Camps de Killing en varietats semiriemannianes

Enric Fossas i Colet

ADVERTIMENT. La consulta d’aquesta tesi queda condicionada a l’acceptació de les següents condicions d'ús: La difusió d’aquesta tesi per mitjà del servei TDX (www.tesisenxarxa.net) ha estat autoritzada pels titulars dels drets de propietat intel·lectual únicament per a usos privats emmarcats en activitats d’investigació i docència. No s’autoritza la seva reproducció amb finalitats de lucre ni la seva difusió i posada a disposició des d’un lloc aliè al servei TDX. No s’autoritza la presentació del seu contingut en una finestra o marc aliè a TDX (framing). Aquesta reserva de drets afecta tant al resum de presentació de la tesi com als seus continguts. En la utilització o cita de parts de la tesi és obligat indicar el nom de la persona autora.

ADVERTENCIA. La consulta de esta tesis queda condicionada a la aceptación de las siguientes condiciones de uso: La difusión de esta tesis por medio del servicio TDR (www.tesisenred.net) ha sido autorizada por los titulares de los derechos de propiedad intelectual únicamente para usos privados enmarcados en actividades de investigación y docencia. No se autoriza su reproducción con finalidades de lucro ni su difusión y puesta a disposición desde un sitio ajeno al servicio TDR. No se autoriza la presentación de su contenido en una ventana o marco ajeno a TDR (framing). Esta reserva de derechos afecta tanto al resumen de presentación de la tesis como a sus contenidos. En la utilización o cita de partes de la tesis es obligado indicar el nombre de la persona autora.

WARNING. On having consulted this thesis you’re accepting the following use conditions: Spreading this thesis by the TDX (www.tesisenxarxa.net) service has been authorized by the titular of the intellectual property rights only for private uses placed in investigation and teaching activities. Reproduction with lucrative aims is not authorized neither its spreading and availability from a site foreign to the TDX service. Introducing its content in a window or frame foreign to the TDX service is not authorized (framing). This rights affect to the presentation summary of the thesis as well as to its contents. In the using or citation of parts of the thesis it’s obliged to indicate the name of the author.

CAMPS DE KILLING EN VARIETATS SEMIRIEMANNIANES

per

Enric Fossas i Colet

Facultat de Matemàtiques
Universitat de Barcelona
Any 1986

CAMPS DE KILLING EN VARIETATS SEMIRIEMANNIANES

Memòria presentada per
N'Enric Fossas i Colet
per aspirar al grau de
Doctor en Matemàtiques.

Carlos Currás Bosch, professor adjunt del Departament de Geometria i Topologia de la Universitat de Barcelona,

CERTIFICO,

que aquesta memòria s'ha realitzat sota la meva direcció per N'Enric Fossas i Colet i que constitueix la seva tesi per aspirar al grau de Doctor en Matemàtiques.

Barcelona, 7 de gener de 1986.

Carlos Currás Bosch

Agraeixo al Dr. Carlos Currás l'haver-me proposat i dirigit aquesta tesi. No hi ha escatimat temps ni paciència.

També he de fer extensiu el meu agraïment als companys del Departament, especialment al Sr. Antoni Ras, qui m'ha encoratjat en més d'una ocasió.

A la Concepció i a la petita Ariadna

Index

INTRODUCCIÓ.

Si M és una varietat diferenciable de classe C^∞ i X un camp sobre M; si X s'anul.la en un punt p de M, aleshores indueix, de manera natural, un endomorfisme A_X de l'espai tangent T_pM. De fet si $y\varepsilon T_pM$ i Y és un camp tal que $Y_p=y$, es defineix,

$$A_X(y)=[X,Y]_p.$$

Suposem ara que M és una varietat riemanniana, podem associar a X un endomorfisme que coincideixi amb el del paràgraf anterior fent,

$$A_XY=[X,Y]-\nabla_XY=-\nabla_YX.$$

Si X és un camp de Killing (isometria infinitesimal), l'operador A_X és antisimètric respecte de la mètrica. A més, com que les transformacions de curvatura són contingudes en l'àlgebra d'holonomia de M i derivant l'operador A_X s'obté una transformació de curvatura quan X és Killing ($\nabla_YA_X=R_{XY}$), és lícit de plantejar-se si l'operador A_X mateix ja és de l'àlgebra d'holonomia.

Per a varietats riemannianes compactes, Bertram Kostant (K) demostrà (l'any 1955) que l'operador A_X pertany a l'àlgebra d'holonomia per a qualsevol camp de Killing X. El pla R^2 amb la mètrica habitual té camps de Killing, l'operador A_X dels quals no pertany a l'àlgebra d'holonomia, que en aquest cas es redueix al zero.

Si hom busca altres exemples menys trivials pot limitar la recerca a varietats irreduïbles. Així deduiex (vid. Curràs (C.1) i (C.3)) que si M és una varietat riemanniana, completa, irreduïble, en la qual hi ha un camp de Killing X no holònom (i.e. l'operador A_X no pertany a l'àlgebra d'holonomia), M és una varietat de Kaehler degenerada o una varietat d'hiper-Kaehler.

L'objectiu d'aquesta memòria és fer un estudi semblant per a varietats semiriemannianes i, en particular, per a varietats de Lorentz. Tant en unes com en les altres es segueix verificant $\nabla_Y A_X = R_{XY}$ i que les transformacions de curvatura són contingudes en l'àlgebra d'holonomia.

En un afany de simplificació hem començat per estudiar varietats irreduïbles i varietats gairebé irreduïbles per l'acció del grup d'holonomia. Berger a (B) va descriure els possibles grups d'holonomia restringits de varietats riemannianes irreduïbles, no localment simètriques. Com veurem en la memòria, aquelles descripcions ja resolen la qüestió de la pertinença de A_X a l'àlgebra d'holonomia en les varietats que tracta. És doncs, en les varietats de Lorentz, gairebé irreduïbles, en què ens hem interessat especialment.

Aquestes varietats, definides per Wu (W.1), apareixen, de manera natural, al transportar al cas semiriemannià la noció riemanniana d'irreduïbilitat. Vénen caracteritzades perquè tenen subespais invariants que són degenerats i no d'altres subespais invariants no degenerats, llevat dels trivials.

Entre elles hem trobat exemples de varietats de Lorentz compactes que tenen camps de Killing globals, l'operador A_X dels quals no pertany a l'àlgebra d'holonomia. Així doncs, la hipòtesi de compacitat, que comportava que tot camp de Killing fos holònom en el cas riemannià, no és suficient per fer acomplir aquest fet quan la mètrica és semidefinida. La mancança no prové de la compacitat, sinó de la forma de Cartan-Killing, que és definida positiva en el cas riemannià i semidefinida en el cas semiriemannià. I en alguns casos, no permet una descomposició de l'espai en suma directa d'un subespai i el seu ortogonal. Quan aquesta descomposició és possible s'obtenen re sultats semblants als de Kostant.

En concret,

> Si M és una varietat semiriemanniana, compacta, ϕ la forma de Cartan-Killing, **h** l'àlgebra d'holonomia; si $\phi|_{\mathbf{h}}$ és no degenerada i X és un camp de Killing, aleshores, existeixen $h \in \mathbf{h}$ i $B_X \in \mathbf{h}^{\perp}$ satisfent,
>
> $$A_X = h + B_X \quad \text{i} \quad \phi(B_X, B_X) = 0$$
>
> i,
>
> si M és una varietat de Lorentz compacta, gairebé irreduïble localment, si $\phi|_{\mathbf{h}}$ és no degenerada, aleshores, tot camp de Killing és holònom.

<u>L'esquema per capítols</u> és com segueix,

El capítol primer va encaminat a presentar el teorema de descomposició de de Rham-Wu, que estén, al cas semiriemannià, el conegut teorema de descomposició de de Rham. La demostració que donem és de Wu (W.1) i és inspirada en el fet que les transformacions de curvatura i les seves derivades caracteritzen una varietat.

El començament del capítol segon és un recull de resultats que necessitarem posteriorment. Així s'introdueix la forma de Cartan-Killing (algú pot pensar que ens hem pres una llicència massa agosarada anomenant-la així), i s'exposen els rudiments sobre isometries infinitesimals. Tot això permet de donar una generalització del teorema de Kostant i d'estudiar el comportament de l'operador A_X, associat a un camp de Killing X, en varietats de curvatura constant. Tant si la constant val zero com si no val zero.

En el capítol primer ja comentem que les varietats irreduïbles resulten insuficients en el cas semiriemannià.

Fan falta, a més, varietats que tinguin subespais de l'espai tangent, degenerats, invariants per l'acció del grup d'holonomia. D'aquestes en diem varietats gairebé irreduïbles seguint la notació de Wu. El capítol tercer és dedicat a estudiar d'entre aquestes varietats, aquelles que, a més, siguin de Lorentz. Cal destacar que aquestes darreres són proveïdes d'una foliació de dimensió 1 (conseqüentment, també una de codimensió 1) paral.lela, en la direcció d'un camp vectorial de norma zero.

El capítol quart és dedicat a estudiar les possibles àlgebres d'holonomia de varietats de dimensió menor o igual que cinc, que siguin de Lorentz i gairebé irreduïbles localment. Tot això va encaminat a escatir el caràcter holònom o no holònom dels camps de Killing sobre aquestes varietats. Tant en el capítol anterior com en aquest, donem exemples de varietats de Lorentz gairebé irreduïbles. Un d'ells és, a més, una varietat compacta i és proveït d'un camp de Killing no holònom.

Finalment, el capítol cinquè conté generalitzacions d'aquests exemples, així com del teorema de Kostant, ja començada en el capítol segon. També conté aplicacions d'aquests teoremes quan el tensor de Ricci de la varietat satisfà condicions prou bones.

Habitualment designarem els camps vectorials per les darreres lletres de l'alfabet, i en majúscula (U,V,W,X,Y,Z).
El tensor mètric és denotat per g i per < , >.
Les àlgebres de Lie que en la literatura es designen mitjançant lletres gòtiques, vénen denotades per les lletres corresponents, **en negreta.**

CAPÍTOL I

El teorema de descomposició de de Rham-Wu

I.1 Isometries d'entorns normals.

Si M i M' són varietats semiriemannianes de la mateixa dimensió i índex, i $p\varepsilon M$, $p'\varepsilon M'$; ens proposem de trobar condicions per tal que, donada una isometria L $L:T_pM \longrightarrow T_{p'}M'$, sigui la diferencial en p d'una isometria definida en un entorn normal de p.

Definició. Si $L:T_pM \longrightarrow T_{p'}M'$ és una isometria lineal i si U és un entorn normal de p de manera que $\exp_{p'}$ està definida en $L(\exp_p^{-1}(U))$, aleshores l'aplicació Φ_L , $\Phi_L=\exp_{p'}\circ L\circ\exp_p^{-1}: U \longrightarrow M'$, s'anomena aplicació polar de L. En altres paraules, Φ_L envia $\exp_p(v)$ a $\exp_{p'}(Lv)$ per a qualsevol v de $\exp_p^{-1}(U)\subset T_pM$. L'aplicació "polar de L" sempre existeix per a entorns suficientment petits.

Lema 1. Segons la notació anterior:

1. Φ_L envia geodèsiques radials a geodèsiques radials.
2. $d\Phi_{L|p}=L$.
3. Si U és suficientment petit, aleshores Φ_L és un difeomorfisme sobre un entorn normal de p' en M'.
4. Si M' és completa, Φ_L està definida en cada entorn normal de p.

demostració

γ_v designa la geodèsica per $\gamma_v(0)$ amb velocitat v.

1. Les geodèsiques radials són de la forma $\gamma_v(t)=\exp_p(tv)$
   $\Phi_L(\gamma_v(t))=\exp_{p'}\circ L\circ\exp_p^{-1}\circ\exp_p(tv)=\exp_{p'}(tLv)=\gamma_{L(v)}(t)$.
2. $d\Phi_L(v)=d\Phi_L(\dot{\gamma}_v(0))=(\Phi_L\circ\gamma_v)^{\bullet}(0)=\dot{\gamma}_{Lv}(0)=Lv$.
3. Si U és suficientment petit, $\Phi_L(U)$ està contingut en un entorn normal de p' on $\exp_{p'}$ és un difeomorfisme, i Φ_L és una composició de difeomorfismes.

4. És clar perquè $\exp_{p'}$ està definida sobre tot $T_{p'}M'$.
q.e.d.

Si γ és una geodèsica en M amb $\gamma(0)=p$; γ' la geodèsica per $p'\varepsilon M'$ amb $\dot{\gamma}'(0)=L(\dot{\gamma}(0))$; designem per τ_γ el transport paral.lel al llarg de γ. Si es verifica:

$$(P_L(R_{XY}Z))=R_{P_L(X)P_L(Y)}P_L(Z)$$

per a tot X,Y,Z de $T_{\gamma(1)}M$, on,

$$P_L=\tau_{\gamma'}\circ L\circ\tau_{\gamma^{-1}}$$

direm que <u>L conserva la curvatura sobre la geodèsica γ</u>.

<u>Teorema 2</u>. (Cheeger-Ebin; B.O'Neil)
Siguin M i M' varietats semiriemannianes i $L:T_pM \longrightarrow T_{p'}M'$ una isometria lineal que conserva la curvatura sobre cada geodèsica per $p\varepsilon M$; aleshores:

1. Si U és un entorn suficientment petit de $p\varepsilon M$, hi ha una única isometria Φ de U en un entorn normal V de $p'\varepsilon M'$ de manera que $d\Phi|_p=L$.
2. Si M' és completa, aleshores per a cada entorn normal U de p hi ha una única isometria $\Phi:U\longrightarrow M'$ de manera que $d\Phi|_p=L$.

<u>demostració</u>

Unicitat.

Siguin $\zeta,\psi:U\longrightarrow V\subset M'$ de manera que $d\zeta|_p=d\psi|_p=L$. Considerem $A=\{q\varepsilon U:\ d\zeta|_q=d\psi|_q\}$. A és un subconjunt tancat de U. Si $q\varepsilon A$, prenem $W\subset U$, entorn normal de q, això és, $W=\exp_q W'$ per un cert W' entorn de 0 en T_qM. Si $r\varepsilon W$, existeix $v\varepsilon W'$ de manera que $r=\exp_q(v)$ i:

$$\zeta(r)=\zeta(\gamma_v(1))=\gamma'_{(d\zeta)(v)}(1)=\gamma'_{(d\psi)(v)}(1)=\psi(\gamma_v(1))=\psi(r)$$

Aleshores ζ i ψ coincideixen sobre $\exp_q W'$. D'ací $d\zeta|_r=$ $=d\psi|_r$ per a qualsevol r de U; i A també és obert. Com que és no buit i U és connex, obtenim el resultat.

Existència.

És suficient provar que l'aplicació polar de L del lema l és una isometria. Això és, per a cada $v\varepsilon T_qM$, $q\varepsilon U$, hem de demostrar que $g(d\Phi_L(v),d\Phi_L(v))=g(v,v)$.

Sigui doncs Φ_L l'aplicació polar de L, $\Phi_L:U\longrightarrow M'$ i U_T l'entorn de 0 a T_pM corresponent a U via $\exp_p$. Hi ha un únic $x\varepsilon U_T$ i un $y_x\varepsilon T_x(T_pM)$, de manera que

$$d(\exp_p)_{|x}(y_x)=v. \qquad (2.1)$$

Si γ_x designa la geodèsica amb condicions inicials $\gamma(0)=$ $=p$, $\dot{\gamma}(0)=x$ i Y el camp de Jacobi sobre γ_x amb c.i. $Y(0)=$ $=0$, $\dot{Y}(0)=y_x$, es verifica:

$$g(v,v)=g(Y(1),Y(1)). \qquad (2.2)$$

Com que L és lineal, $dL=L$, això és, $dL(y_x)=(Ly)_{Lx}$. De la definició de Φ_L i de (2.1) tenim:

$$(d\Phi)(v)=d(\exp_{p'}\circ L\circ\exp_p^{-1})(v)=d\exp_{p'}(dL(y_x))=d\exp_{p'|Lx}Ly_{Lx}$$

$$(d\Phi)(v)=(d\exp_{p'})_{|Lx}(Ly_{Lx}). \qquad (2.1)'$$

Si Y' designa el camp de Jacobi sobre $\gamma_{Lx}\subset M'$ amb c.i. $Y'(0)=0$, $\dot{Y}'(0)=Ly$, es verifica:

$$g(d\Phi(v),d\Phi(v))=g(Y'(1),Y'(1)) \quad (2.2)'$$

Prenem ara $E_1,\ldots,E_n$ una base ortonormal de T_pM. Designem per $E_i'=L(E_i)$ i per $E_i(t)$ (respectivament $E_i'(t)$) els transportats paral.lels de E_i (resp. E_i') al llarg de γ_x (resp. γ_{Lx}). Escrivim $Y=\sum y^iE_i$. Les funcions y^i satisfan el sistema d'equacions diferencials de Jacobi:

$$\frac{d^2y^m}{dt^2}=\sum R^m_{ijk}a^iy^ja^k \qquad (2.3)$$

amb c.i. $Y(0)=0$, $\dot{Y}(0)=y_x$; on les a's són constants que verifiquen $\dot{\gamma}(t)=\sum a^iE_i(t)$.

Respectivament, escrivint $Y'=\sum y'^iE_i'$, les funcions y'^i satisfan:

$$\frac{d^2y'^m}{dt^2}=\sum R'_{ijk}a'^iy'^ja'^k \qquad (2.4)$$

Observem que de la definició de γ_{Lx}, $a'^i=a^i$ i de la conservació de la curvatura sobre geodèsiques per p, $R^m_{ijk}=$ $=R'^m_{ijk}$. Les funcions y^i,y'^i satisfan el mateix sistema d'equacions diferencials amb les mateixes condicions inicials; de la unicitat de la solució, coincideixen.

Per tant:

$$g(d\phi(v),d\Phi(v))=g(Y'(1),Y'(1))=\Sigma\varepsilon_i(y'^i(1))^2=$$
$$=\Sigma\varepsilon_i(y^i(1))^2=g(Y(1),Y(1))=g(v,v).$$

q.e.d.

Remarca. En realitat es verifica $d\Phi_{|\gamma(t)}=\tau_{\gamma'}\circ L\circ\tau_\gamma^{-1}$ Perquè, de la construcció, $Y'(t)=(\tau_{\gamma'}\circ L\circ\tau_\gamma^{-1})(Y(t))$ i $\dot{Y}'(0)=L(\dot{Y}(0))$. D'aquí que:

$$Y'(1)=d\exp_{p'}(t\dot{Y}'(0))_{|\dot{\gamma}'(0)}=d\exp_{p'}L(t\dot{Y}(0))_{|\dot{\gamma}'(0)}=$$
$$=d\exp_{p'}\circ dL\circ(d\exp_p^{-1})(Y(1))=d\Phi(Y(1))$$

q.e.d.

Teorema 3. (B. O'Neil)

Siguin M i M' varietats semiriemannianes connexes i completes, M simplement connexa. Si $L:T_pM\longrightarrow T_{p'}M'$ és una isometria lineal que conserva la curvatura sobre cada geodèsica per p, aleshores hi ha un únic revestiment semiriemannià $\Phi:M\longrightarrow M'$ de manera que $d\Phi_{|p}=L$.

demostració

Notacions:

Per a qualsevol $k\geqq 1$ sigui v la k-pla de vectors de T_pM $v=(v^1,\dots,v^K)$. Definim β_v inductivament com la geodèsica diferenciable a troços $\beta_v:[0,k]\longrightarrow M$ determinada per $\beta_1=\gamma_{v^1}|[0,1]$; suposem definit $\beta_j:[0,j]\longrightarrow M$ i sigui w el transportat paral.lel de v_{j+1} al llarg de β_j fins a $\beta_j(j)$ Definim $\beta_{j+1}|[0,j]=\beta_j$ i $\beta_{j+1}(t)=\gamma_w(t-j)$ si $t\varepsilon[j,j-1]$.

Sigui ara v un dels anteriors i $\tau_v:T_pM\longrightarrow T_{\beta_v(k)}M$ el transport paral.lel sobre β_v. Respectivament en M' per $Lv=(Lv^1,\dots,Lv^k)$ sigui $\tau_{Lv}:T_pM'\longrightarrow T_{\beta_{Lv}(k)}M'$ el transport paral.lel al llarg de β_{Lv}. Aleshores el transport de L sobre β_v és $L_v=\tau_{Lv}\circ L\circ\tau_v^{-1}:T_qM\longrightarrow T_qM'$ essent $q=\beta_v(k)$, $q'=\beta_{Lv}(k)$. Com que L conserva la curvatura sobre cada geodèsica, L_v també.

Pel teorema 2 hi ha un entorn U_v de $\beta_v(k)$ i una isometria $\Phi_v:U_v\longrightarrow M'$ de manera que $d\Phi_{v|\beta_v(k)}=L_v$. Sense pèrdua de generalitat podem suposar U_v convex i que si U_v i U_w són no disjunts, la seva intersecció és convexa i per tant connexa.

Anem a construir M^* un revestiment de M.

Considerem $\Sigma = \{(q,U_v): q \varepsilon M,\ v=(v^1,\dots,v^K)\ K \varepsilon N\}$ definim en Σ la relació d'equivalència $\sim$ per $(q,U_v)\sim(q',U_w)$ si i només si $q=q'$ i $\Phi_v=\Phi_w$ en $U_v \cap U_w$. Es pot dotar (B. O'Neil, Matched coverings p.203) $\Sigma/\sim$ d'una estructura semiriemanniana de manera que les seccions $\lambda_v : \begin{array}{l} U_v \longrightarrow \Sigma/\sim \\ x \mapsto (x,U_v) \end{array}$ siguin isometries.

Amb aquesta estructura l'aplicació $\pi: \Sigma/\sim \longrightarrow M$ és una isometria local. A més (B. O'Neil, prop.32, p.204) π és un revestiment si i només si π eleva geodèsiques, això és, si donada σ una geodèsica en M i $\tilde{x}$ un punt de la fibra de $\sigma(0)$, existeix $\tilde{\sigma}$, geodèsica en $M^*=\Sigma/\sim$ amb $\tilde{\sigma}(0)=\tilde{x}$ i $\pi(\tilde{\sigma})=\sigma$.

π satisfà aquesta condició.

Efectivament, si σ és la geodèsica en qüestió i la suposem recoberta per $U_{v^1},\dots,U_{v^s}$. Si $(y,U_{v^i})\sim(y,U_{v^{i+1}})$ aleshores, definint $\tilde{\sigma}_{|I\cap\sigma^{-1}(U_{v^i})}=\lambda_{v^i}\circ\sigma_{|U_{v^i}}$ obtenim l'elevació. Hem de veure doncs que podem recobrir σ per $U_{v^1},\dots,U_{v^s}$ adequats. Prenem $v=(v^1,\dots,v^K)$ de manera que β_v uneixi p amb $\sigma(0)$; $v_{K+1}=\tau_v^{-1}(\dot{\sigma}(0))$ i $w(s)=(v^1,\dots,v^K, sv^{K+1})$ $s \varepsilon [0,1]$. Aleshores el darrer segment de $\beta_{w(s)}$ és una reparametrització de $\sigma_{|[0,s]}$. Hi ha una partició $0=s_0<s_1<\dots<s_m=1$ de manera que $\sigma([s_{i-1},s_i])\subset U_{w(s_i)}$.

Només falta veure que $(y,U_{w(s_{i-1})})\sim(y,U_{w(s_i)})$.

Si τ designa el transport paral.lel al llarg de σ desde $\sigma(s_{i-1})$ a $\sigma(s_i)$ (respectivament: τ' sobre $\Phi_{w(s_i)}\circ\sigma$, de $\Phi_{w(s_i)}(\sigma(s_{i-1}))$ a $\Phi_{w(s_i)}(\sigma(s_i))$).

$L_{w(s_{i-1})}=\tau'^{-1}\circ L_{w(s_i)}\circ\tau$. Com a isometria local, $\Phi_{w(s_i)}$ conserva el transport paral.lel. Obtenim doncs:

$$\left(d\,\Phi_{w(s_i)}\right)_{\sigma(s_{i-1})}=\tau'^{-1}\circ\left(d\Phi_{w(s_i)}\right)_{\sigma(s_i)}\circ\tau \qquad \text{i}$$

$$\left(d\Phi_{w(s_i)}\right)_{\sigma(s_{i-1})}=\tau'^{-1}\circ L_{w(s_i)}\circ\tau=$$

$$=L_{w(s_{i-1})}=\left(d\Phi_{w(s_{i-1})}\right)_{\sigma(s_{i-1})}.$$

en conseqüència $\Phi_{w(s_{i-1})}$ i $\Phi_{w(s_i)}$ coincideixen en $U_{w(s_{i-1})}\cap U_{w(s_i)}$.

Les aplicacions $\Phi_v\circ\pi:\lambda_v(U_v)\longrightarrow M'$ coincideixen en les interseccions $\lambda_v(U_v)\cap\lambda_w(U_w)$ i defineixen $\Phi^*:M^*\longrightarrow M'$ que és una isometria local.

Finalment, com que M és simplement connexa, existeix una secció global $\lambda:M\longrightarrow M^*$ de manera que $\lambda_{|U_0}=\lambda_0$ i $\Phi=\Phi^*\circ\lambda:M\longrightarrow M'$ és una isometria local; la completitut de M i la connexió de M' garanteixen que Φ és un revestiment semiriemannià.

q.e.d.

I.2 El grup d'holonomia d'una varietat semiriemanniana.

Si M és una varietat semiriemanniana connexa i $p\in M$, considerem C_p el conjunt de les corbes tancades ,diferenciables a troços, amb punt base p. El transport paral.lel sobre cada una d'aquestes corbes determina un automorfisme de T_pM que és una isometria. El conjunt de totes les isometries així obtingudes s'estructura de manera natural com un grup i s'anomena grup d'holonomia de M amb punt base p. El designarem per G_p.

Si γ és una corba de M amb extrems $\gamma(0)=p$, $\gamma(1)=q$, el transport paral.lel al llarg de γ proporciona un isomorfisme entre G_p i G_q fent:

$$T\in G_p\longrightarrow\tau_\gamma\circ T\circ\tau_\gamma^{-1}\in G_q$$

Quan en lloc de considerar totes les corbes tancades, diferenciables a troços, amb punt base p, tenim en compte només aquelles que són homotopes a constant, obtenim, via transport paral.lel, un grup, subgrup de l'anterior

que denotarem per G_p° i en direm grup d'holonomia restringit amb punt base p.
Es verifiquen (K.N. Teorema 4.2 p. 73)

a) G_p° i G_p són grups de Lie.

b) G_p° és la component connexa de la Id. en G_p.

L'àlgebra d'holonomia $\mathbf{h}_p$, àlgebra de G_p, que se sol identificar amb $T_{Id}G_p=T_{Id}G_p^\circ$ és una subàlgebra de **po(n)**.

Teorema 4. (Ambrose-Singer)
L'àlgebra d'holonomia $\mathbf{h}_p$ $p\varepsilon M$ està generada per les transformacions de curvatura R_{XY} $X,Y\varepsilon T_pM$ i pels seus transportats $\tau_\gamma^{-1}\circ(R_{\tau X \tau Y})\circ\tau_\gamma$ $X,Y\varepsilon T_{\gamma(0)}M$, $\gamma(1)=p$.
Una demostració es pot trobar en K.N. p.89 Teo.8.1 i p. 151 Teo. 9.1 .

I.3 El teorema de descomposició de de Rham-Wu.

Definició. Si M és una varietat semiriemanniana, $p\varepsilon M$, G_p el grup d'holonomia de M amb punt base p, direm que M és irreduïble quan els únics subespais de T_pM invariants per G_p són els trivials; direm que és reduïble quan hi hagi algun subespai de T_pM no degenerat respecte de la mètrica, invariant per G_p; altrament direm que M és gairebé irreduïble. Això és, M és gairebé irreduïble quan existeix un subespai invariant per G_p on la mètrica hi degenera i no n'existeix cap d'invariant no degenerat, no trivial. Afegirem localment a aquests adjectius quan considerem l'acció de G_p° sobre T_pM en lloc de la de G_p.

Proposició 5. Sigui $e_0,e_1,\ldots,e_n$ una base de R^{n+1} en la qual hem definit una mètrica mitjançant la matriu,

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & \\ 1 & 0 & \\ & & Id \end{pmatrix}$$

Sigui G un grup d'isometries de R^{n+1} respecte de la mètrica anterior, que verifiqui:

i) L'únic vector propi de tots i cada un dels elements de G és e_0.

ii) $\forall w \varepsilon \{e_0\}^{\perp}$, el subespai G(w) generat per w i les seves respectives imatges conté e_0.

Aleshores G actua gairebé irreduïblement sobre R^{n+1}.

demostració

El subespai generat per e_0 és invariant i degenerat. Si V fos un subespai no degenerat de R^{n+1} invariant per G, $V^{\perp}$ també ho seria i $e_0=v_1+v_2$ amb $v_1 \varepsilon V$, $v_2 \varepsilon V^{\perp}$. Per a qualsevol $g \varepsilon G$, $g(e_0)=g(v_1)+g(v_2)$. Però $g(e_0)=e_0$ i $g(v_1) \varepsilon V$ i $g(v_2) \varepsilon V^{\perp}$. Així doncs $g(v_1)=v_1$ i $g(v_2)=v_2$. D'això i (i) en deduïm $e_0 \varepsilon V$ o $e_0 \varepsilon V^{\perp}$. Suposem $e_0 \varepsilon V$; si dim $V<n+1$, existeix $u \varepsilon V^{\perp}$ i en particular $e_0 \perp u$. De (ii) $e_0 \varepsilon V^{\perp}$. Contradicció perque si V és no degenerat, $R^{n+1}=V \oplus V^{\perp}$. Ha de ser doncs dim $V=n+1$.

q.e.d.

Prenem una varietat semiriemanniana reduïble M i $p \varepsilon M$. A T_pM hi ha un subespai $(D_1)_p$ invariant per G_p. Si q és un altre punt de M, γ una corba de p a q, diferenciable a troços i $(D_1)_q$ el transportat de $(D_1)_p$ paral.lelament al llarg de γ, es verifica:

Lema 6. $(D_1)_q$ és independent del camí elegit.

demostració

Si γ i δ són dos camins de p a q, $\gamma^{-1}\cdot\delta$ és un camí tancat amb punt base p. Aleshores el transport paral.lel sobre $\gamma^{-1}\cdot\delta$ deixa invariant el subespai $(D_1)_p$. Això és $\tau_{\gamma^{-1}\cdot\delta}(D_1)_p \subset (D_1)_p$, però $\tau_{\gamma^{-1}\cdot\delta}=\tau_{\gamma^{-1}} \circ \tau_{\delta}=(\tau_{\gamma})^{-1} \circ \tau_{\delta}$. D'aquí que $\tau_{\delta}(D_1)_p \subset \tau_{\gamma}(D_1)_p$. Canviant els papers de γ i δ obtenim la igualtat.

q.e.d.

A partir de $(D_1)_p$ hem construït , per transport parallel una distribució D_1 sobre M i com que, per hipòtesi, $(D_1)_p$ és no degenerada respecte la mètrica i el transport paral.lel és una isometria, deduïm que $D_1^{\perp}=D_2$ és una altra distribució no degenerada, invariant per transport paral.lel i de manera que, per a qualsevol $q\varepsilon M$, $(D_1)_q\oplus(D_2)_q=T_qM$

Proposició 7.

1. La distribució D_1 (resp. D_2) és diferenciable i involutiva.
2. Si M_1 (resp. M_2) és la subvarietat integral maximal de D_1 (resp. D_2) per p, M_1 (resp. M_2) és una varietat totalment geodèsica. Si M és completa, M_1 (resp.M_2) també.

demostració

1. Per provar que la distribució D_1 és diferenciable, prenem $q\varepsilon M$ i $x^1,\dots,x^n$ un sistema de cordenades normals vàlid en un entorn U de q. Si $X_1,\dots,X_r$ és una base de $(D_1)_q$ i $z=(a_1,\dots,a_n)\varepsilon U$ definim $X_i^*=\tau_\gamma X_i$ on γ és la geodèsica $x^i=a_it$. Clarament $X_1^*,\dots,X_r^*$ és una base de $(D_1)_z$ per a qualsevol z de U.

El caràcter involutiu de D_1 prové del fet de ser $(X,Y)=$ $=\nabla_XY-\nabla_YX$ i $\nabla_XY=\lim\frac{1}{t}(\tau_o^tY_{x_t}-Y_p)$ i cada un dels dos membres de la substracció pertany a $(D_1)_p$.

2. Si γ és una geodèsica per p amb c.i. $\dot{\gamma}(0)\varepsilon(D_1)_p$, com que $\dot{\gamma}(0)$ és paral.lel al llarg de γ, $\dot{\gamma}(t)\varepsilon(D_1)_{\gamma(t)}$. Així doncs $\gamma\subset M_1$.

D'altra banda si γ és una geodèsica de M_1 amb c.i. $\gamma(0)=p$, $\dot{\gamma}(0)$, considerem la geodèsica τ de M amb c.i. $\tau(0)=p$ $\dot{\tau}(0)=\dot{\gamma}(0)$. Com que M_1 és totalment geodèsica $\tau\subset M_1$ i $\gamma=\tau$. Si M és completa τ i per tant γ estenen el seu domini a R.

q.e.d.

Per facilitar la demostració del següent teorema introduïm el següent:

Lema 8.

Si M_i $i=1,2$ són varietats semiriemannianes; $M_1 \times M_2$ el producte; $\pi_i : M_1 \times M_2 \longrightarrow M_i$ les projeccions, si γ és una corba en $M_1 \times M_2$ i Y un camp sobre γ es verifica:
Y és paral.lel al llarg de γ si i només si $\pi_i(Y)$ és paral.lel sobre $\pi_i(\gamma)$.

Teorema 9.

Si M és una varietat semiriemanniana completa simplement connexa i reduïble, $p \varepsilon M$, D_1, D_2 són les distribucions obtingudes transportant $(D_1)_p$, $(D_2)_p$. Si M_1, M_2 són les subvarietats integrals maximals de D_1, D_2 pel punt p, aleshores existeix una isometria $\psi : M_1 \times M_2 \longrightarrow M$.

demostració

Sigui M_1 (M_2 resp.) la varietat integral de D_1 (D_2 resp.) per p; i $I_1 : M_1 \longrightarrow M$ ($I_2 : M_2 \longrightarrow M$ resp.) la inclusió. $I_1^{-1}(p) = p_1$ ($I_2^{-1}(p) = p_2$ resp.). Sigui també $\tilde{M}_1 \xrightarrow{\pi_1} M_1$ ($\tilde{M}_2 \xrightarrow{\pi_2} M_2$ resp.) el recobriment universal de M_1 (M_2 respec.) i $\tilde{p}_1 \varepsilon \pi_1^{-1}(p_1)$ ($\tilde{p}_2 \varepsilon \pi_2^{-1}(p_2)$ .respec.).
$L : T_{(\tilde{p}_1, \tilde{p}_2)}(\tilde{M}_1 \times \tilde{M}_2) \longrightarrow T_p M$ definida utilitzant la commutativitat del següent diagrama:

$$\begin{tikzcd}
T_{(\tilde{p}_1,\tilde{p}_2)}(\tilde{M}_1 \times \tilde{M}_2) \arrow[r, "L"] \arrow[d, "d(\pi_1{,}\pi_2)"'] & T_p M \\
T_{(p_1,p_2)}(M_1 \times M_2) \arrow[r, "dI_1 \oplus dI_2"'] & T_p(I_1(M_1)) \oplus T_p(I_2(M_2)) \arrow[u, "="']
\end{tikzcd}$$

Si provem que L conserva la curvatura sobre geodèsiques que surten de $(\tilde{p}_1, \tilde{p}_2)$ estarem en condicions d'aplicar el Teorema 3.

Com que $\tilde{M}_1 \times \tilde{M}_2$ és un recobriment semiriemannià de $M_1 \times M_2$ és suficient provar la conservació de la curvatura sobre geodèsiques de $M_1 \times M_2$ que passin per (p_1, p_2).

Del lema 7 n'hi ha prou considerant geodèsiques de la forma (γ, p_2) (resp. (p_1, γ)),

Sigui doncs $(\gamma, p_2)(t) = (\gamma(t), p_2)$ una geodèsica en $M_1 \times M_2$ pel punt (p_1, p_2). La designarem per (γ, p_2) o γ segons la pensem en $M_1 \times M_2$ o en M. Hem de demostrar que:

(*) $L'_{(\gamma,p_2)}(R_{XY}Z) = R_{L'_{(\gamma,p_2)}X\, L'_{(\gamma,p_2)}Y} L'_{(\gamma,p_2)}Z$ on

$$L' = \tau_{(\gamma,p_2)} \circ (dI_1 \oplus dI_2) \circ \tau^{-1}_{(\gamma,p_2)}$$

N'hi haurà prou provant-ho pels X,Y,Z d'una referència. Prenem doncs $E_p^1, \ldots, E_p^r$ $F_p^1, \ldots, F_p^s$ bases de $(D_1)_p$, $(D_2)_p$; E^i, F^j els transportats de E_p^i, F_p^j paral.lelament al llarg de (γ, p_2) i també al llarg de γ. Aleshores:

1. $R_{E^iF^j} = 0$ però $L'_{(\gamma,p_2)}E^i \varepsilon D_1$ i $L'_{(\gamma,p_2)}F^j \varepsilon D_2$ i $R_{XY} = 0$

   per $X \varepsilon D_1$, $Y \varepsilon D_2$ a causa del teorema 4. Així doncs
   $$R_{L'_{(\gamma,p_2)}E^i L'_{(\gamma,p_2)}F^j} = 0.$$

2. Òbviament si $X \varepsilon D_1$, $L'_{(\gamma,p_2)}X = X$ igualtat que es verifica identificant M_1 amb la seva imatge $I_1(M_1)$. D'aquí que:
   $$L'_{(\gamma,p_2)} R_{E^iE^j} E^k = R_{E^iE^j} E^k =$$
   $$= R_{L'_{(\gamma,p_2)}E^i L'_{(\gamma,p_2)}E^j} L'_{(\gamma,p_2)}E^k.$$

3. $$L'_{(\gamma,p_2)}(R_{F^iF^j}F^k) = \tau_\gamma(R_{F^iF^j}F^k)$$

   $$R_{L'_{(\gamma,p_2)}F^i\, L'_{(\gamma,p_2)}F^j} L'_{(\gamma,p_2)}F^k = R_{F^iF^j}F^k.$$

   D'altra banda, de la 2ª identitat de Jacobi,
   $$\nabla_{E^i} R_{F^jF^k} + \nabla_{F^k} R_{E^iF^j} + \nabla_{F^j} R_{F^kE^i} = 0$$
   però $R_{E^iF^j} = R_{F^kE^i} = 0$.

Així doncs $\nabla_{E_i} R_{F_j F_k} = 0$. En conseqüència,

$\nabla_{\dot{\gamma}} R_{F_i F_j} = 0$ i $\tau_\gamma (R_{F_i F_j} F_k) = R_{F_i F_j} F_k$.

4. Finalment, $R_{E_i E_j} F_k = 0$ i $R_{XY} Z = 0$ si $X, Y \varepsilon D_1$, $Z \varepsilon D_2$ atès que

$$R_{XY}Z + R_{ZX}Y + R_{YZ}X = 0 \quad \text{i} \quad R_{ZX} = R_{ZY} = 0.$$

En resum, en tots i cada un dels casos es verifica (∗). Del teorema 3 hi ha un recobriment semiriemannià $\Phi : \tilde{M}_1 \times \tilde{M}_2 \longrightarrow M$. Com que per hipòtesi M és símplement connexa, Φ és una isometria. D'altra banda $\Phi(\tilde{M}_1, \tilde{p}_2)$ és la subvarietat integral maximal de $\Phi_*(D_1)$. Així doncs $\Phi : (\tilde{M}_1, \tilde{p}_2) \longrightarrow M_1$ és una isometria i passa el mateix amb $(\tilde{p}_1, \tilde{M}_2)$ i M_2. Això ens diu que M_1 i M_2 ja eren simplement connexes i que $M_1 \times M_2$ i M són isomètriques.

q.e.d.

<u>Corol.lari 10</u>.

Sigui M una varietat semiriemanniana, completa i reduïble; $p \varepsilon M$, $(D_1)_p \oplus (D_2)_p$ una descomposició de $T_p M$ en subespais invariants per l'acció del grup d'holonomia . D_1, D_2 les distribucions obtingudes traslladant paral.lelament $(D_1)_p$ i $(D_2)_p$; $q \varepsilon M$ i M_i les subvarietats integrals maximals de D_i pel punt q. Aleshores:

1. Existeixen V, V_1, V_2 entorns de q en M, M_1, M_2 i una isometria $\Phi : V_1 \times V_2 \longrightarrow V$.
2. $G_q^\circ(M) = G_q^\circ(M_1) \times G_q^\circ(M_2)$

<u>demostració</u>

1. Prenem $\pi : \tilde{M} \longrightarrow M$ el recobriment universal. Com que és una isometria local, el grup d'holonomia restringit de $\tilde{M}$ en $\tilde{q}$ és el mateix que el grup d'holonomia restringit de M en q; d'aquí que $d\pi_{\tilde{q}}^{-1} | (D_i)_q$ ens faciliti una descomposició de $T_{\tilde{q}} \tilde{M}$ en subespais invariants per l'acció del grup d'holonomia. Com que $\tilde{M}$ és simplement connexa i completa, estem en condicions d'aplicar el teorema 9. Existeix doncs una isometria entre $\tilde{M}_1 \times \tilde{M}_2$ i $\tilde{M}$. Isome-

tria que composada de manera adequada amb π ens proporciona 1.

2. Prové de ser:

$$G_q^{\circ}(M) \cong G_{\tilde{q}}(\tilde{M}) \cong (G_{\tilde{q}}\tilde{M}_1) \times (G_{\tilde{q}}\tilde{M}_2) \cong (G_q^{\circ}M_1) \times (G_q^{\circ}M_2).$$

q.e.d.

Si D_p° és el subespai maximal de T_pM on el grup d'holonomia hi actua trivialment i si la mètrica $g_{|D_p^{\circ}}$ és no degenerada, podem descomposar T_pM en subespais irreduïbles (gairebé irreduïbles).

En realitat podem establir el:

Teorema 11.

Si M és una varietat semiriemanniana, simplement connexa $p \in M$. Si $g_{|D_p^{\circ}}$ és no degenerada, T_pM admet una descomposició ortogonal en subespais irreduïbles , o gairebé irreduïbles $\oplus D_p^i$. Aleshores si M^i són les subvarietats integrals maximals de D^i per p,

1. M és *isomètrica* al producte $M^{\circ} \times M^1 \times ..\times M^r$ on M° és plana i M^i irreduïble o gairebé irreduïble.

2. $G_p(M)=G_p(M^1)\times...\times G_p(M^r)$ on cada $G_p(M^i)$ és el grup d'holonomia de M^i i actua trivialment sobre els $(D^j)_p$ $i \neq j$.

3. La descomposició de l'enunciat és única llevat de l'ordre.

demostració

Tenim $T_pM=\oplus D_p^i$. La suma a més de ser directa és ortogonal. Aleshores (1) i (2) són conseqüència directa del Teorema 9.

Per (3) vid.K-N, P.186-Lema.

q.e.d.

Del que hem vist fins aquí es pot concloure que, pel que fa a l'estudi local (de propietats locals) de varietats semiriemannianes, hom no es pot reduir a estudiar

el cas en el qual el grup d'holonomia restringit actua irreduïblement. També cal tenir present les varietats en les quals el grup d'holonomia restringit deixa invariants subespais on la mètrica degenera.
L'estudi dels possibles grups d'holonomia restringits de varietats riemannianes o semiriemannianes irreduïbles el va fer M. Berger (B.1) Posteriorment, H. Wu (1963) generalitzà el teorema de descomposiciò de de Rham (W.1), generalització en la qual ens hem inspirat per fer les demostracions anteriors; H. Wu presentà també diferents particularitats de les varietats gairebé irreduïbles localment i en donà exemples (W.3), així com també prosegui l'estudi dels possibles grups d'holonomia restringits de varietats semiriemannianes gairebé irreduïbles. Darrerament M. Cahen i M. Parker (C-P.) han completat aquest estudi per a varietats semiriemannianes localment simètriques i gairebé irreduïbles (localment).
Si hem xafardejat una mica en el terreny de les varietats gairebé irreduïbles localment, no és pas perquè estiguem interessats en proseguir en la línia dels treballs de Wu, Cahen i Parker ja esmentats, sinó que ens proposem d'utilitzar aquestes varietats com a pedres de toc, per contrastar la verificació de certs fenòmens coneguts en varietats riemannianes.
En concret ens proposem estudiar si, donat X un camp de Killing en una varietat semiriemanniana compacta, l'operador $A_X=L_X-\nabla_X=-\nabla X$ és o no contingut en l'àlgebra d'holonomia de la varietat. Realment el que ens preguntem no és res més que si, sota la hipòtesi de compacitat, un element que infinitesimalment pertany a una àlgebra de Lie, hi pertany de fet. Això vol dir: tenim $\nabla_Y A_X=R_{XY}$ que pertany a l'àlgebra d'holonomia (Teorema 4); és suficient que la varietat sigui compacta per tal que A_X

pertanyi a l'àlgebra d'holonomia?
Aquest problema, en el cas Riemannià, va ésser plantejat i resolt afirmativament per B. Kostant (K.) l'any 1955.

CAPITOL II

Generalització d'un teorema de Kostant. Varietats semiriemannianes de curvatura constant.

II.1 Generalitats.

Proposició 1. La forma de Cartan-Killing

$$\begin{aligned}\Phi : \mathrm{End}(V)\times\mathrm{End}(V) &\longrightarrow R\\ (A,B) &\longmapsto \Phi(A,B)=\mathrm{Traça}(A\circ B)\end{aligned}$$

és no degenerada en **po(n,s)**, àlgebra de Lie del grup pseudo-ortogonal PO(n,s)

demostració

Sigui $p\varepsilon M$ i $X_1,\ldots,X_n$ una base ortogonal i unitària de T_pM. Definim

$$\begin{aligned}X_i*X_j : T_pM &\longrightarrow T_pM\\ Z &\longmapsto <Z,X_i>X_j-<Z,X_j>X_i .\end{aligned}$$

Els productes X_i*X_j formen una base de **po(n,s)**. Es verifica :

$$((X_i*X_j)\circ(X_k*X_l))(Z)=(X_i*X_j)(<Z,X_k>X_l-<Z,X_l>X_k)=$$

$$=<Z,X_k>(<X_i,X_l>X_j-<X_j,X_l>X_i)-<Z,X_l>(<X_i,X_k>X_j-<X_j,X_k>X_i)$$

$$=(<Z,X_k>g_{il}-<Z,X_l>g_{ik})X_j+(<Z,X_l>g_{jk}-<Z,X_k>g_{jl})X_i .$$

D'altra banda si $\psi\varepsilon\mathrm{End}(V)$ on V és un espai vectorial on hi ha definida una mètrica semiriemanniana i si X_i és base ortogonal i unitària $\pm 1=\varepsilon_i=g_{ii}$, es verifica $\mathrm{traça}\psi=\sum\varepsilon_i<\psi(X_i),X_i>$. Així doncs:

$$\Phi((X_i*X_j),(X_k*X_l))=\mathrm{traça}((X_i*X_j),(X_k*X_l))=\sum\varepsilon_h<(X_i*X_j)\circ$$
$$\circ(X_k*X_l)(X_h),X_h>=\sum\varepsilon_h((g_{kk}g_{il}-g_{hl}g_{ik})g_{jh}+(g_{hl}g_{jk}-g_{hk}g_{jl})$$
$$g_{ih})=g_{jj}(g_{jk}g_{il}-g_{jl}g_{ik})g_{jj}+g_{ii}(g_{il}g_{jk}-g_{ik}g_{jl})g_{ii}=$$
$$=g^2_{jj}(g_{jk}g_{il}-g_{jl}g_{ik})+g^2_{ii}(g_{il}g_{jk}-g_{ik}g_{jl})=2(g_{jk}g_{il}-g_{jl}g_{ik})$$

Com que $i<j$ i $k<l$ implica $g_{il}g_{jk}=0$, la igualtat anterior és $-2g_{jl}g_{ik}$.

Així la matriu de Φ en la base de les X_i*X_j consta de ±2 a la diagonal, Φ és doncs no degenerada. A mes és de la forma $(n(n-1)/2,n(n-1)/2 - s(n-s))$.

Proposició 2. La forma de Cartan-Killing és paral.lela.

demostració

Hem de veure $\nabla_X\Phi=0$. Sigui $p\in M$ i $X_1,\dots,X_n$ base normal i unitària. Això és $(\nabla_{X_i}X_j)_p=0$. $(\nabla_X\Phi)(A,B)= =X\Phi(A,B)-\Phi(\nabla_X A,B)-\Phi(A,\nabla_X B)$. Si (a_{ij}) (b_{ij}) són les matrius de A i B respectivament en la base $X_1,\dots,X_n$, tenim:

$$X\Phi(A,B)=X\ \text{traça}(A\circ B)=X(\sum\varepsilon_i<a_{ij}b_{jk}X_k,X_i>)=X\sum\varepsilon_i^2a_{ij}b_{ji}\quad(1)$$

$$\Phi(\nabla_XA,B)=\text{traça}(\nabla_XA\circ B)=\sum\varepsilon_i<(\nabla_XA\circ B)X_i,X_i>=$$

$$\sum\varepsilon_i<\nabla_XA(b_{ij}X_j),X_i>=\sum\varepsilon_i<\nabla_X(A(b_{ij}X_j))-A(\nabla_X(b_jX_j)),X_i>=$$

$$\sum\varepsilon_i<\nabla_X(a_{jk}b_{ij}X_k)-A(Xb_{ij})X_j-A(b_{ij}\nabla_XX_j),X_i>\overset{*}{=}$$

$$\sum\varepsilon_i(X(a_{jk}b_{ij})<X_k,X_i>+a_{jk}b_{ij}<\nabla_XX_k,X_i>-(Xb_{ij})a_{jk}<X_k,X_i>)=$$

$$\sum\varepsilon_i^2(X(a_{ji}b_{ij})-a_{ji}(Xb_{ij}))=\sum\varepsilon_i^2(Xa_{ji})b_{ij}\quad(2)$$

$$\Phi(A,\nabla_XB)=\sum\varepsilon_i^2a_{ji}(Xb_{ij})\quad(3)$$

Clarament (1)=(2)+(3)

(*) Notem que X és un vector en p i per tant $\nabla_XX_j=0$.

II.2 Camps de Killing

Definició. Un camp de Killing o isometria infinitesimal sobre una varietat semiriemanniana és un camp X pel qual la derivada de Lie de la mètrica s'anul.la.

Això és $L_Xg=0$.

El tensor mètric no varia sobre el fluxe d'un camp de Killing.

Proposició 3. Si X és un camp vectorial sobre una varietat (M,g) semiriemanniana, són equivalents:

1. X és un camp de Killing
2. Ψ_t són isometries

demostració.

2 → 1. Com que $L_Xg=\lim_{t\to0}\frac{1}{t}(\Psi_t^*g-g)$ si Ψ_t^* és una isometria $\Psi_t^*g=g$. Aleshores $L_Xg=0$.

1 → 2. Si v és un vector tangent en un punt del domini del fluxe, aleshores també ho és $d\Psi_s(v)=w$ per s suficientment petit. De ser $L_Xg=0$, $\lim_{t\to0}\frac{1}{t}(g(d\Psi_tw,d\Psi_tw)-g(w,w))=0$.

Com que $\Psi_s \circ \Psi_t = \Psi_{s+t}$,

$$\lim(1/t)\left[g(d\Psi_{s+t}(v), d\Psi_{s+t}(v)) - g(d\Psi_s(v), d\Psi_s(v)\right] = 0.$$

Això em diu que la funció

$$s \longrightarrow g(d\Psi_s(v), d\Psi_s(v))$$

té derivada nul.la és doncs constant. Per tant,

$$g(d\Psi_s(v), d\Psi_s(v)) = g(v,v) = 0.$$

q.e.d.

Proposició 4. També són equivalents:

1. X és Killing.
2. A_X és antisimètric respecte de g.

demostració

Recordatori:

$$(L_X g)(Y,Z) = Xg(Y,Z) - g(L_X Y, Z) - g(Y, L_X Z).$$

1→2. De ser X Killing, $(L_X g) = 0$ (4.1). Això comporta $Xg(Y,Z) = g(L_X Y, Z) + g(Y, L_X Z)$ (4.2). D'altra banda $Xg(Y,Z) = g(\nabla_X Y, Z) + g(Y, \nabla_X Z)$ (4.3). Fent (4.3)-(4.2) s'obté $0 = g(\nabla_Y X, Z) + g(Y, \nabla_Z X)$ (4.4) Això és $g(A_X Y, Z) = -g(Y, A_X Z)$ (4.5).

2→1. De (4.5) obtenim (4.4). Fent (4.3)-(4.4) obtenim (4.2) per a qualsevol Y,Z. Això és (4.1).

q.e.d.

Proposició 5. Si X és Killing i V un camp arbitrari, es verifica:

1. $\nabla_{[X,V]} = [L_X, \nabla_V]$.
2. $\nabla_V(A_X) = R_{XV}$.

Com es veurà en la demostració aquesta proposició és vàlida per a transformacions afins.

demostració (K.N. p.231)

1. $L_X(\nabla_Y Z) = \lim\limits_{t\to 0} \frac{1}{t}(\nabla_Y Z - \psi_t(\nabla_Y Z))$. De la proposició 3, ψ_t són isometries; en particular afinitats i verifiquen $\psi_t(\nabla_Y Z) = \nabla_{\psi_t Y} \psi_t Z$. Així doncs,

$$L_X(\nabla_Y Z) = \lim_{t\to 0} \frac{1}{t}(\nabla_Y Z - \nabla_{\psi_t Y} Z) + \lim_{t\to 0} \frac{1}{t}(\nabla_{\psi_t Y} Z - \nabla_{\psi_t Y} \psi_t Z) =$$

$$=\nabla_{[X,Y]}Z+\nabla_Y(L_XZ).$$

D'aquí que 1. es verifica sobre camps.

Sobre funcions:

$$\nabla_{[X,V]}f=[X,V]f$$

$$[L_X,\nabla_V]f=L_X(\nabla_Vf)-\nabla_V(L_Xf)=X(Vf)-V(Xf)$$

també es verifica la igualtat. Hem provat per tant 1.

2. $$(\nabla_V(AX))(Z)=\nabla_V(A_XZ)-A_X(\nabla_VZ)=$$

$$=-\nabla_V(\nabla_ZX)+\nabla_{\nabla_VZ}X=-\nabla_V(\nabla_XZ-L_XZ)+\nabla_X(\nabla_VZ)-L_X(\nabla_VZ)=$$

$$=\nabla_X\nabla_VZ-\nabla_V\nabla_XZ+\nabla_V(L_XZ)-L_X(\nabla_VZ)=(\text{de } 1)$$

$$=\nabla_X\nabla_VZ-\nabla_V\nabla_XZ-\nabla_{[X,V]}Z=R_{XV}Z.$$

q.e.d.

Proposició 6.

Si X és un camp de Killing en una varietat (M,g) semi-riemanniana i si definim $f=\frac{1}{2}g(X,X)$, aleshores:

a) $\text{grad } f=A_XX$

b) $H^f(V,W)=g(\nabla_VX,\nabla_WX)+g(R_{XV}X,W)=g(\nabla_V(A_XX),W)$

c) $\Delta f=-\text{traça }(A_X\circ A_X)-\text{Ricci }(X,X)$

demostració

a) $g(\text{grad } f,Z)=Zf=\frac{1}{2}Zg(X,X)=\frac{1}{2}\;2g(\nabla_ZX,X)=-g(Z,\nabla_XX)=g(Z,A_XX)$

b) L'hessià d'una funció f és un tensor (0,2) simètric tal que:

$$H^f(V,W)=g(\nabla_V(\text{grad } f),W)=g(\nabla_V(A_XX),W))=$$

$$=g((\nabla_V(A_X))X+A_X(\nabla_VX),W)=g(R_{XV}X,W)+g(A_X(\nabla_VX),W)=$$

$$=g(R_{XV}X,W)-g(\nabla_VX,A_XW)=g(R_{XV}X,W)+g(\nabla_VX,\nabla_WX).$$

c) $\Delta f=\text{div}(\text{grad } f)=\text{div}(A_XX)=\text{traça}(V\longrightarrow\nabla_V(A_XX))=$

$$=\text{traça}(V\longrightarrow(\nabla_VA_X)X)+\text{traça}(V\longrightarrow A_X(\nabla_VX))=$$

$$=\text{traça}(V\longrightarrow R_{XV}X)-\text{traça}(V\longrightarrow A_X\circ A_X(V))=$$

$$=-\text{Ricci}(X,X)-\text{traça}(A_X\circ A_X).$$

essent $\text{Ricci }(X,Y)=\text{traça}(V\longrightarrow R_{VX}Y)$.

q.e.d.

Si p és un punt arbitrari de M i si ψ_t ès un grup uniparamètric d'isometries (en realitat seria suficient transformacions afins) generat per X en un entorn de p; si τ és l'òrbita de X per p, $p_t=\psi_t(p)$; denotarem per τ_t^s el transport paral.lel al llarg de τ de p_s a p_t. Per cada t considerem la transformació lineal de T_pM, $C_t=\tau_0^t\circ(\psi_t)_*$

Es verifica:

Proposició 7. (K.N. p.245)

C_t és un grup uniparamètric de transformacions lineals (si les ψ_t són isometries, també ho són les C_t).

$C_{t+s}=C_t\circ C_s$ i $C_t=\exp(-tA_X)$.

demostració

Com que ψ_t aplica el tros de τ que va de p a p_s en el tros de τ que va de p_t a p_{t+s} i pel fet que ψ_t és compatible amb el transport paral.lel, tenim:

$$(\psi_t)_*\circ\tau_0^s=\tau_t^{t+s}\circ(\psi_t)_*$$

Per tant,

$$C_t\circ C_s=\tau_0^t\circ(\psi_t)_*\circ\tau_0^s\circ(\psi_s)_*=\tau_0^t\circ\tau_t^{t+s}\circ(\psi_t)_*\circ(\psi_s)_*=\tau_0^{t+s}\circ(\psi_{t+s})_*=$$
$$=C_{t+s}$$

Així doncs hi ha un endomorfisme (en el nostre cas una isometria) F de T_pM tal que $C_t=\exp tF$. Hem de veure $F=-A_X$

Per demostrar-ho provarem que:

$$\lim_{t\to 0}\frac{1}{t}(C_tY_p-Y_p)=-(A_X)_pY_p \quad \text{per } Y_p\varepsilon T_pM.$$

Considerem primer el cas on $X_p\neq 0$. Aleshores p té un entorn coordenat i un sistema de coordenades normals x^i de manera que la corba τ és $x^1=t$, $x^2=\ldots=x^n=0$ per a valors petits de t. Podem estendre Y_p a un camp Y en M de manera que $\psi_t(Y_p)=Y_{pt}$, i.e. $(L_XY)_p=0$.

Es verifica:

$$-(A_XY)_p=(\nabla_XY)_p-(L_XY)_p=(\nabla_XY)_p=$$
$$=\lim_{t\to 0}\frac{1}{t}(\tau_0^tY_{p_t}-Y_p)=\lim_{t\to 0}\frac{1}{t}(\tau_0^t\circ(\psi_t)_*Y_p-Y_p)=$$
$$=\lim_{t\to 0}\frac{1}{t}(C_tY_p-Y_p).$$

Si $X_p=0$, ψ_t és un grup uniparamètric local de transformacions locals que deixen p fix   el transport paral.lel

τ_0^t es redueix a la identitat. Aleshores $(\nabla_X Y)_p=0$.

$$-(A_X)_p Y_p=(\nabla_X Y)_p-(L_X Y)_p=-(L_X Y)_p=-\lim_{t\to 0}\frac{1}{t}(Y_p-(\psi_t)_* Y_p)=$$
$$=\lim_{t\to 0}\frac{1}{t}(C_t Y_p-Y_p).$$

q.e.d.

Proposició 8 (K.N. p.246)

Si M ésuna varietat semiriemanniana , X un camp de Killing i $\mathbf{h}$ l'àlgebra d'holonomia de M, aleshores $[\mathbf{h},A_X]\subset\mathbf{h}$.

Remarca: El resultat és vàlid per a X transformació infinitesimal afí.

demostració

De la proposició anterior, serà suficient provar $[\mathbf{h},C_t]\subset\mathbf{h}$.

Si γ designa un llaç amb punt base p, γ_t designarà el llaç $\psi_t\circ\gamma$, amb punt base p_t; aleshores:

$$(\psi_t)_*\circ\tau_\gamma=\tau_{\gamma'}\circ(\psi_t)_*$$

D'aquí que:

$$C_t\circ\tau_\gamma\circ C_t^{-1}=\tau_0^t\circ(\psi_t)_*\circ\tau_\gamma\circ(\psi_t)_*^{-1}\circ\tau_t^0=$$
$$=\tau_0^t\circ\tau_{\gamma'}\circ(\psi_t)_*\circ(\psi_t)_*^{-1}\circ\tau_t^0=\tau_0^t\circ\tau_{\gamma'}\circ\tau_t^0.$$

Això mostra que $C_t\circ\tau_\gamma\circ C_t^{-1}$ és un element de G_p. Aquest element és de G_p° si γ ho era.

q.e.d.

II.3 El teorema feble

Teorema 9.

Sigui M una varietat semiriemanniana compacta i orientable. Si la forma de Cartan-Killing Φ és no degenerada sobre $\mathbf{h}$, àlgebra d'holonomia de M i si X és un camp de Killing en M, aleshores l'operador A_X descomposa, de manera única $A_X=h+B_X$ on $h\varepsilon\mathbf{h}$; $B_X\varepsilon\mathbf{h}^\perp$ i traça$(B_X,B_X)=0$.

demostració

De les hipòtesis $\Phi_{|\mathbf{h}}$ és no degenerada; Φ també per la

proposició II.1. Podem doncs descomposar **po(n,s)** fent $\mathbf{po(n,s)}=\mathbf{h}\oplus\mathbf{h}^{\perp}$ (l'ortogonal és respecte de Φ). D'aquesta descomposició $A_X=h+B_X$, amb $h\varepsilon\mathbf{h}$, $B_X\varepsilon\mathbf{h}^{\perp}$.
Es verifica: B_X és paral.lel.
En efecte, de la proposició II.5.2 $\nabla_Y A_X=R_{XY}$. D'altra banda $\nabla_Y A_X=\nabla_Y h+\nabla_Y B_X$. Pel teorema I.4, $\nabla_Y A_X\varepsilon\mathbf{h}$. Així doncs com que **h** és tancat respecte de la derivació, $\nabla_Y B_X\varepsilon\mathbf{h}$. Però com que Φ és paral.lela (prop. II.2) $\nabla_Y B_X\varepsilon\mathbf{h}^{\perp}$ $(0=Y\Phi(B_X,h)=\Phi(\nabla_Y B_X,h)+\Phi(B_X,\nabla_Y h))$.
En resum $\nabla_Y B_X\varepsilon\mathbf{h}\cap\mathbf{h}^{\perp}=\{0\}$.
Calculem

$$\begin{aligned}\mathrm{div}(B_X X)&=\mathrm{traça}(V\longmapsto\nabla_V(B_X X))=\\&=\mathrm{traça}(V\longmapsto(\nabla_V B_X)X)+\mathrm{traça}(V\longmapsto B_X(\nabla_V X))=\\&=-\mathrm{traça}(V\longmapsto(B_V\circ A_X)(V))=-\mathrm{traça}(B_X\circ(h+B_X))=\\&=-\mathrm{traça}(B_X\circ h)-\mathrm{traça}(B_X\circ B_X).\end{aligned}$$

A més $Y\Phi(B_X,B_X)=2\Phi(\nabla_Y B_X,B_X)=0$. Això ens diu que $\Phi(B_X,B_X)$ és constant .
Integrant $\mathrm{div}(B_X X)$ sobre M, obtenim:

$$0=\int_M \mathrm{div}(B_X X)=-\int_M \mathrm{traça}(B_X\circ B_X)=k\ \mathrm{Vol}.M$$

I concloem $k=0$.

q.e.d.

Remarca: Hem suposat M orientable. Pel cas no orientable prendríem el revestiment de les orientacions, que és de dues fulles i tindríem: $\tilde{A}_X=\tilde{h}+\tilde{B}_X$ com que l'esmentat revestiment és una isometria local, $A_X=h+B_X$.Per tant el resultat del Teorema 9 és cert tant si M és orientable com si no.

II.4 Varietats de curvatura constant.

Nota:

Remarquem que en el cas semiriemannià no és veritat el conegut resultat:

M varietat compacta → M varietat completa.

Un exemple instructiu es pot trobar en B.O'Neil p.143 "The Clifton Pohl torus". També en el següent capítol d'aquesta memòria.

Ja hem enunciat al final del capítol I que estem interessats en saber quan l'operador A_X pertany a l'àlgebra d'holonomia. En aquest apartat presentem el comportament d'aquest operador en varietats de curvatura constant.

Comencem per observar:

Proposició 10. Si M és una varietat semiriemanniana de curvatura constant $k \neq 0$, l'àlgebra d'holonomia **h** coincideix amb **po(n,s)**, endomorfismes antisimètrics de l'espai tangent.

demostració

Sigui $X_1,\ldots,X_n$ una base ortogonal i unitària en un entorn de p. La curvatura s'expressa :

$$R_{YZ}T=k(<T,Y>Z-<T,Z>Y)$$

$R_{X_iX_j}$ té en la base de les X's una matriu de la forma:

$$\begin{array}{c} \\ i.. \\ \\ j.. \\ \\ \end{array}\begin{array}{c} \begin{array}{ccccc} & i & & j & \end{array} \\ \left(\begin{array}{ccccc} \cdots & \vdots & \cdots & -\varepsilon_j & \cdots \\ & \vdots & & \vdots & \\ \cdots & \varepsilon_i & \cdots & \vdots & \cdots \\ & \vdots & & \vdots & \end{array}\right) \end{array}$$

i zeros en els altres llocs.

Com que les transformacions de curvatura i els seus transportats paral.lels generen **h** (Teorema I.4) i $R_{X_iX_j}$ generen **po(n,s)** tenim el resultat desitjat.

q.e.d.

Corol.lari 11. Si M és una varietat semiriemanniana de curvatura constant $k \neq 0$ i X és un camp de Killing, l'operador $A_X \varepsilon \mathbf{h}$.

demostració

De la proposició anterior i de la proposició II.4.

q.e.d.

Remarca:

Observem que per a varietats de curvatura constant $k \neq 0$, l'operador $A_X \varepsilon \mathbf{h}$ independentment que M sigui

o no sigui compacta. (Aquest cas conté en particular les hiperquàdriques).
Veurem que en el cas $k=0$ es segueix verificant $A_X \varepsilon \mathbf{h}$ sota la hipòtesi de compacitat de M.
Abans de res enunciem un teorema de J.A.Wolf.

Teorema 12.
Si M^n_s és una varietat semiriemanniana plana, homogènia, connexa i completa, aleshores M^n_s és isomètrica a un quocient R^n_s/Γ essent Γ un grup abelià lliure de m generadors, $m \leq n$, que és fidelment representat com a grup discret de translacions d'un subespai lineal de R^n_s.
Si Ψ és el grup d'holonomia lineal de M^n_s, $h:\Gamma \longrightarrow \Psi$ és l'homomorfisme d'holonomia; aleshores Ψ és abelià lliure, $\Gamma = \Gamma' \times \ker h$ per algun subgrup $\Gamma' \subset \Gamma$ i $m \leq n-2$ en el cas que $\Psi \neq \{Id\}$.
Si M^n_s és compacta o si M^n_s és riemanniana o de *Lorentz* o si $\dim M^n_s < 5$, aleshores $\Psi = \{Id\}$ i Γ és un grup de translacions de R^n_s.
(Vid: J.A.Wolf. Spaces of Constant curvature. Teor.3.7. .11 p.135).

Corol.lari 13. Si M és una varietat semiriemanniana, plana, compacta i homogènia, aleshores és paral.lelitzable.

demostració.
Compacta+homogènia $\longrightarrow$ completa (B.O'Neil p.258-prop.39).
Del teorema anterior $G=Id$ (G grup d'holonomia). Aleshores, fixats $V_1,\dots,V_n$ base ortogonal unitària de T_pM, el seu transport paral.lel ens defineix n camps ortogonals unitaris, globals i paral.lels.

q.e.d.

Proposició 14. Sigui M una varietat semiriemanniana compacta i connexa, V un camp global paral.lel, X un camp de Killing. Aleshores $g(V,X)$ és constant.

demostració.

Prenem $f=g(X,V)$. Es verifica grad $f=A_XV$. Efectivament

$$g(\text{grad } f,Z)=Zf=Zg(X,V)=g(\nabla_Z X,V)+g(X,\nabla_Z V)=$$
$$=-g(Z,\nabla_V X)=g(Z,A_XV).$$

A més A_XV és paral.lel.

$$\nabla_Y(A_XV)=(\nabla_Y A_X)V-A_X(\nabla_Y V)=R_{XY}V=0.$$

Com que f està definida en M, varietat compacta, f aconsegueix un màxim (també un mínim). En un d'aquests punts grad f=0. Però grad f és paral.lel i s'anul·la en algun punt, aleshores grad f=0.

q.e.d.

Remarca:

1. No cal que M sigui compacta. És suficient que f aconsegueixi un extrem relatiu.
2. Observem que de la prop. 14 és dedueix f harmònica. Aquí no es pot utilitzar com en el cas riemannià el fet que les úniques funcions harmòniques definides en varietats compactes són les constants; ens ho mostra l'exemple (V-9) del darrer capítol.
3. Si M^n_s és una varietat semiriemanniana paral.lelitzable i $V_1,\dots,V_n$, n camps independents globals i paral-lels i X és un camp de Killing de manera que $g(X,V_i)$ aconsegueix un extrem relatiu per a qualsevol i, aleshores X és paral.lel.

Corol.lari 15. Si M^n_s és una varietat semiriemanniana compacta, homogènia i plana, aleshores tot camp de Killing en M^n_s es paral.lel.

q.e.d.

L'exemple següent ens mostra un camp de Killing no paral.lel en una varietat semiriemanniana , plana i homogènia, però no compacta. Aquest camp serà no holònom.

Exemple 16. A R^n_s plana, considerem x^i un sistema de coordenades global, ortogonal i unitari. Si $\varepsilon_i=g(\partial_x i,\partial_x i)$, el camp $X=\varepsilon_1 x^2 \partial_{x^1}-\varepsilon_2 x^1 \partial_x$ és un camp de Killing global no paral.lel.

Teorema 17.

Si és una varietat semiriemanniana plana, compacta i completa, i si X és un camp de killing, aleshores X és paral.lel.

demostració

1. $A_X X$ és un camp de Jacobi sobre geodèsiques. Efectivament:

$$\nabla_Y\nabla_Y(A_X X)=\nabla_Y((\nabla_Y A_X)X+A_X(\nabla_Y X))=$$
$$=-\nabla_Y(A_X A_X Y)=-(\nabla_Y A_X)(A_X X)-A_X(\nabla_Y(A_X Y))=$$
$$=-A_X((\nabla_Y A_X)Y)-A_X A_X(\nabla_Y Y)=0 \quad \text{(Y geodèsica)}$$

2. D'altra banda no hi ha punts conjugats en varietats semiriemannianes planes. Efectivament si M és plana i $p,q\varepsilon M$; p és conjugat de q si i només si existeix σ geodèsica de p a q i J camp de Jacobi sobre σ verificant $J(p)=J(q)=0$. L'equació d'un camp de Jacobi ortogonal a σ en varietats de curvatura constant k és:

$$Y''=-k<\sigma',\sigma'>Y=0 \text{ en el nostre cas.}$$

Per tant,

$$Y=A.t+B \text{ que no es pot anul.lar en p i q si}$$

no és $Y=0$.

3. Si $f=\frac{1}{2}g(X,X)$, grad $f=A_X X$. (prop.II.6.a).

Siguin p i q punts on f aconsegueixi un màxim i un mínim respectivament. Considerem $\tilde{M}\cong R^n_s$ el recobriment universal de M; $\tilde{p},\tilde{q}$ dos punts de la fibra de p i q respectivament. La recta $\overline{\tilde{p}\tilde{q}}$ és una geodèsica σ de $\tilde{M}$. $\pi\circ\sigma$ és una geodèsica de M que va de p a q.

4. $A_X X$ és un camp de Jacobi sobre σ que verifica $(A_X X)_p=$ $=(A_X X)_q=0$. Com que en M no hi ha punts conjugats $A_X X=0$ i $g(X,X)=ctt$.

5. $\pi^*(X)$ és un camp de Killing en $\tilde{M}$ de norma constant.

Ara bé, els camps de Killing en $\tilde{M}\cong\tilde{R}^n_s$ són de la forma,

$$\tilde{X}=\sum_{i=1}^{n}\varepsilon_i\left(\sum_{j=0}^{n}K_i^j x_j\right)\frac{\partial}{\partial x^i}$$

amb $K_i^j=-K_j^i$, $x_0=1$, i $\frac{\partial}{\partial x^i}$ el sistema de coordenades ja esmentat en l'exemple anterior. Efectivament:

$$g\left(\nabla_{\frac{\partial}{\partial x^t}}\tilde{X},\frac{\partial}{\partial x^s}\right)=g\left(\sum_{i=1}^{n}\varepsilon_i K_i^t\frac{\partial}{\partial x^i},\frac{\partial}{\partial x^s}\right)=\varepsilon_s^2K_s^t$$

$$g\left(\nabla_{\frac{\partial}{\partial x^s}}\tilde{X},\frac{\partial}{\partial x^t}\right)= \qquad \dots \qquad =\varepsilon_t^2K_t^s$$

i tots són d'aquesta forma perquè les constants K_i^j determinen un espai vectorial de dimensió $n+(n-1)+\dots+1=\frac{n(n+1)}{2}$

6. Si a més $\tilde{X}$ ha de tenir norma constant només pot ser

$$\tilde{X}=\sum K_i^0\frac{\partial}{\partial x^i} \qquad \text{per } K_i^0 \text{ adequats}.$$

7. Conclusió: $\tilde{X}$ és paral.lel. Per tant com que π és una isometria local, X també és paral.lel.

q.e.d.

CAPITOL III

Varietats de Lorentz gairebé irreduïbles localment

III.1 La foliació paral.lela

Proposició 1. Si M és una varietat gairebé irreduïble (resp. localment), i $p\varepsilon M$, aleshores el grup d'holonomia (resp. el grup d'holonomia restringit) deixa invariant un subespai isòtrop.

demostració.
Per hipòtesi existeix un subespai V de T_pM invariant per l'acció del grup d'holonomia G i on la mètrica hi degenera; existirà doncs $w\varepsilon V$ de manera que $g(w,v)=0$ per a qualsevol $v\varepsilon V$.
Considerem W el subespai G(w), que és generat per l'acció de G sobre w. Els seus elements són de la forma,

$$\lambda\zeta(w)+\mu\psi(w) \quad \text{on } \lambda,\mu\varepsilon R, \quad \zeta,\psi\varepsilon G_p$$

D'altra banda $g(\zeta(w),\psi(w))=0$ perquè ζ és una isometria i $g(\zeta(w),\psi(w))=g(w,\zeta^{-1}\psi(w))=0$.
Així doncs, el producte,

$$g(\lambda\zeta(w)+\mu\psi(w),\ \lambda'\zeta'(w)+\mu'\psi'(w))=0$$

i el subespai W és isòtrop i invariant per G. (Tot el que hem fet també ho podríem repetir prenent G° en lloc de G).

q.e.d.

Observació: No és necessària la condició M de Lorentz en la prop. 1.

Proposició 2. Si M és una varietat de Lorentz gairebé irreduïble (resp. gairebé irreduïble localment), aleshores:

i) Hi ha una distribució diferenciable nul.la, de dim.1, invariant per l'acció del grup d'holonomia (resp. grup d'holonomia restringit).

ii) Aquesta distribució és única si dim $M>2$.

demostració.

De la prop. 1 existeix, per a cada $p\varepsilon M$, un subespai de T_pM isòtrop, invariant per l'acció del grup d'holonomia (resp. grup d'holonomia restringit). Com que M és de Lorentz els subespais isòtrops són de dim 1.

Si Rv_1, Rv_2 són dos subespais de T_pM invariants per G (resp. G°), $Rv_1 \oplus Rv_2$, que és invariant per G (resp. G°), ha de ser degenerat si $\dim M>2$, això és $g(v_1,v_2)=0$ i $Rv_1 \oplus Rv_2$ és isòtrop. Això no és possible perquè M és de Lorentz i ja hem dit que en un espai vectorial de Lorentz la dimensió dels subespais isòtrops és 1.

En resum $Rv_1=Rv_2$.

D'aquí la distribució.

Per tal de garantir-ne la diferenciabilitat només ens cal transportar paral.lelament la direcció invariant al llarg de camins en un entorn simplement connex de cada punt. El transport és independent del camí elegit pel fet que el subespai en qüestió és invariant per G°.

q.e.d.

Remarca. La distribució també és, per tant, totalment geodèsica.

Proposicó 3. Si M és una varietat de Lorentz de $\dim>2$, es verifica M gairebé irreduïble localment → M gairebé irreduïble.

demostració.

Si M és gairebé irreduïble localment, de la proposició anterior existeix una distribució nul.la D, de dim 1: $G^{c}(D)=D$. A més aquesta distribució és única.

Si $p\neq q \varepsilon M$ i γ i σ són geodèsiques en M, de p a q es verifica (*) $\tau_\gamma(D_p)=\tau_\sigma(D_p)=D_q$. Perquè tant $\tau_\gamma(D_p)$ com $\tau_\sigma(D_p)$ són invariants per G°_q. Efectivament, si δ és un camí amb punt base q, homotop a constant, $\gamma\bullet\delta\bullet\gamma^{-1}$ és un camí amb punt base p, homotop a ctt. Així doncs es verifica $\tau_{\gamma.\delta.\gamma^{-1}}(D_p)=D_p$; però $\tau_{\gamma.\delta.\gamma^{-1}}=\tau_{\gamma^{-1}}\circ\tau_{\delta}\circ\tau_{\gamma}$; $\tau_{\delta}\circ\tau_{\gamma}(D_p)= =\tau_{\gamma}(D_p)$.

(*) Ens diu que D és invariant per G. Això prova l'existència d'un subespai degenerat invariant per G. D'altra banda no hi ha cap subespai no degenerat invariant per G. En cas d'haver-n'hi un, també seria invariant per G° contra la hipòtesi de ser M gairebé irreduïble localment.

q.e.d.

Definició. Una varietat semiriemanniana de Lorentz és orientable temporalment si i només si existeix un camp global de norma negativa.

Si M és una varietat semiriemanniana de Lorentz gairebé irreduïble localment i orientable temporalment, i D la distribució de la prop. 2, podem construir un camp V_0 sobre M, de manera que $RV_0=D$ i $g(V_0,V_0)=0$. A més $V_0|_q\neq 0$ per qualsevol $q\varepsilon M$.

Efectivament com que M és orientable temporalment existeix Z, camp global de norma negativa. Si D és la distribució de la prop. 2 i W genera D, es verifica $g(Z,W)\neq 0$; perquè els vectors ortogonals als vectors temporals són espacials i W no ho és. Així doncs, triem $V_0=\frac{1}{g(Z,W)}\cdot W$.

Remarca. Observem que prenent $V_1=-\frac{g(Z,Z)}{2}V_0+Z$ obtenim un altre camp global i $g_{|RV_0\oplus RV_1}$ s'expressa en la base V_o,V_1 mitjançant la matriu,

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

Es pot presentar una varietat diferenciable M amb una connexió, definint una connexiò en el fibrat de referències lineals L(M). És conegut que si la connexió és riemanniana hi ha un subfibrat de L(M), el de les referències ortonormals i la connexió hi redueix. Es poden trobar referències d'aquests conceptes a K.N pp 53/83.84//118. Remarquem especialment:

Proposició 4. (K.N Lema 2 Prop. 7.1, p.84).
Si Q(M,H) és un subfibrat de P(M,G) i Γ una connexió en P. Si per a cada $u\varepsilon Q$, el subespai horitzontal de T_uP és tangent a Q, aleshores la connexió Γ és reduïble a una connexió en Q.

Proposició 5.

Si $e_0, e_1, \ldots, e_n$ és una base de l'espai de Lorentz L_{n+1} en la qual la mètrica ve definida per la matriu,

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & . & . \\ 1 & 0 & . & . \\ . & . & . & . \\ . & . & . & \overset{Id}{.} \end{pmatrix} \quad (1.1)$$

i ψ és una isometria de L_{n+1} que té e_0 com a vector propi, aleshores, la matriu de ψ en la base de les e's és:

$$\begin{pmatrix} \lambda & a & {}^t w \\ 0 & \lambda^{-1} & 0 \\ 0 & v & A \end{pmatrix}$$

essent $\lambda\neq 0$; $\lambda\varepsilon R$, $w\varepsilon R^{n-1}$, $A\varepsilon O(n-1)$

$$a=-\frac{g(w,w)}{2\lambda}\varepsilon R \qquad v=-\frac{Aw}{\lambda}\varepsilon R^{n-1}$$

demostració.
Com que $\psi(e_0)=\lambda e_0$, amb $\lambda\neq 0$ perquè ψ és isomètria, la matriu de ψ en la base de les e's és:

$$\begin{pmatrix} \lambda & a & {}^{t}w \\ 0 & \mu & {}^{t}u \\ 0 & v & A \end{pmatrix}$$

De ser isometria s'ha de verificar:

$$\begin{pmatrix} \lambda & a & {}^{t}w \\ 0 & \mu & {}^{t}u \\ 0 & v & A \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & Id \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \lambda & 0 & 0 \\ a & \mu & {}^{t}v \\ w & u & {}^{t}A \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & Id \end{pmatrix}$$

D'on s'obté $2a\lambda+g(w,w)=0$

$g(u,u)=0 \rightarrow u=0$

$\lambda\mu+g(u,v)=1 \rightarrow \lambda=\mu^{-1}$

$\lambda v+Aw=0$

$A\,{}^{t}A=Id$

i d'aquí el resultat.

q.e.d.

Definició. Designarem per $\mathfrak{Y}$ el grup d'isometries de L_{n+1} que tenen e_0 com a vector propi. De la proposició 5, aquest grup és isomorf a $R\times R^{n-1}\times O(n-1)$, amb l'operació:

$$(\lambda,{}^{t}w,A)\cdot(\mu,{}^{t}v,B)=(\lambda\mu,\ \lambda\,{}^{t}v+{}^{t}wB,AB)$$

La terna $(\lambda,{}^{t}w,A)$ de $R\times R^{n-1}\times O(n-1)$ correspon a la matriu:

$$\begin{pmatrix} \lambda & -g(w,w)/2\lambda & {}^{t}w \\ 0 & \lambda^{-1} & 0 \\ 0 & -Aw/\lambda & A \end{pmatrix}$$

Com que $O(n-1)$ és un grup de Lie, $\mathfrak{Y}$ també ho és. La seva àlgebra és isomorfa a $R\times R^{n-1}\times o(n-1)$ amb l'operació:

$$[(a,w,A),(b,v,B)]=(0,b\,{}^{t}w-a\,{}^{t}v-{}^{t}vA-{}^{t}wB,[A,B])$$

La terna $(a,{}^{t}w,A)$ de $R\times R^{n-1}\times o(n-1)$ correspon a la matriu:

$$\begin{pmatrix} a & 0 & {}^{t}{-w} \\ 0 & -a & 0 \\ 0 & w & A \end{pmatrix}$$

Si M és una varietat de Lorentz gairebé irreduïble localment i dim $M \geq 3$, de les proposicions 2 i 3 hi ha en M una ! distribució paral.lela i nul.la que n'hem dit D.

Si L(M) és el fibrat de referències lineals en M, definim B(M) així:

- Un element u de L(M) és un isomorfisme entre R^{n+1} i $T_{\pi(u)}M$.
- Com que M és de Lorentz prenem L_{n+1} en comptes de R^{n+1} i $e_0, e_1, \ldots, e_n$ una base com en la proposició anterior.
- L'element u de L(M) pertany a B(M) si i només si $u(e_0) \varepsilon D$ i la matriu de la mètrica en la base de les $u(e_i)$'s és del tipus (1.1).

Proposició 6. B(M) és un fibrat principal sobre M amb grup estructural $\mathcal{Y}$.

demostració.

D'una banda $\mathcal{Y}$ actua lliurement sobre B(M). Com que L(M) és un fibrat principal amb grup estructural GL(n+1), es verifica $M \cong \frac{L(M)}{GL(n+1)}$ i L(M) és localment trivial. De les definicions de B(M) i $\mathcal{Y}$, també és $M \cong \frac{B(M)}{\mathcal{Y}}$ i B(M) localment trivial.

q.e.d.

Proposició 7. La connexió de Levi-Civita associada a g en M, redueix a B(M).

demostració.

De la proposició 4, prenem u(t) corba diferenciable en M i $\tilde{u}(t)$ corba horitzontal de L(M) amb punt base $\tilde{u}(0)$ que es projecta en u(t). En un entorn trivialitzant,

$$\tilde{u}(t) = (u(t), w_0(t), w_1(t), \ldots, w_n(t))$$

Per tal de poder aplicar la prop. 4 d'aquest capítol s'ha de verificar:

i) $w_0(t)\varepsilon D_{u(t)}$

ii) g s'expressa en la base $w_i(t)$ mitjançant la matriu (1.1).

Com que $w_i(t)$ és el transport paral.lel de $w_i(0)$ al llarg de u(t), es verifica i) perquè $w_0(0)\varepsilon D$ i D és una distribució paral.lela; i ii) perquè el transport paral.lel és una isometria.

Així doncs, podem aplicar la prop. 4 i obtenim el resultat.

q.e.d.

Corol.lari 8. Si (M,g) és una varietat de Lorentz gairebé irreduïble, aleshores el seu grup d'holonomia és isomorf a un subgrup de $R\times R^{n-1}\times O(n-1)$; la seva àlgebra de Lie és isomorfa a una subàlgebra de $R\times R^{n-1}\times \mathbf{o}(n-1)$. Aquests grups, àlgebra, ho són amb les operacions definides a la pàg. 32.

q.e.d.

Corol.lari 9. Si **h** és l'àlgebra d'holonomia d'una varietat de Lorentz de dim n+1 gairebé irreduïble localment, es verifica dim $\mathbf{h}\leq 1+\frac{n(n-1)}{2}$.

q.e.d.

Corol.lari 10. Les varietats de curvatura constant de dim>2 no són gairebé irreduïbles localment.

demostració.

Efectivament, si M_k és una varietat de curvatura constant $k\neq 0$ i dimensió n+1 es verifica per n>1,

$$\dim \mathbf{h}_{M_k} = \frac{(n+1)n}{2} > \frac{n(n-1)}{2}+1.$$

M_0 no és gairebé irreduïble localment. Del teor.I.4, $\mathbf{h}=0$. Això comporta que qualsevol vector s'estén, en un entorn del punt, a l'espai tangent del qual pertany, a un camp paral.lel. En particular un vector de norma diferent de zero.

q.e.d.

III.2 El Torus de Clifton Pohl

L'estudi de varietats semiriemannianes és una font de sorpreses. Els esquemes bastits sobre la base de la geometria riemanniana, esdevenen febles i cedeixen en admetre l'existència de vectors diferents de zero i de norma zero.

Ja hem esmentat un d'aquests casos en II.4. Un altre és el següent:

-Les isometries poden tenir vectors propis de valors propis diferents de ±1.

Això comporta que sigui essencialment diferent suposar que G° deixa invariant V_0 i suposar que el deixa fix.

El Torus de Clifton Pohl T, que ja hem esmentat per mostrar que compacte no implica complet, també ens serveix com a varietat que verifica:

1) Si $p\varepsilon T$ i u,v generen les direccions nul.les de T_pT, tant u com v són invariants per l'acció de G°_p.

2) Existeix $\psi\varepsilon G^\circ_p : \psi(u)\neq\pm u \ \psi(v)\neq\pm v$.

Exemple

Considerem $M=R^2-\{(0,0)\}$ amb la mètrica $ds^2=\frac{2\ dudv}{u^2+v^2}$. La multiplicació per un escalar $c\neq 0$ és una isometria.

Definim $\mu: \underset{(u,v)\mapsto(2u,2v)}{M\longrightarrow M}$. El grup d'isometries $\Gamma=\{\mu^n\}$ generat per μ opera de forma pròpiament discontinua sobre M; aleshores $T=M/_\Gamma$ és una superficie de Lorentz. Topològicament T és el quocient de l'anell, de R^2, $1\leq x^2+y^2\leq 4$, per la relació induïda per μ sobre els punts de la vora; que és $(\mathrm{Cos}2\pi t,\mathrm{Sin}2\pi t)\sim 2(\mathrm{Cos}2\pi t,\mathrm{Sin}2\pi t)$.

T és per tant un torus.

Operant es pot comprovar que T no és un torus pla. Com que és una superficie, G° deixa invariant cada una de les direccions nul.les (Prop. IV.2). Tanmanteix, si $p\varepsilon T$ i u,v són vectors en aquelles direccions a T_pT, ha d'existir $\psi\varepsilon G^\circ_p: \psi(u)\neq\pm u$ i $\psi(v)\neq\pm v$ ja que, en cas contrari, (Prop.III.12) u es podria estendre a un camp paral.lel en un entorn de p i tindríem $R_{u.|p}=0$ contra el fet que T no és pla. Per a la primera observació, notis que la corba $\alpha(t)=$ $=({}^{1}/_{1-t},0)$ és una geodèsica de M definida entre $-\infty$ i 1. Així doncs M és no completa. En conseqüència tampoc ho serà T tot i essent compacte.

q.e.d.

Nota

D'altres exemples relacionats amb (1) i (2) es troben en (A.-M.)

III.3 Cas en el qual V_0 satisfà $G^\circ(V_0)=V_0$.

Proposició 11. Si M és una varietat de Lorentz gairebé irreduïble localment, de dim>2, si D és la distribució de la prop. 2 i si $W_p \varepsilon T_pM$ és tal que $R.W_p=D_p$, són equivalents:

a) $R_{XY}W_p=0$ per a qualsevol $X,Y\varepsilon T_pM$, i per a tot $p\varepsilon M$

b) $h(W_p)=0$ per a qualsevol $h\varepsilon \mathbf{h}_p$, i per a tot $p\varepsilon M$

c) $\psi(W_p)=W_p$ per a qualsevol $\psi\varepsilon G^\circ_p$ i per a tot $p\varepsilon M$

demostració.

a → b. Del teorema d'Ambrose-Singer (T.I.4) l'àlgebra d'holonomia ve generada per les transformacions de curvatura i els seus transports paral.lels. En concret els generadors són de la forma R_{XY} i $\tau_\circ^{-1}(R_{\tau X\tau Y})\circ\tau$ on τ designa el transport paral.lel al llarg d'una geòdesica que parteix de p.

De (a) $R_{XY}W_p=0$. D'altra banda, $(\tau^{-1}\circ(R_{\tau X\tau Y})\circ\tau)(W_p)=$ $=\tau^{-1}(R_{\tau X\tau Y}(\tau W_p))=\tau^{-1}(R_{\tau X\tau Y}\lambda W_{\tau(1)})=\lambda\tau^{-1}(R_{\tau X\tau Y}W_{\tau(1)})=$ $=\lambda\tau^{-1}(0)=0$.

b → c. Per a cada $h\varepsilon\mathbf{h}_p$ considerem $\sum_{i=0}^{\infty} h^i/_{i!}$. Aquesta serie és convergent en un cert entorn V de $0\varepsilon\mathbf{h}_p$. $Exp_p(V)$ és un entorn de $Id\varepsilon G_p$. Considerem $W=V\cap V^{-1}$. W és un entorn simètric de Id. A més $\overset{\infty}{\underset{n=0}{\cup}} W^n = G_p^\circ$. Així doncs un element qualsevol de G_p° es pot escriure $\psi_1 \cdot \; \ldots \; \cdot \psi_n$, $\psi_i \varepsilon W$.

$$\psi_i(W_p) = \sum_0^\infty \frac{h^i(Wp)}{i!} = Id(W_p) + \sum_{i=1}^\infty \frac{h^i(Wp)}{i!} = W_p .$$

Concloem per tant que per a qualsevol element ψ de G_p° es satisfà $\psi(W_p)=W_p$.

c → a. Si γ i σ són camins tancats homotops a constant, amb punt base p, el transport paral.lel τ_γ i τ_σ verifica $\tau_\gamma(W_p)=\tau_\sigma(W_p)$.

Així doncs podem estendre W_p a un camp W definit en un entorn de p. Es verificarà $R_{XY}W_p = R_{XY}W|_p = 0$

q.e.d.

Proposició 12.

Si (M,g) és una varietat de Lorentz gairebé irreduïble localment i si es verifica alguna de les condicions (a), (b) o (c) de la prop. 11, aleshores el grup d'holonomia restringit de M és isomorf a un subgrup de $R^{n-1} \times O(n-1)$ i la seva àlgebra d'holonomia a una subàlgebra de $R^{n-1} \times o(n-1)$ amb les operacions esmentades en els paràgrafs darrers de la pàg. 32.

Es verifica dim $\mathbf{h} \leq \frac{n(n-1)}{2}$.

demostració.

Òbvia del corol.lari 8 i de la prop. 11 d'aquest capítol.

q.e.d.

III.4 Una primera aproximació.

Teorema 13.

Si M és una varietat de Lorentz gairebé irreduïble localment i si X és un camp de Killing en M, es verifica $A_X \varepsilon R \times R^{n-1} \times o(n-1)$.

Remarca. Aquesta pertinença és feta en el mateix sentit que $\mathbf{h}\subset R\times R^{n-1}\times\mathbf{o(n-1)}$ del corol. 8.

demostració.

1. Si $e_0,e_1,\ldots,e_n$ és una base de R^{n+1} on la mètrica g s'expressa mitjançant la matriu,

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & Id \end{pmatrix}$$

les matrius antisimètriques en aquesta base són de la forma,

$$(*)\begin{pmatrix} a & 0 & -{}^tu \\ 0 & -a & -{}^tw \\ w & u & A \end{pmatrix}$$

$$A\varepsilon\mathbf{o(n-1)},\ a\varepsilon R,\ u,w\varepsilon R^{n-1}$$

2. De la prop. 7, un element qualsevol h de **h** és de la forma,

$$\begin{pmatrix} b & 0 & -{}^tv \\ 0 & -b & 0 \\ 0 & v & B \end{pmatrix}$$

$$b\varepsilon R,\ v\varepsilon R^{n-1},\ B\varepsilon\mathbf{o(n-1)}$$

3. Del caràcter antisimètric A_X és de la forma (*)

4. De la prop. II.8 $[A_X,h]\varepsilon\mathbf{h}$. Així doncs,

$$\left[\begin{pmatrix} a & 0 & -{}^tu \\ 0 & -a & -{}^tw \\ w & u & A \end{pmatrix},\begin{pmatrix} b & 0 & -{}^tv \\ 0 & -b & 0 \\ 0 & v & B \end{pmatrix}\right] =$$

$$= \begin{pmatrix} w\,{}^tv & 0 & {}^t(-av+bu+Bu-Av) \\ 0 & -w\,{}^tv & {}^t(Bw-bw) \\ -(Bw-bw) & (av-bu-Bu+Av) & [A,B] \end{pmatrix} \varepsilon\ \mathbf{h}.$$

D'aquí que $Bw-bw=0$. Això és $Bw=bw$. Però B és antisimètrica i w és un vector espacial. Tenim doncs que o bé $w=0$ ó $b=0$ i $Bw=0$. Si es verifica $w=0$ ja hem acabat. Si es verifica $b=0$ i $Bw=0$ per a qualsevol $h\in\mathbf{h}$, també s'ha de verificar $w\cdot{}^tv=0$, ja que en cas contrari $(A_x,h)\notin\mathbf{h}$. En conseqüència,

$$\begin{pmatrix} b & 0 & -{}^tv \\ 0 & -b & 0 \\ 0 & v & B \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ w \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

i M no seria gairebé irreduïble localment, ja que el camp $(0,0,w)$ és invariant per G° i $(0,0,w)$ és espacial. S'ha de verificar doncs $w=0$.

q.e.d.

Proposició 14.

Sigui M una varietat de Lorentz gairebé irreduïble localment amb àlgebra d'holonomia $\mathbf{h}$. Anomenem $D_\circ$ la distribució paral.lela que sabem que existeix perquè M és gairebé irreduïble localment, i suposem $\mathbf{h}(D_\circ)=0$. La proposició III.12 ens garanteix l'existència local d'un camp paral.lel V_0 en la direcció $D_\circ$.

Si X és un camp de Killing, són equivalents:

i) $A_XV_0=0$

ii) $g(V_0,X)$ és constant

demostració.

Observem que $\operatorname{grad}(g(V_0,X))=A_XV_0$. Efectivament $Zg(V_0,X)=$ $=g(\nabla_ZV_0,X)+g(V_0,\nabla_ZX)=-g(V_0,A_XZ)=g(A_XV_0,Z)$.

q.e.d.

Proposició 15.

Essent M, $\mathbf{h}$, $D_\circ$, V_0, X, com en la proposició anterior, si $g(X,V_0)$ és constant i diferent de zero, aleshores existeix un camp global V, en la direcció $D_\circ$, paral.lel i, naturalment, de norma zero.

demostració.

Prenem V tal que $RV=D_\circ$ i $g(V,X)=1$. Si $p\varepsilon M$, com abans, com que $h(D_\circ)=0$ podem suposar que V_0 és un camp local paral.lel, en la direcció $D_\circ$ i definit en un entorn de p. Per hipòtesi $g(X,V_0)=k$. D'altra banda $V=fV_0$ en l'entorn de p perquè tant V com V_0 generen $D_\circ$.

Així doncs,

$$1=g(V,X)=g(fV_0,X)=fg(V_0,X)=f.k \text{ i } f \text{ és constant.}$$

En conseqüència el camp V és paral.lel.

q.e.d.

Proposició 16.

Si M és una varietat de Lorentz compacta gairebé irreduïble localment amb àlgebra d'holonomia **h**. Si V_0 és un camp global paral.lel, de norma zero, en la direcció de la distribució $D_\circ$, i X és un camp de Killing, es verifica $A_X V_0=0$.

demostració.

Ja hem vist en la demostració de la prop. 14 que grad $g(V_0,X)=A_X V_0$. Del teorema 13, $A_X V_0=aV_0$. A més a és constant. Efectivament:

$$R_{XY}(V_0)=(\nabla_Y A_X)V_0=(\nabla_Y A_X)V_0+A_X(\nabla_Y V_0)=\nabla_Y(A_X V_0)=\nabla_Y(aV_0)=$$

$$=(Ya)V_0+a\nabla_Y V_0 \text{ i } R_{XY}(V_0)=0 \text{ perquè } V_0 \text{ és paral.lel.}$$

A més, si $V_0,V_1,\dots,V_n$ designa una base on la mètrica s'escrigui,

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \mathrm{Id} \end{pmatrix}$$

es verifica $a=V_1 g(V_0,X)$.

Efectivament, com que $\operatorname{grad}(g(X,V_0))=aV_0$, $V_1 g(V_0,X)=$ $=g(V_1,aV_0)=a$.

De la compacitat de M, $g(V_0,X)$ aconsegueix un máxim (mínim) i en ell $a=V_1 g(V_0,X)=0$. Així doncs, $A_X V_0=0$.

q.e.d.

Corol.lari 17.

En les hipòtesis de l'enunciat anterior, si X és un camp de Killing, $X_p \varepsilon D_\circ^{\perp}|_p$ per algun p de M implica $X \varepsilon D_\circ^{\perp}$.

demostració.

La prop. anterior mostra $g(V_0,X)$=constant i $D_\circ^{\perp}=V_0^{\perp}$.

q.e.d.

Corol.lari 18.

En les mateixes hipòtesis $[X,V_0]=0$, ja que,

$$A_X V_0 = L_X V_0 - \nabla_X V_0 = 0 \text{ i } \nabla_X V_0 = 0.$$

q.e.d.

Exemple 19, que mostra la necessitat de la compacitat en la prop. 16.

Fem abans un petit càlcul:

Considerem $V_0=\frac{\partial}{\partial\alpha_\circ}$ paral.lel, $V_1=\frac{\partial}{\partial\alpha_1}$, $V_2,..,V_n$ una referència on la mètrica s'escrigui mitjançant la matriu,

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & Id \end{pmatrix}$$

Suposem també que $[V_0,V_i]=0$ i $i=2,...,n$.

Pretenem trobar condicions per tal que $X=\Sigma x^i V_i$ sigui de Killing en una varietat gairebé irreduïble localment.

El teorema 13 estableix que A_X tindrà per matriu:

$$(4.0) \quad \begin{pmatrix} a & 0 & -{}^t v \\ 0 & -a & 0 \\ 0 & v & A \end{pmatrix}$$

on $a\varepsilon R$, $v \varepsilon R^{n-1}$, $A\varepsilon \mathbf{o(n-1)}$.

Es verifica:

$$(4.1) \quad A_X V_0 = -\nabla_{V_0} X = -(V_0 x^i)V_i - x^i \nabla_{V_0} V_i = -(V_0 x^i)V_i.$$

$$(4.2) \quad A_X V_1 = -\nabla_{V_1} X = -((V_1 x^i)V_i + x^i \nabla_{V_1} V_i) = -(V_1 x^i + x^j \Gamma_{1j}^{\ i})V_i,$$

on $\nabla_{V_1} V_j = \Gamma_{1j}^{\ i} V_i$.

(4.3) $A_X V_j = -\nabla_{V_j} X = -((V_j x^i) V_i + x^i \nabla_{V_j} V_i) = -(V_j x^i + x^k \Gamma_{jk}^i) V_i$,
on $\nabla_{V_j} V_k = \Gamma_{jk}^i V_i$.

Comparant amb la matriu s'hauria de verificar:

(4.4) $-V_0 x^0 = a$; $V_0 x^i = 0$, on $i=1,\dots,n$

(4.5) $V_1 x^0 + x^j \Gamma_{1j}^0 = 0$; $-(\partial_1 x^1 + x^j \Gamma_{1j}^1) = -a$;
$-(V_1 x^i + x^j \Gamma_{1j}^i) = (V_i x^0 + x^k \Gamma_{ik}^0)$, on $i=2,\dots,n$

(4.6) $V_j x^1 + x^k \Gamma_{jk}^1 = 0$; $-(V_j x^i + x^k \Gamma_{jk}^i) = (V_i x^j + x^k \Gamma_{ik}^j)$,
on $i,j=2,\dots,n$.

D'aquí es conclou que:

$x^0 = -a\alpha_0 + F(\alpha_1,\dots,\alpha_n)$
$x^1 = a\alpha_1 + K$, on $K=$ctt.
$x^i = x^i(\alpha_1,\alpha_2,\dots,\alpha_n)$, on $i=2,\dots,n$.

Concretem ara les observacions anteriors en un cas tridimensional.

Prenem $\alpha_0, \alpha_1, \alpha_2$ un sistema de coordenades de R^3; $\partial_i = \frac{\partial}{\partial \alpha_i}$, $i=0,1,2$. Definim en aquest sistema una mètrica g mitjançant la matriu,

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & g \\ 0 & g & h^2 \end{pmatrix}$$

on g i h són funcions de α_1, α_2 i $h \neq 0$ arreu.

Si definim $V_0 = \partial_0$, $V_1 = \partial_1$, $V_2 = h^{-1}(-g\partial_0 + \partial_2)$, es verifica:

$$[V_0, V_1] = 0;\quad [V_0, V_2] = 0;\quad [V_1, V_2] = -\frac{\partial_1 g}{h} V_0 - \frac{\partial_2 h}{h} V_2.$$

Operant s'obté:

$$\nabla V_0 = 0;\quad \nabla V_1 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & \partial_1 g/h & \partial_1 h/h \end{pmatrix};$$

$$\nabla V_2 = \begin{pmatrix} 0 & -\partial_1 g/_h & -\partial_1 h/_h \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\text{i } R_{V_1V_2}V_1 = \left(\frac{\partial_1 \partial_1 h}{h} - \frac{\partial_2 \partial_1 g}{h^2} + \frac{\partial_1 g}{h} . \frac{\partial_2 h}{h} \right) V_2$$

Així doncs, V_0 és paral.lel i l'àlgebra d'holonomia té dimensió $\leqq 1$. Si $R_{V_1V_2}V_1 \neq 0$, l'àlgebra d'holonomia tindrà dim. 1. Vindrà generada per,

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

en la base de les V's.

Si $V = x^i V_i$,

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x^0 \\ x^1 \\ x^2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -x^2 \\ 0 \\ x^1 \end{pmatrix} \text{ i } \begin{pmatrix} 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -x^2 \\ 0 \\ x^1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -x^1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Observem que l'espai generat per V i les seves imatges té dim. 3, llevat $x^1=0$. En aquest cas, o bé té dim. 2 ($x^2 \neq 0$) i el subespai invariant que determinen $(x^0,0,x^2)$ i $(-x^2,0,0)$ és degenerat, o bé té dim. 1 i el subespai invariant que determinen també és degenerat.

Així doncs la varietat que obtinguem serà gairebé irreduïble estrictament.

Pretenem que existeixi un camp de killing X tal que $A_X V_0 \neq 0$ (vid (4.0)).

S'haurà de verificar:

$$(4.5)' \quad \partial_1 F - x^2 \frac{\partial_1 g}{h} = 0; \quad -(\partial_1 x^2 + x^1 \frac{\partial_1 g}{h}) = \frac{\partial_2 F}{h} - x^2 \frac{\partial_1 h}{h}.$$

$$(4.6)' \quad \frac{\partial_2 x^2}{h} + x^1 \frac{\partial_1 h}{h} = 0$$

Això és,

(4.7) $\partial_1 F - x^2 \frac{\partial_1 g}{h} = 0.$

(4.8) $-(\partial_1 X^2 + (a\alpha_1 + K)\frac{\partial_1 g}{h}) = \frac{\partial_2 F}{h} - x^2 \frac{\partial_1 h}{h}.$

(4.9) $\partial_2 X^2 + (a\alpha_1 + K)\partial_1 h = 0$

Ens interessem per una possible solució amb $x^2=0$. S'haurien de verificar,

(4.7)' $\partial_1 F = 0$

(4.8)' $-(a\alpha_1 + K)\frac{\partial_1 g}{h} = \frac{\partial_2 F}{h}.$

(4.9)' $(a\alpha_1 + K)\partial_1 h = 0$, i d'aquí $\partial_1 h = 0$.

Una solució d'aquestes equacions és:

$$F = G(\alpha_2), \quad g = -\frac{\partial G}{\partial \alpha_2} Ln(a\alpha_1 + K), \quad h = 1.$$

En resum, si en el semiespai de R^3 definit per $a\alpha_1 + K > 0$ hi definim la mètrica,

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & g \\ 0 & g & 1 \end{pmatrix}$$

es verifica:

. El camp $\frac{\partial}{\partial \alpha_0}$ és paral.lel. L'àlgebra d'holonomia té dimensió menor o igual a 1, però $R_{V_1 V_2} \neq 0$; per tant dim h=1.

De la proposició (I.5), aquesta varietat és gairebé irreduïble (localment). El camp $X = (-ax^0 + G)V_0 + (ax^1 + K)V_1$ és un camp de Killing i $A_X V_0 = aV_0 \neq 0$ si $a \neq 0$.

CAPITOL IV

Grups d'holonomia restringits de varietats de dimensió baixa gairebé irreduïbles localment.

Si X és un camp de Killing sobre una varietat de Lorentz M gairebé irreduïble localment, direm que X és holònom quan l'operador A_X pertany a l'àlgebra d'holonomia de M. En aquest capítol estudiarem el caràcter holònom o no holònom dels camps de killing definits en varietats de Lorentz gairebé irreduïbles localment. Hom es pot preguntar el perquè de l'estudi d'aquesta qüestió en aquest tipus de varietats. Doncs bé, B. Kostant proposà un estudi com aquest per a varietats riemannianes compactes. El resultat que demostrà fou que tot camp de killing en una varietat riemanniana compacta és holònom (K.). La pregunta següent, ben natural, per cert, pot ser: el resultat de Kostant és degut al fet que la mètrica és riemanniana, o és suficient que sigui una 2-forma no degenerada?. En concret, aquell resultat val per a varietats de Lorentz?.

Abans de res estudiem els casos més senzills. Si M és una varietat de Lorentz, irreduïble no localment simètrica de (B.1) l'àlgebra d'holonomia de M és **po**(n+1,1); de la prop. II.4.2, tot camp de Killing és holònom. En aquest cas, el caràcter compacta de M és superflu.

Un altre graó, seguint en ordre de dificultat, són les varietats gairebé irreduïbles localment. Fem-ne, doncs, l'estudi.

IV.1 Cas en el qual dim M=2.

Proposició 1. Si M és una superficie de Lorentz compacta, M és difeomorfa a un Torus o a una ampolla de Klein.

demostració.

M admet un recobriment $\tilde{M}$ que és una superficie de Lorentz orientable temporalment,(que pot ser ella mateixa o un revestiment de dues fulles); això és, existeix un camp global de norma negativa. Una superfície així ha de tenir característica d'Euler zero.

Com que el nombre de fulles del recobriment és≤ 2, s'obté $X(M)=0$.

I d'aquí el resultat.

q.e.d.

Proposició 2. Si M és una superficie de Lorentz, M és gairebé irreduïble localment o bé M és plana.

demostració.

> Remarca. El grup d'holonomia restringit G_p° és format per isometries de T_pM que conserven l'orientació i l'orientació temporal (vid: B.O'Neil, pp237/238).

Si $\tau \varepsilon G_p^\circ$ i $V_0, V_1 \varepsilon T_pM$ satisfan que la mètrica s'expressa, en la base V_0, V_1, mitjançant la matriu,

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

es verifica:

$$\tau(V_0)=aV_0+bV_1$$
$$\tau(V_1)=cV_0+dV_1$$

També $g(\tau(V_0),\tau(V_0))=0$; d'aquí que $0=g(aV_0+bV_1,aV_0+bV_1)=$ $=2ab$; $1=g(\tau(V_0),\tau(V_1))=ad+bc$ i $0=g(\tau(V_1),\tau(V_1))=2cd$.

Així doncs:

(i) $a=0$, $d=0$ i $bc=1$, ó bé

(ii) $b=0$ i $c=0$ i $ad=1$.

Si es verifiqués (i),

$\tau(V_0)\wedge\tau(V_1)=bV_1\wedge\frac{1}{b}V_0=V_1\wedge V_0=-V_0\wedge V_1$. τ canvia l'orientació.

Per tant, s'ha de verificar (ii) i tant V_0 com V_1 són direccions invariants per G_p°.

Si a=1 per a tot τ, M és plana. Si ($\exists a\neq 1$) els camps V_0, V_1 son invariants per G_p° i no hi ha subvarietats no degenerades invariants per G_p° . Si n'hi haguessin M seria plana i a=1.

q.e.d.

Teorema 3. Si M és una superfície de Lorentz compacta, aleshores, tot camp de Killing és holònom.

demostració.

$$\dim \mathbf{h}_p \leq 1.$$

Si $\dim \mathbf{h}_p=1$, $\mathbf{h}_p$ coincideix amb els endomorfismes antisimètrics de T_pM.

$A_X \varepsilon \mathbf{h}_p$ per (II.4.2)

Si $\dim \mathbf{h}_p=0$, M és plana. En aquest cas,

$$\operatorname{div} A_X X = \text{traça}(v \longmapsto \nabla_v (A_X X)) =$$

$$= \text{traça}(v \longmapsto (\nabla_v A_X)X) + \text{traça}(v \longmapsto A_X(\nabla_v X)) =$$

$$= -\text{traça}(v \longmapsto R_{Xv}X) - \text{traça}(v \longmapsto A_X \circ A_X(v)) =$$

$$= 0 - \text{traça} A_X \circ A_X .$$

Integrant sobre M s'obté traça$(A_X \circ A_X)=0$. Però la forma de Cartan-Killing és definida positiva (*) en superfícies de Lorentz. Així doncs, $A_X=0$ i X és holònom.

q.e.d

(*) Efectivament, si prenem una base V_0, V_1 de manera que la mètrica g s'expressi en aquesta base mitjançant la matriu,

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

una matriu antisimètrica és de la forma,

$$\begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & -a \end{pmatrix}$$

Es verifica,

$$\text{traça}\left(\begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & -a \end{pmatrix} \circ \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & -a \end{pmatrix}\right) = \text{traça}\begin{pmatrix} a^2 & 0 \\ 0 & a^2 \end{pmatrix} = 2a^2$$

Corol.lari 4. Si M és una superfície de Lorentz, compacta i plana, aleshores, tot camp de Killing és paral.lel.

q.e.d.

IV.2 Cas en el qual dimensió de M=3.

Del capítol III, l'àlgebra d'holonomia d'una varietat de Lorentz gairebé irreduïble localment, de dim 3 és una subàlgebra de R×R (Corol. III.8). En altres paraules, si $p\varepsilon M$ i $V_0, V_1, V_2 \varepsilon T_pM$ són tals que g s'expressi en la base V_0, V_1, V_2 mitjançant la matriu,

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

els elements de l'àlgebra d'holonomia $\mathbf{h}_p$ s'expressen en la mateixa base, mitjançant matrius de la forma

$$\begin{pmatrix} a & 0 & -c \\ 0 & -a & 0 \\ 0 & c & 0 \end{pmatrix}$$

Així doncs, dim $\mathbf{h}\leq 2$. Prenem X, camp de Killing en M.
Si dim $\mathbf{h}=2$, $\mathbf{h}$ coincideix amb tot R×R; com que $A_X \varepsilon R\times R$ (Th. III.13) $A_X \varepsilon \mathbf{h}$.
Si dim $\mathbf{h}=1$, considerem Γ el radical de la forma de Cartan-Killing definida sobre l'àlgebra d'holonomia. Diem $r=\dim\Gamma$. Distingirem dos casos:

a) r=0

Si r=0, $\Phi_{|\mathbf{h}}$ (forma de Cartan-Killing) és no degenerada. Del teorema II.9 podem descomposar $A_X=h+B$ on $h\varepsilon\mathbf{h}$ i $B\varepsilon\mathbf{h}^{\perp}$ i traça $(B,B)=0$.
B s'expressarà doncs mitjançant una matriu,

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & -b \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & b & 0 \end{pmatrix}$$

Un generador de **h** és de la forma,

$$\lambda\begin{pmatrix}1&0&0\\0&-1&0\\0&0&0\end{pmatrix}+\mu\begin{pmatrix}0&0&-1\\0&0&0\\0&1&0\end{pmatrix}$$

$\mu\neq 0$, car l'àlgebra d'holonomia no pot deixar invariant $<V_0,V_1>^{\perp}$; i $\lambda\neq 0$, car $r=0$.
Prenent V_0,V_1,V_2 adequats, podem suposar que un generador de **h** és la matriu,

$$\begin{pmatrix}1&0&-1\\0&-1&0\\0&1&0\end{pmatrix}$$

En aquest cas M no és gairebé irreduïble localment. El subespai generat per V_0+V_2 és invariant per $\mathbf{h}_p$ i en conseqüència per G_p°. Tanmateix, com que $(A_X,\mathbf{h})\subset\mathbf{h}$ (prop. II.8) s'ha de verificar:

$$\ldots\left(\begin{pmatrix}1&0&-1\\0&-1&0\\0&1&0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0&0&-b\\0&0&0\\0&b&0\end{pmatrix}\right)=\begin{pmatrix}0&0&-b\\0&0&0\\0&b&0\end{pmatrix}\in\mathbf{h}$$

i d'aquí $b=0$ i $A_X\in\mathbf{h}$.

b) r=1 i M compacta i V_0 global i paral.lel.

En aquest cas, prenent V_2 adequat, **h** ve generada per

$$\begin{pmatrix}0&0&-1\\0&0&0\\0&1&0\end{pmatrix}$$

Així doncs, $\mathbf{h}_p(V_0)=0$. Ara la prop. III.16 ens estableix $A_X\in\mathbf{h}$.
dim **h**=0 no es pot donar perquè suposem M gairebé irreduïble localment i qualsevol camp no nul seria, en aquest cas, invariant per G_p°.

En resum:

Teorema 5. Si M és una varietat de Lorentz gairebé irreduïble localment, de dim 3 i si X és un camp de Killing sobre M, es verifica:

a) dim $\mathbf{h}=2$, X és holònom

b) dim $\mathbf{h}=1$ i $r=0$, X és holònom

c) Dim $\mathbf{h}=1$, $r=1$, i M compacta i V_0 camp global paral·lel de norma zero, X és holònom.(Vid exemple III.19).

d) dim $\mathbf{h}\neq 0$, en qualsevol cas.

IV.3 Cas en qual dim M=4.

Sigui M una varietat gairebé irreduïble localment que podem suposar orientable temporalment. En cas contrari, consideraríem un recobriment (2:1) adequat. Sigui V_0 el camp construït en la pàg. 30.
Es poden distingir dos casos,

a) $\mathbf{h}(V_0)\neq 0$

b) $\mathbf{h}(V_0)=0$

a) i) Si dim $\mathbf{h}=1$.
Triant un generador adequat h de $\mathbf{h}$, podem suposar $h(V_0)=V_0$. (3.1)
Suposem V_1 com el de la pàg. 30. Això és $g(V_0,V_1)=1$; $g(V_1,V_1)=0$. Aleshores, $h(V_1)+V_1$ és ortogonal a $RV_0 \oplus RV_1$. (3.2)
Efectivament, $g(V_0,h(V_1)+V_1)=g(V_0,h(V_1))+g(V_0,V_1)=$ $=-g(h(V_0),V_1)+g(V_0,V_1)=0$ (de 3.1). A més, $h(V_1)+V_1$ verifica $g(h(V_1)+V_1,h(V_1)+V_1)>0$. $g(h(V_1)+V_1,h(V_1)+V_1)\geq 0$ perquè $h(V_1)+V_1$ és ortogonal (3,2) a un espai hiperbòlic en una varietat de Lorentz M. El producte és estrictament positiu perquè, en cas contrari, $h(V_1)\varepsilon\{V_0,V_1\}$ i el subespai $RV_0 \oplus RV_1$ seria invariant per $\mathbf{h}$ contra la hipòtesi de ser gairebé irreduïble localment.

Prenem $V_2=\dfrac{h(V_1)+V_1}{g(h(V_1)+V_1,h(V_1)+V_1)^{1/2}}$ i V_3 tal que V_3 és unitari i ortogonal a V_0,V_1,V_2. En la base V_0,V_1,V_2,V_3, h s'expressa mitjançant la matriu,

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & -a & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & a & 0 & -c \\ 0 & 0 & c & 0 \end{pmatrix}$$

on $a=g(h(V_1)+V_1,h(V_1)+V_1)^{1/2}$.

Finalment $Y=(az/_2,-(c^2+1)z/_a,z,-cz)$, és invariant per **h**. Efectivament,

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & -a & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & a & 0 & -c \\ 0 & 0 & c & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} az/_2 \\ -(c^2+1)z/_a \\ z \\ -cz \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -az/_2 \\ (c^2+1)z/_a \\ -z \\ cz \end{pmatrix}$$

Tanmateix $g(Y,Y)=0$. Però $g(V_0,Y)=-\dfrac{(c^2+1)z}{a}\neq 0$. Així doncs, el subespai $RV_0 \oplus RY$ és invariant per **h** i no degenerat; és per tant, també invariant per G°i no degenerat, contra <u>la hipòtesi de ser M gairebé irreduïble localment</u>.

Tenim, doncs, que si $\mathbf{h}(V_0)\neq 0$, dim $h\neq 1$.

<u>Observació.</u>

La proposició III.7 estableix que l'àlgebra d'holonomia és una subàlgebra de $R\times R^2\times\mathbf{o}(2)$. Una base de $R\times R^2\times\mathbf{o}(2)$ és,

$$\psi_1=\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}\quad \psi_2=\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\psi_3=\begin{pmatrix} 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}\quad \psi_4=\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

on les matrius s'han pres en una base V_0, V_1, V_2, V_3, essent V_0 i V_1 els de la pàgina 30 i V_2 i V_3 tals que, en aquesta base la matriu de g és,

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Es verifica,

$$\begin{array}{ll} (\psi_1,\psi_2)=0 & (\psi_2,\psi_3)=\psi_4 \\ (\psi_1,\psi_3)=\psi_3 & (\psi_2,\psi_4)=-\psi_3 \\ (\psi_1,\psi_4)=\psi_4 & (\psi_3,\psi_4)=0 \end{array} \qquad (3.3)$$

ii) <u>Si dim **h**=2</u>

Siguin h_1 i h_2: $Rh_1+Rh_2=$**h**. Com que **h**$(V_0)\neq 0$, podem suposar a més,

$$h_1=\psi_1+a_2\psi_2+a_3\psi_3+a_4\psi_4 \qquad (3.4)$$

$$h_2=\quad b_2\psi_2+b_3\psi_3+b_4\psi_4 \qquad (3.5)$$

De (3.3) es verifica:

$$(h_1,h_2)=(b_3-a_2b_4+a_4b_2)\psi_3+(b_4+a_2b_3-a_3b_2)\psi_4. \qquad (3.6)$$

Com que **h** és una àlgebra, hauria de ser,

$$(h_1,h_2)=\alpha_1h_1+\alpha_2h_2 \qquad (3.7)$$

De (3.6) i (3.7) s'ha de verificar $\alpha_1=0$, i

<u>1r. Cas</u>. (3.8) $(h_1,h_2)=0$, o

<u>2n. Cas</u>. (3.9) $b_2=0$ i $b_3-a_2b_4=\lambda b_3$ i $b_4+a_2b_3=\lambda b_4$.

En el 1r. cas, de (3.8),

$$b_3-a_2b_4+a_4b_2=0$$

$$b_4+a_2b_3-a_3b_2=0$$, consegüentment,

$$(3.10) \qquad b_3=a_2b_4-a_4b_2$$

$$b_4+a_2^2b_4-a_2a_4b_2-a_3b_2=0 \text{ i } b_4=\frac{(a_2a_4+a_3)b_2}{1+a_2^2} \qquad (3.11)$$

Com que $b_2\neq 0$, podem suposar $b_2=1$.

En el primer cas, doncs, l'àlgebra d'holonomia **h** és gene rada per,

$$\psi_1+a_2\psi_2+a_3\psi_3+a_4\psi_4 \quad \text{i} \quad \psi_2+\frac{a_2a_3-a_4}{1+a_2^2}\psi_3+\frac{a_2a_4+a_3}{1+a_2^2}\psi_4.$$

Observem que en aquest cas la forma de Cartan-Killing és no degenerada en **h**.

En el segon cas, de (3.9),

$$(3.12) \qquad -a_2b_4=(\lambda-1)b_3$$

$$(3.13) \qquad a_2b_3=(\lambda-1)b_4$$

Multiplicant (3.12)×(3.13) obtenim,

$$(3.14) \qquad -a_2^2b_3b_4=(\lambda-1)^2b_3b_4.$$

De (3.9) $b_2=0$, de (3.12,13 i 14) i de ser dim **h**=2, s'ha de verificar $a_2=0$ i $\lambda=1$. (3.15)

Podem suposar, per tant, que l'àlgebra d'holonomia és generada per,

$$\psi_1+a_3\psi_3+a_4\psi_4 \quad \text{i} \quad b_3\psi_3+b_4\psi_4 \text{ amb } b_3^2+b_4^2=1.$$

Observem que en aquest cas el radical de la forma de Cartan-Killing restringida a **h** té dim 1.

Si X designa un camp de Killing, <u>en el primer cas</u>, pel teor. II.9, es verifica $A_X=h+B$ amb $h\in$**h** i B tal que traça $(B\circ B)$=traça$(B\circ h_1)$=traça$(B\circ h_2)=0$. Així doncs, B s'expressa matricialment per,

$$\begin{pmatrix} d_1 & 0 & -d_2 & -d_3 \\ 0 & -d_1 & 0 & 0 \\ 0 & d_2 & 0 & -d_1 \\ 0 & d_3 & d_1 & 0 \end{pmatrix}$$

Ara bé, de ser traça$(B\circ h_1)=2d_1(1-a_2)$ i traça$(B\circ h_2)=-2d_1$ deduïm $d_1=0$ (3.16).

D'altra banda, $[B,h_1]\subset$**h** (prop. II.8). Però $[B,h_1]=(-d_2+a_2d_3)\psi_3+(-d_3-a_2d_2)\psi_4$. D'aquí que $-d_2+a_2d_3=0$ i $-d_3-a_2d_2=0$. Això és (3.17) $d_2=a_2d_3$ i $-d_3=a_2d_2$. Això comporta $d_2(1+a_2^2)=0$, que només es verifica si (3.18) $d_2=0$. De (3.17,18) $d_3=0$ (3.19). Així doncs, $B=0$ (3.16, 18,19) i $A_X \varepsilon \mathbf{h}$.

En el segon cas, fent un canvi de referència, prenent $V_0, V_1, \frac{1}{(a_3^2+a_4^2)^{1/2}}(a_3V_2+a_4V_3), \frac{1}{(a_3^2+a_4^2)^{1/2}}(a_4V_2-a_3V_3)$ podem escriure,

$$h_1=\begin{pmatrix} 1 & 0 & -a & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & a & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad h_2=\begin{pmatrix} 0 & 0 & -b & -c \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & b & 0 & 0 \\ 0 & c & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

essent $a=(a_3^2+a_4^2)^{1/2}$ i $b^2+c^2=1$ (3.20).

Podem escriure $A_X=x_1\psi_1+x_2\psi_2+x_3\psi_3+x_4\psi_4$ (ψ_i com abans però en la nova base).

De la (prop. II.8),

$$[A_X,h_1]\varepsilon\mathbf{h} \quad \text{i} \quad [A_X,h_2]\varepsilon\mathbf{h}.$$

Però,

(3.21) $[A_X,h_1]=(x_1a-x_3)\psi_3+(x_2a-x_4)\psi_4$, i

(3.22) $[A_X,h_2]=(x_1b-x_2c)\psi_3+(x_1c+x_2b)\psi_4$

Aleshores ha de passar,

(3.23) $x_1a-x_3=\lambda b$

(3.24) $x_2a-x_4=\lambda c$

(3.25) $x_1b-x_2c=\mu b$,

(3.26) $x_1c+x_2b=\mu c$, fent (3.25).b+(3.26).c s'bté

(3.27) $x_1(b^2+c^2)=\mu(b^2+c^2)$

i de (3.20) $x_1=\mu$.

I de (3.25) i (3.26) $x_2=0$ (3.28)

Hem obtingut,

$$A_X=x_1\psi_1+x_3\psi_3+x_4\psi_4=x_1h_1-\lambda h_2$$

(3.23) i (3.24)

En concret $A_X\varepsilon\mathbf{h}$.

iii) Si dim $\mathbf{h}=3$

Considerem $h_1=\psi_1+a_2\psi_2+a_3\psi_3+a_4\psi_4$, $h_2=b_2\psi_2+b_3\psi_1+b_4\psi_4$, i $h_3=c_2\psi_2+c_3\psi_3+c_4\psi_4$ generadors de **h**. Podem suposar $c_2=0$ perquè si $b_2\neq 0$, podem suposar $b_2=1$ i $h_3'=h_3-c_2h_2$; si $b_2=0$ canviem els papers de h_2 i h_3.

Aleshores,

$$(h_2,h_3)=b_2c_3\psi_4-b_2c_4\psi_3\varepsilon\mathbf{h}.$$ Ha de ser per tant,

(3.29) $b_2=0$, o

(3.30) $-c_4\psi_3+c_3\psi_4=\frac{\lambda}{b_2}(c_3\psi_3+c_4\psi_4)$, i d'aquí

(3.31) $c_3=\frac{\lambda c_4}{b^2_2}$; $c_4=-\frac{\lambda c_3}{b^2}$. El qual comporta,

(3.32) $c_3=-\frac{\lambda^2}{b_2^2}c_3$. Absurd llevat que $c_3=0$ i $c_4=0$.

Ha de ser, per tant, (3.29) $b_2=0$. Com que h_2 i h_3 són linealment independents i generen $<\psi_3,\psi_4>$, podem triar una base de **h** de la forma,

$$h_1=\psi_1+a_2\psi_2, \quad h_2=\psi_3 \quad \text{i} \quad h_3=\psi_4.$$

Es distingeixen dos casos:

1r. Cas. $a_2=1$. En aquest cas el radical de la forma de Cartan-Killing restringida a l'àlgebra d'holonomia, coincideix amb l'àlgebra d'holonomia.

2n. Cas. $a_2\neq 1$. La dimensió del radical en qüestió és 2 i la de l'àlgebra 3.

Mostrarem en el present capítol un exemple de varietat compacta d'aquest tipus, amb un camp de Killing X no holònom.

iv) Si dim $\mathbf{h}=4$.

De la (prop. III.7), $\mathbf{h}=R\times R^2\times\mathbf{o}(2)$, i del (teo. III.13), tot camp de Killing és holònom.

En resum,

Teorema 6. Si M és una varietat de Lorentz gairebé irreduïble localment, de dim 4, i si V_0 és un camp de norma zero, de manera que, la direcció V_0 és paral.lela i s'obté tal com hem indicat en la pàg. 30. Si $\mathbf{h}(V_0)\neq 0$ es verifica,

i) $2\leq \dim \mathbf{h} \leq 4$

ii) Si X és un camp de Killing i dim $\mathbf{h}\neq 3$, $A_X \in \mathbf{h}$. Per al cas de dim 3, vid exemple 8 de la pàg.59.

q.e.d.

Recordem que de la pàg. 50 quedava per estudiar l'apartat b).

Ens limitarem a estudiar un subapartat en el qual suposarem també l'existència d'un camp global paral.lel en la direcció V_0.

De la (prop. III.12) **h** és una subàlgebra de $R^2 \times \mathbf{o}(2)$.

Això és, en una referència com en la utilitzada en (a), l'àlgebra d'holonomia és una subàlgebra de $R\psi_2 \oplus R\psi_3 \oplus R\psi_4$.

Si r designa la dimensió del radical de la forma de Cartan-Killing, es verifica $0\leq r\leq 2$.

Distingirem diferents casos en funció de r.

1) r=0.

En aquest cas, dim **h**=1 i **h** és generada per un element de la forma,

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & -b_1 & -b_2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & b_1 & 0 & -b \\ 0 & b_2 & b & 0 \end{pmatrix}$$

Fent un canvi de referència, $V'_0=V_0$; $V'_1=\frac{b_1^2+b_2^2}{b^2}V_0+V_1-\frac{b_2}{b}V_2-\frac{b_1}{b}V_3$; $V'_2=\frac{b_2}{b}V_0+V_2$; $V'_3=\frac{b_3}{b}V_0+V_3$, el generador de **h** s'expressa,

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -b \\ 0 & 0 & b & 0 \end{pmatrix}$$

Fet que ens mostra que **h** deixa invariant el subespai generat per V_0', V_1', no degenerat. La varietat, doncs, no és gairebé irreduïble localment.

Remarca. Tanmateix, si X és un camp de Killing, i la varietat és compacta, $A_X \varepsilon$ **h**. De III.13 i III.16, A_X s'expressa mitjançant una matriu de la forma,

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & -e_1 & -e_2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & e_1 & 0 & -d \\ 0 & e_2 & d & 0 \end{pmatrix}$$

i de la prop. II.8 $(A_X, h) \varepsilon$ **h**.

Operant,

$$(A_X, h) = \left[\begin{pmatrix} 0 & 0 & -e_1 & -e_2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & e_1 & 0 & -d \\ 0 & e_2 & d & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -b \\ 0 & 0 & b & 0 \end{pmatrix} \right] =$$

$$= \begin{pmatrix} 0 & 0 & -be_2 & be_1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & be_2 & 0 & 0 \\ 0 & -be_1 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

que hauria de pertànyer a **h**. Així doncs, $b(-e_2, e_1) = (0,0)$. Això és $e_2 = e_1 = 0$ i $A_X \varepsilon$ **h**.

2) <u>r=1</u>.

i) <u>dim **h**=1</u>.

Si ψ és un generador de **h**, prenent com a referència $V_0, V_1, \psi(V_1), V_3$ de manera que V_3 sigui unitari i ortogonal als altres, la matriu de ψ és,

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

La qual cosa mostra que V_3 és invariant per **h** i com que és un vector espacial, el subespai que genera és no degenerat. D'aquí que la varietat no sigui gairebé irreduïble localment.

ii) <u>dim **h**=2</u>

Aquest fet no és possible. Suposem h_1, h_2 generadors de **h**. h_1 del radical, aleshores,

$$h_1 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -a_1 & -a_2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & a_1 & 0 & 0 \\ 0 & a_2 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

D'altra banda traça$(h_2 \circ h_2) = b^2 \neq 0$, per tal que r=1,

$$(h_1, h_2) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & ba_2 & -ba_1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -ba_2 & 0 & 0 \\ 0 & ba_1 & 0 & 0 \end{pmatrix} ;$$

com que (a_1, a_2) i $(-a_2, a_1)$ són linealment independents, també ho són h_1, h_2 i (h_1, h_2) contra la hipòtesi dim **h**=2.

3) <u>r=2</u>.

i) <u>dim h=3</u>.

Si M és compacta, $\mathbf{h}=R^2\times o(2)$ (prop. III.12), i si X és un camp de Killing, $A_X\varepsilon\mathbf{h}$ (III.13 i III.16).

ii) <u>dim h=2</u>.

En aquest cas, l'àlgebra d'holonomia ve generada per ψ_3 i ψ_4.

Mes endavant veurem un exemple d'una varietat compacta de Lorentz, amb dim $\mathbf{h}=r=2$ i amb un camp de Killing global no holònom ($A_X\not\varepsilon\mathbf{h}$).

En resum:

<u>Teorema 7</u>. Si M és una varietat de Lorentz gairebé irreduïble localment, de dim 4 i si V_0 és el camp de la pàg. 30 i si $h(V_0)=0$ per qualsevol $h\varepsilon\mathbf{h}$, aleshores respecte de **h** tenim.

i) dim $\mathbf{h}=3$ i $r=2$, o bé, dim $\mathbf{h}=2$ i $r=2$.

ii) Si X és un camp de Killing i M és compacta i dim $\mathbf{h}=3$, aleshores $A_x\varepsilon\mathbf{h}$.

q.e.d.

<u>Exemple 8</u>.

Considerem la circumferència S^1 submergida en el pla R^2. Designem per $U_1=S^1-\{(1,0)\}$; $U_2=S^1-\{(-1,0)\}$. $U_{12}^+=\{(x,y)\varepsilon S^1:y>0\}$; $U_{12}^-=\{(x,y)\varepsilon S^1:y<0\}$. Observem que $U_1\cap U_2$ consta de dues components connexes, U_{12}^+ i U_{12}^-. Definim M, el fibrat sobre S^1 determinat per,

1. Els U_i $i=1,2$ són oberts trivialitzants.
2. La fibra és $S^1\times S^1\times S^1$
3. Si $\alpha_0,\alpha_1,\alpha_2$ designen coordenades angulars habituals sobre $S^1\times S^1\times S^1$, les funcions de transició vénen donades pel diagrama,

$$\begin{tikzcd}
S^1\times S^1\times S^1\times U_1 & S^1\times S^1\times S^1\times(U_{12}^+\cup U_{12}^-) \arrow[l] \arrow[rr] & & S^1\times S^1\times S^1\times(U_{12}^+\cup U_{12}^-) \arrow[r] & S^1\times S^1\times S^1\times U_2 \\
 & (\alpha_0,\alpha_1,\alpha_2,z) \arrow[rr] & & (\alpha_1\mp\alpha_2,\alpha_1,\alpha_2,z) & \\
 & & U_{12}^+\cup U_{12}^- \arrow[ul, dash] \arrow[ur, dash] & &
\end{tikzcd}$$

Això és,

$$\begin{aligned}
U_{12}^+\cup U_{12}^- &\longrightarrow \mathrm{Aut}(S^1\times S^1\times S^1)\\
z &\longmapsto \phi_z : S^1\times S^1\times S^1 \longrightarrow S^1\times S^1\times S^1\\
&\qquad (\alpha_0,\alpha_1,\alpha_2)\longmapsto(\alpha_1-\alpha_2,\alpha_1,\alpha_2),\ \text{si } z\varepsilon U_{12}^+\\
z &\longmapsto \psi_z : S^1\times S^1\times S^1 \longrightarrow S^1\times S^1\times S^1\\
&\qquad (\alpha_0,\alpha_1,\alpha_2)\longmapsto(\alpha_0+\alpha_2,\alpha_1,\alpha_2),\ \text{si } z\varepsilon U_{12}^-
\end{aligned}$$

Si π designa la projecció $\pi:M\longrightarrow S^1$, considerem $\pi^{-1}(U_1)$ amb les coordenades $\alpha_0,\alpha_1,\alpha_2$ ja esmentades i $\begin{aligned} t_3:(0,1)&\longrightarrow U_1.\\ t_3&\longmapsto e^{2\pi i t_3}\end{aligned}$

En la base $\partial_i=\frac{\partial}{\partial\alpha_i}$ $i=0,\dots,2$, $\partial_3=\frac{\partial}{\partial t_3}$, definim sobre $\pi^{-1}(U_1)$ una mètrica mitjançant la matriu,

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0\\ 1 & h & 2t_3 & 0\\ 0 & 2t_3 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 1\end{pmatrix}$$

essent h una funció real diferenciable que depèn de α_0,α_2 i t_3.

La mètrica així definida és de Lorentz.

Efectivament, en la base

$-\frac{1+h}{2}\partial_0+\partial_1,\frac{1-h}{2}\partial_0+\partial_1,-2t_3\partial_0+\partial_2,\partial_3$ la mètrica anterior té per matriu,

$$\begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 1\end{pmatrix}$$

Sobre $\pi^{-1}(U_2)$, obert de M, hi considerarem un sistema de coordenades $\alpha_0',\alpha_1',\alpha_2',t_3'$, on $\alpha_0',\alpha_1',\alpha_2'$ són, com abans, coordenades angulars sobre $S^1\times S^1\times S^1$ i $t_3':(0,1)\longrightarrow U_2$

$$t_3'\longmapsto e^{2\pi i(t_3'+1/2)}.$$

Si $\partial_0',\partial_1',\partial_2',\partial_3'$, designen les parcials respecte de $\alpha_0',\alpha_1',\alpha_2',t_3'$, definim en aquesta base una mètrica a $\pi^{-1}(U_2)$ mitjançant la matriu,

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & h' & 2t_3' & 0 \\ 0 & 2t_3' & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

essent h' una funció real que depèn de α_0',α_2',t_3' . En la intersecció dels oberts de coordenades es verifica,

$$\begin{tikzcd}[column sep=small] & \begin{array}{c} S^1\times S^1\times S^1\times U_{12} \\ \parallel \\ (S^1\times S^1\times S^1\times U_{12}^+)\cup(S^1\times S^1\times S^1\times U_{12}^-) \end{array} \arrow[dl] \arrow[dr] \arrow[d, phantom, "{(x,y,z,t)}"] & \\ S^1\times S^1\times S^1\times U_1 & \, & S^1\times S^1\times S^1\times U_2 \\ (\alpha_0,\alpha_1,\alpha_2,e^{2\pi i t_3}) & & (\alpha_0',\alpha_1',\alpha_2',e^{2\pi i(t_3'+1/2)}) \end{tikzcd}$$

De la definició del fibrat:

$\alpha_0'=\alpha_0-\alpha_2$ si $t\in U_{12}^+$ (resp. $\alpha_0+\alpha_2$ si $t\in U_{12}^-$)

$\alpha_1'=\alpha_1$

$\alpha_2'=\alpha_2$

$e^{2\pi i t_3}=e^{2\pi i(t_3'+1/2)}$. Es doncs, $t_3'+1/2=t+k$, $k\in Z$.

De les definicions de t_3 i t_3', en U_{12}^+, $t_3\in(0,1/2)$ i $t_3'\in(1/2,1)$. En U_{12}^-, $t_3\in(1/2,1)$ i $t_3'\in(0,1/2)$.

D'aquí que,

$t'_3=t_3+1/2$ si $t\varepsilon U^+_{12}$ (resp. $t'_3=t_3-1/2$ si $t\varepsilon U^-_{12}$).

Es verifica per tant,

(3.33)
$$\begin{aligned}\alpha'_0&=\alpha_0-\alpha_2\\ \alpha'_1&=\alpha_1\\ \alpha'_2&=\alpha_2\\ t'_3&=t_3+1/2\end{aligned}$$

on els primes pertanyen a $\pi^{-1}(U_2)$ i els no primes a $\pi^{-1}(U_1)$; tant uns com els altres designen un punt de $\pi^{-1}(U^+_{12})$. També es verifica,

(3.34)
$$\begin{aligned}\alpha'_0&=\alpha_0+\alpha_2\\ \alpha'_1&=\alpha_1\\ \alpha'_2&=\alpha_2\\ t'_3&=t_3-1/2\end{aligned}$$

on els primes pertanyen a $\pi^{-1}(U_2)$ i els no primes a $\pi^{-1}(U_1)$; tant uns com els altres designen un punt de $\pi^{-1}(U^-_{12})$.

Aquestes aplicacions són contínues perquè $\pi^{-1}(U^+_{12})$ i $\pi^{-1}(U^-_{12})$ són les components connexes de $\pi^{-1}(U_{12})$.

De (3.33)

$$\begin{aligned}\partial\alpha_0&=\partial\alpha'_0\\ \partial\alpha_1&=\partial\alpha'_1\\ \partial\alpha_2&=-\partial\alpha'_0+\partial\alpha'_2\\ \partial t_3&=\partial t'_3\end{aligned}$$

i de (3.34)

$$\begin{aligned}\partial\alpha_0&=\partial\alpha'_0\\ \partial\alpha_1&=\partial\alpha'_1\\ \partial\alpha_2&=\partial\alpha'_0+\partial\alpha'_2\\ \partial t_3&=\partial t'_3\end{aligned}$$

Finalment definim h de manera que $\lim_{t_3\to 0} h=\lim_{t_3\to 1} h=0$, i les successives derivades de h satisfacin la mateixa condició.

Definim h' per $h'|_{\pi^{-1}(U_{12})}=h|_{\pi^{-1}(U_{12})}$ i $h'|_{\pi^{-1}((1,0))}=0$

La continuïtat de h' prové de la condició de límit imposada a h.

En resum, hem mostrat M mitjançant dos oberts W_1 i W_2, i en cadascun d'ells i en un sistema de coordenades apropiat $(\alpha_0,\alpha_1,\alpha_2,t_3)$ hi podem definir una mètrica de Lorentz per la matriu,

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & h & 2t_3 & 0 \\ 0 & 2t_3 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad \text{(resp. amb primes)}$$

Per tal que aquesta mètrica sigui ben definida a tot M ens cal comprovar que si Y',Z' s'identifiquen respectivament amb Y,Z, aleshores g(Y',Z')=g(Y,Z).

Efectivament,

$$0 = g(\partial\alpha_0,\partial\alpha_0)=g(\partial\alpha'_0,\partial\alpha'_0)=0$$
$$1 = g(\partial\alpha_0,\partial\alpha_1)=g(\partial\alpha'_0,\partial\alpha'_1)=1$$
$$0 = g(\partial\alpha_0,\partial\alpha_2)=g(\partial\alpha'_0,\mp\partial\alpha'_0+\partial\alpha'_2)=g(\partial\alpha'_0,\mp\partial\alpha'_0)+g(\partial\alpha'_0,\partial\alpha'_2)=0$$
$$0 = g(\partial\alpha_0,\partial\alpha_3)=g(\partial\alpha'_0,\partial\alpha'_3)=0$$
$$h = g(\partial\alpha_1,\partial\alpha_1)=g(\partial\alpha'_1,\partial\alpha'_1)=h; \text{ de la definició de } h \text{ i } h'$$
$$2t_3= g(\partial\alpha_1,\partial\alpha_2)=g(\partial\alpha'_1,\mp\partial\alpha'_0+\partial\alpha'_2)=\mp 1+2t'_3=\mp 1+2(t_3\pm 1/2)=2t_3$$
$$0 = g(\partial\alpha_1,\partial\alpha_3)=g(\partial\alpha'_1,\partial\alpha'_3)=0$$
$$1 = g(\partial\alpha_2,\partial\alpha_2)=g(\partial\alpha'_2\mp\partial\alpha'_0,\partial\alpha'_2\mp \partial\alpha'_0)=g(\partial\alpha'_2,\partial\alpha'_2)\mp 2g(\partial\alpha'_2,\partial\alpha'_0)$$
$$g(\partial\alpha'_0,\partial\alpha'_0)=1$$
$$0 = g(\partial\alpha_2,\partial\alpha_3)=g(\mp\partial\alpha'_0+\partial\alpha'_2,\partial\alpha'_3)=g(\mp\partial\alpha'_0,\partial\alpha'_3)+g(\partial\alpha'_2,\partial\alpha'_3)=0$$
$$1 = g(\partial\alpha_3,\partial\alpha_3)=g(\partial\alpha'_3,\partial\alpha'_3)=1$$

Tenim, doncs, (M,g) una varietat de Lorentz, compacta i de dim 4.

Fent uns quants càlculs s'obté,

(3.36)

$$g^{ij}=\begin{pmatrix} 4t_3^2-h & 1 & -2t_3 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ -2t_3 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

(3.37)

$$\nabla\partial\alpha_0=\begin{pmatrix} 0 & \partial_0 h/2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

(3.38)

$$\nabla\partial\alpha_1=\begin{pmatrix} \partial_0 h/2 & (-4t_3^2+h)\frac{\partial_0 h}{2}+t_3\partial_2 h & \partial_2 h/2 & \partial_3 h/2-2t_3 \\ 0 & -\partial_0 h/2 & 0 & 0 \\ 0 & t_3\partial_0 h-\partial_2 h/2 & 0 & 1 \\ 0 & -\partial_3 h/2 & -1 & 0 \end{pmatrix}$$

(3.39)

$$\nabla\partial\alpha_2=\begin{pmatrix} 0 & \partial_2 h/2 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

(3.40)

$$\nabla\partial t_3=\begin{pmatrix} 0 & \partial_3 h/2-2t_3 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Respectivament amb primes.

Observi's que $\partial\alpha_1$ $(\partial\alpha_1')$ és un camp de killing global perquè $\partial_1 g_{ij}=0$ (resp. $\partial_1' g_{ij}'=0$).
Si hom continua realitzant càlculs obté:

(3.41)

$$R_{\partial\alpha_0\partial\alpha_1}=\begin{pmatrix} \frac{\partial_0\partial_0 h}{2} & (-4t_3^2+h)\frac{\partial_0\partial_0 h}{2}+t_3\partial_0\partial_2 h & \frac{\partial_0\partial_2 h}{2} & \frac{\partial_0\partial_3 h}{2} \\ 0 & -\frac{\partial_0\partial_0 h}{2} & 0 & 0 \\ 0 & t_3\partial_0\partial_0 h-\frac{\partial_0\partial_2 h}{2} & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{\partial_0\partial_3 h}{2} & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

(3.42)

$$R_{\partial\alpha_0\partial\alpha_2}\equiv 0$$

(3.43)

$$R_{\partial\alpha_0\partial t_3}\equiv 0$$

(3.44)

$$R_{\partial\alpha_1\partial\alpha_2}=\begin{pmatrix} -\frac{\partial_2\partial_0 h}{2} & (4t_3^2-h)\frac{\partial_2\partial_0 h}{2}-t_3\partial_2\partial_2 h-2t_3 & 1-\frac{\partial_2\partial_2 h}{2} & \frac{\partial_0 h}{2}-\frac{\partial_2\partial_3 h}{2} \\ 0 & \frac{\partial_2\partial_0 h}{2} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{\partial_2\partial_2 h}{2}-t_3\partial_2\partial_0 h-1 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{\partial_2\partial_3 h}{2}-\frac{\partial_0 h}{2} & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

(3.45)

$$R_{\partial\alpha_2\partial t_3}\equiv 0$$

(3.46)

$$R_{\partial\alpha_1\partial t_3}=\begin{pmatrix} -\frac{\partial_3\partial_0 h}{2} & (4t_3^2-h)\frac{\partial_3\partial_0 h}{2}-t_3\partial_3\partial_2 h+t_3\partial_0 h & \frac{\partial_0 h-\partial_3\partial_2 h}{2} & 1-\frac{\partial_3\partial_3 h}{2} \\ 0 & \frac{\partial_3\partial_0 h}{2} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{\partial_3\partial_2 h}{2}-\frac{\partial_0 h}{2}-t_3\partial_3\partial_0 h & 0 & 0 \\ 0 & \frac{\partial_3\partial_3 h}{2}-1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

En la base V_0, V_1, V_2, V_3 (resp. V'), on la mètrica s'expressa segons la matriu,

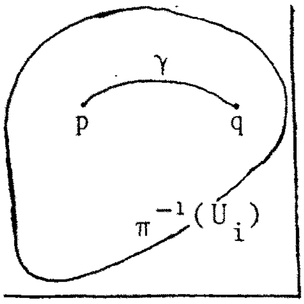
$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & h & 2t_3 & 0 \\ 0 & 2t_3 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

els endomorfismes antisimètrics que deixen invariant V_0 tenen matriu de la forma,

$$\begin{pmatrix} a & -a(4t_3^2-h)-2t_3b & -b & -c \\ 0 & -a & 0 & 0 \\ 0 & 2t_3a+b & 0 & -d \\ 0 & 2t_3d+c & d & 0 \end{pmatrix}$$

En conseqüència la dimensió de l'àlgebra d'holonomia **h** és menor o igual que quatre i les components (a,b,c,d), en designen un element qualsevol.

De (3.41),...,(3.46) les transformacions de curvatura generen una subàlgebra continguda en l'hiperplà d=0. Per calcular l'àlgebra d'holonomia **h**, prenem un punt p de $\pi^{-1}(U_1) \cap \pi^{-1}(U_2)$. Sabem (teor. I.4) que l'àlgebra d'holonomia és generada per les transformacions de curvatura en p i per les transformacions de curvatura en qualsevol altre punt, portades a p per transport paral.lel. Donat un altre punt q, podem suposar $p,q \varepsilon \pi^{-1}(U_i)$ i=1 o 2, i γ camí que uneix p amb q, també contingut en $\pi^{-1}(U_i)$.



Dels símbols de Cristoffel (3.37),...,(3.40), existeixen funcions f, f_1, f_2, f_3 amb condicions inicials $f(0)=1$, $f_2(0)=1$, $f_1(0)=f_3(0)=0$, tals que els camps $f(t).\partial_0$ i $f_1(t).\partial_0+f_2(t).\partial_2+f_3(t).\partial_3$ són paral.lels al llarg de γ.

D'aquí i dels càlculs (3,41),...,(3.46) s'obté,

$$(\tau^{-1}R_{XY}\tau)\partial_0=\lambda\partial_0$$
$$(\tau^{-1}R_{XY}\tau)\partial_2=\mu\partial_0$$

Així doncs l'àlgebra d'holonomia **h** també és continguda en la subàlgebra (hiperplà) d=0. Té doncs, dim **h**$\leq$3. D'altra banda, per h genèrica les transformacions de curvatura (3.41), (3.44) i (3.46) són linealment independents. En conseqüència la dimensió de l'àlgebra d'holonomia per h genèrica és 3 i en són generadors,

$$h_1=\begin{pmatrix} 1 & -(4t_3^2-h) & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 2t_3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad h_2=\begin{pmatrix} 0 & -2t_3 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad \text{i}$$

$$h_3=\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Observi's que h_1, h_2, h_3 i A_{∂_1} són linealment independents.

<u>Resumint doncs</u>,

(M,g) que hem definit és una varietat de Lorentz, compacta, de dim 4, gairebé irreduïble localment; efectivament, el camp V_0 és invariant per l'acció de l'àlgebra d'holonomia i el subespai que genera és degenerat; a, més, no hi ha cap altre vector propi per h_1, h_2 i h_3; i, per acabar, qualsevol vector de $V_0^{\perp}$ conté V_0 en el subespai invariant que genera. La proposició (I.5) demostra que (M,g) és gairebé irreduïble.

Finalment, el camp ∂_1 és de Killing i és global i l'operador A_{∂_1} no pertany a l'àlgebra d'holonomia, ni satisfà la tesi del teorema feble (teor. II.9).

Exemple 9.

Si en l'exemple anterior (ex. 8) fem $h\equiv 0$ s'obté una varietat compacta, de Lorentz, de dim 4 que es pot recobrir amb dos oberts U_1 i U_2. A cadascun d'ells i en la base $\partial\alpha_0, \partial\alpha_1, \partial\alpha_2, \partial t_3$, la mètrica s'expressa mitjançant la matriu,

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 2t_3 & 0 \\ 0 & 2t_3 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Els símbols de Cristoffel en un dels oberts (en l'altre és igual però amb primes) vénen donats per les matrius,

$$\nabla\partial_0 \equiv 0$$

$$\nabla\partial_1 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & -2t_3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\nabla\partial_2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\nabla\partial_3 = \begin{pmatrix} 0 & -2t_3 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

∂_0, ∂_1 determinen camps globals. S'estenen a ∂_0', ∂_1', respectivament. ∂_0 és paral.lel. ∂_1 Killing. L'àlgebra d'ho lonomia és generada per les transformacions de curvatura i pels transports paral.lels de les transformacions de curvatura.

Com que les transformacions de curvatura vénen donades per,

(3.46)

$$R_{\partial_0\partial_i} \equiv 0$$

(3.47)

$$R_{\partial_1\partial_2} = \begin{pmatrix} 0 & -2t_3 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

(3.48)

$$R_{\partial_1\partial_3} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

(3.49)

$$R_{\partial_2\partial_3} \equiv 0$$

i com el camp ∂_0 és paral.lel, l'àlgebra d'holonomia vé generada per,

$$\begin{pmatrix} 0 & 2t_3 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \text{ i } \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Efectivament,

El Teorema I.4 estableix que l'àlgebra d'holonomia **h** és generada per les transformacions de curvatura R_{XY} i pels seus transportats $\tau_\gamma^{-1}\circ(R_{\tau X\tau Y})\circ\tau_\gamma$, $X,Y\in T_{\gamma(0)}M$. Per la proposició III.12, l'àlgebra d'holonomia $\mathbf{h}\subset R^2\times\mathbf{o}(2)$. (3.46),..., (3.49) mostren que les transformacions de curvatura en qualsevol punt són contingudes en el radical de la forma de Cartan-Killing restringida a $R^2\times\mathbf{o}(2)$; radical que es conserva per transport paral.lel. Això és:

Si $\tau_\gamma B$ designa $\tau_\gamma\circ(B\circ\tau_\gamma^{-1})$, $(\tau_\gamma B)(X)=\tau_\gamma(B(\tau_\gamma^{-1}X))$, $X\epsilon T_{\gamma(1)}M$.

Si E_i és base ortogonal i unitària i $g(E_i,E_i)=\varepsilon_i$, tenim,

$$\begin{aligned}\text{traça}(\tau_\gamma B\circ\tau_\gamma C)&=\Sigma\varepsilon_i<(\tau_\gamma B\circ\tau_\gamma C)(E_i),E_i>=\\&=\Sigma\varepsilon_i<\tau_\gamma(B(\tau_\gamma^{-1}(\tau_\gamma(C(\tau_\gamma^{-1}(E_i)))))),E_i>=\\&=\Sigma\varepsilon_i<(B\circ C)(\tau_\gamma^{-1}E_i),\tau_\gamma^{-1}E_i>=\text{traça}(B\circ C).\end{aligned}$$

Així doncs, dim $\mathbf{h}\leqq 2$. D'altra banda dim $\mathbf{h}\geqq 2$, perquè (3.47) i (3.48) són independents. Per tant, dim $\mathbf{h}=2$ i $\mathbf{h}$ és generada per $R_{\partial_1\partial_2}$ i $R_{\partial_1\partial_3}$.

D'altra banda l'operador A_{∂_1} verifica traça$(A_{\partial_1}\circ A_{\partial_1})\neq 0$. Tenim, doncs, $A_{\partial_1}\notin\mathbf{h}$.

Hem obtingut, per tant, una varietat de dim 4, compacta, de Lorentz, gairebé irreduïble localment i un camp de Killing ∂_1 de manera que l'operador A_{∂_1} no descomposa com a suma d'un element de $\mathbf{h}$ i B tal que traça$(B\circ B)=0$. Aquesta varietat és del tipus (3.ii)) de la pàg. 59.

Èxemple 10.

Aquest exemple és el que ens va inspirar a construir els anteriors. Topològicament és $S^1\times S^3\longrightarrow S^1\times S^1$, essent $S^3\longrightarrow S^1$ fibrat de Hopf.

Aquí ens limitarem a estudiar l'estructura mètrica amb què dotarem $S^1\times S^3$.

Prenem dues còpies de $S^1\times S^1\times R^2$, amb coordenades respectives (θ,μ,a,b); essent θ i μ coordenades angulars de S^1 i a,b coordenades cartesianes de R^2 (resp. θ',μ',a',b'). A cadascuna d'elles hi considerem l'obert $S^1\times S^1\times R^2-\{(0,0)\}$, i sigui ψ el morfisme,

$$S^1\times S^1\times R^2-\{(0,0)\}\xrightarrow{\psi}S^1\times S^1\times R^2-\{(0,0)\}$$

$(\theta,\mu,a,b)\longrightarrow\theta'$ serà la coordenada angular corresponent a:

$$\frac{1}{\sqrt{a^2+b^2}}(b\text{Cos}\theta+a\text{Sin}\theta,b\text{Sin}\theta-a\text{Cos}\theta).$$

$$\mu'=\mu$$
$$a'=\frac{-a}{a^2+b^2}$$
$$b'=\frac{b}{a^2+b^2}$$

Considerem $M=\frac{(S^1\times S^1\times R^2)\dot{\cup}(S^1\times S^1\times R^2)}{\sim\psi}$. Topològicament $M\cong S^1\times S^3$. (Vid la construcció del fibrat de Hopf. La S^1 del producte prové de la coordenada μ).
De la definició de ψ es verifica,

$$\partial\theta=\partial\theta'$$
$$\partial\mu=\partial\mu'$$
$$\partial a=-b'\partial\theta'+(a'^2-b'^2)\partial a'+2a'b'\partial b'.$$
$$\partial b=-a'\partial\theta'-2a'b'\partial a'+(a'^2-b'^2)\partial b'.$$

Considerem ara la mètrica (amb primes o sense, segons en quin dels dos oberts ens trobem).

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & {}^{-b'}/_{1+a'^2+b'^2} & {}^{a'}/_{1+a'^2+b'^2} \\ 0 & {}^{-b'}/_{1+a'^2+b'^2} & {}^{1}/_{(1+a'^2+b'^2)^2} & 0 \\ 0 & {}^{-a'}/_{1+a'^2+b'^2} & 0 & {}^{1}/_{(1+a'^2+b'^2)^2} \end{pmatrix}$$

Per tal que estigui ben definida "globalment", s'ha de verificar,

$$(3.50)\quad -\frac{b}{1+a^2+b^2}=-b'+(a'^2-b'^2)\frac{-b'}{1+a'^2+b'^2}+2a'b'\frac{a'}{1+a'^2+b'^2}.$$
$$(3.51)\quad \frac{a}{1+a^2+b^2}=-a'-2a'b'\frac{-b'}{1+a'^2+b'^2}+(a'^2-b'^2)\frac{a'}{1+a'^2+b'^2}.$$
$$(3.52)\quad \frac{1}{(1+a^2+b^2)^2}=(a'^2-b'^2)\frac{1}{(1+a'^2+b'^2)^2}+4a'^2b'^2\frac{1}{(1+a'^2+b'^2)^2}.$$
$$(3.53)\quad 0=-2a'b'(a'^2-b'^2)\frac{1}{(1+a'^2+b'^2)^2}+2a'b'(a'^2-b'^2)\frac{1}{(1+a'^2+b'^2)^2}:$$

Efectivament,

(3.50)

$$-b'+(a'^2-b'^2)\frac{-b'}{1+a'^2+b'^2}+2a'b'\frac{a'}{1+a'^2+b'^2}=-b'+\frac{1}{1+a'^2+b'^2}(b'(-a'^2+b'^2+2a'^2))=$$

$$=-b'(1-\frac{a'^2+b'^2}{1+a'^2+b'^2})=-\frac{b}{a^2+b^2}(1-\frac{(a^2+b^2)/(a^2+b^2)^2}{1+(a^2+b^2)/(a^2+b^2)^2})=-\frac{b}{a^2+b^2}(1-\frac{1/(a^2+b^2)}{1+1/(a^2+b^2)})=$$

$$=-\frac{b}{a^2+b^2}(1-\frac{1}{1+a^2+b^2})=-\frac{b}{a^2+b^2}\cdot\frac{a^2+b^2}{1+a^2+b^2}=-\frac{b}{1+a^2+b^2}.$$

(3.51)

$$-a'-2a'b'\frac{-b'}{1+a'^2+b'^2}+(a'^2-b'^2)\frac{a'}{1+a'^2+b'^2}=-a'+\frac{a'}{1+a'^2+b'^2}(2b'^2+a'^2-b'^2)=$$

$$=-a'(1-\frac{a'^2+b'^2}{1+a'^2+b'^2})=\frac{a}{a^2+b^2}(1-\frac{(a^2+b^2)/(a^2+b^2)^2}{1+(a^2+b^2)/(a^2+b^2)^2})=\frac{a}{(a^2+b^2)}(1-\frac{1/a^2+b^2}{1+a^2+b^2/a^2+b^2})=$$

$$=\frac{a}{a^2+b^2}(\frac{1+a^2+b^2-1}{1+a^2+b^2})=\frac{a}{1+a^2+b^2}.$$

(3.52)

$$\frac{(a'^2-b'^2)^2+4a'^2b'^2}{(1+a'^2+b'^2)^2}=\frac{(a'^2+b'^2)^2}{(1+a'^2+b'^2)^2}=\frac{\left[(a^2+b^2)/(a^2+b^2)^2\right]^2}{\left[1+(a^2+b^2)/(a^2+b^2)^2\right]^2}=$$

$$=\frac{1/(a^2+b^2)^2}{(1+a^2+b^2)^2/(a^2+b^2)^2}=\frac{1}{(1+a^2+b^2)^2}.$$

(3.53)

Obvi.

Observem que el determinant de la mètrica és $\frac{1}{(1+a^2+b^2)^4}$.

La connexió de Levi Civita associada a la mètrica vé donada per:

(3.54)

$$\nabla\partial_0 \equiv 0$$

(3.55)

$$\nabla\partial_1 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & {}^{-a}/_{1+a^2+b^2} & {}^{-b}/_{1+a^2+b^2} \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

(3.56)

$$\nabla\partial_2 = \begin{pmatrix} 0 & {}^{-a}/_{1+a^2+b^2} & {}^{-2ab}/_{(1+a^2+b^2)^2} & {}^{(a^2-b^2)}/_{(1+a^2+b^2)^2} \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & {}^{-2a}/_{1+a^2+b^2} & {}^{-2b}/_{1+a^2+b^2} \\ 0 & 1 & {}^{2b}/_{1+a^2+b^2} & {}^{-2a}/_{1+a^2+b^2} \end{pmatrix}$$

(3.57)

$$\nabla\partial_3 = \begin{pmatrix} 0 & {}^{-b}/_{1+a^2+b^2} & {}^{(a^2-b^2)}/_{(1+a^2+b^2)^2} & {}^{2ab}/_{(1+a^2+b^2)^2} \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & {}^{-2b}/_{1+a^2+b^2} & {}^{2a}/_{1+a^2+b^2} \\ 0 & 0 & {}^{-2a}/_{1+a^2+b^2} & {}^{-2b}/_{1+a^2+b^2} \end{pmatrix}$$

Aquestes matrius estan referides a la base de $\partial_0, \partial_1, \partial_2, \partial_3$, essent $\partial_0 = \frac{\partial}{\partial\theta}$, $\partial_1 = \frac{\partial}{\partial\mu}$, $\partial_2 = \frac{\partial}{\partial a}$, $\partial_3 = \frac{\partial}{\partial b}$.
Observem que ∂_0 és paral.lel i ∂_1 és Killing i que ambdós s'estenen a M (∂_0 a ∂_0' i ∂_1 a ∂_1').
Calculant les transformacions de curvatura obtindrem:

(3.58)

$$R_{\partial_0\partial_i} \equiv 0 \qquad i=1,2,3.$$

(3.59)

$$R_{\partial_1\partial_2} = \begin{pmatrix} 0 & {}^{-b}/_{1+a^2+b^2} & {}^{1}/_{(1+a^2+b^2)^2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

(3.60)

$$R_{\partial_1\partial_3}=\begin{pmatrix} 0 & {}^{a}/_{1+a^2+b^2} & 0 & {}^{1}/_{(1+a^2+b^2)^2} \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

(3.61)

$$R_{\partial_2\partial_3}=\begin{pmatrix} 0 & 0 & {}^{-4a}/_{(1+a^2+b^2)^3} & {}^{-4b}/_{(1+a^2+b^2)^3} \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & {}^{-4}/_{(1+a^2+b^2)^2} \\ 0 & 0 & {}^{4}/_{(1+a^2+b^2)^2} & 0 \end{pmatrix}$$

De les transformacions de cuvatura (3.59,3.60,3.61) i de ser ∂_0 un camp paral.lel, s'observa que l'àlgebra d'holonomia és generada per $R_{\partial_1\partial_2}$, $R_{\partial_1\partial_3}$ i $R_{\partial_2\partial_3}$, i té dimensió 3.

La varietat M és, doncs, del tipus (3.i) de la pàg. 59.

IV.4 Cas en el qual dim M=5 i el camp V_0 és paral.lel.

Lema 11. Si M és una varietat de dim n+1, compacta, de Lorentz, gairebé irreduïble localment amb $\mathbf{h}(V_0)=0$, essent V_0 la direcció de la distribució paral.lela D_0; i si r és la dimensió del radical de la forma de Cartan-Killing restringida a l'àlgebra d'holonomia, es verifica:

$\mathbf{h}$ és una subàlgebra de $R^{n-1}\times\mathbf{o}(r)\times\mathbf{o}(n-(r+1))$.

demostració.

Si V_1 és l'altre camp esmentat en la pàg. 50, com que els elements de $\mathbf{h}$ són endomorfismes antisimètrics, es verifica $\mathbf{h}(V_1)\subset(RV_0\oplus RV_1)^{\perp}$. A més g és definida positiva en $(RV_0\oplus RV_1)^{\perp}$; així doncs, g és una forma bilineal simètrica i definida positiva en $\mathbf{h}(V_1)$.

Podem triar $h_1,\dots,h_r$ generadors del radical de la forma de Cartan-Killing restringida a l'àlgebra d'holonomia, satisfent $g(h_i(V_1),h_j(V_1))=\partial_{ij}$.

Prenem $V_{i+1}=h_i(V_1)$ i afegim vectors linealment independents a $V_0,V_1,V_2,\dots,V_{r+1}$ fins obtenir una base. Això ho podem fer de manera que la mètrica, en aquesta base, vingui donada per la matriu,

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & Id \end{pmatrix}$$

En aquesta base la matriu de h_i és,

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & -{}^te_i \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & e_i & H_i \end{pmatrix}$$

$e_i \varepsilon R^{n-1}$, $H_i \varepsilon \mathbf{o}(n-1)$; $e_i=(0,\dots,\overset{i}{1},\dots,0)$ $i=1\div r$.

Per ser generador del radical,

$$0=\phi(h_i,h_i)=\text{traça}(h_i\circ h_i)=\text{traça}(H_i\circ H_i)$$

i com que la forma de Cartan-Killing és definida negativa en $\mathbf{o}(n-1)$, s'ha de verificar $H_i=0$. I h_i té per matriu,

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & -{}^te_i \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & e_i & 0 \end{pmatrix}$$

Finalment, un element h de l'àlgebra d'holonomia **h** s'escriu en aquesta base mitjançant una matriu com,

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & -{}^tw \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & w & H \end{pmatrix}$$

i com que $(h_i,h)\varepsilon\mathbf{h}$, i

$$\left[\begin{pmatrix} 0 & 0 & -{}^te_i \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & e_i & 0 \end{pmatrix},\begin{pmatrix} 0 & 0 & -{}^tw \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & w & H \end{pmatrix}\right]=\begin{pmatrix} 0 & 0 & -{}^tHe_i \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & He_i & 0 \end{pmatrix}$$

que pertany al radical de $\Phi|_{\mathbf{h}}$, aleshores $(He_i)_j=0$, $\forall j>r$. Però $(He_i)_j=H_i^j$. Obtenim,

$$H=\begin{array}{c|c|c} & r & r+1 \\ \hline r & & 0 \\ \hline r+1 & 0 & \end{array}$$

q.e.d.

<u>Corol.lari 12</u>.

(i) $\dim\mathbf{h}\leq r+\frac{r(r-1)}{2}+\frac{(n-r-1)(n-r-2)}{2}$ i una base de $\mathbf{h}$ vé donada per matrius de la forma,

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & -{}^te_i \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & e_i & 0 \end{pmatrix}$$

$e_i\varepsilon R^{n-1}$, $e_i=(0,\ldots,\overset{i}{1},\ldots,0)$ $i=1\div r$

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & -{}^tw \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & w & H \end{pmatrix}$$

amb $w\varepsilon R^{n-1}$, $w=(0,\ldots,0,w_{r+1},\ldots,w_{n-1})$ i $H\varepsilon\mathbf{o}(r)\times\mathbf{o}(n-1-r)$

(ii) En les hipòtesis del lema 11, si el camp V_0 és global i paral.lel i si X és un camp de Killing es verifica,

$$A_X\varepsilon R^{n-1}\times\mathbf{o}(r)\times\mathbf{o}(n-(r+1))$$

demostració.

(ii) De la proposició III.16, l'operador $A_X \varepsilon R^{n-1} \times \mathbf{o}(n-1)$. Per passar de $\mathbf{o}(n-1)$ a $\mathbf{o}(r) \times \mathbf{o}(n-1-r)$ en (i) d'aquest corol.lari, només hem utilitzat el fet que $(h_i, h_j) \varepsilon \mathbf{h}$, per h_i, h_j un parell qualsevol d'elements de $\mathbf{h}$. Això també ho satisfà A_X ja que, de la proposició II.8, $(A_X, \mathbf{h}) \subset \mathbf{h}$.

q.e.d.

Sigui M una varietat de Lorentz, gairebé irreduïble localment, de dim 5, i V_0 camp global paral.lel de norma zero ($\mathbf{h}(V_0)=0$). Si r és la dimensió del radical de la forma de Cartan-Killing restringida a l'àlgebra d'holonomia i X és un camp de Killing, passa que $A_X \varepsilon \mathbf{h}$?.

i) r=0

Aquest cas el resoldrem, més en general, en el capítol següent.

ii) r=1.

Del corol.lari 12, dim $\mathbf{h} \leq 2$. En realitat dim $\mathbf{h}=2$ ja que si dim $\mathbf{h}=1$ i h fos un generador de $\mathbf{h}$, $\langle V_0, V_1, h(V_1)\rangle^{\perp}$ seria un subespai invariant per $\mathbf{h}$ i no degenerat.

Així doncs, del lema 11, podem suposar $\mathbf{h}$ generat per,

$$h_1 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \text{ i } h_2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & -a & -b \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & a & 0 & 0 & -1 \\ 0 & b & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

i del corol.lari 12,

$$A_X = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -x_1 & -x_2 & -x_3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & x_1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & x_2 & 0 & 0 & -x_4 \\ 0 & x_3 & 0 & x_4 & 0 \end{pmatrix}$$

De la proposició II.8,

$$(A_X,h_2)\varepsilon\mathbf{h} \text{ i } (A_X,h_2)=\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & bx_4-x_3 & x_2-ax_4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & x_3-bx_4 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -x_2+ax_4 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

D'aquí que $x_3-bx_4=0$ i $x_2-ax_4=0$, perquè (A_X,h_2) pertanyeria al radical de la forma de Cartan-Killing restringida a **h**; i hem vist que aquest radical era generat per h_1.
Així doncs, $A_X=x_1h_1+x_2h_2$.

iii) <u>r=2</u>.
Del corol.lari 12, $2\leq\dim\mathbf{h}\leq 3$, però $\dim\mathbf{h}=3$, ja que si $\dim\mathbf{h}=2$, M no seria gairebé irreduïble localment.
En una base adequada l'àlgebra d'holonomia és generada per,

$$h_1=\begin{pmatrix} 0 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad h_2=\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad \text{i}$$

$$h_3=\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & -c \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & c & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

amb $c\neq 0$ per tal que M sigui gairebé irreduïble localment

Si X és un camp de Killing es verifica,

$$A_X=\begin{pmatrix} 0 & 0 & -x_1 & -x_2 & -x_3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & x_1 & 0 & -x_4 & 0 \\ 0 & x_2 & x_4 & 0 & 0 \\ 0 & x_3 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = x_1h_1+x_2h_2+x_4h_3+\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & x_4c-x_3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & x_3-x_4c & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

i el teorema feble es verifica.

iv) r=3.

a) dim **h**=3. Ens remetem a un exemple general que es tractarà en el capítol següent, on es mostrarà una varietat de Lorentz, compacta, i gairebé irreduïble i un camp de Killing X no holònom. A més, com en aquest cas la dimensió del radical de la forma de Cartan-Killing restringida a l'àlgebra d'holonomia serà la màxima possible.

b) dim **h**=4.

Lema 13.

$$\text{Si}\ \begin{pmatrix} 0 & -x_1 & -x_2 \\ x_1 & 0 & -x_3 \\ x_2 & x_3 & 0 \end{pmatrix}\ \text{i}\ \begin{pmatrix} 0 & -y_1 & -y_2 \\ y_1 & 0 & -y_3 \\ y_2 & y_3 & 0 \end{pmatrix}$$

són linealment independents, també ho són,

$$\begin{pmatrix} 0 & -x_1 & -x_2 \\ x_1 & 0 & -x_3 \\ x_2 & x_3 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & -y_i & -y_2 \\ y_1 & 0 & -y_3 \\ y_2 & y_3 & 0 \end{pmatrix}\ \text{i}\ \left[\begin{pmatrix} 0 & -x_1 & -x_2 \\ x_1 & 0 & -x_3 \\ x_2 & x_3 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & -y_1 & -y_2 \\ y_1 & 0 & -y_3 \\ y_2 & y_3 & 0 \end{pmatrix}\right]$$

q.e.d.

Tornem a b).

En una base adequada els generadors de **h** són,

$$h_1=\begin{pmatrix} 0 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \qquad h_2=\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$h_3=\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \qquad h_4=\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -a & -b \\ 0 & 0 & a & 0 & -c \\ 0 & 0 & b & c & 0 \end{pmatrix}$$

$$\text{i } A_X=\begin{pmatrix} 0 & 0 & -x_1 & -x_2 & -x_3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & x_1 & 0 & -x_4 & -x_5 \\ 0 & x_2 & x_4 & 0 & -x_6 \\ 0 & x_3 & x_5 & x_6 & 0 \end{pmatrix}$$

i del lema 13 i de la proposició II.8, $A_X \varepsilon \mathbf{h}$.

c) dim **h**=5. Una base de **h** vindrà donada per h_1,h_2,h_3,h_4 anteriors i

$$h_5=\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -a' & -b' \\ 0 & 0 & a' & 0 & -c' \\ 0 & 0 & b' & c' & 0 \end{pmatrix}$$

i això no és possible pel lema 13.

d) dim **h**=6. Del teorema III.13 i de la proposició III.16, es verifica $A_X \varepsilon \mathbf{h}$.

Teorema 14.

Si M^5 és una varietat de Lorentz, compacta, gairebé irreduïble localment de manera que el camp V_0 és global, paral.lel i de norma zero, es verifica,

i) $2 \leq \dim \mathbf{h} \leq 6$, $\dim \mathbf{h} \neq 5$.

Si r és la dimensió del radical de la forma de Cartan-Killing sobre **h** i X és un camp de Killing en M^5,

ii) $r=0 \to A_X \varepsilon \mathbf{h}$. (Ho veurem en el capítol següent).

iii) $r=1 \to A_X \varepsilon \mathbf{h}$.

iv) $r=2 \to A_X = h+B$, on $h \varepsilon \mathbf{h}$ i $B \varepsilon \mathbf{h}^{\perp}$ i traça $(B \circ B)=0$.

v) $r=3 \to \dim \mathbf{h} \neq 5$.

vi) $r=3$ i $\dim \mathbf{h}=4 \to A_X \varepsilon \mathbf{h}$.

vii) $r=3$ i $\dim \mathbf{h}=6 \to A_X \varepsilon \mathbf{h}$.

q.e.d.

CAPITOL V

Camps de Killing i el Tensor de Ricci

V.1 Un teorema com el de Kostant.

Lema 1.
Si ϕ és la forma de Cartan-Killing definida en End(V) i V és un espai vectorial, i $A,B,C\in End(V)$, aleshores,

$$\phi(A,[B,C])=\phi([A,B],C)$$

demostració.
$$\phi(A,[B,C])=\text{traça}(A\circ[B,C])=\text{traça}(A\circ(B\circ C-C\circ B))=$$
$$=\text{traça}(A\circ(B\circ C)-A\circ(C\circ B))=\text{traça}(A\circ(B\circ C))-\text{traça}(A\circ(C\circ B))=$$
$$=\text{traça}((A\circ B)\circ C)-\text{traça}(A\circ(C\circ B))=\text{traça}(C\circ(A\circ B))-\text{traça}((C\circ B)\circ A)=$$
$$=\text{traça}(C\circ(A\circ B))-\text{traça}(C\circ(B\circ A))=\text{traça}(C\circ(A\circ B)-C\circ(B\circ A))=$$
$$=\text{traça}(C\circ(A\circ B-B\circ A))=\text{traça}(C\circ[A,B]).$$

q.e.d.

Lema 2.
Si $A,B\in End(V)$ i $[A,B]=0$, aleshores, per a qualsevol $p\in K[x]$, es verifica Ker $p(A)$ és invariant per B.

demostració.
Si $w\in Ker\ p(A)$,
$$p(A(B(w)))\underset{(*)}{=}B(p(A(w)))=0$$
(*) Aquesta igualtat prové de $[A,B]=0$.

q.e.d.

Lema 3.
Si $A\in R\times R^{n-1}\times o(n-1)$ en el sentit de la proposició III.7, A és de la forma,

$$\begin{pmatrix} b & 0 & -{}^{t}v \\ 0 & -b & 0 \\ 0 & v & \psi \end{pmatrix}$$

on $b\in R$, $v\in R^{n-1}$ i $\psi\in o(n-1)$. Llavors si $b\neq 0$ o $\psi\neq 0$, hi ha components primàries de A que són subespais no degenerats per la mètrica.

demostració.

Com que $\psi \varepsilon o(n-1)$, en certa base ortonormal $e_2,\dots,e_n$, la matriu de ψ s'escriu,

$$\begin{pmatrix} 0 & -a_1 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ a_1 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -a_2 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & a_2 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & -a_r \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & a_r & 0 \end{pmatrix}$$

si $n-1=2r$; es pot donar $a_i=a_j$ o $a_k=0$.

o bé, $$\begin{pmatrix} 0 & -a_1 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ a_1 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -a_2 & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & a_2 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & -a_r & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & a_r & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

si $n-1=2r+1$; també es pot donar $a_i=a_j$ o $a_k=0$.

I A, en la base $e_0,e_1,e_2,\dots,e_n$, s'escriurà,

$$\begin{pmatrix} b & 0 & -v_{11} & -v_{12} & -v_{21} & -v_{22} & \cdots & -v_{r1} & -v_{r2} \\ 0 & -b & 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & v_{11} & 0 & -a_1 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & v_{12} & a_1 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & v_{21} & 0 & 0 & 0 & -a_2 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & v_{22} & 0 & 0 & a_2 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & v_{r1} & 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & -a_r \\ 0 & v_{r2} & 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & a_r & 0 \end{pmatrix}$$

(No es pèrdua de generalitat haver suposat $n-1=2r$).
$\mathrm{Ker}(A^2+a_1^2\,\mathrm{Id})$ és un subespai invariant per A, no degenerat respecte de la mètrica.
Efectivament, suposem $0\neq a_1\neq a_i$, $i\neq 1$, aleshores,

$$\mathrm{Ker}(A^2+a_1^2\mathrm{Id})=<-\frac{a_1v_{12}+bv_{11}}{b^2+a_1^2}e_0+e_2,\frac{a_1v_{11}-bv_{12}}{b^2+a_1^2}e_0+e_3>$$

que és no degenerat.
Si $a_i=a_1$, dim $\mathrm{Ker}(A^2+a_1^2\mathrm{Id})=4$, en comptes de 2, però continua essent no degenerat.
$b\neq 0$ o existeix $a_i\neq 0$ perquè traça $\psi^2\neq 0$, per hipòtesi.

q.e.d.

Teorema 4.
Sigui M una varietat de Lorentz de dim $n+1$, compacta, gairebé irreduïble localment, de manera que el radical de la forma de Cartan-Killing restringit a l'àlgebra d'holonomia $\mathbf{h}$ és $\{0\}$. I sigui X un camp de Killing de M; aleshores, l'operador A_X pertany a $\mathbf{h}$.

demostració.
Del teorema II.9 A_X és descomposa en $A_X=B_X+k$, $k\varepsilon\mathbf{h}$ i $B_X\varepsilon\mathbf{h}^{\perp}$, i traça$(B_X\circ B_X)=0$. Més encara, es verifica $[B_X,h]=0$, $\forall h\varepsilon\mathbf{h}$.
Efectivament, del lema 1, $\phi([B_X,h],l)=\phi(B_X,[h,l])=0$, perquè $[h,l]\varepsilon\mathbf{h}$ i $B_X\varepsilon\mathbf{h}^{\perp}$. Així doncs, $\phi([B_X,h],l)=0,\forall l\varepsilon\mathbf{h}$.
Com que $\phi|_{\mathbf{h}}$ és no degenerada, i $[B_X,h]\varepsilon\mathbf{h}$ per la proposició II.8, passa que $[B_X,h]=0$, $\forall h\varepsilon\mathbf{h}$.
Dels teoremes II.9 i III.13, B_X es pot expressar, en una certa base $V_0,V_1,\ldots,V_n$, mitjançant la matriu,

$$\begin{pmatrix} b & 0 & -{}^t v \\ 0 & -b & 0 \\ 0 & v & B \end{pmatrix}$$

essent $b\varepsilon R$, $v\varepsilon R^{n-1}$ i $B\varepsilon\mathbf{o}(n-1)$. A més $-b^2=$traça $(B\circ B)$.

Distingirem dos casos:

a) $b\neq 0$.
Del lema 3 hi ha alguna component primària de B_X on la mètrica no hi degenera. (Les components primàries són de la forma $\operatorname{Ker} p(B_X)$ per un cert $p\in R(x)$. Com que $(B_X,h)=0$, $\forall h\in\mathbf{h}$, podem aplicar el lema 2, deduint que la component primària en qüestió és invariant per $\mathbf{h}$. En aquest cas M no seria gairebé irreduïble localment.

b) $b=0$. I en conseqüència $B\equiv 0$.
Com que els elements de $\mathbf{h}$ s'escriuen, en la base habitual, mitjançant matrius com,

$$\begin{pmatrix} a & 0 & -{}^t w \\ 0 & -a & 0 \\ 0 & w & H \end{pmatrix} \quad \text{i}$$

$$\left[\begin{pmatrix} a & 0 & -{}^t w \\ 0 & -a & 0 \\ 0 & w & H \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 & -{}^t v \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & v & 0 \end{pmatrix}\right] = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -{}^t(Hv+av) \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & Hv+av & 0 \end{pmatrix}$$

de la proposició II.8 i del fet que $\phi|_{\mathbf{h}}$ és no degenerada, s'ha de verificar $Hv+av=0$ per a qualsevol H,a satisfent,

$$\begin{pmatrix} a & 0 & -{}^t w \\ 0 & -a & 0 \\ 0 & w & H \end{pmatrix} \in \mathbf{h}.$$

Si $a\neq 0$ per algun element de $\mathbf{h}$, ha de passar $v=0$, (1.1), perquè $H\in\mathbf{o}(n-1)$ i v és vector propi de H, de valor propi $a\neq 0$.
Si $a=0$ per a qualsevol element de $\mathbf{h}$ i $v\neq 0$, com que v és de norma positiva, podem triar una referència $V_0,V_1,V_2,\dots,V_n=\frac{v}{\|v\|}$. En aquesta referència els elements de

h s'escriuen com,

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & -{}^{t}w & -w_{n-1} \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & w & H & 0 \\ 0 & w_{n-1} & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$w \varepsilon R^{n-2}$, $w_{n-1} \varepsilon R$, $H \varepsilon \mathbf{o}(n-2)$.

Algun $w_{n-1} \neq 0$ ja que, en cas contrari, v generaria un subespai no degenerat i invariant per **h**.

Podem prendre, per tant, una base de **h** com,

$$I_i=(0,w_i,0,H_i) \quad i=1 \div r-1$$

$$I_r=(0,w_r,1,H_r)$$

El subespai generat per $I_1,\ldots,I_{r-1}$ determina un ideal J de codimensió 1 en **h**.

Efectivament,

$$(I_i,I_j)=(0,w,0,H)$$

Així doncs, si $(I_i,I_j)=\Sigma c^k_{ij} I_k$, és $c^r_{ij}=0$ i J és un ideal.

Prenem $L=(0,w,\varepsilon,H)$ un generador de $J^{\perp} \subset \mathbf{h}$ (ortogonal respecte de la forma de Cartan-Killing ϕ). Es verifica,

$$(1.2) \quad \phi((L,I_i),I_j)=\phi(L,(I_i,I_j)),$$

del lema 1; $i,j \varepsilon \{1,\ldots,r\}$.

De (1.2) i de l'elecció de L,

$$(1.3) \quad \phi((L,I_i),I_j)=\phi(L,(I_i,I_j))=0$$

$i \varepsilon \{1,\ldots,r\}$ i $j \varepsilon \{1,\ldots,r-1\}$

També,

$$(1.4) \quad \phi((L,I_r),I_r)=\phi(L,(I_r,I_r))=0$$

Com que $\phi_{|\mathbf{h}}$ és no degenerada per hipòtesi, de (1.3) i (1.4) en resulta,

$$(1.5) \quad (L,I_i)=0; \; \forall i \varepsilon \{1,\ldots,r\}.$$

La matriu de L és de la forma,

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & -{}^{t}u \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & u & U \end{pmatrix}$$

amb $U\neq 0$ perquè $\Phi|_{\mathbf{h}}$ és no degenerada per hipòtesi. Pel lema 3, hi ha una component primària de L on la mètrica no hi degenera. Com que L commuta amb els I_i, $i=1\div r$, (1.5), aquesta component és invariant per a cada I_i, i en conseqüència, per **h**. Contradicció amb el fet de suposar que M és gairebé irreduïble localment. Contradicció que prové de suposar $a=0$ i $v\neq 0$.

Així doncs,

$$(1.6) \qquad a=0 \to v=0.$$

(1.1) i (1.6) ens donen el resultat desitjat.

q.e.d.

V.2 Un parell d'exemples.

Exemple 5. $\forall n\geq 2$, $n\in N$, existeix M_{n+2}, varietat de Lorentz, compacta, gairebé irreduïble localment, amb àlgebra d'holonomia **h** de dim **h**$=n$, que verifica,

i) radical $\Phi|_{\mathbf{h}}=\mathbf{h}$.

ii) X camp de Killing, tal que $A_X\notin\mathbf{h}$ i no es descomposa en $A_X=h+B$ amb traça $(B\circ B)=0$, $h\in\mathbf{h}$.

demostració.

Per inducció sobre n.

n=2. Vid exemple IV.9.

Observem que per a cada punt p de M_4, existeix un entorn U_p i un sistema de coordenades de manera que,

∂_0 és global i paral.lel.

∂_1 és Killing i global.

La mètrica g s'escriu,

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 2t_3 & 0 \\ 0 & 2t_3 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Suposem cert el resultat per a M_n. A causa de la inducció, podem suposar que per a cada punt p de M_n hi ha un entorn U i un sistema de coordenades de manera que,

∂_0 és global i paral.lel

∂_1 és Killing i global.

La mètrica g_n s'escriu,

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 1 & (g_{11})_n & 2t_3 & \dots & 0 \\ 0 & 2t_3 & 1 & & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1 \end{pmatrix}$$

Considerem $M_{n+1}=M_n\times S^1$. $M_n\times S^1$ és <u>compacta</u>. Si $(p,z)\epsilon M_n\times S^1$ i U_p és l'entorn que existeix en M_n per hipòtesi d'inducció, un entorn de (p,z) serà $U_p\times S^1$. Si α_{n+1} designa la coordenada angular en S^1, definim,

$$(g_{11})_{n+1}=(g_{11})_n+f(\alpha_{n+1})$$

i la mètrica g_{n+1} mitjançant la matriu,

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 1 & (g_{11})_{n+1} & 2t_3 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 2t_3 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 1 \end{pmatrix}$$

Aquesta mètrica és ben definida perquè g_n ho era i perquè ∂_1 és global. Els símbols de Cristoffel són,

(2.1)

$$\nabla\partial_0\equiv 0$$

(2.2)

$$\nabla\partial_1 = \begin{pmatrix} & & & & \frac{\partial_{n+1} f}{2} \\ & & (\nabla\partial_1)_n & & 0 \\ & & & & \vdots \\ 0 & -\frac{\partial_{n+1} f}{2} & 0 & \cdots & 0 \end{pmatrix}$$

(2.3)

$$\nabla\partial_i = \begin{pmatrix} & & 0 \\ & (\nabla\partial_i)_n & \vdots \\ & & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 \end{pmatrix}$$

(2.4)

$$\nabla\partial_{n+1} = \begin{pmatrix} 0 & \frac{\partial_{n+1} f}{2} & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & & \vdots & \vdots \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

i les transformacions de curvatura en cada punt vénen donades per,

(2.5)

$$R_{-\partial_0} \equiv 0$$

(2.6)

$$R_{\partial_i\partial_j}\equiv 0;\quad i,j\,\varepsilon\{2,\dots,n+1\}.$$

(2.7)

$$R_{\partial_1\partial_i}=\begin{pmatrix} & & 0\\ & (R_{1i})_n & \vdots\\ & & \vdots\\ 0 & \cdots\cdots & 0\end{pmatrix}$$

(2.8)

$$R_{\partial_1\partial_{n+1}}=\begin{pmatrix} 0 & 0 & \cdots\cdots & -\dfrac{\partial_{n+1}\partial_{n+1}f}{2}\\ \vdots & \vdots & & \vdots\\ 0 & 0 & \cdots\cdots & 0\\ 0 & \dfrac{\partial_{n+1}\partial_{n+1}f}{2} & \cdots\cdots & 0\end{pmatrix}$$

De la inducció i de (2.8), les transformacions de curvatura en un punt genèric p generen una àlgebra de dim n+1, que coincideix amb el radical de la forma de Cartan-Killing definida sobre aquesta àlgebra.

∂_0 és un camp paral.lel. Així doncs, determina una distribució invariant, $R\partial_0$. També és invariant $(R\partial_0)^{\perp}$; això és, $R\partial_0\oplus R\partial_2\oplus\dots\oplus R\partial_{n+1}$. D'aquí que el transport paral.lel de ∂_i, $i=2\div n+1$, al llarg d'un camí γ sigui de la forma $A_0\partial_0+A_2\partial_2+\dots+A_{n+1}\partial_{n+1}$. I d'aquest fet, conjuntament amb (3.47), (3.48) i (3.49) del capítol IV i (2.5), (2.6), (2.7) i (2.8) d'aquest capítol i del teorema I.4, es dedueix que l'àlgebra d'holonomia de M_{n+1} és la que hem descrit en el paràgraf anterior.

En resum,

La varietat M_{n+1} és compacta, de Lorentz, gairebé irre duïble localment, la seva àlgebra d'holonomia **h** té dimensió n+1 i verifica $\mathrm{rad}\phi|_{\mathbf{h}}=\mathbf{h}$. A més el camp ∂_1 s'estén a un camp de Killing X sobre M_{n+1} i $A_X \not\in \mathbf{h}$ ni satisfà el teorema feble.

Exemple 6. Considerem M_{n+2} una varietat de Lorentz, compacta, gairebé irreduïble localment, com la que hem descrit en l'exemple anterior. Hem vist que per a cada punt p, existeix un entorn U_p i un sistema de coordenades, de manera que,

. ∂_0 és un camp global i paral.lel

. ∂_1 és un camp global i Killing

. g s'expressa en funció dels camps coordenats mitjançant una matriu,

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & g_{11} & g_{12} & 0 \\ 0 & g_{12} & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \mathrm{Id} \end{pmatrix}$$

Prenem també K_d una varietat riemanniana, compacta, de curvatura constant k, dimensió d i f una funció real i positiva definida sobre K_d, $f:K_d \longrightarrow R_{>0}$.

Definim $V=M_n \times K_d$. Si (p,q) és un punt de V i U_p l'entorn esmentat en el paràgraf primer, i U_q un entorn coordenat de q en K_d, $U_p \times U_q$ és un entorn de (p,q) en V on hi definim una mètrica mitjançant la matriu,

$$\begin{pmatrix} \begin{matrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & g'_{11} & g_{12} & 0 \\ 0 & g_{12} & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \mathrm{Id} \end{matrix} & 0 \\ 0 & g_{K_d} \end{pmatrix}$$

essent $g'_{11}=(g_{11})_{M_n}+f$, i g_{K_d} la mètrica pròpia de K_d definida en U_q.

Designarem per $\bar{\partial}_i$ els camps coordenats en U_p i per $\bar{\bar{\partial}}_i$ els camps coordenats en U_q.

Es verifica,

(2.9) 1. $g(\nabla_{\bar{\partial}_i}\bar{\partial}_j,\bar{\partial}_k)=g_1(\bar{\nabla}_{\bar{\partial}_i}\bar{\partial}_j,\bar{\partial}_k)$.

2. $g(\nabla_{\bar{\partial}_i}\bar{\partial}_j,\bar{\bar{\partial}}_k)=\begin{cases}-\frac{1}{2}\bar{\bar{\partial}}_k f=-1/2<\mathrm{grad}f,\bar{\bar{\partial}}_k>, & \text{si } i=j=1\\ =0 & \text{altrament}\end{cases}$

3. $g(\nabla_{\bar{\partial}_i}\bar{\bar{\partial}}_j,\bar{\partial}_k)=\begin{cases}\frac{1}{2}\bar{\bar{\partial}}_j f, & \text{si } i=k=1\\ =0 & \text{altrament}\end{cases}$

4. $g(\nabla_{\bar{\partial}_i}\bar{\bar{\partial}}_j,\bar{\bar{\partial}}_k)=0$

5. $g(\nabla_{\bar{\partial}_i}\bar{\bar{\partial}}_j,\bar{\partial}_k)=0$

6. $g(\nabla_{\bar{\bar{\partial}}_i}\bar{\bar{\partial}}_j,\bar{\bar{\partial}}_k)=g_2(\bar{\bar{\nabla}}_{\bar{\bar{\partial}}_i}\bar{\bar{\partial}}_j,\bar{\bar{\partial}}_k)$

7. Com que $[\bar{\partial}_i,\bar{\bar{\partial}}_j]=0$, passa $\nabla_{\bar{\partial}_i}\bar{\bar{\partial}}_j=\nabla_{\bar{\bar{\partial}}_j}\bar{\partial}_i$

Així tenim que,

(2.10) 1. $\nabla_{\bar{\partial}_i}\bar{\partial}_j=\bar{\nabla}_{\bar{\partial}_i}\bar{\partial}_j$; i o $j\neq 1$.

2. $\nabla_{\bar{\partial}_i}\bar{\partial}_1=\bar{\nabla}_{\bar{\partial}_1}\bar{\partial}_1-\frac{1}{2}\mathrm{grad}f$.

3. $\nabla_{\bar{\partial}_i}\bar{\bar{\partial}}_j=\nabla_{\bar{\bar{\partial}}_j}\bar{\partial}_i=0$; $i\neq 1$.

4. $\nabla_{\bar{\partial}_i}\bar{\bar{\partial}}_j=\nabla_{\bar{\bar{\partial}}_j}\bar{\partial}_1=\frac{1}{2}(\bar{\bar{\partial}}_j f)\bar{\partial}_0$.

5. $\nabla_{\bar{\bar{\partial}}_i}\bar{\bar{\partial}}_j=\bar{\bar{\nabla}}_{\bar{\bar{\partial}}_i}\bar{\bar{\partial}}_j$

i a més,

6. $\bar{\Gamma}_{ij}^{1}=0$.

Operant amb aquests resultats s'obté,

(2.11)

$$R_{\bar{\partial}_i \bar{\partial}_j} = \begin{pmatrix} \bar{R}_{\bar{\partial}_i \bar{\partial}_j} & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \equiv 0 \quad \text{per a } i,j \neq 1$$

(2.12)

$$R_{\bar{\partial}_i \bar{\partial}_1} = \begin{pmatrix} \bar{R}_{\bar{\partial}_i \bar{\partial}_1} & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

(2.13)

$$R_{\bar{\partial}_i \bar{\bar{\partial}}_j} \equiv 0 \, , \quad i \neq 1$$

(2.14)

$$R_{\bar{\bar{\partial}}_i \bar{\bar{\partial}}_j} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & \bar{\bar{R}}_{\bar{\bar{\partial}}_i \bar{\bar{\partial}}_j} \end{pmatrix}$$

(2.15)

$$R_{\bar{\partial}_1 \bar{\bar{\partial}}_j} = \left(\begin{array}{cccc} 0 & 0 & \multicolumn{2}{c}{\tfrac{1}{2}((\bar{\bar{\nabla}}_{\bar{\bar{\partial}}_j} \bar{\bar{\partial}}_k) \bullet f - \bar{\bar{\partial}}_j \bar{\bar{\partial}}_k f)} \\ 0 & 0 & 0 \;.\;.\;.\;.\;.\;.\;.\;.\;. & 0 \\ \vdots & & & \\ \vdots & \tfrac{1}{2}((\nabla_{\bar{\bar{\partial}}_j} (\mathrm{grad} f)) & 0 & 0 \\ \vdots & & 0 & 0 \\ 0 & & & \end{array} \right)$$

Com que K_d era una varietat de curvatura constant, si f és tal que $\nabla_{\overline{\partial}_j}(\mathrm{gradf})$ són linealment independents ($j=1\div d$), les transformacions de curvatura en un punt genèric determinen l'àlgebra generada per,

(2.16)

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & -e_i & 0\\ 0 & 0 & 0 & 0\\ 0 & e_i & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$i=1\div n; \quad e_i = (0\ldots\overset{i}{1}\ldots0)\varepsilon R^n$$

(2.17)

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & -e_j\\ 0 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 0\\ 0 & e_j & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$j=1\div d; \quad e_j = (0\ldots\overset{j}{1}\ldots0)\varepsilon R^d$$

(2.18)

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0 & \Psi_{ij} \end{pmatrix}$$

$$\psi_{ij}\varepsilon\mathbf{o}(d) \quad \begin{array}{c|cccccc|} & & & i & & j & \\ & 0 & & \cdot & & \cdot & 0\\ & & & \cdot & & \cdot & \\ i & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & 1 & \\ j & \cdot & \cdot & -1 & & & \\ & 0 & & & & & 0 \end{array} \quad 1\leqq i<j\leqq d.$$

en una base $V_0, V_1, \ldots, V_n\ W_1, \ldots, W_d$ on la mètrica sigui,

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0\\ 1 & 0 & 0\\ 0 & 0 & \mathrm{Id} \end{pmatrix}$$

i V_0 sigui el camp global paral.lel i nul.

Com que $\overline{\partial}_0$ és global i paral.lel, la proposició III. 12, estableix que dim $\mathbf{h} \leqq n+d+\frac{(n+d)(n+d-1)}{2}$. D'altra banda, del teorema I.4, l'àlgebra d'holonomia és generada per les transformacions de curvatura i els seus transports paral.lels. De (2.16), (2.17) i (2.18), dim $\mathbf{h} \geqq d+n+\frac{d(d-1)}{2}$; perquè les transformacions de curvatura determinen una subàlgebra d'aquesta dimensió. Notem que si $(\tau^{-1}R\tau)\overline{\partial}_i=\lambda\partial_0$, $i=0,2,\dots,n$, aleshores les transformacions de curvatura ja generen l'àlgebra d'holonomia ja que la subàlgebra que determinen conté els seus transports paral.lels.

Sigui σ un camí en M. De (2.10) i de (2.1), (2.3) i (2.4), el transport paral.lel de $\overline{\partial}_i$ al llarg de σ vé donat per un camp de la forma,

$$f_0(t)\overline{\partial}_0+f_2(t)\overline{\partial}_2+f_3(t)\overline{\partial}_3+f_i(t)\overline{\partial}_i$$

en el ben entès que, si $i=0,2,3$, el darrer terme no apareix.

De (2.11),...,(2.15) i de (2.5),...,(2.8),

$$R_{XY}(f_0\overline{\partial}_0+f_2\overline{\partial}_2+f_3\overline{\partial}_3+f_i\overline{\partial}_i)=\lambda\overline{\partial}_0 \text{ i } \tau(\lambda\overline{\partial}_0)=\lambda\overline{\partial}_0.$$

Concloem doncs, que l'àlgebra d'holonomia és generada per les transformacions de curvatura (2.16), (2.17) i (2.18) i té dim $\mathbf{h}=d+n+\frac{d(d-1)}{2}$. La dimensió del radical de $\phi_{|\mathbf{h}}$ és d+n, a diferència de l'exemple anterior, en el qual tota l'àlgebra d'holonomia era continguda en el radical.

De la proposició I.5 i de ser V_0 paral.lel deduïm que V és una varietat de Lorentz, gairebé irreduïble localment. De la construcció V és compacta i $\overline{\partial}_1$ és un camp global i de Killing que satisfà,

$$A_{\overline{\partial}_1} \notin \mathbf{h}$$

i no existeixen $h\in\mathbf{h}$, ℓ:traça $\ell^2=0$, tals que $A_{\overline{\partial}_1}=h+\ell$.

Nota: Per tal de garantir que $\nabla_{\bar{\partial}_j}$ grad(f) són linealment independents, considerem $p\varepsilon V$ i prenem coordenades normals en $p=(p_1,p_2)$. En realitat, de (2.10,5) és suficient de prendre-les a $p_2\varepsilon K_d$ i f que localment adopti la forma,

$$f=\sum_{i=1}^{d} f_i(x_i)$$

satisfent $\dot{f}_i\big|_{p_2}\neq 0$ i $\ddot{f}_i\big|_{p_2}\neq 0$

Aleshores, $\mathrm{grad}(f)\big|_{p_2}=\sum_{i=1}^{d}(\partial_i f\big|_{p_2})\partial_i$ i $\nabla_{\partial_j}\mathrm{grad}(f)\big|_{p_2}=$

$=(\partial_j\partial_j f_j\big|_{p_2})\partial_j$, que variant $j=1,\ldots,d$ són linealment independents.

V.3 Camps de Killing i el Tensor de Ricci

En tot aquest apartat, si no es diu el contrari, M serà una varietat de Lorentz, compacta, gairebé irreduïble localment; $D_\circ$ la direcció nul.la invariant pel grup d'holonomia; **h** l'àlgebra d'holonomia de M i **h**$(D_\circ)=0$. Així doncs, de la proposició II.11, per a cada punt p, existeix un camp paral.lel V_0 definit en un entorn del punt en la direcció $D_\circ$.
Es verifica,

Proposició 7. Si el tensor de Ricci és semidefinit negatiu i la forma de Cartan-Killing és no degenerada en **h**, o bé, si el camp V_0 es pot estendre a un camp paral.lel a tot M, sempre en la direcció $D_\circ$, aleshores qualsevol camp de Killing X satisfà $g(X,V_0)=0$.

demostració.

Notem que si $\mathbf{h}(V_0)=0$, la forma de Cartan-Killing és semidefinida negativa en $\mathbf{h}$. Efectivament, en una base $V_0,V_1,\ldots,V_n$, on la mètrica g s'expressi mitjançant la matriu,

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \mathrm{Id} \end{pmatrix}$$

els elements de $\mathbf{h}$ són de la forma,

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & -{}^t v \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & -v & B \end{pmatrix}$$

$v\varepsilon R^{n-1}$, $B\varepsilon o(n-1)$ i la forma de la traça és semidefinida en aquestes matrius. (3.1)

Si X és un camp de Killing i $p\varepsilon M$, considerem V_0 camp paral.lel definit en un entorn de p en la direcció D_o. Si V_0 es pot estendre a un camp global i paral.lel, la proposició III.16 estableix $A_XV_0=0$. Si la forma de Cartan-Killing és no degenerada en $\mathbf{h}$, el teorema 4 també estableix $A_XV_0=0$.

En ambdós casos, doncs, per la proposició III.14, es verifica $g(V_0,X)=ctt$ en l'entorn en qüestió. Si aquesta constant fos diferent de zero podríem suposar que és 1. En aquest cas, prenent una referència $V_0,X,V_2,\ldots,V_n$, de manera que la mètrica s'escrigui,

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 2f & 0 \\ 0 & 0 & \mathrm{Id} \end{pmatrix}$$

on $f=\frac{1}{2}g(X,X)$, obtenim de la proposició II.6 de la remarca inicial i del fet de suposar el tensor de Ricci semidefinit negatiu, $\Delta f \geq 0$. Efectivament,

$$\Delta f=-\text{traça}(A_X \circ A_X)-\text{Ricci}(X,X)\geq 0.$$

Com que M és compacta, $0=\int_M \Delta f$; obtenim, doncs, $\Delta f=0$ i, per tant, $\text{traça}(A_X \circ A_X)=0$. (3.2)

En la referència anterior, l'operador A_X s'expressa mitjançant la matriu,

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & -{}^t v \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & v & 0 \end{pmatrix} \quad (3.3)$$

El 0 que correspon a **o**(n-1) prové de (3.2).

Integrant sobre M la fòrmula $\frac{\Delta f^2}{2}=(\Delta f)f+g(\text{grad}(f),\text{grad}(f))$ s'obté,

$$0=\int_M(\text{grad}(f),\text{grad}(f)) \quad (3.4)$$

Però de la proposició II.6, $\text{grad}(f)=A_X X$, i de (3.3), grad(f) és espacial; en concret, $A_X X=\sum_{i=2}^{n} v_i V_i$, i com que els vectors V_i són ortogonals i espacials, A_X també és espacial.

(3.4) ens diu, per tant, grad(f)=0. Aleshores f és constant i X paral.lel. X és paral.lel per (3.3) i v=0.

El subespai generat per V_0 i X seria invariant per **h** i no degenerat per g; contradicció amb el fet de suposar M gairebé irreduïble localment. Aquesta contradicció prové d'haver suposat $g(X,V_0)\neq 0$.

q.e.d.

<u>Teorema 8</u>.

Si el tensor de Ricci és semidefinit negatiu i si la forma de Cartan-Killing restringida a **h** és no degenerada, aleshores, si X és un camp de Killing sobre M, X és paral.lel i de norma zero.

demostració.

El teorema 4 mostra que l'operador A_X pertany a **h**. Com en la proposició anterior, si $f=\frac{1}{2}g(X,X)$, es verifica $\Delta f=0$ i, també com abans, $\text{traça}(A_X \circ A_X)=0$. (3.4)
Prenem $V_0, V_1, \ldots, V_n$ una referència de manera que la mètrica s'expressi mitjançant la matriu,

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & Id \end{pmatrix}$$

En aquesta referència l'operador A_X s'escriu,

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & -{}^t v \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & v & B \end{pmatrix}$$

$v \varepsilon R^{n-1}$, $B \varepsilon o(n-1)$, amb $B=0$ per (3.4).
Així doncs, A_X és del radical de $\phi_{|\mathbf{h}}$. De les hipòtesis $A_X=0$. En altres paraules X és paral.lel. Com que M és gairebé irreduïble localment, X ha de ser de norma zero i com que, de la proposició 7, $g(X,V_0)=0$, ha de ser $X=kV_0$.
Finalment k és constant.

q.e.d.

Corol.lari 9.

Si el tensor de Ricci és semidefinit negatiu i si la forma de Cartan-Killing restringida a **h** és no degenerada, aleshores,

i) o bé no hi ha camps de Killing globals, llevat del 0, o bé

ii) hi ha un camp global paral.lel de norma zero i els únics camps de Killing que hi ha són els múltiples d'aquest. Aquest possible camp està en la direcció paral.lela RV_0.

Exemple 10. Aquest exemple mostra que la hipòtesi del teorema 8 no es pot debilitar. Mostrarem una varietat compacta, de Lorentz, gairebé irreduïble localment amb tensor de Ricci semidefinit negatiu i amb un camp de Killing no paral.lel.

Considerem M el producte $S^1 \times S^1 \times S^1$ i α_i, $i=0,1,2$, coordenades angulars standart de S^1. Si $f:M \to R_{>0}$ és una funció regular real positiva, que només depèn de α_1, definim la mètrica g sobre M en la base $\partial\alpha_i$, mitjançant la matriu,

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & f \end{pmatrix}$$

Calculant s'obté.

$$\nabla\partial_0 \equiv 0$$

$$\nabla\partial_1 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \partial_1 f/2f \end{pmatrix}$$

$$\nabla\partial_2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -\partial_1 f/2 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & \partial_1 f/2f & 0 \end{pmatrix}$$

$$R_{\partial_1\partial_2} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -\frac{1}{2}(\partial_1\partial_1 f-((\partial_1 f)^2/2f)) \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{2f}(\partial_1\partial_1 f-((\partial_1 f)^2/2f)) & 0 \end{pmatrix}$$

$$\mathrm{Ric}(\partial_0,\partial_0)=0$$
$$\mathrm{Ric}(\partial_1,\partial_1)=\frac{1}{2f}(\partial_1\partial_1 f-((\partial_1 f)^2/2f))$$
$$\mathrm{Ric}(\partial_2,\partial_2)=0$$

El tensor de Ricci és semidefinit negatiu si i només si $2f\partial_1\partial_1 f-(\partial_1 f)^2\leq 0$. Si és diferent de zero, l'àlgebra d'holonomia té redical no trivial.

Resumint: (M,g) és una 3-varietat compacta, de Lorentz, gairebé irreduïble localment. ∂_2 és un camp de Killing no paral.lel. Per tal d'obtenir Ricci$\leq$0, hom pot prendre,

$$f=\tfrac{1}{2}((\mathrm{Cos}\alpha_1)^2+2\mathrm{Cos}\alpha_1-3).$$

Nota.

El lector s'haurà adonat que del §3 del capítol III es distingeixen dos casos segons $\mathbf{h}(V_0)\neq 0$, o $\mathbf{h}(V_0)=0$. En canvi, en aquesta memòria analitzem de manera més o menys completa el cas $\mathbf{h}(V_0)\neq 0$. I en $\mathbf{h}(V_0)=0$ s'afegeix la hipòtesi que el camp V_0 sigui global i paral.lel. Fem constar que, si la varietat en qüestió és simplement connexa, o si el grup fonamental és finit, l'afegit no és cap restricció.

Què passa en el cas en què el camp V_0 només sigui definit localment? No ho sabem. Tanmateix, com que allò que ens preguntàvem era la verificació o no d'un resultat i la resposta és negativa, en la memòria es donen contraexemples, aquest desconeixement no afecta la solució del problema que ens vàrem plantejar.

A més, tant els contraexemples com els exemples que hem donat satisfan que el camp V_0 és global i, en alguns casos, paral.lel.

Bibliografia

(A-M) L. Auslander and L. Markus. "Flat Lorentz 3-Manifolds". Memoirs of the A.M.S. n.30.

(B) Marcel Bérger. "Sur les groupes d'holonomie homogène des veriétés a connexion affine et des variétés riemanniennes". Bull. Soc. Math. France 83 (1955) pp. 279-330.

(C.1) Carlos Currás. "Killing vector fields and complex structures". L.N. 1045 Proc. Peñiscola pp. 36-43

(C.2) Carlos Currás. "Killing vector fields and holonomy algebra". Proc. A.M.S. 90(1) (1984) pp. 97-102.

(C.3) Carlos Currás. "Infinitesimal transformations on non compact manifolds". Preprint.

(C-E) Cheeger-Ebin. "Comparison theorems in riemannian geometry". North Holland Publ. Amsterdam 1975.

(C-P) M. Cahen and M. Parker. "Pseudoriemannian Symmetric spaces". Memoirs of A.M.S. n.224.

(C-W) M. Cahen and N. Wallach. "Lorentzian Symmetric spaces". Bull. A.M.S. 76(3) (1970) pp.585-591.

(E C) Élie Cartan. "Les groupes d'holonomie des espaces généralises". Acta Math. 48 (1926) pp. 1-42.

(K-N) S. Kobayashi and K. Nomizu. "Foundations of Differential Geometry" Vol. I and II. 1963. Interscience.

(K) Bertram Kostant. "Holonomy and the Lie algebra of the infinitesimal motions of a Riemannian manifold". Trans. A.M.S. 80 (1955) pp. 528-542.

(L) André Lichnerowicz. "Géométrie des groupes des transformations" Dunod. Paris 1958.

(O'N) Barret O'Neil. "Semiriemannian Geometry with applications to relativity". Ac Press 103. 1983.

(W) Joseph A. Wolf. "Spaces of constant curvature" Publish or Perish. Boston 1974.

(W.1) H. Wu. "On the de Rham decomposition theorem". Illinois J. of Math. 8 (1964) pp. 291-311.

(W.2) H. Wu. "Decomposition of Riemannian manifolds". Bull. of A.M.S. 70 (1964).

(W.3) H. Wu. "Holonomy groups of Indefinite metrics". Pacific Journal of Math. 20(2) (1967).

(Y) K. Yano. "Integral formulas in Riemannian Geometry". Marcel Decker Inc. N.Y. 1970.