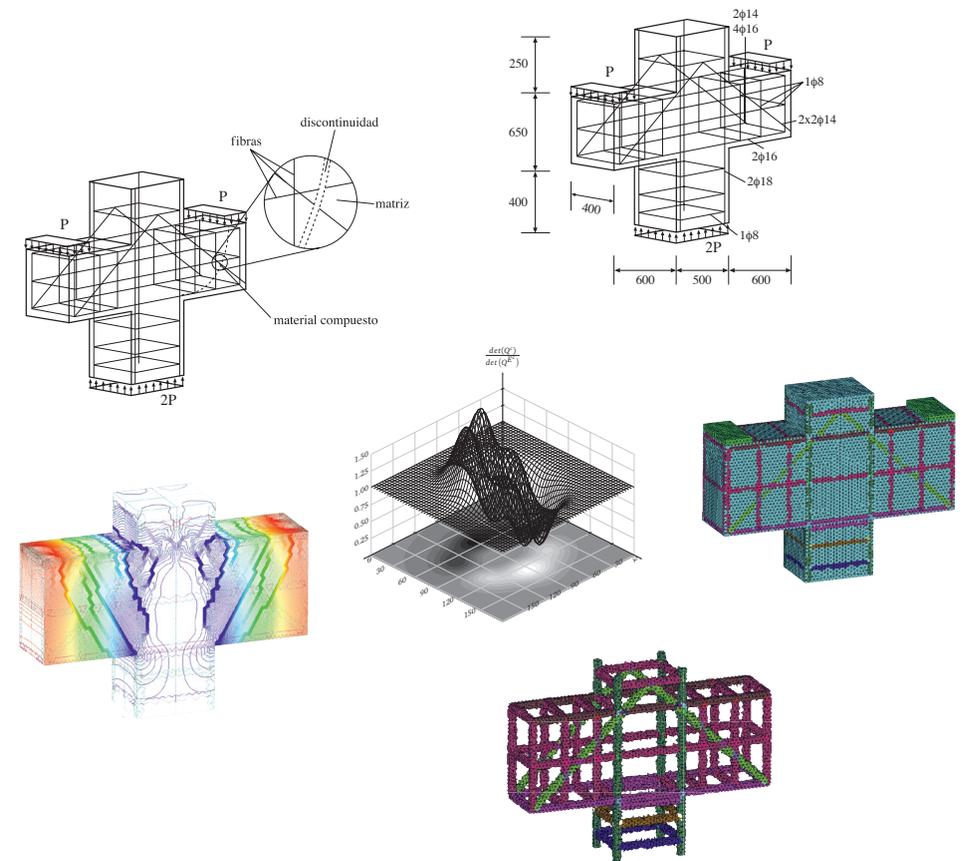


# Un modelo de discontinuidades fuertes para la simulación numérica de la fractura en compresión, de piezas de hormigón armado en tres dimensiones

Un modelo de discontinuidades fuertes para la simulación numérica de la fractura en compresión, de piezas de hormigón armado en tres dimensiones





UNIVERSIDAD POLITÉCNICA DE CATALUÑA

TESIS DOCTORAL

UN MODELO DE DISCONTINUIDADES FUERTES PARA LA  
SIMULACIÓN NUMÉRICA DE LA FRACTURA EN COMPRESIÓN, DE  
PIEZAS DE HORMIGÓN ARMADO EN TRES DIMENSIONES

*Autor:*

M.Sc. GUILLERMO FERNANDO DÍAZ ORTÍZ

*Tutor:*

Prof. Dr. Ing. habil JÖRN MOSLER

*Ponente por la UPC:*

Prof. MICHELE CHUMENTI



**Parte I**

**Preliminar**





## Acta de qualificació de tesi doctoral

Curs acadèmic:

Nom i cognoms

Programa de doctorat

Unitat estructural responsable del programa

## Resolució del Tribunal

Reunit el Tribunal designat a l'efecte, el doctorand / la doctoranda exposa el tema de la seva tesi doctoral titulada

Acabada la lectura i després de donar resposta a les qüestions formulades pels membres titulars del tribunal, aquest atorga la qualificació:

NO APTE       APROVAT       NOTABLE       EXCEL·LENT

(Nom, cognoms i signatura)		(Nom, cognoms i signatura)	
President/a		Secretari/ària	
(Nom, cognoms i signatura)	(Nom, cognoms i signatura)	(Nom, cognoms i signatura)	
Vocal	Vocal	Vocal	

\_\_\_\_\_, \_\_\_\_\_ d'/de \_\_\_\_\_ de \_\_\_\_\_

El resultat de l'escrutini dels vots emesos pels membres titulars del tribunal, efectuat per l'Escola de Doctorat, a instància de la Comissió de Doctorat de la UPC, atorga la MENCIÓ CUM LAUDE:

SÍ       NO

(Nom, cognoms i signatura)	(Nom, cognoms i signatura)
President de la Comissió Permanent de l'Escola de Doctorat	Secretària de la Comissió Permanent de l'Escola de Doctorat

Barcelona, \_\_\_\_\_ d'/de \_\_\_\_\_ de \_\_\_\_\_



## Dedicatoria

---

*A mis tres mosqueteras, Ana, Anita y Maria.  
Tengo la familia mas bella que yo podía desear.*

*To my three musketeers, Ana, Anita y Maria.  
I have the most beautiful family that I could wish for.*

*A mi hijo Jesús que vive en el cielo  
To my son Jesus living in the heaven*



# Contenido

---

<b>I Preliminar</b>	<b>iii</b>
<b>Dedicatoria</b>	<b>vii</b>
<b>Contenido</b>	<b>ix</b>
<b>Lista de figuras</b>	<b>xi</b>
<hr/>	
<b>II Marco teórico y numérico de trabajo</b>	<b>1</b>
Capítulo 1 Marco teórico y numérico de trabajo	3
1.1 Introducción . . . . .	3
1.1.1 Unidad temática . . . . .	9
1.1.1.1 Problema del valor de contorno para el material compuesto. Formato multicampo . . . . .	11
1.1.1.2 Continuidad en el vector de tracciones compuesto . .	11
1.1.1.3 Ecuaciones de gobierno aplicadas al material compuesto . . . . .	12
1.1.1.4 Formulación tridimensional del concreto reforzado . .	13
1.1.1.4.1 Cinemática inducida a través de una discontinuidad fuerte aplicada al material compuesto . . . . .	14
1.1.1.4.1.1 Fundamentos . . . . .	14
1.1.1.4.1.2 Cinemática de una discontinuidad débil . . . . .	15
1.1.1.4.1.3 Cinemática de una discontinuidad fuerte . . . . .	17
1.1.1.4.2 Modelo Constitutivo continuo para el material compuesto . . . . .	18
1.1.1.4.3 Problema de bifurcación material discontinua	21
1.2 Resumen global . . . . .	24

1.3	Discusión de los resultados . . . . .	28
1.4	Conclusion final . . . . .	30
1.5	Final Conclusion . . . . .	30
	Referencias . . . . .	30
<b>Capítulo 2</b>	<b>Artículos publicados</b>	<b>47</b>
2.1	<b>Artículo 1.</b> A mixture theory based method for three-dimensional modeling of reinforced concrete members with embedded crack finite elements . . . . .	47
2.2	<b>Artículo 2.</b> On the numerical resolution of the discontinuous material bifurcation problem. . . . .	64
2.3	<b>Artículo 3.</b> A macroscopic damage-plastic constitutive law for modeling quasi-brittle fracture and ductile behavior of concrete. . . . .	84

## Lista de figuras

---

1.1	Proceso de falla de un miembro estructural de hormigón armado . . . .	10
1.2	<i>Problema de valor de contorno</i> . . . . .	13
1.3	<i>Ancho de banda en una zona localizada</i> . . . . .	15
1.4	<i>Obtención <math>Q^c(n^c)</math> a través del procedimiento numérico del barrido</i> . . . .	23
1.5	<i>Ménsula de hormigón armado dividido por una superficie de discontinuidad</i> . . . . .	26



## **Parte II**

# **Marco teórico y numérico de trabajo**



## Marco teórico y numérico de trabajo

---

El objetivo de este trabajo, es la simulación numérica de miembros de concreto reforzado tridimensionales, fuertemente armados y bajo estados mixtos de tensiones. Para este fin, una pequeña introducción acerca del hormigón es dada. Seguida de la unidad temática de este trabajo. Se continua con un pequeño resumen, en dónde se expone de una forma sencilla, el tensor de localización, para que el lector que no este empapado en el tema, pueda tener una idea abstracta del mismo. Finalmente las conclusiones son desarrolladas.

### 1.1 Introducción

EL hormigón y sus materiales cementantes, tales como arenas puzolánicas, han sido usados como materiales de construcción desde la época de los Griegos y los Romanos y posiblemente en anteriores civilizaciones. Sin embargo, a principios del siglo XIX se marca el inicio de un uso más intenso de estos materiales. En 1801 ya se hace referencia a la débil respuesta del hormigón en estados de tensión en los escritos sobre principios de construcción de F. Coignet.

Posteriormente, en 1850, J.L. Lambot construye por primera vez un pequeño bote de hormigón para la exhibición de la feria de Paris, Francia en 1855. Mientras que en 1866, Koenen publica su primer manuscrito sobre la teoría y diseño de estructuras de concreto. Un punto a analizar es que, en 1867, J. Monier, un jardinero Francés, patenta unos marcos de metal, como un refuerzo para contenedores de hormigón (curiosamente estos contenedores, almacenaban únicamente jardines con plantas. Probablemente este fué el inico para la aplicabilidad de marcos de hormigón armado en edificios de apartamentos). En 1906, C.A.P. Turner, desarrolla la primera losa plana de hormigón sin vigas. En este momento, el lector debería de entender, que este aporte de Turner, impulsó fuertemente al hormigón para su utilización como material de construcción. Está claro que desde 1850 a 1906 se puede considerar como la primera revolución del hormigón.

Uno de los temas más apasionantes que en el inicio del siglo XX discutían los científicos, era el concepto de límite plástico, que a su vez, impulsó la gran revolución de este material (1940-1970). Este concepto propicia la gran discusión

de la segunda revolución del hormigón. Sin embargo, con el incesante crecimiento de la industria computacional, la tecnología del método de los elementos finitos, aunado con el desarrollo de la mecánica de fractura, podríamos pensar que actualmente se está viviendo la tercera revolución del hormigón.

Con respecto al diseño de diferentes estructuras de hormigón, es realizado principalmente por dos pasos: 1) La determinación de diferentes fuerzas que actúan sobre dicha estructura usando un método propio de análisis estructural, y 2) La dosificación de todos los miembros estructurales económicamente, considerando su seguridad, estabilidad, serviciabilidad y funcionalidad estructural.

Por los motivos brevemente esbozados anteriormente, es por lo cual, el concreto estructural es uno de los materiales más comúnmente utilizados en el diseño de todo tipo de edificios y estructuras. Pero una de las grandes ventajas del hormigón, es que su elaboración para su uso en la construcción, es extremadamente sencilla: consiste en la mezcla de cuatro componentes entre sí: agregados, cemento, acero y agua. Desafortunadamente, la amplia gama de diferentes propiedades mecánicas que existe en los agregados, así como la tecnología del cemento, hacen que sea complicado su análisis en diferentes regiones del mundo. Para el hormigón armado, el acero está un poco más estandarizado.

Respecto al hormigón armado, hormigón (agregados, cemento y agua) y acero de refuerzo, trabajan juntos para formar miembros de estructuras de concreto, que estén disponibles para resistir diferentes tipos de cargas, así como, diferentes condiciones de contorno. La clave de su funcionamiento, radica en que su resistencia es complementaria. En otras palabras, los estados de esfuerzos a los que están sometidos tales miembros estructurales, tensión y compresión, son soportados por el hormigón y el acero de refuerzo respectivamente.

El término estructural del hormigón indica todo tipo de concreto usado en aplicaciones constructivas. El concreto estructural podría ser simple, reforzado, pre-tensado, post-tensado, parcialmente pre-tensado, con sus ramificaciones, es decir, adherido o parcialmente adherido; en adición, podría decirse que el concreto al ser un material completamente heterogéneo, puede ser analizado como un material compuesto. El análisis de este material compuesto, es empleado para diferentes miembros estructurales, tales como vigas y columnas, cuando dicho miembro, contiene una combinación de concreto y formas de acero.

Cuando es necesario identificar el comportamiento mecánico no-lineal de miembros de concreto reforzado, principalmente dos opciones pueden ser utilizadas: 1) Experimentales 2) Simulaciones numéricas. Aunque el primer enfoque nos dará resultados más reales, es sin embargo limitado por el conocimiento de simples o

particulares casos de estudio, bajo dimensiones estructurales restringidas, tamaños, formas, efectos en el control de la temperatura o condiciones de carga y de contorno. Por otro lado, el segundo enfoque siempre nos dará la libertad de crear miembros de estructuras virtuales en una computadora, en donde principalmente no existe límite para su aplicación. Pero la fiabilidad de estas simulaciones numéricas, dependen en gran medida a las extensas leyes constitutivas de los materiales.

Este trabajo está principalmente interesado con el modelado mecánico no lineal de concreto reforzado, en el que el análisis no lineal y la evolución de su desempeño están conectados. En otras palabras y siendo un poco más abstracto, el comportamiento mecánico no lineal del hormigón armado puede ser representado por leyes constitutivas dentro del marco de trabajo de la mecánica del continuo. A pesar de que el hormigón es discontinuo. Estas leyes constitutivas, son expresadas matemáticamente por relaciones en términos de fuerza versus deformación. Aunque a la intemperie, los miembros estructurales siempre estarán sometidos a cambios bruscos de temperatura y a condiciones ambientales tales como viento, nieve y sismos por poner solo algunos ejemplos simples.

Otra de las grandes ramas en cuanto al modelado material se refiere, es el llamado término de fluencia a largo plazo. Este concepto es esencial para controlar fuerzas de pre-tensado, así como, para el cálculo de deflexiones (o desplazamientos verticales) de concreto reforzado durante el diseño de su vida útil. Es bien conocido en la literatura, que las altas temperaturas, podrían inducir expansiones volumétricas y tasas de cambio en la fluencia del hormigón, así como, contracciones secas, causando micro-fisuras, que podrían colapsar en una macro-fisura, causando un acortamiento de su vida útil.

Este trabajo abarca principalmente, cargas aplicadas cuasistáticamente y condiciones ambientales normales: es decir, la tasa de deformaciones está moderada en un rango aproximadamente entre 10micro/min a 1000 micro/seg y las temperaturas a las que están sometidos dichos miembros estructurales, oscilan entre 10°C y 40°C, en otras palabras, y de acuerdo con la práctica común para la determinación de la ecuación constitutiva del hormigón armado, se supone que la temperatura sea constante (y uniforme sobre la RVE). Es decir, los efectos de la temperatura para el hormigón armado afectarían única y exclusivamente a los parámetros mecánicos del miembro estructural. Esta acepción es únicamente válida, si no existe un cambio de fase en dicho miembro. Por lo tanto, no se considerará el marco de trabajo termodinámico. El trabajo se orienta más directamente hacia el comportamiento numérico del hormigón en masa y y sus varillas de refuerzo. Los cuales pueden ser modelados a nivel macroscópico por un modelo de daño-plástico y otro elasto-plástico respectivamente. Sin embargo, al considerar un punto material homogeneizado y modelado de forma compuesta, el comportamiento

del hormigón armado se convierte en altamente no lineal; ocasionando serios problemas numéricos, cuando se intenta simular su comportamiento post-pico. Finalmente el efecto de las contracciones en seco, sobre el hormigón, es despreciado.

Para este trabajo se desprecian los efectos de la temperatura y la fluencia del material a largo plazo. Siendo el principal objetivo, la modelización constitutiva del hormigón armado, así como las técnicas numéricas necesarias para detectar el instante de bifurcación en el material compuesto, de manera local y no local, que deben ser tenido en cuenta en el análisis estructural de elementos de hormigón armado, siendo la fisuración en el material compuesto, una de las principales fuentes de no linealidad.

Sin embargo, la visualización de estas fisuras dentro del hormigón armado, es útil en la comprensión de los diferentes planos inclinados de fisuras en tres dimensiones. Con el avance en la tecnología computacional se ha hecho posible interpretar esta información obtenida del análisis numérico en un formato gráfico adecuado. En consecuencia, estos procedimientos gráficos para la visualización de dominios finitos con múltiples fisuras, ha hecho posible generar formulaciones numéricas más complejas. Que a su vez, nos permiten visualizar de una manera más adecuada, los diferentes modos de fallo material.

En cuanto a la aplicabilidad se refiere y hasta el mejor conocimiento del autor, el lector en este momento, podría intuir que si la comunidad científica tuviera una formulación adecuada, para poder simular patrones de fisuras complejas en miembros estructurales, es decir a nivel macroscópico, evitando el cálculo costo de bajar a una escala microscópica o atómica, las repercusiones serían muy grandes y en muchas direcciones. Siendo entre las más destacadas, un análisis más seguro para el desarrollo de Mega-estructuras (presas, puentes atirantados, rascacielos, etc.) es decir, estructuras que realmente son útiles para la sociedad, así como una explosión en la arquitectura de estructuras altamente no lineales en su parte geométrica, ocasionando estructuras más hermosas.

En este mismo sentido, para un miembro de hormigón armado, con sus condiciones de contorno bien definidas y excitaciones externas dadas, el aumento de su vida útil solo puede ampliarse significativamente en tres formas: (1) Por la reducción del umbral de detección de grietas, lo que requiere la mejora substancial de formulaciones numéricas; (2) mediante la reducción de los coeficientes de seguridad de la carga, lo que requiere un mejor conocimiento de las cargas a las que estará sometido dicho miembro estructural durante toda su vida útil, pudiéndose obtener, entre otros procedimientos, por la instrumentación de piezas en condiciones de funcionamiento; (3) mediante la reducción de los márgenes de seguridad en los periodos de vida calculados, lo que requiere la mejora de las metodologías

numéricas empleadas para el cálculo de su vida útil. Siendo el primero y el tercer punto, uno de los objetivos de esta línea de investigación. En este trabajo se proporciona la modelización de elementos de hormigón armado para su uso práctico, especialmente para los miembros estructurales con varillas de refuerzo orientadas en cualquier dirección.

La investigación relacionada con elementos de hormigón armado se ha centrado tradicionalmente, sobre elementos estructurales con pocos defectos iniciales. La enorme cantidad de conocimientos disponibles en la actualidad, ha sido obtenida principalmente en el laboratorio, donde se pueden proporcionar condiciones bien controladas. Sin embargo, los miembros reales de hormigón armado siempre poseen defectos iniciales. En el laboratorio, los elementos de hormigón armado, pueden permanecer en uso en condiciones ambientales que pueden ser sumamente diferentes, a las que estarían expuestas a la intemperie. Como resultado, es sumamente sencillo entender, que dichas estructuras se deterioren con el tiempo.

Por otra parte, durante su vida útil, los elementos de hormigón armado pueden ser sometidos a cargas inesperadas no proporcionales. Como el hormigón es un material cuasifrágil, que depende de la trayectoria en que memoriza su historia de carga, éstas cargas inesperadas pueden causar grietas, estados de tensión-deformación diferentes, así como generar deformaciones residuales, que pueden llegar a jugar un papel crucial en la próxima etapa de carga. En resumen, el agrietamiento es una de las indicaciones claras que el límite de carga de un elemento de hormigón armado, se ha alcanzado. Sin embargo, cuando éstas grietas se dirigen a las barras de refuerzo embebidas en el hormigón simple, comienzan a aparecer una tras otra, hasta que se genere un mecanismo de colapso en dicho miembro estructural.

A diferencia del fallo frágil en el hormigón simple, el hormigón armado tiene un fallo dúctil. El comportamiento de un miembro de hormigón armado en estados de tensión, compresión o corte se investigan en este trabajo, desde el punto de vista mecánico. Éstos comportamientos, son caracterizados por la propagación de múltiples grietas a través de una parte importante del miembro estructural y no sólo en una sección como sucede en el caso de flexión. Cuando tal propagación se lleva a cabo, las grietas de corte se encontrarán con los planos grietas pre-existentes. Llegados a este punto, es necesario explicar, lo que se entiende por la ductilidad de un miembro de hormigón armado. La ductilidad se puede definir como la relación del desplazamiento final sobre desplazamiento de fluencia.

Esta propiedad (Ductilidad) que poseen todos los miembros de concreto reforzado, fuertemente armados, es un aspecto crucial para entender adecuadamente el comportamiento mecánico en miembros estructurales sometidos a fuertes estados de compresión. En otras palabras, y siendo un poco más rigurosos, la ductilidad

indica la capacidad de un miembro de hormigón armado, para disipar energía, manteniendo al mismo tiempo la carga externa sin colapsar. Interesante desde mi punto de vista! Basta con analizar éste miembro estructural, cuando su capacidad de corte es superior a la capacidad de flexión generando un modo de fallo a corte.

Por otro lado, es bien sabido, que la resistencia al corte de un miembro de hormigón armado, disminuye gradualmente después de alcanzar las principales barras de acero de refuerzo, siempre y cuando la capacidad de corte no supera el doble de la capacidad de flexión, la falla de colapso de este miembro estructural a corte puede ocurrir, resultando en una disminución de la ductilidad miembro. En un miembro de hormigón armado, las fuerzas de compresión a la flexión son resistidas por el hormigón en masa; mientras que las fuerzas de tracción a la flexión se proporcionan por el refuerzo acero.

Para que este proceso mecánico exista, debe haber una transmisión de fuerza, o deslizamiento, entre los dos materiales. Para que la barra de acero esté en equilibrio, las tensiones ocasionadas por éste deslizamiento tendrán que existir. En otras palabras, las varillas de acero, podrían extraerse (jalarlas literalmente) hipotéticamente, hasta que las fuerzas por tracción se redujeran a cero. Haciendo otra vez que el miembro estructural fallase. Para superar éste efecto, durante este trabajo, los elementos estructurales estudiados, siempre estarán equipados con estribos de acero, para poder prevenir el fallo por corte. Y a su vez, evitar que las varillas de acero se pudieran salir (hipotéticamente) del miembro estructural. Esto está ampliamente documentado en la literatura y se le conoce como pruebas de "pull-out". Ésto constituye uno de los ingredientes primordiales de este trabajo. Es decir, contribuir, a la obtención de modelos constitutivos compuestos que sean capaces de poder predecir numéricamente la respuesta tridimensional, de miembros estructurales, sometidos a complejos estados de tensión, compresión o corte.

Por otro lado, para la parte de tracción del hormigón en masa, cuando no posee varillas de refuerzo, está asociada con un material isotrópico y la anisotropía está caracterizada por el flujo plástico asociada con los procesos de endurecimiento en estados de tensiones en compresión y/o por refuerzos de las varillas a flexión o a cortante. **Esta es una de las razones de por qué en este trabajo se considera la incorporación de los estribos de acero**, generando un núcleo de hormigón en masa, que no posee ningún acero de refuerzo, pero que es altamente no lineal. Los ejemplos de interés en este trabajo poseen estos estribos de acero, evitando las grietas de cizalla que se produzcan, a pesar de múltiples grietas que emergen del estado de tensión.

En efecto, esta situación de múltiples grietas es fundamental en la simulación numérica. A pesar de que se ha comentado que los efectos de temperatura serían

desprecia-dos, **el núcleo de este trabajo, será la disipación adecuada del material compuesto cuando aparecen múltiples fisuras en el miembro estructural.** Por tal motivo, se emplea la aproximación de las discontinuidades fuertes para simular numéricamente, el fallo del material compuesto. Esta aproximación, ha sido empleada para simular la falla frágil del hormigón en masa, o con un porcentaje bajo de acero. Sin embargo, la motivación de este trabajo, es usar tal aproximación para que los miembros de hormigón armado, estén altamente reforzados, ocasionando un comportamiento dúctil con el agotamiento del hormigón en masa, pero un colapso frágil, cuando las varillas alcanzan un comportamiento no lineal.

Cabe mencionar que estructuras de este tipo, han sido objeto de numerosas investigaciones, sin embargo, existen dos casos extremos que vale la pena mencionar: (1) El fallo de hormigón en tracción/compresión con un porcentaje bajo de acero de refuerzo. (2) El fallo de hormigón en tracción/compresión con un porcentaje alto de acero de refuerzo. Por lo tanto, una de las motivaciones principales de este trabajo, es explorar la compresión con un alto porcentaje de barras de refuerzo en mayor profundidad.

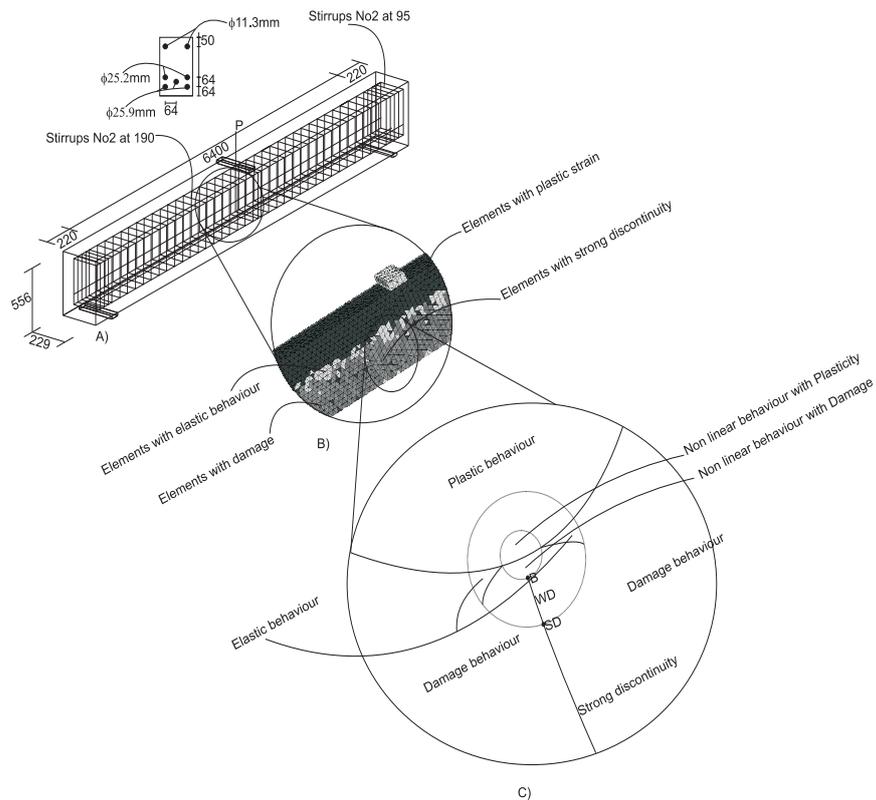
Finalmente, los miembros estructurales que se han simulado numéricamente en este trabajo, han sido contrastados con ensayos experimentales; ocasionando una retroalimentación entre los efectos mecánicos que deben ser considerados, dentro de la simulación numérica y los efectos mecánicos que pueden ser despreciados. Ésto es de suma importancia, en cuanto a la parte científica se refiere, ya que efectos de deslizamiento entre las varillas de refuerzo y el hormigón simple, para miembros fuertemente armados, pueden ser no considerados en la obtención de medidas de tensiones macroscópicas. Sin embargo, para la obtención de microfisuras que decantan en una macrofisura, los efectos de deslizamiento entre los componentes que conforman al hormigón armado no pueden ser despreciados. El trabajo estará limitado para el caso cuasiestático.

### 1.1.1 Unidad temática

Es comúnmente aceptado, que la caracterización para la obtención de la zona donde se producen los procesos de fractura, se haga a través de una transición específica entre los materiales que constituyen el medio continuo. Por lo general, la unión entre un material cuasi-frágil como el hormigón y otro material plástico, como las barras de refuerzo, hacen que el comportamiento de esta zona sea altamente no lineal.

Por otro lado, se caracteriza la matriz en los regímenes de esfuerzo de tracción por un ablandamiento progresivo, para que la tensión disminuya con el aumento de

la deformación. Como se muestra en Oliver et al. [166], el proceso de formación de una discontinuidad fuerte, puede ser modelado como una discontinuidad débil que colapsa en una discontinuidad fuerte, en un momento determinado, durante el proceso de deformación. Sin embargo, la pregunta clave es: ¿Qué sucede cuando las barras de refuerzo crean un núcleo? Y si este núcleo a su vez, está sometido a los estados de fuerte compresión, la discontinuidad fuerte generada por los estados de tensión no puede evolucionar. (Ver Fig.(1.1)).



**Figura 1.1:** Proceso de falla de un miembro estructural de hormigón armado. a) Dimensiones y geometría. b) Representación numérica c) Esquema de un comportamiento mecánico en estados de fallo

La motivación de este trabajo está orientado a la obtención numérica de un modelo compuesto; que sea robusto y estable, proporcionando una respuesta numérica, aproximada macroscopicamente, para estados de fallo, en miembros estructurales tridimensionales de hormigón armado, sometidos a estados de alta compresión. Para este fin, utilizamos las ecuaciones clásicas del problema de valor de contorno, pero se le incorporan, dos ecuaciones adicionales de continuidad, según se muestra en las dos secciones siguientes.

### 1.1.1.1 Problema del valor de contorno para el material compuesto. Formato multicampo

Cuando la localización de la deformaciones en el hormigón armado, es simulada mediante un modelo continuo compuesto, un cambio se produce en el conjunto de las ecuaciones diferenciales, empleadas para describir el movimiento y deformación de dicho continuo. Los intentos para capturar las fisuras en este continuo, así como otros fenómenos de localización, en el hormigón, iniciaron en la década de los 80s.

La solución parecía estar vinculada a la finura y la dirección de la malla. Muchos esfuerzos científicos, se desarrollaron en esta dirección. Sin embargo, la razón principal está vinculada a la pérdida de elipticidad del conjunto de ecuaciones diferenciales antes mencionadas. Es decir el problema estaba mal condicionado y reflejaba soluciones numéricas espurias, sensibles al tamaño y dirección de la malla empleada.

Por tal motivo, era necesario la introducción de algunas ecuaciones, que permitirán poner el problema de valor de contorno, cuando es necesario modelar la parte del fallo material de una forma bien condicionada. Con esta idea en la mente, se empieza este trabajo, con la introducción de la notación básica y se discuten brevemente, las ecuaciones que gobiernan un cuerpo continuo con esta discontinuidad.

### 1.1.1.2 Continuidad en el vector de tracciones compuesto

Permitir designar  $\epsilon_{\Omega \setminus \mathbb{S}}^c = \epsilon^c|_{x \in \Omega \setminus \mathbb{S}}$ ,  $\sigma_{\Omega \setminus \mathbb{S}}^c = \sigma^c|_{x \in \Omega \setminus \mathbb{S}}$  y  $\epsilon_{\mathbb{S}}^c = \epsilon^c|_{x \in \mathbb{S}}$ ,  $\sigma_{\mathbb{S}}^c = \sigma^c|_{x \in \mathbb{S}}$ , como las deformaciones y tensiones compuestas en el material sin fisurar, y la superficie de fallo o interfase  $\mathbb{S}$  discontinua respectivamente. El punto clave en la mecánica de fractura a través de la mecánica del continuo, es que es necesario postular una continuidad en las tracciones del compuesto a través de la interfase  $\mathbb{S}$  discontinua. El vector de tracciones compuesto, así como su derivada temporal, puede ser citado de la siguiente manera:

$$\begin{aligned} \sigma_{\Omega^+ \setminus \mathbb{S}}^c \cdot \mathbf{n} &= \sigma_{\Omega^- \setminus \mathbb{S}}^c \cdot \mathbf{n} = \sigma_{\mathbb{S}}^c \cdot \mathbf{n} = \mathbb{T}(\mathbf{x}, t) \quad \forall \mathbf{x} \in \mathbb{S} \wedge \forall t [0, \infty] \\ \dot{\sigma}_{\Omega^+ \setminus \mathbb{S}}^c \cdot \mathbf{n} &= \dot{\sigma}_{\Omega^- \setminus \mathbb{S}}^c \cdot \mathbf{n} = \dot{\sigma}_{\mathbb{S}}^c \cdot \mathbf{n} = \dot{\mathbb{T}}(\mathbf{x}, t) \quad \forall \mathbf{x} \in \mathbb{S} \wedge \forall t [0, \infty] \end{aligned} \quad (1.1)$$

En el que  $\sigma_{\Omega^+ \setminus \mathbb{S}}^c = \sigma_{\Omega \setminus \mathbb{S}}^c|_{x \in \partial \Omega^+ \cap \mathbb{S}}$  y  $\sigma_{\Omega^- \setminus \mathbb{S}}^c = \sigma_{\Omega \setminus \mathbb{S}}^c|_{x \in \partial \Omega^- \cap \mathbb{S}}$  son considerados. En la **ec. (1.1)**,  $\sigma_{\mathbb{S}}^c$  y  $\dot{\sigma}_{\mathbb{S}}^c$  son la tensiones compuestas y su derivada temporal en un punto material dado de la interface discontinua  $\mathbb{S}$ .  $\sigma_{\Omega^+ \setminus \mathbb{S}}^c$  y  $\sigma_{\Omega^- \setminus \mathbb{S}}^c$  son las tensiones compuestas en un punto vecino sobre la parte continua del cuerpo  $\Omega^+ \setminus \mathbb{S}$  y  $\Omega^- \setminus \mathbb{S}$ ,

respectivamente. A continuación, una breve explicación de uno de los fenómenos más interesantes que ocurren en la modelización numérica del hormigón armado.

### 1.1.1.3 Ecuaciones de gobierno aplicadas al material compuesto

Para el caso cuasiestático con deformaciones infinitesimales, el problema puede ser citado de la siguiente manera: considerar un cuerpo compuesto, formado por puntos materiales que ocupan un dominio ( $\Omega$ ), con condiciones de contorno  $\partial\Omega = \Gamma_u \cup \Gamma_\sigma$  (donde  $\Gamma_u$  es una parte del contorno con desplazamientos prescritos. Siendo  $\Gamma_\sigma$  la parte del contorno con tracciones prescritas). Finalmente, la variación temporal de las ecuaciones de gobierno que describen el problema de contorno en el material compuesto, en un intervalo de tiempo  $[0, T]$ , pueden ser escritas de la siguiente manera:

**Box 1.1:** Problema del valor de contorno(BVP) cuasiestático aplicado al material compuesto.

Encontrar:		$\begin{cases} \dot{\mathbf{u}}(\mathbf{x}, t) \\ \dot{\boldsymbol{\epsilon}}^c(\mathbf{x}, t) \\ \dot{\boldsymbol{\sigma}}^c(\mathbf{x}, t) \end{cases}$	
Satisfaciendo:			
$\nabla \cdot \dot{\boldsymbol{\sigma}}^c + \rho_o^c \dot{\mathbf{b}}^c = 0$	$\forall(\mathbf{x}, t) \in \Omega/\mathbb{S} \times [0, T]$	Equilibrio interno	(1.2)
$\dot{\boldsymbol{\epsilon}}^c - \nabla^s \dot{\mathbf{u}} = 0$	$\forall(\mathbf{x}, t) \in \Omega \times [0, T]$	Compatibilidad cinemática	(1.3)
$\dot{\boldsymbol{\sigma}}^c - \dot{\Sigma}(\boldsymbol{\epsilon}^c) = 0$	$\forall(\mathbf{x}, t) \in \Omega \times [0, T]$	Compatibilidad constitutiva	(1.4)
$\dot{\boldsymbol{\sigma}}^c \cdot \mathbf{n} = \dot{\mathbf{t}}^*$	$\forall(\mathbf{x}, t) \in \Gamma_\sigma \times [0, T]$	Equilibrio externo	(1.5)
$\dot{\mathbf{u}} = \dot{\mathbf{u}}^*$	$\forall(\mathbf{x}, t) \in \Gamma_u \times [0, T]$	Desplazamientos prescritos	(1.6)
$\dot{\boldsymbol{\sigma}}_{\Omega^+}^c \cdot \mathbf{n} - \dot{\boldsymbol{\sigma}}_{\Omega^-}^c \cdot \mathbf{n} = 0$	$\forall(\mathbf{x}, t) \in \mathbb{S} \times [0, T]$	Continuidad externa	(1.7)
$\dot{\boldsymbol{\sigma}}_{\Omega^+}^c \cdot \mathbf{n} - \dot{\boldsymbol{\sigma}}_{\mathbb{S}}^c \cdot \mathbf{n} = 0$	$\forall(\mathbf{x}, t) \in \mathbb{S} \times [0, T]$	Continuidad interna	(1.8)

Donde  $\rho_o^c$  es la masa del compuesto,  $\mathbf{b}^c(\mathbf{x}, t)$  es el vector de fuerzas de cuerpo compuestas,  $\mathbf{t}^*$  es el vector de tracciones prescritas, vector normal exterior ( $\mathbf{n}$ ) es el vector normal exterior,  $\Sigma(\boldsymbol{\epsilon}^c)$  representan para las ecuaciones constitutivas de retorno, las tensiones compuestas en terminos de las deformaciones compuestas  $\boldsymbol{\epsilon}^c$ , y finalmente,  $\mathbf{u}$  y  $\mathbf{u}^*$  son los desplazamientos y desplazamientos prescritos, respectivamente. El sistema de ecuaciones antes mencionado, se muestra en la **Fig.(1.2)**. Ver **Observación 1.1** .

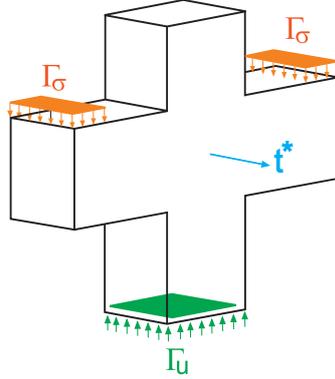


Figura 1.2: Problema de valor de contorno

**Observación 1.1** Después de la imposición explícita de la ec. (1.4) en la eqs.(1.2),(1.7) and (1.8), el típico problema bi-campo( $u$  y  $\epsilon^c$ ) puede ser reescrito. Ver Oliver et al. [163].

De la ec. (1.2) a la ec. (1.4) representan las ecuaciones que gobiernan al material compuesto sin discontinuidades. Sin embargo al exigir, continuidad en el vector de tracciones compuestas, su tasa puede ser expresada como:

$$[[\dot{\sigma}_\Omega^c]] \equiv \dot{\sigma}_{\Omega^+}^c \cdot \mathbf{n} - \dot{\sigma}_{\Omega^-}^c \cdot \mathbf{n} = 0 \quad \forall (\mathbf{x}, t) \in \mathbb{S} \times [0, T] \quad (1.9)$$

Desde ahora, el símbolo  $[[\bullet]] := \bullet_+ - \bullet_-$  denota el salto de un cantidad arbitraria al largo de la superficie de fallo  $\mathbb{S}$ .

**Observación 1.2** Los espacios de funciones para  $\dot{u}(\mathbf{x}, t)$ ,  $\dot{\epsilon}^c(\mathbf{x}, t)$  y  $\dot{\sigma}^c(\mathbf{x}, t)$  son asumidos para ser definidos tal que, las condiciones de contorno de tipo Dirichlet se cumplan automáticamente.

#### 1.1.1.4 Formulación tridimensional del concreto reforzado

La principal idea de la presente sección es: introducir al lector tres aspectos claves que son necesarios para poder simular numéricamente el fallo material de miembros estructurales tridimensionalmente. ¿Qué cinemática es empleada?, ¿Qué modelos constitutivos son necesarios? ¿Y cómo se detecta el instante de bifurcación? Evidentemente la resolución de las ecuaciones de gobierno fue llevado mediante el Método de los elementos finitos. Por claridad, explícitamente son omitidos estos detalles, ya que la solución mediante dicho método es bastante estándar. El lector interesado puede consultar [200].

#### 1.1.1.4.1 Cinemática inducida a través de una discontinuidad fuerte aplicada al material compuesto

Esta sección aborda la cinemática usada en el material compuesto. Permitir iniciar estableciendo las relaciones cinemáticas para el modelo compuesto no-lineal, y su adecuada medida de deformación. Para tal propósito se define primeramente sus fundamentos, acompañado por una discontinuidad débil que colapsa en una discontinuidad fuerte.

##### 1.1.1.4.1.1 Fundamentos

Esta sección consiste en un breve resumen de los fundamentos de la cinemática inducida por una discontinuidad. Para mas detalles el lector interesado puede consultar: Simo et al. [199], Garikipati [79], Oliver [153, 154], Oliver et al. [157], Armero [1], Oliver et al. [163, 164, 165], Oliver and Huespe [160] .

Permitir considerar un cuerpo material tridimensional,  $\Omega \subset \mathbb{R}^3$  <sup>§</sup> . Este cuerpo material es asumido a ser separado en dos partes ( $\Omega^+$  y  $\Omega^-$  a través de una  $\Gamma_{\mathbb{S}}$ ) cuyos puntos materiales están etiquetados por  $\boldsymbol{x}$ , y una superficie material (fijada a través del tiempo)  $\mathbb{S}^\dagger$  en  $\Omega$ . Finalmente permitir también considerar un sistema ortogonal de coordenadas curvilíneas  $\xi, \eta$  y  $\chi$ , tal que  $\mathbb{S}$  corresponde a la coordenada de esta superficie:

$$\mathbb{S} := \{ \boldsymbol{x}(\xi, \eta, \chi) \in \Omega \mid \chi = 0 \} \quad (1.10)$$

A su vez se puede definir una base orthonormal asociada al sistema de coordenadas definido en el párrafo anterior,  $(\hat{\boldsymbol{e}}_\xi, \hat{\boldsymbol{e}}_\eta, \hat{\boldsymbol{e}}_\chi)$ , y finalmente se definen sus correspondientes factores de escala  $r_\xi(\xi, \eta, \chi)$ ,  $r_\eta(\xi, \eta, \chi)$  and  $r_\chi(\xi, \eta, \chi)$  tal que:

$$\begin{aligned} d\mathbb{S}_\xi &= r_\xi d\xi \\ d\mathbb{S}_\eta &= r_\eta d\eta \\ d\mathbb{S}_\chi &= r_\chi d\chi \end{aligned} \quad (1.11)$$

son las longitud de arco diferencial a lo largo de la superficie  $\xi, \eta$  respectivamente. Este desarrollo está basado en el trabajo de Manzoli [125] (Ver también Oliver et al. [157], Fig.(1.3) y Observación 1.3 ). Aquí se extiende la definición del ancho de banda de  $2D$  a  $3D$  en ec. (1.13):

<sup>§</sup> La configuración ocupada por un sólido de referencia tiene lugar en  $\Omega_0 \subset \mathbb{R}^3$  y es denotada por  $\boldsymbol{X}$ .  
<sup>†</sup> que desde ahora será llamada superficie de discontinuidad.

$$h(\xi, \eta) = r_\chi(\xi, \eta, \chi)(\chi^+ - \chi^-) \quad (1.12)$$

**Observación 1.3** Permitir considerar la superficie  $\mathbb{S}_\chi^+$  y  $\mathbb{S}_\chi^-$ , que coincide con las coordenadas  $\chi = \chi^+$  y  $\chi = \chi^-$ , encerrando una banda discontinua

$$\Omega^h := \{\mathbf{x}(\xi, \eta, \chi) \mid \chi \in (\chi^+, \chi^-)\} \quad (1.13)$$

La introducción de este ancho de banda induce una partición

$$\Omega = \Omega^+ \cup \Omega^- \cup \Gamma_u \cup \Gamma_\sigma \cap \Omega^h \quad (1.14)$$

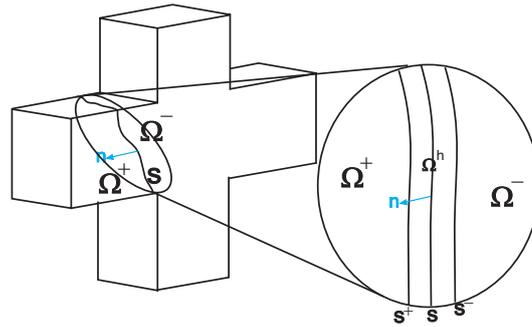


Figura 1.3: Ancho de banda en una zona localizada

#### 1.1.1.4.1.2 Cinemática de una discontinuidad débil

La cinemática de un cuerpo  $\Omega$  **Fig.(1.3)** conteniendo una discontinuidad (i.e. un salto) de valor  $[[\dot{\mathbf{u}}]](\mathbf{x}, t)$  En la tasa del campo de los desplazamientos puede ser descrito en **ec. (1.15)**.

$$\dot{\mathbf{u}}(\mathbf{x}, t) = \dot{\hat{\mathbf{u}}}(\mathbf{x}, t) + H_{\Omega^h}(\mathbf{x}, t)[[\dot{\mathbf{u}}]](\mathbf{x}, t) \quad (1.15)$$

donde  $\dot{\hat{\mathbf{u}}}(\mathbf{x}, t)$  y  $[[\dot{\mathbf{u}}]](\mathbf{x}, t)$ , son la velocidad resultante regular y la velocidad del salto respectivamente,  $H_{\Omega^h}$  es la función de rampa unitaria siendo una función continua en  $\Omega$  definida por:

$$H_{\Omega^h} := \begin{cases} 0 & \mathbf{x} \in \Omega^- \quad \chi \leq \chi^- \\ 1 & \mathbf{x} \in \Omega^+ \quad \chi \geq \chi^+ \\ \frac{\chi - \chi^-}{\chi^+ - \chi^-} & \mathbf{x} \in \Omega^h \quad \chi^- < \chi < \chi^+ \end{cases} \quad (1.16)$$

En la **ec. (1.16)**  $H_{\Omega^h}$  contiene un salto unitario, con diferentes valores en  $\mathbb{S}^+$  y  $\mathbb{S}^-$  para la misma superficie de coordenadas  $\xi$  y  $\eta$ :

$$\chi \llbracket H_{\Omega^h} \rrbracket = H_{\Omega^h}(\xi, \eta, \chi^+) - H_{\Omega^h}(\xi, \eta, \chi^-) = 1 \quad \forall \xi \wedge \forall \eta \quad (1.17)$$

El gradiente de  $H_{\Omega^h}$  es dado mediante

$$\begin{aligned} \nabla H_{\Omega^h} &= \frac{\partial H}{\partial \xi} \frac{\partial \xi}{\partial \mathbb{S}_\xi} \frac{\partial \mathbb{S}_\xi}{\partial \mathbf{x}} + \frac{\partial H}{\partial \eta} \frac{\partial \eta}{\partial \mathbb{S}_\eta} \frac{\partial \mathbb{S}_\eta}{\partial \mathbf{x}} + \frac{\partial H}{\partial \chi} \frac{\partial \chi}{\partial \mathbb{S}_\chi} \frac{\partial \mathbb{S}_\chi}{\partial \mathbf{x}} \\ &= \frac{1}{r_\xi} \frac{\partial H_{\Omega^h}}{\partial \xi} \hat{\mathbf{e}}_\xi + \frac{1}{r_\eta} \frac{\partial H_{\Omega^h}}{\partial \eta} \hat{\mathbf{e}}_\eta + \frac{1}{r_\chi} \frac{\partial H_{\Omega^h}}{\partial \chi} \hat{\mathbf{e}}_\chi \\ &= \mu_{\Omega^h} \frac{1}{h_\chi} \hat{\mathbf{e}}_\chi \end{aligned} \quad (1.18)$$

donde  $\mu_{\Omega^h}$  es una función de colocación definida como:

$$\mu_{\Omega^h} := \begin{cases} 0 & \mathbf{x} \notin \Omega^h \\ 1 & \mathbf{x} \in \Omega^h \end{cases} \quad (1.19)$$

Finalmente, se puede obtener la cinemática compatible con la tasa de deformaciones del material compuesto  $\dot{\epsilon}^c$  de la siguiente manera:

$$\begin{aligned} \dot{\epsilon}^c &= \nabla^s \dot{\mathbf{u}} = \nabla^s \dot{\mathbf{u}} + H_{\Omega^h} \nabla^s \llbracket \dot{\mathbf{u}} \rrbracket(\mathbf{x}, t) + \llbracket \dot{\mathbf{u}} \rrbracket(\mathbf{x}, t) \nabla^s H_{\Omega^h} \\ &= \underbrace{\nabla^s \dot{\mathbf{u}} + H_{\Omega^h} \nabla^s \llbracket \dot{\mathbf{u}} \rrbracket(\mathbf{x}, t)}_{\substack{\dot{\epsilon}^c \text{ regular} \\ \forall(\mathbf{x}) \in \Omega/\mathbb{S}}} + \underbrace{\mu_{\Omega^h} \frac{1}{h_\chi} (\llbracket \dot{\mathbf{u}} \rrbracket(\mathbf{x}, t) \otimes \hat{\mathbf{e}}_\chi)^s}_{\substack{\llbracket \dot{\epsilon}^c \rrbracket \text{ discontinuo} \\ \forall(\mathbf{x}) \in \mathbb{S}}} \end{aligned} \quad (1.20)$$

**Observación 1.4** El punto clave de ésta medida de deformación **ec. (1.20)** es que puede ser expresado como una suma de dos términos. Un término regular  $\dot{\epsilon}^c$  y un término singular  $\llbracket \dot{\epsilon}^c \rrbracket$ .

## 1.1.1.4.1.3 Cinemática de una discontinuidad fuerte

Una vez que la cinemática de la discontinuidad débil ha sido definida [ *Sección(1.1.1.4.1.2)* ], es momento de definir la cinemática de una discontinuidad fuerte. Para tal motivo, se define esta discontinuidad fuerte, como el caso límite de una discontinuidad débil, cuando el ancho de banda  $\Omega^h$  colapsa en una superficie discontinua:

$$\Omega^h \rightarrow \mathbb{S} \quad (1.21)$$

$$h(\xi, \eta) \rightarrow 0 \quad (1.22)$$

En este caso, la función de rampa unitaria **ec. (1.16)** se convierte en una función a trozos:

$$H_{\mathbb{S}} := \begin{cases} 0 & \mathbf{x} \in \Omega^- \\ 1 & \mathbf{x} \in \Omega^+ \end{cases} \quad (1.23)$$

Si aplicamos el operador Nabla a la función de peso  $H_{\mathbb{S}}$  obtenemos:

$$\begin{aligned} \nabla H_{\mathbb{S}} &= \frac{\partial H_{\mathbb{S}}}{\partial \chi} \frac{\partial \chi}{\partial \mathbb{S}_\chi} \frac{\partial \mathbb{S}_\chi}{\partial \mathbf{x}} \\ &= \frac{1}{r_\chi} \frac{\partial H_{\mathbb{S}}}{\partial \eta} \hat{\mathbf{e}}_\chi \\ &= \delta_{\mathbb{S}} \mathbf{n} \end{aligned} \quad (1.24)$$

podiendo observar que es derivada en términos de distribución (*ver Stakgold [204]*), en el que  $\delta_{\mathbb{S}}$  es una función conocida como Delta Dirac, que toma lugar precisamente en  $\mathbb{S}$ . De las **ec. (1.22)** y **ec. (1.24)**, se puede obtener la tasa del campo de desplazamientos y la cinemática compatible con el tensor de deformaciones compuesto  $\epsilon^c$  **ec. (1.25)** y **ec. (1.26)**, respectivamente:

$$\dot{\mathbf{u}}(\mathbf{x}, t) = \dot{\tilde{\mathbf{u}}}(\mathbf{x}, t) + H_{\mathbb{S}}(\mathbf{x}, t) \llbracket \dot{\mathbf{u}} \rrbracket(\mathbf{x}, t) \quad (1.25)$$

y

$$\begin{aligned}
\dot{\epsilon}^c &= \nabla^s \dot{\mathbf{u}} = \nabla^s \dot{\mathbf{u}} + H_{\mathbb{S}} \nabla^s [[\dot{\mathbf{u}}]](\mathbf{x}, t) + [[\dot{\mathbf{u}}]](\mathbf{x}, t) \nabla^s H_{\mathbb{S}} \\
&= \underbrace{\nabla^s \dot{\mathbf{u}} + H_{\mathbb{S}} \nabla^s [[\dot{\mathbf{u}}]](\mathbf{x}, t)}_{\dot{\epsilon}^c \text{ regular } \forall(\mathbf{x}) \in \Omega/\mathbb{S}} + \underbrace{\delta_{\mathbb{S}}([[ \dot{\mathbf{u}} ]](\mathbf{x}, t) \otimes \mathbf{n})^s}_{[[\dot{\epsilon}^c]] \text{ discontinuos } \forall(\mathbf{x}) \in \mathbb{S}}
\end{aligned} \tag{1.26}$$

**Observación 1.5** *El punto clave es regularizar precisamente el término  $\delta_{\mathbb{S}}$*

Se cierra esta sección asumiendo que todos los componentes que conforman el material compuesto comparten la misma deformación. (Concepto de compatibilidad y ecuación de cierre):

$$\begin{aligned}
\epsilon^m &= \epsilon^c \\
\epsilon_{rr}^f &= \mathbf{r}^f \cdot \epsilon^c \cdot \mathbf{r}^f \\
\gamma_{rs}^f &= 2\mathbf{r}^f \cdot \epsilon^c \cdot \mathbf{s}^f \\
\gamma_{rt}^f &= 2\mathbf{r}^f \cdot \epsilon^c \cdot \mathbf{t}^f
\end{aligned} \tag{1.27}$$

En donde  $\epsilon^m$  y  $\epsilon^c$  es el tensor de deformaciones de la matriz y del compuesto respectivamente,  $\epsilon_{rr}^f$ ,  $\epsilon_{rs}^f$  y  $\epsilon_{rt}^f$  son las deformaciones extensionales en la dirección de la fibra  $rr$  así como las deformaciones por corte ortogonales  $rs$  y  $rt$ , respectivamente.

#### 1.1.1.4.2 Modelo Constitutivo continuo para el material compuesto

En esta sección se presentan las ecuaciones constitutivas empleadas durante este trabajo. La composición del material compuesto, sigue la línea de trabajo de Truesdell and Noll [214] en donde la teoría de mezcla es empleada:

$$\psi^c = k^m \psi^m + \sum_{f=1}^{nf} k^f \psi^f \tag{1.28}$$

La función de energía del compuesto  $\psi^c$  es obtenida mediante la composición de las energías libres de cada componente  $\psi^m$  y  $\psi^f$ , viniendo acompañadas por sus respectivos factores volumétricos. Se sigue la aproximación clásica y se definen separadamente los modelos materiales para cada componente. Esto es principalmente motivado por la arquitectura interna tan compleja que presenta el concreto reforzado, la cuál permite desarrollar diferentes mecanismos de falla cuando es sometido a diferentes excitaciones externas.

Box 1.2: Paquete de ecuaciones del modelo de daño para la matriz en tensión

$$\begin{aligned}
\mathbb{C}^{e^m} = \bar{\lambda}^m \mathbf{1} \otimes \mathbf{1} + 2\mu^m \mathbf{I} &\Rightarrow \begin{cases} \bar{\lambda}^m = \frac{\nu^m E^m}{(1 + \nu^m)(1 - 2\nu^m)} \\ \mu^m = \frac{E^m}{2(1 + \nu^m)} \end{cases} && \text{Tensor elástico} \\
\psi_0^m(\epsilon^{e^m}, \mathbb{C}^{e^m}) &= \frac{1}{2} \epsilon^{e^m} : \mathbb{C}^{e^m} : \epsilon^{e^m} && \text{Energía libre de Helmholtz} \\
\psi^m(\epsilon^m, r) &= \left[ 1 - d(r) \right] \psi_0^m(\epsilon^{e^m}, \mathbb{C}^{e^m}) && \text{Energía libre} \\
\sigma^m = \frac{\partial \psi^m(\epsilon^m, r)}{\partial \epsilon^m} &= \left[ 1 - d(r) \right] \mathbb{C}^{e^m} : \epsilon^m && \text{Ecuación constitutiva} \\
d &= 1 - \frac{q(r)}{r} \Rightarrow d \in [0, 1] && \text{Variable de daño} \\
\dot{r} = \dot{\lambda}^{d^m} &\Rightarrow \begin{cases} r \in [r_0, \infty) \\ r_0 = r|_{t=0} = \frac{\sigma_u^m}{\sqrt{E^m}} \end{cases} && \text{Variable interna} \\
\dot{q} = \mathbb{H}^m \dot{r} \quad \text{where} \quad \mathbb{H}^m &= \frac{\partial q(r)}{\partial r} \begin{cases} q \in [0, r_0] \\ q|_{t=0} = r_0 \end{cases} && \text{Regla de ablandamiento} \\
f_{\sigma^m}^{d^m}(\sigma^m, q) &\equiv \tau_{\sigma^m} - q && \text{Damage criterion} \\
\tau_{\sigma^m} &= \|\sigma^m\|_{\mathbb{C}^{e^m-1}} = \sqrt{\sigma^m : \mathbb{C}^{e^m-1} : \sigma^m} && \text{Norma de tensiones} \\
f_{\sigma^m}^{d^m} \leq 0 \quad \dot{\lambda}^{d^m} \geq 0 \quad \dot{\lambda}^{d^m} f_{\sigma^m}^{d^m} &= 0 && \text{Condición de carga y descarga} \\
\dot{\lambda}^{d^m} \dot{f}_{\sigma^m}^{d^m} = 0 \quad \text{iff} \quad f_{\sigma^m}^{d^m} &= 0 && \text{Condición de consistencia} \\
\dot{\sigma}^m &= \mathbb{C}_{Tan}^{d^m} : \dot{\epsilon}^m && \text{Relación incremental} \\
\mathbb{C}_{Tan}^{d^m} &\begin{cases} \frac{q}{r} \mathbb{C}^{e^m} & \text{descarga elástica} \\ \frac{q}{r} \mathbb{C}^{e^m} + \left( \frac{\mathbb{H}r - q}{r^3} \right) (\bar{\sigma}^m \otimes \bar{\sigma}^m) & \text{carga con daño} \end{cases} && \text{Operador constitutivo tangente}
\end{aligned}
\tag{1.29}$$

Box 1.3: Paquete de ecuaciones del modelo de plasticidad para la matriz en compresión

$$\begin{aligned}
\mathbb{C}^{e^m} = \bar{\lambda}^m \mathbf{1} \otimes \mathbf{1} + 2\mu^m \mathbf{I} &\Rightarrow \begin{cases} \bar{\lambda}^m = \frac{\nu^m E^m}{(1 + \nu^m)(1 - 2\nu^m)} \\ \mu^m = \frac{E^m}{2(1 + \nu^m)} \end{cases} && \text{Tensor elástico} \\
\psi^m(\epsilon^{e^m}, \alpha^{p^m}, \alpha^G) = \frac{1}{2} \epsilon^{e^m} : \mathbb{C}^{e^m} : \epsilon^{e^m} + \psi^p(\alpha^m) && \text{Energía libre} \\
\epsilon^m = \epsilon^{e^m} + \epsilon^{p^m} && \text{Descomp. aditiva} \\
\sigma^m = \frac{\partial \psi^m(\epsilon^{e^m}, \alpha^{p^m}, \alpha^G)}{\partial \epsilon^{e^m}} = \mathbb{C}^{e^m} : \epsilon^{e^m} = \mathbb{C}^{e^m} : (\epsilon^m - \epsilon^{p^m}) && \text{Ecuación constitutiva} \\
\dot{\alpha}^m = \dot{\lambda}^{p^m} \Rightarrow \begin{cases} \alpha^{p^m}|_{t=0} = 0 \\ \dot{\epsilon}^{p^m} = \dot{\lambda}^{p^m} \frac{\partial g^{p^m}}{\partial \sigma^m} \end{cases} && \text{Regla de flujo} \\
f^{p^m} \Rightarrow \begin{cases} f^{p^m}(e, \theta, \sigma^m, \beta, f_c, f_t, E^m, \nu^m, \eta) = \\ f_F^m(e, \theta, \sigma^m, \beta) + \\ f_H^m(\sigma^m, \beta, f_c, f_t, E^m, \nu^m, \eta, \varphi, \alpha^{p^m}) - \\ f_S^m(\beta, E^m, \nu^m) \end{cases} && \text{Función de fluencia} \\
f^{p^m} \leq 0 \quad \dot{\lambda}^{p^m} \geq 0 \quad \dot{\lambda}^{p^m} f^{p^m} = 0 && \text{Carga y descarga} \\
\dot{\lambda}^{p^m} \dot{f}^{p^m} = 0 \quad \text{iff} \quad f^{p^m} = 0 && \text{Consistencia} \\
g^{p^m} \Rightarrow \begin{cases} g^{p^m}(\sigma^m, f_c, f_t, E^m, \nu^m, \eta, \beta, \chi) = \\ g_F^m(\sigma^m) + \\ g_H^m(\sigma^m, f_c, f_t, E^m, \nu^m, \eta, \beta, \chi, \varphi^G, \alpha^G) - \\ g_S^m(E^m, \nu^m) \end{cases} && \text{Potencial plástico} \\
\xi^G(\beta, f_c, E^m, \nu^m, \eta, \varphi, \alpha^G) = \mathbf{H}^G(\xi_{\max} \xi_o, \alpha^G) \quad ; \quad \dot{\alpha}^G = \dot{\lambda}^{G^{p^m}} \frac{\partial g^{p^m}}{\partial \xi^G} && \text{Ley de endurecimiento} \\
\dot{\sigma}^m = \mathbb{C}_{Tan}^{p^m} : \dot{\epsilon}^m && \text{Relación incremental} \\
\mathbb{C}_{Tan}^{p^m} \begin{cases} \mathbb{C}^{e^m} & \text{Descarga elástica} \\ \mathbb{C}^{e^m} - \frac{\mathbb{C}^{e^m} : \frac{\partial g^{p^m}}{\partial \sigma^m} \otimes \frac{\partial f^{p^m}}{\partial \sigma^m} : \mathbb{C}^{e^m}}{\frac{\partial f^{p^m}}{\partial \sigma^m} : \mathbb{C}^{e^m} : \frac{\partial g^{p^m}}{\partial \sigma^m} - \frac{\partial f^{p^m}}{\partial \xi} \frac{\partial \alpha}{\partial \xi} \frac{\partial g^{p^m}}{\partial \xi^G}} & \text{Carga plástica} \end{cases} && \text{Operador Tangente}
\end{aligned}
\tag{1.30}$$

**Box 1.4:** Paquete de ecuaciones del modelo de uni-dimensional para las varillas de refuerzo

$\psi^f(\epsilon^{ef}, r^f) = \frac{1}{2} \epsilon^{ef} E^f \epsilon^{ef} + \psi^p(r^f)$	Energía libre
$\epsilon^f = \epsilon^{ef} + \epsilon^{pf}$	Descomp. aditiva
$\sigma^f = \frac{\partial \psi^f(\epsilon^{ef}, r^f)}{\partial \epsilon^{ef}} = E^f \epsilon^{ef} = E^f(\epsilon^f - \epsilon^{pf})$	Ecuación aditiva
$\dot{r}^f = \dot{\lambda}^{pf} \Rightarrow \begin{cases} r^f _{t=0} = 0 \\ \dot{\epsilon}^{pf} = \dot{\lambda}^{pf} \frac{\partial f^{pf}}{\partial \sigma^f} \end{cases}$	Variable interna
$f^{pf} =  \sigma^f  - (\sigma_u^f + q^f)$	Yield function
$f^{pf} \leq 0 \quad \dot{\lambda}^{pf} \geq 0 \quad \dot{\lambda}^{pf} f^{pf} = 0$	Carga y descarga
$\dot{\lambda}^{pf} \dot{f}^{pf} = 0 \quad \text{iff} \quad f^{pf} = 0$	Consistencia
$\dot{q}^f = H^f \dot{r}^f$	Ley de endurecimiento
$\dot{\sigma}^f = C_{Tan}^{pf} : \dot{\epsilon}^f$	Relación incremental
$C_{Tan}^{pf} \begin{cases} E^f \\ \frac{E^f H^f}{E^f + H^f} \end{cases}$	Descarga elástica Carga plástica
	Operador tangente

(1.31)

Para el hormigón en masa es necesario modelar la parte a tracción con un modelo de daño **Cuadro (1.2)** y la parte de compresión mediante un modelo de plasticidad no asociada **Cuadro (1.3)**. Esto obedece a que el fallo material solo vendrá caracterizado en la parte de tracción, mientras que en la parte de compresión se mantendrá con una ley de endurecimiento. Para las varillas de refuerzo se utilizó un modelo de plasticidad uni-dimensional **Cuadro (1.4)**. Estas varillas de refuerzo siempre fueron modeladas elasto-plásticamente perfectas, sin endurecimiento ni abladamiento.

#### 1.1.1.4.3 Problema de bifurcación material discontinua

El modelado numérico de la falla material en el concreto reforzado es actualmente un reto para la comunidad científica, dado el carácter no suave en la solución que lo envuelve. Profundizando, un aspecto clave es capturar precisamente el instante en que bifurca el punto material y cómo se producen los modos de localización. Este problema (DMBP) ha sido estudiado en las últimas dos décadas por

varios autores: por un lado en la literatura científica aparecen metodologías rigurosas para detectar el instante de falla, en términos de la singularidad del tensor de localización Hadamard [87], Thomas [210], Hill [91], Mandel [124], Rice and Rudnicki [187], Asaro [3], Shawki and Clifton [194], Runesson et al. [190], Bigoni [19], y por otro lado, existen documentos que tratan el análisis de bifurcación Ortiz et al. [173], Ortiz [172], Mosler [146] para el calculo de los modos de localización y el tiempo en que el punto material bifurca. En esta sección sin entrar en detalle, se define el aparato matemático necesario para poder resolver el DMBP. Cuando modelamos el comportamiento del hormigón armado, un importante aspecto debido al paso de carga, es que generalmente, nunca podemos obtener la siguiente condición:

$$\det(Q^c) = \det(\underbrace{\mathbf{n}^c \cdot \mathbb{C}_{Tan}^c \cdot \mathbf{n}^c}_{Q^c}) = 0 \quad (1.32)$$

i.e. el tiempo de bifurcación  $t_B$  se encuentra entre  $t_n(\det(Q^c) > 0)$  y  $t_{n+1}(\det(Q^c) < 0)$ . Éste hecho hace más apropiado considerar el problema de optimización Ortiz [172], Ortiz et al. [173].

$$\text{Encontrar} \Rightarrow \mathbf{n}^c \equiv \arg [\min_{\mathbf{n}^c} \det(Q^c)] \quad (1.33)$$

bajo las siguientes restricciones:

$$\det[(Q^c) \leq 0] \wedge \|\mathbf{n}^c\| = 1 \quad (1.34)$$

Un forma de resolver este problema, es a través de un procedimiento numérico de barrido:

$$\text{Encontrar} \Rightarrow (\theta, \varphi) \equiv \arg \min \det[\mathbf{Q}^c(\mathbf{n}^c(\theta_i, \varphi_j))] \quad (1.35)$$

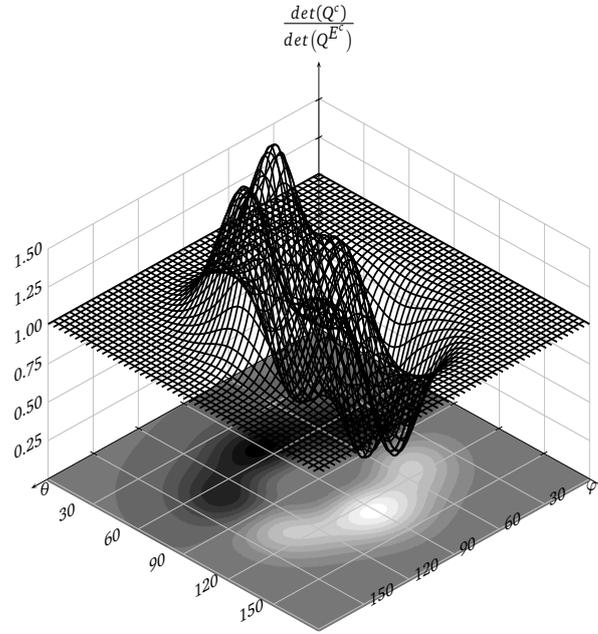
con:

$$\theta_i \in 0, \Delta\theta, 2\Delta\theta, 3\Delta\theta, \dots, n_\theta \Delta\theta \Rightarrow \Delta\theta = \frac{2\pi}{n_\theta} \quad (1.36)$$

$$\varphi_i \in 0, \Delta\varphi, 2\Delta\varphi, 3\Delta\varphi, \dots, n_\varphi \Delta\varphi \Rightarrow \Delta\varphi = \frac{2\pi}{n_\varphi} \quad (1.37)$$

En donde  $\mathbf{n}^c(\theta, \varphi)$  es un vector unitario normal viviendo en el espacio Euclidiano, pudiendo ser descrito en términos de dos parámetros, i.e.  $\theta$  y  $\varphi$  siendo los

ángulos clásicos con coordenadas curvilíneas esféricas.  $n_\theta$  y  $n_\varphi$  son el número seleccionado de puntos de muestro en las direcciones  $\theta$  y  $\varphi$  respectivamente. Se muestra la siguiente **Fig.(1.4)** para clarificar las ecuaciones anteriores:



**Figura 1.4:** Obtención  $Q^c(n^c)$  a través del procedimiento numérico del barrido

La no-linealidad de las **eqs. (1.35)** a la **(1.37)** puede ser observada precisamente en la anterior figura, así como, las líneas de contorno de  $\frac{det(Q^c)}{det(Q^{E^c})}$  En el plano  $[\varphi-\theta]$ . Para obtener un mínimo global aceptable a través del procedimiento numérico del barrido, es necesario llevar a cabo una selección muy fina, para  $n_\theta = n_\varphi = 10^3$ .

**Observación 1.6** La selección de  $n_\theta$  y  $n_\varphi$  es muy sensible: en el contexto del método de los elementos finitos, para cada punto de Gauss, y para cada iteración en cada paso de tiempo, tomando  $n_\theta = n_\varphi = 10^3$  implica hacer esta evaluación del **eqs. (1.35)** a la **(1.37)**  $10^6$  veces, para la mayoría de puntos materiales que nunca alcanzan a cumplir la restricción **ec. (1.34)**, y pudiendo ser necesario obtener **ec. (1.35)** a través de todo el proceso de carga Samaniego [192], en otras palabras, esto resulta inabordable en términos de costos computacionales para el caso en tercera dimensión.

Mientras que para el material homogéneo existen formas cerradas para obtener el instante de bifurcación y las direcciones de localización, Ottosen and Runesson [176], Rice [186], William [222], Oliver and Huespe [160], para el material compuesto, hasta el mejor entendimiento del autor, no existen soluciones analíticas. Es por este motivo, que se propone el siguiente algoritmo:

Box 1.5: Algoritmo numérico

```

Data:  $t, \mathbf{n}_i^c, \mathbf{C}_{Tan}^{c\,smooth^T}, i$ 
Result:  $\mathbf{n}^c$ 

1 initialization;
2  $i = 0$ ;
3  $Toler = 1.0E - 04$ ;
4  $\lambda_{min}^i = 0.0E0$  ;
5  $\lambda_{min}^{i-1} = \infty$  ;
6  $\mathbf{n}_i^c \rightarrow$  principal direction of  $\boldsymbol{\sigma}^c$ ;
7 while  $|\lambda_{min}^i - \lambda_{min}^{i-1}| \leq Toler$  do
8    $i = i + 1$ ;
9    $\mathbf{Q}^c = \mathbf{n}^c \cdot \mathbf{C}_{Tan}^{c\,smooth^T} \cdot \mathbf{n}^c$ ;
10   $\mathbf{m}_i^c = \mathbf{n}_i^c$ ;
11   $\mathbf{n}_i^c \rightarrow$  principal direction of  $\mathbf{Q}^c$  ;
12   $\lambda_{min}^{i-1} = \lambda_{min}^i$  ;
13   $\lambda_{min}^i \rightarrow$  min eigenvalue of  $\mathbf{Q}^c$  ;
14 end

```

## 1.2 Resumen global

Este trabajo se puede resumir mediante las siguientes preguntas hechas a la mecánica de fractura: ¿cuándo, cómo y en dónde se producen los procesos inelásticos de deformaciones? En miembros estructurales de hormigón armado. Y, ¿bajo qué condiciones pueden ocurrir estos procesos para que las deformaciones se concentren en una o más bandas estrechas, separando la parte restante del cuerpo por una superficie de discontinuidad débil.

Las respuestas a las preguntas anteriores están lejos de ser sencillas. Lo que sí está documentado ampliamente en la literatura científica, es que podemos simular numéricamente el campo de las deformaciones a través de un campo de desplazamientos. Sin embargo, si ese campo de desplazamientos lo enriquecemos, podemos llegar a obtener un campo de deformaciones que pueden llegar a localizarse en unas bandas estrechas de deformaciones.

Algunos grupos de investigación alrededor mundo, han desarrollado formulaciones numéricas para materiales homogéneos e isotropos y así capturar el fenómeno de la localización de la deformación, obteniendo respuestas satisfactorias, cuando se trata de comparar los resultados experimentales vs. numéricos.

Pero, otra vez, vuelven a emerger de forma natural, más preguntas; ¿y qué

pasa si el punto material a estudiar, está compuesto por diferentes materiales? Tales como: hormigón en masa, agregados, barras de acero y sobre todo lo mas importante, la interacción entre ellas.

Una vez más, esto no vuelve a ser sencillo de responder. Sin embargo, este tema ha sido estudiado ampliamente durante los últimos 20 años, gracias al cual, fundamento teórico y matemático, así como a la experiencia de los investigadores, que han empezado a dar sus frutos. Pero el camino aún es largo, cuando se intenta modelar el efecto de la compresión en aquellos puntos materiales, que están conformados por un material compuesto. Y siendo más preciso, en aquellos puntos materiales, que durante todo su proceso de carga, se han transformado de un estado de tensión a un estado de compresión, debido a la aparición de las fisuras.

A continuación, se hace un breve desarrollo numérico y teórico para poder definir el tensor acústico compuesto. Este tensor acústico, es la llave para poder adentrarnos a intentar responder aproximadamente, a las preguntas formuladas al inicio de esta sección.

El inicio del proceso inelástico de las deformaciones, puede estar acompañado por la formación de bandas de esfuerzo intenso; las deformaciones actuales pueden ser aún continuas y el salto aparece sólo en la derivada temporal de la deformación.

Pasemos ahora a determinar las condiciones necesarias, para que pueda surgir el fenómeno de localización en las deformaciones. Típicamente utilizando el análisis clásico de localización desarrollado por Hadamard [87], un punto material  $x_s$  de la superficie discontinua  $\Gamma_s$  puede ser considerada como la pérdida de la continuidad en el campo de deformaciones. Para mayor comodidad, también consideramos que la superficie divide al cuerpo en dos subdominios:  $\Omega^+$  y  $\Omega^-$  (ver Fig.(1.5)).

De acuerdo con Hadamard, si el punto material  $x_s$  es aproximado por  $\Omega^+$  o por  $\Omega^-$  (denotados por los superíndices + y - en los labios de la superficie de fallo), ciertos campos que son discontinuos en  $\Gamma_s$  tienden a diferentes límites. Pongamos ahora un ejemplo sencillo. Permitir definir  $\dot{\sigma}^+$  y  $\dot{\sigma}^-$  como la tasa de tensiones sobre ambos lados de la superficie de discontinuidad, justo al lado del punto material  $x_s$ , respectivamente. A pesar de que las tasas de tensiones y las deformaciones pueden ser discontinuas a lo largo de la superficie de fallo, los correspondientes saltos no son completamente arbitrarios. Esto es debido a que la condición de continuidad de tracción está limitada por el salto de la tasa de tensión.

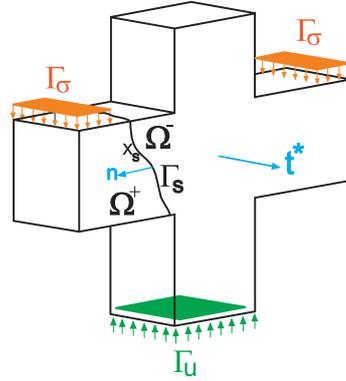


Figura 1.5: Ménsula de hormigón armado dividido por una superficie de discontinuidad

La misma idea se aplica para el salto de la velocidad de deformación, que está limitada por la condición de continuidad de los desplazamientos. Tal como se define en Hadamard [87], la estructura de la condición de continuidad de tracción puede ser escrita de la siguiente manera:

$$\mathbf{n} \cdot \dot{\boldsymbol{\sigma}}^+ = \mathbf{n} \cdot \dot{\boldsymbol{\sigma}}^- \quad (1.38)$$

en donde  $\mathbf{n}$  es el vector unitario normal a  $\gamma_s$ . Con el fin de definir la condición de continuidad del desplazamiento en términos de velocidades de deformación, se define la proyección continua sobre la superficie de fallo, mediante el empleo de un gradiente espacial de un componente de desplazamiento dado:

$$\left[ \frac{\partial \dot{\mathbf{u}}}{\partial \mathbf{x}} \right]^+ = \left[ \frac{\partial \dot{\mathbf{u}}}{\partial \mathbf{x}} \right]^- + \mathbf{r} \otimes \mathbf{n} \quad (1.39)$$

Donde  $\mathbf{r}$  es un vector arbitrario y toma la forma de  $\mathbf{r} = \dot{\beta} \mathbf{m}$ . La magnitud del salto  $\dot{\beta} = \|\mathbf{r}\|$  puede ser definido en términos del tensor de polarización de primer orden unitario ó normalizado:

$$\mathbf{m} = \frac{\mathbf{r}}{\|\mathbf{r}\|} \quad (1.40)$$

sosteniendo implícitamente los modos de fallo. Mediante la explotación de la simetría del tensor de deformación en el régimen de pequeñas deformaciones, es sencillo llegar a la condición de continuidad del desplazamiento, en términos de velocidades de deformación de la siguiente manera:

$$\dot{\epsilon}^+ = \dot{\epsilon}^- + \dot{\beta}(\mathbf{m} \otimes \mathbf{n})^{sym} \quad (1.41)$$

Con esta información, podemos comenzar a responder de forma aproximada, las preguntas planteadas al principio de esta sección. Para este fin, se utiliza el análisis de bifurcación. En primer lugar, debemos obtener alguna expresión que nos permite determinar el instante en que se produce el momento de la fractura. Para ello, se emplea la siguiente ecuación:

$$\dot{\sigma}^+ = \mathbb{C}_{Tan}^+ \dot{\epsilon}^+ \quad (1.42)$$

$$\dot{\sigma}^- = \mathbb{C}_{Tan}^- \dot{\epsilon}^- \quad (1.43)$$

En la que  $\mathbb{C}_{Tan}^+$  y  $\mathbb{C}_{Tan}^-$  son los operadores tangentes constitutivos en ambos lados de la superficie de discontinuidad. Sustituyendo las expresiones anteriores en eqs.(1.38) y (1.41) se obtiene:

$$\mathbf{n} \cdot \mathbb{C}_{Tan}^+ : \dot{\epsilon}^- + [\mathbf{n} \cdot \mathbb{C}_{Tan}^+ : (\mathbf{m} \otimes \mathbf{n})^{sym}] \dot{\beta} = \mathbf{n} \cdot \mathbb{C}_{Tan}^- : \dot{\epsilon}^- \quad (1.44)$$

$$\mathbf{n} \cdot [\mathbb{C}_{Tan}^+ - \mathbb{C}_{Tan}^-] : \dot{\epsilon}^- = -\dot{\beta} [\mathbf{n} \cdot \mathbb{C}_{Tan}^+ \cdot \mathbf{n}] \cdot \mathbf{m} \quad (1.45)$$

obteniendo de este modo una expresión general para describir una simple discontinuidad débil. Si se analiza la expresión RefEquequidad. Los operadores tangentes constitutivos son iguales, el lado izquierdo de esta expresión es cero y una verdadera discontinuidad se obtiene sólo con  $\dot{\beta} \neq 0$ . Entonces la ecuación anterior se puede reducir de la siguiente manera:

$$\underbrace{[\mathbf{n} \cdot \mathbb{C}_{Tan}^+ \cdot \mathbf{n}]}_Q \cdot \mathbf{m} = 0 \quad (1.46)$$

donde el término entre paréntesis es conocido como el tensor acústico. Desde un punto de vista matemático, la singularidad de este tensor (Acústico o más precisamente, el tensor de localización) indica la pérdida de elipticidad en problemas cuasi-estáticos. Por lo cuál, la singularidad del tensor de localización y la polarización del tensor unitario de primer orden  $\mathbf{m}$ , es el vector propio asociado con el valor propio cero. La condición de localización clásica ahora toma la forma:

$$\det(Q) = 0 \quad (1.47)$$

Por lo tanto, la idea clave es investigar si esta condición ocurre. Mediante una búsqueda numérica ó analítica de un vector unitario  $\mathbf{n}$ , para que el tensor de localización sea singular. El objetivo del análisis de bifurcación, es encontrar este vector unitario  $\mathbf{n}$  para el que el tensor de localización se convierte en singular. Es de destacar que, por un lado, si este vector  $\mathbf{n}$  no existe, las deformaciones permanecen continuas. Por el otro lado, si nos encontramos con un vector  $\mathbf{n}$  que cumple con la condiciones de la localización, ésto indica que un salto de tensión se puede desarrollar a través de una superficie con una normal  $\mathbf{n}$ . También es importante mencionar que, si exploramos **ec. (1.46)** en profundidad, el tensor acústico es una función del operador tangente constitutivo. Como veremos en los artículos, este operador puede ser enriquecido con el fin de modelar puntos materiales de hormigón armado.

Ahora sí, definido adecuadamente el tensor acústico, es posible responder de una manera aproximada, a las preguntas desarrolladas en el inicio de esta sección. Bien es sabido en la literatura científica, que el tensor acústico sobreestima las condiciones en que bifurca el material. (En otras palabras, cuando las ecuaciones que gobiernan el problema para el caso cuasi-estático pierden su carácter elíptico, y unicidad en la solución del problema). A pesar de ello, el tensor acústico, sí que nos da cierta idea, de una manera aproximada en donde se producirán, puntos con bifurcación. Es por ello que es tan importante definirlo adecuadamente en esta sección, de una forma rigurosa matemáticamente hablando. Los tres artículos desarrollados durante este trabajo, giran en torno de este tensor de localización. A continuación se desarrolla una pequeña discusión de los resultados.

### 1.3 Discusión de los resultados

Voy a ser muy breve en la discusión de los resultados. Esto obedece a que en la búsqueda de poder simular numéricamente, miembros tridimensionales de hormigón armado, furtamente reforzados y bajo estados mixtos de tensiones, hasta el mejor conocimiento del autor, una formulación teórica y matemática que de resultados adecuados, cuando existen patrones de multifisuración, no existe. Sabiendo esto, mi posición nunca será intentar justificar algo, que no es justificable. Sin embargo, lo que sí puedo hacer, es decir exactamente en dónde carece de fundamento físico cada artículo publicado. A continuación expongo mis puntos de vista, en donde cada artículo puede ser enriquecido.

- **Artículo A.** A mixture theory based method for three-dimensional modeling of reinforced concrete members with embedded crack finite elements.

Si bien las respuestas obtenidas numéricamente en este artículo son aceptables. La ménsula de hormigón armado, está simulada por un modelo de daño no simétrico. Por lo cuál, no posee la respuesta plástica del núcleo generado por la armadura. Desafortunadamente cuando se realizó la prueba experimental, en 1960, lo único que les interesaba era obtener la carga pico. Siendo imposible observar el comportamiento en la curva estructural antes de llegar a esta carga. Estoy seguro de que esta formulación en este artículo esta equivocada. Debido a que la curva estructural tendrá más rigidez, que la que le corresponde. Cualquier formulación utilizando un modelo de daño para simular miembros de hormigón armado con estribos. (Siendo lo que realmente se necesita en las estructuras) estará completamente equivocada.

- **Artículo B.** On the numerical resolution of the discontinuous material bifurcation problem.

Al intentar modelar el núcleo antes mencionado, es necesario contar con un algoritmo numérico, que me permita encontrar el instante en que bifurca el material, cuando estos puntos materiales están conformados por varillas de acero y hormigón en masa. Hasta el mejor conocimiento del autor, no existe ninguna forma cerrada de resolver este problema. Lo que si se puede desarrollar, es utilizar los valores propios del tensor acústico, para que me digan exactamente en que momento bifurca el material. Pero desgraciadamente este algoritmo solo funciona adecuadamente, cuando el operador constitutivo tangente compuesto, es simétrico. Es decir, el núcleo al modelarlo por un modelo plástico no asociado, pierde su carácter simétrico, siendo inadecuado utilizar este algoritmo.

- **Artículo C.** A macroscopic damage-plastic constitutive law for modeling quasi-brittle fracture and ductile behavior of concrete.

Para poder simular adecuadamente el núcleo que se genera por la armadura de acero, en el interior de los miembros estructurales, ensayos experimentales a compresión, han arrojado datos en que estos puntos materiales poseen un comportamiento plástico. Es por ello que a la formulación se le incorporó, daño y plasticidad para el hormigón en masa y al mismo tiempo incorporar varillas de acero con un modelo de plasticidad, uniendo todos estos ingredientes con la metodología de discontinuidades fuertes. Sin embargo el instante que cae abruptamente la curva estructural, NO he sido capaz de encontrarlo. Esto obedece a que el comportamiento plástico no asociado, no

le incorporé ablandamiento en el artículo. Aunque realice sin numerables pruebas numéricas, intentando incorporar diferente tipos de salto, en el campo de desplazamientos; es decir, un salto caracterizado en la parte del daño y un salto caracterizado por la parte de plasticidad, no obtuve la respuesta deseada. El ablandamiento en plasticidad no asociada con daño, es un tema un poco escabroso y es exactamente ahí en donde se tiene que investigar.

#### 1.4 Conclusion final

La conclusión es demasiada simple y es tan sencilla que se puede desarrollar en pocas líneas. Si lo que se intenta modelar numéricamente, son piezas de hormigón armado tridimensionales, con varillas de acero de refuerzo a flexión, considerando la tensión y compresión, en el miembro estructural, así como la incorporación de estribos de acero, para que emerja de forma natural, un núcleo elasto-plástico, tan importante en el diseño real de estructuras; será necesario incorporar una formulación que no se desarrolle por un modelo macroscópico- **La respuesta tiene que venir de modelos microscópicos, tanto moleculares como atomísticos y que de ahí nazca de forma real el instante en que bifurque el punto material.**

#### 1.5 Final Conclusion

The conclusion is too simple and it is possible develop it in a few lines. If we try to model numerically, structural members reinforced concrete three-dimensional, equipped with steel reinforcing rods in bending, and stirrups of steel in shear, to emerge in a natural manner an elastic-plastic core (so important in the actual design of structures), in which this core is subjected to states of the stress in tension and compression, it is necessary to include a formulation that is not developed by a macroscopic models, **the answer has to come from microscopic models, both atomistic and molecular, and precisley with this models, the instant of bifurcation born in a natural manner.**

#### Referencias

- [1] Armero, F. (1999). Large-scale modeling of localized dissipative mechanisms in a local continuum: applications to the numerical simulation of strain localization in rate-dependent inelastic solids. *Mech. Cohesive-Frictional Mater*, pages 101–131. [14](#)
- [2] Armero, F. and Garikipati, K. (1995). Recent advance in the analysis and numerical simulation of strain localization in inelastic solids. *In D. R. J. Owen and*

- E. Oñate, editors, Computational Plasticity: Fundamentals and Applications*, pages 547–561.
- [3] Asaro, M. (1983). Micromechanics of crystals and polycrystals. *Advances in applied mechanics*, 23:1–115. [22](#)
- [4] Atkin, R. and Craine, R. (1976). Continuum theories of mixture basic theory and historical development. *Quant. J. Mech. Appl. Math.*, 29:209–244.
- [5] Barenblatt, G. I. (1962). The mathematical theory of equilibrium of cracks in brittle fracture. *Adv. Appl. Mech.*, 7:55–129.
- [6] Bažant, Z. (1983). Comment on orthotropic models for concrete and geomaterials. *Journal of Engineering Mechanics Division, ASCE*, 109(3):849–865.
- [7] Bažant, Z., Caner, F., Carol, I., Adley, M., and Akers, S. (2000). Microplane model m4 for concrete: I formulation with work-conjugate deviatoric stress. *Journal of Engineering Mechanics, ASCE*, 126(9):944–961.
- [8] Bažant, Z. and Oh, B. (1983). Crack band theory for fracture of concrete. *Materials and Structures, RILEM*, 16(3):155–177.
- [9] Bažant, Z. and Pijaudier-Cabot (1988). Nonlocal damage, localization, instability and convergence. *Journal of applied mechanics*, 55:287–293.
- [10] Bažant, Z. and Planas, J. (1998). *Fracture and size effect in concrete and other quasibrittle materials*. CRC, first edition.
- [11] Bažant, Z., Xiang, Y., and Prat, P. (1996). Microplane model for concrete. i: Stress-strain boundaries and finite strain. *J. Struct. Eng, ASCE*, 122(3):245–254.
- [12] Béchet, E., Minnebo, H., Moës, N., and Burgardt, B. (2005). Improved implementation and robustness study of the xfem for the stress analysis around cracks. *International journal for numerical methods in engineering*, (64):1033–1056.
- [13] Becker, E. and Bürger, W. (1975). *Kontinuumsmechanik*. B.G. Teubner.
- [14] Belytschko, T. and Black, T. (1999). Elastic crack growth in finite elements with minimal remeshing. *International journal of fracture mechanics*, 45:601–620.
- [15] Belytschko, T., Chen, H., Xu, J., and Zi, G. (2003). Dynamic crack propagation based on loss of hyperbolicity and new discontinuous enrichment. *International journal for numerical methods in engineering*, 58:1873–1905.
- [16] Belytschko, T., Fish, J., and Engelmann, E. (1988). A finite element with embedded localization zones. *Computers methods in applied mechanics and engineering*, 70:59–89.

- [17] Belytschko, T., Kam, W., and Moran, B. (2000). *Nonlinear finite elements for continua and structures*. Wiley.
- [18] Bielger, M. and Mehrabadi, M. (1995). An energy-based constitutive model for anisotropic solids subject to damage. *Mechanics of Materials*, 19(2-3):151–164.
- [19] Bigoni, D. (1999). Bifurcation and instability on non associative elastoplastic solids. *CISM Material instabilities in elastic and plastic solids*, 414:1–52. [22](#)
- [20] Blanco, S. (2006). *Contribuciones a la simulación numérica del fallo material en medios tridimensionales mediante la metodología de discontinuidades fuertes de continuo*. PhD thesis, Universidad Politécnica de Cataluña.
- [21] Bowen, R. (1976). *Theory of mixture*. Academic Press, New York. A.C. Eringen, ed. Continuum Physic 3.
- [22] Bowen, R. (1989). *Introduction to continuum mechanics for engineers*. Plenum Press.
- [23] Brends, A. H., Sluys, L. J., and Borst, R. D. (1997). Discontinuous modeling of mode-i failure. In D. R. J. Owen and E. Oñate, editors, *Computational Plasticity: Fundamentals and Applications*, pages 751–758.
- [24] Bresler, B. and Scordelis, A. (1963). Shear strength of reinforced concrete beams. *J.Am Concr. Inst.*, 60(1):51–72.
- [25] Bugeda, G. (1990). *Utilización de técnicas de estimación de error y generación automática de mallas en procesos de optimización estructural*. PhD thesis, UPC.
- [26] Carol, I. and William, K. (1996). Spurious energy dissipation/generation in modelling of stiffness recovery for elastic degradation and damage. *International journal of solids structure*, 33(20-22):2939–2957.
- [27] Cervera, M., Agelet, C., and Chiumenti, M. (2002). Comet: Coupled mechanical and thermal analysis, technical report it-308. Technical report, [www.cimne.upc.es](http://www.cimne.upc.es).
- [28] Chaboche, J. (1988a). Continuum damage mechanics: Part ii - damage growth, crack initiation and crack growth. *Journal of applied mechanics*, 55:65–72.
- [29] Chaboche, J. (1990). *On the description of damage induced anisotropy and active-passive damage effects*, volume 109. Damage Mechanics in Engineering Materials, AMD, ASME.
- [30] Chaboche, J. (1993). Development of continuum damage mechanics for elastic solids sustaining anisotropic and unilateral condition. *International journal Damage Mechanics*, 2(311-329).

- [31] Chaboche, J. L. (1988b). Continuum damage mechanics: Part i- general concepts. *Journal of applied mechanics*, 55:59–64.
- [32] Chachine, E., Laborde, P., and Renard, Y. (2006). A quasi-optimal convergence result for fracture mechanics with xfm. *ACademic des Scinces, Paris, Ser*, 342(I):527–532.
- [33] Chadwick, P. (1976). *Continuum mechanics, concise theory and problems*. George Allen and Unwin Ltd, London.
- [34] Chaves, E. (2003). *A three dimensional setting for strong discontinuities modeling in failure mechanics*. PhD thesis, UPC.
- [35] Chen, A. and Chen, W. F. (1975). Constitutive relations for concrete. *Journal of Engineering Mechanics Division, ASCE*, 101:465–481.
- [36] Chessa, J. and Belytschko, T. (2004). Arbitrary discontinuities in space time finite element by level sets and xfm. *Internation journal for numerical methods in engineering*, 53:1959–1977.
- [37] Chiarelli, A. and Shao, J. (2003). Modeling of elastoplastic damage behavior of a claystone. *International Journal of Plasticity*, 19(1):23–45.
- [38] Chow, J. and Wang, J. (1987). An anisotropic theory of continuum damage mechanics for ductile fracture. *Engineering Fracture Mechanics*, 27(547-558).
- [39] Christoffersen, J., Mehrabadi, M., and Nemat-Nasser, S. (1981). A micromechanical description of granular material behavior. *Journal of applied mechanics, ASME*, 48(2):239–344.
- [40] Ciarlet, P. (1988). *Mathematical elasticity, volume I: Three-dimensional elasticity studies in mathematics and applications*. North-Holand, Amsterdam.
- [41] Cicekli, U., Voyiadjis, G., and Abu Al Rub, R. (2007). A plasticity and anisotropic damage model for plain concrete. *International Journal of Plasticity*, 23(10-11):1874–1900.
- [42] Coleman, B. and Noll, W. (1963). The thermodynamics of elastic materials with heat conduction and viscosity. *Archive for rotational mechanics and analysis*, 13:167–178.
- [43] Contrafatto, L. and Cuomo, M. (2002). A new thermodynamically consistent continuum model for hardening plasticity coupled with damage. *International journal of solids and structures*, 39:6241–6271.
- [44] Cope, R., Rao, P., Clark, L., and Norris, P. (1980). *Modelling of reinforced concrete behaviour for finite element analysis of bridge slabs*. Numerical Methods for nonlinear problems.

- [45] Cordebois, J. and Sidoroff, F. (1982). Endommagement anisotrope en élasticité et plasticité. *J. de Mécanique Théorique et Appliquée*, pages 45–60. Numéro Spécial.
- [46] Costin, L. (1985). Damage mechanics in post-failure regime. *Mech. Mater.*, 4(149-160).
- [47] Crisfield, M. (1991). *Non-linear finite element analysis of solids and structures*. John Wiley and Sons, New York, NY.
- [48] Crisfield, M. and Willis, J. (1987). Numerical comparisons involving different "concrete-models". In IABSE REPORTS 54 177-187, Colloquium on computational mechanics of reinforced concrete, Delft University Press.
- [49] Daux, C., Moës, N., Dolbow, J., Sukumark, N., and Belytschko, T. (2000). Arbitrary branched and intersecting cracks with the extended finite element method. *International journal for numerical methods in engineering*, (48):1741–1760.
- [50] Davidson, L. and Stevens, A. (1973). Thermomechanical constitution of spalling elastic bodies. *J. Appl. Phys.*, 44:667–674.
- [51] Díaz, G. (2011). Composite mesh library. *CIMNE*.
- [52] Díaz, G., Oliver, J., Manzoli, O. L., and Huespe, A. (2008). Un modelo de discontinuidades fuertes para la simulación numérica de la fractura de piezas de hormigón armado en tres dimensiones. *Anales de la mecánica de la fractura*, 2:498–503.
- [53] DeBorst, R. (1986). *Non-linear analysis of frictional materials*. PhD thesis, Delft University of Technology, The Netherlands.
- [54] DeBorst, R. (1991). Simulation of strain localization: a reappraisal of the cosserat continuum. *Engineering Computations*, 8:317–332.
- [55] DeBorst, R. (2001). Some recent issues in computational failure mechanics. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, 52:63–95.
- [56] DeBorst, R. and Mühlhaus, H. (1992). Gradient dependant plasticity: formulation and algorithmic aspects. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, 3:521–539.
- [57] DeBorst, R. and Nauta, P. (1985). Non orthogonal cracks in a smeared finite element model. *Engineering Computations*, 13(2):35–46.
- [58] Dolbow, J. (1999). *An extended finite element method with discontinuous enrichment for applied mechanics*. PhD thesis, Theoretical and applied mechanics, Northwestern University, USA.

- [59] Dolbow, J., Fried, E., and Ji, H. (2004). A numerical strategy for investigating the kinetic response of stimulus responsive hydrogels. *Computational methods in applied mechanics and engineering*, 194:4447–4480.
- [60] Dolbow, J., Moës, N., and Belytschko, T. (2000a). Discontinuous enrichment in finite elements with a partition of unity method. *Finite Elements in Analysis and Design*, 36:235–260.
- [61] Dolbow, J., Moës, N., and Belytschko, T. (2000b). Modeling fracture in mindlin-reissner plates with the extended finite element method. *International Journal of Solids and Structures*, 37:7161–7183.
- [62] Dolbow, J., Moës, N., and Belytschko, T. (2001). An extended finite element method for modeling crack growth with frictional contact. *Computers methods in applied mechanics and engineering*, 190:6825–6846.
- [63] Douglil, J. (1976). On stable progressively fracturing solids. *J. Appl. Math. Phys.*, 27:423–437.
- [64] Dragon, A. and Mróz, Z. (1979). A continuum model for plastic-brittle behaviour of rock and concrete. *Int. J. Engng. Sci.*, 17:121–137.
- [65] Dugdale, D. (1960). Yielding of sheets containing slits. *J. Mech. Phys. Solids*, pages 100–114.
- [66] Dvorkin, E. N., Cuitiño, A. M., and Gioia, G. (1990). Finite elements with displacement interpolated embedded localization lines insensitive to mesh size and distortions. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 90:829–844.
- [67] Elguedj, T. and Gravouil, A. and Combescure, A. (2006). Appropriate extended functions for xFEM simulation of plastic fracture mechanics. *Computational methods in applied mechanics and engineering*, 195:501–515.
- [68] Eringen, A. (1981). On nonlocal plasticity. *International journal of Engineering Science*, 19:1461–1474.
- [69] Eringen, A. (1983). Theories of nonlocal plasticity. *International journal of Engineering Science*, 21(741-751).
- [70] Eringen, A. and Ingram, J. (1965). A continuum theory of chemically reacting media-i. *International journal of Engineering Science*, 3:197–212.
- [71] Este, G. and William, K. J. (1994). A fracture-energy based constitutive formulation for inelastic behavior of plain concrete. *Journal of Engineering Mechanics, ASCE*, 120:1983–2011.
- [72] Etse, G. (1992). *Theoretische und numerische untersuchung zum diffusen und lokalisierten versagen in beton*. PhD thesis, University of Karlsruhe.

- [73] Evans, R. and Marathe, M. (1968). Microcracking and stress-strain curves for concrete in tension. *Materials and Structures*, 1(1):61–64.
- [74] Feenstra, P. (1992). *Computational aspects of biaxial stress in plain and reinforced concrete*. PhD thesis, Delft University of Technology, The Netherlands.
- [75] Feenstra, P. and De Borst, R. (1996). A composite plasticity model for concrete. *International journal of solids and structures*, 33(5):777–730.
- [76] Feenstra, P., Rots, J., Amesen, A., Teigen, J., and Hoiseth, K. (1998). A 3d constitutive model for concrete based on co-rotational concept. *Proceedings of EURO-C*, 1:13–22.
- [77] Fung, Y. (1977). *A first course in continuum mechanics*. Prentice-Hall.
- [78] Galindo, M. (1993). *Una metodología para el análisis numérico del comportamiento resistente no lineal de presas de hormigón bajo cargas estáticas y dinámicas*. PhD thesis, UPC.
- [79] Garikipati, K. (1996). *On strong discontinuities in inelastic solids and their numerical simulation*. PhD thesis, Standford University. 14
- [80] GID (2002). The personal pre and post-processor. Technical report, [www.gid.cimne.upc.es](http://www.gid.cimne.upc.es).
- [81] Grassl, P. (2004). Modelling of dialation of concrete and its effect in triaxial compression. *Finite Elements in Analysis and Disign*, 40(9):1021–1033.
- [82] Grassl, P. and Jirásek, M. (2006). Damage-plastic model for concrete failure. *International journal of solids and structures*, 43:7166–7196.
- [83] Grassl, P., Lundgren, K., and Gylltoft, K. (2002). Concrete in compression: a plasticity theory with a novel hardening law. *International Journal of Solids and Structures*, 20(5205-5223).
- [84] Green, A. and Naghdi, P. (1965). A dynamic theory of interacting continua. *Int. J. Engng. Sci.*, 3:231–241.
- [85] Gupta, A. and Akbar, H. (1984). Cracking in reinforced concrete analysis. *Journal of structural engineering-ASCE*, 110(8):1735–1746.
- [86] Gurtin, M. (1981). *An introduction to continuum mechanics*. Academic Press, Boston.
- [87] Hadamard, J. (1903). Lecons sur la propagation des ondes et les equations de l'hydrodynamique. *Paris, Hermann*. 22, 25, 26
- [88] Han, D. and Chen, W. (1986). Strain-space plasticity formulation for hardening-softening materials with elasto-plastic coupling. *International Journal of Solids and Structures*, 22:935–950.

- [89] Hartl, H. (2002). Development of a continuum-mechanics-based toll for 3d finite element analysis of reinforced concrete structures and application to problems of soli-structure interaction. *Graz University of Technology*.
- [90] Haupt, P. (2002). *Continuum Mechanics and Theory of Materials*. Springer, second edition.
- [91] Hill, R. (1962). Acceleration waves in solids. *Journal of the Mechanics and Physics of Solids*, 16:1–10. [22](#)
- [92] Holzapfel, G. (2000). *Nonlinear solid mechanics: a continuum approach for engineering*. Wiley, first edition.
- [93] Hueckel, T. and Maier, G. (1977). Incrementally boundary value problem in the presence of coupling of elastic and plastic deformations: a rock mechanics oriented theory. *Internation journal of solids structure*, 13:1–15.
- [94] Ingram, J. and Eringen, A. (1967). A continuum theory of chemically reacting media-ii: Constitutive equations of reacting fluid mixtures. *Int. J. Engng. Sci.*, pages 289–322.
- [95] Jason, L., Huerta, A., Pijaudier Cabot, G., and Ghavamian, S. (2006). An elastic-plastic damage formulation for concrete: application to elementary test and comparison with isotropic damage model. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 195(52):7007–7092.
- [96] Jaunzemis, W. (1967). *Continuum Mechanics*. The McMillan Company.
- [97] Jirásek, M. and Zimmermann, T. (2001a). Embedded crack model. part i: Basic formulation. *Internation journal for numerical methods in engineering*, 50:1269–1290.
- [98] Jirásek, M. and Zimmermann, T. (2001b). Embedded crack model. part ii: Combination with smeared cracks. *Internation journal for numerical methods in engineering*, 50:129–1305.
- [99] Jirásek, M. (2000). Comparative study on finite elements with embedded discontinuities. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 188(1-3):307 – 330.
- [100] Ju, J. (1990). Isotropic and anisotropic damage variables in continuum damage mechanics. *ASCE, J. Engng. Mech.*, 116(12):2764–2770.
- [101] Kachanov, L. (1958). Time of the ruptureprocess under creep conditions. *IVZ Akad. Nauk, S.S.R., Otd Tech Nauk*, 8:26–31.
- [102] Kang, H. (1997). *Triaxial constitutive model for plain and reinforced concrete behavior*. PhD thesis, University of Colorado Boulder, CO.

- [103] Kang, H. and Willam, K. (1999). Localization characteristics of triaxial concrete model. *ASCD, JEM.*, 125:941–950.
- [104] Karihaloo, B. and Xiao, Q. (2003). Modelling of stationary and growing cracks in fe framework without remeshing: a state-of-the-art review. *Computers and Structures*, 81:119–129.
- [105] Klisinski, M., Runesson, K., and Sture, S. (1991). Finite element with inner softening band. *Journal of Engineering Mechanics Division, ASCE*, 117:575–587.
- [106] Krajcinovic, D. and Fonseka, G. (1981). The continuous damage theory of brittle materials. *J. Appl. Mech.*, 48:809–824.
- [107] Laborde, P., Pommier, J., Renard, Y., and Salaün, M. (2005). High-order extended finite element method for cracked domains. *International journal for numerical methods in engineering*, 64:354–381.
- [108] Lade, P. and Kim, M. (1995). Single hardening constitutive model for soil, rock and concrete. *International journal of solids and structures*, 32:1963–1978.
- [109] Ladevéze, P. (1983). Sur une theorie de l'endommagement anisotrope. Technical report, Laboratoire de Mécanique et Technologie, Ecole Normale Supérieure., 61, av. du Pdt. Wilson, 94235, Cachan Cedex, France.
- [110] Larsson, R., Runesson, K., and Sture, S. (1996). Embedded localization band in undrained soil based on regularized strong discontinuities-theory and fe-analysis. *International journal of solids structure*, 33:3081–3110.
- [111] Lee, J. and Fenves, G. (1998). Plastic-damage model for cyclic loading of concrete structures. *Journal of Engineering Mechanics, ASCE*, 124(8):892–900.
- [112] Lemaitre, J. (1984). How to use damage mechanics. *Nucl. Engng. Des.*, 80:233–245.
- [113] Leonhardt, F. (1965). Reducing the shear reinforcement in reinforced concrete slabs. *Mag. Concrete Res.*, 17(187-198).
- [114] Levy, M. (1870). Mémoire sur des équations générales des mouvements intérieurs des corps solides ductiles au delà des limites où l'élasticité pourrait les ramener à leur premier état. *C. R. Acad. Arts Sci.*, 70:1323.
- [115] Lin, F., Bažant, Z., Chern, J., and Marchertas, A. (1987). Concrete model with normality and sequential identification. *Computers and Structures*, 26:1011–1025.
- [116] Linero, D. (2006). *Un modelo del fallo material en el hormigón armado, mediante la metodología de discontinuidades fuertes de continuo y la teoría de mezclas*. PhD thesis, UPC.

- [117] Litton, R. (1976). *A contribution to the analysis of concrete structures under cyclic loading*. PhD thesis, University of California, Berkley. CA.
- [118] Lofti, H. R. and Shing, P. B. (1995). Embedded representation of fracture in concrete with mixed finite elements. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, 38:1307–1325.
- [119] Lubarda, V, Krajcinovic, D., and Mastilovic, S. (1994). Damage model for brittle elastic solids with unequal tensile and compressive strengths. *Engng. Fract. Mech.*, 49(5):681–697.
- [120] Lubliner, J. (1990). *Plasticity theory*. Macmillan publishing company.
- [121] M., J. and Bazant, Z. (2002). *Inelastic analysisi of structures*. Wiley.
- [122] Maier, G. and Hueckel, T. (1979). Nonassociated and oupled flow rules of elastoplasticity for rock-like materials. *Int. J. Rock. Mech. Min. Sci. Geomech.*, 16:77–92.
- [123] Malvern, L. (1969). *Introduction to the mechanics of a continuos medium*. Prentice-Hall Englewood cliffd.
- [124] Mandel, J. (1966). Conditions de stabilité et postulat de drucker. *In rheology and sail mechanics*, pages 58–68. [22](#)
- [125] Manzoli, O. (1998). *Un modelo analítico y numérico para la simulación de discontinuidades fuertes en la mecánica de sólidos*. PhD thesis, Universidad Politécnica de Cataluña. [14](#)
- [126] Manzoli, O., Oliver, J., Huespe, A., and G, D. (2008). A mixture theory based method for three-dimensional modeling of reinforced concrete members with embedded crack finite elements. *Computers and Concrete*, Vol. 5(No. 4):401–416.
- [127] Marsden, J. and Hughes, T. (1994). *Mathematical foundations of elasticity*. Dover, New York.
- [128] Mase, G. T. and Mase, G. E. (1999). *Continuum mechanics for engineers*. CRC.
- [129] Mattei, N. J., Mehrabadi, M. M., and Zhu, H. (2007). A micromechanical constitutive model for the behavior concrete. *Mechanics of Materials*, 39:357–379.
- [130] Mayer, J. (1845). Die organische bewegung in ihrem zusammenhange mit dem stoffwechsel, dechsler, heilbronn.
- [131] Mazars, J. and Lemaitre, J. (1984). Application of continuos damage mechanics to strain and fracture behavior of concrete. *Application of fracture mechanics to cementitous composites*, NATO Advanced research worksop, Northwestern university (Edited by S. P. Shah):375–388.

- [132] Mazars, J. and Pijaudier-Cabot, G. (1989). Continuum damage theory - application to concrete. *ASCE, J. Engng. Mech.*, 115:345–365.
- [133] Mehmehl, A. and Freitag, W. (1967). Tragfähigkeitsversuche and stahlbetonkonsolen. *Bauingenieur*, 42:362–369.
- [134] Mehrabadi, M., Nemat-Nasser, S., and Oda, M. (1982). On statistical description of stress and fabric in granular materials. *Int. J. Num. Anal. Meth. Geomech.*, 6(95-108).
- [135] Melenk, J. and Babuska, I. (1996). The partition of unity finite element method: basic theory and applications. January, ch–8092 zurich, switzerland, Seminar für angewandte mathematik, eidgenössische technische hochschule, research report No. 96-01.
- [136] Menétrey, P., Walther, R., Zimmermann, T., Willam, K., and Regan, P. (1997). Simulation of punching failure in reinforced-concrete structures. *Journal of Structural Engineering, ASCE*, 123(5):652–659.
- [137] Menétrey, P. and Willam, K. (1995). Triaxial failure criterion for concrete and its generalization. *ACI Structural Journal*, 3:311–318.
- [138] Moës, N. and Belytschko, T. (2002). X-fem : De nouvelles frontières pour les éléments finis. *Revue Européenne des Éléments Finis*, 11:305–318.
- [139] Meschke, G., Lackner, R., and Mang, H. (1988). An anisotropic elastoplastic-damage model for plain concrete. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, 42(4):703–727.
- [140] Mühlhaus, H. and Aifantis, E. (1991). A variational principle for gradient plasticity. *International Journal of Solids and Structures*, 28:845–857.
- [141] Mises, R. (1913). Mechanik der festen körper im plastisch-deformablem zustand. *Göttinger Nachrichten (math.-phys. Klasse)*, 1:582–592.
- [142] Mohamad Hussein, A. and Shao, J. (2007). Modelling of elastoplastic behaviour with non-local damage in concrete under compression. *Computers and Structures*, 85(23-24):1757–1768.
- [143] Mohammadi, S. (2008). *Extended finite element method*. Blackwell, first edition.
- [144] Moës, N. and Belytschko, T. (2002). Extended finite element for cohesive crack growth. *Engineering Fracture Mechanics*, 69:819–833.
- [145] Moës, N., Dolbow, J., and Belytschki, T. (1999). A finite element method for crack growth without remeshing. *International journal for numerical methods in engineering*, 46:131–150.

- [146] Mosler, J. (2005). Numerical analyses of discontinuous material bifurcation: strong and weak discontinuities. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 194:979–1000. 22
- [147] Nádai, A. (1931). *Plasticity*. McGraw-Hill.
- [148] Nemat-Nasser, S. and Mehrabadi, M. (1984). *Mechanics of Engineering Materials*. Desai, C.S. and Gallagher, R.H. John Wiley and Sons, New York, NY.
- [149] Ngo, D. (1975). A network-topological approach to the finite element analysis of progressive crack growth in concrete members. *University of California, Berkeley*.
- [150] Ngo, N. and Scordelis, A. (1967). Finite element analysis of reinforced concrete beams. *J. Am. Concr. Inst.*, 64:152–163.
- [151] Oda, M., Nemat-Nasser, S., and Mehrabadi, M. (1982). A statistical study of fabric in a random assembly of spherical granules. *Int. J. Num. Anal. Meth. Geomech*, 6:77–94.
- [152] Ogden, R. (1997). *Non-linear elastic deformation*. Dover, New York.
- [153] Oliver, J. (1996a). Modelling strong discontinuities in solid mechanics via strain softening constitutive equations. part 1: Fundamentals. *International journal for numerical methods in engineering*, 39:3575–3600. 14
- [154] Oliver, J. (1996b). Modelling strong discontinuities in solid mechanics via strain softening constitutive equations. part 2: Numerical simulation. *International journal for numerical methods in engineering*, 39:3601–3623. 14
- [155] Oliver, J. (2000). On the discrete constitutive models induced by strong discontinuity kinematics and continuum constitutive equations. *International journal of solids and structures*, 37:7207–7229.
- [156] Oliver, J. and Agelet, C. (2002). *Mecánica de medios continuos para ingenieros*. CPET, second edition.
- [157] Oliver, J., Cervera, M., and Manzoli, O. (1999). Strong discontinuities and continuum plasticity models: the strong discontinuity approach. *International journal of plasticity*, 15(319-351). 14
- [158] Oliver, J., Cervera, M., Oller, S., and Lubliner, J. (1990). Isotropic damage models and smeared crack analysis of concrete. *2nd International Conference on Computer-Aided Analysis and Design of Concrete structures*.
- [159] Oliver, J. and Huespe, A. (2004a). Continuum approach to material failure in strong discontinuity settings. *Computer methods in applied mechanics and engineering*, 193:3195–3220.

- [160] Oliver, J. and Huespe, A. (2004b). Theoretical and computational issues in modelling material failure in strong discontinuity scenarios. *Computer methods in applied mechanics and engineering*, 193:2987–3014. [14](#), [23](#)
- [161] Oliver, J., Huespe, A., Blanco, S., and Linero, D. (2005). Stability and robustness issues in numerical modeling of material failure with strong discontinuity approach. *Computers methods in applied mechanics and engineering*, 195:7093–7114.
- [162] Oliver, J., Huespe, A., and Cante, J. (2008a). An implicit/explicit integration scheme to increase computability of non.linear material and contact/friction problems. *Computer methods in applied mechanics and engineering*, 197:1865–1889.
- [163] Oliver, J., Huespe, A., and Samaniego, E. (2003a). A study on finite elements for capturing strong discontinuities. *International journal for numerical methods in engineering*, 56:2135–2161. [13](#), [14](#)
- [164] Oliver, J., Huespe, A., Samaniego, E., and Chaves, E. (2003b). On the strong discontinuity approach in finite deformation settings. *International journal for numerical methods in engineering*, 56:1051–1082. [14](#)
- [165] Oliver, J., Huespe, A., Samaniego, E., and Chaves, E. (2004). Continuum approach to the numerical simulation of material failure concrete. *International journal for numerical and analytical methods in geomechanics*, 28:609–632. [14](#)
- [166] Oliver, J., Linero, D., Huespe, A., and Manzoli, O. (2008b). Two-dimensional modeling of mterial failure in reinforced concrete by means of a continuum strong discontinuity approach. *Appl. Mech. Eng.*, 197(332-348). [10](#)
- [167] Oller, S. (2001). *Fractura mecánica. Un enfoque global*. CIMNE, first edition.
- [168] Oller, S. and Oñate, E. (1996). A hygro-thermo-mechanical constitutive model for multiphase composite materials. *International journal of solids and structures*, 33(20-22):3179–3186.
- [169] Oller, S., Oñate, E., Miquel, J., and Botello, S. (1996). A plastic damage constitutive model for composite materials. *International journal of solids and structures*, 33(17):2501–2518.
- [170] Oller, S. H. (1988). *Un modelo de daño continuo para materiales friccionales*. PhD thesis, UPC.
- [171] Ortiz, M. (1985). A constitutive theory for the inelastic behavior concrete. *Mech. Mater.*, (4):67–93.
- [172] Ortiz, M. (1987). An analytical study of the localized failure modes of concrete. *Mech. Mater.*, 6:159–174. [22](#)

- [173] Ortiz, M., Leroy, Y., and Needleman, A. (1987). A finite element method for localized failure analysis. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 61:189–214. 22
- [174] Ortiz, M. and Popov, E. (1982a). A physical model for inelasticity of concrete. *Proc. Roy. Soc. London, A*(383):101–125.
- [175] Ortiz, M. and Popov, E. (1982b). Plain concrete as a composite material. *Mechanics of materials*, 1:139–150.
- [176] Ottosen, N. and Runesson, K. (1991). Properties of discontinuous bifurcation solutions in elasto-plasticity. *International journal of solids and structures*, 27(4):401–421. 23
- [177] Ouyang, C. and Shah, P. (1994). Fracture energy approach for predicting cracking of reinforced concrete tensile members. *ACI Struct. J.*, pages 69–78.
- [178] Ouyang, C., Wollrab, E., Kulkarni, S., and Shah, P. (1997). Prediction of cracking response of reinforced concrete tensile members. *J. Struct. Eng. ASCE.*, 123:70–78.
- [179] Pekau, O. and Zhangm, Z. (1994). Strain-space cracking model for concrete and its application. *Computers and Structures*, 51:151–162.
- [180] Pijaudier-Cabot, G. and Bažant, Z. (1987). Nonlocal damage theory. *Journal of Engineering Mechanics, ASCE*, 113:1512–1533.
- [181] Pramono, E. and William, K. (1989). Fracture energy-based plasticity formulation of plain concrete. *Journal of Engineering Mechanics, ASCE*, 115:1183–1203.
- [182] Pulido, M. (2004). *Contribuciones a la simulación numérica del fallo material a grandes deformaciones*. PhD thesis, UPC.
- [183] Rashid, Y. (1968). Analysis of prestressed concrete pressure vessels. *Nuclear Engineering and Design*, 7(4):334–344.
- [184] Reddy, J. (2004). *An introduction to nonlinear finite element analysis*. Oxford.
- [185] Rice, J. (1968). *Mathematical analysis in the mechanics of fracture*. Fracture , Academic Press.
- [186] Rice, J. (1976). The localization of plastic deformation. *W.T. Koiter (Ed), Theoretical and Applied Mechanics, North-Holland*, pages 207–220. 23
- [187] Rice, J. and Rudnicki, J. (1980). A note on some feature of the theory of localization of deformation. *International Journal of Solid and Structures*, 16:597–605. 22

- [188] Rots, J. and Blaauwendraad, J. (1989). Crack models for concrete: discrete or smeared? fixed, multi-directional or rotating?. *Heron*, 34(1).
- [189] Rudnicki, J. and Rice, J. (1975). Condition for the localization of deformations pressure sensitive dilatant materials. *Journal of the Mechanics and Physics of Solids*, 23:371–394.
- [190] Runesson, K., Ottosen, N. S., and Peric, D. (1991). Discontinuous bifurcations of elasticplastic solutions at plane stress and plane strain. *International journal of plasticity*, 7:99–121. [22](#)
- [191] Saint-Venant, B. (1870). Mémoire sur l'établissement des équations différentielles mouvements intérieures opérés dans les corps solides ductiles au delà des limites ou l'élasticité pourrait les ramener à leur premier état. *C. R. Acad. Arts Sci.*, 70:473.
- [192] Samaniego, E. (2003). *Contributions to the continuum modelling of strong discontinuities in two-dimensional solids*. PhD thesis, Universidad Politécnica de Cataluña. [23](#)
- [193] Sanchez, P. J., Huespe, A. E., Oliver, J., Díaz, G., and Sonzogni, V. E. (2011). A macroscopic damage-plastic constitutive law for modeling quasi-brittle fracture and ductile behavior of concrete. *International journal for numerical and analytical methods in geomechanics*.
- [194] Shawki, T. and Clifton, R. (1989). Shear band formation in thermal viscoplastic materials. *Mech. Mater.*, 8:13–43. [22](#)
- [195] Simo, J. and Hughes, T. (1998). *Computational Inelasticity*, volume 7 of *Interdisciplinary applied mathematics*. Springer, first edition.
- [196] Simo, J. and Ju, J. (1987a). Strain- and stress-based continuum damage models- i. formulation. *International journal of solids and structures*, 23(7):821–840.
- [197] Simo, J. and Ju, J. (1987b). Strain- and stress-based continuum damage models- ii. computational aspects. *International journal of solids and structures*, 23(7):841–869.
- [198] Simo, J. and Oliver, J. (1994). A new approach to the analysis and simulation of strong discontinuities. *Fracture and damage in quasi-brittle structures*, pages 25–39.
- [199] Simo, J., Oliver, J., and Armero, F. (1993). An analysis of strong discontinuities induced by strain-softening in rate-independent inelastic solids. *Computational mechanics*, 12(5):277–296. [14](#)

- [200] Simo, J. and Rifai, S. (1990). A class of mixed assumed strain methods and the method of incompatible modes. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, 29:1595–1638. 13
- [201] Simo, J. and Taylor, R. (1985). Consistent tangents operators for rate independent elastoplasticity. *Computational methods in applied mechanics and engineering*, 48:101–118.
- [202] Sluys, L. J. (1997). Discontinuous modeling of shear bending. In D. R. J. Owen and E. Oñate, editors, *Computational Plasticity: Fundamentals and Applications*, pages 735–744.
- [203] Spancer, A. (1980). *Continuum mechanics*. Dover, London.
- [204] Stakgold, M. (1979). *Green 's functions and boundary value problem*. Jhon Wiley and Sons. 17
- [205] Steinmann, P. and William, K. (1991). *Localization within the framework of microplolar elasto-plasticity*. Advances in Continuum Mechanics. V. Mannl, and Najar, J. and Brüller, O.
- [206] Suaris, W. and Shah, S. (1984). Rate-sensitivity damage theory for brittle solids. *ASCE, J. Engng. Mech.*, 110(6):985–997.
- [207] Suidan, M. and Schnobrich, W. (1973). Finite element analysis of reinforced concrete. *Journal of the structural division*, 99(10):2109–2122.
- [208] Sukumar, n., Moës, N., Moran, B., and Belytschko, T. (2000). Extended finite element method for three-dimensional crack modeling. *Internation journal for numerical methods in engineering*, (48):1549–1570.
- [209] Sukumar, N. and Prevost, J. (2003). Modeling quasi-static crack growth with the extended finite element. part i: Computer implementation. *International Journal of Solids and Structures*, (40):7513–7537.
- [210] Thomas, T. (1961). *Plastic flow and fracture in solids*. Academic Press. 22
- [211] Thomson, W. (1851). On the dynamical theory of heat, with numerical results deduced from mr. joule 's equivalent of a thermal unit, and m. regnault's observations on steam. *Transactions of the Royal Society of Edinburgh*, 20:261–268, 289–298.
- [212] Tresca, M. (1868). Mémoire sur l'écoulement des corps solide. *Mémoires présentés par divers savants*, 18:733–799.
- [213] Truesdell, C. (1977). *A first course in rotational continuum mechanics*, volume 2. Academic Press, New York.

- [214] Truesdell, C. and Noll, W. (1965). *The non-linear field theories of mechanics*. Springer, Berlin, second edition. 18
- [215] Truesdell, C. and Toupin, R. (1960). *The classical field theories*. First edition.
- [216] Červenka, J. and Papanikolaou, V. K. (2008). Three dimensional combined fracture-plastic material model for concrete. *International journal of plasticity*, 24(12):2192–2220.
- [217] Červenka, V. and Gerstle, K. (1971). Inelastic analysis of reinforced concrete panels part i: Theory. *Publication I.A.B.S.E.*, 31(11):32–45.
- [218] Vecchio, F. and Shim, W. (2004). Experimental and analytical reexamination of classic concrete beam tests. *Journal of structural engineering*, 130(3):460–469.
- [219] Wang, C. and Truesdell, C. (1973). *Introduction to rotational elasticity*. Noordhoff, Leyden.
- [220] Weihe, S. (1995). *Modelle der fiktiven Ribliung zur berechnung der Initiierung and ausbreitung von rissen*. PhD thesis, Stuttgart University.
- [221] Willam, K. and Warnke, K. (1974). Constitutive model for triaxial behaviour of concrete. *Proc. Concrete Struct. Subjected to triaxial stresses, Inst. Assoc. for Bridges and Struct. Eng.*, 19(3):1–30.
- [222] William, K. (2000). *Constitutive models for engineering materials*. Academic Press. Encyclopedia Of Physical Science and Technology, New York, third edition. 603-633. 23
- [223] William, K. and Sobh, N. (1987). *Bifurcation analysis of tangential material operator*, volume 2 of *Transient-Dynamic analysis and constitutive laws for engineering materials*. In: Pande, G.N. Middleton, J. (Eds.).
- [224] Winkler, B., Hofstetter, G., and Niederwanger, G. (2001). Experimental verification of a constitutive model for concrete cracking. *Proc. Instn. Mech. Engrs.*, 215:Part L.
- [225] Wunderlich, W. and Pilkey, W. (2003). *Mechanics of structures. Variational and computational methods*. CRC.
- [226] Yazdani, S. and Schreyer, H. (1988). An anisotropic damage model with dilatation for concrete. *Mech. Mater.*, 7:231–244.
- [227] Zi, G., Song, J., Budyn, E., Lee, S., and Belytschko, T. (2004). A method for growing multiples cracks without remeshing and its application to fatigue crack growth. *Modeling and simulations for material science and engineering*.

**2.1 Artículo 1. A mixture theory based method for three-dimensional modeling of reinforced concrete members with embedded crack finite elements**

El artículo presenta una metodología para modelar miembros de concreto reforzado tridimensionales mediante elementos de discontinuidad embebida basado sobre la aproximación de discontinuidades fuertes (CSDA). Los conceptos de la teoría de mezclas son usados para modelar concreto reforzado como un material compuesto en tres dimensiones constituido d concreto con fibras largas (varillas) orientadas en diferentes direcciones y embebidas en el. Los efectos de las varillas son modeladas por un modelo constitutivo fenomenológico ideado para reproducir le comportamiento no-lineal axial, así como, el deslizamiento y la acción de dovela. El artículo presenta los modelos constitutivos asumidos para los componentes y las condiciones de compatibilidad seleccionas para el constituyente del compuesto. Análisis numéricas de experimentos existentes de miembros de concreto reforzado son presentados, ilustrando la aplicabilidad de la metodología propuesta.

The paper presents a methodology to model three-dimensional reinforced concrete members by means of embedded discontinuity elements based on the Continuum Strong Discontinuous Approach (CSDA). Mixture theory concepts are used to model reinforced concrete as a 3D composite material constituted of concrete with long fibers (rebars) bundles oriented in different directions embedded in it. The effects of the rebars are modeled by phenomenological constitutive models devised to reproduce the axial non-linear behavior, as well as the bond-slip and dowel action. The paper presents the constitutive models assumed for the components and the compatibility conditions chosen to constitute the composite. Numerical analyses of existing experimental reinforced concrete members are presented, illustrating the applicability of the proposed methodology.

Read this article on the website of the publisher

*Llegiu aquest article a la web de l'editor*

Este artículo puede leerse en la web del editor

[www.techno-press.org](http://www.techno-press.org)

DOI: <http://dx.doi.org/10.12989/cac.2008.5.4.401>

## 2.2 Artículo 2. On the numerical resolution of the discontinuous material bifurcation problem.

El trabajo se centra sobre la resolución numérica de problemas de bifurcación material discontinua como un ingrediente relevante en la mecánica de fallo material computacional. El problema consiste en encontrar las condiciones para que la localización de las deformaciones comience en términos del llamado tiempo de bifurcación, direcciones de localización y modos de localización. Un algoritmo numérico, basado sobre resoluciones iterativas de una pareja del problema de valor propio en términos del tensor de localización es propuesto para tal propósito. El algoritmo muestra que siempre converge a la solución exacta para el caso simétrico ( simetrías mayores y menores del operado constitutivo tangente). En el caso no simétrico (solamente simetrías menores), la solución no es exacta, aunque esta muestra que usando la parte simétrica del tensor de localización en el algoritmo propuesto provee suficiente precisión en la solución para mucho de los casos. Ejemplos numérico ilustran el beneficio de la metodología propuesta en términos de precisión salvando en costo computacional asociado con el problema.

The work focuses on the numerical resolution of the discontinuous material bifurcation problem as a relevant ingredient in computational material failure mechanics. The problem consists of finding the conditions for the strain localization onset in terms of the so-called bifurcation time, localization directions and localization modes. A numerical algorithm, based on the iterative resolution of a coupled eigenvalue problem in terms of the localization tensor, is proposed for such purpose. The algorithm is shown to be always convergent to the exact solution for the symmetric case (major and minor symmetries of the tangent constitutive operator). In the unsymmetric case (only minor symmetries), the solution is no longer exact, although it is shown that using the symmetric part of the localization tensor in the proposed algorithms provides enough accurate solutions for most of cases. Numerical examples illustrate the benefits of the proposed methodology in terms of accuracy and savings in the computational cost associated with the problem.

Read this article on the website of the publisher

*Llegiu aquest article a la web de l'editor*

Este artículo puede leerse en la web del editor

<http://onlinelibrary.wiley.com/doi/10.1002/nme.2870/abstract>

DOI: 10.1002/nme.2870

### 2.3 Artículo 3. A macroscopic damage-plastic constitutive law for modeling quasi-brittle fracture and ductile behavior of concrete.

A new phenomenological macroscopic constitutive model for the numerical simulation of quasi-brittle fracture and ductile concrete behavior, under general triaxial stress conditions, is presented. The model is particularly addressed to simulate a wide range of confinement stress states, as also, to capture the strong influence of the mean stress value in the concrete failure mechanisms.

The model is based on a two-surface damage-plastic formulation. The mechanical behavior in different domains of the stress space is separately described by means of a quasi-brittle or ductile material response:

(i) For positive values of the mean stress (tensile states), an isotropic continuum damage model with strain softening is considered. In this context, and in order to avoid the Boundary Value Problem ill-posedness induced by the softening law, a regularization technique based on the Continuum Strong Discontinuity Approach (CSDA) is adopted, which results equivalent to a damage model with embedded cohesive cracks providing anisotropic responses.

(ii) A plastic model governs the material behavior when the mean stress is negative (confinement states). It is based on the classical plastic flow theory. In particular, a yield criterion similar to that of Willam and coauthors, which depends on the three stress invariants, is used. Additional features defining the plastic response are: an isotropic strain hardening law and a non-associative flow rule. The paper presents the numerical implementation of the model using an efficient integration algorithm, namely, the Impl-Ex scheme. Several widely known experimental tests (such as uniaxial, biaxial and triaxial tests) carried out on concrete specimens are used to calibrate and validate the performance of the proposed formulation. Finally, a classical 2D reinforced concrete beam example is analyzed in order to show the predictive capability of the model in structural analysis applications.

Read this article on the website of the publisher

*Llegiu aquest article a la web de l'editor*

Este artículo puede leerse en la web del editor

<http://onlinelibrary.wiley.com/doi/10.1002/nag.1013/full>

DOI: 10.1002/nag.1013