: faria una pila de monedes d'euro fins que arribés a dalt, al límit de la part superior de la caixa forta. (i les contaria)

2n: Aniria posant monedes d'euro en horitzontal al "terra" de la caixa forta fins que no hi cabéssin i les contaria.

3r: multiplicaria una quantitat per l'altre i aquesta seria el resultat.

Bibliografia

[1] Lluís Albarracín. Sobre les organitzacions espontànies d'estimació de mesures de magnituds no abastables. Projecte F. de Carrera o Tesina de L., Universitat Autònoma de Barcelona, setembre 2008.

[2] M. Alcalá. *La construcción del lenguaje matemático*. Graó, 2002.

[3] C. Alsina. *Modelling and applications in mathematics education*, capítol Less chalk, less words, less symbols, more objects, more context, more actions, pàgines 35–44. Número 10 dins New ICMI studies series. Springer, 2007.

[4] J. B. Ärlebäck. On the use of realistic Fermi problems for introducing mathematical modelling in school. *The Montana Mathematics Enthusiast*, 6(3):331– 364, Juliol 2009.

[5] H. C. Von Baeyer. *The Fermi Solution: Essays on Science*. Dover Publication, 2001.

[6] R. B. Banerji. *Artificial intelligence: A theoretical approach*. Elsevier North Holland, 1980.

[7] A. J. Baroody i M. R. Gatzke. The estimation of set size by potentially gifted kindergarten-age children. *Journal for Research in Mathematics Education*, 22:59–68, 1991.

[8] D. B. Berch. Making sense of number sense: Implications for children with mathematical disabilities. *Journal of Learning Disabilities*, 38(4):333–339, 2005.

[9] A. Bessot i M. Eberhard. Une approche didactique des problèmes de la mesure. *Recherches en didactique des mathématiques*, 4(3):293–324, 1983.

[10] W. Blum. Icme study 14: Applications and modelling in mathematics education—discussion document. *Educational studies in mathematics*, 51:149–171, 2003.

[11] J. Boaler. *Experiencing School Mathematics*. Erlbaum, 2002.

[12] D. De Bock, L. Verschaffel i D. Janssens. The illusion of linearity: A persistent obstacle in pupils' thinking about problems involving length and area of similiar plane figures. Dins L. Puig i A. Gutiérrez, editors, *Proceedings of the 20th PME International Conference*, volum 2, pàgines 273–280. 1996.

[13] O. H. Brame. *Computational estimation strategies used by high school students of limited computational estimation ability*. Tesi Doctoral, North Texas State University, 1986.

[14] G. W. Bright. *Measurement in school mathematics: 1976 yearbook*, capítol Estimating as part of learning to measure. NCTM, 1976.

[15] G. Brousseau. *Theory of Didactical Situations in Mathematics (Didactique des mathématiques), 1970–1990*. Kluwer, 1997.

[16] W. A. Brown. *Problem-solving and teaching education: The humanism twixt models and muddles*. 1942.

[17] W. A. Brownell. *The psychology of learning*, capítol Problem solving. University of Chicago Press, 1942.

[18] R. Callingham. Primary students' understanding of tessellation: An initial exploration. Dins M. J. Høines i A. B. Fuglestad, editors, *Proceedings of the 28th PME International Conference*, volum 2, pàgines 183–190. 2004.

[19] J. Callís. *Estimació de mesures longitudinals, rectilínees i curvilínees. Procediments, recursos i estratègies*. Tesi Doctoral, Universitat Autònoma de Barcelona, 2002.

[20] J. E. Carlson. Fermi problems on gasoline consumption. *The Physics Teacher*, 35(5):308–309, 1997.

[21] T. P. Carpenter, T. G. Coburn, R. E. Reys i J. W. Wilson. Notes from national assesment: Estimation. *Arithmetic Teacher*, 23(4):296–302, 1976.

[22] H. L. Carter. *Estimation and mental computation*, capítol Linking estimation to psychological variables in the early years, pàgines 74–81. National Council of Teachers of Mathematics, 1986.

[23] ARC Center. *Tri-State Student Achievement Study*. ARC Center, 2003.

[24] M. C. Chamorro. *Didáctica de las matemáticas para Primaria*, capítol El tratamiento escolar de las magnitudes y su medida, pàgines 221–243. Pearson, 2003.

[25] D. Chandler. How to split hairs on Fermi questions. *The Physics Teacher*, 28(3):170, 1990.

[26] O. Chapman. Classroom practices for context of mathematics word problems. *Educational Studies in Mathematics*, 62:211–230, 2006.

[27] R. I. Charles i E. A. Silver. *The teaching and assessing of mathematical problem solving*. NCTM, 1988.

[28] P. Cobb i E. Yackel. Constructivist, emergent, and sociocultural perspectives in the context of developmental research. *Educational Psychologist*, 31(3-4):175–190, 1996.

[29] A. Codina i A. Rivera. *Iniciación a la investigación en didáctica de la matemática*, capítol Hacia una instrucción basada en la resolución de problemas: los términos problema, solución y resolución, pàgines 125–135. Universidad de Granada, 2001.

[30] B. Cooper i T. Harries. Children's responses to contrasting 'realistic' mathematics problems: Just how realistic are children ready to be? *Educational Studies in Mathematics*, 49:1–23, 2002.

[31] C. G. Corle. Estimates of quantity by elementary teachers and college juniors. *Arithmetic Teacher*, 10(2):347–353, 1963.

[32] E. De Corte, L. Verschaffel i C. Masui. The CLIA-model: A framework for designing powerful learning environments for thinking and problem solving. *European Journal of Psychology of Education*, 19(4):365–384, 2004.

[33] U. D'Ambrosio. Problem solving: a personal perspective from brazil. *ZDM Mathematics Education*, 39:515–521, 2007.

[34] Centro Español de Metrología. *Vocabulario internacional de términos fundamentales y generales de la metrología*. MOP, 1994.

[35] S. Dehaene i L. Cohen. Dissociable mechanisms of subitizing and counting: Neuropsychological evidence from simultanagnosic patients. *Journal of Experimental Psychology*, 20:958–975, 1994.

[36] R. Descartes. *Discourse on the method of rightly conducting the reason and seeking the truth in the sciences*, volum 28 de *Greater Books of the Western World*. Encyclopaedia Britannica Inc, 1637, 1994.

[37] J. Díez. *La enseñanza de las matemáticas en la educación de personas adultas. Un modelo dialógico*. Tesi Doctoral, Universitat de Barcelona, 2004.

[38] M. K. Dirks i D. R. M. Edge. Problem solving: Enrico Fermi and the bull moose. *Vector*, 40(3):25–28, 1983.

[39] H. Doerr i L. English. A modelling perspective on students' mathematical reasoning about data. *Journal for Research in Mathematics Education*, 34(2):110–136, 2003.

[40] H. M. Doerr. Examining the tasks of teaching when using students' mathematical thinking. *Educational Studies in Mathematics*, 62:3–24, 2006.

[41] H. M. Doerr. Teachers' ways of listening and responding to students' emerging mathematical models. *ZDM*, 38(3):255–268, 2006.

[42] W. Van Dooren, D. De Bock, K. Vleugels i L. Verschaffel. Just answering... or thinking? Contrasting pupils' solutions and classifications of proportional and non-proportional missing-value word problems. *Mathematical Thinking and Learning*, 12(1):20–35, 2010.

[43] A. Dowker. Computational estimation strategies of professional mathematicians. *Journal for Research in Mathematics Education*, 23(1):45–55, 1992.

[44] A. Dowker. Young children's addition estimates. *Mathematical Cognition*, 3(2):141–154, 1997.

[45] A. Dowker. *The development of mathematical skills*, capítol Individual differences in normal arithmetical development, pàgina 275–302. Psychology Press, 1998.

[46] A. Edwards. Computational estimation for numeracy. *Educational Studies in Mathematics*, 15(1):59–73, 1984.

[47] C. J. Efthimiou i R. A. Llewellyn. Cinema, Fermi problems and general education. *Physics Education*, 42(42):253–261, 2007.

[48] R. Engle i F. Conant. Guiding principles for fostering productive disciplinary engagement: Explaining emerging argument in a community of learners classroom. *Cognition and Instruction*, 20(4):399–483, 2002.

[49] L. D. English. Mathematical modeling in the primary school. *Educational Studies in Mathematics*, 63(3):303–323, 2006.

[50] C. B. Esteley, M. E. Villarreal i H. R. Alagia. The overgeneralization of linear models among university students' mathematical productions: A long-term study. *Mathematical Thinking and Learning*, 12:86–108, 2010.

[51] R. Borromeo Ferri. Theoretical and empirical differentiations of phases in the modelling process. *ZDM*, 38(2):86–95, 2006.

[52] R. Flecha, F. López i R. Saco. *Dos siglos de educación de adultos. De las sociedades de Amigos del País a los modelos actuales*. El Roure, 1988.

[53] M. A. Forrester, J. Latham i B. Shire. Exploring estimation in young primary school children. *Educational Psychology: An International Journal of Experimental Educational Psychology*, 10(4):283–300, 1990.

[54] M. A. Forrester i C. D. Pike. Learning to estimate in the mathematics classroom: A conversation- analytic approach. *Journal for Research in Mathematics Education*, 29:334–356, 1998.

[55] H. Freudenthal. *Didactical Phenomenology Of Mathematical Structures*. Kluwer Academic Publishers Group, 1983.

[56] A. C. Friebel. Measurement understandings in modern school mathematics. *Arithmetic Teacher*, 14:476–480, 1967.

[57] I. Gal. *Adult numeracy development. Theory, research, practice*. Hampton Press, Inc. CressKill, New Jersey, 2000.

[58] R. Gersten i D. Chard. Number sense: Rethinking arithmetic instruction for students with mathematical disabilities. *The Journal of Special Education*, 33:18–28, 1999.

[59] G. Gibbs. *Analizing qualitative data*. SAGE Publications, 2007.

[60] L. Ginsburg, M. Manly i M. J. Schmitt. The components of numeracy. Report tècnic, NCSALL Occasional Paper, 2006.

[61] G. A. Goldin. *Mathematical problem solving. Issues in research*, capítol The measure of problem solving outcomes. Franklin Institute Press, 1982.

[62] G. A. Goldin. *Beliefs: A hidden variable in mathematics education?*, capítol Affect, meta-affect, and mathematical belief structures. Springer Netherlands, 2003.

[63] J. G. Greeno. Number sense as situated knowing in a conceptual domain. *Journal for Research in Mathematics Education*, 22(13):170–218, 1991.

[64] B. Greer. The mathematical modeling perspective on wor(l)d problems. *Journal of Mathematical Behavior*, 12:239–250, 1993.

[65] B. Greer. Overview of the papers: Why is linear thinking so dominant? *Mathematical Thinking and Learning*, 12(1):109–115, 2010.

[66] S. A. Griffin, R. Case i R. S. Siegler. *Classroom lessons: Integrating cognitive theory and classroom practice*, capítol Rightstart: Providing the central conceptual prerequisites for first formal learning of arithmetic to students at risk for school failure, pàgina 24–49. MIT Press, 1994.

[67] M. Van Groenestijn. *A gateway to numeracy. A study of numeracy in adult basic education*. Universiteit Utrecht, 2002.

[68] L. T. J. Hall. Estimation and approximation - not synonyms. *Mathematics teacher*, 77:515–517, 1984.

[69] W. D. Hall. *A study of the relationship between estimation and mathematical problem solving among fifth-grade students*. Tesi Doctoral, University of Illinois, 1977.

[70] S. A. Hanson i T. P. Hogan. Computational estimation skill of college students. *Journal for Research in Mathematics Education*, 31:483–499, 2000.

[71] A. A. Hartley. Mental measurement in the magnitude estimation of length. *Journal of Experimental Psychology: Human Perception and Performance*, 3(622-628), 1977.

[72] K. Hasemann. Word problems and mathematical understanding. *ZDM*, 37, 2005.

[73] M. Van Den Heuvel-Panhuizen. The role of contexts in assessment problems in mathematics. *For the Learning of Mathematics*, 25(2):2–10, 2005.

[74] D. J. Hildreth. The use of strategies in estimating measurements. *Arithmetic Teacher*, 30(5):50–54, 1983.

[75] T. P. Hogan i K. L. Brezinski. Quantitative estimation: One, two, or three abilities? *Mathematical Thinking and Learning*, 2003.

[76] H. Howden. Teaching number sense. *Arithmetic Teacher*, 36(6):6–11, 1984.

[77] K. Johnson, T. Herr i J. Kysh. *Crossing the river with dogs*. Key College Publishing, 2004.

[78] M. G. Jones i A. R. Taylor. Developing a sense of scale: Looking backward. *Journal of Research in Science Teaching*, 46(460–475):460–475, 2009.

[79] E. Joram, A. J. Gabriele, M. Bertheau, R. Gelman i K. Subrahmanyam. Children's use of the reference point strategy for measurement estimation. *Journal for Research in Mathematics Education*, 36(1):4–23, 2005.

[80] M. Jurdak i I. Shahin. An ethnographic study of the computational strategies of a group of young street vendors in beirut. *Educational Studies in Mathematics Education*, 40(2):155–172, 1999.

[81] M. Jurdak i I. Shahin. Problem solving activity in the workplace and the school: the case of constructing solids. *Educational Studies in Mathematics Education*, 47(3):297–315, 2001.

[82] M. G. Kantowski. Processes involved in mathematical problem solving. *Journal for Research in Mathematics Education*, 1977.

[83] J. Kilpatrick. *Teaching and learning mathematical problem solving: Multiple research perspectives*, capítol A retrospective account of the past twenty-five years of research on teaching mathematical problem solving, pàgines 1–16. Erlbaum, 1985.

[84] A. Kittel i M. Marxer. Wie viele menschen passen auf ein fussballfeld? mit Fermiaufgaben individuell fördern. *Mathematik Lehren*, 131:14–18, 2005.

[85] M. Lampert. *Teaching Problems and the Problem of Teaching*. New Haven: Yale University Press, 2001.

[86] M. Lampert, P. Rittenhouse i C. Crumbaugh. *The handbook of education and human development: New models of learning and teaching schooling*, capítol Agreeing to disagree: Developing sociable mathematical discourse, pàgina 731–764. Blackwell Publishers, 1996.

[87] B. L. Lan. Enrico fermi: a great teacher. *European Journal Of Physics*, 23(5):29–31, 2002.

[88] J. De Lange. *International Handbook of Mathematics Education*, capítol Using and applying mathematics in education, pàgines 49–97. Kluwer, 1996.

[89] J. Lave. *Cognition in practice*. Cambridge University, 1988.

[90] J. A. LeFevre, S. L. Greenham i N. Waheed. The development of procedural and conceptual knowledge in computational estimation. *Cognition and Instruction*, 11(2):95–132, 1993.

[91] R. Lesh. *Teaching and learning mathematical problem solving: Multiple research perspectives*, capítol Conceptual analyses of problem solving performance, pàgines 309–330. Erlbaum, 1985.

[92] R. Lesh i G. Harel. Problem solving, modeling, and local conceptual development. *Mathematical Thinking and Learning*, 5(2):157—189, 2003.

[93] R. Lesh i J. S. Zawojewski. *Second handbook of research on mathematics teaching and learning*, capítol Problem solving and modeling. Information Age Publishing, 2007.

[94] F. K. Lester. Musings about mathematical problem-solving research: 1970-1994. *Journal for Research in Mathematics Education*, 25(6):660–675, 1994.

[95] F. K. Lester, J. Garofalo i D. L. Kroll. *Affect and mathematical problem solving: A new perspective*, capítol Self-confidence, interest, beliefs, and metacognition: Key influences on problem-solving behavior. Springer-Verlag, 1989.

[96] D. R. Levine. Strategy use and estimation ability of college students. *Journal for Research in Mathematics Education*, 13:350–359, 1982.

[97] M. G. Lodico, D. T. Spaulding i K. H. Voegtle. *Methods in Educational Research. From Theory to Practice*. Jossey Bass, 2006.

[98] J. W. Lott. Correcting the course of math education. *Principal Leadership*, 7(5):27–31, 2007.

[99] A. R. Taylor M. G. Jones i B. Broadwell. Estimating linear size and scale: Body rulers. *International Journal of Science Education*, 31(11):1495–1509, 2009.

[100] C. Maranhao i T. Campos. Length measurement: Conventional units articulated with arbitrary ones. Dins T. Nakahara i M. Koyama, editors, *Proceedings of the 24th PME International Conference*, volum 3, pàgines 255–262. 2000.

[101] M. Martínez. *Concepciones sobre la enseñanza de la resta: un estudio en el ámbito de la formación permanente del profesorado*. Tesi Doctoral, Universitat Autònoma de Barcelona, 2003.

[102] J. H. Mitchell, E. F. Hawkins, F. B. Stancavage i J. A. Dossey. *Estimation skills, mathematics- in-context, and advanced skills in mathematics: Results from three studies of the National Assessment of Educational Progress 1996 mathematics assessment*. National Center for Education Statistics, 1999.

[103] M. Modestou, A. Gagatsis i D. Pitta-Panzani. Students' improper proportional reasoning: The case of area and volume of rectangular figures. Dins M. J. Høines i A. B. Fuglestad, editors, *Proceedings of the 28th PME International Conference*, volum 3, pàgines 345–352. 2004.

[104] J. L. Moore. Back-of-the-envelope problems. Report tècnic, University of California, 1987.

[105] C. Morgan. A context for estimation. *Mathematics in School*, 18(3):16–17, 1989.

[106] C. Morgan. Factors affecting children's strategies and success in estimation. Dins G. Booker i P. Cobb T. N. de Mendicuti, editors, *Proceedings of the Fourteenth Psychology of Mathematics Education Conference*, pàgines 265–272. 1990.

[107] E. Munnich, M. Ranney i D. Appel. Numerically-driven inferencing in instruction: The relatively broad transfer of estimation skills. Dins K. Forbus, D. Gentner i T. Regier, editors, *Proceedings of the Twenty-Sixth Annual Conference of the Cognitive Society*, pàgines 987–992. 2004.

[108] E. Munnich, M. Ranney, J. Nelson, J. García de Osasuna i N. Brazil. Policy shift through numerically-driven inferencing: An epic experiment about when base rates matter. Dins R. Alterman i D. Kirsh, editors, *Proceedings of the Twenty-Fifth Annual Conference of the Cognitive Society*, pàgines 834–839. 2003.

[109] NCTM. *Estandares curriculares y de evaluación para la educación matemática.* NCTM, 1989.

[110] T. Nunes, A. D. Schliemann i D. W. Carraher. *Street mathematics and school mathematics*. Cambridge University Press, 1993.

[111] M. C. O'Connor. *Talking mathematics: Studies of teaching and learning in school*, capítol Language socialization in the mathematics classroom: Discourse practices and mathematical thinking, pàgina 17–55. Cambridge University Press, 1998.

[112] M. C. O'Connor i S. Michaels. Aligning academic task and participation status through revoicing: Analysis of a classroom discourse strategy. *Anthropology and Education Quarterly*, 24:318–335, 1993.

[113] M. C. O'Connor i S. Michaels. *Discourse, learning, and schooling*, capítol Shifting participant frameworks: Orchestrating thinking practices in group discussion, pàgina 63–103. Cambridge University Press, 1996.

[114] P. O'Daffer. A case and techniques for estimation: Estimation experiences in elementary school mathematics - essential, not extra!". *Arithmetic Teacher*, 26(6):46–51, 1979.

[115] J. O'Donoghue i U. O'Rourke. Guidelines for the development of adult numeracy materials. *ALM4 Proceedings*, 1998.

[116] OECD. *Assessing Scientific, Reading and Mathematical Literacy: A framework for PISA 2006*. OECD, 2000.

[117] OECD. *Measuring student knowledge and skills. The PISA 2000 assessment of reading, Mathematical and Scientific literacy*. OECD, 2000.

[118] National Council of Teachers of Mathematics. *An agenda for action: Recommendations for school mathematics of the 1980s*. NTCM, 1980.

[119] National Council of Teachers of Mathematics. *Principles and Standards*. NCTM: Reston, 2000.

[120] L. N. Outhred i M. C. Mitchelmore. Young children's intuitive understanding of rectangular area measurement. *Journal for Research in Mathematics Education*, 31(2):144–167, 2000.

[121] L. N. Outhred i M. C. Mitchelmore. Students' structuring of rectangular arrays. Dins M. J. Høines i A. B. Fuglestad, editors, *Proceedings of the 28th PME International Conference*, volum 3, pàgines 465–472. 2004.

[122] T. Palm. Word problems as simulations of real-world situations: A proposed framework. *For the Learning of Mathematics*, 26(1):42–47, 2006.

[123] T. Palm. Impact of authenticity on sense making in word problem solving. *Educational Studies in Mathematics*, 67(1):37–58, 2008.

[124] D. R. Paull. *The Ability to Estimate in Mathematics*. Tesi Doctoral, Columbia University, 1972.

[125] J. A. Paulos. *El hombre anumérico*. Ed. Tusquets, 1990.

[126] A. Peter-Koop. *Gute Aufgaben im Mathematikunterricht der Grundschule*, capítol Wie viele Autos stehen in einem 3-km-Stau? Modellbildungsprozesse beim Bearbeiten von Fermi-Problemen in Kleingruppen, pàgines 111–120. Mildenberger, 2003.

[127] A. Peter-Koop. Fermi problems in primary mathematics classrooms: Pupils' interactive modelling processes. Dins S. Ruwisch i A. Peter-Koop, editors, *Mathematics education for the third millennium: Towards 2010 (Proceedings of the 27th annual conference of the Mathematics Education Research Group of Australasia, Townsville)*. 2004.

[128] A. Peter-Koop. *Tasks in Primary Mathematics Teacher Education*, capítol Teaching and Understanding Mathematical Modelling Through Fermi-Problem, pàgines 131–146. Springer, 2009.

[129] G. Pólya. *How to solve it*. Princeton University Press, 1945.

[130] G. Pólya. *Mathematics and plausible reasoning*. Princeton University Press, 1954.

[131] G. Pólya. *Mathematical discovery*. John Wiley and Sons, 1962-1965.

[132] S. Pozzi, R. Noss i C. Hoyles. Tools in practice, mathematics in use. *Educational Studies in Mathematics Education*, 36(2):105–122, 1998.

[133] Luis Puig. *Elementos de resolución de problemas*. Ed. Comares, Granada, 1996.

[134] M. Ranney, F. Cheng, J. Nelson i J. García de Osasuna. Numerically driven inferencing: A new paradigm for examinig judgements, decisions and policies involving base rates. Report tècnic, Paper presented at the Annual Meeting of the Society for Judgement and Decision Making, 2001.

[135] C. R. Rao. *Linear statistical inferece and its applications, 2nd edn*. New York: John Wiley, 1973.

[136] S. P. Reehm. *A comparison of estimation processes used on numeric and contextual problems*. Tesi Doctoral, University of Missouri-Columbia, 1992.

[137] R. E. Reys, B. J. Bestgen, P. R. Trafton i J. S. Zawojewski. Computational estimation instructional materials for the middle grades. Report tècnic, National Science Foundation, 1984.

[138] R. E. Reys, J. F. Rybolt, B. J. Bestgen i J. W. Wyatt. Identification and characterization of computational estimation processes used by inschool pupils and out-of-school adults. Report tècnic, National Institute of Education, 1980.

[139] R. E. Reys, J. F. Rybolt, B. J. Bestgen i J. W. Wyatt. Processes used by good computational estimators. *Journal for Research in Mathematics Education*, 13(183-201), 1982.

[140] A. W. Robinson. Don't just stand there—teach Fermi problems! *Physics Education*, 43(1):83–87, 2008.

[141] J. Ross i M. Ross. *Estimation and mental computation*, capítol Fermi problems or how to make the most of what you already know, pàgines 175–181. National Council of Teachers of Mathematics, 1986.

[142] R. N. Rubenstein. Mathematical variables related to computer estimation. *Dissertation Abstracts International*, 1983.

[143] R. N. Rubenstein. Computational estimation and related mathematical skills. *Journal for Research in Mathematics Education*, 16:106–109, 1985.

[144] M. Saiz. Primary teachers' conceptions about the concept of volume: The case of volume-mesurable objects. Dins N. A. Pateman, B. J. Dougherty i J. T. Zilliox, editors, *Proceedings of the 27th PME International Conference*, volum 4, pàgines 95–102. 2003.

[145] M. Santos-Trigo. Mathematical problem solving: an evolving research and practice domain. *ZDM Mathematics Education*, 39:523–536, 2007.

[146] A. H. Schoenfeld. *Mathematical Problem Solving*. Academic Press, Inc, 1985.

[147] A. H. Schoenfeld. *Cognitive Science and Mathematics Education*, capítol What's all the fuss about metacognition?, pàgines 189–215. Erlbaum, 1987.

[148] A. H. Schoenfeld. *Informal Reasoning and Education*, capítol On mathematics sense making: An informal attack on the unfortunately divorce of formal and informal mathematics, pàgina 311–343. Erlbaum, 1991.

[149] A. H. Schoenfeld. *Handbook for Research on Mathematics Teaching and Learning*, capítol Learning to think mathematically: problem solving, metacognition and sense-making in mathematics, pàgines 334–370. MacMillan Publishing Company, 1992.

[150] A. H. Schoenfeld. Toward a theory of teaching-in-context. *Issues in Education*, 4(1):1–94, 1998.

[151] A. H. Schoenfeld. *Social Constructivist Teaching: Its Affordances and Constraints*, volum 9 de *Advances in Research on Teaching*, capítol A highly interactive discourse structure, pàgina 131–170. Elsevier, 2002.

[152] A. H. Schoenfeld. The math wars. *Educational Policy*, 18(1):253–286, 2004.

[153] A. H. Schoenfeld. Problem solving from cradle to grave. *Annales de Didactique et de Sciences Cognitives*, 11:41–73, 2006.

[154] A. H. Schoenfeld. Problem solving in the united states, 1970-2008: research and theory, practice and politics. *ZDM The International Journal on Mathematics Education*, 39(5-6):537–551, 2007.

[155] S. Scribner. *Practical intelligence nature and origins of competence in the everyday world*, capítol Thinking in action: Some characteristics of practical thought, pàgines 13–30. Cambridge University Press, 1986.

[156] I. Segovia i E. Castro. La estimación en el cálculo y en la medida: fundamentación curricular e investigaciones desarrolladas en el departamento de didáctica de la matemática de la universidad de granada. *Electronic Journal of Research in Educational Psychology*, 7(17):499–536, 2009.

[157] I. Segovia, E. Castro, E. Castro i L. Rico. *Estimación en Cálculo y Medida*. Síntesis, 1989.

[158] S. Senk i D. Thompson. *Standards-oriented school mathematics curricula: What does the research say about student outcomes?*. Erlbaum, 2003.

[159] A. W. Siegel, L. T. Goldsmith i C. R. Madson. Skill in estimation problems of extend and numerosity. *Journal for Research in Mathematics Education*, 13:211–232, 1982.

[160] R. S. Siegler i J. L. Booth. Development of numerical estimation in young children. *Child Development*, 75:428–444, 2004.

[161] R. S. Siegler i J. E. Opfer. The development of numerical estimation: Evidence for multiple representations of numerical quantity. *Psychological Science*, 14(3):237–243, 2003.

[162] E. Silver, L. Shapiro i A. Deutsch. Sense making and the solution of division problems involving remainders. *Journal for Research of Mathematics Education*, 24(2):117–135, 1993.

[163] M. Simon i G. Blume. Understanding multiplicative structures: A study of prospective elementary teachers. Dins W. Geeslin i K. Graham, editors, *Proceedings of the 16th PME International Conference*, volum 4, pàgines 191–198. 1992.

[164] J. R. Smart. Estimation skills in arithmetic. *School Science and Mathematics*, 82:642–649, 1982.

[165] J. Sowder. *Number concepts and operations in the middle grades*, capítol Mental computation and number comparison: their roles in the development of number sense and computational estimation. NCTM, 1988.

[166] J. Sowder. *Handbook of Research on Mathematics Teaching and Learning*, capítol Estimation and number sense, pàgines 371–389. Macmillan Publishing Company, 1992.

[167] B. Sriraman, L. Knott i H. Adrian. The mathematics of estimation: Possibilities for interdisciplinary pedagogy and social consciousness. *INTERCHANGE: A Quarterly Review of Education*, 40(2):205–223, 2009.

[168] B. Sriraman i R. Lesh. Modeling conceptions revisited. *ZDM*, 38(3):247– 254, 2006.

[169] D. Stocker. Re-thinking real-world mathematics. *For the Learning of Mathematics*, 26(2):29–29, 2006.

[170] J. Threadgill-Sowder. Computational estimation procedures of school children. *Journal of Educational Research*, 77(6):332–336, 1984.

[171] P. R. Trafton. *Developing computational skills: 1978 Yearbook*, capítol Estimation and Mental Arithmetic: Important Components of Computation. NCTM, 1978.

[172] P. R. Trafton. *Establishing foundations for research on number sense and related topics: Report of a conference*, capítol Reflections on the number sense conference, pàgines 74–77. San Diego State University, Center for Research in Mathematics and Science Education, 1989.

[173] T. R. Tretter, M. G. Jones, T. Andre, A. Negishi i J. Minogue. Conceptual boundaries and distances: Students' and adults' concepts of the scale of scientific phenomena. *Journal of Research in Science Teaching*, 83:282–319, 2006.

[174] L. Verschaffel. Taking the modeling perspective seriously at the elementary level: Promises and pitfalls. Dins A. D. Cockburn i E. Nardi, editors, *Proceedings of the 26th PME International Conference*, volum 1, pàgina 64–80. 2002.

[175] L. Verschaffel i E. De Corte. Teaching realistic mathematical modeling in the elementary school: A teaching experiment with fifth graders. *Journal for Research in Mathematics Education*, 28(5):577–601, 1997.

[176] L. Verschaffel, E. De Corte i S. Lasure. Realistic considerations in mathematical modeling of school word problems. *Learning and Instruction*, 4:273–294, 1994.

[177] L. Verschaffel, B. Greer i E. De Corte. *Making Sense of Word Problems*. Swets and Zietlinger Publishers Lisse, 2000.

[178] P. M. Vilenius-Tuohimaa, K. Aunola i J. Nurmi. The association between mathematical word problems and reading comprehension. *Educational Psychology*, 28(4):409–426, 2008.

[179] M. E. Villarreal, C. B. Esteley i M. V. Mina. Modeling empowered by information and communication technologies. *ZDM Mathematics Education*, 42:405–419, 2010.

[180] D. Wagner i B. Davis. Feeling number: grounding number sense in a sense of quantity. *Educational Studies in Mathematics*, 74:39–51, 2010.

[181] J. W. Wilson, M. L. Fernandez i N. Hadaway. *Research ideas for the classroom: High school mathematics*, capítol Mathematical problem solving. Macmillian, 1993.

[182] H. Winter. Modelle als konstrukte zwischen lebensweltlichen situationen und arithmetischen begriffen. *Grundschule*, 26(3):10–13, 1994.

[183] D. R. Woods. *Articles and ideas*. Departament of Chemical Engineering, McMaster University, 1983.

[184] J. W. Wyatt. *A case-study survey of computational estimation processes and notions of reasonableness among ninth grade students*. Tesi Doctoral, University of Missouri, Columbia, 1985.

[185] E. Yackel i P. Cobb. Sociomathematical norms, argumentation, and autonomy in mathematics. *Journal for Research in Mathematics Education*, 27(4):458–477, 1996.

[186] R. Yin. *Case Study Research. Desing and Methods*. Sage Publications, 1994.

[187] C. Zaslavsky. *Africa counts: Number and pattern in African cultures (3rd ed.)*. Lawrence Hill, 1999.