Estudi i algebraització de certes lògiques: Àlgebres d-completes.

Antonio Torrens Torrell

ESTUDI I ALGEBRAITZACIÓ DE CERTES LÒGIQUES

ÀLGEBRES D-COMPLETES

ESTUDI I ALGEBRAITZACIÓ DE CERTES LÒGIQUES

ÀLGEBRES D-COMPLETES

Per Antoni Torrens Torrell

Departament de Càlcul de Probabilitats

i Estadística Matemàtica

Universitat de Barcelona

Memòria dirigida pel Dr Francesc d'Assis Sales Vallès;

presentada per Antoni Torrens Torrell

per assolir al Grau de Doctor en Matemàtiques

per la Universitat de Barcelona

A la MARIA MARGARITA

INDEX

INTRODUCCIÓ

L'algebraització del càlcul proposicional clàssic dóna lloc a les àlgebres de Tarski-Lindenbaum; la del càlcul proposicional intuicionista a les de Heyting, i la del càlcul proposicional implicatiu positiu, en el que solament hi ha implicació, a les de Hilbert

Una de les tècniques que s'utilitzen en aquestes algebraitzacions, seguint la línia de A Monteiro i A Diego, és la que usa els sistemes deductius, que foren introduïts per A Tarski (27) En un sistema formal per sistema deductiu s'entén un conjunt de fórmules que conté els axiomes i és tancat per les regles de deducció Així, en el càlcul proposicional implicatiu positiu $P^{+}(X)$ sobre el conjunt X, $D\subseteq P^{+}(X)$ és sistema deductiu quan, per qualssevol fórmules α,β,γ tenim

1 - $\alpha, \alpha\rightarrow\beta\in D$, implica $\beta\in D$

2 - $\alpha\rightarrow(\beta\rightarrow\alpha)$ D

3 - $(\alpha\rightarrow(\beta\rightarrow\gamma))\rightarrow((\alpha\rightarrow\beta)\rightarrow(\alpha\rightarrow\gamma))\in D$

Des d'un punt de vista purament algebraic i prescindint del llenguatge formal, podem considerar que disposem d'un conjunt A, no buit, amb una operació binària; el que fa que $D\subsetneq A$ i satisfà

Per tot $a, b, c \in A$:

1 - $a,\ a\ \ b \in D$, implica $b \in D$

2 - $a\ \ (b\ \ a) \in D$

3 - $(a\ \ (b\ \ c))\ \ ((a\ \ b)\ \ (a\ \ c)) \in D$

D reb el nom de sistema deductiu clàssic de $(A,\ )$ La relació: $a \equiv_D b$ si, i només si, $a\ \ b \in D$ i $b\ \ a \in D$, és congruència, i D és classe d'equivalència L'estructura $(A/D,\ ,D)$ rep el nom d'àlgebra de Hilbert

Considerant qüestions purament algebraiques J Pla (12) estudia quines propietats cal conserva i quines no per a poder obtenir un quocient en $(A,\ )$, a partir d'un conjunt $D \subseteq A$, conservant determinades propietats lògiques Així obté uns conjunts que anomena sistemes deductius complets, que per tot $a, b, c \in A$, satisfan:

1 - $a,\ a\ \ b \in D$, implica $b \in D$

2 - si $d \in D$, aleshores $a\ \ d \in D$

3 - $a\ \ a \in D$

4 - $(a\ \ b)\ \ ((c\ \ a)\ \ (c\ \ b)) \in D$

5 - $(a\ \ (b\ \ c))\ \ (b\ \ (a\ \ c)) \in D$

El propòsit d'aquest treball és estudiar les estructures algebraiques que s'obtenen mitjançant aquests sistemes deductius i que hem anomenat àlgebres d-completes

La memòria té quatre parts Les dues primeres són preliminars i les altres constitueixen l'estudi rpoposat

Al Capítol 0 donem tots els conceptes i resultats, ja coneguts, que ens han estat necessaris

Al Capítol I hem estudiat algunes propietats dels sistemes clausura i dels operadors conseqüència, que necessitem en tot el treball És A Tarski (27)-(28) qui introdueix per primera vegada el concepte "operador conseqüència" - Definició 0 1 - En la definició que ell dóna imposa a més que l'operador sigui finitari i que el conjunt sobre el que es defineix sigui numerable Segons el Teorema 0 5, considerar un operador conseqüència és el mateix que considerar un sistema clausura Amdós proporcionen una eina força potent a l'hora d'estudiar les àlgebres d-completes, ja que el conjunt de sistemes deductius - només imposem el modus ponens - de (A,) és un sistema clausura fortament inductiu - o be l'operador conseqüència associat és finitari - Teorema 0.7 - Les estructures que analitzem són àlgebres implicatives - H Rasiowa (18), Definició 0 11 - i per tant hi ha definida una relació d'ordre en el conjunt A Això ens porta ha estudiar sistemes clausura en conjunts ordenats i reticulats D'altra banda per tal d'obtenir els espectres i radicals de l'àlgebra, analitzem els elements distingits d'un sistema clausura - Irreductibles, Completament Irreductibles, Maximals, i Primers

Al Capítol II obtenim les àlgebres d-completes i donem les seves propietats Abans, però, estudiem algunes qüestions que estaven per resoldre i que ens permeten tractar el problema amb més claredat Fou A Tarski (28) qui s'adonà que les lògiques clàssiques satisfan el Teorema de la Deducció Es a dir, si D és un sistema deductiu clàssic i K_D és l'operador conseqüència lligat al sistema clausura dels deductius que contenen D, aleshores:

Per tot $a,b\in A$, i tot $X\subseteq A$

$a\ b\in K_D(X)$ si, i només si, $b\in K_D(X\cup\{a\})$

El recíproc és cert - B Verdú (32) - : Si D és sistema deductiu que satisfà la condició del Teorema, aleshores D és clàssic

J Pla (12) demostra que en el cas que D sigui sistema deductiu complet, satisfà un Teorema de la Deducció feble

Per tot $a,b\in A$ i tot $X\subseteq A$:

$b\in K_D(X\cup\{a\})$ si, i només si, existeix

$n(a,b,K_D(X))\in \mathbb{N}\setminus\{0\}$, tal que $a^n\ b\in K_D(X)$

El recíproc no és cert - J Pla (12) - En la definició II 6 introduïm els sistemes deductius febles que són els que caracteritzen la condició del Teorema de la Deducció feble Hem hagut d'afegir condicions per tal de poder algebritzar les lògiques a que donen lloc Certs tipus de sistemes deductius febles són sistemes deductius clàssics si, i només si, són a més sistemes deductius de tipus-1 - Teorema II 5 - Aquests caracteritzen la condició:

Per tot $a,b \in A$:

$b \in K_D(a)$ si, i només si, $a\ b \in D$,

que no és altra que la condició del Teorema de la Deducció de Tarski en el cas $X = \emptyset$ Seguim, en aquest capítol, obtenint les àlgebres implicatives que resulten dels sistemes deductius complets, febles i de tipus-1 I estudiem les propietats de les àlgebres d-complets En el tercer paràgraf analitzem quines propietats es guanyen quan l'ordre de l'àlgebra confereix al conjunt estructura supra-reticular o reticular - supra-reticles d-complets, definició II 10; reticles d-complets, definició II 11 - I seguint la línia dels treballs de J Abbott (1) i F de A Sales (23)-(24)-(25), estudiem un cas en el que s'obté una operació supra-reticular expressable en termes de l'operació inicial Obtenim les àlgebres de Sales - Definició II 12 -, que generalitzen les d'Abbott - Definició 0 19 - i que quan tenen element mínim - Teorema II 15 - són un reticle distributiu amb negació forta de Morgan

Al Capítol III estudiem el conjunt de sistemes deductius de les àlgebres d-completes, que essent un sistema clausura finitari, ens permet aplicar al seu estudi els resultats del Capítol I Per una part ens donen informació sobre l'estructura de l'àlgebra; així obtenim caracteritzacions de les àlgebres de tipus-1 - Teorema III 3 -, del fet que l'operació sigui la canònica - Teorema III 4 -, i de les àlgebres de Heyting - Teorema III 7 -; en termes dels sistemes deductius Per l'altre, ja que en aquestes àlgebres el reticle dels sistemes deductius i el reticle de les congruències poden identificar-se - Teorema II 18 -, podem analitzar els espectres i els radicals amb aquells Primerament ens ha calgut veure la distributivitat del reticle dels sistemes deductius - Teorema III 9, seguint la línia de la tesi de A Diego (4) - per tal de poder caracteritzar algebraicament els elements dels diferents espectres - Teoremes III 10, III 11, III 13 - i veure que en els supra-reticles d-complets els espectres primer i irreductible coincideixen - Teorema III 14 - Tots els radicals considerats són el sistema deductiu trivial - Proposició III 4 i Teorema III 15 - excepte el maximal i donem una condició suficient per que ho sigui - Teorema III 16 - Donem una caracterització de les àlgebres d-completes simples - Teorema III 19 - i una condició suficient per a la semi-simplicitat - Proposició III 7 - I veiem que en les àlgebres d-completes la propietat "L'espectre irreductible separa els elements de l'àlgebra ", caracteritza les àlgebres de Hilbert

Finalment presentem un Apèndix on es troben analitzats uns exemples de les àlgebres i d'els sistemes deductius estudiats, als quals fem referència en tot el treball, a fi i efecte de donar exemples i contraexemples També ens permeten veure que les diferents classes d'algebres i sistemes deductius estudiats són no buides i no coincidents

En la memòria han quedat molts camins oberts Hem preferit deixar l'estudi de certs aspectes per a posteriors treballs per no alterar la línia d'exposició Problemes que estan per resoldra són: la representació topològica de les àlgebres d-completes i la caracterització de la semi-simplicitat, entre altres

L'interés d'aquestes estructures logico-algebraiques és que inclouen les clàssiques, les multivalorades i que estan molt lligades als conjunts difusos, fins al punt que si hi ha representació topològica d'aquestes àlgebres, creiem que és en espais topologics definits en conjunts difusos

He de fer constar que aquesta memòria és quelcom més que el resultat d'un treball individual; és, a més, la conseqüència de la tasca d'un equip que fa uns anys iniciaren F de A Sales, J Pla i B Verdú i al que més tard s'hi afegiren J M Font, A Rodriguez i l'autor I que superant totes les dificultats, s'ha dedicat a l'estudi de certs aspectes de la lògica

Vull agraïr al Dr F de A Sales, director d'aquesta memòria, els seus encertats consells a l'hora d'abordar les diferents qüestions que ens hem plantejat, al Dr J Pla l'entusiasme que ha posat en els diferents problemes discutits, a B Vèrdú llur objectivitat a l'hora de jutjar aquest treball i a J M Font i a A Rodríguez els suggeriments i paciència

Vagi també el meu agraïment a tots els que m'han recolzat mentre he redactat la memòria En especial a la Laia, en Daniel, i a la Margarida

Barcelona Gener de 1980

0 CONCEPTES PRELIMINARS

0 1

Definició 0 1 -

Una família de subconjunts $\mathcal{C}$ d'un conjunt no buit S s'anomena sistema clausura (s c) sobre S, si és una família tancada per interseccions arbitràries, és a dir

$S \in \mathcal{C}$, i si $T_i \in \mathcal{C}$, $i \in I$, aleshores $\bigcap_{i \in I} T_i \in \mathcal{C}$

Definició 0 2 -

Una aplicació C de $\mathcal{P}(S)$ en $\mathcal{P}(S)$ s'anomena operador conseqüència (o c) sobre S, si per tot $X, Y \subseteq S$, satisfà

o c 1 - $X \subseteq C(X)$

o c 2 - $X \subseteq Y$, implica $C(X) \subseteq C(Y)$

o c 3 - $C(C(X)) = C(X)$

Els subconjunts de S tals que $X = C(X)$ s'anomenen tancats respecte a C.

TEOREMA 0 1 -

Cada sistema clausura sobre S és un reticle complet respecte a l'ordre definit per la inclusió conjuntista tenim que:

Si $X_i \in \mathcal{C}, i \in I$, aleshores $\inf_{i \in I} X_i = \bigcap_{i \in I} X_i$, i

$\sup_{i \in I} X_i = \inf \left\{ Z \in \mathcal{C} / \bigcup_{i \in I} X_i \subseteq Z \right\}$.

TEOREMA 0 2 -

Cada operador conseqüència C definit sobre S defineix un sistema clausura:

$\mathcal{C}(C) = \left\{ X \subseteq S / C(X) = X \right\}$

TEOREMA 0 3 -

La família de tots els sistemes clausura definits sobre S és un reticle complet respecte a la inclusió conjuntista, on $\inf_{i \in I} \mathcal{C}_i = \bigcap_{i \in I} \mathcal{C}_i$ i

$\sup_{i \in I} \mathcal{C}_i = \inf \left\{ \mathcal{C} / \mathcal{C}_i \subseteq \mathcal{C}, \text{ per tot } i \in I \right\}$

TEOREMA 0.4 -

La família de tots els operadors conseqüència C definits sobre S és un reticle complet (respecte a l'ordre: $C_1 \leqslant C_2$ si, i només si, per tot $X \subseteq S$, $C_1(X) \subseteq C_2(X)$), on $C = \inf_{i \in I} C_i$ si, i només si, $C(X) = \bigcap_{i \in I} C_i(X)$, per tot $X \subseteq S$, i

$\sup_{i \in I} C_i = \inf \left\{ C / C_i \subseteq C, \text{ per tot } i \in I \right\}$

<u>TEOREMA 0.5</u> -

El reticle complet de tots els operadors conseqüència sobre S, i el reticle complet de tots els sistemes clausura sobre S són dualment isomorfos per la correspondència $C \xmapsto{\varphi} \mathcal{C}(C)$ L'aplicació inversa ve donada per:

$$\varphi^{-1}(\mathcal{C})(X) = \bigcap_{\substack{T \in \mathcal{C} \\ T \supseteq X}} T, \text{ per tot } X \subseteq S$$

<u>Definició 0 3</u> -

Si B és una família de subconjunts de S, el sistema clausura $[B]$, família de totes les interseccions arbitràries d'elements de B, s'anomena <u>generat per B</u>, o bé, que B és una base de $[B]$

<u>TEOREMA 0.6.</u>-

$[B]$ és el més petit sistema clausura sobre S, que conté B.

<u>Definició 0 4</u> -

Una família no buida $\mathcal{F}$ de subconjunts de S s'anomena <u>fortament inductiva</u> , si per cada cadena $\mathcal{G}$ de $\mathcal{F}$, es compleix: $\bigcup_{T \in \mathcal{G}} T \in \mathcal{F}$

<u>Definició 0 5</u> -

Un operador conseqüència C sobre S s'anomena <u>finitari</u> si per cada $X \subseteq S$, satisfà: $C(X) = \bigcup_{\substack{N \subseteq X \\ N \text{ finit}}} C(N)$

TEOREMA 0.7 - (Schmidt)

Un operador conseqüència C és finitari si, i només si, el sistema clausura $\mathscr{C}(C)$ és fortament inductiu

Definició 0.6.-

Si X és un conjunt tancat respecte a C, direm que X és un tancat irreductible (t i) per tot $T_1, T_2 \in \mathscr{C}(C)$ $X = T_1 \cap T_2$ si, i només si, $X = T_1$ o $X = T_2$

Definició 0 7 -

Si $X \in \mathscr{C}(C)$, direm que X és completament irreductible (t c i) si, per tota família $\mathcal{H} \subseteq \mathscr{C}(C)$

$X = \bigcap_{T \in \mathcal{H}} T$ si, i només si, $X \in \mathcal{H}$

Es clar que si X és t c i , aleshores X és t i

T EOREMA 0 8 - (Pierce, Verdú (32))

Si C és finitari, aleshores la família de tancats completament irreductibles és la més petita base de $\mathscr{C}(C)$

Del Teorema anterior es dedueix immediatament que si C és finitari la família de tancats irreductibles és una base de $\mathscr{C}(C)$

Definició 0 8 - (J Pla)

Un operador conseqüencia C sobre S direm que és unitari si compleix per tot $X \subseteq S$, $C(X) = \bigcap_{x \in X} C(\{x\})$

Per tal d'abreujar la notació escriurem $C(x)$ en lloc de $C(\{x\})$

<u>Definició 0 9</u> - (F A Sales)

Si C és un operador conseqüència sobre S, direm que L = (S,C) és una <u>lògica abstracta</u>

0.2

En tot aquest treball per (A,) entendrem un conjunt no buit A, amb una operació binària

<u>Definició 0 10</u> -

Sigui (A,) i $D \subseteq A$, direm que D és un <u>sistema deductiu</u> (s d) quan per tot $a,b \in A$ compleix

s d.- Si a,a $b \in D$, aleshores $b \in D$

La propietat s d. és més coneguda com a Modus Ponens(m p)

<u>TEOREMA 0 9</u> -

La família de tots els sistemes deductius $\mathcal{D}$ és un sistema clausura fortament inductiu sobre A

A l'operador conseqüència associat a $\mathcal{D}$ l'escriurem K, que segons els Teoremes 0 7 i 0 9 és finitari Donat $D \in \mathcal{D}$, amb $D \neq \emptyset$, notarem per $\mathcal{D}_D$ la família de tots els sistemes deductius que contenen D, que es un sistema clusura, i per K_D l'operador conseqüència associat

En tot el treball per (A, ,u) entendrem un conjunt A, no buit, amb una operació binària , i un element distingit u de A

<u>Definició 0 11</u> -

Direm que (A, u) és un <u>àlgebra implicativa</u> (a i) quan:

per tot $a,b \in A$, compleix

a i 1 - La relació definida:

$a \leq b$ si, i només si, $a\ b = u$

és d'ordre

a i 2 - $a\ u = u$

<u>Definició 0 12.-</u>

Si $(A, \ ,u)$ és un à.i i $D \subseteq A$, direm que D és <u>sistema deductiu de $(A, \ ,u)$</u>(s d (i))* quan:

s d.(i) 1 - D es un s d de $(A, \ )$

s d (i) 2 - $u \in D$

Donat que en un àlgebra implicativa $\{u\} \in \mathcal{D}$, aleshores $\mathcal{D}_{\{u\}}$ és el conjunt de tots els s d (i), que notarem per $\mathcal{D}_o$, i l'operador consequència associat l'escriurem K_o

<u>Teorema 0 10</u> - (J. Pla (12) F A. Sales(24))

Sigui D un s d de $(A, \ )$ tal que:

1 - per tot $a \in A$, $a.a \in D$

2.- per tot $a,b,c \in D$, $a\ b, b\ c \in D$, implica $a\ c \in D$

3 - per tot $a \in A$, $d \in D$, $a\ d \in D$

Aleshores tenim

a) La relació $a \leq_D b$ si, i només si, $a.b \in D$,

és una relació de pre-ordre

b) D és classe d'equivalència, per la relació d'equivalència que indueix el pre-ordre de a)

---

*Rasiowa(18) l'anomena filtre implicatiu

A la relació d'equivalència induïda pel pre-ordre de D, quan existeixi, l'anomenarem <u>relació d'equivalència definida per D</u>

<u>TEOREMA 0 11</u> - (J Plà (12))

Si D es un s d. de (A,) tal que satisfà les hipòtesis del Teorema 0.10., i la relació d'equivalència definida per D és congruència, aleshores:

1 - D és la classe màxima per lordre induït en el conjunt quocient, que notem per A/D

2.- (A/D, ,D) és un a.i.

<u>Definició 0 13</u>.-

Siguin (A,.,u) i (A',x, u') a.a i.i , i f una aplicació de A en A', direm que f és un <u>morfisme d'algebres implicatives</u> quan:

- per tot $a,b \in A$, $f(a\ b) = f(a)xf(b)$

- $f(u) = u'$

<u>TEOREMA 0 12</u>.- (H Rasiowa(18))

Si f és un epimorfisme entre les àlgebres implicatives (A,.,u) i (A',x, u'), aleshores $\mathrm{Ker}\ f = f^{-1}(\{u'\}) \in \mathcal{D}_0$

A més la relació $a \equiv_D b$ si, i només si, $a.b, b\ a \in \mathrm{Ker} f$ és congruència en (A, ,u)

<u>TEOREMA 0 13</u>.-

Si (A,.,u) és un a i tal que per tot $a,b,c \in A$,

$(a\ b)\ ((b\ c)\ (a\ c)) = u$

$(a.b)\ ((c\ a)\ (c\ b)) = u$

Aleshores si $D \in \mathscr{D}_0$, la relació $a \equiv_D b$ si, i només si, $a.b, b\ a \in D$ és congruència.

A més si, per tot $a \in A$, $u\ a = a$, $(A/D,\ ,u)$ es un a i que satisfà les condicions esmentades

Definició 0.14.-

Sigui $(A,\ )$ i $D \in \mathscr{D}$, direm que D es <u>sistema deductiu clàssic</u> (s d c) si:

s.d.c.1 - Per tot $a,b \in A$, $a\ (b\ a) \in D$

s.d.c.2 - Per tot $a,b,c \in A$, $(a\ (b.c))\ ((a.b)\ (a\ c)) \in D$

TEOREMA 0 14 -

Si D és un s d c , aleshores satisfà els Teoremes 0 10 i 0.11.

Definició 0.15.-

Direm que $(A,\ ,u)$ és <u>àlgebra de Hilbert</u> (a.de H)

(o àlgebra d'implicació positiva) quan

a. de H 1 - Per tot $a,b \in A$, $a.(b\ a) = u$

a. de H.2.- Per tot $a,b,c \in A$, $a.(b.c) = (a.b)\ (a.c)$

a. de H 3.- Per tot $a,b \in A$, $a\ b = u$ i $b.a = u$, impliquen $a = b$.

TEOREMA 0.15.-

Sigui $(A,.)$ i $D \in \mathscr{D}$, aleshores

D és s d.c si, i només si, $(A/D,\ ,D)$ és a. de H

0.3.

En tot el treball per (A, ,C) entendrem un conjunt A, no buit, amb una operació binària , i un operador conseqüència C.

<u>Definició 0 16 -</u>

Direm que (A, ,C) satisfà el <u>principi de la deducció de Tarski</u> (p d T) si, per tot $a,b \in A$, $X \subseteq A$

$$b \in C(X \cup \{a\}) \text{ si, i només si, } a \; b \in C(X)$$

Per tal d'abreujar escriurem $C(X,a)$ en lloc de $C(X \cup \{a\})$

<u>TEOREMA 0.16</u> - (B. Verdú (32))

Sigui (A, ,C), les condicions:

1 - C és finitari

2.- (A, ,C) satisfà el p d T

són equivalents a les condicions:

3.- Per tot $a, b \in A$, $a \in C(\emptyset)$, implica $b \; a \in C(\emptyset)$

4.- $a_1 \; (a_2 \; (\quad (a_n \; a). \quad)) \in C(\emptyset)$, implica

$$a_{\tau(1)} \cdot (a_{\tau(2)} (\quad (a_{\tau(n)} \; a) \quad)) \in C(\emptyset)$$

per tota permutació $\tau \in \mathcal{G}_n$

5.- Per tot $X \subseteq A$, i per tot $a \in A$, $a \in C(X)$ si, i només si, existeix un subconjunt $F = \{a_1, a_2, \ldots, a_n\}$ de X tal que:

$$a_1 \; (a_2 \cdot (\ldots (a_n \; a) \ldots) \in C(\emptyset) \quad \text{o} \quad a \in C(\emptyset)$$

TEOREMA 0 17 -

Sigui (A,) i $D \in \mathcal{D}$, aleshores

$(A,.,K_D)$ satisfà el p d T si,i només si , D és s d c

TEOREMA 0.18.-

Si (A,.,u) és a i , aleshores

$(A,.,K_o)$ satisfà el p.d.T. si, i només si, (A,.,u)

és un a. de H

0.4.-

Per $(A,.,\vee,u)$ entendrem un conjunt A, no buit,amb dues operacions binàries . i $\vee$,i un element distingit u de A; i per $(A, ,\vee,\wedge,u)$ entendrem un conjunt A, no buit, amb tres operacions binàries ,$\vee$i$\wedge$, i un element distingit u de A.

Definició 0.17 -

Direm que $(A,.,\vee,u)$ és supra-reticle implicatiu

(s-r i) quan:

s-r.i.1- (A, ,u) és a.i

s-r.i 2.- $(A,\vee)$ és un supra-reticle

s-r.i.3 - per tot $a,b \in A$,

$$a.b = u \text{ si, i només si, } a \vee b = b$$

Definició 0 18 -

Direm que $(A, ,\vee,u)$ és supra-reticle de Hilbert

(s-r. de H.) quan:

s-r. de H.1.- $(A,.,\vee,u)$ és s-r i

s-r. de H.2.- (A,.,u) és a. de H.

Definició 0 19 -

Sigui (A,.,u), direm que és àlgebra d'Abbot+ (a.de A.) (o àlgebra d'implicació) quan:

a. de A 1.- (A, ,u) és a. de H.

a. de A 2 - Per tot $a,b \in A$, (a b) a = a

La condició a de A 2 és equivalent a la següent (F A.Sales(23)) :

a de A.2' - Per tot $a,b \in A$, (a b) b = (b a) a

TEOREMA 0 18 -

Sigui (A, ,u) un a de A , si definim $a \vee b$ = (a b) b, aleshores (A, ,$\vee$,u) és un s-r de H

Definició 0 20 -

Direm que (A, ,$\vee$,$\wedge$,u) és reticle implicatiu (r i)

quan:

r i.1 - (A, ,u) és a i.

r i.2.- (A,$\vee$,$\wedge$) és reticle

r.i.3 - Per tot $a,b \in A$, a.b = u si, i només si, $a \wedge b$ = a.

Definició 0.21 - (J Plà)

Direm que (A, ,$\vee$,$\wedge$,u) és reticle de Hilbert (r de H)

quan:

r de H.1.- (A, ,$\vee$,$\wedge$,u) és r i

r. de H.2.- (A, ,u) és a. de H

Definició 0.22.-

Direm que (A, ,$\vee$,$\wedge$) és àlgebra de Heyting (a. de Ht)

quan:

a. de Ht.1 - $(A,\vee,\wedge)$ és reticle

a. de Ht 2 - Per tot $a,b,c \in A$, $a \wedge b \leqslant c$ si, i només si,

$b \leqslant a.c$

<u>TEOREMA O 20</u> -

Si $(A, \ ,\vee,\wedge)$ és a de Ht , satisfà

1 - per tot $a,b \in A$, $a\ a = b\ b = u$

2 - $(A, \ ,\vee,\wedge,u)$ és r de H

3 - $(A,\vee,\wedge)$ és reticle distrubutiu

<u>TEOREMA O 21</u>.- (J Pla(13))

$(A, \ ,\vee,\wedge)$ és a de Ht si, i només si, satisfà:

1 - $(a\ b)\wedge b = b$

2 - $(a.b)\wedge a = a \wedge b$

3 - $(a \vee b)\ c = (a\ c)\wedge(b\ c)$

4 - $a\ (b \wedge c) = (a\ b)\wedge(a\ c)$

5 - $a\ a = b\ b$

Per tot $a,b,c \in A$

<u>TEOREMA O 22</u> - (J Pla (13))

Si $(A,.,\vee,\wedge,u)$ és r de H , aleshores és a de Ht si, i només si, satisfà la condició 4 del Teorema O 21

<u>TEOREMA O 23</u> - (F de A Sales (23))

1 - Si $(A, \ ,u)$ és a de A , aleshores si té element mínim O, es pot dotar d'estructura d'àlgebra de Boole a $(A,\vee,\wedge,\neg,u,0)$, on $\neg a = a\ 0$, $a \vee b = \neg a\ b$, $a \wedge b = \neg(\neg a \vee \neg b)$, per tot $a,b \in A$

0.5.

Sigui (A, ,u) a.i , notarem per $\mathcal{F}$ al sistema clausura dels seus filtres d'ordre, i per F a l'operador conseqüència associat que és unitari.

TEOREMA 0 24.-

Si (A, ,u) és un a i , aleshores $\mathcal{D}_o \subseteq \mathcal{F}$.

Sigui (A,.,∨,∧,u) r i , notarem per $\mathcal{F}_r$ al sistema clausura dels seus filtres de reticle, i per F_r a l'operador conseqüència associat que és finitari.

TEOREMA 0 25.-

Si (A,.,∨,∧,u) és r de H , aleshores $\mathcal{F}_r \subseteq \mathcal{D}_o$

TEOREMA 0 26.- (J Pla (13))

Un r de H (A, ,u) és a de Ht si, i només si,

$\mathcal{F}_r = \mathcal{D}_o$

0.6.

Per $\mathcal{A} = (A, \{f_\gamma\}_{\gamma\in\Gamma})$ entendrem un conjunt A, no buit, i una col·lecció no buida d'operacións $\{f_\gamma\}_{\gamma\in\Gamma}$, definides sobre A. Direm que $\mathcal{A}$ és un àlgebra abstracta (a a)

Definició 0 23.-

Direm que un àlgebra abstracta $\mathcal{A} = (A, \{f_\gamma\}_{\gamma\in\Gamma})$ és simple quan tot epimorfisme de $\mathcal{A}$ en un altra a a $\mathcal{B} = (B, \{g_\gamma\}_{\gamma\in\Gamma})$ del mateix tipus, o bé és isomorfisme, o bé B es redueix a un sol element

TEOREMA 0.27.-

$\mathcal{A}$ és simple si, i només si, només té les dues congruències trivials: la identitat i la que relaciona tots els elements de A

Si $\mathcal{A}_i = (A_i, \{f_{i\gamma}\}_{\gamma\in T})$, $i\in I$, és una família d'àlgebres del mateix tipus, notarem per $\prod_{i\in I} \mathcal{A}_i$ al seu producte directe

Definició 0.23 -

S'anomena <u>producte sub-directe</u> de $(\mathcal{A}_i)_{i\in I}$, a tota sub àlgebra R de $\prod_{i\in I} \mathcal{A}_i$ tal que, per tot $a_i \in A_i$, $i\in I$, existeix un element de R tal que la seva component en $\mathcal{A}_i$ és a_i

TEOREMA 0 28.- (G. Birkoff)

Un àlgebra $\mathcal{A}$ es pot representar com a producte sub-directe de certes àlgebres del mateix tipus $(\mathcal{A}_i)_{i\in I}$ si, i només si, existeix una família de congruències $(\Theta_i)_{i\in I}$, tals que $\inf_{i\in I} \Theta_i = \Theta_{Id}$

A més, si la condició es satisfà, $\mathcal{A}$ és isomorf a un producte subdirecte de $\left(\mathcal{A}/\Theta_i\right)_{i\in I}$

Definició 0.24.-

Un àlgebra $\mathcal{A}$ és <u>semi-simple</u> quan es pot representar com a producte sub-directe d'àlgebres simples.

Hom pot trobar les demostracions dels Teoremes anteriors en les obres citades en la bibliografia, dels següents autors A. Diego, A Monteiro, Pierce, J Pla, H Rasiowa, H Rasiowa - R Sikorski, F A Sales, Suzko-Brown, G Szász, B Verdú

I. CONSEQÜÈNCIA I ORDRE TANCATS IRREDUCTIBLES, PRIMERS I MÀXIMALS SEPARABILITAT

En aquest capítol, estudiem els tancats irreductibles, maximals i primers d'un sistema clausura, en el cas més general i en el cas en què el sistema clausura està definit en un conjunt ordenat o reticulat

I.1. Tancats irreductibles, completament irreductibles, i maximals en un sistema clausura.

Sigui $L = (A,C)$ una lògica abstracta

I.1.1.

Proposició I 1 -

Sigui $T \in \mathcal{C}(C)$, $T \neq \emptyset$, si per tot $a,b \notin T$, $C(a) \cap C(b) \not\subset T$, aleshores T és t.i

En efecte:

Si T és tal que, per tot $a,b \notin T$, $C(a) \cap C(b) \not\subset T$ i T no és t i, aleshores existeixen $T_1, T_2 \in \mathcal{C}(C)$ tals que

$$T = T_1 \cap T_2 \text{ , i } T \subsetneq T_1 \text{ , } T \subsetneq T_2$$

Sigui $a \in T_1 \setminus T$ i $b \in T_2 \setminus T$, aleshores $C(a) \cap C(b) \subset T_1 \cap T_2 = T$ que contradiu la hipòtesi

<u>TEOREMA I 1</u> -

Si C és tal que, per tot $T \in \mathcal{C}(C)$ i per tot $a,b \in A$,

$C(T \cup (C(a) \cap C(b))) = C(T,a) \cap C(T,b)$, aleshores:

si T és t i , satisfà que, per tot $a,b \notin T$, $C(a) \cap C(b) \not\subseteq T$

En efecte:

Si T és t i i existeixen $a,b \notin T$ tals que $C(a) \cap C(b) \subseteq T$, aleshores

$$T = C(T \cup (C(a) \cap C(b))) = C(T,a) \cap C(T,b)$$

i $\qquad T \subsetneq C(T,a), \quad T \subsetneq C(T,b)$

que contradiu el fet que T és t i

<u>Corol lari</u> -

Si $\mathcal{C}(C)$ satisfà la hipòtesi del Teorema I 1 i si

$T \in \mathcal{C}(C)$, $T \neq \emptyset$, aleshores:

T és t i si, i només si, per tot $a,b \notin T$, $C(a) \cap C(b) \not\subseteq T$

Per tal d'abreujar, escriurem $C(X,Y)$ en lloc de $C(X \cup Y)$, $X,Y \subseteq A$

<u>Proposició I 2</u> -

Si C és finitari i satisfà la hipòtesi del Teorema I 1,

per tot $T \in \mathcal{C}(C)$, T t i , aleshores existeix un tancat

irreductible minimal contingut en T

En efecte:

Si T és t i , d'acord amb el Lema de Zorn, només cal demostrar que la família dels tancats irreductibles continguts en T és inductiva inferiorment. Aquesta família no és buida, doncs T hi pertany Considerem una descendent d'aquesta família: $\subset T_i \subset \cdot \subset T_1 = T$, amb $i \in I$

$\bigcap_{i \in I} T_i$ és t i ja que si $a,b \notin \bigcap_{i\in I} T_i$, existeix T_k de la cadena tal que $a,b \notin T_k$ i per tant $C(a) \cap C(b) \not\subset T_k$, i tenim que $C(a) \cap C(b) \not\subset \bigcap_{i\in I} T_i$

El Teorema 0 1 acaba la demostració

I 1.2.

Com a conseqüència immediata del Teorema 0 8 tenim

Proposició I 3 -

Si C és finitari, aleshores per tot $X \in \mathscr{C}(C)$, i per tot $a \notin X$, existeix T t c i tal que $a \notin T$ i $X \subset T$

Proposició I 4 -

Si C és finitari, aleshores per tot $X \in \mathscr{C}(C)$ i per tot $a \notin X$, existeix T t i tal que $a \notin T$ i $X \subset T$

Proposició I 5 -

Si C és finitari i $X,Y \in \mathscr{C}(C)$, aleshores $X \subset Y$ si, i només si, per tot T t i (per tot T t c i) $Y \subset T$, implica $X \subset T$

En efecte:

Que si $X \subset Y$, aleshores tot T t i que conté Y també conté X, és evident.

Suposem que tot tancat irreductible que conté Y també conté X:

Si $X \not\subset Y$, aleshores existeix $a \in X$ tal que $a \notin Y$ i, segons la Proposició I.4., existeix T t i tal que $Y \subset T$ i $a \notin T$, per tant $Y \subset T$ i $X \subset T$, que contradiu la hipòtesi

Definició I 1.-

Sigui $x \in A$, direm que $T \in \mathcal{C}(C)$ és un maximal lligat a x ($T = M_x$) quan T és maximal en $\mathcal{C}_x = \{ S \in \mathcal{C}(C) / x \notin S \}$

TEOREMA I.2.-

Si C és finitari, aleshores per tot $x \in A \setminus C(\emptyset)$, existeix un maximal lligat a x

En efecte:

Si $x \notin C(\emptyset)$, aleshores $\mathcal{C}_x \neq \emptyset$ Segons el Teorema 0.7 $\mathcal{C}(C)$ és fortament inductiva, per tant si $(T_i)_{i \in I}$ és una cadena de $\mathcal{C}_x$, $\bigcup_{i \in I} T_i \in \mathcal{C}(C)$, $x \notin \bigcup_{i \in I} T_i$ i tenim que $\bigcup_{i \in I} T_i \in \mathcal{C}_x$ D'acord amb el Lema de Zorn $\mathcal{C}_x$ té maximals.

TEOREMA I.3.-

Si C és finitari, aleshores

T és un t c.i. si, i només si, existeix un $x \in A \setminus T$, tal que $T = M_x$

En efecte:

Suposem que T és t.c i., és clar que $T \subseteq \bigcap_{x \in A \setminus T} M_x = T'$. Si $y \in T'$, aleshores $y \in T$, ja que si $y \notin T$, tindríem M_y i $y \notin \bigcap_{x \in A \setminus T} M_x$, contradicció Com que T és t.c.i. per definició $T = M_x$, per un cert $x \in A \setminus T$

Recíprocament: Si $T = M_x$, $x \in A$, aleshores $x \in A \setminus T$ i segons la Proposició I.3 existeix un T' t.c.i. tal que $x \notin T'$ i $T \subseteq T'$ Com que T és un maximal lligat a x, T = T'

I 1 3.

<u>Definició I 2</u> -

Sigui $T \in \mathcal{C}(C)$, direm que T és <u>tancat maximal</u> (t m) quan

t.m 1 - $T \subsetneq A$

t m 2 - Si $X \in \mathcal{C}(C)$, $T \subsetneq X$, implica $X = A$

<u>TEOREMA I 4</u> -

Donat $T \in \mathcal{C}(C)$, $T \neq A$, T és t m si, i només si, per tot $a,b \notin T$, $b \in C(T,a)$

En efecte

Si T és maximal, donats $a,b \notin T$, $T \subsetneq C(T,a)$, per tant $C(T,a) = A$

Recíprocament Suposem que T és tal que, per tot $a,b \notin T$, $b \in C(T,a)$

Si $X \in \mathcal{C}(C)$ i $T \subsetneq X$, donat $b \in A$ tenim

- $b \in T$, per tant, $b \in X$

- $b \notin T$, però com que $T \subsetneq X$, existeix $a \in X \setminus T$ i, per hipòtesi, $b \in C(T,a) \subseteq X$,

per tant $X = A$ Això demostra que T és maximal

I.2. Consequència, ordre i estructures reticulars Tancats Primers

I.2.1.

Sigui (A,C) una lògica abstracta, en la què el conjunt A és ordenat respecte a la relació $\leq$

TEOREMA I 5.-

Les següents condicions són equivalents

(1) $\mathcal{C}(C) \subseteq \mathcal{F}$

(2) Per tot $a,b \in A$, $a \leq b$, implica $C(b) \subseteq C(a)$

(3) Per tot $a \in A$, $F(a) \subseteq C(a)$

En efecte:

(1) implica (2) si $a \leq b$, com que $C(a)$ és un filtre d'ordre, $b \in C(a)$, això és $C(b) \subseteq C(a)$

(2) implica (3) si $b \in F(a)$, és $a \leq b$ i $b \in C(a)$, per tant $F(a) \subseteq C(a)$

(3) implica (1) si $T \in \mathcal{C}(C)$, $a \in T$ i $a \leq b$, tenim $b \in F(a) \subseteq C(a) \subseteq T$, per tant $b \in T$, i aleshores T és un filtre d'ordre

Corol.lari .-

Si A té màxim u, i $\mathcal{C}(C) \subset \mathcal{F}$, aleshores $C(\emptyset) = \emptyset$, o bé $u \in C(\emptyset)$

En efecte:

Si $C(\emptyset) \neq \emptyset$, existeix $a \in C(\emptyset)$, com que $u \geq a$, $u \in C(a) = C(\emptyset)$

I.2.2.

Sigui (A,C) una lògica abstracta, en la que A té estructura reticular, és a dir, en A hi ha definides dues operacions $\vee, \wedge$, tals que $(A,\vee,\wedge)$ és un reticle.

Proposició I 7 -

Si $\mathcal{F}_r \subseteq \mathcal{C}(C) \subseteq \mathcal{F}$, aleshores per tot $a \in A$, $F(a) = C(a)$

En efecte:

La demostració és trivial donat que $F_r(a) = F(a)$ per tot $a \in A$

TEOREMA I.6 -

Si C és finitari, aleshores

$\mathcal{F}_r \subseteq \mathcal{C}(C) \subseteq \mathcal{F}$ si, i només si, per tot $a \in A$, $F(a) = C(a)$

En efecte:

El directe és la Proposició I 7

Recíprocament. Si per tot $a \in A$, $F(a) = C(a)$, d'acord amb el Teorema I 5 $\mathcal{C}(C) \subseteq \mathcal{F}$. Per a demostrar que $\mathcal{F}_r \subseteq \mathcal{C}(C)$, veurem que si $F \in \mathcal{F}_r$, $C(F) = F$, d'acord amb o.c 1 només cal veure que $C(F) \subseteq F$

Si $a \in C(F)$, per ésser C finitari, existeixen $b_1, b_2, \quad , b_n \in F$, tals que $a \in C(b_1, b_2, \quad , b_n)$ Donat que F és un filtre de reticle $z = \bigwedge_{i=1}^{n} b_i \in F$, a més per tot i, $1 \leq i \leq n$, $b_i \geqslant z$, per tant $b_i \in F(z) = C(z)$ i això ens diu que $C(b_1, b_2, \ldots , b_n) \subset C(z) = F(z) \subset F$ Això demostra que $a \in F$, i tenim que $C(F) \subset F$

TEOREMA I 7 -

Les següents condicions són equivalents

(1) $\mathcal{C}(C) \subseteq \mathcal{F}_r$

(2) $C(F_r(X)) = C(X)$, per tot $X \subseteq A$

(3) $C(a,b) = C(a \wedge b)$, per tot $a, b \in A$

En efecte:

(1) implica (2) si $\mathscr{C}(C) \subseteq \mathscr{F}_r$, segons el Teorema 0 5, $F_r \preccurlyeq C$, que implica (B.Verdu(31), Brown-Suszko(3)) $C \circ F_r = C$

(2) implica (3) si $a,b \in A$, aleshores

$$C(a,b) = C(F_r(a,b)) = C(F_r(a \wedge b)) = C(a \wedge b)$$

(3) implica (1) si $T \in \mathscr{C}(C)$ i $a,b \in T$, aleshores $C(a,b) \subset T$, per tant $C(a \wedge b) \subset T$, d'on $a \wedge b \in T$ A més si $a \in T$ i $b \geqslant a$, $C(a) = C(a \wedge b) = C(a,b)$, per tant $C(a) \subseteq T$ Això demostra que $T \in \mathscr{F}_r$

I.2.3

En aquest apartat considerem que el conjunt A de la lògica abstrcta (A,C) només té estructura de supra-reticle, això és, en A hi ha definida una operació $\vee$, tal que $(A,\vee)$ és supra-reticle Suposem també que $\mathscr{C}(C) \subsetneq \mathscr{F}$.

Definició I 3.-

Sigui $T \in \mathscr{C}(C)$, direm que T és un tancat primer (t p) si

t.p - per tot $a,b \in A$, si $a \vee b \in T$, aleshores $a \in T$ o $b \in T$

Proposició I 8 -

Tot tancat primer és tancat irreductible.

En efecte:

Si $T \in \mathscr{C}(C)$ és t.p. i $a,b \notin T$ per definició $a \vee b \notin T$, com que $\mathscr{C}(C) \subsetneq \mathscr{F}$, d'acord amb el Teorema I 5, $a \vee b \in C(a) \cap C(b)$ Per tant $C(a) \cap C(b) \not\subset T$, i segons la Proposició I 1 T és t i.

TEOREMA I.8 -

Si C és finitari, aleshores

Tancats irreductibles i tancats primers coincideixen

si, i només si, per tot $a,b \in A$ i per tot $T \in \mathcal{C}(C)$

$$C(T,a) \cap C(T,b) = C(T,a \vee b)$$

En efecte

Si tancats primers i tancats irreductibles coincideixen, per demostrar la igualtat només cal veure que $C(T,a \vee b) \supseteq C(T,a) \cap C(T,b)$, ja que l'altra inclusió sempre es satisfà Sigui T' t i tal que $C(T,a \vee b) \subseteq T'$, aleshores $T \subseteq T'$ i $a \vee b \in T'$ Com que T' és, per hipòtesi, t p , tenim que $T \subseteq T'$ i $a \in T'$ o $b \in T'$, d'on $C(T,a) \subseteq T'$ o $C(T,b) \subseteq T'$, per tant $C(T,a) \cap C(T,b) \subseteq T'$ i per la Proposició I 5 ja hem acabat

Recíprocament, si $C(T,a \vee b) = C(T,a) \cap C(T,b)$, per tot $T \in \mathcal{C}(C)$ i $a,b \in A$; en particular sigui T un t i Suposem que T no és t p , això és, existeixen $a,b \notin T$, tals que $a \vee b \in T$, aleshores

$$C(T,a) \cap C(T,b) = C(T,a \vee b) = T, \text{ i}$$

$$T \subsetneq C(T,a), \quad T \subsetneq C(T,b)$$

que contradiu el fet que T sigui t i

Corollari 1 -

Si C és finitari i tancats irreductibles coincideixen amb tancats primers, aleshores

$$C(a \vee b) = C(a) \cap C(b)$$

Fen servir el Teorema anterior B Verdu(33) demostra el següent

Corol lari 2 -

Si A té estructura de reticle, aleshores $(A,\vee,\wedge)$ és un reticle distributiu si, i només si, filtres de reticle primers i filtres de reticle irreductibles coincideixen

I 3 Conseqüència i separabilitat

I 3 1

Sigui (A,C) una lògica abstracta

Definició I.4 -

Sigui $\mathcal{B} \subset \mathcal{C}(A)$, direm que separa els elements de A si Per tot $a,b \in A$, $a \neq b$, existeix $B \in \mathcal{B}$ tal que $a \notin B$ i $b \in B$, o $a \in B$ i $b \notin B$

Proposició I 9 -

Sigui $\mathcal{B}$ una base de $\mathcal{C}(C)$ $\mathcal{B}$ separa els elements de A si, i només si, per tot $a,b \in A$, $C(a) = C(b)$, implica $a = b$

En efecte

Per ésser $\mathcal{B}$ base de $\mathcal{C}(C)$, tenim que si $T \in \mathcal{C}(C)$ i $a \notin T$, existeix B tal que $a \notin B$ i $T \subseteq B$

Suposem que $\mathcal{B}$ separa els elements de A i $C(a) = C(b)$, aleshores per tot $B \in \mathcal{B}$ tal que $a \in B$ és $C(a) \subseteq B$ i , per tant, $b \in B$ Si fos $a \neq b$

els elements de $\mathcal{B}$ no separarien els de A

Suposem que $C(a) = C(b)$, implica $a = b$, aleshores $a \neq b$, implica $C(a) \neq C(b)$. Per ésser $\mathcal{B}$ base de $\mathcal{C}(C)$ sempre podem trobar un tancat de $\mathcal{B}$ que contingui un i no contingui l'altre

<u>Corol.lari</u>

Si C és finitari, les següents condicions són equivalents:

(1) La classe de tancats completament irreductibles separa els elements de A

(2) La classe dels tancats irreductibles separa els elements de A

(3) Per tot $a,b \in A$, $C(a) = C(b)$, implica $a = b$

En efecte:

La demostració es immediata donat que si C és finitari, la classe de t.c.i i la classe de t i son bases de $\mathcal{C}(C)$

<u>Proposició I.10</u> -

Si $C(a) = C(b)$, implica $a = b$, aleshores o bé $C(\emptyset) = \emptyset$ o bé existeix $d \in A$, $C(\emptyset) = \{d\}$

En efecte:

Si $C(\emptyset) \neq \emptyset$ i $a,b \in C(\emptyset)$, aleshoers $C(a) = C(\emptyset) = C(b)$, per tant $a = b$. Això demostra que $C(\emptyset)$ només conté a un element

I.3.2

Sigui $(A,\vee,\wedge)$ un reticle i (A,C) una lògica abstracta

Proposició I.11 -

Si $\mathcal{F}_r \subset \mathcal{C}(C) \subset \mathcal{F}$ i C és finitari, aleshores la classe dels tancats irreductibles separa els elements de A

En efecte:

La demostració és immediata, ja que per tot $a \in A$, $F(a) = C(a)$

TEOREMA I 9 -

Si C és finitari i $\mathcal{C}(C) \subseteq \mathcal{F}_r$, aleshores per tot $a,b \in A$, $C(a) = C(b)$, implica $a = b$ si, i només si, $\mathcal{C}(C) = \mathcal{F}_r$

En efecte:

Si $\mathcal{C}(C) = \mathcal{F}_r$ és clar que per la Proposició anterior, i la I 9 , $C(a) = C(b)$ implica $a = b$

Suposem que $C(a) = C(b)$, implica $a = b$ Per demostrar $\mathcal{F}_r \subseteq \mathcal{C}(C)$, segons el Teorema I.6, només cal veure que $C(a) = F(a)$

- $F(a) \subset C(a)$, ja que $\mathcal{C}(C) \subseteq \mathcal{F}_r$
- si $b \in C(a)$, $C(a) = C(a,b) = C(a \wedge b)$, per tant $a \wedge b = a$, això és $b \geqslant a$. D'on $b \in F(a)$. Això demostra que $C(a) \subset F(a)$

Corl lari -

Si C és finitari i $\mathcal{C}(C) \subsetneq \mathcal{F}_r$, no hi ha cap base de $\mathcal{C}(C)$ que separi els elements de A

II. SISTEMES DEDUCTIUS, DEDUCCIÓ I ESTRUCTURES IMPLICATIVES

II.1. Sistemes deductius i deducció

Amb les notacions adoptades en els preliminars, considerem (A,),

$D \in \mathcal{D}$, K_D i $\mathcal{D}_D$

II.1 1

Definició II 1 -

Diem que D és un sistema deductiu de tipus 1 (s d t-1)

si compleix

s d.t-1 1 - Per tot $a \in A$, $a\ a \in D$

s d t-1 2 - Per tot $a \in A$, $d \subset D$, $a\ d \in D$

s d.t-1 3 - Per tot $a, b, c \in A$, $a\ (b\ c) \in D$ i $a\ b \in D$,

implíquen $a\ c \in D$

Es clar que si D és un s d t-1 , $D \neq \emptyset$, per s d t-1 1 A més satisfà

les següents propietats

Propietat 1 -

La relació definida en A per:

$a \leq_D b$ si, i només si, $a.b \in D$

és relació de pre-ordre

En efecte

1.- És reflexiva per s d t-1 1

2 - Si a $b \in D$ i b $c \in D$, aleshores, per s d t-1 2 , a $(b\ c) \in D$, i

per s d t-1 3 a $c \in D$ Per tant és transitiva

Per tal d'abreujar l'escriptura, farem $a^n\ b = a\ (a^{n-1}\ b)$, per tot $n \in \mathbb{N}$, $n > 1$

<u>Propietat 2</u> -

Per tot $a,b \in A$ i tot $n \in \mathbb{N}$, $a^n\ b \in D$ si, i només si, $a.b \in D$

En efecte

Si $a.b \in D$ per s d.t-1 2. tenim que per tot $n \in \mathbb{N}$, $a^n\ b \in D$

El directe el demostrem per inducció:

- si $n = 1$, és obvi

- Suposem-ho cert per un $n \in \mathbb{N}$, $n > 1$, aleshores si $a^{n+1}\ b \in D$, tenim $a.(a.(a^{n-1}\ b)) \in D$, i com que $a.a \in D$, de s d t-1 3. resulta que $a.(a^{n-1}.b) \in D$, és a dir $a^n\ b \in D$ i per hipòtesi d'inducció a $b \in D$

<u>Definició II 2</u> -

Direm que (A, ,C) satisfà <u>el principi de la deducció de tipus 1</u> (p d t-1)quan:

p d.t-1.- per tot $a,b \in A$, a $b \in C(\emptyset)$ si, i només si, $b \in C(a)$

El p.d.t-1 no és sinó el p d.T per a singletons, així,si (A,.,C) satisfà p.d.T., satisfà també p d t-1

Si (A, ,C) satisfà el p.d.t-1 , aleshores compleix les següents propietats:

<u>Propietat 3</u> -

$$C(\emptyset) \neq \emptyset$$

En efecte:

És obvi, ja que per tot $a \in A$, $a \in C(a)$ i per tant a $a \in C(\emptyset)$

<u>Propietat 4</u> -

$$C(\emptyset) \in \mathcal{D}$$

En efecte:

Si a, a $b \in C(\emptyset)$, aleshores $b \in C(a) = C(\emptyset)$

<u>TEOREMA II.1</u> -

Donat $D \in \mathcal{D}$,

(A, $,K_D$) satisfà p d t-1. si, i només si, D és un s d t-1

En efecte

Suposem que (A, $,K_D$) satisfà p d t-1 , aleshores:

1 - $a \in K_D(a)$, implica $a.a \in K_D(\emptyset) = D$

2.- Si $a \in A$, i $d \in D = K_D(\emptyset)$, tenim $d \in K_D(a)$, per tant a $d \in K_D(\emptyset) = D$

3.- Si $a.(b\ c) \in D$ i a $b \in D$, aleshores b $c \in K_D(a)$ i $b \in K_D(a)$ i

com que $K_D(a) \in \mathcal{D}_D \subseteq \mathcal{D}$, tenim $c \in K_D(a)$ i a $c \in D$

Suposem que D és s d.t-1 Si $a \in A$, considerem el conjunt:

$$\bar{D}(a) = \{ b \in A \ / \ a\ b \in D \},$$

veurem que $\bar{D}(a) = K_D(a)$

1 - $\bar{D}(a) \in \mathscr{D}$, ja que si $c \in \bar{D}(a)$ i c $b \in \bar{D}(a)$, aleshores a $c \in D$

a (c b) $\in D$, i per s d t-l 3, a $b \in D$, per tant $b \in \bar{D}(a)$

2 - $a \in \bar{D}(a)$, ja que a $a \in D$

3 - $\bar{D}(a) \in \mathscr{D}_D$, ja que per tot $d \in D$, a $d \in D$, i tenim $d \in \bar{D}(a)$

4 - Si $D' \in \mathscr{D}_D$, i $a \in D'$, aleshores $\bar{D}(a) \subseteq D'$, ja que si $b \in \bar{D}(a)$,

aleshores a $b \in D \subseteq D'$ i $a \in D'$, d'on $b \in D'$

Així doncs $\bar{D}(a) = K_D(a)$, aleshores $b \in K_D(a)$ si, i només si, $b \in \bar{D}(a)$, que per definició equival a a $b \in D$

A continuació estudiem la relació que hi ha entre el fet que (A, ,C) satisfaci el p d t-l i el fet que $C(\emptyset)$ sigui s d t-l Cal observar que, d'antuvi, la propietat 3 garanteix que $C(\emptyset) \neq \emptyset$

<u>Proposició II 1</u> -

Si (A, ,C) satisfà p d t-l , aleshores

$C(\emptyset)$ és s d t-l si, i només si, per tot $a \in A$

$C(a) = K_{C(\emptyset)}(a)$

En efecte

Per hipòtesi $b \in C(a)$ si, i només si, a $b \in C(\emptyset)$; a més , per la propietat 4, $C(\emptyset) = K_{C(\emptyset)}(\emptyset)$ Pel Teorema II 1 que $C(\emptyset)$ sigui s d t-l equival a que (A, ,$K_{C(\emptyset)}$) satisfaci el p d t-l , això és, a $b \in K_{C(\emptyset)}(\emptyset)$ si, i només si, $b \in K_{C(\emptyset)}(a)$, i això equival a que $C(a) = K_{C(\emptyset)}(a)$

<u>Proposició II 2</u> -

Si $C(\emptyset)$ és s d t-l, aleshores

(A, ,C) satsisfà p d t-l si, i només si, per tot $a \in A$

$$C(a) = K_{C(\emptyset)}(a)$$

En efecte:

El Teorema II.1 ens diu que $(A, ,K_{C(\emptyset)})$ satisfà el p d t-1

Així doncs $(A, ,C)$ satisfà el p.d t-1 si, i només si,

$b \in C(a)$ si, i només si, a $b \in C(\emptyset) = K_{C(\emptyset)}(\emptyset)$ si, i només si,

$b \in K_{C(\emptyset)}(a)$.

Això ens diu que per cada $a \in A$, $C(a) = K_{C(\emptyset)}(a)$

<u>Corol.lari</u> -

Si per tot $a \in A$, $C(a) = K_{C(\emptyset)}(a)$, aleshores $(A, ,C)$ satisfà el p d.t-1 si, i només si, $C(\emptyset)$ és s d t-1

El Teorema II 1 fa patent que tot s d c és un s d.t-1

En la Propietat II.1 hem vist que tot s d t-1 indueix un pre-ordre, però, en general, la relació d'equivalència associada no és pas compatible amb l'operació

<u>Definició II 3</u> -

Sigui $D \in \mathcal{D}$, direm que D és un s d t-1 * quan

s d t-1 * 1 - D és s d t-1

s.d t-1 * 2 - La relació de pre-ordre definida per D és compatible amb l'operació

II.1.2.

En la seva Tesi Doctoral J Pla defineix els sistemes deductius complets:

Definició II 4.-

Sigui $D \in \mathscr{D}$, direm que D és un sistema deductiu complet (s.d.co)quan:

s d.co.1 - Per tot $a, b \in A$, $a\ a \in D$

s.d.co 2 -Per tot $a \in A$, $d \in D$, $a\ d \in D$

s d.co 3 - Per tot $a, b, c \in A$,

$$(a\ b)\ ((c\ a)\ (c\ b)) \in D$$

s d.co 4 - Per tot $a, b, c \in A$,

$$(a\ (b.c))\ (b\ (a.c)) \in D$$

És clar que s d co 1 implica que tot s d co és no buit

Si D és un s d co. satisfà les següents propietats:

Propietats: (J. Pla (12))

1.- La relació definida en A per

$a \leq_D b$ si, i només si, $a\ b \in D$

és un pre-ordre

2.- La relació d'equivalència ($\equiv_D$) induïda pel pre-ordre és compatible amb l'operació

3.- $a \leq_D b\ a$, per tot $a, b \in A$

4.- Si $a \leq_D b$ i $c \in A$, aleshores $c\ a \leq_D c\ b$, per tot $a, b \in A$

5.- $a.b \leq_D (c.a)\ (c\ b)$, per tot $a,b,c \in A$

6.- $a.b \leq_D (b.c).(a\ c)$, per tot $a,b,c \in A$

7.- $(a.b)\ (a.c) \leq_D a.(b\ c)$, per tot $a,b,c \in A$

8.- $a \leq_D (a\ b)\ b$, per tot $a,b \in A$

9.- $a.b \equiv_D b$ per tot $b \in A$, si, i només si, $a \in D$

<u>Propietat 5</u>.-

Per tot $a,b,c \in A$ i tot $n \in \mathbb{N}$,

$$a.(b^n\ c) \equiv_D b^n\ (a.c)$$

En efecte:

La demostració es fa per inducció

La propietat és certa per $n = 1$, en virtut de s d co 4

Suposem que és certa per $n > 1$, aleshores

$$a.(b^{n+1}\ c) \equiv_D a.(b\ (b^n\ c)) \equiv_D b\ (a\ (b^n\ c)) \equiv_D$$

$$\equiv_D b\ (b^n\ (a\ c)) \equiv_D b^{n+1}\ (a\ c).$$

Obsevem que en la segona equivalència és essencial la compatibilitat de la relació amb l'operació.

És obvi que tot s.d.c és s d.co. però el recíproc ,en general, és fals (cf. apèndix Ex. 3) També es pot veure que hi ha s d co que no són s d.t-1., així coms d.t-1 que no són s.d co (cf Apèndix Ex.1)

J. Pla (op cit.) estudia quin tipus de principi de la deducció satisfan els s.d.co., i demostra:

<u>TEOREMA II.2</u> - (J Pla (12))

Si D és un s d co , aleshores per tot $a,b \in A$ i tot $X \subsetneq A$

$b \in K_D(X,a)$ si, i només si, existeix un $n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$,

$a^n . b \in K_D(X)$

On n depèn de a,b i de $K_D(X)$

El recíproc en general no és cert (J Plà op.cit.).

Estudiarem els sistemes deductius que carecteritzen aquest principi de la deducció.

<u>Definició II.5</u>.-

Sigui (A,.,C), direm que satisfà el <u>principi de la deducció feble</u> (p d f) quan:

Per tot $a,b \in A$, i tot $X \subseteq A$,

$b \in C(X,a)$ si, i només si, existeix $n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$, tal que

$a^n \, b \in C(X)$.

En la definició n depèn de a, b i de C(X), en tot el treball ho suposarem així i en cas contrari ho especificarem

<u>TEOREMAII.3</u>.-

Suposem C finitari, aleshores:

(A,.,C) satisfà p.d.f. si, i només si, per tot F finit, $F = \{b_1, b_2, .., b_n\} \subseteq A$, les següents condicions són equivalents:

1.- $b \in C(F)$

2.- existeixen $k_1, k_2, ..., k_n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$, tals que

$$b_1^{k_1}\ (b_2^{k_2}\ .(\ .\ (b_n^{k_n}\ b)\ \ .))\in C(\emptyset)$$

3.- Per tota permutació $\tau\in\mathcal{G}_n$, existeixen $h_{\tau(1)}, h_{\tau(2)},$ $h_{\tau(n)}\in\mathbb{N}\setminus\{0\}$, tals que

$$b_{\tau(1)}^{h_{\tau(1)}}(b_{\tau(2)}^{h_{\tau(2)}}.(\ .\ (b_{\tau(n)}^{h_{\tau(n)}}b)\ .\ ))\in C(\emptyset)$$

En efecte:

Si $(A,.,C)$ satisfà p d.f , aleshores :

1. si, i només si, 2: Pertot $b\in A$ i tot $F=\{b_1,b_2,\quad ,b_n\}$

$$b\in C(b_1,\ \ .,b_n)=C(\{b_1,\quad ,b_{n-1}\},\ b_n)$$

si, i només si, existeix $k_n\in\mathbb{N}\setminus\{0\}$, tal que

$$b_n^{k_n}\ b\in C(b_1,.\ \ ,b_{n-1})$$

i reiterantel procés obtenim $k_1,k_2,\quad ,k_n\in\mathbb{N}\setminus\{0\}$, tals que

$$b_1^{k_1}.(b_2^{k_2}.(...(b_n^{k_n}\ b)\ \ .))\in C(\emptyset)$$

1.si, i només si, 3.: en el raonament anterior l'ordre dels subíndexs és arbitrari, ara bé els exponents que van apareixent depenen de l'ordre.

Recíprocament, les equivalències impliquen que $(A,\ ,C)$ satisfà el p.d.f.:

- Si $X=\emptyset$, aleshores $b\in C(\emptyset,a)$ si, i només si, existeix un cert $n\in\mathbb{N}\setminus\{0\}$, que $a^n\ b\in C(\emptyset)$.
- Si $X\neq\emptyset$, aleshores $b\in C(X,a)$ si, i només si, $b\in C(F)$, on F F és finit i $F\subseteq X\cup\{a\}$

Podem suposar sempre, sense perdre generalitat, que $a \in F$, ja que en cas contrari agafem $F \cup \{a\}$ en lloc de F.

Així doncs $b \in C(b_1, b_2, .., b_n, a)$, i per 2 equival a que existeixin $k_1, k_2, ..., k_{n+1} \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$, tals que

$$b_1^{k_1} \cdot (\quad \cdot (b_n^{k_n} (a^{k_{n+1}} b)) \quad) \in C(\emptyset),$$

si, i només si, $a^{k_{n+1}} b \in C(b_1, \quad , b_n) \subseteq C(X)$.

<u>Proposició II.3</u> -

Si $(A, \ , C)$ satisfà p.d f i C és finitari, aleshores

1 - $C(\emptyset) \in \mathcal{D}$

2.- $\mathcal{C}(C) = \mathcal{D}_{C(\emptyset)}$

En efecte:

1.- Suposem que a i $a.b \in C(\emptyset)$, aleshores $C(\emptyset) = C(a)$ i $b \in C(\emptyset)$

2.- Sigui $T \in \mathcal{C}(C)$, aleshores $C(\emptyset) \subseteq T$

A més $T \in \mathcal{D}$, ja que si $a, a\ b \in T$ aleshores $b \in C(T, a) = C(T) = T$

D'altra banda, si $D \in \mathcal{D}_{C(\emptyset)}$, considerem $a \in C(D)$, sabem que existeix $F = \{b_1, b_2, ..., b_n\} \subset D$ tal que $a \in C(F)$, això és existeixen $k_1, .., k_n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$, que $b_1^{k_1} \cdot (b_2^{k_2} \cdot (...(b_n^{k_n} \cdot b) \quad .)) \in C(\emptyset) \subseteq D$, per m p. reiterat $a \in D$, per tant $C(D) = D$ i $D \in \mathcal{C}(C)$

<u>Definició II.6</u>.-

Sigui $(A, .)$, $D \in \mathcal{D}$ Diem que D és un <u>sistema deductiu feble</u> (s d f) quan:

s.d f.1 - Per tot $a,b \in A$, existeixen $k,r \in \mathbb{N}\setminus\{0\}$, tals que

$$a^k (b^r a) \in D$$

s d.f 2 - Per tot $a, b, c \in A$, i per tot $\alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{N}\setminus\{0\}$,

existeixen $s,m,r \in \mathbb{N}\setminus\{0\}$ tals que

$$(a^\alpha (b^\beta c))^s ((a^\gamma b)^m (a^r c)) \in D.$$

Es clar que si D és s d f , $D \neq \emptyset$, ja que per tot $a \in A$, existeixen $k,r \in \mathbb{N}\setminus\{0\}, a^{k+r} a \in D$

<u>TEOREMA II 4</u> -

Sigui (A,), $D \in \mathcal{D}$, aleshores

$(A,.,K_D)$ satisfà el p d f si, i només si, D és un s.d.f

En efecte:

Si $(A, ,K_D)$ satisfà el p d f , aleshores:

1.- Com que $a \in K_D(a,b)$ qualsevol que sigui $b \in A$, existeixen $k,r \in \mathbb{N}\setminus\{0\}$ tals que $a^k (b^r a) \in D$

2.- En primer lloc veiem que per tot $a,b,c \in A$ i tot $\alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{N}\setminus\{0\}$

$$c \in K_D(a^\gamma.b,\ a^\alpha (b^\beta c),\ a) = D', \qquad (1)$$

és clar que $a, a^\gamma b \in D'$ i per m p reiterat $b \in D'$, aleshores $a, b, a^\alpha (b^\beta c) \in D'$ i,per m p reiterat, $c \in D'$

(1) és equivalent a que existeixin $r,s,t \in \mathbb{N}\setminus\{0\}$ que

$$(a^\alpha (b^\beta c))^r ((a^\gamma.b)^s.(a^t c)) \in D$$

Recíprocament Veiem que si D és un s.d.f , aleshores donats $D'' \in \mathcal{D}_D$ i $a \in A$, $D^* = \{b \in A /$ existeix $n \in \mathbb{N}\setminus\{0\}$ que $a^n b \in D''\} = K_D(D'',a)$

a.- $D^* \in \mathscr{D}$, ja que si $c \in D^*$ i $c\ b \in D^*$, aleshores existeixen $n,m \in \mathbb{N}\setminus\{0\}$

tals que $a^n.c \in D''$ i $a^m\ (c.b) \in D''$ i per s d f 2.-, tenim:

$$(a^m\ (c.b))^r.((a^n\ c)^s\ (a^t\ b)) \in D''$$

per certs r,s,t de $\mathbb{N}\setminus\{0\}$ per m p reiterat $a^t\ b \in D''$, d'on $b \in D^*$

b.- $D'' \subseteq D^*$ i $a \in D^*$, ja que

- existeixen $k,r \in \mathbb{N}\setminus\{0\}$, que $a^{k+r}\ a \in D \subseteq D''$, per tant $a \in D^*$
- si $b \in D''$, existeixen $k,r \in \mathbb{N}\setminus\{0\}$, que $b^k(a^r\ b) \in D \subseteq D''$, i per m.p. reiterat $a^r.b \in D''$, i per tant $b \in D^*$

En particular $D \subseteq D^*$, i $D^* \subset \mathscr{D}_D$

c.- Si $T \in \mathscr{D}_D$, $a \in T$ i $D'' \subseteq T$, aleshores

per tot $b \in D^*$, existeix $n \in \mathbb{N}\setminus\{0\}$, que $a^n\ b \in D'' \subseteq T$ i per m.p

reiterat $b \in T$ D'on $D^* \subseteq T$

Aixídoncs $D^* = K_D(D'';a)$. I hem obtingut una caracterització dels elements de $K_D(D'';a)$:

$$b \in K_D(D'';a) \text{ si, i només si, existeix } n \in \mathbb{N}\setminus\{0\}, \text{ que } a^n\ b \in D'',$$

per tot $a,b \in A$ i tot $D'' \in \mathscr{D}_D$.

Si fem $D'' = K_D(X)$ obtenim la demostració del Teorema

Corol.lari 1.-

Si $(A,.,C)$ satisfà p d f i C és finitari, aleshores $C(\emptyset)$ és s d f

Corol lari 2.-

Si $C(\emptyset)$ és s d t-l. i C és finitari,

$(A,\ ,C)$ satisfà en p.d.f. si, i només si, $\mathscr{C}(C) = \mathscr{D}_{C(\emptyset)}$

<u>Corol.lari 3.</u>-

Tot s d.co és s d f

El recíproc del Corol.lari 3. , en general, no és cert (cf Apèndix Ex.2.)

La relació entre certs tipus de s.d f i els s d c ve donada per

<u>TEOREMA II.5</u> -

Sigui D s d.f tal que per tot $a,b,c \in A$, i tot $r,s \in \mathbb{N}\setminus\{0\}$

$a^r.(b^s\ c) \in D$, implica $b^s\ (a^r.c) \in D$,

aleshores D és s.d.c. si, i només si, D és s d.t-1

En efecte:

És clar que tot s.d.c. és s d t-1

Suposem que D és s d t-1 La condició que hem imposat es generalitza per inducció:

per tot $a_1,\ldots,a_n,b \in A$, si $a_1^{k_1}(a_2^{k_2}(\ \ .(a_n^{k_n}\ b)\ \ .)) \in D$

aleshores:

$$a_{\tau(1)}^{k_{\tau(1)}}.(a_{\tau(2)}^{k_{\tau(2)}}(\quad (a_{\tau(n)}^{k_{\tau(n)}}b).\quad)) \in D$$

per tot $k_1,\ldots,k_n \in \mathbb{N}\setminus\{0\}$, tota permutació $\tau \in \mathcal{S}_n$, i tot $n \in \mathbb{N}\setminus\{0\}$

Per demostrar que D és clàssic veiem que $(A,\ ,K_D)$ satisfà p d T

Sigui $X \subseteq A$, i $a,b \in A$:

Si $X \neq \emptyset$, - si $a.b \in K_D(X)$, aleshores $b \in K_D(X,a)$ per ésser D s.d.f.

- si $b \in K_D(X,a)$, aleshores existeix $n \in \mathbb{N}\setminus\{0\}$ que $a^n.b \in K_D(X)$,

això implica que existeix $F = \{b_1,\ldots,b_p\} \subseteq X$, tal que

$$a^n\ b \in K_D(\{b_1,\ \ldots,b_p\})$$

o equivalentment, existeixen $k_1, \quad ,k_r \in \mathbb{N}\setminus\{0\}$ que

$$b_1^{k_1}.(\ldots(b_r^{k_r}.(a^n.b))\ldots)\in D$$

i per la condició imposada

$$a^n.(b_1^{k_1}.(\quad (b_r^{k_r}\ b)\quad))\in D$$

com que D és s d t-l ,per la propietat 2.

$$a.(b_1^{k_1}\ (\quad (b_r^{k_r}\ b)\quad))\in D$$

i finalment

$$b_1^{k_1}.(.\quad (b_r^{k_r}\ (a\ b))..\ )\in D$$

que implica

$$a.b\in K_D(b_1,\ ..,b_r)\subseteq K_D(X)$$

Si $X = \emptyset$, $a.b\in D$ si, i només si, $b\in K_D(a)$, ja que D és s d t-l

El Teorema anterior generalitza el següent resultat:

<u>Corol lari</u> - (J Pla(12))

D és s.d.c si, i només si, D és s d.co. i s.d.t-l

En efecte:

El directe és trivial.

El reciproc és cert ja que si D és s d.co ,satisfà les hipòtesis del Teorema anterior.

A l'hora de pretendre obtenir estructures deductives- algebràiques els s.d.f. no ens van bé, piux no són pre-ordenadors (en el sentit dels Teoremes 0.10 i 0.11 , i Propietat 1). Per tal d'obtenir pre-ordre, compatibilitat de la relació d'equivalència induïda amb ,

i que D sigui la classe màxima en el quocient, necessitem definir un nou tipus de s d f.

Definició II 7 -

Sigui (A,), $D \in \mathcal{D}$ Diem que D és s d f *, quan

s d.f *1.- D és s.d f

s d.f *2 - Per tot $a \in A$, a $a \in A$

s d.f *3 - Per tot $a,b,c \in A$, a $b \in D$ i b $c \in D$, impliquen a $c \in D$

s.d.f *4 - Per tot $d \in D$, ~~tot~~ $a \in A$, a $d \in D$

s d f *5 - La relació d'equivalència definida per:

$a \equiv_D b$ si, i només si, a $b \in D$ i b $a \in D$,

és congruència

En la definició anterior, de 1,2 i 3 se'n dedueix que la relació definida per D és d'equivalència També és clar que tot s d ~~so~~ és s.d.f *, però el recíproc no és, en general, cert (cf Apèndix Ex 2)

II.2.- Algebres implicatives i deducció

En aquest paràgraf estudiem certs tipus d'àlgebres implicatives, l'interés de les quals radica en el fet d'obtenir-se per quocient modul els sistemes deductius estudiats en el paràgraf II 1

També donem la relació que existeix entre les àlgebres implicatives obtingudes i els principis de la deducció

Considerem $(A,)$, $\mathcal{D}$, K , $D\in\mathcal{D}$, K_D, tal com hem convingut en els preliminars

II.2.1

<u>TEOREMA II.6.-</u>

Digui D s.d t-1 , aleshores $(A/D, ,D)$ satisfà:

1.- Per tot $d\in D$, $\bar{d} = D$

2 - Per tot $a\in A$, $\bar{a}\,\bar{a} = D$

3 - Per tot $a,b\in A$, $\bar{a}.\bar{b} = D$ i $\bar{b}\,\bar{a} = D$, impliquen $\bar{a} = \bar{b}$

4.- Per tot $a\in A$, $\bar{a}\,D = D$

5 - Per tot $a,b,c\in A$, si $\bar{a}.(\bar{b}.\bar{c}) = D$ i $\bar{a}.\bar{b} = D$, aleshores $\bar{a}.\bar{c} = D$

6 - $(A/D,.,D)$ és un àlgebra implicativa

$\bar{a}$, $\bar{b}$, $\bar{c}$ representen les classes d'equivalència de representant a,b,c,respectivament, per la relació d'equivalència definida per D, i A/D el seu conjunt quocient

En efecte:

Recordem que si D és un s d t-1 * la relació d'equivalència definida per D és congruència

1 – donat que D satisfà m.p , i per tot $a \in A$, i tot $d \in D$, $a\ d \in D$, aleshores (cf. J.Plà op cit) $\bar{d} = D$

2.– ja que per tot $a \in A$, $a\ a \in D$

3.– en virtud de la mateixa definició de $\bar{a}$.

4.– ja que $\bar{a}\ \bar{d} = \bar{a}.D$ i $a\ d \in D$, d'on $\bar{a}.\bar{d} = D$

5.– ja que D és s.d.t–1.

6.– la relació $\bar{a} \leq \bar{b}$ si, i només si, $a \leq_D b$ és una relació d'ordre, i per 4, D és l'element màxim en A/D ja que , per 1 , $D \in A/D$

<u>Definició II.8</u> –

Diem que (A, ,u) és un <u>àlgebra d–tipus 1</u> (a d–t–1) quan

a d–t–1.1.– Per tot $a \in A$, $a.u = u$

a.d–t–1 2 – Per tot $a \in A$, $a\ a = u$

a d–t–1 3 – Per tot $a,b \in A$, $a\ b = b\ a = u$, impliquen $a = b$

a d–t–1 4 – Per tot $a,b,c \in A$, $a\ (b.c) = u$ i $a\ b = u$, impliquen $a\ c = u$

<u>Proposició II.4</u>.–

Tota àlgebra d–tipus 1, és àlgebra implicativa

La demostració és trivial

Hi ha àlgebres implicatives que no són àlgebres d–tipus 1 (cf Apèndix Ex 3).

TEOREMA II 7 -

Sigui (A, ,u) a i , aleshores:

(A, ,u) és a d-t-l si, i només si, $\{u\}$ és s d t-l

En efecte:

Si (A,.,u) és a d-t-l, per a d-t-l 1, a d-t-l 2,a d-t-l 4,$\{u\}$és s.d t-l

Recíprocament, si $\{u\}$ és s.d.t-l es compleixen a.d-t-l,1, a d-t-l2, a.d-t-l.4, i com que (A,.,u) és a.i tenim a.d-t-l 3

Corollari 1 -

Si (A, ,u) és a i , aleshores:

(A, ,u) és a d-t-l si, i només si, (A, ,K_o) satisfà p.d t-l

Corol.lari 2 -

Si (A,.,u) és a de H , aleshores (A, ,u) és a d-t-l

Hi ha àlgebres d-tipus 1 que no són àlgebres de Hilbert (cf Apèndix Ex.1)

II.2.2.

En aquest apartat estudiem les àlgebres implicatives que hom obté al fer quocient amb un s d co

TEOREMA II.8.-

Sigui (A,), $D\in\mathcal{D}$, D s d.co , aleshores (A/D, ,D) compleix:

1 - Per tot $d \in D$, $\bar{d} = D$

2 - Per tot $a \in A$, $\bar{a}\ \bar{a} = D$

3 - Per tot $a,b \in A$, $\bar{a}\ \bar{b} = D$ i $\bar{b}\ \bar{a} = D$, impliquen $\bar{a} = \bar{b}$

4 - Per tot $a \in A$, i tot $d \in D$, $\bar{a}\ \bar{d} = D$

5 - Per tot $a,b,c \in A$, $\bar{a}\ (\bar{b}\ \bar{c}) = \bar{b}\ (\bar{a}\ \bar{c})$

6 - Per tot $a,b,c \in A$, $(\bar{a}\ \bar{b})\ ((\bar{c}\ \bar{a})\ (\bar{c}.\bar{b})) = D$

7 - (A/D, ,D) és a i

$\bar{a}$, $\bar{b}$, $\bar{c}$ designen les classes de representants a, b, c i d, respectivament, donades per la relació d'equivalència definida per D

En efecte

Les demostracions de 1,2,3,4,6,7 són anàlegs a les del Teorema II 6

5 surt de que, en ésser D s d.co , per tot $a,b,c \in A$,

$$\overline{a.(b\ c)} \leq \overline{b\ (a\ c)}$$

i per simetria, i per la compatibilitat de la relació amb l'operació:

$$\bar{a}\ (\bar{b}\ \bar{c}) = \bar{b}\ (\bar{a}\ \bar{c})$$

<u>Definició II.8</u>.-

(A,.,u) és <u>àlgebra d-completa</u> (a d-co) si:

a.d-co.1 - Per tot $a \in A$, $a\ a = u$

a d-co 2.- Per tot $a,b \in A$, $a.b = u$ i $b\ a = u$, impliquen $a = b$

a d-co.3.- Per tot $a \in A$, $a.u = u$

a.d-co4.- Per tot $a, b, c \in A$, $a.(b.c) = b.(a\ c)$

a.d-co.5.- Per tot $a, b, c \in A$, $(a.b)\ ((c.a)\ (c\ b)) = u$

<u>Proposició II.5</u>.-

Si (A, ,u) és a.d-co., aleshores és a.i

En efecte:

Cal veure que la relació : $a \leq b$ si, i només si, a.b = u , és d'ordre i que u n'és l'element màxim

1.- a.d-co 1. ens dóna la reflexiva

2.- a.d-co 2. ens dóna l'antisimètrica

3.- Si a b = u i b c = u, aleshores per a.d-co5 , tenim

(b.c) ((a.b) (a c)) = u ,per a d-co 3

((a.b) (a c)).(b.c) = u;

aplicant a d-co.2

(a.b).(a.c) = b.c = u

però per a.d-co.3 i per hipòtesi

(a.c) (a.b) = u

d'on a.c = a.b = u

4.- Per a d-co3 u és el màxim .

<u>Propietats</u>.-

Si (A,.,u) és a.d-co , satisfà

1 - Per tot $a,b \in A$, a (b a) = u

2 - Per tot $a,b,c \in A$, $a \leq b$ c si, i només si, $b \leq a$ c

3 - Per tot $a,b,c \in A$, (a b) ((b c) (a c)) = u

4.- Per tot $a,b,c \in A$, $a \leq b$, implica c $a \leq c.b$ i

b $c \leq a$ c

5 – Per tot $a,b,c \in A$, $a\ b \leq (c\ a)\ (c\ b)$

6.– $a.b = b$ per tot $b \in A$, si, i només si, $a = u$

7 – Per tot $a,b,c \in A$ i per tot $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 1$,

$$a.(b^n.c) = b^n.(a.c)$$

En efecte·

1.– ja que $u = b.u = b.(a.a) = a.(b\ a)$

2.– és immediat apartir de a.d–co4.

3.– per a.d–co 5. i a.d–co.4., tenim:

$$u = (b.c)\ ((a.b).(a.c)) = (a.b).((b.c)\ (a.c))$$

4.– $a \leq b$, implica $a.b = u$ i aleshores per a.d–co.5, a.d–co.3, i a.d–co.2. $(c.a).(c.b) = u$, això és $c.a \leq c.b$;

d'altra banda, per la propietat 3 , a.d–co 3. i a.d–co 2 $a \leq b$, implica $(b\ c).(a.c) = u$ i aleshores $b\ c \leq a\ c$

5.– és immediat de a.d–co.5.

6.– si $a = u$, aleshores, per la propietat 1, $b \leq u\ b$ i

$$u.((u.b).b) = (u\ b)\ (u\ b) = u\ ,$$

per tant $(u.b)\ b = u$, d'on $u.b = b$;

si $a\ b = b$, per tot $b \in A$, fent $b = a$, $a\ a = a = u$

7.– per inducció:

– $n = 1$ és a d–co 4.

– si val per tot $k \leq n$, aleshores

$$a.(b^{n+1}.c) = a.(b^n\ (b.a)) = b^n\ (a\ (b.c)) = b^n\ (b.(a\ c)) =$$
$$= b^{n+1}.(a.c)$$

TEOREMA II 9 -

Si $(A,\cdot,u)$ és a i , les següents condicions són equivalents:

(1) $(A,\cdot,u)$ és a.d-co.

(2) Per tot $D \in \mathcal{D}_0$, D és s.d.co.

(3) $\{u\}$ és s.d.co.

En efecte:

(1) implica (2), Com que tot $D \in \mathcal{D}_0$ conté u, aleshores D satisfà a.d-col, a.d-co.3, a d-co.5. i a més per tot $d \in D$ $a \in A$, $d \leq a.d$, tenim que a.d D

(2) implica (3) és obvi.

(3) implica (1), $A/\{u\} = A$ i en virtud del Teorema II 8 , $(A,\cdot,u)$ és a.d-co.

Corol.lari.-

Sigui $(A,\cdot,u)$ a d-co,aleshores $(A, ,K_0)$ satisfà p.d.f.

Les propietats dels s.d.co. ens permeten d'afirmar que tota àlgebra de Hilbert és àlgebra d-completa. El recíproc,però,és fals(cf Apèn. Ex3,4).

TEOREMA II.10.-

Si $(A, ,u)$ és a.d-co , aleshores

$(A,\cdot,u)$ és a. de H. si, i només si, és a.d-t-l.

En efecte·

Sabem que $(A,.,u)$ és a. de H si, i només si, $\{u\}$ és s d c

Are bé, si $\{u\}$ és s.d co pel corol lari del Teorema II 5 ,

la condició necessària i suficient per que sigui s d c és que sigui

s.d.t-l., això és que $(A, ,u)$ sigui a.d.t-l.

II.2 3.

El tercer tipus de sistemes deductius que obteníem, en el paràgraf

II.1, éren els s d.f., i per tal de poder obtenir quocient i que

aquest sigui àlgebra implicativa definiem els s d f^*

<u>TEOREMA II 11</u> -

Si D és s.d.f^*. de $(A,.)$, aleshores $(A/D,.,D)$ compleix·

1.- Per tot $d \in D$, $\bar{d} = D$

2.- Per tot $a \in A$, $\bar{a}.\bar{a} = D$

3.- Per tot $a,b,c \in A$, $\bar{a}.\bar{b} = D$ i $\bar{b}\,\bar{c} = D$, impliquen $\bar{a}.\bar{c} = D$.

4 - Per tot $a.b \in A$, $\bar{a}\,\bar{b} = D$ i $\bar{b}\,\bar{a} = D$, impliquen $\bar{a} = \bar{b}$

5.- Per tot $a \in A$, $\bar{a}.D = D$

6.- Per tot $a,b \in A$, existeixen $n,m \in \mathbb{N}$, $n \geqslant 1$, $m \geqslant 1$, tals que $\bar{a}^n.(\bar{b}^m\,\bar{a}) = D$

7.- Per tot $a,b,c \in A$ i per tot $\alpha,\beta,\gamma \in \mathbb{N}$, $\alpha\beta\gamma \geqslant 1$, existeixen $r,s,t \in \mathbb{N}$, $r,s,t \geqslant 1$, tals que $(\bar{a}^{\alpha}\,(\bar{b}^{\beta}\,\bar{c}))^r\,((\bar{a}^{\gamma}.\bar{b})^s\,(\bar{a}^t\,\bar{c})) = D$

8.- $(A/D,.,\bar{D})$ és a.i.

$\bar{a}$, $\bar{b}$, $\bar{c}$ designen les classes de representants a,b,c i d, respectivament, donades per la relació d'equivalència definida per D

En efecte:

Com que D és s d.f* , aleshores la relació d'equivalència :

$a \equiv_D b$ si, i només si, $a.b \in D$ i $b.a \in D$, és congruència A més

1.- puix que D és s.d.f* i satisfà m p.

2.- per s.d.f* 1 i s.d f*. 2

3.- per s d.f*.3. i 1.

4.- per la mateixa definició de $\equiv_D$

5.- per s.d.f*.4 i 1.

6.- per s.d.f*.1 i 1

7.- per s.d.f*.2 i 1

8.- és evident desprès de 1, 2, 3, 4, i 5.

<u>Definició II 9</u> -

Diem que (A, ,u) és <u>àlgebra d-feble</u> (a.d-f)si:

a.d-f.1.- Per tot $a \in A$, $a.a = u$

a.d-f.2.- Per tot $a,b \in A$, $a.b = u$ i $b.a = u$, impliquen $a = b$

a.d-f.3.- Per tot $a,b,c \in A$, $a.b = u$ i $b.c = u$, impliquen $a.c = u$.

a.d-f.4.- Per tot $a \in A$, $a.u = u$.

a.d-f.5.- Per tot $a,b \in A$, existeixen $n,m \in \mathbb{N}$, $n \geq 1$, $m \geq 1$, tals que $a^n (b^m a) = u$

a.d-f.6.- Per tot $a,b,c \in A$, i tot $\alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{N}$, $\alpha \geq 1$, $\beta \geq 1$, $\gamma \geq 1$, existeixen $r,s,t \in \mathbb{N}$, $r \geq 1$, $s \geq 1$ $t \geq 1$, tals que

$$(a^\alpha (b^\beta c))^r ((a^\gamma b)^s . (a^t c)) = u.$$

És clar que tota a d-f és a i que satisfà a d-f 5, i a d-f 6

TEOREMA II.12.-

Si (A, ,u) és a.i , les següents condicions són equivalents:

(1) (A, ,u) és a d-f

(2) $\{u\}$ és s d.f

(3) Tot $D \in \mathcal{D}_o$, és s d f.

En efecte:

(1) si, i només si, (2), en virtud de a.d-f 5, a d-f 6, a.d-f.1 i a.d-f.2.

(2) si, i només si,(3), és obvi.

Corol.lari 1 -

Si (A, ,u) és a.i., aleshores:

(A,.,u) és a d-f si , i només si, (A, $,K_o$) satisfà p.d.f

Corol lari 2.-

Tota a d-co és a d-f

El recíproc del Corol lari anterior és fals (cf Apèndix Ex 2)

<u>Proposició II.6</u> -

Sigui (A, ,u) a.i i C un operador conseqüència definit en A finitari

Si (A, ,C) satisfà p d f , aleshores

1.- $\mathcal{C}(C) \subseteq \mathcal{D}_o$

2.- $\mathcal{C}(C) = \mathcal{D}_o$ si, i només si, $C(\emptyset) = \{u\}$

En efecte

1.- La proposició II 3 ens diu que $\mathcal{C}(C) = \mathcal{D}_{C(\emptyset)}$ Cal veure que per tot $T \in \mathcal{C}(C), u \in T$ Però per tot $a \in A$, existeix $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 1$, tal que $a^n\ a \in C(\emptyset)$, i com que a a = u = a u, tenim $a^n.a = u \in C(\emptyset) \subseteq T$

2.- Si $\mathcal{C}(C) = \mathcal{D}_o$, aleshores $C(\emptyset) = \{u\}$

Recíprocament, sabem que $\mathcal{C}(C) \subseteq \mathcal{D}_o$. Sigui $D \in \mathcal{D}_o$ Cal veure que $C(D) = D$, Si $b \in C(D)$, existeixen $b_1, \ldots, b_n \in D$, tals que existeixen $k_1, \ldots, k_n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$; i

$$b_1^{k_1}.(\quad (b_n^{k_n}\ b)\ .\ ) \in C(\emptyset) = \{u\} \subseteq D$$

per m.p. reiterat, $b \in D$

<u>TEOREMA II.13</u>.-

Si (A,.,u) és a.d-f, tal que per tot $a,b,c \in A$ i tot $r,s \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$, satisfà:

$$a^r\ (b^s.c) = u \text{ si, i només si, } b^s.(a^r\ c) = u,$$

aleshores:

aleshores:

(A,.,u) és a. de H si, i només si, és a d-t-l

En efecte:

Donat que en tota a. de H. $\{u\}$ és s d c , pel Corol lari 3 del Teorema II.4 $\{u\}$ és un s.d f , i pel Teorema II 5 és s d t-l; el TEorema II,7 acaba la demostració en un sentit

Si (A,.,u) és a.d-t-l, aleshores $\{u\}$ és s d.t-l, per tant pel Teorema II.5, $\{u\}$ és s.d.c. i (A,.,u) és a. de H.

II.3 <u>Àlgebres d-completes i operacions reticulars.</u>

En aquest paràgraf estudiem les àlgebres d-completes en les que l'ordre induït dóna lloc a una estructura reticular

II.3.1.

Considerem (A,.,v,u) i (A,.,v,$\wedge$,u) segons el conveni adoptat en els preliminars.

<u>Definició II.10.-</u>

Diem que (A, ,v,u) és un <u>supra-reticle d-complet</u> (s-r d-co.) si:

s-r d-co 1.- (A, ,u) és a.d-co

s-r.d-co 2 - (A,v) és un supra-reticle

s-r.d-co.3.- Per tot a,b$\in$A, a v b = a si,i només si, b.a = u

És clar, de s-r d-co 3, que l'estructura supra-reticular dóna el mateix ordre que l'estructura implicativa, a més tot s-r d-co és s-r.i.

Definició II 11.-

Diem que $(A,\vee,\wedge, ,u)$ és <u>reticle d-complet</u> (r d-co) quan:

r.d-co.1 - $(A,.,u)$ és a d-co.

r d-co 2.- $(A,\vee,\wedge)$ és reticle

r d-co.3 - Per tot $a,b\in A$, $a\vee b = b$ si, i només si,

$$a\ b = u$$

Es clar que tot r.d-co és s-r d-co, i a més, és r i

Si $(A,.,\vee,\wedge,u)$ és un r d-co., satisfà les següents propietats.

Propietats -

1 - Per tot $a,b\in A$, $a\wedge(b\ a) = a$

2 - Per tot $a,b\in A$, $a\wedge b\leq a\wedge(a.b)$

3.- Per tot $a,b,c\in A$, $a.(b\wedge c)\leq(a\ b)\wedge(a\ c)$

4.- Per tot $a,b,c\in A$, $(a\vee b)\ c=(a\ c)\wedge(b\ c)$

En efecte:

1.- ja que $a\leq b.a$

2.- com que $b\leq a\ b$, $a\wedge b\leq a\wedge(a.b)$

3.- en un reticle tenim $b\wedge c\leq c$ i $b\wedge c\leq b$, per tant per les propietats de les a.d-co tenim $a\ (b\wedge c)\leq a.b$ i $a\ (b\wedge c)\leq a\ c$, aleshores $a.(b\wedge c)\leq a\ b\wedge a.c$

4.- per un raonament semblant a la propietat 3 tenim:

$(a \vee b)\ c \leq (a.c) \wedge (b\ c)$,

d'altra banda si $t \leq (a\ c) \wedge (b\ c)$, aleshores $t \leq a\ c$ i $t \leq b\ c$,

per a.d-co 3, tenim $a \leq t\ c$ i $b \leq t\ c$, per tant $a \vee b \leq t\ c$,

d'on $t \leq (a \vee b)\ c$. Si fem $t = (a\ c) \wedge (b\ c)$, aleshores

$(a.c) \wedge (b\ c) \leq (a \vee b)\ c$, d'on s'obté la igualtat

Tot r de H. és un r d-co i, per tant, tota a. de Ht és un r d-co

Proposició II 7 -

Sigui $(A, ,\vee, ,u)$ r d-co , aleshores

$(A, ,\vee,\wedge,u)$ és a. de Ht si, i només si, compleix

per tot $a,b,c \in A$: - $a \wedge (a\ b) = a \wedge b$

- $a\ (b \wedge c) = (a.b) \wedge (a.c)$

En efecte:

Veure Teorema 0 21

En l'apèndix , Ex 3, hom trobarà un exemple de r d-co que no és pas r. de H i per tant no és pes a. de Ht

II.3 2.

Imposant certes restriccions en un a de H (cf Rasiowa (18), i preliminars Definició 0 19 i Teorema 0 18) podem obtenir un supra-reticle En aquest apartat estudiem quines condicions cal imposar a un a.d-co , per tal que sigui un supra-reticle d-complet

En les àlgebres de Hilbert, la condició per tal que sigui un supr-reticle de Hilbert que dóna Abbott(cf Rasiowa(18)) és equivalent a la condició que dóna Sales(cf F A Sales(25) J Pla(13)) En un àlgebra d-completa aquesta equivalència no es satisfà

<u>Proposició II 8</u> -

Si (A,.,u) és a.d-co , aleshores

Per tot $a,b \in A$, $(a.b).a = a$, implica $(a\ b).b = (b\ a)\ a$

En efecte:

Cal utilitzar la propietat 3 de les a d-co

$$(a\ b)\ b \leq (b\ a)\ ((a.b)\ a) = (b\ a)\ a$$

i, per simetria, obtenim la igualtat desitjada

El recíproc és fals (cf Apèndix Ex.4)

<u>Proposició II 9</u> -

Si (A, ,u) és a d-co tal que, per tot $a,b \in A$, $(a\ b)\ a = a$, aleshores (A, ,u) és a de A i per tant a de H

En efecte: (*)

Cal veure que és a. de H

1.- Per tot $a,b \in A$, $a.b = a^2\ b$

- $a.b \leq a^2\ b$ val sempre

(*)
La segona part de la demostració és supèrflua ja que, de 1 es segueix que (A,.,u) és a.d-t-1 i pel Teorema II.10 és a deH La donem amb l'única finalitat de presentar una demostració <u>directa</u>, a partir de $(a\ b)\ a = a$, de l'axioma que dóna la diferència essencial entre les a.d-co i les a de H

- la proposició II 8 ens diu que $(a^2.b)\ (a\ b) = (a.(a\ b))\ (a\ b) =$

$= ((a.b).a)\ a = a.a = u,$

2.- per tot $a,b,c \in A$, tenim $a.(b.c) = (a.b)\ (a.c)$

- $a.(b\ c) \geq (a.b).(a.c)$ val sempre

- $a.(b\ c) \leq a((a\ b)\ (a\ c)) = (a\ b)\ (a\ (a.c) = (a\ b)\ (a\ c)$

T EOREMA II,14.-

Si $(A, \ ,u)$ és a.d-co. tal que per tot $a,b \in A$

$(a.b)\ b = (b.a).a$, aleshores

$(A,.,v,u)$ és s-r.d-co, on $a \vee b = \sup(a,b) = (a.b)\ b$

En efecte·

1 - $a \vee b = \sup(a,b)$

i - $a \vee b = b \vee a$ per hipòtesi

ii.- si $a \leq b$, per tot $c \in A$, $a\ c \geq b\ c$, i per tant $(a.c)\ c \leq (b\ c)\ c$

és a dir $a \vee c \leq b \vee c$, i per conmutativitat $c \vee a \leq c \vee b$

iii.- si $a \leq c$ i $b \leq c$, aleshores

$a \vee b \leq a \vee c \leq c \vee c = (c.c).c = u\ c = c$

iv.- a més $a \leq (b.a).a$ i $b \leq (b.a)\ a$

2.- És clar que l'ordre donat pel suprem v, és el mateix que

el de l'àlgebra implicativa.

Definició II.12.-

Diem que $(A,.,u)$ és àlgebra de Sales (a. de S.)

quan satisfà les hipòtesis del Teorema II 14:

a. de S 1 - $(A,.,u)$ és a d-co

a de S.2 - Per tot $a,b \in A$, $(a\ b)\ b = (b.a)\ a$

A. Rodríguez (21), ha óbtingut les àlgebres de Sales per un altre mètode: fent quocient per sistemes deductius, i les dóna equacionalment.

Despres de la Proposició II 8,és clar que tota a. de A. és a de S

És conegut que tota àlgebra de Abbott que té element mínim és àlgebra de Boole (cf. F.A. Sales(25)) Ara veiem què es guanya en les àlgebres de Sales quan tenen element mínim(*) Abans,però, veiem més propietats.

<u>Propietats</u>.-

En tota a. de S $(A,\ ,u)$ tenim:

1.- Per tot $a,b,c \in A$, $(a.c).((b.c)\ ((a \vee b)\ c)) = u$

2.- Per tot $a,b \in A$, $(a \vee b)\ a = b\ a$

En efecte:

1.- $(a.c).((b.c)\ ((a\ b)\ b)\ c)) = (a.c)\ (((a.b)\ b).((b\ c).c))=$

$= (a.c)\ (((a.b).b)\ ((c\ b)\ b)) \leq (a.c).(a.c) = u$

2.- $((b.a).a)\ a = (b\ a) \vee a = b.a$

(*) Per un tractament distint d'aquest problema veure A. Rodríguez(21)

TEOREMA II.15.-

Si $(A,\cdot,u)$ és a de S amb element mínim 0, per tot $a,b \in A$, definim:

$$\neg a = a\ 0\ ,\ a \wedge b = \neg(\neg a \vee \neg b) = \neg(((\neg a)\ (\neg b))\ (\neg b))$$

aleshores

$(A,\dot{-},v,\wedge,\neg,\ u)$ és r d-co. amb negació forta de Morgan, això és

- $(A,v,\wedge,\ ,u)$ és r d-co
- $a \leq b$, implica $\neg b \leq \neg a$
- $\neg(\neg a) = a$
- $\neg(a \wedge b) = \neg a \vee \neg b$
- $\neg(a \vee b) = \neg a \wedge \neg b$

En efecte:

1.- és negació forta:

- si $a \leq b$, aleshores $a.0 \geq b\ 0$ i $\neg b \leq \neg a$
- $a = a \vee 0 = (a.0)\ 0 = \neg(\neg a)$.

2.- $\wedge$ és l'ínfim , donat que $\neg$ és negació forta i v és el suprem

3.- La negació és de Morgan:

- $\neg(a \wedge b) = \neg(\neg(\neg a \vee \neg b)) = \neg a \vee \neg b$
- $\neg(a \vee b) = (a \vee b)\ 0 = (a\ 0) \wedge (b\ 0) = \neg a \wedge \neg b$.

Propietats.-

Si $(A,\cdot,\mu,0)$ és a. de S amb element mínim, tenim:

1 - Per tot $a,b \in A$, $a \wedge b \leq a \wedge (a\ b)$

2.- Per tot $a,b,c \in A$, $a \vee (b\ \ a) = b\ \ a$

3.- Per tot $a,b,c \in A$, $(a \vee b)\ \ c = (a.c) \wedge (b.c)$

4.- Per tot $a,b,c \in A$, $(a.c)\ \ ((b\ \ c)\ \ ((a \vee b).c)) = u$

5.- Per tot $a,b \in A$, $(a \vee b).\ a = b\ \ a$

6.- Per tot $a,b,c \in A$, $a.(b \vee c) = (b\ \ c)\ \ (a\ \ c) =$

$= (c\ \ b)\ \ (a.b)$

7.- Per tot $a,b \in A$, $a\ \ b = (b\ \ 0)\ \ (a\ \ 0)$

8.- Per tot $a,b,c \in A$, $a\ \ (b \wedge c) = (a\ \ b) \wedge (a.c)$

9 - Per tot $a,b,c\ \ A$, $(a \wedge b)\ \ c = (b\ \ a)\ \ (b\ \ c) =$

$= (a.b)\ \ (a\ \ c)$

En efecte·

1, 2, 3 es satısfan ja que és r d-co

4,5 es satisfan ja que és un a de S

6.- $a.(b \vee c) = a\ \ ((b\ \ c)\ \ c) = (b\ \ c)\ \ (a\ \ c)$

$= a\ \ ((c\ \ b)\ \ b) = (c.b).(a\ \ b)$

7.- $a.b = a.(b \vee 0) = (b\ \ 0)\ \ (a.0)$, per 6.

8.- $(a\ \ .b) \wedge (a\ \ c) = ((b\ \ 0)\ \ (a\ \ 0)) \wedge ((c\ \ 0)\ \ (a.0)) =$

$= ((b\ \ 0) \vee (c\ \ 0)).(a\ \ 0) = ((b \wedge c)\ \ 0)\ \ (a.0) =$

$= a\ \ (((b \wedge c)\ \ 0).0) = a.(b \wedge c)$

9.- $(a \wedge b)\ \ c = (c\ \ 0)\ \ ((a \wedge b)\ \ 0) = (c\ \ 0)\ \ ((a\ \ 0) \vee (b\ \ 0))$

$= ((a.0)\ \ (b\ \ 0))\ \ ((c.0)\ \ (b\ \ 0)) = (b\ \ a)\ \ (b\ \ c)$

Nota.- Les àlgebres de Sales amb element mínim poden donarse axiomàticament (cf A.Rodríguez,)seguint l'axiomàtica que dóna M. Wajsberg per a les lògiques $\aleph_0$ - valorades.

TEOREMA II 16 -

Si $(A,\ ,u,0)$ és a de S amb element mínim, aleshores $(A,\vee,\wedge)$ és reticle distributiu

En efecte:

Cal veure solament (cf Szász (26)) Per tot $a,b,c \in A$,

$$a \vee (b \wedge c) \geqslant (a \vee b) \wedge (a \vee c),$$

però,

$$\begin{aligned} a \vee (b \wedge c) &= (a\ (b \wedge c))\ (b \wedge c) = ((a\ b) \wedge (a\ c))\ (b \wedge c) = \\ &= (((a.b) \wedge (a\ c))\ b) \wedge (((a\ b) \wedge (a\ c))\ c) = \\ &= (((a.b)\ (a\ c))\ ((a.b)\ b) \wedge (((a\ c)\ a\ b))\ ((a\ c)\ c)) \geqslant \\ &\geqslant ((a\ c)\ c) \wedge ((a\ b)\ b) \ = (a \vee b) \wedge (a \vee c) \end{aligned}$$

Proposició II 10 -

Un a. de S amb element mínim, $(A,\ ,u,0)$, és de Boole si, i només si, per tot $a,b \in A$,

$$a \wedge (a\ b) = a \wedge b$$

En efecte:

La propietat enunciada, per la proposició II 7, implica que $(A,\ ,u,0)$ és àlgebra de Heyting, doncs l'altra condició és la propietat 8, i per tant a de H que satisfà la condició:

$$(a\ b)\ b = (b\ a)\ a$$

per tot $a,b \in A$; per tant és àlgebra d'Abbott amb element mínim i per tant àlgebra de Boole

El recíproc és evident

L'existència d'àlgebres de Sales amb mínim que no són pas àlgebres de Boole està garantida per l'exemple 5 de l'apèndix

Com a conseqüència del Teorema II 16, A Rodríguez trobà les següents propietats:

<u>Propietats</u>.- (A. Rodríguez (21))

Si $(A, \ ,u,0)$ és a de S amb mínim , aleshores:

10 - $a\ (b \vee c) = (a.b) \vee (a\ c)$

11.- $(a \wedge b)\ c = (a\ c) \vee (b\ c)$

12 - $(a\ b) \vee (b\ a) = u$

per tot $a,b,c \in A$.

II.3 3.

Per a poder estudiar els sistemes deductius en supra-reticles d-complets ens calen les següents propietats:

<u>TEOREMA II.17</u>.-

Si $(A,.,v,u)$ és s-r d-co , aleshores per tot $a,b,c \in A$, i tot $n \in \mathbb{N}$, $n \geqslant 1$

$(a \vee b)^n\ c = u$ si, i només si, per tot $r,s \in \mathbb{N}$, tals que $0 \leqslant r,s \leqslant n$ i $r + s = n$, $a^r\ (b^s\ c) = u$

On $a^0 = b^0 = u$.

En efecte:

La demostració la fem per inducció

Si $n = 1$, - $(a \vee b)\ c = u$ si, i només si, $a \vee b \leqslant c$ si, i només si, $a \leqslant c$ i $b \leqslant c$ si, i només si, $a.c = u$ i $b.c = u$

Suposem-ho cert per $k < n$, $n > 1$,

- Si $(a \vee b)^n c = u$, tenim $(a \vee b)^{n-1} ((a \vee b)\ c) = u$, d'on per hipòtesi d'inducció, per tot $r,s \in \mathbb{N}$, $0 \leq r,s \leq n$, $r+s = n-1$:

$$a^r (b^s.((a \vee b).c)) = u;$$

però,

$a \vee b \geq a$ i $a \vee b \geq b$ impliquen

$$a^r.(b^s(a.c)) = u \text{ i } a^r (b^s(b.c)) = u,$$

d'on

$$a^{r+1} (b^s\ c)) = u \text{ i } a^r (b^{s+1}\ c) = u,\ 0 \leq r,s \leq n-1,\ r+s = n-1$$

- Si per tot $r,s \in \mathbb{N}$, $0 \leq r,s \leq n$ i $r+s = n$ tenim

$$a^r (b^s\ c) = u,$$

aleshores per tot $\alpha, \beta \in \mathbb{N}$, $\alpha,\beta \leq n-1$ $\alpha+\beta = n-1$, tenim que

$$a^{\alpha+1} (b^\beta\ c) = u \text{ i } a^\alpha (b^{\beta+1}\ c) = u,$$

i això implica

$$a \leq a^\alpha (b^\beta\ c) \text{ i } b \leq a^\alpha (b^\beta\ c),$$

aleshores

$$(a \vee b).(a^\alpha (b^\beta\ c)) = u,$$

d'on

$$a^\alpha.(b^\beta ((a \vee b)\ c)) = u,$$

i per hipòtesi d'inducció

$$(a \vee b)^{n-1}.((a \vee b).c) = u,$$

per tant

$$(a \vee b)^n.c = u$$

TEOREMA II 18.-

Si $(A, \cdot, \vee, \wedge, u)$ és r.d-co. tal que, per tot $a,b,c \in A$,

$a.(b \wedge c) = (a.b) \wedge (a.c)$, aleshores

Per tot $n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$,

$$(a \vee b)^n \, c = \bigwedge_{\substack{r,s=0 \\ r+s=n}}^{n} (a^r \, (b^s.c))$$

On $a^0 = b^0 = u$.

En efecte:

Cal generalitzar la hipòtesi del Teorema: Per tot $n \in \mathbb{N}\setminus\{0\}$, i tota família $(a_i)_{1 \leq i \leq n}$ de A

$$c.(\bigwedge_{i=1}^{n} a_i) = \bigwedge_{i=1}^{n} (c \, a_i)$$

La demostració és per inducció:

- per $n = 1$ és obvi

- si val per tot $k < n$, $n > 1$, aleshores:

$$c.(\bigwedge_{i=1}^{n} a_i) = c.((\bigwedge_{i=1}^{n-1} a_i) \wedge (a_n)) =$$

$$= (c.(\bigwedge_{i=1}^{n-1} a_i)) \wedge (c \, a_n) =$$

$$= (\bigwedge_{i=1}^{n-1} (c.a_i)) \wedge (c.a_n) =$$

$$= \bigwedge_{i=1}^{n} (c \, a_i)$$

La demostració del Teorema també és per inducció:

- per $n = 1$

$$(a \vee b).c, = (a.c) \wedge (b.c) = (a.(u \, c)) \wedge (u.(b \, c))$$

- si val per tot $k \leq n$, $n > 1$, aleshores:

$$(a \vee b)^{n+1}\, c = (a \vee b)\, ((a \vee b)^{n}\, c) =$$

$$= (a \vee b)\, \Big(\bigwedge_{\substack{r=0\\ r+s=n}}^{n} (a^{r}\, (b^{s}\, c))\Big) =$$

$$= \Big(a.\Big(\bigwedge_{\substack{r=0\\ r+s=n}}^{n} (a^{r}\, (b^{s}\, c))\Big)\Big) \wedge \Big(b\, \Big(\bigwedge_{\substack{r=0\\ r+s=n}}^{n} (a^{r}\, (b^{s}\, c))\Big)\Big) =$$

$$= \Big(\bigwedge_{\substack{r=0\\ r+s=n}}^{n} (a^{r+1}\, (b^{s}\, c))\Big) \wedge \Big(\bigwedge_{\substack{r=0\\ r+s=n}}^{n} (a^{r}\, (b^{s+1}\, c))\Big) =$$

$$= \underbrace{\Big(\bigwedge_{\substack{r=1\\ r+s=n+1}}^{n+1} (a^{r}\, (b^{s}\, c))\Big)}_{(1)} \wedge \underbrace{\Big(\bigwedge_{\substack{r=0\\ r+s=n+1}}^{n} (a^{r}\, (b^{s}\, c))\Big)}_{(2)} =$$

En (1) r varia de 1 a $n+1$ i per tant s varia de n a 0,

En (2) r varia de 0 a n i s varia de 1 a $n+1$, així obtenim:

$$(a \vee b)^{n+1}\, c = (a^{n+1}\, (b^{0}\, c)) \wedge \Big(\bigwedge_{\substack{r=1\\ r+s=n+1}}^{n+1} (a^{r}\, (b^{s}\, c))\Big) \wedge (a^{0}\, (b^{n+1}\, c)) =$$

$$= \bigwedge_{\substack{r=0\\ r+s=n+1}}^{n+1} (a^{r}\, (b^{s}\, c))$$

<u>Corol lari</u>.-

En tota a de S amb mínim, (A, ,u,0), tenim:

Per tot $a,b,c \in A$,

$$(a \vee b)^{n}\, .c = \bigwedge_{\substack{r=0\\ r+s=n}}^{n} (a^{r}\, (b^{s}\, c))$$

per tot $n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$.

Proposició II 11.-

Si $(A,\vee,\wedge,\ \ ,u)$ és r d-co tal que per tot $a,b,c \in A$,

$a.(b \wedge c) = (a.b) \wedge (a\ \ c)$, aleshores

1 - $(a\ \ c)((b\ \ c)\ \ ((a \vee b)\ \ c)) = u$

2.- $(a\ \ b)\ \ ((a.c).(a\ \ (b \wedge c))) = u$

3.- $a\ \ (b\ \ (a \wedge b)) = u$

Per tot $a,b,c \in A$

En efecte:

1.- $(a.c).((b\ \ c)\ \ ((a \vee b)\ \ c)) = (a\ \ c)\ \ ((b\ \ c)\ \ ((a\ \ c) \wedge (b\ \ c)) =$

$= (a\ \ c)\ \ (((b\ \ c)\ \ (a.c)) \wedge ((b\ \ c)\ \ (b\ \ c))) =$

$= (a\ \ c)\ \ ((b\ \ c)\ \ (a\ \ c)) = u$

2.- $(a.b).((a.c)\ \ (a.(b \wedge c))) = (a\ \ b)\ \ ((a\ \ c)\ \ ((a.b) \wedge (a\ \ c))) =$

$= (a\ \ b)\ \ (((a\ \ c)\ \ (a.b)) \wedge ((a.c)\ \ (a\ \ c))) =$

$= (a\ \ b)\ \ ((a\ \ c)\ \ (a\ \ b)) = u$

3.- $a\ \ (b.(a \wedge b)) = a.((b.a) \wedge (b\ \ b)) =$

$= a.(b\ \ a) = u.$

III SISTEMES DEDUCTIUS EN ESTRUCTURES IMPLICATIVES ESPECTRES IRREDUCTIBLE, IRREDUCTIBLE MINIMAL, COMPLETAMENT IRREDUCTIBLE, PRIMER I MAXIMAL

La importància dels sistemes deductius en àlgebres implicatives és deguda al fet que a tota congruència li podem associar un únic sistema deductiu(cf. Teorema O 12) i, en el cas de les àlgebres d-completes, a tot sistema deductiu li podem associar una única congruència (cf Teorema III 19)

Malgrat que l'objecte principal del nostra estudi són les àlgebres d-completes, els resultats els donarem en el cas més general possible

III.1. Sistemes deductius en àlgebres i reticles implicatius

En aquest paràgraf estudiem la informació que el conjunt dels sistemes deductius dóna sobre l'estructura de l'àlgebra

III.1.1

Sigui $(A,\cdot,u)$ a.i., i $\mathcal{D}_0$ el conjunt dels seus sistemes deductius.

Sabem que $\mathcal{D}_0 \subseteq \mathcal{F}$, i $K_0(\emptyset) = u$.

TEOREMA III 1 -

$\mathcal{D}_0 = \mathcal{F}$ si, i només si, per tot $a,b \in A$, $a \not\leq b$, implica $a.b \leq b$

En efecte:

Si $\mathcal{D}_0 = \mathcal{F}$, aleshores si $a \not\leq b$, donat que $F(\{a, a.b\})$ és sistema deductiu, $b \in F(\{a, a.b\})$ Com que F és operador conseqüència unitari i $b \notin F(a)$, aleshores $b \in F(a.b)$, això és $a.b \leq b$

Suposem que $a \not\leq b$ implica $a.b \leq b$ Sigui $T \in \mathcal{F}$, i $a, a.b \in T$

- si $a \leq b$, aleshores $b \in T$
- si $a \not\leq b$, aleshores $a.b \leq b$, per tant $b \in T$,

així doncs $T \in \mathcal{D}_0$ D'on $\mathcal{F} \subset \mathcal{D}_0$

<u>TEOREMA III.2</u>.-

Si l'àlgebra implicativa (A, ,u), satisfà que, per tot $a,b \in A$, $a.(b.a) = u$, aleshores:

$\mathcal{D}_0 = \mathcal{F}$ si, i només si, l'operació ve donada per(*)

per tot $a,b \in A$, $a.b = u$ si, i només si, $a \leq b$

$a.b = b$, en altre cas

En efecte:

Si l'operació és la donada en l'enunciat, és conegut que $\mathcal{D}_0 = \mathcal{F}$ (J. Pla (12)).

Si $\mathcal{F} = \mathcal{D}_0$, pel Teorema anterior si $a \not\leq b$, $a.b \leq b$. D'altra banda $b.(a.b) = u$, implica $b \leq a.b$, aleshores si $a \not\leq b$, $a.b = b$

(*) Aquesta operació és l'anomenada <u>canònica</u> (J. Pla(12), F A.Sales(23)), i dóna lloc a estructura d'àlgebra de Hilbert

Corol.lari -

Si (A, ,u) és a d-co ,aleshores

$\mathcal{D}_o = \mathcal{F}$ si, i només si, l'operació és la del Teorema III 2

TEOREMA III 3 -

L'àlgebra implicativa (A, ,u) és a d-t-l si, i només si, per tot $a \in A$, $F(a) = K_o(a)$

En efecte:

Es conegut (H Rasiowa(18)) que en un àlgebra implicativa , per tot $a \in A$ $F(a) = K_o(a)$ si, i només si, per tot $a,b,c \in A$, a (b c) = u i a.b = u,impliquen a c = u Això és (A, ,u) és a d-t-l

Corol lari -

Si (A, ,u) és a de H , aleshores,per tot $a \in A$, $F(a) = K_o(a)$

TEOREMA III 4 -

Si (A, ,u) és a d-t-l, satisfà:

$\mathcal{D}_o = \mathcal{F}$ si, i només si, K_o és un operador conseqüència unitari

En efecte:

Si $\mathcal{D}_o = \mathcal{F}$, trivialment K_o és unitari

Si K_o és unitari, per tot $a,b \in A$, $b \in K_o(\{a,a\ b\})$ i,per ésser (A, ,u) a.d-t-l ,$b \in F(a) = K_o(a)$ o $b \in K_o(a\ b) = F(a\ b)$, aleshores $a \not\leq b$ implica $a.b \leq b$ i,pel Teorema III 1, $\mathcal{D}_o = \mathcal{F}$

<u>Corol lari</u> -

Si (A, ,u) és a de H , aleshores

K_o és unitari si, i només si, l'operació és la definida

en el Teorema III 2

III 1 2.

Sigui (A,.,$\vee$,$\wedge$,u) un reticle implicatiu i $\mathcal{F}_r$ la classe de tots

els filtres de reticle

<u>TEOREMA III 5</u> -

En un reticle implicatiu (A, ,v,$\wedge$,u), les següents

condicions són equivalents:

(1) $\mathcal{F}_r \subseteq \mathcal{D}_o$

(2) (A, ,u) és a d-t-l

(3) Per tot $a,b \in A$, $a \wedge a\ b \leq b$

En efecte:

(1) implica (2)' $\mathcal{F}_r \subseteq \mathcal{D}_o \subseteq \mathcal{F}$ i com que K_o és finitari, pel

Teoremà 1.6 , per tot $a \in A$, $F(a) = K_o(a)$ i segons el Teorema

III.3. (A, ,u) és a d-t-l

(2) implica (3)' Si (A, ,u) és a.d-t-l , aleshores per tot $a,b \in A$

$F(a \wedge a\ b) = K_o(a \wedge a\ b)$, per tant $b \in F(a \wedge a\ b)$ i $a \wedge a\ b \leq b$

(3) implica (1) sigui $T \in \mathcal{F}_r$, cal veure que T satisfà m p ,

si $a, a.b \in T$, aleshores $a \wedge a.b \in T$, per tant $b \in T$.

<u>Corol.lari 1</u> - (J Plà (13))

En un reticle de Hilbert (A,v,$\wedge$, ,u) $\mathcal{F}_r \subseteq \mathcal{D}_o$

Corol lari 2 -

Si (A, ,v,∧,u) és r d-co ,(A, ,u) és a de H si, i només si, $\mathcal{F}_r \subseteq \mathcal{D}_o$

En efecte:

Pel Teorema II 9 (A, ,u) és a. de H si, i només si, (A, ,u) és a d-t-l que, pel Teorema anterior, és equivalent a $\mathcal{F}_r \subseteq \mathcal{D}_o$

Corol lari 3.-

Si (A, ,v,∧,u) és r d-co , aleshores (A, ,v,∧,u) és àlgebra de Heyting si, i només si, $\mathcal{F}_r = \mathcal{D}_o$

En efecte

El directe és evident

Recíprocament. Si $\mathcal{F}_r = \mathcal{D}_o$, aleshores $\mathcal{F}_r \subseteq \mathcal{D}_o$ i segons el Corol lari 1 és un reticle de Hilbert Com que $\mathcal{F}_r = \mathcal{D}_o$, pel Teorema 0 25 és un àlgebra de Heyting

Més endavant donem una demostració del Corol lari 3, sense utilitzar àlgebres de Hilbert

TEOREMA III 6 -

En un reticle implicatiu (A, ,v,∧,u), les següents condicions son equivalents

(1) $\mathcal{D}_o \subseteq \mathcal{F}_r$

(2) Per tot $X \subseteq A$, $K_o(X) = K_o(F_r(X))$

(3) Per tot a,b, $\in A$, $K_o(a,b) = K_o(a \wedge b)$

En efecte:

És una conseqüència immediata del Teorema I.7

Del fet que K_o és un operador conseqüència finitari, obtenim les següents propietats.

Proposició III 1 -

Un reticle implicatiu $(A, \ ,v,\wedge,u)$ tal que $\mathcal{F}_r \supseteq \mathcal{D}_o$, satisfà

1.- Per tot $S \subseteq A$, S finit, $K_o(S) = K_o(\bigwedge_{a\in S} a)$

2.- Per tot $X \subseteq A$, $K_o(X) = \bigcup_{a\in F_r(X)} K_o(a)$

3.- Per tot $D \in \mathcal{D}_o$, $K_o(D,a) = \bigcup_{d\in D} K_o(d\wedge a)$

En efecte:

1.- La demostració és per inducció sobre el Cardinal de S

- Si Card(S) = 1 o 2, és cert pel Teorema III 6

- Suposem que per tot $X \subseteq A$, tal que $\mathrm{Card}(X) = k < n$ és cert, $n > 1$

Sigui $S \subseteq A$, $\mathrm{Card}(S) = n$, $S = \{a_1, \ \ , a_n\}$, fem $S' = \{a_1, \ \ , a_{n-1}\}$, per hipòtesi d'inducció $K_o(S') = K_o(\bigwedge_{i=1}^{n-1} a)$, per tant

$$K_o(S) = K_o(S', a_n) = K_o(K_o(S'), K_o(a_n)) =$$

$$= K_o(K_o(\bigwedge_{i=1}^{n-1} a_i), K_o(a_n)) = K_o(\bigwedge_{i=1}^{n-1} a_i, a_n) =$$

$$= K_o((\bigwedge_{i=1}^{n-1} a_i)\wedge(a_n)) = K_o(\bigwedge_{i=1}^{n} a_i)$$

2 - Si $X \subsetneq A$, per (2) del Teorema III 6 i per ésser finitari, tenim:

$$K_o(X) = K_o(F_r(X)) = \bigcup_{\substack{N \subseteq F_r(X) \\ N \text{ finit}}} K_o(N) = \bigcup_{\substack{N \subseteq F_r(X) \\ N \text{ finit}}} K_o(\bigwedge_{a \in N} a) \subseteq$$

$$\subseteq \bigcup_{b \in F_r(X)} K_o(b)$$

D'altra banda si $a \in \bigcup_{b \; F_r(X)} K_o(b)$, existeix $c \in F_r(X)$, tal que

$a \in K_o(c)$, i tenim $a \in K_o(c) \subseteq K_o(F_r(X)) = K_o(X)$

Per tant $K_o(X) = \bigcup_{b \in F_r(X)} K_o(b)$

3 - Si $D \in \mathscr{D}_o$, i $a \in A$, en virtud de 2, $K_o(D,a) = \bigcup_{b \in F_r(D,a)} K_o(b)$,

però, $b \in F_r(D,a)$ si, i només si, existeix $d \in D$, tal que $d \;\; a \leq b$,

aleshores: $K_o(D,a) \subseteq \bigcup_{d \in D} K_o(d \wedge a)$

D'altra banda si $b \in \bigcup_{d \in D} K_o(d \wedge a)$, aleshores existeix $d \in D$ tal que

$b \in K_o(d \wedge a) \subseteq K_o(F_r(D,a))$, per tant $b \in K_o(D,a)$

Això demostra l'altra inclusió

TEOREMA III 7.-

Si $(A, \;, \vee, \wedge, u)$ és r.d-co, aleshores

$\mathscr{D}_o \subseteq \mathscr{F}_r$ si, i només si, per tot $a,b,c \in A$, l'existència

d'un $n \in \mathbb{N}$, $n > 1$, tal que $(a \wedge b)^n \; c = u$, és equivalent

a l'existència de $m,p \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$ tals que $a^m \; (b^p \; c) = u$

En efecte:

Segons el Teorema III 6 , $\mathcal{D}_o \subseteq \mathcal{F}_r$ és equivalent a que, per tot $a,b \in A$, $K_o(a,b) = K_o(a \wedge b)$, per tant , per tot $c \in A$,

$c \in K_o(a \wedge b)$ si, i només si, $c \in K_o(a,b)$,

però,

$c \in K_o(a,b)$ si, i només si, existeix $p \in \mathbb{N}\setminus\{0\}$ tal que $b^p\, c \in K_o(a)$

si, i només si, existeixen m, $p \in \mathbb{N}\setminus\{0\}$ tals que

$$a^m\,(b^p\,c) = u,$$

d'altra banda

$c \in K_o(a \wedge b)$ si , i només si, existeix $n \in \mathbb{N}\setminus\{0\}$, tal que

$$(a \wedge b)^n\, c = u$$

<u>Corol lari 1</u> -

Si $(a,\cdot,v,\wedge,u)$ és r d-co, aleshores:

$\mathcal{D}_o \subseteq \mathcal{F}_r$ si, i només si, per tot $a,b \in A$, existeixen $n,m \in \mathbb{N}\setminus\{0\}$ tals que $a^n\,(b^m\,(a \wedge b)) = u$

En efecte

Si $\mathcal{D}_o \subseteq \mathcal{F}_r$, donat que $(a \wedge b)\,(a \wedge b) = u$, existeixen $n,m \in \mathbb{N}\setminus\{0\}$, tals que $a^n\,(b^m\,(a \wedge b)) = u$

Suposem que existeixen $n,m \in \mathbb{N}\setminus\{0\}$ tals que $a^n\,(b^m\,(a \wedge b)) = u$, aleshores $a \wedge b \in K_o(a,b)$, per tant $K_o(a \wedge b) = K_o(a,b)$ L'altra inclusió es compleix sempre. Per tant $K_o(a,b) = K_o(a \wedge b)$, i pel Teorema III.6, $\mathcal{F}_r \supset \mathcal{D}_o$

Corol.lari 2 -

Si (A, ,u) és àlgebra de Sales amb mínim, aleshores

$\mathcal{D}_o \subseteq \mathcal{F}_r$

En efecte:

Donat que en un àlgebra de Sales amb element mínim, per la Proposició II 11 , per tot $a,b,c \in A$, a (b $(a\wedge b)$) = u, pel corol lari anterior $\mathcal{D}_o \subseteq \mathcal{F}_r$

TEOREMA III 8 -

Si (A, ,v,$\wedge$,u) és r d-co aleshores:

$\mathcal{D}_o = \mathcal{F}_r$ si, i només si, (A, ,v,$\wedge$) és a de Ht

En efecte:

Es clar que si és a de Ht $\mathcal{D}_o = \mathcal{F}_r$

Suposem que $\mathcal{D}_o = \mathcal{F}_r$ Per demostrar que (A, ,v,$\wedge$) és a. de Ht només cal veure que per tot $a,b,c \in A$

$(a\wedge b)$ c = u si, i només si, a (b c) = u (Definició 0 21)

- Si $(a\wedge b)$ c = u, aleshores donat que $\mathcal{D}_o \subseteq \mathcal{F}_r$, pel Teorema III 7 , existeixen $m,p \in \mathbb{N}\setminus\{0\}$, tals que a^m $(b^p$ c) = u, i com que $\mathcal{F}_r \subseteq \mathcal{D}_o$ $F(a) = K_o(a)$ i $F(b) = K_o(b)$, per tant a (b c) = u
- Si a.(b.c) = u, pel Teorema III 7, existeix $n \in \mathbb{N}$, tal que $(a\wedge b)^n c = u$ i com que $\mathcal{F}_r \subseteq \mathcal{D}_o$, tenim $(a\wedge b).c = u$.

Corol.lari -

Si (A,v,$\wedge$, ,u) és r de H ,

(A,v,$\wedge$, ,u) és a de Ht, si, i només si, $\mathcal{D}_o = \mathcal{F}_r$.

Propietats -

Un reticle d-complet $(A, ,\vee,\wedge,u)$, tal que $\mathcal{D}_o \subseteq \mathcal{F}_r$ satisfà

1 - Per tot $D \in \mathcal{D}_o$, i per tot $a \in A$:

$$K_o(D,a) = \{x \in A/ \text{ existeixen } d \in D,\ n \in \mathbb{N},\ (a \wedge d)^n\, x = u\}$$
$$= \{x \in A/ \text{ existeixen } d \in D, n, m \in \mathbb{N}\setminus\{0\},\ d^m\,(a^n\, x) = u\}$$

2 - Per tot $D \in \mathcal{D}_o$, tot $a,b \in D$, existeix $n \in \mathbb{N}\setminus\{0\}$ tal que :

$a^n\, b \in D$ si, i només si, existeix $d \in D$ i $m \in \mathbb{N}\setminus\{0\}$, tal que $(d \wedge a)^n\, b = u$

En efecte:

Són conseqüències immediates de les propietats donades en la Proposició III 1, i del Teorema III 7

III.2 Espectres Irreductible, Irreductible Minimal, Completament Irreductible Irreductible, Primer i Maximal en àlgebres d-completes

Donat que $\mathcal{D}_o$ és un sistema clausura d'operador conseqüència finitari K_o, podem considerar els sistemes deductius irreductibles, completament irreductibles, maximals i primers com a tancats de $\mathcal{D}_o$. Pel seu estudi , per obtenir llur caracterització i la relació que hi ha entre ells, utilitzem els resultats obtinguts en el Capítol I

III 2 1.

Abans d'iniciar l'estudi dels sistemes deductius esmentats, ens cal obtenir més informació de l'estructura de $\mathcal{D}_o$, en un àlgebra d-completa, (A, ,u) Es clar que (veure Teorema 0 3) podem dotar a $\mathcal{D}_o$ d'estructura de reticle complet, amb l'ordre donat per la inclusió, l'ínfim donat per la intersecció i el suprem donat per

$D_1, D_2 \in \mathcal{D}_o$, $\sup(D_1,D_2) = D_1 \vee D_2 = K_o(D_1,D_2)$;

a més $(\mathcal{D}_o,\vee,\cap)$ té element mínim $\{u\}$ i elemènt màxim A

<u>TEOREMA III 9</u> -

En $(\mathcal{D}_o,\vee,\cap)$, l'operació $\cap$ és completament distributiva repecte a $\vee$, això és:

Si $D,D_i \in \mathcal{D}_o, i\in I$, $D\cap(\bigvee_{i\in I} D_i) = \bigvee_{i\in I}(D\cap D_i) = K_o(\bigcup_{i\in I}(D\cap D_i))$

En efecte:

La inclusió $D\cap(\bigvee_{i\in I} D_i) \supseteq \bigvee_{i\in I}(D\cap D_i)$ es satisfà en tot reticle complet

Demostrem l'altra inclusió per parts

1 - Demostrem: $D\ (D_1 \vee K_o(a)) \subseteq (D\cap D_1) \vee (D\cap K_o(a))$, per tot $D,D_1\in \mathcal{D}_o$ i per tot $a\in A$

Si $x\in D\cap(D_1 \vee K_o(a))$, aleshores $x\in D$ i $x\in D_1 \vee K_o(a) = K_o(D_1,a)$, per tant esisteix $n\in \mathbb{N}\setminus\{0\}$, tal que $a^n\ x \in D_1$

Fem $b = a^n\ x$, com que $x\leq b$, $b\in D\cap D_1$ (i)

Fem $c = (a^n . x)\, x = b\, x$ Com que $a^n\, c = a^n\, ((a^n\, x)\, x) =$

$$= (a^n\, x)\, (a^n\, x) = u,$$

i $c \geqslant x$, tenim $c \in D \cap K_o(a)$ (ii)

Per construcció $b\, x = c$, per tant $x \in K_o(b,c) = K_o(b) \vee K_o(c)$ i

per (i) i (ii) $K_o(b) \vee K_o(c) \subset (D \cap D_1) \vee (D \cap K_o(a))$, per tant

$x \in (D \cap D_1) \vee (D \cap K_o(a))$

Això demostra la inclusió

2.- Demostrem per inducció sobre m, que per tot $m \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$, es compleix:

Per tot $a_1, \quad , a_m \in A$, i tot $D \in \mathcal{D}_o$:

$$D \cap \left(\bigvee_{i=1}^{m} K_o(a_i) \right) \subseteq \bigvee_{i=1}^{m} (D \cap K_o(a_i))$$

- Per $m = 1$ és 1

- Suposem que és cert per tot $k < m$, $m > 1$ Per 1 tenim:

$$D \cap \left(\bigvee_{i=1}^{m} K_o(a_i) \right) = D \cap \left(\left(\bigvee_{i=1}^{m-1} K_o(a_i) \right) \vee K_o(a_m) \right) \subseteq$$

$$\subseteq \left(D \cap \left(\bigvee_{i=1}^{m-1} K_o(a_i) \right) \vee (D \cap K_o(a_m)) \right) \subseteq$$

$$\subseteq \left[\bigvee_{i=1}^{m-1} (D \cap K_o(a_i)) \right] \vee (D \cap K_o(a_m)) =$$

$$= \bigvee_{i=1}^{m} (D \cap K_o(a_i))$$

3.- Demostrem el cas general:

Siguin $D, D_i \in \mathcal{D}_o$, $i \in I$,

si $x \in D \cap \left(\bigvee_{i \in I} D_i \right)$, aleshores $x \in D$ i $x \in \bigvee_{i \in I} D_i = K_o\left(\bigcup_{i \in I} D_i \right)$, per ésser K_o finitari, existeixen $a_1, \quad , a_m \in \bigcup_{i \in I} D_i$ (iii),

tals que $x \in K_o(\{a_1, \quad , a_m\}) = \bigvee_{j=1}^{m} K_o(a_j)$, i segons 2.

$$x \in D \cap \left(\bigvee_{j=1}^{m} K_o(a_j) \right) \subseteq \bigvee_{j=1}^{m} (D \cap K_o(a_j))$$

Per tot j, $1 \leq j \leq m$, per (iii), existeix $k_j \in I$, tal que

$a_j \in D_{k_j}$, aleshores

$$x \in \bigvee_{j=1}^{m} (D \cap D_{k_j}) \subseteq \bigvee_{i \in I} (D \cap D_i)$$

Això demostra la inclusió proposada

<u>Corol.lari 1.</u>-

Si (A, ,u) és a d-co, aleshores $(\mathscr{D}_o, \cap, \vee)$ és un reticle distributiu

En efecte:

En el Teorema anterior si Card(I) = 2, obtenim la distributivitat de $\cap$ respecte a $\vee$, i per dualitat surt l'altra(cf.Szasz (26))

Del Teorema anterior no es dedueix la distrubutivitat completa, és ben conegut que hi ha àlgebres de Hilbert en les que no es dóna (cf A Diego(4))

El Teorema generalitza un resultat donat per A Diego

<u>Corol.lari 2</u> - (A Diego(4))

Si (A,.,u) és a. de H , en $(\mathscr{D}_o, \cap, \vee)$ $\cap$ és completament distributiu respecte $\vee$

III.2 2

En un àlgebra implicativa (A, ,u) anomenem respectivament <u>espectre irreductible</u> (SpI(A)) i <u>espectre completament irreductible</u> (SpCI(A)) els conjunts de sistemes deductius de $\mathcal{D}_0$ irreductibles i completament irreductibles Per <u>espectre irreductible minimal</u> (SpIm(A)) i <u>espectre maximàl</u> (SpM(A)) entenem,respectivament, els conjunts de sistemes deductius de $\mathcal{D}_0$ irreductibles minimals i de sistemes deductius de $\mathcal{D}_0$ maximals, si existeixen

Obtenim una caracterització algebraica dels elements d'aquests conjunts En el cas de SpM(A) i SpCI(A),dels Teoremes I 3 i I 4 es dedueix immediatament els següents resultats, demostrats per J Pla en la seva Tesi doctoral (12):

<u>TEOREMA III 10</u> -

Si (A, ,u) és a d-co , i $D \in \mathcal{D}_0$, i $a \in A$:

D és maximal lligat a <u>a</u>, $D = M_a$, si, i només si,

$a \notin D$ i per tot $b \notin D$, exsiteix $n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$, tal que

$b^n\ a \in D$

<u>Corol lari</u> -

Si (A, ,u) és a d-co i $D \in \mathcal{D}_0$

$D \in SpCI(A)$ si, i només si, existeix $a \in A$, tal que $a \notin D$

i per tot $b \notin D$, existeix $n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$, tal que $b^n\ a \in D$

TEOREMA III 11 -

Si $(A, \ ,u)$ és a d-co i $D\in\mathcal{D}_0$:

$D\in SpM(A)$ si, i només si, per tot $a,b\notin D$, existeix

$n\in\mathbb{N}\setminus\{0\}$, tal que $a^n\ b\in D$

La relació entre ambdós espectres és: $SpCI(A)\supseteq SpM(A)$

La caracterització dels elements de $SpI(A)$ ve donada per:

TEOREMA III 12 -

Si $(A,\cdot,u)$ és a d-co i $D\in\mathcal{D}_0$, tenim:

$D\in SpI(A)$ si, i només si, per tot $a,b\notin D$, existeixen

$x\notin D$, i $n,m\in\mathbb{N}\setminus\{0\}$, tals que $a^n\ x = b^m\ x = u$

En efecte

Per ésser $(\mathcal{D}_0,\cap,\vee)$ un reticle distributiu, per tot $a,b\in A$ i

tot $D\in\mathcal{D}_0$, es satisfà

$$K_0(D,\ K_0(a)\cap K_0(b)) = K_0(D,a)\cap K_0(D,b),$$

i segons el Teorema I 1

$D\in SpI(A)$ si, i només si, per tot $a,b\notin D$, $K_0(a)\cap K_0(b)\not\subseteq D$

que és equivalent a:

existeixin $x\notin D$ i $n,m\in\mathbb{N}\setminus\{0\}$, tals que $a^n\ x = u$ i $b^m\ x = u$

El Teorema anterior generalitza un resultat ja conegut:

Corol lari.-(A Diego)

Si $(A, \ ,u)$ és a. de H i $D\in\mathcal{D}_0$

$D\in SpI(A)$ si, i només si, per tot $a,b\notin D$, existeix

$x\notin D$, tal que $a\leq x$ i $b\leq x$

TEOREMA III.13 -

Si (A, ,u) és a d-co., aleshores

Per tot $D \in SpI(A)$, existeix $D' \in SpIm(A)$, tal que

$D' \subseteq D$

En efecte:

Per la distributivitat de $(\mathcal{D}_o, \cap, \vee)$ i per la Proposició I 2

s'obté la demostració de l'enunciat

Aquest Teorema ens diu que $SpIm(A) \neq \emptyset$ D'altra banda és clar

que $SpIm(A) \subseteq SpI(A)$ i que $SpCI(A) \subseteq SpI(A)$

III.2 3.

En un s-r i. (A,., v,u) té sentit parlar de sistemes deductius primers,

el conjunt dels quals anomenem espectre primer (SpP(A)) Estudiem

la relació de SpP(A) amb els espectres considerats en III 2 2

Proposició III 2 -

En tot supra-reticle implicatiu l'espectre primer

està inclòs en l'espectre irreductible

En efecte:

Es una conseqüència immediata de la Proposició I 8

Del Teorema I 8 es dedueix la següent Proposició:

Proposició III 3 -

Si (A,.,v,u) és s-r i , aleshores:

$SpP(A) = SpI(A)$ si, i només si, per tot $a,b \in A$, $D \in \mathcal{D}_o$

$$K_o(D, a \vee b) = K_o(D,a) \cap K_o(D,b)$$

<u>TEOREMA III 14</u> -

Si (A, v, u) és s-r d-co, aleshores $SpP(A) = SpI(A)$

En efecte:

Segons la proposició anterior només cal veure que per tot $a,b \in A$ i tot $D \in \mathcal{D}_o$

$$K_o(D, a \vee b) = K_o(D,a) \cap K_o(D,b)$$

Donat que $(\mathcal{D}_o, \cap, \vee)$ tenim

$$K_o(D,a) \cap K_o(D,b) = K_o(D, K_o(a) \cap K_o(b))$$

per tant és suficient que es compleixi:

$$K_o(a \vee b) = K_o(a) \cap K_o(b)$$

La inclusió $K_o(a \vee b) \subseteq K_o(a) \cap K_o(b)$ es cumpleix donat que $a \leq a \vee b$ i $b \leq a \vee b$.

Si $c \in K_o(a) \cap K_o(b)$, aleshores existeixen $n,m \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$, tals que $a^n c = b^m c = u$, fem $r = \max(n,m)$ Si $\alpha, \beta \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$, són tals que $\alpha + \beta = 2r$, $0 \leq \alpha, \beta \leq 2r$, aleshores,

$\alpha \leq r$, implica $\beta \geq r$, i tenim

$$a^{\alpha} (b^{\beta} c) \geq a^{\alpha} (b^{r} c) = u ,$$

si $\alpha > r$, tenim

$$a^{\alpha} (b^{\beta} . c) = b^{\beta} (a^{\alpha} c) \geq b^{\beta} (a^{r} c) = u,$$

D'acord amb el Teorema II 17, com que α i β son arbitraris tenim

$$(a \vee b)^{2r} c = u ,$$

això és $c \in K_o(a \vee b)$ Això ens demostra l'altra inclusió

Després del Teorema anterior SpP(A) queda ben determinat, aixì com llur relació amb els altres espectres

<u>Corol.lari 1</u> -

Si (A, ,u) és a de S., aleshores SpP(A) = SpI(A)

<u>Corol.lari 2</u> - (J Pla)

Si (A, v,u) és s-r de H ,aleshores SpP(A) = SpI(A)

III.3. <u>Radicals en àlgebres d-completes Semisimplicitat Separació</u>

Finalment estudiem els radicals en àlgebres d-completes amb la fi de saber si l'àlgebra pot posar-se com a producte sub-directe d'un cert producte. Fem també algunes consideracions sobre separació.

III 3 1.

Si (A,.,u) és a.i. anomenem <u>radical irreductible</u> (RI(A)) i <u>radical completament irreductible</u> (RCI(A)) a la intersecció de tots els elements de SpI(A) i de SpCI(A), respectivament

<u>Proposició III 4</u>.-

Si (A,.,u) és àlgebra implicativa, RI(A) = RCI(A) = $\{u\}$

En efecte:

Donat que SpI(A) $\supsetneq$ SpCI(A), tenim que RI(A)$\subseteq$RCI(A) per tant només cal veure que RCI(A) = $\{u\}$

Sabem (Teorema 0 8) que SpCI(A) és base de $\mathcal{D}_0 = \mathcal{D}_{\{u\}}$, per tant

$$RCI(A) = \bigcap_{D \in SpCI(A)} D = K_0(\emptyset) = \{u\}$$

Per radical irreductible minimal (RIm(A)) i radical maximal (RM(A)) entenem la intersecció de tots els elements de SpIm(A) i de SpM(A), respectivament. És clar que no sempre existeixen

TEOREMA III 15.-

Si (A, ,u) és a d-co , aleshores RIm(A) = $\{u\}$

En efecte:

Si $a \in RIm(A) = \bigcap_{D \in SpIm(A)} D$, aleshores

si $D \in SpIm(A)$, $a \in D$

Sigui $T \in SpI(A)$, sabem que existeix $D' \in SpIm(A)$ tal que $D' \subset T$, per tant $a \in T$, per tot $T \in SpI(A)$, aleshores $a \in \bigcap_{T \in SpI(A)} T = RI(A)$,

això és a = u

Es clar que en un a d-co , en general, RM(A) $\neq \{u\}$(cf Apèndix Ex 4)

Donem una condició suficient per a la igualtat que generalitza un resultat obtingut per A Rodrígues per les àlgebres de Sales amb minim

TEOREMA III 16 -

Si (A, ,u) és a d-co i satisfà que per tot $a,b \in A$, existeix $n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$, tal que $(a^n . b)\ a = a$, aleshores SpM(A) = SpCI(A)

En efecte:

Hem vist que la inclusió $SpM(A) \subseteq SpCI(A)$ es satisfà sempre

Només cal veure, doncs, que $SpCI(A) \subseteq SpM(A)$

Sigui $D \in SpCI(A)$, segons el Teorema I 3 , existeix $a \in A$, tal que $D = M_a$ Sigui $b \notin M_a$, per hipòtesi existeix $n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$, tal que $(a^n\ b).a = a.$

Are bé per tot $m \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$, $m > 1$, tenim: $(a^n\ b)^m\ a = a$ En efecte: $(a^n\ b)^m\ a = (a^n\ b)^{m-1}\ ((a^n\ b)\ a) = (a^n\ b)^{m-1}\ a$ i per inducció resulta que: $(a^n\ b)^m\ a = a$

Per tant per tot $m \in \mathbb{N}$, $(a^n\ b)^m\ a \notin M_a$, i segons el Teorema II 10. $a^n.b \in M_a$; que implica que $b \in K_o(M_a, a)$

D'altra banda $b \notin M_a$ implica $a \in K_o(M_a, b)$ i tenim

$K_o(M_a,b) \subseteq K_o(M_a,a) \cap K_o(M_a,b) \subseteq K_o(M_a,b)$,

d'on $K_o(M_a,b) = K_o(M_a,a)$

Si $b, c \notin M_a$ tenim $K_o(M_a,b) = K_o(M_a,a) = K_o(M_a,c)$ per tant $c \in K_o(M_a,b)$, d'on $b^n\ c \in M_a$

D'acord amb el Teorema III 11, $M_a = D \in SpM(A)$

<u>Corol lari</u> -

Si $(A,.,u)$ és a.d-co que satisfà les hipòtesis del Teorema III 17, aleshores $RM(A) = \{u\}$

Si $(A,.,v,u)$ és un s-r i anomenem <u>radical primer</u> $(RP(A))$ la intersecció de tots els elements de $SpP(A)$ En les àlgebres d-completes, després del Teorema III.15 , és clar que $RP(A) = \{u\}$

TEOREMA III 17 -

Si $(A, \ ,v,u)$ és s-r d-co tal que per tot $a,b \in A$, existeix $n \in \mathbb{N}\setminus\{0\}$, $(a^n \ b) \vee a = u$, aleshores:

$$SpM(A) = SpI(A) = SpCI(A)$$

En efecte:

Com que $SpM(A) \subseteq SpCI(A) \subseteq SpI(A)$ es satisfà sempre, hem de demostrar que $SpI(A) \subseteq SpM(A)$ Sigui $D \in SpI(A)$ i $a,b \notin D$ Per hipòtesi existeix $n \in \mathbb{N}\setminus\{0\}$, tal que $(a^n \ b) \vee a = u$, i donat que $a \notin D$ i $D \in SpP(A)$, Teorema III 14, tenim $a^n \ b \in D$ Segons el Teorema III 11 $D \in SpM(A)$

Notem que en el cas de les àlgebres de Sales les hipòtesis dels Teoremes III 16 i III 17 coincideixen El recíproc d'aquests Teoremes és fals (cf. Apèndix Ex 6)

III.3.2.

Ja hem dit, que el nostre interès pels sistemes deductius en les àlgebres d-completes ve donat pel fet que aquests poden identificar-se amb les congruències Si $(A, \ ,u)$ és una àlgebra implicativa i representem per $\Theta(A)$ el conjunt de totes les seves congruències; per cada $\theta_1, \theta_2 \in \Theta(A)$ definim $\theta_1 \leq \theta_2$ quan per tot $a,b \in A$, $a \ \theta_1 \ b$ implica $a \ \theta_2 \ b$ Aquesta relació dóta $\Theta(A)$ d'estructura de reticle, $(\Theta(A), \cap, \vee)$ (cf Szász (26))

TEOREMA III 18 -

Si $(A, \ ,u)$ és a d-co , aleshores els reticles: $(\Theta(A), \wedge, \vee)$ i $(\mathcal{D}_0, \cap, \vee)$ són isomorfs

En efecte:

Consideram, per cada $\theta \in \Theta(A)$, $\Pi_\theta : A \longrightarrow A/_\theta$ la projecció canònica associada a θ Sigui φ de $\Theta(A)$ en $\mathcal{D}_o$ tal que $\varphi(\theta)$ = Ker Π_θ que pel Teorema 0 12 és monomorfisme d'ordre

D'altra banda pel Teorema 0 13, donat que (A, ,u) és un àlgebra implicativa que satisfà

(a.b) ((c a) (c b)) = u i (a.b) ((b c) (a c)) = u

per tot a,b,c A, l'aplicació φ és isomorfism d'ordre i per tant de reticle

Per tant, utilitzar sistemes deductius és equivalent a utilitzar congruències

<u>Proposició III 5</u> -

Si (A, ,u) és a d-co , aleshores és producte sub-directe dels següents productes directes:

$(\prod_{D \in SpIm(A)} A/D, ,u_1)$, $(\prod_{D \in SpI(A)} A/D, ,u_2)$ i

$(\prod_{D \in SpCI(A)} A/D, ,u_3)$

On u_i, i = 1,2,3, designen, respectivament, les classes de u.

En efecte:

La demostració surt del Teorema 0 28, de la finitarietat de K_o i del Teorema III.15

<u>Corol lari</u> -

Si (A, ,u) és a d-co per tot a,b$\in$A, a $\neq$ o

$a \neq u$, $b \neq u$, existeix $D \in SpI(A)$ (o $D \in SpIm(A)$, o $D \in SpCI(A)$ tal que $a\ b \notin D$ o $b\ a \notin D$

Un cas interessant el constitueixen les àlgebres simples (definició 0 23)

TEOREMA III 19 -

Si (A, ,u) és a d-co, aleshores:

(A, ,u) és simple si, i només si, per tot a,b A

$a \neq u$, existeix $n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$, tal que $a^n\ b = u$

En efecte:

Pel Teorema 0 27, la semicimplicitat de (A, ,u) és equivalent a que només tingui dues congruències, per tant $\mathcal{D}_0 = \{A, \{u\}\}$ Això fa que $\{u\}$ sigui de SpM(A) que equival a que, per tot $a,b \in A$, $a \neq u$, exiseteixi $n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$, tal que $a^n\ b = u$

Corol,lari 1 -

Si (A, ,u) és a d-co , aleshores

(A, ,u) és simple si, i només si, $SpM(A) = \{\{u\}\}$

Corol lari 2 -

Si (A, ,u) és a de H , aleshores:

(A, ,u) és simple, si, i només si, $A = \{0,u\}$

Del corol lari 1 i del Teorema 0 28 se'n segueix:

Proposició III 6 -

Un a d-co és semi-simple si, i només si, $RM(A) = \{u\}$

I del Teorema III 16, es dedueix una condició suficient per la semi-simplicitat

<u>Proposició III 7</u> -

Si (A, ,u) és a d-co que satisfà per tot $a,b \in A$, existeix $n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$ tal que $(a^n\ b)\ a = a$, aleshores (A, ,u) és semi-simple

III 3 3

En les àlgebres de Hilbert els conjurts SpI(A), SpCI(A) i SpIm(A) separen els elements del conjunt A Això, en general, no és cert en les àlgebres d-completes (cf Apèndix Ex 3), a menys que l'àlgebra sigui de Hilbert, com veurem Abans ens cal, però, demostrar una propietat nova.

<u>Lema</u> -

Si (A, ,u) és a d-co , aleshores Per tot $a,b \in A$, i tot $n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$ $((a\ b)\ b)^n\ b = a^n b$

En efecte

Ho demostrem per inducció:

- si n = 1 , com que

$a\ b \leq ((a\ b)\ b)\ b$ és sempre cert, tenim ja una desigualtat;

d'altra banda, com que

$(((a.b)\ b)\ b)\ (a\ b) \geq a((a\ b)\ b) = (a\ b)\ (a\ b) = u$, resulta que

$$((a\ b)\ b)\ b \leq a\ b \text{ i per tant}$$

$$a\ b = ((a\ b)\ b)\ b$$

- Suposem-ho cert per tot $k < n$,

$$a^n\ b = a\ (a^{n-1}\ b) = a\ (((a\ b)\ b)^{n-1} b) = ((a\ b)\ b)^{n-1}(a\ b) =$$

$$= ((a\ b)\ b)^{n-1}(((a\ b)\ b)\ b) = ((a\ b)\ b)^n\ b$$

<u>TEOREMA III 20</u> -

Si $(A, \ ,u)$ és a d-co , aleshores

SpI(A) separa els elements de A si, i només si,

$(A, \ ,u)$ és a de H

En efecte

Suposem que SpI(A) separa els elements de A, aleshores,donat que SpI(A) és una base de $\mathcal{D}_0$, per la Proposició I 9 , $K_0(a) = K_0(b)$ implica $a = b$

Segons el Teorema II 10 , demostrar que $(A, \ ,u)$ és àlgebra de Hilbert , equival a demostrar que $(A, \ ,u)$ és a d-t-l, que, segons el Teorema III 3, és el mateix que veure que, per tot $a \in A$, $K_0(a) = F(a)$ La inclusió $F(a) \subseteq K_0(a)$ és satisfà sempre

Sigui $b \in K_0(a)$, aleshores, pel Teorema II 9, existeix $n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$ tal que $a^n\ b = u$ i aplicant el Lema anterior tenim

$$((a.b)\ b)^n\ b = u,$$

per tant $b \in K_o((a\ b)\ b)$, i com que $b \leq (a\ b)\ b$, tenim

$(a\ b)\ b \in K_o(b)$ D'on es segueix que $K_o(b) = K_o((a\ b)\ b)$, i per

tant $b = (a\ b)\ b$ Segons el Lema anterior

$$a\ b = ((a\ b)\ b)\ b = b\ b = u$$

Això és $a \leq b$, d'on $b \in F(a)$ La qual cosa demostra que $K_o(a) = F(a)$

El recíproc és sempre cert (cf A Diego(4))

<u>Corol lari</u> -

Si (A, ,u) és a d-co, aleshores

SpIm(A) separa els elements de A si, i només si,

(A, ,u) és a de H

En efecte

Com que $SpIm(A) \subseteq SpI(A)$, si SpIm(A) separa els elements de A,

aleshores SpI(A) separa els elements de A i pel Teorema anterior

(A, ,u) és a de H

El recíproc és sempre cert

APENDIX

L'objecte d'aquest apèndix és il lustrar i completar amb exemples les diferents classes de sistemes deductius i d'àlgebres implicatives definides.

D'una banda, els exemples que donem ens permeten d'assegurar que les classes de sistemes deductius i d'àlgebres implicatives que compleixen les diferents definicions donades són no buides D'altra ens garanteixen que són diferents, això és, que no coincideixen ni entre elles ni amb les ja conegudes

Exemple 1 -

En primer lloc donem un exemple d'àlgebra d-tipus 1 que no és ni àlgebra de Hilbert , ni àlgebra d-completa, i per tant un sistema deductiu de tipus-1 que no és ni clàssic, ni complet

Sigui $A = [0,1] \subseteq \mathbb{R}$ En A definim la següent operació binària

si $a,b \in A$, $\quad a\ b = 1$, si, i només si, $a \leq b$

$\quad a\ b = 0$, en altre cas

1.1 (A, ,1) és a d-t-1

En efecte

- Per definició (A,.,1) és àlgebra implicativa
- Cal veure que satisfà a d-t-1 4

Si $a,b,c \in A$ són tals que $a\ (b\ c) = 1$ i $a.b = 1$, aleshores

$a \leq b.c$ i $a \leq b$

Comparant a i c tenim:

- $a = 0$, aleshores a c = 1
- $b \leq c$, aleshores $a \leq c$ i a c = 1
- $a \neq 0$ i $b > c$, aleshores b c = 0 i a (b c) = 0, que contradiu la hipòtesi

Per tant (A, ,1) és a.d-t-l

1.2.- {1} és s d.t-l

És una conseqüència de 1 1

1 3.- (A, ,1) no és a d-co , i per tant no és a de H

En efecte:

Si $0 < a < b$, aleshoers a (b a) = a 0 = $0 \neq 1$, i per tant no és a. d-co

1 4.- {1} no és s d co , i per tant no és s d c

Es conseqüència de 1 3

1.5 - A més, donat que [0,1] és cadena, és reticle implicatiu

Exemple 2 -

En definir les àlgebres d-febles , afirmavem que, en general, no són àlgebres d-completes, i per tant els sistemes deductius febles no són, en general, sistemes deductius complets L'exemple que donem ens ho mostra.

Sigui $A = \{a,b,u\}$ amb l'operació binària donada per la següent taula:

	a	b	u
a	u	u	u
b	b	u	u
u	a	a	u

2.1.- <u>$(A,\cdot,u)$ és à.i</u>

En efecte:

La relació definida $x,y \in A$, $x \leq y$ si, i només si, $x\,y = u$

és relació d'ordre, amb u com element màxim A més , l'ordre

donat ens dota a A, d'estructura de cadena: $a \leq b \leq u$

2.2.- <u>$\{u\}$ és s d f</u>*

En efecte:

En primer lloc cal determinar el conjunt del sistemes deductius $\mathcal{D}_0$,

de l'àlgebra implicativa , que és $\mathcal{D}_{\{u\}}$

- $\{u\}$ és s.d ja que $(A, \ ,u)$ és a i

- $\{u,a\}$ no és s d ja que:

  $u.b = a$ i $u,a \in \{u,a\}$, i $b \notin \{u,a\}$

- $\{u,b\}$ tampoc és s d , ja que:

  $b\,a = b$ i $b \in \{u,b\}$ i $a \notin \{u,b\}$

Aleshores $\mathcal{D}_0 = \{A, \{u\}\}$

Per demostrar que $\{u\}$ és s d f utilitzarem el Teorema II 4

i veurem que $(A, \ ,K_0)$ satisfà el p d f

Tenim que $K_o(a) = K_o(b) = K_o(a,b) = A$, per tant

$b \in K_o(a)$ i $a\ b = u$, i $a \in K_o(b)$ i $b^2\ a = u$,

Aleshores $(A, \ ,K_o)$ satisfà p d.f i $\{u\}$ és s d f

D'altra banda en la relació definida per D tot element només

es relaciona amb ell mateix, per tant és d'equivalència i congruència

2.3.- <u>$(A,.,u)$ és a.d f</u>

ja que $\{u\}$ és s d.f* i $(A, \ ,u)$ és a i

2 4.- <u>$\{u\}$ no és s d co</u>

En efecte

$b\ (u.b) = b.a \neq u$

2 5.- <u>$(A,.,u)$ no és a d-co</u>

És conseqüència de 2 4.

<u>Exemple 3.</u>

La classe dels sistemes deductius complets i la classe de les àlgebres d-completes son no buides, donat que tot sistema deductiu clàssic és complet

L'exemple que donem ens permet veure que no tota àlgebra d-completa és de Hilbert, per tant tampoc àlgebra d-tipus 1, i que no tot sistema deductiu complet és clàssic. D'altra banda veiem que no tota àlgebra d-completa és de Sales, així com,que no tot reticle d-complet és reticle de Hilbert

Sigui $A = [0,1] \subseteq \mathbb{R}$, amb l'operació $*$ definida per:

si $a,b \in A$, $a * b = 1$ si, i només si, $a \leq b$

$= b/a$ en altre cas

Aquest exemple fou donat per J Pla (12), i demostrà:

3 1.- <u>$\{1\}$ és s d-co</u>

3 2.- <u>$\{1\}$ no és s d c</u>

Com que $A/\{1\} = A$, també es compleix

3 3.- <u>$(A,*,1)$ és a d-co</u>

3 4.- <u>$(A,*,1)$ no és a. de H</u>

3 5.- <u>$(A,*,1)$ no és a de S</u>

En efecte:

Si $a > 0$, aleshores $(a * 0) * 0 = 0 * 0 = 1$

$(0 * a) * a = 1 * a = a$

3 6.- <u>Donat que $[0,1]$ és una cadena, és un reticle d-complet, $(A,*,v, ,1)$, que no és reticle de Hilbert</u>

3.7.- <u>$\mathcal{D}_0 = \{A, \{1\}, (0,1]\}$</u> (J Plà(12))

Això ens diu que $RM(A) \neq \{1\}$, a més $\mathcal{D}_0 = SpI(A)$ i no separa els elements de A

<u>Exemple 4</u> -

L'exemple que donem és a de S , per tant la classe d'aquestes no és buida. A més també veiem que no és àlgebra de Sales amb mínim

L'exemple es l'anterior treient-li l'element mínim , és a dir, fem $E = (0,1] \subseteq \mathbb{R}$, amb la mateixa operació $*$ Per tal que l'operació estigui ben definida cal veure que és interna, això és: si $a,b \in E$, aleshores $a * b \in E$, en efecte:

- si $a \leq b$, aleshores $a * b = 1 \in E$
- si $a > b$, aleshores com que $b \neq 0$, $a * b = b/a \neq 0$ i per tant és d'E.

De 3.3 deduim que:

4.1.- <u>$(E,*,1)$ és à d-co</u>

4.2.- <u>$(E,*,1)$ és a de S</u>

En efecte:

- Si $a < b$, aleshores $a * b = 1$ i per tant $(a * b) * b = 1 * b = b$ i $(b * a) * a = (a/b) * a$, pot passar:
  - $b < 1$, aleshores $a < a/b$ i $(a/b) * a = b$
  - $b = 1$, aleshores $a/b = a$ i $(a/b) * a = a * a = 1 = b$
- Si $a > b$, el proces és simètric a l'anterior
- Si $a = b$, $(a * a) * a = a$

4.3.- <u>$(E,*,1)$ no és a. de S amb mínim</u>

Ja que no té element mínim

4.4.- <u>$(E,*,1)$ no és a. de A</u>

Es una conseqüència de 3 4

Nota: Si comparem aquest exemple amb l'anterior, observem que per a obtenir una a. de S amb mínim no n'hi ha prou amb afegir un element mínim.

Exemple 5.

Donem un exemple d'àlgebra de Sales amb element mínim que no és àlgebra de Boole. L'exemple es degut en part a J Łukasiewicz (cf Łukasiewicz - Tarski (7)) Aquest només utilitzà els nombres racionals de $[0,1]$, i per a poder valorar les lògiques polivalents comprovà que es satisfan les propietats que necessitem

Fem $A = [0,1]$, amb l'operació $\rightarrow$ definida

Si $a,b \in A$, $a \rightarrow b = \min(1, b+1-a)$

5.1. $(A,\rightarrow,1)$ és a. de S amb mínim

En efecte:

- $(A,\rightarrow,\ )$ és àlgebra implicativa, ja que

  $a,b \in A$, $a \rightarrow b = 1$ si, i només si, $b + 1-a \geqslant 1$ si, i només si, $a \geqslant b$.

- D'altra banda 1 és el màxim

- $(A,\rightarrow,1)$ és àlgebra de Sales amb element mínim, ja que la aplicació de $[0,1] \times [0,1]$ en $[0,1]$ donada per

$f(a,b) = \min(1, b+1-a)$ és contínua i per tant tota propietat que compleixin els racionals la compliran tots els reals

5.2. $(A,v,\wedge,\cdot,1)$ no és àlgebra de Boole

ja que $1/2 \in A$ i $\neg(1/2) = 1-(1/2)$ i $(1/2)v(1/2) = 1/2 \neq u$

Exemple 6 -

Donem un exemple d'àlgebra d-completa (A, ,u) que a més és de Sales semi-simple, o equivalentment $RM(A) = \{u\}$, i que no satisfà la hipòtesi del Teorema III 17

Definim (A, ,u) com el producte directe de $(I_i, ,u_i)$, $i \in \mathbb{N}$; on per tot $i \in \mathbb{N}$, $(I_i, ,u_i)$ és l'àlgebra de l'exemple 4, per tant

$A = (0,1]^{\mathbb{N}}$, i si $a = (a_i)_{i \in \mathbb{N}}$, $b = (b_i)_{i \in \mathbb{N}} \in A$,

$a.b = (a_i\ b_i)_{i \in \mathbb{N}}$ Es clar que $u_i = 1$ per tot $i \in \mathbb{N}$

6 1. (A,.,u) és semi-simple

En efecte:

J. Pla (12), demostra que en $((0,1],\ast)$ $\{1\}$ és sistema deductiu maximal com ha tancat de $\mathcal{D}$, això és $(I_i, ,u_i)$ és àlgebra d-completa simple

En virtud de l'observació anterior (A, ,u) és a d-co semi-simple

6.2. $M_i = \{(a_r)_{r \in \mathbb{N}} \in A /\ a_i = 1\} \in SpM(A)$, per tot $i \in \mathbb{N}$

En efecte:

- $M_i \in \mathcal{D}_o$, ja que si a, $a.b \in M_i$, aleshores $a_i = a_i\ b_i = 1$ en $((0,1],\ast,1)$ per tant $b_i = 1$, per tant $b \in M_i$
- $M_i \in SpM(A)$, ja que : si $a,b \in M_i$, $a = (a_r)_{r \in \mathbb{N}}$, $b = (b_r)_{r \in \mathbb{N}}$ i $a_i \neq 1$ i $b_i \neq 1$ en $((0,1],\ast,1)$, per tant existeix $n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$, tal que $a_i^n\ b_i = 1$, aleshores $a^n\ b = (a_r^n\ b_r)_{r \in \mathbb{N}} \in M_i$

6 3 (A,.,u) no satisfà la hipòtesi del Teorema III 17

En efecte:

Per a demostrar-ho hem de trobar dos elements de A, a i b, tals que per tot $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 1$, $((a^n\ b)\ a)\ a \neq u$

Per ésser (A, ,u) semi-simple només cal veure que per tot $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 1$ existeix $D \in SpM(A)$ tal que $((a^n\ b)\ a)\ a \in D$

Fem $a = (1/2)$ i $b = (1/2^{k+1})_{k \in \mathbb{N}}$

En primer lloc efectuem $a^n\ b = c$, on $c = (c_k)_{k \in \mathbb{N}}$ i $c_i = 1$ si $i < n$, i $c_k = 1/2^{k+1-n}$ si $k \geq n$ Ho fem per inducció:

- Si $n = 1$, $1/2\ 1/2^{k+1} = 1/2^k$
- Suposem-ho cert per tot $r < n$, $n > 1$:

  $a^n\ b = a.(a^{n-1}\ b) = c$

  - si $k < n-1$, $c_k = a_k\ (a_k^{n-1}\ b_k) = a_k\ 1 = 1$
  - si $k = n-1$, $c_k = a_k\ (a_k^{n-1}\ b_k) = a_k\ \ 1/2^{n-(n-1)} = a_k\ 1/2 = 1$
  - si $k \geq n$, $c_k = a_k\ (a_k^{n-1}\ b_k) = a_k\ \ 1/2^{k+1-(n-1)} = 1/2\ \ 1/2^{k+2-n} =$
    $= 1/2^{k+1-n}$

Per tant donat $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 1$, $(a^n\ b)\ a = d = (d_k)_{k \in \mathbb{N}}$, i

$d_{n+1} = ((a_{n+1}^n\ b_{n+1})\ a_{n+1})\ a_{n+1} = (1/2^2\ 1/2)\ \ 1/2 = 1/2$, per tant

$((a^n\ b)\ a)\ a \notin M_{n+1}$

BIBLIOGRAFIA

(1) ABBOTT, J G "Trends in lttice theory" Van Nostrand 1970

(2) BIRKOFF, G "Lattice theory" American Mathematical Society Colloquim Publcations Vol XXV New York 1948

(3) BROWN, D-SUSZKO, R "Abstracs logics" Diss Math Vol CII pags 9-40 Varsovia 1973

(4) DIEGO, A "Sobre álgebras de Hilbert" Notas de lógica Matemâtica nº12 Universidad Nacional del Sur Argentina 1965

(5) FONT, J Mª "Estudi d'algunes propietats de les funcions conectives sobre un sistema formal" Tesi de llicenciatura 1977

(6) HALMOS, P R "Algebraic logic I (Monadic Boolean Algebras)" Comsitio Mathematica, 12 1955

(7) ŁUKASIEWICZ, J - TARSKI, A "Recherches sur le calcul propositionel" (1930) Logique semantique, metamathématique Tome1 Armand Colin Paris 1972 Pag 45-65

(8) MEDELSON, E. "Introducction to mathematical logic" Van Nostrand. Princenton 1963

(9) MONTEIRO, A. "Sur le calcul propositionel implicatif positif" Curs donat a la Universidad Nacional del Sur 1960

(10) MONTEIRO, A "La semi-simplicite des algebres de Boole topologiques et des sistemes deductifs" Revista Union de Matemáticos de Argentina (U M A) 1971

(11) PEARCE, R S "Introduction to the Theory of Abstracs Algebras" New York 1968

(12) PLA, J "Contribució a l'estudi de les estructures algebraiques dels sistemes logics deductius" Tesi doctoral Universitat de Barcelona 1975

(13) PLA, J "Àlgebres de Hilbert I i II" Curs de doctorat Universitat de Barcelona 1976 i 1977

(14) PLA, J "Sobre S i T negacions en lògiques abstractes", Actes XII Reunió Anual de Matemàtics espanyols (R A M E) Màlaga 1976

(15) PLA, J "Sobre l'estructura reticular de les àlgebres de Hilbert" Actes del V Congrés de la Agrupació de Matemàtics d'expresió llatina Mallorca 1978

(16) PLA, J - VERDU, B "El Teorema d'adequació de Gödel del càlcul de Proposicions a traves de les àlgebres de Boole" V Jornada Luso-Espanhola de Matemática Aveiro 1978

(17) RASIOWA, H - SIKORSKI, R "The mathematics of metamathematics" Monografics Matemayczne Tom 41 Varsovia 1970

(18) RASIOWA, H "An Algebraic Approach to non-clasical logics" North - Holland, 1974

(19) ROSER, J B - TURQUETTE, A R "May-valued logics" North Holland 1952

(20) RODRIGUEZ, A "Algebras de Wajsberg de las partes difusas de un conjunto" VI Jornadas Hispano-Lusas de Matematicas Santander 1979

(21) RODRIGUEZ, A Treballs previs a la redacció de la memòria de Tesi doctoral

(22) SALES, F deA "Curso de probabilidades" Universitat de Barcelona

(23) SALES, F de A "Algebras de Hilbert" Curs monogràfic de doctorat Universitat de Barcelona 1973

(24) SALES, F de A "Sistemes deductius" Idem 1974

(25) SALES, F de A "Les àlgebres de la lògica" Idem 1976

(26) SZASZ, G "Teorie des treillis" Monographies Universitaires de Mathématiques Dunod Paris 1971

(27) TARSKI, A "Sur quelques conceptes fondamentaux de la meta-mathématique" Logique semantique, metamatic Tomel pags 37-43

(28) TARSKI, A. "Conceptes fondamentaux de la metodologie des sciences deductives" Idem Pags 96-116

(29) TORRENS, A "Sobre lògicas y espacios clausura" Tesi de Llicenciatura Universitat de Barcelona 1977

(30) TORRENS, A "Elements crisipians en àlgebres d-completes" Actes VI Jornadas Hispano-Lusas de Matemáticas Santander 1979

(31) VERDU, B. "Sobre clausuras en conjuntos ordenados" Tesi de Llicenciatura. Barcelona 1976

(32) VERDU, B. "Contribució a l'estudi de certs tipus de lògiques abstractes" Tesi doctoral Barcelona 1978

(33) VERDU, B. "Lògiques distributives i Booleanes" Actes VI Jornadas anuales Hispano-Lusas Santander 1979

(34) VERDU, B. "Sobre operadors conseqüència finitaris i infinitaris" Actes V Joarnada Luso-Espanhola de Matematica Aveiro 1978

(35) WAJBSBERG,M "Metodologie Beiträge" Wiadomosci Matematycja, XLII (1973) pags 1-38

(36) WAJSBERG, M. "Aksjomatyzacja trójwartościowego rachunku zdań" C R.S.S.L Varsovia, ClaseIII, XXIV (1931) pags 126-145

(37) ZADEH- TANAKA-SHIMURA-K SUN FU "Fuzzy sets and their aplications to cognitive and decision prosess" Academic Press 1975