

**UNIVERSIDAD DE SANTANDER**

**TESIS**

**ANALISIS ELASTO-PLASTICO  
ANISOTROPO DE ARCILLAS  
BLANDAS EN PROCESOS DE  
CARGA SIN DRENAJE**

**Presentada por: FRANCISCO BALLESTER MUÑOZ**

**Dirigida por : CESAR SAGASETA MILLAN**

**Santander Setiembre**

**1977**

**Escuela Técnica Superior  
de Ingenieros de Caminos,  
Canales y Puertos**

" Una prueba que se apoya en la  
experimentación debe preferirse  
a la tomada del solo raciocinio ".

- Otto von Guericke -

Este trabajo de investigación no hubiese podido realizarse sin la constante colaboración del Profesor y amigo Doctor Don Cesar - Sagaseta Millán, Director del Departamento de Ciencias y Técnicas del Suelo de la Escuela de Ingenieros de C. C. y P. de Santander, al cual quiero expresarle mi total agradecimiento por la gran ayuda que en todo momento me ha brindado, con una dedicación plena a este trabajo.

Asi mismo, quiero agradecer al Catedrático Don Enrique - Castillo Ron, Director del Departamento de Matemáticas aplicadas a - la Ingeniería, cuyo ordenador he realizado en este trabajo, quien - en numerosas ocasiones le interrumpí con mis consultas, recibiendo de él, en todo momento, toda clase de aclaraciones.

Al Profesor Doctor Don Guillermo Gómez Laa, Rector Magnifico de la Universidad de Santander, por el interés y la ayuda facilitada en las primeras fases de esta investigación, colaborando en - el encauzamiento de la misma.

Al Catedrático Don Avelino Sanmartin Quiroga y al Profesor Don Juan Ramón Ruiz Tolosa a los cuales he consultado diversos aspectos de este trabajo y han colaborado con gran interés en la colaboración de algunas referencias.

A la Escuela Superior de Ingenieros de Caminos, Canales y Puertos de Santander, en la persona de su Director Profesor Don Ricardo Quince Salas, por las facilidades que en todo momento me ha brindado, para la utilización de todos los Servicios de esta Escuela.

Al Ministerio de Educación y Ciencia, que en su día me -  
otorgó una beca de formación de personal investigador.

No sería justo, sino expresase en este momento mi agrade -  
cimiento a todos los que a lo largo de toda mi vida y especialmente  
en los últimos años, me han estado apoyando y animando para proseguir  
mi labor.

Igualmente, quiero mencionar a todos mis compañeros que -  
iniciaron la tarea de investigación en esta Escuela, en especial a -  
José Angel Sainz Borda y José Manuel Sánchez Alciturri, que estudian  
temas complementarios a este trabajo y a José Revilla Cortezón, pri -  
mer Doctor de la Universidad de Santander, Antonio Aguado de Cea y -  
Jaime Puig-Pey Echebeste.

Así como a todo el personal del Departamento de Ciencias  
y Técnicas del Suelo que junto a Rafael Arroyo, José Antonio Magdale -  
na y Domingo Lorenzo, me han ayudado en la delineación y mecanogra -  
fiado.

A todos ellos, quiero nuevamente expresarles mi agrade -  
cimiento, por la amistad que siempre me han ofrecido.

INDICE

	<u>Págs.</u>
RESUMEN.....	IX
NOTACION.....	XII
LISTA DE FIGURAS Y TABLAS.....	XVIII
CAPITULO I.- ESTADO ACTUAL DEL PROBLEMA.....	1
1.- Planteamiento.....	2
2.- Parámetros que definen el comportamiento del terreno.....	4
2-1.- Generalidades.....	4
2-2.- Variación con la profundidad.....	6
2-3.- Anisotropía.....	9
2-3-1.- Fenomenología.....	9
2-3-2.- Factores que influyen.....	15
a) Orientación preferencial de las partículas.....	16
b) Orientación de las fisuras.....	18
c) Estado tensional en los contactos entre partículas.....	19
2-3-3.- Cuantificación de la anisotropía...	19
a) Anisotropía en deformación.....	19
b) Anisotropía en resistencia.....	23

	<u>Págs.</u>
3.- Métodos de análisis.....	25
3-1.- Generalidades.....	25
3-2.- Análisis tenso-deformacional.....	25
3-2-1.- Generalidades.....	25
3-2-1-1.- Método de los desplazamien <u>tos</u> o de rigidez.....	27
3-2-1-2.- Método de las tensiones o de flexibilidad.....	29
3-2-1-3.- Métodos híbridos.....	30
3-2-1-4.- Métodos completos.....	32
3-2-2.- Aplicación a suelos.....	33
3-2-2-1.- Eliminación de la incom- presibilidad.....	35
3-2-2-2.- Análisis en tensiones efec <u>ti</u> vas.....	36
3-2-2-3.- Métodos híbridos.....	41
3-2-3.- Estudio comparativo de los métodos.	41
3-2-3-1.- Eliminación de la incom- presibilidad.....	41
3-2-3-2.- Análisis en tensiones - efectivas.....	42
3-2-3-3.- Métodos híbridos.....	43
3-3.- Análisis del equilibrio límite.....	43

	<u>Págs.</u>
CAPITULO II.- MODELO REOLOGICO PROPUESTO.....	49
1.- Características generales.....	50
2.- Fase elástica.....	51
3.- Criterio de rotura.....	57
3-1.- Material isótropo.....	57
3-2.- Anisotropía.....	58
3-3.- Criterio propuesto.....	63
4.- Fase plástica.....	73
5.- Interpretación de los ensayos convencionales.....	77
CAPITULO III.- MODELO MATEMATICO ADOPTADO Y METODO DE RESOLUCION.....	88
1.- Características generales del modelo.....	89
2.- Fase elástica.....	89
2-1.- Principio variacional.....	89
2-2.- Discretización en elementos finitos.....	96
2-3.- Introducción de las fuerzas másicas y exte- riores.....	101
3.- Plastificación del material.....	102
3-1.- Reproducción de la plastificación progresi- va.....	102
3-2.- Ley tensión-deformación.....	104
3-3.- Matriz de rigidez de los elementos plasti- ficados.....	108

	<u>págs.</u>
CAPITULO IV.- TIPOS DE ELEMENTOS FINITOS EMPLEADOS...	111
1.- Introducción.....	112
2.- Elemento triangular híbrido de deformación const.	112
2-1.- Descripción.....	112
2-2.- Matrices elementales.....	113
2-2-1.- Funciones de forma. Matriz $ N^* $ ....	113
2-2-2.- Deformaciones generalizadas. Matrices $ B^* $ y $ B_i $ .....	114
2-2-3.- Matriz tensión-deformación generalizada.....	116
2-2-4.- Matriz tensión-desplazamientos no - dales.....	116
2-2-5.- Matriz de rigidez.....	117
2-3.- Cargas máscas y superficiales.....	117
2-4.- Aplicabilidad.....	118
2-4-1.- Experiencias previas.....	118
2-4-2.- Resultados obtenidos.....	119
3.- Elemento cuadrangular híbrido.....	122
3-1.- Descripción.....	124
3-2.- Matrices elementales.....	124
3-2-1.- Funciones de forma-Matriz $ N^* $ .....	124
3-2-2.- Deformaciones generalizadas-Matrices $ B^* $ y $ B_i $ .....	126

	<u>Págs.</u>
3-2-3.- Matriz tensión-deformación genera - lizada.....	127
3-2-4.- Matriz tensión-desplazamientos no - dales.....	127
3-2-5.- Matriz de rigidez.....	127
3-3.- Cargas máxicas y superficiales.....	129
3-4.- Aplicabilidad.....	130
4.- Estudio comparativo de elementos.....	130
- Ejemplo a.....	131
- Ejemplo b.....	135
- Ejemplo c.....	140
 CAPITULO V.- EJEMPLOS DE APLICACION.....	 145
1.- Introducción.....	145
2.- Casos estudiados.....	146
3.- Resultados.....	151
3-1.- Caso básico.....	151
3-2.- Otros casos.....	158
3-3.- Influencia de la heterogeneidad.....	159
3-4.- Influencia de la anisotropía.....	167
3-5.- Influencia del espesor del estrato de arci - lla.....	172
4.- Influencia del contorno lateral.....	174
 CAPITULO VI.- CONCLUSIONES.....	 176

	<u>Págs.</u>
ANEJO 1.- CONVENIO DE SIGNOS Y DEFINICION DE LOS PARAMETROS ELASTICOS.....	180
1.- Convenio de signos.....	181
1-1.- Tensiones.....	181
1-2.- Deformaciones.....	182
1-3.- Desplazamientos.....	182
1-4.- Fuerzas.....	182
1-5.- Angulos.....	182
2.- Definición de los Parámetros Elásticos.....	183
2-1.- Módulos de elasticidad.....	183
2-2.- Coeficientes de Poisson.....	183
2-3.- Módulos transversales.....	184
 ANEJO 2.- PRINCIPIO VARIACIONAL.....	 188
1.- Introducción.....	187
2.- El Principio de REISSNER.....	187
3.- Desarrollo en Deformación Plana.....	188
4.- Introducción de la función de tensiones H.....	190
5.- Comparación con otros funcionales.....	193
6.- Expresión en función de los desplazamientos.....	194
7.- Minimización del funcional propuesto.....	195
8.- Generalización en plasticidad.....	205

	<u>Págs.</u>
ANEJO 3.- MATRIZ TENSION-DEFORMACION GENERALIZADA EN PLASTICIDAD.....	208
ANEJO 4.- DESARROLLO DE LOS PROGRAMAS.....	212
1.- Introducción.....	213
2.- Triángulos.....	213
2-1.- Entrada de datos.....	213
2-2.- Resolución de la malla.....	217
3.- Cuadriláteros.....	230
3-1.- Introducción.....	230
3-1-1.- Formación de la mall, entrada de - datos.....	230
3-1-2.- Resolución de la malla.....	234
4.- Organigrama.....	245
5.- Listado de programas.....	246
6.- Ejemplo de presentación de resultados.....	284
BIBLIOGRAFIA.....	300

RESUMEN

## RESUMEN

En el presente trabajo se pretende abordar un problema geotécnico muy importante como es el de cargas rápidas sobre arcillas.

Este es el caso normal de cálculo para cargas sobre arcillas, pues si bien no se produce generalmente la aplicación de cargas rápidas, es cierto que la aplicación de las cargas es normalmente más rápida que la disipación de las presiones intersticiales.

Se estudian las condiciones en servicio, así como el proceso que ocurre al producirse la rotura del suelo. Consta de las siguientes partes :

- a) Estudio bibliográfico del estado actual del problema, definiéndose los factores fundamentales en la influencia del comportamiento de la arcilla, y cuales son los que en los modelos actuales se tienen en cuenta y cuales deberían de considerarse.
- b) Elaboración de un modelo elasto-plástico, pues es considerado el más representativo del comportamiento del suelo, en el cual se reproduzca la plastificación progresiva del material, definiendo un nuevo criterio de rotura que pueda incluir los factores más representativos del comportamiento de la arcilla, incluso la anisotropía y la heterogeneidad de la misma que no eran considerados anteriormente.
- c) Introducción de este modelo reológico en un nuevo modelo de elementos finitos. De entre las diferentes posibilidades se ha ele-

gido un modelo híbrido en tensiones y deformaciones, para lo cual partiendo del principio variacional de REISSNER, se ha generalizado para estudiar la fase plástica.

La discretización se ha efectuado con elementos triangulares y cuadrangulares híbridos

- d) Aplicación del modelo anterior a título de ejemplo a un caso típico en geotecnia, concretamente el de una zapata en faja indefinida actuando sobre una capa de arcilla deformable sobre una base rocosa rígida con interfaz lisa, variándose todos los parámetros que en él intervienen y deducción de una serie de conclusiones sobre la influencia de los factores estudiados en el comportamiento de la arcilla.

## NOTACION

A	=	Parametros del criterio de rotura, definido en (12-45)
B	=	Parametro del criterio de rotura, definido en (2-45)
B	=	Matriz de deformaciones
B*	=	Matriz de deformaciones generalizadas
B <sub>1</sub>	=	Matriz de deformaciones semigeneralizada
C	=	Cohesión, Parametro del criterio de rotura definido en (2-45)
C'	=	Cohesión efectiva
C <sub>u</sub>	=	Cohesión sin drenaje
C <sub>h</sub>	=	Cohesión en planos horizontales
C <sub>v</sub>	=	Cohesión en planos verticales
C	=	Matriz tensión-deformación
D	=	Desviador de rotura
D <sub>c</sub>	=	Desviador de rotura en compresión
D <sub>e</sub>	=	Desviador de rotura en extensión
D <sub>m</sub>	=	Parámetro de HVORSLEV
D <sub>u</sub>	=	Desviador de rotura en proceso sin drenaje
D*	=	Matriz definida en (4-22)
E	=	Energía de deformación
E	=	Módulo de elasticidad en dirección horizontal
E <sub>1</sub>	=	Módulo de elasticidad en dirección vertical
E <sub>u</sub>	=	Módulo de elasticidad sin drenaje
E <sub>x</sub>	=	Módulo de elasticidad en la dirección X

$E_y$	= Módulo de elasticidad en la dirección $Y$
$F^*$	= Fuerzas nodales generalizadas
$F_e^*$	= Fuerzas nodales generalizadas equivalentes
$F_p$	= Factor de plasticidad
$G$	= Módulo de elasticidad transversal en el plano $XY$
$G_1$	= Módulo de elasticidad transversal en el plano $XZ$
$H$	= Función de tensiones, definida en (1-9)
$ H $	= Matriz, componente de la matriz de rigidez en plasticidad
$K$	= Párametro de HVORSLEV
$K_0$	= Coeficiente de empuje en reposo
$ K $	= Matriz de rigidez
$ K_e $	= Matriz de rigidez elemental
$M$	= Párametro del criterio de rotura, definido en (2-45)
$ M $	= Matriz tensión-deformación en elasticidad
$ M^p $	= Matriz tensión-deformación en plasticidad
$ N $	= Matriz de las funciones de forma
$ N^* $	= Matriz de las funciones de forma generalizada
$O$	= Centro de coordenadas
$P_1$	= Factor de plasticidad
$P_0$	= Presión de consolidación
$P_c$	= Presión de sobre consolidación
$R$	= Radio

R.S.C.	= Razón de sobre consolidación
T	= Toneladas
V	= Volúmen
W	= Densidad de energía
W <sub>c</sub>	= Densidad de energía complementaria
a	= Función del criterio de rotura (2-33)
b	= Función del criterio de rotura (2-38)
e	= Referente a elasticidad
f	= Fuerzas de masa
$\{f_1\}$	= Matriz columna, tensional definida en (3-33)
g	= Fuerzas de superficie
i	= Gradiente de $\phi$
m	= Metro
P	= Fuerzas de superficie Referente a plasticidad
q	= Sobrecarga del terreno.
r	= Reacciones en el contorno. Razón de módulos de elasticidad.
u	= Desplazamiento en dirección horizontal. Presión intersticial.
u	= Presión intersticial obtenida en el proceso de cálculo de CHRISTIAN
v	= Desplazamiento en dirección vertical
z	= Profundidad

$\Delta$	= Incrementos
$\varepsilon$	= Deformaciones
$\dot{\varepsilon}$	= Incremento de deformaciones
$\varepsilon^*$	= Deformaciones generalizadas
$\varepsilon_x$	= Deformaciones en la dirección X
$\varepsilon_y$	= Deformaciones en la dirección Y
$\varepsilon_z$	= Deformaciones en la dirección Z
$\sigma$	= Tensiones normales
$\dot{\sigma}$	= Incremento de tensiones
$\sigma_\alpha$	= Tensión normal sobre un plano $\alpha$
$\sigma'_x$	= Tensión horizontal efectiva
$\sigma'_z$	= Tensión vertical efectiva
$\dot{\tau}$	= Incremento de tensión tangencial
$\tau_\alpha$	= Tensión tangencial en plano $\alpha$
$\tau_{cr}$	= Tensión tangencial de rotura
$\tau_{xy}$	= Tensión tangencial sobre el plano Z
$\tau_{xz}$	= Tensión tangencial sobre el plano Y
$\tau_{yz}$	= Tensión tangencial sobre el plano X
$\Sigma$	= Superficie del contorno
$\Sigma_p$	= Superficie de donde se conocen las fuerzas actuantes
$\pi_g$	= Principio variacional general
$\pi_p$	= Energía potencial
$\pi_R$	= Principio variacional de Reissuen

- $\phi$  = Función de presiones  
 $\Omega$  = Recinto  
 $\alpha$  = Angulo que forma un plano con la horizontal  
 Párametro de la función de forma  
 $\beta$  = Párametro de la función de forma  
 $k$  = Constante de la ley de la normalidad  
 $\phi$  = Angulo de rozamiento interno  
 $\phi'$  = Angulo de rozamiento interno efectivo  
 $\phi_e$  = Párametro de HVORSLEV  
 $\delta$  = Desplazamientos  
 $\delta_e^*$  = Desplazamientos modales generalizados  
 $\delta_H$  = Variable definida en (3-12)  
 $\nu$  = Coeficiente de Poisson en el plano horizontal  
 $\nu_i$  = Coeficiente de Poisson en cualquier plano vertical  
 $\nu_u$  = Coeficiente de Poisson sin drenaje  
 $\gamma$  = Densidad  
 $\gamma_{sat}$  = Densidad saturada  
 $\gamma_w$  = Densidad de agua  
 $\gamma_{xy}$  = Deformación angular en el plano Z  
 $\gamma_{xz}$  = Deformación angular en el plano Y  
 $\gamma_{yz}$  = Deformación angular en el plano X  
 $\mu$  = Coeficiente de Poisson

LISTADO DE FIGURAS  
Y TABLAS

## LISTADO DE FIGURAS Y TABLAS

### Figuras:

- 1-1.- Relación entre  $C_{u_0}$  ,  $\sigma'_0$  y R. S. C.
- 1-2.- Efecto de la sobreconsolidación sobre el módulo E. (LADD, - 1.965).
- 1-3.- Módulo sin drenaje en función de la profundidad (BURLAND y - WROTH, 1.974).
- 1-4.- Ensayo de compresión simple con orientación variable. Tensiones en el plano de rotura.
- 1-6.- Efecto de la orientación de la probeta sobre la resistencia - sin drenaje (SKEMPTON, A. W. y HUTCHINSON, J., 1.969)
- 1-7.- Anisotropía en resistencia. Ensayos de molinete in situ y de corte simple (BJERRUM, 1.973).
- 1-8.- Curvas comparativas de la estructura de la arcilla marrón superior de Winnipeg (LOH y HOLT, 1.974).
- 1-9.- Ensayos de compresión con orientación variable (LOH y HOLT, - 1.974).
- 1-10.- Anisotropía en deformación (LOH y HOLT, 1.974).
- 1-11.- Módulo de elasticidad en función de la orientación.
- 1-12.- Relación  $E_u/C_u$  en función de la orientación.
- 1-13.- Resultado presentados por MATSUMOTO, (1.976).

- 1-14.- Tensiones y deformaciones bajo un terraplén. Comparación cálculo-mediciones (WROTH y SIMPSON, 1.972)
- 1-15.- Red de características con cohesión variable (DAVIS y BOOKER, 1.973).
- 1-16.- Factores de corrección para zapatas lisas y rugosas (DAVIS y BOOKER, 1.973)
- 1-17.- Presión de hundimiento en coordenadas reducidas (SALEMÇON et al, 1.976).
- 1-18.- Equilibrio límite (método cinemático) de una zapata en terreno heterogéneo y anisótropo (CHEN, 1.975).
- 1-19.- Equilibrio límite (método cinemático) de un talud de terreno heterogéneo y anisótropo (CHEN, 1.975).
  
- 2-1.- Límite de las constantes elásticas. (PICKERING, 1.970)
- 2-2.- Convenio de signos.
- 2-3.- Ensayos de corte simple con orientación variable (BJERRUM 1.973).
- 2-4.- Criterio de rotura propuesto.
- 2-5.- Superficie de rotura.
- 2-6.- Ensayos de De LORY Y LAI (1.971).
- 2-7.- Superficie de rotura de la arcilla de WELLAND.
- 2-8.- Ecuación 2-56.
- 2-9.- Ecuación 2-57.
- 2-10.- Indicación de los planos de rotura en función de  $\kappa_0$  .
- 2-11.- Planos de rotura.
  
- 3-1.- Dominio.

- 4-1.- Resultados de HWANG et al, 1.969.
- 4-2.- Criterios óptimos de promediar las tensiones.
- 4-3.- Malla rígida.
- 4-4.- Ejemplo a.
- 4-5.- Mallas utilizadas en el ejemplo a.
- 4-6.- Deformaciones en cada malla. Ejemplo a.
- 4-7.- Leyes de  $\sigma_y$  y  $\sigma_x$  sobre el plano horizontal medio. Ejemplo a.
- 4-8.- Ejemplo b.
- 4-9.- Mallas utilizadas en el ejemplo b.
- 4-10.- Deformaciones en cada malla. Ejemplo b.
- 4-11.- Distribución de  $\sigma_y$  en cada malla del ejemplo b.
- 4-12.- Ejemplo c.
- 4-13.- Tipos de mallas empleadas en el ejemplo c.
- 4-14.- Tensiones verticales en el plano de simetría, comparación de resultados.

- 5-1.- Esquema del problema estudiado.
- 5-2.- Malla en los casos 1 á 6.
- 5-3.- Malla en el caso 7.
- 5-4.- Malla en el caso 8.
- 5-5.- Caso 1 - Fase elástica - Isobaras de  $\sigma_y/P$ .
- 5-6.- Caso 1 - Fase elástica - Isobaras de  $\sigma_x/P$ .
- 5-7.- Caso 1 - Fase elástica - Isobaras de  $\tau_{xy}/P$ .
- 5-8.- Caso 1 - Fase elástica - Isobaras de  $\sigma_1/P$ .
- 5-9.- Caso 1 - Fase elástica - Isobaras de  $\sigma_3/P$ .
- 5-10.- Caso 1 - Fase elástica - Isobaras de  $u/P$ . ( $u = \sigma_{oct}$ ).
- 5-11.- Caso 1 - Zonas de plastificación progresiva en función de  $P/P_{hi}$ .
- 5-12.- Caso 1 - Desplazamientos de la superficie. Valores adimensionales.
- 5-13.- Caso 1 - Ley carga-asiento en el punto medio de la zapata.
- 5-14.- Caso 2 - Plastificación progresiva en función de  $P/P_{hi}$ .
- 5-15.- Caso 3 - Plastificación progresiva en función de  $P/P_{hi}$ .
- 5-16.- Caso 4 - Plastificación progresiva en función de  $P/P_{hi}$ .
- 5-17.- Caso 5.- Plastificación progresiva en función de  $P/P_{hi}$ .
- 5-18.- Caso 6 - Plastificación progresiva en función de  $P/P_{hi}$ .
- 5-19.- Caso 7 - Plastificación progresiva en función de  $P/P_{hi}$ .
- 5-20.- Influencia de la heterogeneidad en las zonas plastificadas inicial y final. Casos isótropos.
- 5-21.- Influencia de la heterogeneidad en las zonas plastificadas inicial y final. Casos anisótropos.

- 5-22.- Desplazamientos de superficie. Casos isótropos.
- 5-23.- Desplazamientos de superficie. Casos anisótropos.
- 5-24.- Influencia de la heterogeneidad en la ley carga-asiento. Casos isótropos.
- 5-25.- Influencia de la heterogeneidad en la ley carga-asiento. Casos anisótropos.
- 5-26.- Influencia de la anisotropía en las zonas plastificadas inicial y final. Casos homogéneos.
- 5-27.- Influencia de la anisotropía en las zonas plastificadas inicial y final. Casos heterogéneos.
- 5-28.- Desplazamientos de superficie. Caso homogéneos.
- 5-29.- Desplazamientos de superficie. Caso heterogéneos.
- 5-30.- Influencia de la anisotropía en las ley carga-asiento. Casos homogéneos.
- 5-31.- Influencia de la anisotropía en las ley carga-asiento. Casos heterogéneos.
- 5-32.- Desplazamientos de superficie. Casos  $H=8m$  y  $H=3m$
- 5-33.- Ley carga-asiento. Casos  $H=8m$  y  $H=3m$ .
- 5-34.- Desplazamientos de superficie. Caso 2 -  $l=14m$  y  $l=29m$ .
- 5-35.- Ley de  $\sigma_y$  Casos de  $l=14$  y  $l=29m$ .
- A1-1.- Convenio de signos. Tensiones.
- A1-2.- Convenio de signos. Deformación angular.
- A1-3.- Convenio de signos. Angulos.

Tablas:

5-1.- Características de los casos estudiados.

## CAPITULO I

### ESTADO ACTUAL DEL PROBLEMA

## ESTADO ACTUAL DEL PROBLEMA

### 1.- PLANTEAMIENTO

En el presente trabajo se aborda el problema de la respuesta del terreno, cuando está constituido por arcillas blandas saturadas, frente a procesos de cargas rápidas y considerando la situación que se origina a corto plazo, sin dar tiempo a que se disipen los incrementos de presiones intersticiales, es decir, sin que se inicie el drenaje del suelo.

Interesa sobre todo profundizar en dos aspectos del problema :

- I) Respuesta del suelo frente a las condiciones de servicio, es decir, conocimiento de las deformaciones originadas en el terreno. La finalidad práctica de este punto suele ser la determinación de los movimientos de la estructura proyectada, así como sus posibles efectos en las estructuras próximas.

II) Seguridad que se alcanza frente al estado límite de rotura del suelo.

Los métodos tradicionales de plantear estos problemas lo abordan siguiendo los dos aspectos que se acaban de exponer por separado, es decir, o bien estudiando la situación de servicio mediante análisis elásticos o pseudoelásticos, como pueden ser estudios edométricos o bien analizando la situación en rotura planteando en este caso el equilibrio límite. En cualquiera de los dos planteamientos ( en servicio o rotura ) el problema puede analizarse en dos formas :

- a) En tensiones efectivas calculando o midiendo los incrementos de tensiones intersticiales y aplicando los parámetros efectivos de deformabilidad y de resistencia que definen el comportamiento del suelo.
- b) En tensiones totales utilizando los parámetros de deformabilidad y de resistencia del suelo en presiones totales.

En este caso los parámetros son diferentes para cada proceso de carga y deben usarse sólo cuando se han obtenido de ensayos que reproduzcan el proceso real, sobre todo en lo referente a las condiciones de drenaje.

La selección y cálculo mediante ensayos y experiencias reales

de los parámetros necesarios para cada modelo y que sean representativos del comportamiento del terreno según los criterios que se adopten, es una labor delicada.

LAMBE (1.973) comenta ambos métodos y define los parámetros (y los ensayos precisos para su obtención), necesarios para su planteamiento y resolución.

Sin embargo, no hay acuerdo sobre la posibilidad de realizar ambos análisis (en tensiones totales o efectivas). Parece ser que el análisis en efectivas no es adecuado por la dificultad de estimar los incrementos de la presión intersticial y por otras razones, por lo que se tiende al análisis del problema en tensiones totales, usando los parámetros correspondientes.

## 2.- PARAMETROS QUE DEFINEN EL COMPORTAMIENTO DEL TERRENO

### 2-1.- GENERALIDADES.

En los modelos tradicionales se considera el terreno como isótropo.

En elasticidad se suele emplear la ley lineal de HOOKE que en el caso del sólido incompresible viene definida por el módulo de elasticidad sin drenaje ( $E_u$ ), ya que los otros parámetros empleados

en elasticidad, al introducir la condición de no drenaje (cambio de volumen nulo) quedan ya definidos de la siguiente forma :

$$\nu_u = 0.5$$

En cuanto a resistencia se emplea el criterio de TRESCA definido por la cohesión sin drenaje  $C_u$ , siendo para este caso, el ángulo de rozamiento ( $\phi = 0$ ).

Los estudios se han centrado por tanto principalmente en los parámetros  $E_u$  y  $C_u$ , comprobándose su dependencia de los siguientes factores :

- a) Características del terreno : Mineralogía, índice de plasticidad, porosidad, etc.
- b) Historia tensional efectiva que puede comprender los siguientes aspectos :
  - b-1) Presión de consolidación :  $P_o$ , a la cual está sometido el suelo en cada punto.
  - b-2) Máxima presión de consolidación :  $P_c$ , a la cual ha estado sometido en toda su historia.

Con  $P_c$  y  $P_o$  se define la razón de sobreconsolidación como entre ambas :

$$R.S.C. = \frac{P_c}{P_o} \quad (1-1)$$

b-3) Tensión horizontal existente : La tensión horizontal en el caso del terreno con superficie horizontal no sometido a otros esfuerzos que a su peso propio viene definida por la tensión vertical y el factor  $K_0$  (coeficiente de empuje en reposo) por la presión :

$$\sigma'_x = K_0 \sigma'_z \quad (1-2)$$

En los últimos años los estudios se han centrado en analizar la influencia de la historia tensional del suelo en los parámetros del mismo obteniéndose las siguientes conclusiones: Las presiones de consolidación ( $P_0$  y  $P_c$ ) hacen variar  $E_u$  y  $C_u$  con la profundidad y el hecho de que  $K_0$  sea diferente de la unidad y variable, hacen que los suelos sean anisótropos como comentaremos con detalle en el apartado siguiente.

Se amplian a continuación estas dos importantes conclusiones.

## 2-2.- VARIACION CON LA PROFUNDIDAD.-

Los estudios de variación de la deformabilidad con la profundidad se han desarrollado posteriormente a los de estudio de la resistencia, pero es generalmente admitido que para un suelo dado entre el módulo de deformación  $E_u$  y la cohesión  $C_u$ , existe una relación aproximadamente constante, por lo tanto, las variaciones que se supongan de  $C_u$  con la profundidad, pueden extrapolarse al menos aproximadamen-

te al módulo de elasticidad.

LADD y FOOTT (1.974) comprueban que la relación entre la resistencia al corte sin drenaje,  $C_u$  y la presión de consolidación  $P_0$ , es aproximadamente lineal, para suelos normalmente consolidados y para los suelos sobreconsolidados si no varía la razón de sobreconsolidación ( R. S. C. ), siendo la dispersión de los resultados en arcillas blandas menor del 10 %. De sus resultados se desprende que para un suelo dado el coeficiente  $C_u/P_0$  es función única de la razón de sobreconsolidación ( R. S. C. ), al menos aproximadamente. Fig. (1-1)

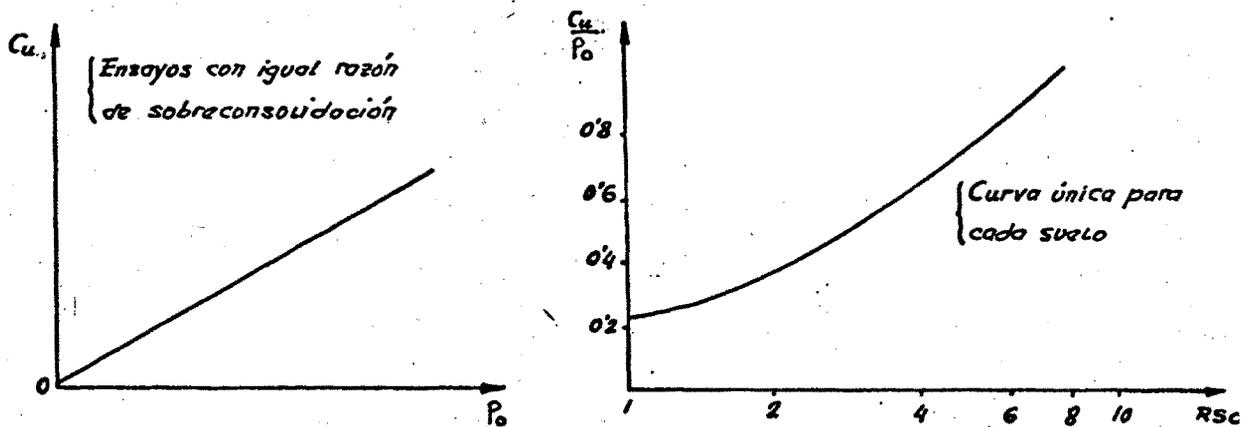


fig. (1-1).- Relación entre  $C_u$ ,  $P_0$  y R.S.C.

En (1.965) LADD realiza un estudio de la variación del módulo de elasticidad sin drenaje con la presión de consolidación  $P_0$  de la arcilla, a base de ensayos de laboratorio.

En sus estudios LADD comprueba que la sobreconsolidación hace el suelo más rígido y resistente, siendo más notable dicho efecto en la resistencia. En la figura (1-2) se ve en varias arcillas que el módulo  $E_u$  aumenta con la razón de sobreconsolidación, aunque para valores elevados de dicha razón este fenómeno no se aprecia muy bien.

Ensayos recientes tanto de campo como laboratorio han confirmado estas predicciones, en la figura (1-3) puede verse una recopilación de ensayos in situ realizados por diversos autores (BURLAND y WROTH 1.974).

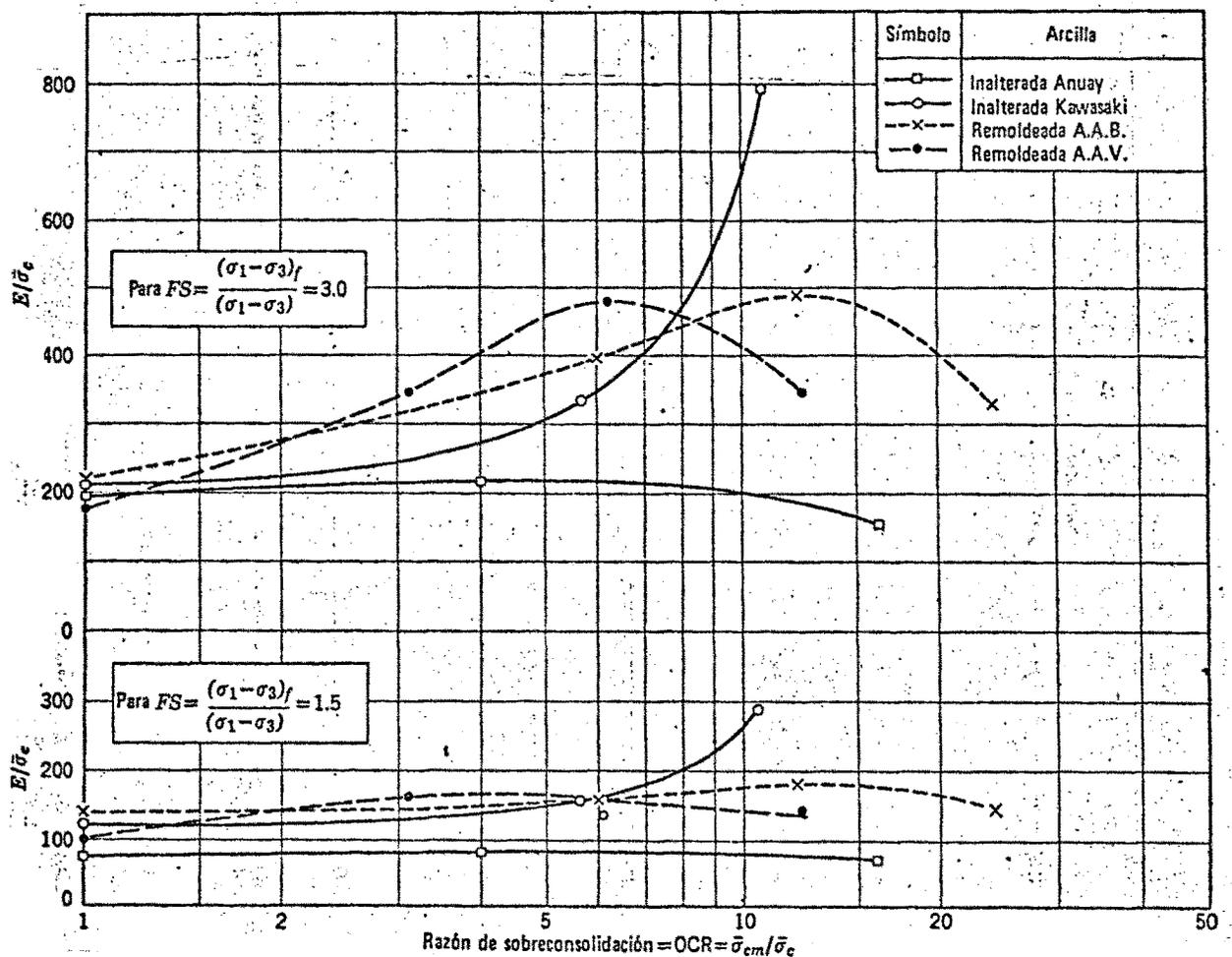


fig. (1-2).- Efecto de la sobreconsolidación sobre el módulo  $E$ . (LADD, 1.965).

Se observa en todos los casos como el módulo de elasticidad sin drenaje  $E_u$ , aumenta con la profundidad, siendo esta variación más acusada en unos casos que en otros; todas las determinaciones de  $E_u$  que muestra la figura (1-3) han sido en ensayos de campo.

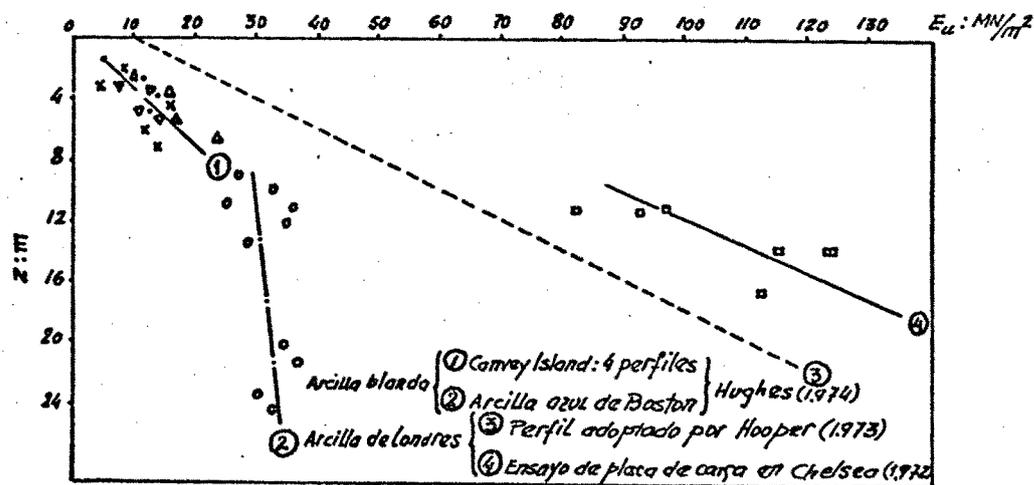


fig. (1-3).- Módulo sin drenaje en función de la profundidad (BURLAND y WROTH, 1.974).

### 2.3.- ANISOTROPIA.

2.3.1.- FENOMENOLOGIA.- Ya en 1.949 HANSEN y GIBSON predicen teóricamente que la arcilla tendrá un comportamiento anisótropo debido a la no isotropiade las tensiones durante la consolidación de la misma. En estas condiciones es presumible que en las direcciones horizontales la arcilla se comporte de forma idéntica en todas ellas y diferente en la dirección vertical. Este fenómeno se conoce con el nombre de anisotropía transversal.

En un estudio elástico/anisótropo, con anisotropía transversal, el comportamiento del modelo viene definido por cinco parámetros ( URIEL

y CAÑIZO, 1,971). En lo que sigue se tomarán los siguientes parámetros,  $E_x$ ,  $E_y$ ,  $G$ ,  $\nu_1$ ,  $\nu_2$ ; siendo cada uno de ellos lo siguiente:

$E_x$  = Módulo de Elasticidad en dirección horizontal.

$E_y$  = Módulo de Elasticidad en dirección vertical.

$G$  = Módulo de Elasticidad transversal en el plano XY.

$\nu_1$  = Coeficiente de Poisson en el plano horizontal definido como la deformación producida en una dirección unitaria en una dirección perpendicular dentro del plano horizontal.

$\nu_2$  = Coeficiente de Poisson en cualquier plano vertical, expresando la deformación producida en la dirección horizontal del mismo al producirse una deformación unitaria en la dirección vertical.

En el caso de proceso de carga sin drenaje ( cambio de volumen nulo ), los parámetros en tensiones totales quedan.

$$\nu = 1/2$$

$$\nu_1 = 1 - \frac{E_x}{2E_y}$$

En resistencia al igual que en deformabilidad es conveniente utilizar un criterio de rotura que tenga en cuenta el fenómeno de la anisotropía como el que se desarrolla a lo largo de este trabajo.

Recientemente la influencia de la anisotropía se ha puesto de

manifiesto en arcillas al realizarse varios tipos de ensayos:

-a) Ensayos de corte simple (BJERRUM y LANDVA, 1.966, ROSCOE, 1.970, BJERRUM, 1.973) BJERRUM y LANDVA (1.966) encuentran que la razón  $\frac{C_u}{P_o}$  en corte simple es menor que ensayos triaxiales normales, fenómeno que atribuyen a la anisotropía.

-b) Ensayos triaxiales verdaderos (HAMBLY, 1.969) o comparación entre ensayos de compresión y extensión (LADD y BALLEY, 1.964). En este último caso se encuentra que la relación  $\frac{C_u}{P_o}$  para ensayos de tensión triaxial es mucho menor, que para ensayos de compresión triaxial para muestras consolidadas con presiones laterales equivalentes a las de un estado en reposo.

-c) Ensayos de compresión simple sobre probetas talladas en varias direcciones (BISHOP, 1.966; LO, 1.965; De LORY y LAI 1.971). Fig. (i-4) BISHOP (1.966) concluye que en arcillas normalmente consolidadas o ligeramente consolidadas  $C_u$  es máximo para  $\theta = 0$  y mínimo  $\theta = 90^\circ$ . En arcillas fuertemente sobreconsolidadas,  $C_u$  es máximo para  $\theta = 90^\circ$ , y mínimo para  $\theta = 45^\circ$ . En arcillas con partículas fuertemente orientadas,  $C_u$  es también mínimo para  $\theta = 45^\circ$  (DUNCAN y SEED, 1.966, SANKARAN y BHASKARAN, 1.972).

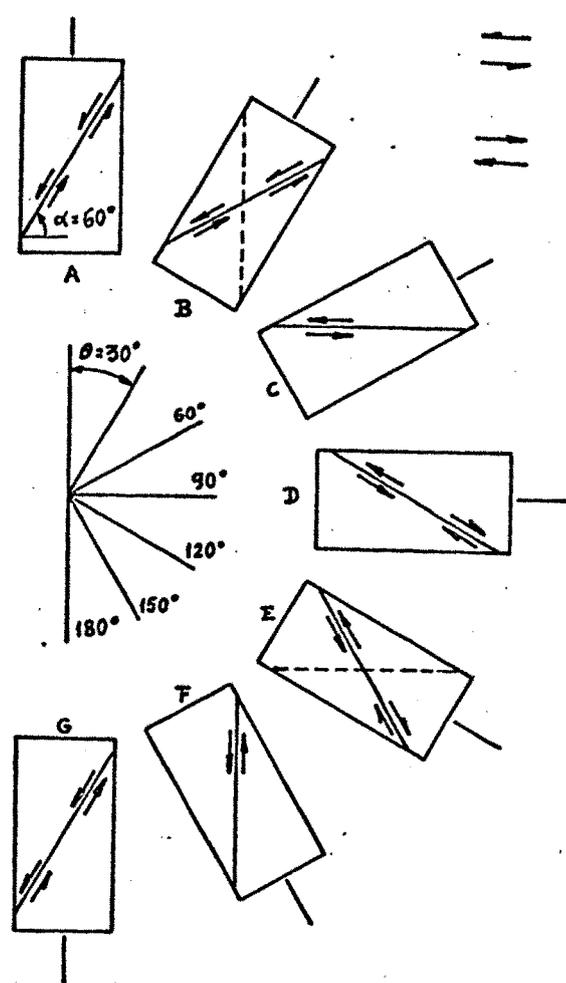


fig. (1-4).- Ensayo de compresión simple con orientación variable. Tensiones en el plano de rotura.

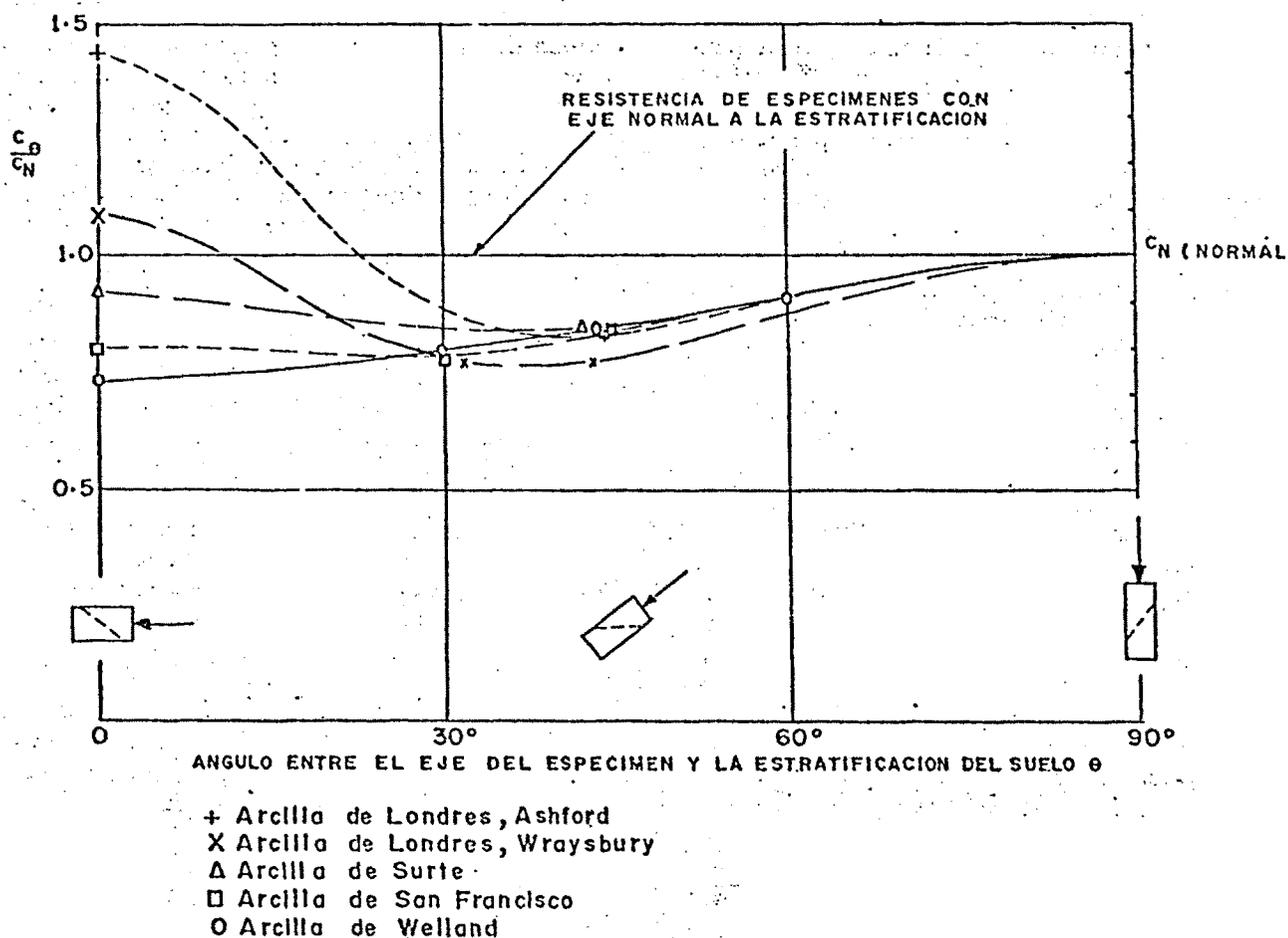


fig. (1-6).- Efecto de la orientación de la probeta sobre la resistencia sin drenaje (SKEMPTON, A. W. y HUTCHINSON, J., (1.969).

En la figura (1-6) se puede apreciar la variación de la cohesión con la dirección en varias muestras de arcillas, pertenecientes a los tipos señalados en el párrafo anterior. Diversos autores ajustan estos resultados, considerando una cohesión variable con el ángulo formado por el eje de la muestra y la estratificación del suelo, a una ley del tipo senoidal. Así, CASAGRANDE y CARRILLO (1.944) y LO (1.965) dan una

ley del tipo  $C_o = C_{II} + (C_u - C_{II}) \cos^2 \theta$ .

BISHOP (1.966) propone  $C = C_v (1 - a \sin^2 \theta) (1 - b \cdot \sin^2 \theta)$

En dos arcillas estudiadas particularmente por BISHOP encuentra que para una arcilla ligeramente sobreconsolidada  $a = 0,25$  ,  $b = 0,04$  y - para una arcilla fuertemente consolidada  $a = 0,46$  ,  $b = 0,375$ .

DELORY y LAI(1.971) proponen la ecuación :

$$C = \frac{C_v + C_H}{2} + 1/2 (C_v - C_H) \cos 2 \theta$$

que es la misma que la propuesta por CASAGRANDE y CARRILLO (1.944) y LO (1.965)

-d) Ensayos triaxiales consolidados anisótricamente, sin drenaje, (LADD, 1.965).

-e) Ensayos de molinete (AAS, 1.965; MENZIES y MAILEY, 1.976) . AAS (1.965) realiza ensayos con diversos molinetes, todos ellos de aspas rectangulares pero variando sus dimensiones, gracias a lo cual puede calcular la cohesión en los planos verticales y horizontales.

Los resultados los comenta BJERRUM (1.973) conectándolos con el índice de plasticidad de la arcilla como se puede ver en la figura(1-7).

MENZIES y MAILEY, (1.976) realizan sus ensayos con molinetes de aspas romboidales, obteniendo resultados similares.

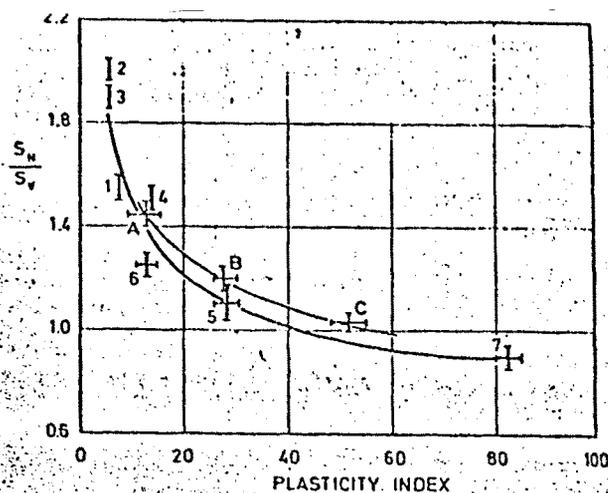


fig. (1-7).- Anisotropía en resistencia. Ensayos de momento in situ y de corte simple (BEJERRUM, 1.973)

-f) Terraplenes de ensayo. (LO y STERMAC, 1.965; STERMAC et., al 1.967; HOLLINGSHEAD y RAYMOND, 1.972; BJERRUM, 1.973, FLAATE y PREBBER, 1.974; TAVENAS et. al 1.974; LA ROCHELLE et. al 1.974; MARCHE y CHAPUIS, 1.974; DASCAL y TOURNIER, 1.975). Gran parte de las discrepancias entre resultados teóricos y experimentales se atribuyen a la anisotropía.

### 2.3.2.- FACTORES QUE INFLUYEN.

Múltiples son las causas que originan la anisotropía de las arcillas lo cual ha suscitado discusiones en cuanto a la influencia relativa de cada una de ellas sobre los resultados obtenidos.

Existe en primer lugar una pseudo anisotropía por heterogeneidad del material cuando éste consta de capas alternadas de propiedades diferentes aunque cada una de ellas sea isótropa. En este caso el material (heterogéneo) puede reducirse a un material homogéneo anisótropo equivalente. SALAMON (1.968) deduce cuales son los parámetros elásticos equivalentes que deben tomarse para el material.

En cuanto a la anisotropía verdadera, las causas que la originan en arcillas se pueden agrupar en las siguientes:

a) Orientación preferencial de las partículas

Esta orientación depende de la historia tensional de las arcillas y de su mineralogía pues se ha demostrado que con una misma historia tensional, se obtienen distintos grados de orientación para diferentes arcillas.

Las partículas, parece ser que en general, tienden a orientarse perpendicularmente a la tensión principal mayor de consolidación. QUIGLEY Y THOMPSON (1.966) miden el paralelismo mediante difracción de rayos X, paralelismo que aumenta con la presión, para arcilla de Leda, formada por illita (estructura laminar de tres capas, no expansiva) y principalmente por Clorita (estructura laminar compuesta).

Sin embargo MC CONNACHIE (1.974) encuentra mediante análisis con microscopio electrónico que en el caolín (estructura laminar de

dos capas ), crece el paralelismo hasta una presión de  $0,1 \text{ kg/cm}^2$ , a partir del cual crece muy poco o nada, siendo este incremento reversible para presiones superiores a  $0,1 \text{ kg/cm}^2$ .

BHASKARAN (1.972) llama la atención sobre los agentes dispersantes y floculantes, empleados en la preparación de las muestras, que alteran y enmascaran los resultados. Para presiones bajas, la caolinita se orienta mejor siendo la ilita la que mejor se orienta para grandes presiones.

Al distorsionarse, a lo largo de un proceso con deformación se deshace progresivamente la orientación de las partículas. Por esta razón la anisotropía es más aparente en el análisis de la deformabilidad que de la resistencia, y en ésta, es mayor en la resistencia sin drenaje, que con drenaje. Típicamente, el orden de magnitud de la relación de anisotropía es:

$$E_u \approx 200\% \text{ ó } 300\%$$

$$C_u \approx 30\%$$

$$c', \phi' < 5\%$$

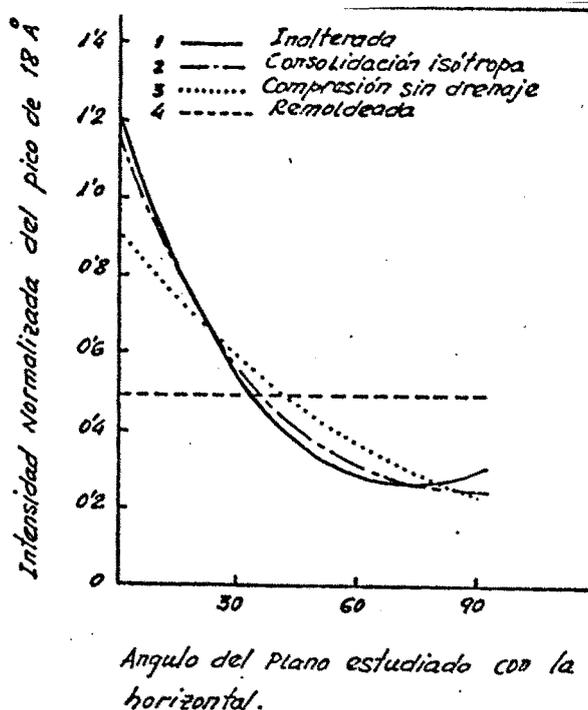


fig. (1-8).— Curvas comparativas de la estructura de la arcilla marrón superior de WINNPEG (LOH y HOLT, 1.974).

En la figura (1-8) la magnitud representada en ordenadas es un parámetro proporcional al porcentaje de partículas encontradas en cada dirección. En la curva (3) se ve como al producirse una deformación a lo largo del ensayo de compresión las partículas tienden a reorientarse, enmascarando la anisotropía existente inicialmente, curva (2).

#### b) Orientación de las fisuras

Debido a múltiples razones las arcillas duras pueden estar fisuradas; normalmente la aparición de estas fisuras está relacionada con los esfuerzos tangenciales o de tracción actuantes sobre la arcilla, por lo cual la orientación de dichas fisuras tiene unas direcciones predominantes.

En arcillas fuertemente sobreconsolidadas tienden a ser horizontales, como se presentan en la arcilla de Londres y en las margas azules del Guadalquivir (URIEL y OTEO, 1.976).

Esta orientación preferencial de las fisuras es origen de anisotropía.

c) Estado tensional en los contactos entre partículas.

Diversos estudios sobre la resistencia al corte de arcillas ponen de manifiesto que la resistencia al corte a lo largo de un plano cualquiera depende del estado tensional previo al que están sometidos los contactos entre partículas afectadas por este plano. Cuando las tensiones previas son anisótropas, como es el caso de consolidación bajo peso propio, el estado de los contactos según los diferentes planos que pasan por un punto, será diferente, lo cual da lugar a una previsible anisotropía.

2.3.3.- CUANTIFICACION DE LA ANISOTROPIA.

a) Anisotropía en deformación.

El comportamiento anisótropo en deformación de las arcillas ha sido poco estudiado. LADD (1.965) realiza una serie de ensayos en arcillas en procesos sin drenaje relacionando  $E_u$  con la presión isotropa de consolidación. Puede pensarse que al ser la presión de consolidación diferente según la dirección, igualmente variará el módulo  $E_u$ . Si la relación  $E_u/p_o$  fuese constante, se tendría:  $\frac{E_{ux}}{E_{uy}} = \frac{p_{ox}}{p_{oy}} = k_o$ , punto que no ha sido comprobado.

LOH y HOLT (1.974) efectúan una campaña de ensayos con una arcilla laminada canadiense, ligeramente sobreconsolidada, formada por

illite-montmorillonita, con fuerte orientación de partículas, obteniendo unas curvas que relacionan diversos parámetros de la arcilla.

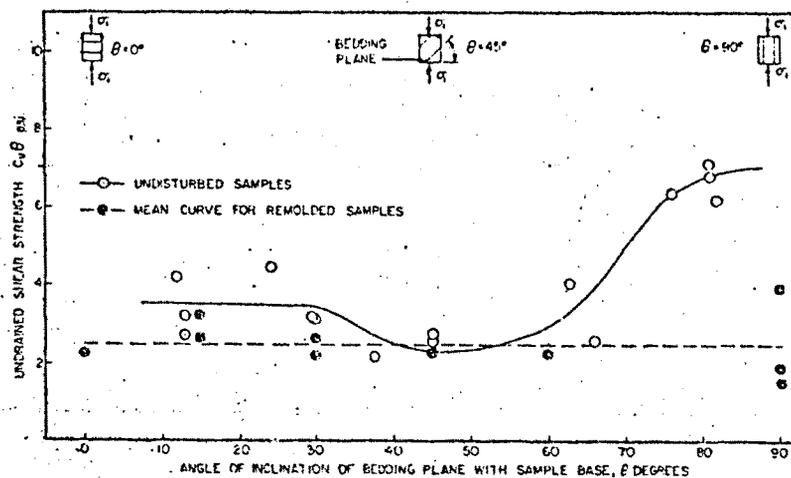


fig. (1-9).- Ensayos de compresión simple con orientación variable (LOH y HOLT, 1.974)

En la figura (1-9) puede verse la variación de la cohesión sin drenaje en función de la orientación de la probeta, mientras que en la figura (1-10) se aprecia el valor del módulo secante normalizado, en función de la orientación de la probeta y del nivel de tensiones con respecto a la rotura.

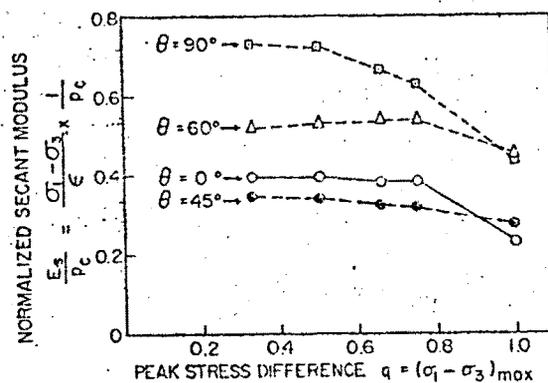


fig. (1-10).- Anisotropía en deformación (LOH y HOLT, 1.974)

En la figura (1-11) se ha dibujado las curvas de la figura (1-10) poniendo en el eje de abscisas la orientación de la probeta y dibujando las curvas para varios valores del nivel de tensión respecto a la rotura.

A partir de la figura (1-9) y (1-11) se ha realizado la figura (1-12) expresando la variación del cociente  $E_u/C_u$  en función de la orientación de la muestra. Puede verse que esta relación no es constante, en función de la dirección y varía hasta en un 200 %. Puede observarse una cierta tendencia a la isotropía al ir aumentando el nivel de tensiones, debido al incremento de deformaciones, con la consiguiente reestructuración de las partículas.

Según los ensayos realizados por WARD, SAMMUELS y BUTLER (1.959) en arcilla de Londres, se obtiene que la razón  $E_u/C_u$  es mayor en dirección horizontal que en vertical, concretamente:

$$\frac{E_x}{E_z} = 1,5 \text{ a } 2,0$$

$$\frac{C_x}{C_z} \approx 1,3$$

$$\frac{E_x / C_x}{E_y / C_y} \approx 1,3$$

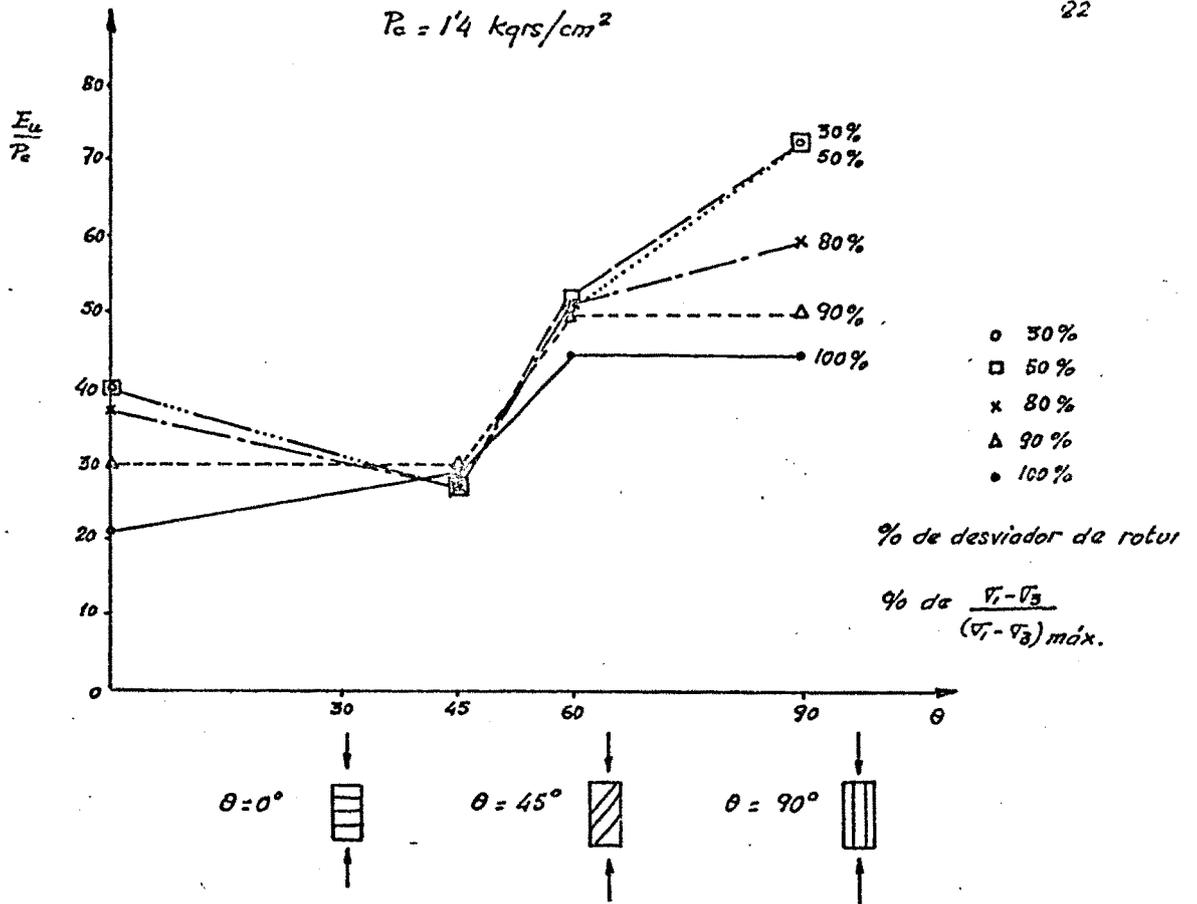


fig. (1-11).- Módulo de elasticidad en función de la orientación.

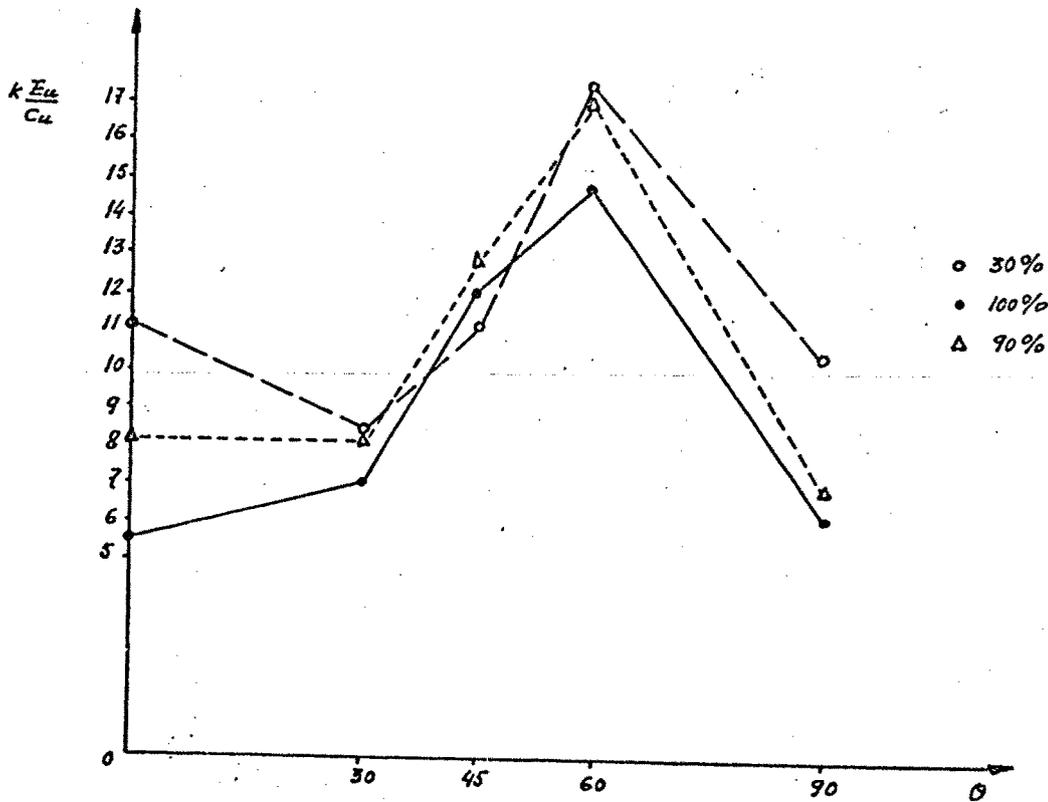


fig. (1-12).- Relación  $\frac{E_u}{C_u}$  en función de la orientación.

b) Anisotropía en resistencia

Quizá el intento más serio de cuantificar la anisotropía en resistencia sin drenaje sea el desarrollado por BJERRUM y sus colaboradores.

BJERRUM (1.973), utilizando los parámetros de HVORSLEV y basándose en la movilización progresiva de las resistencias friccional y cohesiva, llega a la conclusión de que si en un plano determinado de una arcilla actúan, durante la fase de consolidación, unas tensiones normal y tangencial  $\sigma_\alpha$  y  $\tau_\alpha$ , respectivamente, la resistencia al corte sin drenaje según dicho plano viene definida por:

$$\tau_{cr}(\alpha) = \tau_\alpha + [\sigma_\alpha \operatorname{tg} \phi_e - \tau_\alpha] D_M + K \cdot p_c \quad (1-5)$$

siendo  $K$  y  $\phi_e$  los parámetros de HVORSLEV,  $D_M$  un parámetro comprendido entre cero y uno y  $\alpha$  el ángulo que forma el plano considerado con la horizontal.

La fórmula (1-3) supone una modificación de la expresión propuesta anteriormente por el mismo autor, (BJERRUM y KENNEY, 1.967), en la que no se introducía el parámetro  $D_M$ , suponiendo que la movilización de la resistencia friccional se debía exclusivamente a  $\tau_\alpha$ , esto - producía ciertas discrepancias con los resultados de los ensayos que fueron anuladas al introducir este nuevo parámetro.

Las hipótesis concretas en que se basa la fórmula anterior son:

a) La resistencia al deslizamiento de los contactos tiene un sumando friccional y otro cohesivo.

b) La resistencia cohesiva se moviliza con una deformación tangencial muy pequeña (del orden del 1 %), mientras que la resistencia friccional necesita una deformación bastante mayor que suponga un reajuste importante en la estructura del esqueleto del suelo. (SCHMER TMAN y OSTERBERG, 1.960).

c) La rotura sin drenaje se produce para deformaciones pequeñas, con lo cual sólo se puede contar con el sumando cohesivo y la parte de resistencia friccional movilizada previamente, durante la consolidación de la arcilla.

d) En esta movilización de resistencia friccional juega un papel preponderante la tensión tangencial previa,  $\tau_{\alpha}$ , pero también interviene la tensión normal,  $\sigma_{\alpha}$ , ya que, a escala de las partículas, esta tensión normal produce esfuerzos tangenciales en los contactos (cuya resultante en el plano considerado es obviamente nula).

e) La influencia relativa de  $\sigma_{\alpha}$  se incluye por medio del factor  $D_M$ . La condición de que  $D_M$  valga entre 0 y 1 expresa que la fricción movilizada no pueda superar nunca la resistencia total según el plano considerado,  $\sigma_{\alpha} \cdot \text{tg } \phi$  e.

### 3.- MÉTODOS DE ANÁLISIS

#### 3.1.- GENERALIDADES.

Para la resolución de los dos aspectos del problema citados en el apartado 1 (deformaciones y seguridad frente a la rotura) los métodos empleados son de dos tipos :

- Análisis tenso-deformacional.
- Análisis del equilibrio límite.

Los primeros suelen analizar las condiciones del terreno para los valores de las cargas en servicio, estudiándose en los métodos tradicionales el problema elásticamente aunque recientemente con la aparición de métodos numéricos potentes y ordenadores electrónicos se ha podido realizar en algunos casos el análisis elasto-plástico.

En el segundo tipo de métodos empleados se estudia la situación en rotura.

#### 3.2.- ANÁLISIS TENSO-DEFORMACIONAL.

##### 3.2.1.- GENERALIDADES.

La formulación de los problemas de equilibrio mediante análisis tenso-deformacional requiere el planteamiento de un conjunto de -

ecuaciones que determinan los campos de tensiones y deformaciones. Dicho planteamiento se puede realizar principalmente por dos caminos diferentes:

A) Planteando directamente los tres sistemas básicos de ecuaciones diferenciales y procediendo a su resolución analítica o numérica.

Los campos solución deberán cumplir los siguientes sistemas de ecuaciones:

- Ecuaciones de equilibrio, tanto interno como externo (ecuaciones de contorno en fuerzas). Representan el equilibrio de un elemento diferencial en el interior del cuerpo, y las relaciones entre esfuerzos internos (tensiones) y presiones aplicadas en la superficie (condiciones de contorno).
- Ecuaciones de compatibilidad, son las relaciones que expresan las deformaciones unitarias en función de los desplazamientos, asignando en algunos casos valores especificados a estos en parte de la superficie (condiciones en contorno en desplazamientos).
- Relaciones constitutivas del material que relacionan las tensiones con las deformaciones o viceversa.

B) Definiendo un principio variacional asociado, basado o no en principios energéticos, cuyas ecuaciones de Euler sean las mismas ecuaciones diferenciales que en el caso A) y procediendo a su resolución analítica o numérica.

Tanto en un caso como en otro se puede seguir uno de los cuatro posibles métodos de tratamiento del problema, que se describen a continuación.

### 3.2.1.1.- METODO DE LOS DESPLAZAMIENTOS O DE RIGIDEZ

Este método consiste en tomar como incógnitas básicas iniciales los desplazamientos y poniendo todas las demás (tensiones y deformaciones) en función de ellos. Utilizando el primer camino de los mencionados, los pasos a seguir por este método serían:

1) De las ecuaciones de compatibilidad se obtienen las deformaciones en función de los desplazamientos.

2) Entrando con estas relaciones en las Ecuaciones Constitutivas, se puede expresar las tensiones en función de los desplazamientos

$$\sigma = \sigma(\epsilon) = \sigma[\epsilon(\delta)] = \sigma(\delta) \quad (1-4)$$

3) Finalmente, sustituyendo en las ecuaciones de equilibrio las relaciones  $\sigma = \sigma(\delta)$  se obtiene un sistema de ecuaciones cuyas

únicas incógnitas son los desplazamientos ( $\delta$ ), las cuales por cualquier método de resolución se pueden obtener.

Conocidos los desplazamientos y deshaciendo los pasos anteriores se obtienen el campo de valores de las tensiones y las deformaciones.

Siguiendo el segundo camino, el principio variacional asociado en este caso es el principio de la energía potencial mínima, el cual expresa que de todos los campos de deformaciones admisibles (entendiendo como tales, aquellos que cumplen las ecuaciones de compatibilidad es decir las leyes deformación-desplazamiento y condiciones de contorno en desplazamientos), el campo de desplazamiento solución es aquel que hace estacionario el valor de la energía potencial del sólido, que viene expresada por el funcional:

$$\begin{aligned} \pi_p = & \int_{\Omega} W[\epsilon(\delta)] \cdot d\Omega - \int_{\Omega} \{f\}^T \{\delta\} d\Omega - \\ & - \int_{\Sigma} \{g\} \{\delta\} d\Sigma - \{P\}^T \{\delta_p\} \end{aligned} \quad (1-5)$$

siendo cada uno de sus términos lo siguiente:

Energía potencial del sistema	$\pi_p$
id. de deformación interna	$\int_{\Omega} W[\epsilon(\delta)] \cdot d\Omega$
Trabajo de las fuerzas de masa	$\int_{\Omega} \{f\}^T \{\delta\} d\Omega$

Trabajo de las fuerzas de superficie  $\int_{\Sigma} \{g\} \{ \delta \} d\Sigma$

" " concentradas  $\{P\}^T \{ \delta P \}$

### 3.2.1.2.- METODO DE LAS TENSIONES O DE FLEXIBILIDAD

En esta ocasión el campo de las incógnitas es el de las tensiones.

Los pasos a seguir utilizando el primer camino son análogos a los del método de rigidez, tomando como incógnitas iniciales el campo de las tensiones. Los pasos a realizar son los siguientes:

1) Partiendo de funciones de tensiones se expresan las tensiones en términos de estas funciones de forma que satisfagan las ecuaciones de equilibrio (tanto interno como externo).

2) Mediante las ecuaciones constitutivas se expresan las deformaciones en función de las funciones de tensiones.

3) Finalmente de las ecuaciones de compatibilidad se eliminan los desplazamientos en función de las deformaciones sustituyéndose ellas por las expresiones obtenidas en 2).

De esta forma se obtienen las ecuaciones de compatibilidad en términos de las funciones de tensiones. La integración del sistema resultante proporciona la solución buscada.

El principio variacional que se asocia a este caso es el de la energía complementaria mínima, el cual nos indica que de todos los campos de tensiones admisibles, es decir, aquellos campos de tensiones que cumplen las ecuaciones de equilibrio (las ecuaciones en contorno en fuerzas y las de equilibrio interno), el campo solución es aquél que hace estacionario el valor de la energía complementaria, cuya expresión es el funcional:

$$\begin{aligned} \Pi_c = & \iiint_{\Omega} W_c(\sigma) \cdot d\Omega - \iiint_{\Omega} \{f\}^T \{\delta(\sigma)\} d\Omega - \\ & - \iint_{\Sigma} \{g\}^T \{\delta(\sigma)\} d\Sigma - \{P\}^T \{\delta_P(\sigma)\} \end{aligned} \quad (1-6)$$

Siendo:  $\iiint_{\Omega} W_c(\sigma) \cdot d\Omega = \text{energía complementaria}$

### 3.2.1.3.- MÉTODOS HÍBRIDOS

Un tercer método consiste en plantear los sistemas de ecuaciones básicas en función de varios tipos de incógnitas, por ejemplo desplazamientos y algunas tensiones, obteniéndose así un método mixto, de los muchos posibles de plantear.

Utilizando el primer camino, la resolución de un método mixto consistirá en cada caso en ir despejando todas las incógnitas en función de las adoptadas inicialmente, adoptándose un criterio a caballo entre las dos anteriores.

Los pasos a realizar serán los necesarios para plantear un sistema de ecuaciones que satisfaciendo todas las condiciones están en función de la Incógnitas Mixtas.

Siguiendo el segundo camino, para cada familia de incógnitas iniciales adoptada se deberá de buscar un principio variacional adecuado a ellas. En el caso de tomar incógnitas iniciales los desplazamientos y las tensiones podemos adoptar el principio de HELLINGER-REISSNER el cual nos indica que de los campos de tensiones y desplazamientos que cumplen las condiciones de contorno en desplazamientos la solución es aquella que hace mínimo el funcional expresado de la forma siguiente.

$$\begin{aligned} \pi_R = & \iiint_{\Omega} \{\sigma\}^T \{\epsilon(\delta)\} d\Omega - \iiint_{\Omega} W_c(\sigma) \cdot d\Omega - \iint_{\Omega} \{f\}^T \{\delta\} d\Omega \\ & - \iint_{\Sigma} \{q\}^T \{\delta\} d\Sigma - \{P\}^T \{\delta_P\} \end{aligned} \quad (1-7)$$

Algunas veces no es necesario tomar dos familias completas de incógnitas, por dificultades en la resolución numérica (gran anchura de banda en la matriz de rigidez) pudiéndose tomar por ejemplo todos los desplazamientos y una función de tensiones como incógnita, obteniéndose métodos híbridos.

HERRMAN (1.964) desarrolló un principio variacional para materiales elásticos isótropos que lleva su nombre, y para el cuál definió como función de tensiones la siguiente:

$$H = \frac{3 \sigma_m}{G(1+\nu)} \quad (1-8)$$

siendo

$$\sigma_m = \frac{1}{3} (\sigma_x + \sigma_y + \sigma_z)$$

HWANG, et al (1.969) desarrollan este principio para materiales elásticos con anisotropía transversal, definiendo a la función de tensiones de la forma:

$$H = \frac{\partial}{\partial E} \sigma_x + \frac{\partial}{\partial E} \sigma_y + \frac{\partial}{\partial E_1} \sigma_z \quad (1-9)$$

y aplicándolo a suelo compresibles e incompresibles en casos de deformación plana, mediante un modelo de elementos finitos.

3.2.1.4.- METODOS COMPLETOS, entendiéndose por tales, aquellos que resuelven el sistema de una forma directa y global, tomando como incógnitas los desplazamientos, las tensiones y las deformaciones.

Existe un principio variacional, llamado principio general o de HU-WASHIZU en el cual, entrando con todos los campos de tensiones, deformaciones y desplazamientos, la solución es aquella que minimiza el siguiente funcional ( WASHIZU, 1.968).

$$\begin{aligned} \Pi_2 = & \frac{1}{2} \iiint_{\Omega} W(\epsilon) \cdot d\Omega - \iiint_{\Omega} \{ \epsilon \} - \{ \epsilon^* \} \}^T \{ \sigma \} d\Omega - \\ & - \iiint_{\Omega} \{ f \}^T \{ \delta \} d\Omega - \iint_{\Sigma} \{ q \}^T \{ \delta \} d\Sigma - \{ P \}^T \{ \delta_P \} \quad (1-10) \end{aligned}$$

Siendo  $\{\epsilon^*\}$  las deformaciones deducidas de los desplazamientos

$$\epsilon_x^* = \frac{\partial u}{\partial x}, \text{ etc.}$$

### 3.2.2.- APLICACION A SUELOS.

Al realizar el estudio de un suelo saturado, sin posibilidad de drenaje, se observa que se comporta, debido a la casi nula compresibilidad del agua y de los granos del suelo, como un cuerpo incompresible.

El tratamiento de sólidos elásticos incompresibles o casi incompresibles plantea problemas especiales, ya que la ley que relaciona tensiones con relaciones sólo existe en un sentido.

Como ya se indicó anteriormente, el comportamiento de un material elástico lineal con anisotropía transversal viene regido por cinco parámetros independientes.  $(E_x, E_z, \nu, \nu_1, G)$

Al introducir la condición de deformación plana  $\epsilon_y = 0$ , se obtienen las siguientes relaciones.

$$\begin{aligned} \epsilon_x &= \frac{1-\nu^2}{E} \sigma_x - \frac{\nu_1(1+\nu)}{E_1} \sigma_z \\ \epsilon_z &= \frac{-\nu_1(1+\nu)}{E_1} \sigma_x + \frac{E_1 - \nu_1^2 E}{E_1^2} \sigma_z \\ \gamma_{xz} &= \frac{1}{G} \tau_{xz} \end{aligned} \quad (1-11)$$

Con la condición de incompresibilidad  $\frac{\Delta V}{V} = 0$ , es decir -  
 $\epsilon_x + \epsilon_z = 0$  se obtiene

$$\nu_1 = 1/2 \quad \text{y} \quad \nu = 1 - \frac{1}{2} \frac{E}{E'} = 1 - \frac{1}{2} \nu \quad (1-12)$$

Quedando las relaciones tensión-deformación al cambiar los ejes y, z  
 en la forma

$$\begin{Bmatrix} \epsilon_x \\ \epsilon_y \\ \gamma_{xy} \end{Bmatrix} = \begin{vmatrix} \frac{1-\nu/4}{E_1} & -\frac{1-\nu/4}{E_1} & 0 \\ -\frac{1-\nu/4}{E_1} & \frac{1-\nu/4}{E_1} & 0 \\ 0 & 0 & 1/G \end{vmatrix} \cdot \begin{Bmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \tau_{xy} \end{Bmatrix}$$

(1-13)

$$\{\epsilon\} = |C| \cdot \{\sigma\}$$

La matriz  $|C|$  es singular por lo tanto carece de matriz inversa,  
 luego no es posible obtenerse en forma explícita las tensiones en fun-  
 ción de las deformaciones, en el caso de incompresibilidad.

Por esta razón, el problema elástico no puede plantearse úni-  
 camente en desplazamientos, con las ecuaciones de NAVIER.

En los casos de contorno sencillo en que es posible la reso-  
 lución analítica, el problema se obvia resolviendo el caso para un -  
 valor genérico de los parámetros elásticos y particularizando luego  
 la solución para los valores correspondientes al sólido incompresi-  
 ble.

Existen numerosos casos resueltos de esta forma, y principalmente aquellos que son más interesantes para la Mecánica del suelo, (H.G. POULOS y E.H. DAVIS, 1.974).

Sin embargo, en el caso de que la solución analítica no sea viable y se requiera el empleo de métodos numéricos, cuyos diversos planteamientos se expusieron anteriormente, los modelos basados en las deformaciones o en la energía potencial mínima, no son aplicables; la matriz de rigidez no puede obtenerse por presentar valores infinitos. Otro tanto puede decirse de los modelos, menos frecuentes, en tensiones o basados en el principio de la energía complementaria mínima; en este caso, la matriz de flexibilidad resulta singular.

Diversos han sido los caminos seguidos para vencer esta dificultad. En los apartados que siguen se comentan los más importantes, agrupados según sus hipótesis básicas. Estas hipótesis son de tres tipos : sustitución del material incompresible por otro de compresibilidad muy pequeña pero finita, análisis en tensiones efectivas, o empleo de modelos híbridos.

### 3.2.2.1.- ELIMINACION DE LA INCOMPRESIBILIDAD.

Un método seguido por algunos autores consiste en tomar, en lugar de los parámetros correspondientes a suelo incompresible - - -

( $\nu = 0.5$  en el caso isótropo), otros parecidos, por ejemplo  $\nu = 0.495$  de forma que desaparezca la singularidad citada. (RAYMOND, 1.972).

Sin embargo, este método puede producir errores muy grandes (HERMANN, 1.965, URIEL, 19.72). Aunque en algunos casos particulares haya demostrado ser aceptable (DUNLOP, DUNCAN, 1.970; RAYMOND, 1.973), ello no quiere decir que sus uso pueda generalizarse a otros problemas sin riesgo de graves errores, que pueden depender de la precisión del ordenador empleado y, sobre todo, del condicionamiento de cada problema particular estudiado.

#### 3.2.2.2.- ANALISIS EN TENSIONES EFECTIVAS.

Otra posibilidad consiste en plantear el problema en tensiones efectivas.

Las presiones intersticiales dan origen entonces a unas fuerzas másicas, quedando como fuerzas actuantes las siguientes:

- a) Peso del suelo saturado, dirección vertical y valor unitario  $\gamma_{sat}$ .
- b) Empuje hidrostático del agua intersticial, en dirección vertical, opuesta a a) y valor unitario  $\gamma_w$ .

- c) Fuerzas de filtración cuya dirección será la del gradiente hidráulico y de valor  $\bar{i} \cdot \gamma_w$ , siendo  $\bar{i} = \text{grad } \phi$

$$\phi = z + \frac{u}{\gamma_w} \quad (1-14)$$

La dificultad estriba en el desconocimiento de la distribución de presiones intersticiales "a priori", con lo que existe una incógnita más, que es la presión intersticial en cada punto. Se tiene, sin embargo, una ecuación adicional, que es la de deformación volumétrica nula.

CHRISTIAN (1.968) resuelve el problema iterativamente, según el proceso siguiente:

- 1-) Se supone una distribución de presiones intersticiales.
- 2-) Conocida la presión intersticial, "u", se calculan el potencial hidráulico,  $\phi$ , y su gradiente,  $\bar{i}$ , en cada punto.
- 3-) Se entra en un método de resolución con las fuerzas másmicas y se obtiene el campo de tensiones efectivas  $\sigma'$
- 4-) Se halla el campo de tensiones totales mediante

$$\sigma_{\text{TOTALES}} = \sigma' + u$$

- 5-) Conociendo el campo de  $\sigma_{\text{TOT}}$ , se obtiene la distribución de presiones intersticiales  $u^*$  mediante la expresión de SKEMPTON u otra similar.

6-) Se comprueba si "  $u^*$  " es idéntico al campo "  $u$  " que se ha tomado de partida, se repite en cada caso negativo se entra de nuevo en 2-) con  $u = u^*$  y se repite el proceso.

Este método tiene la ventaja de independizar el cálculo de la presión intersticial de la resolución del problema en tensiones efectivas. Con ello pueden usarse leyes de presión intersticial refinadas, no lineales, con coeficientes variables con el nivel de tensiones e incluso fórmulas de presión intersticial en función de las deformaciones en lugar de las tensiones totales (LO, 1.969).

MATSUMOTO (1.976) utiliza un método directo, introduciendo la presión intersticial como incógnita adicional, añadiendo la condición de incompresibilidad. Los resultados concuerdan bastante bien con el análisis en tensiones totales con un coeficiente de POISSON de 0,49, figura (1.-13). El método tiene en su contra el hecho de que, al introducir la incompresibilidad del material según la teoría elástica, resulta una presión intersticial:

$$\Delta u = \frac{1}{3} (\Delta \sigma_1 + \Delta \sigma_2 + \Delta \sigma_3)$$

mientras que en la práctica se observa que los suelos reales no se comportan así, sino que presentan dilatación positiva o negativa que hace que la deducción de la presión intersticial a partir de la teoría de la Elasticidad isótropa tenga escasa validez práctica.

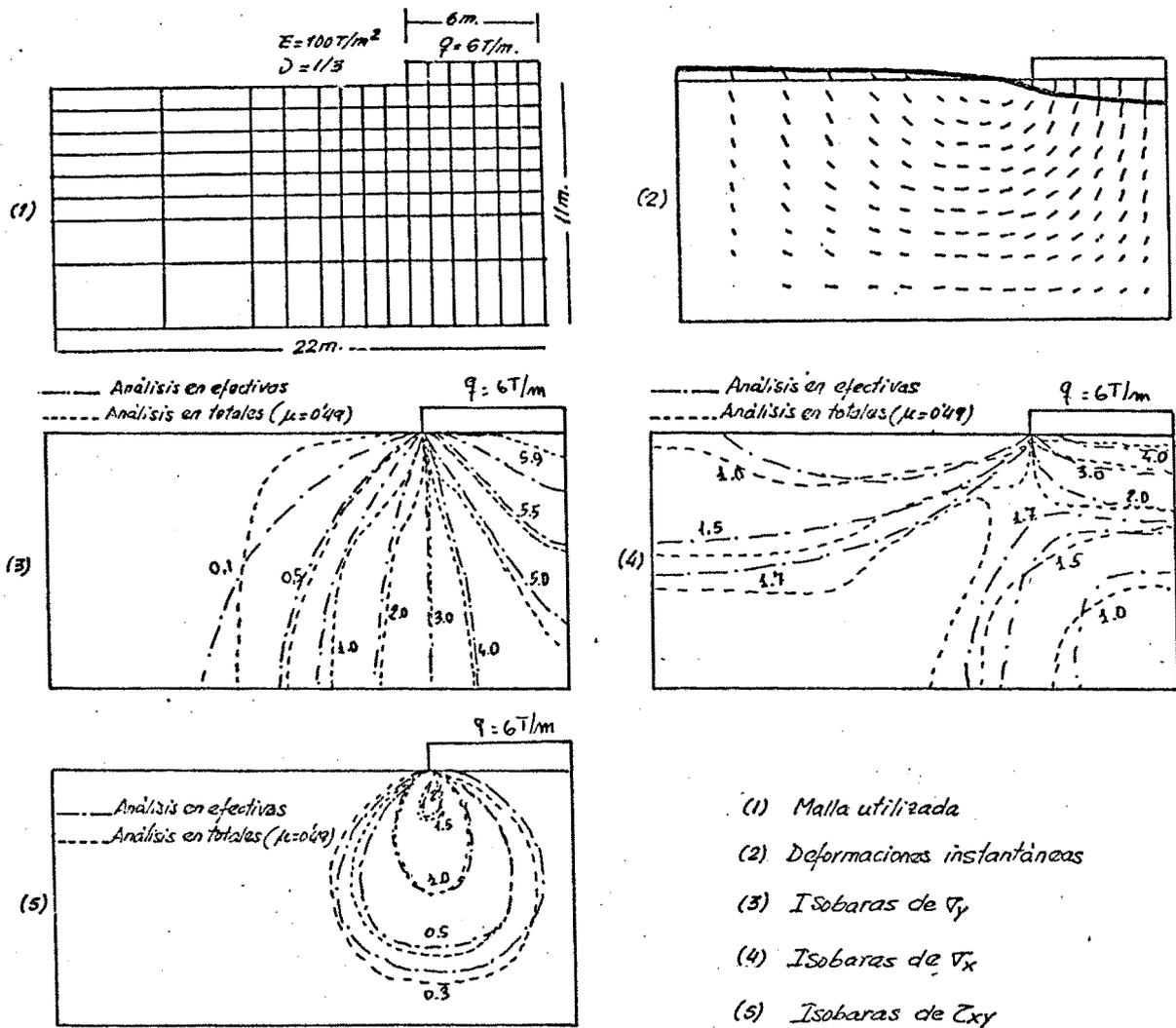
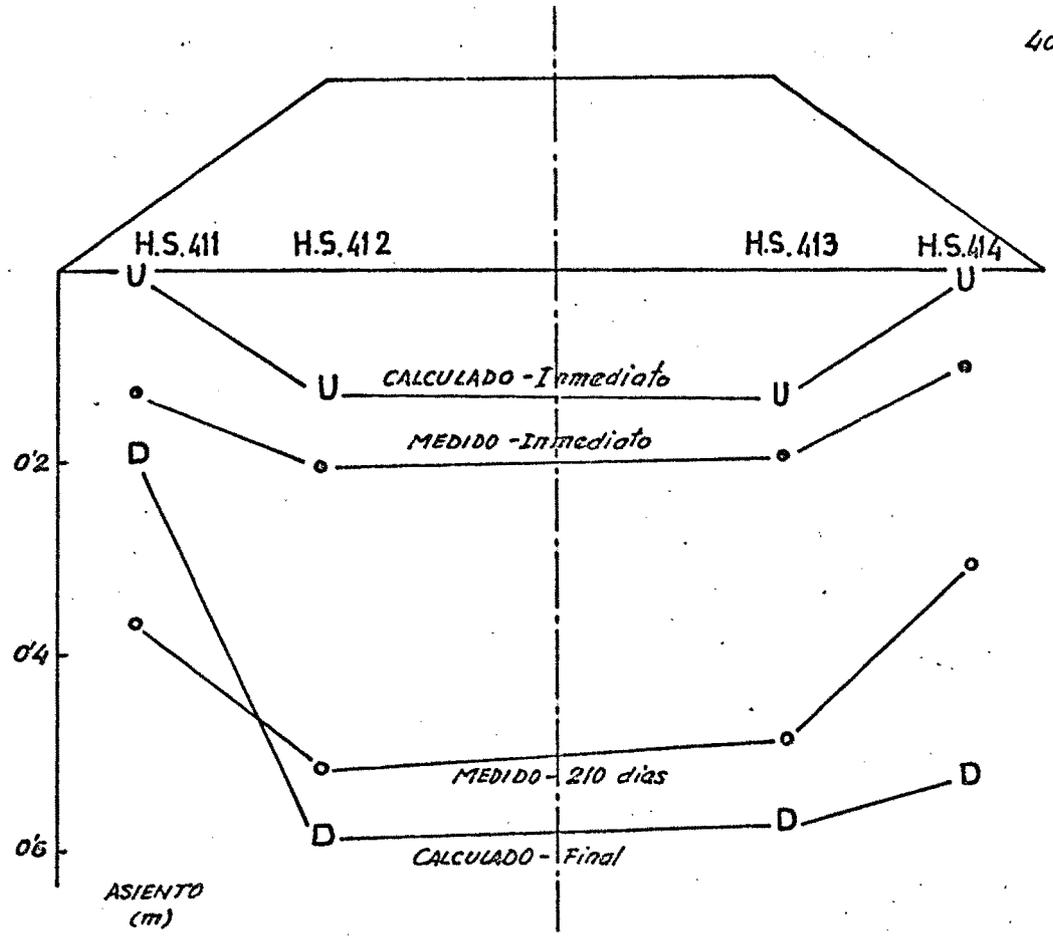


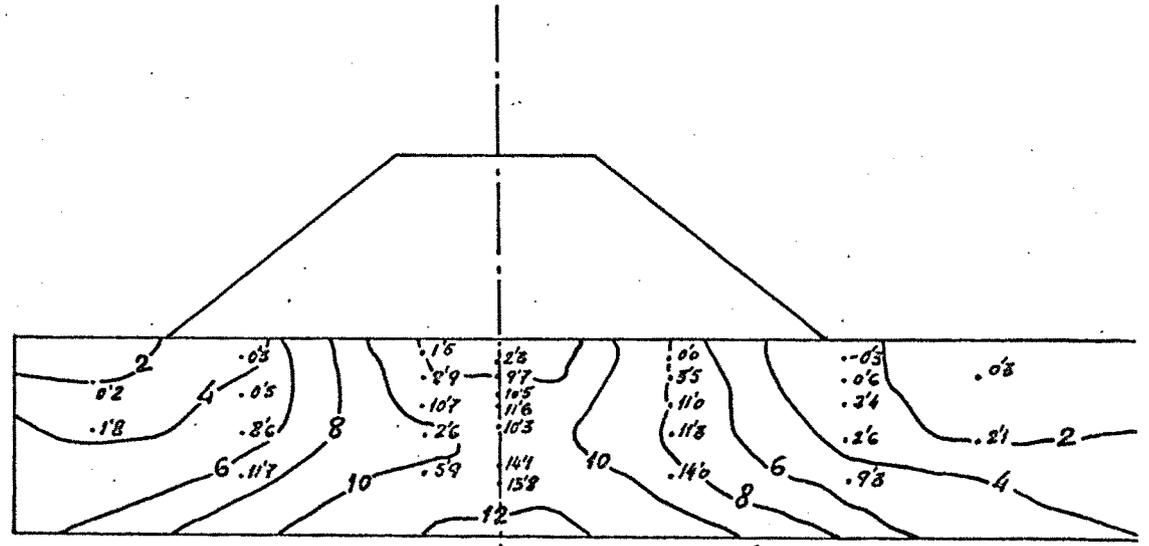
Fig. 1-13.- Resultado presentados por MATSUMOTO, (1.976).

Un análisis similar desarrollan WOTH y SIMPSON (1.972) empleando como modelo de suelo la CAM-CLAY., la cual considera una fase elasto-plástica y ha sido desarrollada sobre trabajos teóricos y experimentales de arcilla remoldeada de Cambridge, Inglaterra.

En la fig(1-14) pueden verse algunos resultados, referentes a sientos instantáneos y diferidos, y sobrepresiones intersticiales - iniciales bajo un terraplén y su comparación con medidas experimentales



a) Asientos Superficiales



b) Presiones intersticiales (T/m<sup>2</sup>)

fig. (1-14).- Tensiones y deformaciones bajo un terraplén. Comparación cálculo-mediciones. (WROTH y - SIMPSON, 1.972)

### 3-2-2-3.- METODOS HIBRIDOS.

Una tercera alternativa consiste en emplear un modelo en el que se tomen como incógnitas los desplazamientos y las tensiones, o parte de ellos. Estos modelos denominados híbridos o mixtos, se basan en el principio variacional de HELLINGER-REISSNER (REISSNER, 1.950). El más utilizado hasta el momento es el propuesto por HERRMAN (1.965), tomando como incógnitas los desplazamientos y una función de tensiones; el modelo ha sido generalizado a materiales elásticos con anisotropía transversal (HWANG et al. 1.969; URIEL, 1.970), como ya se expuso anteriormente.

### 3-2-3.- ESTUDIO COMPARATIVO DE LOS METODOS.

Se exponen a continuación resumidas las ventajas y los inconvenientes de los diversos métodos descritos anteriormente.

#### 3-2-3-1.- ELIMINACION DE LA INCOMPRESIBILIDAD.

Este método presenta las ventajas de su simplicidad en una aplicación, se puede utilizar los programas existentes, algunos de los cuales incluyen plasticidad y anisotropía.

La enorme dificultad que presenta su utilización son la medición de los posibles errores que pueden dar, pues son desconocidos salvo en los casos que se han calculado por otros métodos.

### 3-2-3-2.- ANALISIS EN FUNCIONES EFECTIVAS.

Si el método seguido es uno de los iterativos presenta la ventaja que se pueden aplicar con los coeficientes de SKEMPTON variables; esta ventaja no la presentan los métodos directos.

Se ha comprobado que el comportamiento del suelo en efectivas es elástico con bastante aproximación, con nivel de tensiones pequeñas. En totales también se comporta elásticamente, pero lo que no es elástico es la relación entre ambos (la presión intersticial), es decir que las relaciones teóricas entre los parámetros en efectivas y en totales no se cumplen en realidad, por lo que se deduce que en el caso del proceso sin drenaje, el efectuar un estudio en efectivas no es conveniente.

El modelo de la CAM-CLAY se adapta mejor a este fenómeno, pero no los modelos basados en el criterio de MOHR-COULOMB y los ensayos tradicionales.

### 3-2-3-3.- METODOS HIBRIDOS

Al utilizar la ley tenso-deformación correspondiente a los materiales incompresibles no presentan los inconvenientes de los métodos comentados en primer lugar. Al no utilizar tampoco los valores de la presión intersticial no ofrecen los inconvenientes de los métodos que presentan los análisis en presiones efectivas, en cambio tienen la dificultad de ser más difíciles de programar y presentan un mayor número de incógnitas.

Por estas y otras razones el estudio de estos métodos no se ha generalizado al caso de materiales plásticos y anisótropos, de aquí la utilidad de este trabajo que pretende desarrollar un modelo de este tipo que tenga en cuenta estas dos características.

### 3-3.- ANALISIS DEL EQUILIBRIO LIMITE

En el caso de que lo único que interesa es conocer el valor de las cargas que producen la rotura del terreno, se suelen emplear los métodos de equilibrio límite, bien sea mediante la solución exacta del problema o buscando soluciones aproximadas por medios estáticos, cinemáticos u otros procedimientos resolutivos que sin encajar exactamente en los anteriores resuelven el problema aproximadamente (CHEN, 1.975).

Puede demostrarse que la solución del equilibrio límite no depende de las propiedades elásticas del material, por lo cuál suele utilizarse para éste un modelo rígido-plástico. En estas condiciones, desaparecen los inconvenientes que se habían planteado al hacer el estudio en tensiones totales. Por ello, tradicionalmente el análisis de cargas límites en arcillas sin drenaje se realiza sin dificultad en tensiones totales, con lo cual la solución es sencilla al ser nulo el ángulo de rozamiento interno.

Sin embargo, hasta la fecha, se han efectuado pocos estudios completos que incluyan en sus análisis la variación de la cohesión con la profundidad y la anisotropía del material; a estos dos fenómenos se han dedicado algunas investigaciones en los últimos años.

DAVIS y BOOKER (1.973) estudian el caso de una zapata sobre una arcilla isótropa con cohesión variable con la profundidad y ángulo de rozamiento interno nulo. El método de resolución es del tipo denominado incompleto partiendo del método tradicional de las líneas características, fig. 1-15. Presentan sus resultados,

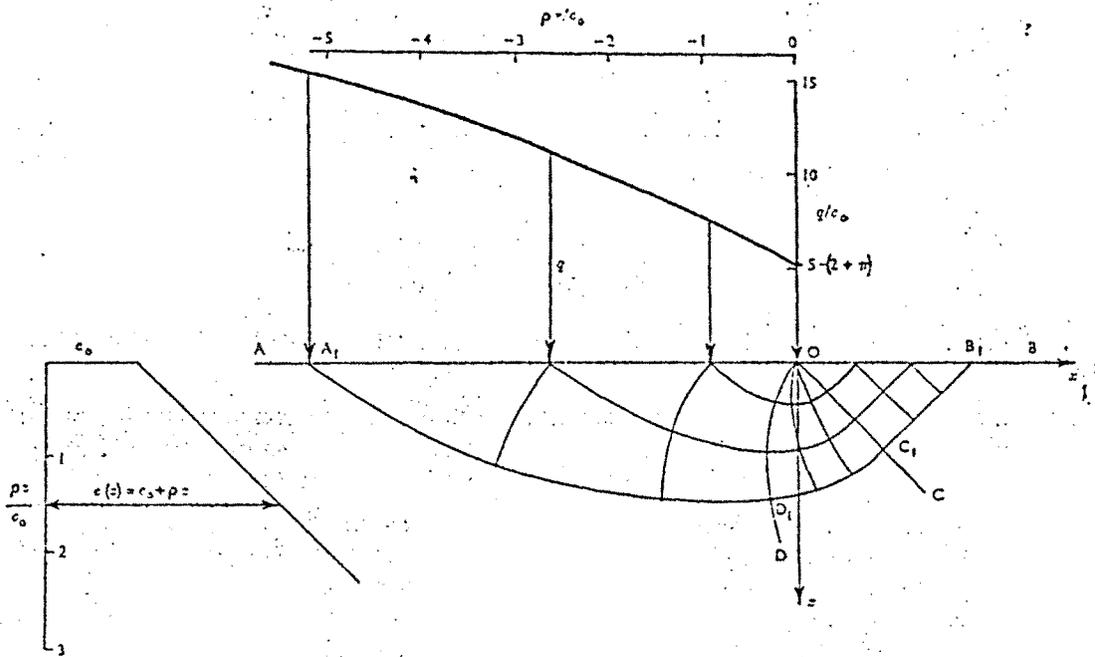


fig. (1-15).- Red de características con cohesión variable.  
(DAVIS y BOOKER, 1.973)

en forma de unos coeficientes correctores a aplicar a los términos de las fórmulas polinómicas tradicionales, fig. (1.-16)

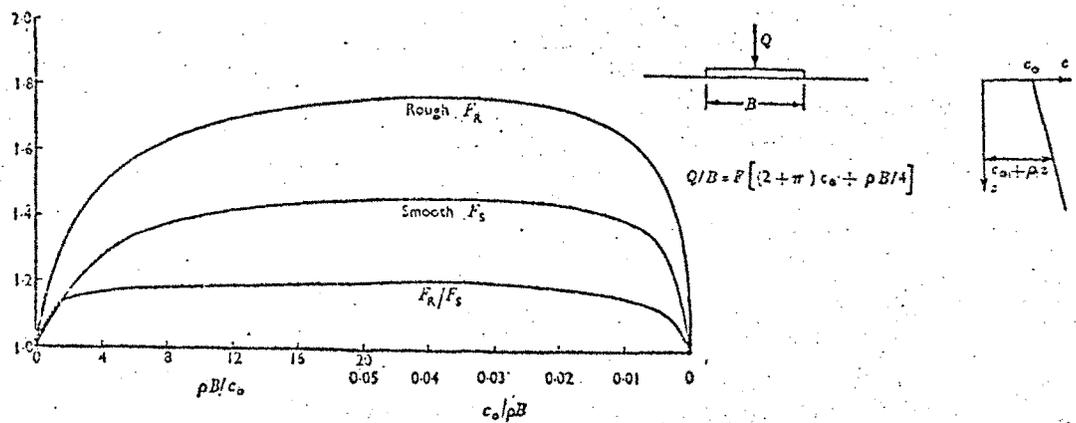


fig. (1-16).- Factores de corrección para zapatas lisas y rugosas (DAVIS y BOOKER, 1.973)

Posteriormente SALENÇON et al (1.976) presentan un análisis más riguroso del equilibrio límite estudiando el caso de una zapata sobre una arcilla con unas características similares a las del caso anterior, incluyendo el caso de ángulo de rozamiento interno distinto de cero, y del peso específico del suelo variable con la profundidad, y exponer sus resultados mediante ábacos, fig. (1-17)

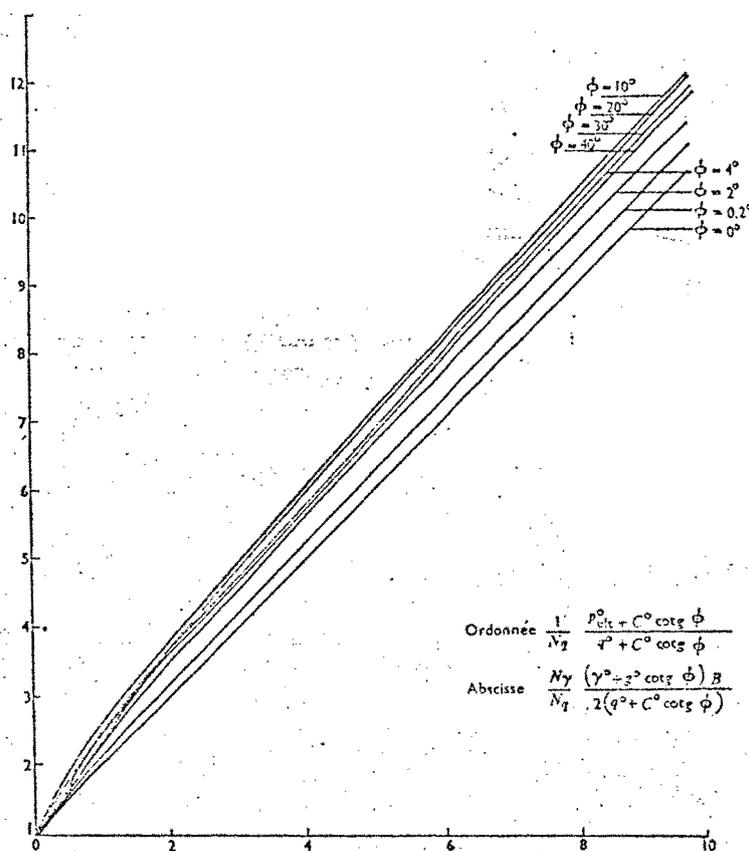


fig. (1-17).- Presión de hundimiento en coordenadas reducidas. (SALENÇON et al, 1.976).

CHEN et al ( 1.974, 1.975 y 1.976 ) aplican los métodos de equilibrio límite cinemáticos para la resolución de cargas - de hundimiento de zapatas, empujes de tierras y estabilidad de taludes, incluyendo los casos de cohesión variable con la profundidad y anisotropía del material según las leyes propuestas por CASA GRANDE y CARRILLO (1.944) y LO (1.965) que se comentaron anteriormente en el apartado 2-3-1 de este capítulo, figuras 1-18 y 1-19.

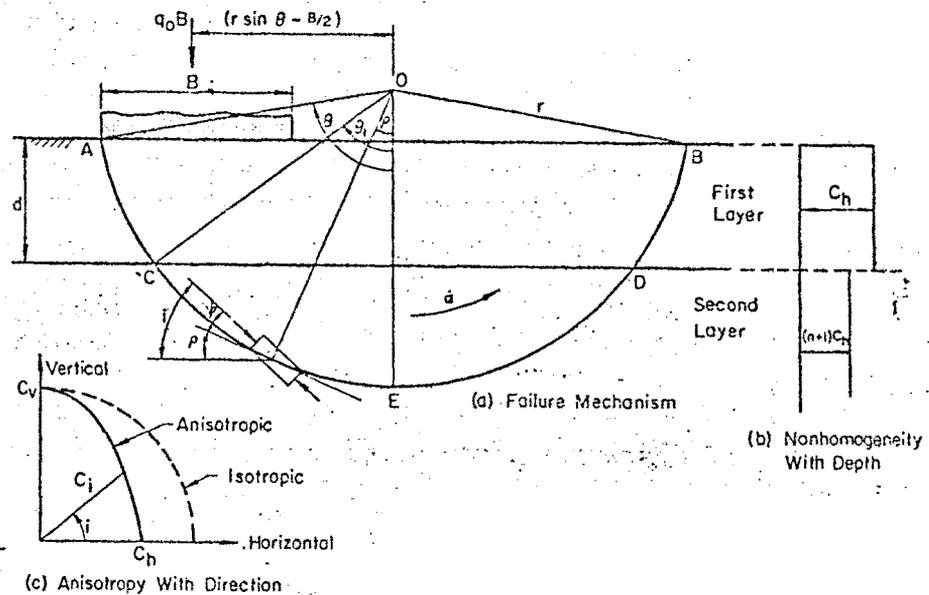


fig. (1-18).- Equilibrio límite (método cinemático) de una zapata en terreno heterogéneo, y anisótropo (CHEN, 1.975).

Aparte de estos estudios teóricos, otros autores consideran el efecto de la anisotropía mediante la inclusión de coeficientes correctores empíricos o semiempíricos (BJERRUM, 1.973; MENZIES, 1.976)

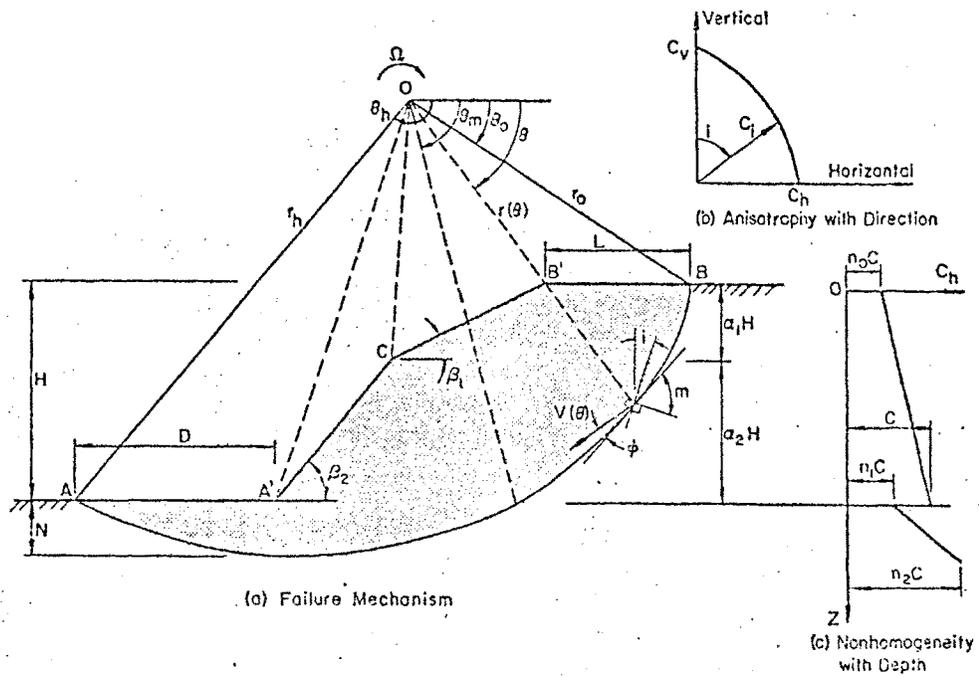


fig. (1-19).- Equilibrio límite (método cinemático) de un talud de terreno heterogéneo y anisótropo, (CHEN, 1.975)

## CAPITULO II

### MODELO REOLOGICO PROPUESTO

MODELO REOLOGICO PROPUESTO

1.- CARACTERISTICAS GENERALES.

Se va a emplear un modelo híbrido efectuando el análisis en tensiones totales, de acuerdo como se expuso en el capítulo anterior. En este capítulo se describe la ley tensión-deformación.

Se considera que el material es elastoplástico, con un criterio de rotura función única de las tensiones y un comportamiento posterior de sólido plástico perfecto.

Se considera que en todas las fases el sólido es incompresible:

$$d\left(\frac{\Delta V}{V}\right) = 0 \quad (2-1)$$

En la fase plástica esto implica:

$$d\left(\frac{\Delta V}{V}\right)^e = d\left(\frac{\Delta V}{V}\right)^p = 0 \quad (2-2)$$

El modelo se desarrolla para el análisis de casos de deformación plana, suponiendo que la dirección de movimiento nulo está contenida en el plano de isotropía, es decir, el horizontal, concretamente según el eje  $\bar{OY}$  ( $\bar{OZ}$  es el eje de anisotropía). Entonces:

$$d\varepsilon_y^e = d\varepsilon_y^p = 0 \quad (2-3)$$

## 2.- FASE ELÁSTICA.

Durante ella se supone que el esqueleto del suelo es linealmente elástico, cumpliendo la ley de HOOKE con anisotropía transversal:

$$\begin{aligned}
 \varepsilon_x &= \frac{\partial u}{\partial x} = \frac{1}{E'} (\sigma'_x - \nu' \sigma'_y) - \frac{\nu'_z}{E'_z} \sigma'_z \\
 \varepsilon_y &= \frac{\partial v}{\partial y} = \frac{1}{E'} (-\nu' \sigma'_x + \sigma'_y) - \frac{\nu'_z}{E'_z} \sigma'_z \\
 \varepsilon_z &= \frac{\partial w}{\partial z} = -\frac{\nu'_z}{E'_z} (\sigma'_x + \sigma'_y) + \frac{1}{E'_z} \sigma'_z \\
 \gamma_{xy} &= \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} = \frac{1}{G'} \tau'_{xy} = \frac{2(1+\nu')}{E'} \tau_{xy} \\
 \gamma_{xz} &= \frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial x} = \frac{1}{G'_z} \tau'_{xz} \\
 \gamma_{yz} &= \frac{\partial v}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial y} = \frac{1}{G'_z} \tau'_{yz}
 \end{aligned} \tag{2-4}$$

siendo (u, v, w) las componentes del vector desplazamiento según los ejes ( $\bar{O}\bar{X}$ ,  $\bar{O}\bar{Y}$ ,  $\bar{O}\bar{Z}$ ) (LEKHNITSKII, 1.963).

Tanto los parámetros  $E'$ ,  $E'_z$ ,  $\nu'$ ,  $\nu'_z$ , como las tensiones  $\sigma'_x$ ,  $\sigma'_y$ ,  $\sigma'_z$ ,  $\tau'_{xy}$ ,  $\tau'_{xz}$ ,  $\tau'_{yz}$ , corresponden a tensiones efectivas.

Los parámetros anteriores no pueden tomar valores cualesquiera, sino que estos deben ser tales, que la energía de deformación no sea nunca negativa, para cualquier valor de las tensiones.

Esta energía de deformación fué determinada por HEARNON, (1.961) y tiene la expresión:

$$E = \frac{1}{2} \{\sigma\}^T [C] \{\sigma\} \tag{2-5}$$

siendo  $[C]$  la matriz que expresa las deformaciones en función de las tensiones.

Para que esta energía de deformación sea siempre positiva, la forma cuadrática que la define deberá ser definida positiva lo que obliga a que los menores principales de la matriz  $C$  sean positivos. Se obtiene así una serie de relaciones entre los parámetros que definen la anisotropía que definen sea termodinámicamente posible.

PICKERING (1.970) desarrolló los límites teóricos de los parámetros que definen la anisotropía transversal.

La figura (2-1) que representa la superficie límite, de existencia de los parámetros anisótropos y que se encuentra definida por:

$$\Gamma(1-\mu_{xx}) = 2\mu_{xy}^2 \quad (2-6)$$

Esta superficie es un cono de directriz parabólica y con el vértice situado en el punto (1,0,0)

La definición que realiza de los números de POISSON difiere de la adoptada en este trabajo, pero ambas quedan relacionadas de la siguiente forma. (Ver anejo nº 1):

$$\begin{aligned} \nu &= \mu_{xx} \\ \nu_1 &= \frac{\mu_{xy}}{\Gamma} \end{aligned}$$

$$\text{siendo } r = \frac{E_x}{E_y}$$

(2-7)

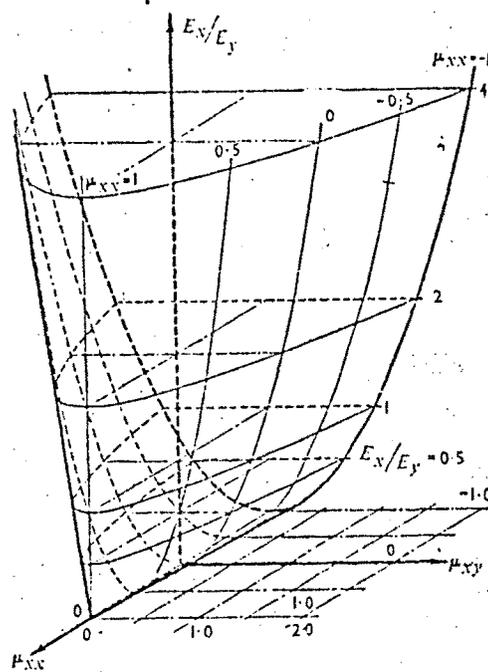


fig. (2-1).— Límites de las constantes elásticas. (PICKE - RING, 1.970).

El comportamiento de un suelo de las características antes mencionadas en términos de las tensiones totales, es también elástico lineal y transversalmente anisótropo (URIEL, 1.970).

En efecto, con la condición de incompresibilidad, es decir:

$$\frac{\Delta V}{V} = \epsilon_x + \epsilon_y + \epsilon_z = 0 \quad (2-8)$$

y la ley de TERZAGHI:

$$\begin{aligned} \sigma'_x &= \sigma_x - u \\ \sigma'_y &= \sigma_y - u \\ \sigma'_z &= \sigma_z - u \end{aligned} \quad (2-9)$$

introduciendo estas relaciones en las ecuaciones (2-4) y operando se obtiene la ley tensión-deformación en tensiones totales:

$$\begin{aligned} \epsilon_x &= \frac{1}{E} (\sigma_x - \nu \sigma_y) - \frac{\nu_1}{E_1} \sigma_z \\ \epsilon_y &= \frac{1}{E} (\sigma_y - \nu \sigma_x) - \frac{\nu_1}{E_1} \sigma_z \\ \epsilon_z &= -\frac{\nu_1}{E_1} (\sigma_x + \sigma_y) + \frac{1}{E_1} \sigma_z \\ \gamma_{xy} &= \frac{2(1+\nu)}{E} \tau_{xy} \\ \gamma_{yz} &= \frac{1}{G_1} \tau_{yz} \\ \gamma_{zx} &= \frac{1}{G_1} \tau_{zx} \end{aligned} \quad (2-10)$$

Siendo las relaciones entre los parámetros en totales y efectivas las siguientes (URIEL, 1.970):

$$E_1 = \frac{2 - 2\nu' - 4r'\nu_i' + r'}{2 - 2\nu' - 4r'\nu_i'^2} E_1'$$

$$E = \frac{2 - 2\nu' - 4r'\nu_i' + r'}{[2 - 2\nu' - 4r'\nu_i' + r'] - [1 - \nu' - r'\nu_i']^2} E'$$

$$\Gamma = \frac{E}{E_1} = \frac{(2 - 2\nu' - 4r'\nu_i'^2) r'}{[2 - 2\nu' - 4r'\nu_i' + r'] - [1 - \nu' - r'\nu_i']^2}$$

$$G_1 = G_1' \quad (2-11)$$

y obteniéndose así mismo para suelos incompresibles los valores:

$$\nu = 1 - \frac{\Gamma}{2}$$

$$\nu_i = 1/2 \quad (2-12)$$

Al introducir estos valores en la expresión (2-7) realizando el cambio de notación se comprueba fácilmente que los valores de  $\nu$  y  $\nu_i$  están sobre la superficie, formando una de sus generatrices.

Teniendo en cuenta las condiciones (2-12), quedan sólo tres parámetros independientes para definir el comportamiento elástico del material.

Los parámetros elegidos son:  $E$ ,  $r$ ,  $G_1$  y que por lo visto anteriormente para cualquier valor que tomen, la energía de deformación es positiva.

Introduciendo la condición de deformación plana (2-3) y permutando entre sí los ejes  $O\bar{Y}$  y  $O\bar{Z}$  por comodidad y facilidad de expresión, resulta:

$$\epsilon_x = \frac{1}{E} \left( r - \frac{1}{4} r^2 \right) \sigma_x - \frac{1}{E} \left( r - \frac{1}{4} r^2 \right) \sigma_y$$

$$\epsilon_y = -\frac{1}{E} \left( r - \frac{1}{4} r^2 \right) \sigma_x + \frac{1}{E} \left( r - \frac{1}{4} r^2 \right) \sigma_y$$

$$\gamma_{xy} = \frac{1}{G_1} \tau_{xy} \quad (2-13)$$

que son las leyes tensión-deformación a emplear en la fase elástica.

En forma matricial:

$$\begin{Bmatrix} \epsilon_x \\ \epsilon_y \\ \gamma_{xy} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{E} \left( r - \frac{r^2}{4} \right) & -\frac{1}{E} \left( r - \frac{r^2}{4} \right) & 0 \\ -\frac{1}{E} \left( r - \frac{r^2}{4} \right) & \frac{1}{E} \left( r - \frac{r^2}{4} \right) & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{G_1} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \tau_{xy} \end{Bmatrix} \quad (2-14)$$

$$\{\epsilon\} = |C| \cdot \{\sigma\}$$

Puede observarse que la matriz  $|C|$  es singular, por lo cual no existe la ley tensión-deformación en sentido inverso

$$\{\sigma\} = |D| \{\epsilon\}$$

### 3.- CRITERIO DE ROTURA

#### 3-1.- MATERIAL ISOTROPO

En suelos con condiciones sin drenaje se ha observado que la resistencia al esfuerzo cortante no depende del incremento de la presión normal media, pues este incremento es absorbido por la presión intersticial, por ello es usual estudiar estos casos en presiones totales, considerando un desviador de rotura que no dependa de la presión normal aplicada. Ello implica una envolvente de MOHR horizontal, definida por un valor  $C_u$ , que se denomina resistencia al corte sin drenaje o cohesión sin drenaje, lo cual equivale a utilizar el criterio de rotura de TRESCA, definido por:

$$\tau_{\text{máx}} = C_u \quad (2-15)$$

que, en función de las tensiones principales ( $\sigma_1 \geq \sigma_2 \geq \sigma_3$ )

queda:

$$\frac{\sigma_1 - \sigma_3}{2} = C_u \quad (2-16)$$

o, en las funciones de las tensiones según los planos coordenados:

$$f(\sigma_{ij}) = \sqrt{\left(\frac{\sigma_x - \sigma_y}{2}\right)^2 + \tau_{xy}^2} - C_u = 0 \quad (2-17)$$

tomando el eje  $z$  en la dirección de la tensión principal intermedia, que se supone coincide con la deformación plana como se dijo anteriormente.

En el capítulo anterior ya se vió de qué forma el parámetro  $C_u$ , aumenta con la presión de consolidación,  $P_o$ , de la arcilla, así como con la razón de preconsolidación.

### 3.2.- ANISOTROPIA

Como se indicó en el capítulo anterior, se ha comprobado repetidas veces de forma experimental la anisotropía de las arcillas para carga sin drenaje.

Esta anisotropía, como ya se dijo, se debe a varias causas: orientación de las partículas, orientación de las fisuras, estado tensional debido al desviador durante la consolidación.

Resulta por tanto deseable utilizar un criterio de rotura que tenga en cuenta el fenómeno de la anisotropía.

HILL (1.950) propone la extensión del criterio de VON MISES a materiales anisótropos afectando a los diversos sumandos de coeficientes diferentes. Puesto que en dos dimensiones el criterio de VON MISES coincide con el de TRESCA, se puede extender el criterio des -

critero anteriormente(2-17) de la forma siguiente:

$$f(\sigma_{ij}) = \sqrt{A \left( \frac{\sigma_x - \sigma_y}{2} \right)^2 + B \tau_{xy}^2} - C_u = 0 \quad (2-18)$$

Una generalización semejante emplean DAHL y VOIGHT (1.969) para el criterio de MOHR-COULOMB, resultando un criterio definido por cinco parámetros, que no obstante carece de constatación experimental y teórica.

Sin embargo, estas generalizaciones conservan la paridad del criterio, es decir, suponen que el material, aunque sea anisótropo, no posee efecto BAUSCHINGER. Así, al someter este material a compresión simple en dirección vertical ( $\sigma_x = \tau_{xy} = 0$ ) y horizontal ( $\sigma_y = \tau_{xy} = 0$ ) se obtienen respectivamente resistencias:

$$\begin{aligned} \sigma_y &= \frac{2C_u}{\sqrt{A}} \\ \sigma_x &= \frac{2C_u}{\sqrt{A}} \end{aligned} \quad (2-19)$$

y en la realidad se ha comprobado que las resistencias horizontal y vertical son diferentes en arcillas, como ya se comentó en el capítulo anterior.

De las causas de anisotropía que se señalaron en el capítulo primero, es decir: orientación de las partículas, orientación de las fisuras y estado tensional en los contactos, vamos a considerar únicamente de la primera y la última de ellas, pues como solamente se va a tratar de arcillas blandas, la fisuración no la consideraremos en este

trabajo.

El intento más profundo de tener en cuenta teóricamente la anisotropía ha sido quizá el desarrollado por BJERRUM y sus colaboradores y mejorado sucesivamente (BJERRUM y KENNEY, 1.967; BJERRUM, 1.973). En él se considera como causa primordial de la anisotropía el estado tensional de los contactos entre las partículas, como ya se desarrolló en el capítulo anterior, BJERRUM considera que la resistencia al deslizamiento sobre un plano cualquiera definido por su inclinación  $\alpha$  viene dada por:

$$\tau_{cr}(\alpha) = \tau_{\alpha} + (\sigma_{\alpha} \operatorname{tg} \phi_e - \tau_{\alpha}) D_M + K \cdot P_c \quad (2-20)$$

donde  $P_c$  es la presión de preconsolidación (real o por envejecimiento),  $K$  y  $\phi_e$  son los parámetros de HVORSLEV (cohesión y ángulo de rozamiento verdaderos) y  $D_M$  un parámetro. Naturalmente, el rozamiento movilizado no puede nunca superar el valor  $\sigma_{\alpha} \operatorname{tg} \phi_e$ , por lo que se debe cumplir:

$$\begin{aligned} 0 &\leq D_M \leq 1 \\ \tau_{\alpha} &\leq \sigma_{\alpha} \cdot \operatorname{tg} \cdot \phi_e \end{aligned} \quad (2-21)$$

En el apartado 2.3.2. del primer capítulo se expusieron con detalle las hipótesis fundamentales de esta fórmula.

Si las tensiones  $\sigma_{\alpha}$  y  $\tau_{\alpha}$  son producidas por el peso propio de la arcilla:

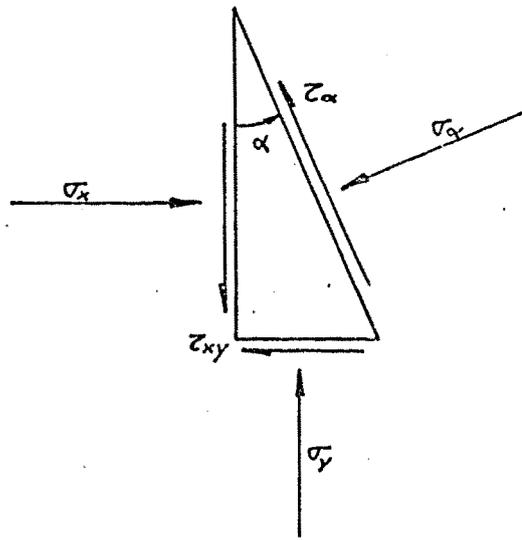
$$\sigma_{\alpha} = p_0 \left( \frac{1+k_0}{2} - \frac{1-k_0}{2} \cdot \cos 2\alpha \right)$$

$$\tau_{\alpha} = -p_0 \cdot \frac{1-k_0}{2} \cdot \sin 2\alpha \quad (2-22)$$

con el convenio de signos indicado en la figura (2-2), la tensión de rotura resulta:

$$\begin{aligned} \tau_{cr}(\alpha) = & -p_0(1-D_M) \cdot \frac{1-k_0}{2} \sin 2\alpha - p_0 D_M \operatorname{tg} \phi_e \frac{1-k_0}{2} \cos 2\alpha + \\ & + p_0 D_M \operatorname{tg} \phi_e \cdot \frac{1+k_0}{2} + k \cdot p_c \end{aligned} \quad (2-23)$$

Con esta expresión, BJERRUM (1.973) interpreta unos ensayos de corte simple realizados sobre muestras talladas en distintas orientaciones de tres arcillas, figura (2-3). Puede observarse que el material presenta efecto BAUSCHINGER, pues la resistencia al corte es diferente en el caso activo (  $\Delta \tau$  en el mismo sentido que  $\tau_{\alpha}$  ) que en el pasivo (  $\Delta \tau$  en sentido contrario que  $\tau_{\alpha}$  ). El ajuste en el caso activo es bastante bueno. En el pasivo es algo peor, hecho que se atribuye a que las deformaciones en rotura en este caso son excesivamente grandes para las hipótesis que lleva implícitas la fórmula (2-20), es decir, que la rotura sin drenaje se produce para una deformación pequeña, sin que haya lugar a reajustes de partículas que movilizan más resistencia friccional, como ya se explicó con detalle en el capítulo anterior.



Todas las tensiones dibujadas se consideran positivas.

$$\begin{aligned} \sigma_y &= p_0 \\ \sigma_x &= k_0 \cdot p_0 \\ \tau_{xy} &= 0 \end{aligned}$$

fig. (2-2).-- Convenio de signos.

Arcilla de Skå-Edeby

Arcilla plástica de Drammen

Arcilla poco plástica de Drammen

$$\begin{aligned} \frac{p_c}{p_0} &= 1.2 & k &= 0.14 \\ k_0 &= 0.75 & \phi_e &= 11^\circ \end{aligned}$$

$$D_H = 0.60$$

$$\begin{aligned} \frac{p_c}{p_0} &= 1.5 & k &= 0.10 \\ k_0 &= 0.60 & \phi_e &= 16^\circ \end{aligned}$$

$$D_H = 0.55$$

$$\begin{aligned} \frac{p_c}{p_0} &= 1.2 & k &= 0.06 \\ k_0 &= 0.55 & \phi_e &= 27^\circ \end{aligned}$$

$$D_H = 0.85$$

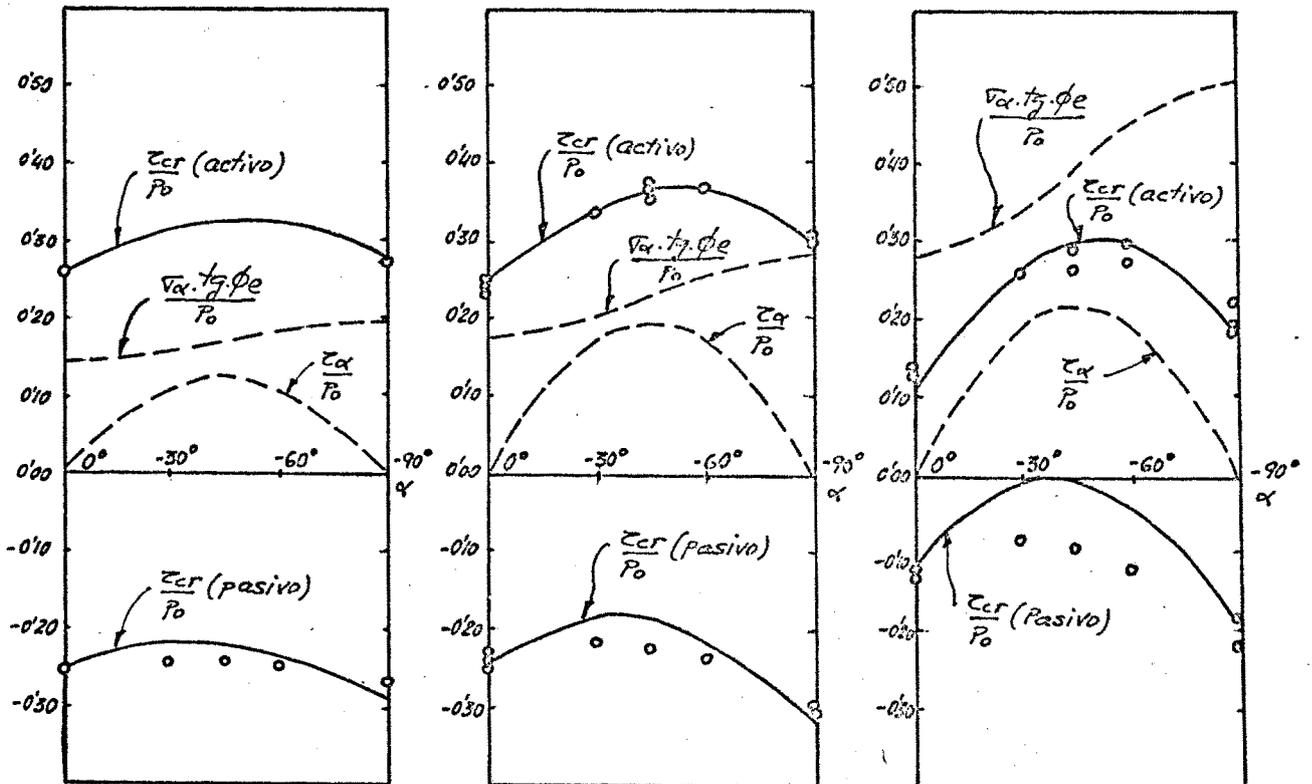


fig. (2-3).-- Ensayos de corte simple con orientación variable. (BJERRUM, 1.973).

Afirma BJERRUM (1.973) que el ajuste es mayor si se toma como resistencia pasiva la correspondiente a una deformación del 2 %, análoga a la necesaria para producir la rotura en el caso activo.

### 3.3.- CRITERIO PROPUESTO.

La expresión (2-20) representa la resistencia al corte según un plano determinado, pero no constituye aún un criterio general de rotura para ser usado en un análisis elasto-plástico.

En primer lugar, para que incluya las posibilidades de rotura activa y pasiva, hay que generalizar dicha expresión en la forma:

$$\tau_{cr}(\alpha) = \tau_{\alpha} + (\pm \sigma_{\alpha} \cdot \operatorname{tg} \phi_e - \tau_{\alpha}) \cdot D_M \pm k \cdot p_c \quad (2-24)$$

ya que los sumandos  $(k \cdot p_c)$  y  $(\sigma_{\alpha} \cdot \operatorname{tg} \phi_e)$  movilizan resistencia al corte en cualquier sentido.

Con esto, la expresión (2-23) queda:

$$\tau_{cr}(\alpha) = -p_0 \cdot (1 - D_M) \cdot \frac{1 - k_0}{2} \cdot \operatorname{sen} 2\alpha - M \cdot p_0 \cdot D_M \cdot \operatorname{tg} \phi_e \cdot \frac{1 - k_0}{2} \cos 2\alpha + \\ + M \cdot (k \cdot p_c + p_0 \cdot D_M \cdot \operatorname{tg} \phi_e \cdot \frac{1 + k_0}{2}) \quad (2-25)$$

dónde:  $M = \pm 1$

En cada caso habrá que tomar el valor de M que dé el menor valor absoluto de la tensión de rotura.

Las tensiones existentes en el suelo en el momento de su rotura se pueden dividir en dos partes, la primera se habrá desarrollado durante la consolidación de la arcilla y otra después, en el proceso sin drenaje.

Si los incrementos de tensiones aplicados sin drenaje se designan con el subíndice " u ", las tensiones resultantes son:

$$\begin{aligned}\sigma_x &= k_0 \cdot p_0 + \sigma_{u_x} \\ \sigma_y &= p_0 + \sigma_{u_y} \\ \tau_{xy} &= \tau_{u_{xy}}\end{aligned}\quad (2-26)$$

y la tensión tangencial según cualquier plano:

$$\tau(\alpha) = \frac{\sigma_x - \sigma_y}{2} \cdot \operatorname{sen} 2\alpha + \tau_{xy} \cdot \operatorname{cos} 2\alpha \quad (2-27)$$

Admitiremos que en un punto del suelo se produce la rotura cuando en alguno ( o algunos ) de los planos que pasan por él la tensión tangencial actuante alcance uno de los dos valores definidos por (2-25):

$$\tau(\alpha) = \tau_{cr}(\alpha) \quad \text{para } \alpha = \alpha_r \quad (2-28)$$

y en el resto de los planos se verifique:

$$\tau(\alpha) < \tau_{cr}(\alpha) \quad \text{para } \alpha \neq \alpha_r \quad (2-29)$$

$$\text{llamando } f(\sigma_{ij}, \alpha) = \tau(\alpha) - \tau_{cr}(\alpha) \quad (2-30)$$

las expresiones (2-28) y (2-29) se transforman en

$$\begin{aligned} f(\sigma_{ij}, \alpha) &= 0 & \text{para } \alpha &= \alpha_r \\ f(\sigma_{ij}, \alpha) &< 0 & \text{para } \alpha &\neq \alpha_r \end{aligned} \quad (2-31)$$

Estas condiciones equivalen a que la función  $f(\sigma_{ij}, \alpha)$

tenga un máximo para el valor  $\alpha = \alpha_r$ . Las condiciones analíticas para que esta función presente un máximo en este punto son:

$$\left. \begin{aligned} f(\sigma_{ij}, \alpha) &= 0 \\ \frac{\partial f(\sigma_{ij}, \alpha)}{\partial \alpha} &= 0 \\ \frac{\partial^2 f(\sigma_{ij}, \alpha)}{\partial \alpha^2} &< 0 \end{aligned} \right\} \text{ para: } \alpha = \alpha_r \quad (2-32)$$

Desarrollando las dos primeras ecuaciones se obtiene

$$\begin{aligned} \left( f(\sigma_{ij}, \alpha) \right)_{\alpha=\alpha_r} &= +p_0(1-D_M) \frac{1-k_0}{2} \operatorname{sen} 2\alpha_r + M p_0 D_M \operatorname{tg} \phi_e \frac{1-k_0}{2} \cos 2\alpha_r - \\ &- M (k p_c + p_0 D_M \operatorname{tg} \phi_e \frac{1+k_0}{2}) + \frac{\sigma_x - \sigma_y}{2} \operatorname{sen} 2\alpha_r + \tau_{xy} \cos 2\alpha_r = 0 \end{aligned} \quad (2-33)$$

$$\begin{aligned} \left( \frac{\partial f(\sigma_{ij}, \alpha)}{\partial \alpha} \right)_{\alpha=\alpha_r} &= +p_0(1-D_M) \frac{1-k_0}{2} \cos 2\alpha_r - M p_0 D_M \operatorname{tg} \phi_e \frac{1-k_0}{2} \operatorname{sen} 2\alpha_r \\ &+ \frac{\sigma_x - \sigma_y}{2} \cos 2\alpha_r - \tau_{xy} \operatorname{sen} 2\alpha_r = 0 \end{aligned} \quad (2-34)$$

Despejando el valor de  $\alpha_r$ , de la ecuación (2-34) se obtiene:

$$\operatorname{tg} 2\alpha_r = \frac{\frac{\sigma_x - \sigma_y}{2} + p_0 (1 - D_M) \frac{1 - k_0}{2}}{\tau_{xy} + M \cdot p_0 \cdot D_M \cdot \operatorname{tg} \phi_e \frac{1 - k_0}{2}} \quad (2-35)$$

Introduciendo en la ecuación (2-33) el valor de  $\alpha_r$ , obtenido en la ecuación (2-35) se tiene:

$$f(\sigma_{ij}) = + \sqrt{\left[ \frac{\sigma_x - \sigma_y}{2} + p_0 (1 - D_M) \frac{1 - k_0}{2} \right]^2 + \left[ \tau_{xy} + M \cdot p_0 \cdot D_M \cdot \operatorname{tg} \phi_e \frac{1 - k_0}{2} \right]^2} - \left[ k \cdot p_c + p_0 D_M \operatorname{tg} \phi_e \frac{1 + k_0}{2} \right] = 0 \quad (2-36)$$

Sólo resta comprobar que se está ante un valor máximo por lo que se debe de cumplir la inecuación expresada en (2-32).

$$\left. \frac{\partial^2 f(\sigma_{ij}, \alpha)}{\partial \alpha^2} \right|_{\alpha = \alpha_r} = - \left[ p_0 (1 - D_M) (1 - k_0) \operatorname{sen} 2\alpha_r + M \cdot p_0 \cdot D_M \cdot \operatorname{tg} \phi_e (1 - k_0) \cos 2\alpha_r + (\sigma_x - \sigma_y) \operatorname{sen} 2\alpha_r + 2 \tau_{xy} \cos 2\alpha_r \right] < 0 \quad (2-37)$$

Introduciendo la expresión de  $\alpha_r$  (2-35) y llamando para una mayor sencillez:

$$a = \frac{\sigma_x - \sigma_y}{2} + p_0 (1 - D_M) \frac{1 - k_0}{2}$$

$$b = \tau_{xy} + M \cdot p_0 \cdot D_M \operatorname{tg} \phi_e \frac{1 - k_0}{2} \quad (2-38)$$

resulta:

$$\left( \frac{\partial^2 f}{\partial \alpha^2} \right)_{\alpha=\alpha_r} = - \frac{2a^2 + 2b^2}{\sqrt{a^2 + b^2}} = -2 \sqrt{a^2 + b^2}$$

teniendo en cuenta que, según (2-36) y (2-38):

$$\sqrt{a^2 + b^2} = k \cdot p_c + p_o D_M \operatorname{tg} \phi_e \frac{1+K_o}{2}$$

se obtiene:

$$\left( \frac{\partial^2 f}{\partial \alpha^2} \right)_{\alpha=\alpha_r} = -2 \left( k p_c + p_o D_M \operatorname{tg} \phi_e \frac{1+K_o}{2} \right) < 0$$

luego se cumple la condición de máximo para cualquier valor de a y b.

La expresión (2-36) constituye el criterio de rotura que se adopta en este trabajo, siendo  $\alpha_r$  la dirección del plano de rotura.

Dicha expresión (2-36) no es una función par de las tensiones, por lo cual se considera el efecto BAUSCHINGER señalado anteriormente; y constituye una generalización anisótropa del criterio de TRESCA - (2-17), diferente de la propuesta por HILL (1.950).

El criterio propuesto cumple también la condición de que, al tender a anularse la causa de la anisotropía ( $K_o \neq 1$ ), el criterio tiende al correspondiente a un material anisótropo (HILL, 1.950). - Puede verse a este respecto que si la consolidación de la arcilla es isótropa ( $K_o = 1$ ) resulta:

$$f_1(\sigma_{ij}) = \sqrt{\left(\frac{\sigma_x - \sigma_y}{2}\right)^2 + \tau_{xy}^2} - \left[ k \cdot p_c + p_0 \cdot D_H \cdot \operatorname{tg} \phi_e \frac{1+k_0}{2} \right] = 0 \quad (2-39)$$

que es el criterio de TRESCA, siendo la dirección de rotura:

$$\operatorname{tg} 2\alpha_r = \frac{\sigma_x - \sigma_y}{2 \tau_{xy}} \quad (2-40)$$

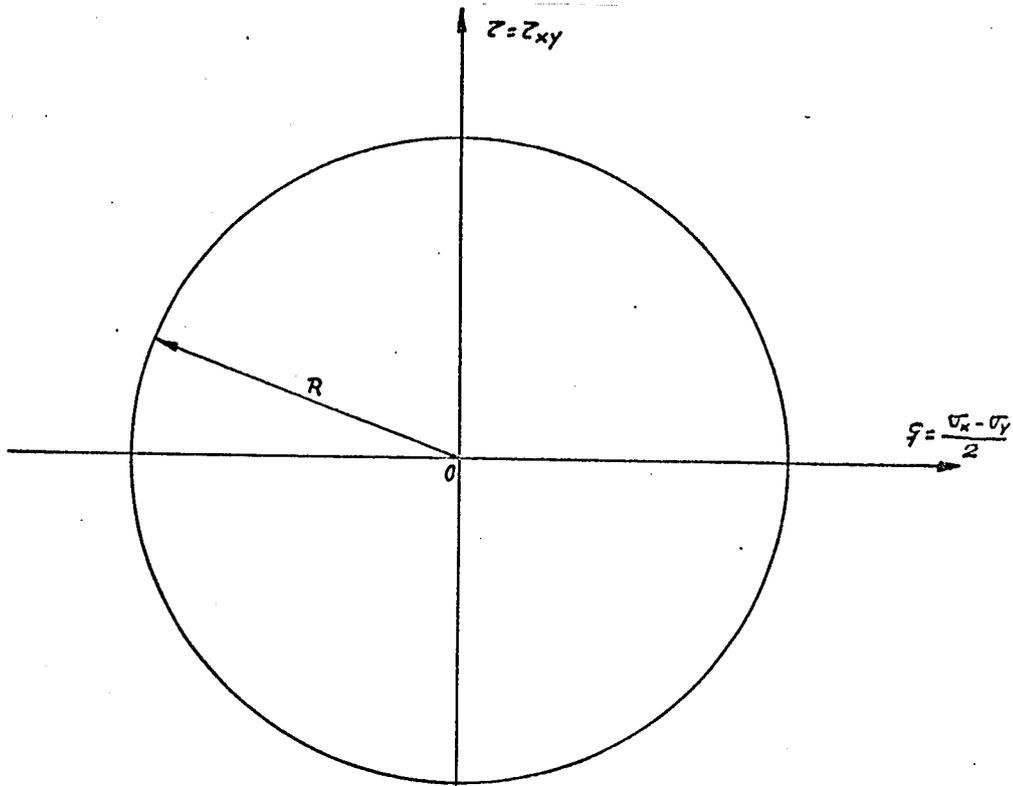
que es la de la tensión tangencial máxima.

El criterio anterior no puede expresarse en función única de las tensiones principales o de los invariantes de tensiones, por ser anisótropo. Para hacer una representación gráfica del mismo es preciso utilizar el espacio  $(\sigma_x, \sigma_y, \tau_{xy})$  en el que los ejes X e Y son el horizontal y vertical, respectivamente. Más cómo - da resulta la representación en el espacio definido por las coordenadas:

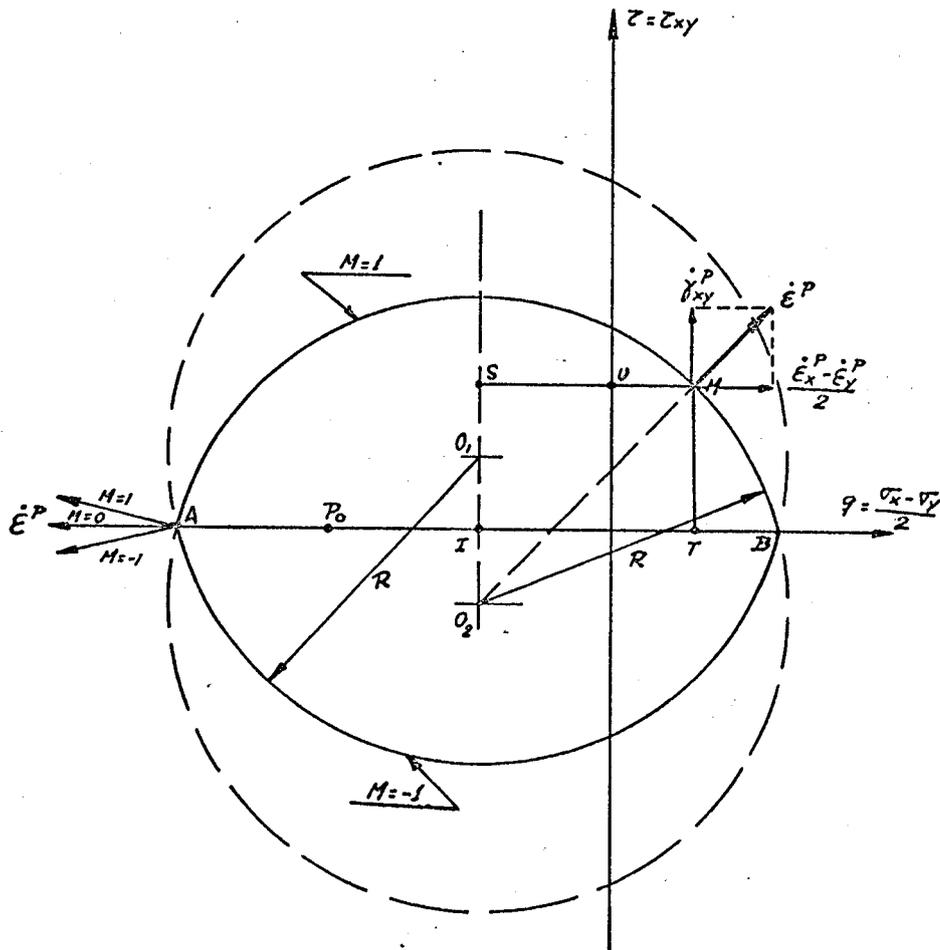
$$\begin{aligned} p &= \frac{\sigma_x + \sigma_y}{2} \\ q &= \frac{\sigma_x - \sigma_y}{2} \\ z &= \tau_{xy} \end{aligned} \quad (2-41)$$

En este espacio, el criterio de TRESCA es un cilindro de revolución de eje OP y radio  $C_u$ , figura (2-4.a).

El criterio (2-36) resulta en cambio el recinto interior común a dos cilindros de revolución, ambos de ejes paralelos a OP, figura



a) Criterio isotropo (Tresca)



b) Criterio anisotropo

fig. (2-4).- Criterio de rotura propuesto.

(2-4.b). Como puede verse en la figura, si  $\tau_{xy} \geq 0$  se debe tomar  $M = 1$ , mientras que si  $\tau_{xy} < 0$  debe tomarse  $M = -1$ .

Ambos cilindros son simétricos respecto al eje horizontal siendo las coordenadas de sus centros.

$$q_1 = -p_0 (1-D_M) \frac{1-k_0}{2} \quad (2-42)$$

$$\tau_1 = p_0 D_M \operatorname{tg} \phi_e \frac{1-k_0}{2}$$

y

$$q_2 = -p_0 (1-D_M) \frac{1-k_0}{2}$$

$$\tau_2 = -p_0 D_M \operatorname{tg} \phi_e \frac{1-k_0}{2}$$

siendo para ambos su radio:

$$R = k \cdot p_c + p_0 D_M \operatorname{tg} \phi_e \frac{1+k_0}{2} \quad (2-43)$$

En la misma figura se representa también, como se mencionó anteriormente, el estado inicial de consolidación (punto  $P_0$ ), definido por los parámetros

$$q = -p_0 \frac{1-k_0}{2} \quad (2-44)$$

$$\tau = 0$$

La expresión (2-36) puede ponerse en función de los incrementos de tensiones sin drenaje, sustituyendo (2-26) en dicha expresión:

$$f(r_0) = \sqrt{\left(\frac{r_{0a} + r_{0r} \cdot A}{2}\right)^2 + (r_{0a} + M \cdot B)^2} - C = 0$$

entonces

$$A = r_0 \cdot \Delta n \cdot \frac{1 - \cos \alpha}{2}$$

$$B = r_0 \cdot \Delta n \cdot \frac{1}{2} \sin \alpha = A \cdot \frac{1}{\cos \alpha} \tag{2.27}$$

$$C = \pi r_0 + r_0 \cdot \Delta n \cdot \frac{1}{2} \sin \alpha$$

En la figura (2-4.b), esto equivale a trasladar el origen de coordenadas al punto P<sub>0</sub>.

La figura indica la forma de determinar gráficamente la dirección de rotura, definida por el ángulo 2α<sub>r</sub>.

Si la rotura se produce en el punto II, uniéndolo con su centro correspondiente, el ángulo formado por la recta que los une con el eje Z es 2α<sub>r</sub>, pues:

$$\tan 2\alpha_r = \frac{MS}{SO_r} = \frac{MU + US}{MT + TO_r} = \frac{\frac{r_0 + r_{0r}}{2} + r_0(1 - \Delta n) \frac{1 - \cos \alpha}{2}}{r_0 + M r_0 \Delta n \frac{1}{2} \sin \alpha}$$

Resulta interesante estudiar los límites entre los que puede variar  $K_0$ . Durante la consolidación, las tensiones tangenciales son soportadas prácticamente en su totalidad por fricción (BJERRUM, - 1.973), lo cual implica la segunda de las desigualdades (2-21). Ello equivale a que  $K_0$  debe estar comprendido entre los valores activo y pasivo de RANKINE:

$$\frac{1 - \operatorname{sen} \phi_e}{1 + \operatorname{sen} \phi_e} \leq K_0 \leq \frac{1 + \operatorname{sen} \phi_e}{1 - \operatorname{sen} \phi_e} \quad (2-46)$$

Por otra parte, pudiera en principio ocurrir que el punto  $P_0$  fuera exterior al criterio de rotura figura (2-4,b). Sin embargo, es fácil ver que con las restricciones (2-46) ello no es posible. En efecto, la condición de que el punto  $P_0$  sea interior a la superficie de rotura es que:

$$f(\sigma_{ij}) \leq 0 \quad \text{para} \quad \tau_{ij} = 0 \quad (2-47)$$

Ello equivale a:

$$\begin{aligned} \frac{1 - \operatorname{sen} \phi_e}{1 + \operatorname{sen} \phi_e} - \frac{2k}{D_M} \cdot \frac{P_e}{P_0} \cdot \sqrt{\frac{1 - \operatorname{sen} \phi_e}{1 + \operatorname{sen} \phi_e}} &\leq K_0 \leq \\ &\leq \frac{1 + \operatorname{sen} \phi_e}{1 - \operatorname{sen} \phi_e} + \frac{2k}{D_M} \cdot \frac{P_e}{P_0} \cdot \sqrt{\frac{1 + \operatorname{sen} \phi_e}{1 - \operatorname{sen} \phi_e}} \end{aligned} \quad (2-48)$$

que, teniendo en cuenta (2-46), se cumple siempre.

En la figura (2-5) se representan las superficies de rotura correspondientes a las tres arcillas de la figura (2-3).

#### 4.- F A S E P L A S T I C A

Una vez plastificado un elemento de suelo, los incrementos de deformación que se producen al aplicar un incremento de carga tendrán una componente elástica y otra plástica:

$$\dot{\epsilon}_{ij} = \dot{\epsilon}_{ij}^e + \dot{\epsilon}_{ij}^p$$

La componente elástica viene dada por la ecuación (2-14), - puesta en forma incremental.

En cuanto a la componente plástica, admitiremos que el material cumple la ley de la normalidad, es decir, que el criterio de rotura (2-36) es también el potencial plástico (2-4,c):

$$\dot{\epsilon}_{ij}^p = \lambda \cdot \frac{\partial f(\sigma_{ij})}{\partial \sigma_{ij}} \quad (2-49)$$

ARCILLA DE  
SKÅ-EDEBY

ARCILLA PLÁSTICA DE  
DRAMMEN

ARCILLA POCO PLÁSTICA DE  
DRAMMEN

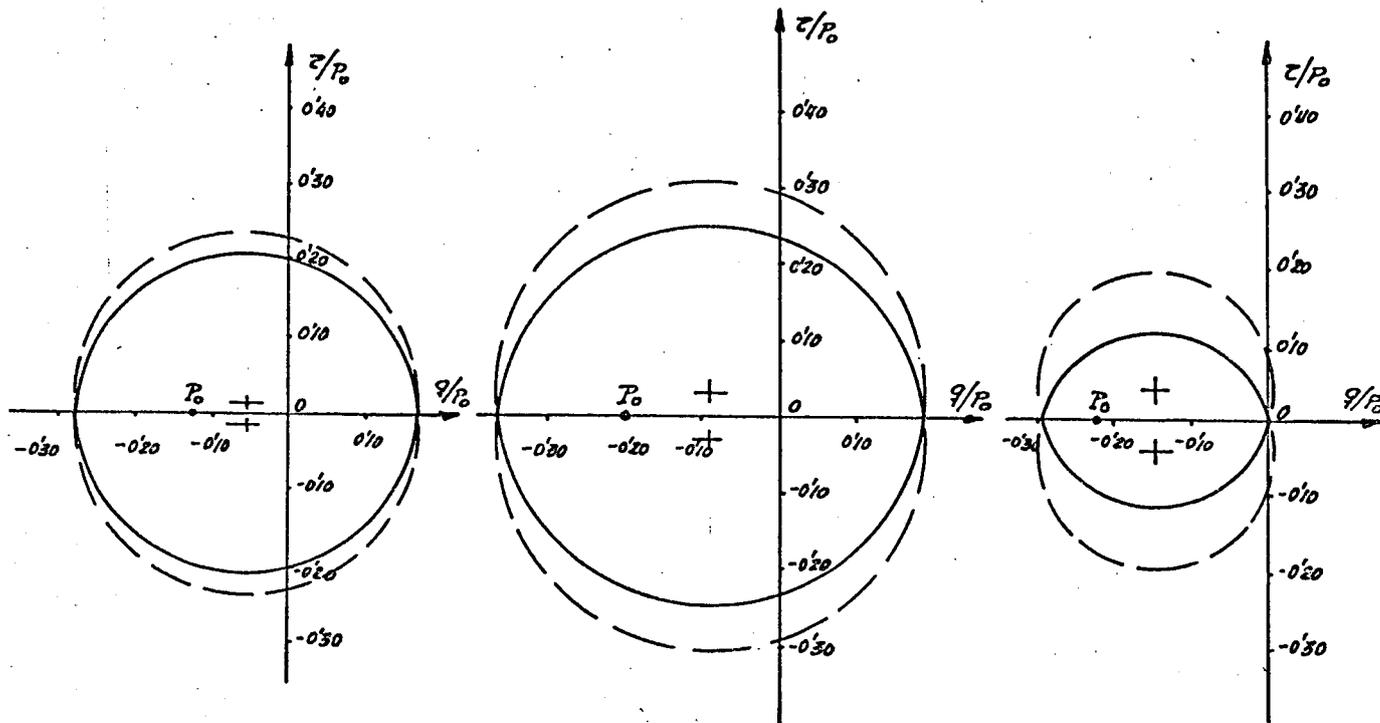


Fig. (2-5).— Superficies de rotura.

Introduciendo la expresión (2-36) en (2-49) resulta:

$$\dot{\epsilon}_x^P = \lambda \cdot \frac{\partial f}{\partial \sigma_x} = \frac{\lambda}{2C} \cdot \left[ \frac{\sigma_x - \sigma_y}{2} + p_0 (1 - D_M) \frac{1 - k_0}{2} \right]$$

$$\dot{\epsilon}_y^P = \lambda \cdot \frac{\partial f}{\partial \sigma_y} = -\frac{\lambda}{2C} \cdot \left[ \frac{\sigma_x - \sigma_y}{2} + p_0 (1 - D_M) \cdot \frac{1 - k_0}{2} \right] \quad (2-50)$$

$$\dot{\gamma}_{xy}^P = \lambda \cdot \frac{\partial f}{\partial \tau_{xy}} = \frac{\lambda}{C} \cdot \left[ \tau_{xy} + M \cdot p_0 \cdot D_M \cdot \tan \phi_e \cdot \frac{1 - k_0}{2} \right]$$

o, en función de las tensiones sin drenaje, descontando las iniciales de peso propio:

$$\begin{aligned}\dot{\epsilon}_x^P &= \frac{\lambda}{2C} \cdot \left[ \frac{\sigma_{ux} - \sigma_{uy}}{2} - A \right] \\ \dot{\epsilon}_y^P &= -\frac{\lambda}{2C} \cdot \left[ \frac{\sigma_{ux} - \sigma_{uy}}{2} - A \right] \\ \dot{\gamma}_{xy}^P &= \frac{\lambda}{C} \cdot [\tau_{uxy} + M \cdot B]\end{aligned}\quad (2-51)$$

siendo A, B y C los valores (2-45). El valor de M debe tomarse + o -1, como se dijo anteriormente. Sin embargo, en el caso de que  $\tau_{xy} = 0$ , es decir, en los puntos A y B de la figura (2-4,b), existe una singularidad, ya que en ellos la normal a la superficie es doble. A efectos del criterio de rotura esto no importa, pues la condición de rotura es idéntica para ambos valores de M. Sin embargo, la ley de flujo (2-51) sí cambia, pues cambia el signo de  $\dot{\gamma}_{xy}^P$ .

Este inconveniente lo presentan todos los criterios de rotura con puntos angulosos (TRESCA, MOHR-COULOMB, GRANTAGRAVEL, CAM-CLAY, etc.). En estos casos se aplica la generalización de KOITER, consistente en tomar un vector intermedio entre las dos normales existentes en el punto singular figura (2-4,b). En el caso presente, al

ser  $\tau_{xy} = 0$  en dichos puntos, las direcciones horizontal y vertical son principales, por lo que es lógico suponer, y está de acuerdo con la experiencia, que en los puntos A y B el valor de  $\dot{\gamma}_{xy}^p$  es nulo. Ello equivale a tomar para M el valor medio de los dos posibles  $\pm 1$ , es decir, cero.

Por lo tanto, los valores de M a adoptar en el criterio de rotura (2-36) ó (2-45), son:

$$M = 1 \quad \text{para} \quad \tau_{xy} \geq 0$$

$$M = -1 \quad \text{para} \quad \tau_{xy} \leq 0$$

mientras que en la ley de flujo (2-51) debe tomarse:

$$M = 1 \quad \text{para} \quad \tau_{xy} > 0$$

$$M = 0 \quad \text{para} \quad \tau_{xy} = 0$$

$$M = -1 \quad \text{para} \quad \tau_{xy} < 0$$

La ley de flujo (2-51) predice un cambio de volumen plástico nulo, al ser el criterio (2-36) independiente de la tensión normal media; con ello se respeta la incompresibilidad que impone el hecho de no existir drenaje.

## 5.- INTERPRETACION DE LOS ENSAYOS CONVENCIONALES.

Con el criterio de rotura (2-36) pueden interpretarse los ensayos convencionales (triaxial, compresión simple) sin drenaje.

Una de las formas más frecuentes de estudiar en laboratorio la anisotropía es el ensayo en compresión simple o confinada de probetas talladas en distintas orientaciones (BISMOP, 1.966; DeLORY y LAI, 1.971).

Si se supone que todo el proceso de extracción de la muestra y preparación de la probeta se realiza sin drenaje, el criterio (2-36) puede aplicarse directamente, sustituyendo en el:

$$\begin{aligned}\sigma_x &= \sigma_{ox} + \tau_{ux} = k_0 p_0 + (-k_0 p_0) + D \sin^2 \theta = D \sin^2 \theta \\ \sigma_y &= \sigma_{oy} + \tau_{uy} = p_0 + (-p_0) + D \cos^2 \theta = D \cos^2 \theta \\ \tau_{xy} &= \tau_{oxy} + \tau_{uxy} = -D \sin \theta \cos \theta\end{aligned}\quad (2-52)$$

siendo  $\theta$  el ángulo del eje con la vertical ).

El desviador de rotura, resulta:

$$\frac{D}{2} = \bar{A} \cos 2\theta + M.B. \sin 2\theta \pm \sqrt{C^2 - [A \sin 2\theta - MB \cos 2\theta]^2} \quad (2-53)$$

siendo:

$$A = p_0 (1 - D_M) \frac{1 - k_0}{2} \quad (2-54)$$

$$B = p_0 D_M \operatorname{tg} \phi_e \frac{1 - k_0}{2}$$

$$C = k_{pc} + p_0 D_M \operatorname{tg} \phi_e \frac{1 + k_0}{2}$$

El signo (+) corresponde a rotura en compresión y el (-) en

extensión. El valor de M es:

$$M = -1 \quad \text{para} \quad 0 \leq \theta \leq \pi/2 \quad (2-55)$$

$$M = 1 \quad \text{para} \quad \pi/2 \leq \theta \leq \pi$$

En la figura (2-6) se representan los resultados de DeLORY y LAI (1.971) sobre una arcilla canadiense, cuyas características se indican en la misma figura. Se puede ver que el ajuste obtenido con la ecuación (2-53) es bastante bueno. También se ha dibujado de trazos de curva cosenoidal propuesta por dichos autores para interpretar los resultados obtenidos, similar a otras (BISHOP, 1.966). La ventaja de la ecuación (2-53) frente a estas curvas no es su mejor o peor ajuste, sino que no es una curva de ajuste, ya que se ha deducido de un criterio de rotura general (2-36), cuya comprobación experimental está en principio basada en ensayos diferentes, figura (2-3).

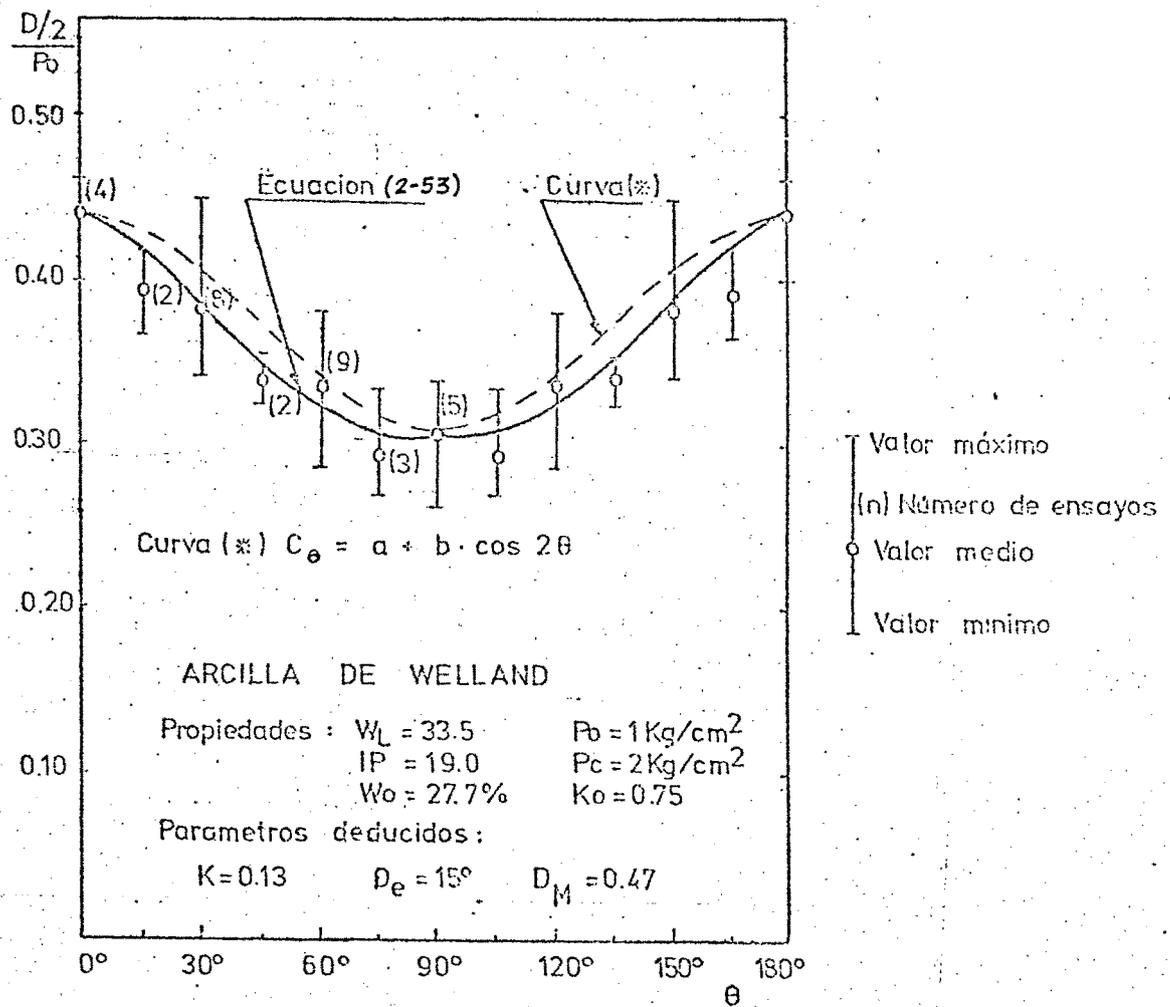


fig. (2-6).- Ensayos de De-LORY y LAI, (1.971).

En la figura (2-7), se ha dibujado el criterio de rotura que se deduce para esta arcilla. Comparándolo con las arcillas representadas en la figura (2-5) puede verse la influencia de la sobreconsolidación que, por una parte aumenta la resistencia y, por otra aumenta también el coeficiente de empuje al reposo.

Por ello la arcilla de WELLAND figura (2-7), que tiene unos parámetros resistentes ( $\kappa, \phi_e, D_M$ ) parecidos a la arcilla plástica de DRAMMEN figura (2-5), es más resistente y menos anisótropa que ésta, al ser mayor la razón de sobreconsolidación.

La ecuación (2-53) permite la obtención de los parámetros resistentes sin necesidad de ensayar probetas talladas en distintas orientaciones.

Si en un aparato triaxial se consolida una probeta con unas presiones vertical y horizontal  $p_0$  y  $k_0 p_0$ , respectivamente, siendo  $p_c$  su presión de preconsolidación, y a continuación se rompe sin drenaje, el incremento del desviador de rotura se obtiene sustituyendo en (2-53) los valores de los incrementos de las tensiones junto con  $\theta = 0^\circ$  y  $M = -1$ :

$$\frac{Du}{2} = -p_0 \cdot D_M \cdot \frac{1-k_0}{2} \pm \sqrt{(k \cdot p_c + p_0 \cdot D_M \cdot \operatorname{tg} \phi_e) \cdot (k \cdot p_c + p_0 \cdot D_M \cdot \operatorname{tg} \phi_e \cdot k_0)} \quad (2-56)$$

## ARCILLA DE WELLAND

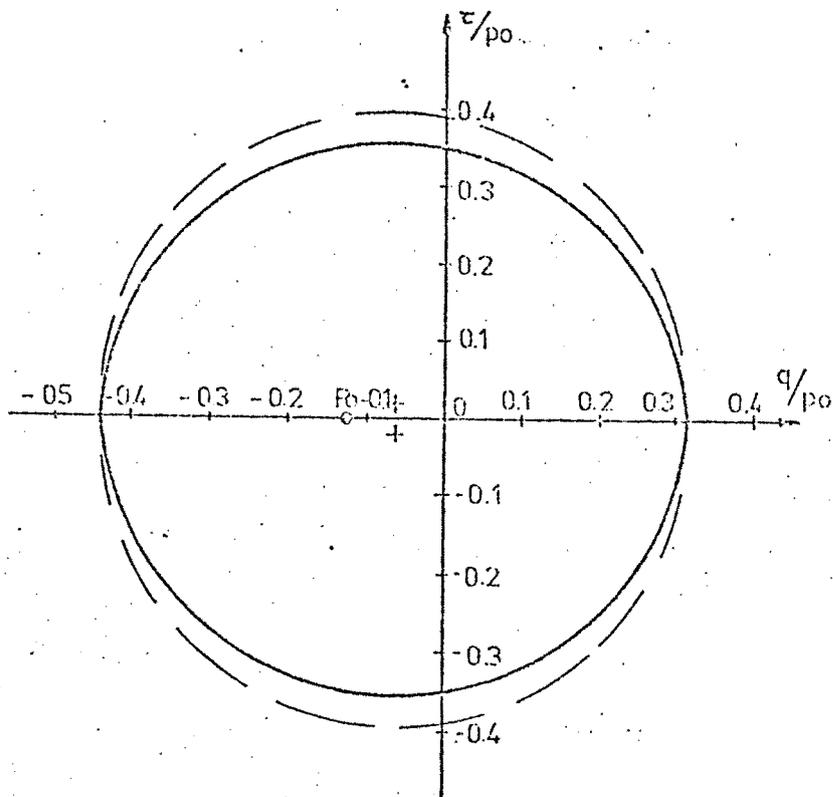


fig. (2-7).- Superficie de rotura de la arcilla de Welland.

El desviador total de rotura (incluyendo el inicial de consolidación) resulta:

$$\frac{D}{2} = p_0 (1 - D_M) \cdot \frac{1 - k_0}{2} \pm \sqrt{(k \cdot p_c + p_0 \cdot D_M \cdot \operatorname{tg} \phi_e) \cdot (k \cdot p_c + p_0 \cdot D_M \cdot \operatorname{tg} \phi_e \cdot k_0)} \quad (2-57)$$

Las expresiones (2-56) y (2-57) se representan en las figuras (2-8) y (2-9), respectivamente. Los valores  $K_1$  y  $K_2$ , que anulan el desviador de rotura, son los límites de desigualdad (2-48) y son, por tanto, inalcanzables; los valores posibles de  $K_0$  se indican en ambas figuras.

La inclinación del plano de rotura viene dada por:

$$\operatorname{tg} 2\alpha_r = \pm \frac{\sqrt{(k \cdot p_c + p_0 \cdot D_M \cdot \operatorname{tg} \phi_e) \cdot (k \cdot p_c + p_0 \cdot D_M \cdot \operatorname{tg} \phi_e \cdot k_0)}}{p_0 \cdot D_M \cdot \frac{1 - k_0}{2}} \quad (2-58)$$

$$C_{u0} = k \cdot p_c + p_0 \cdot D_M \cdot \tan \phi_e$$

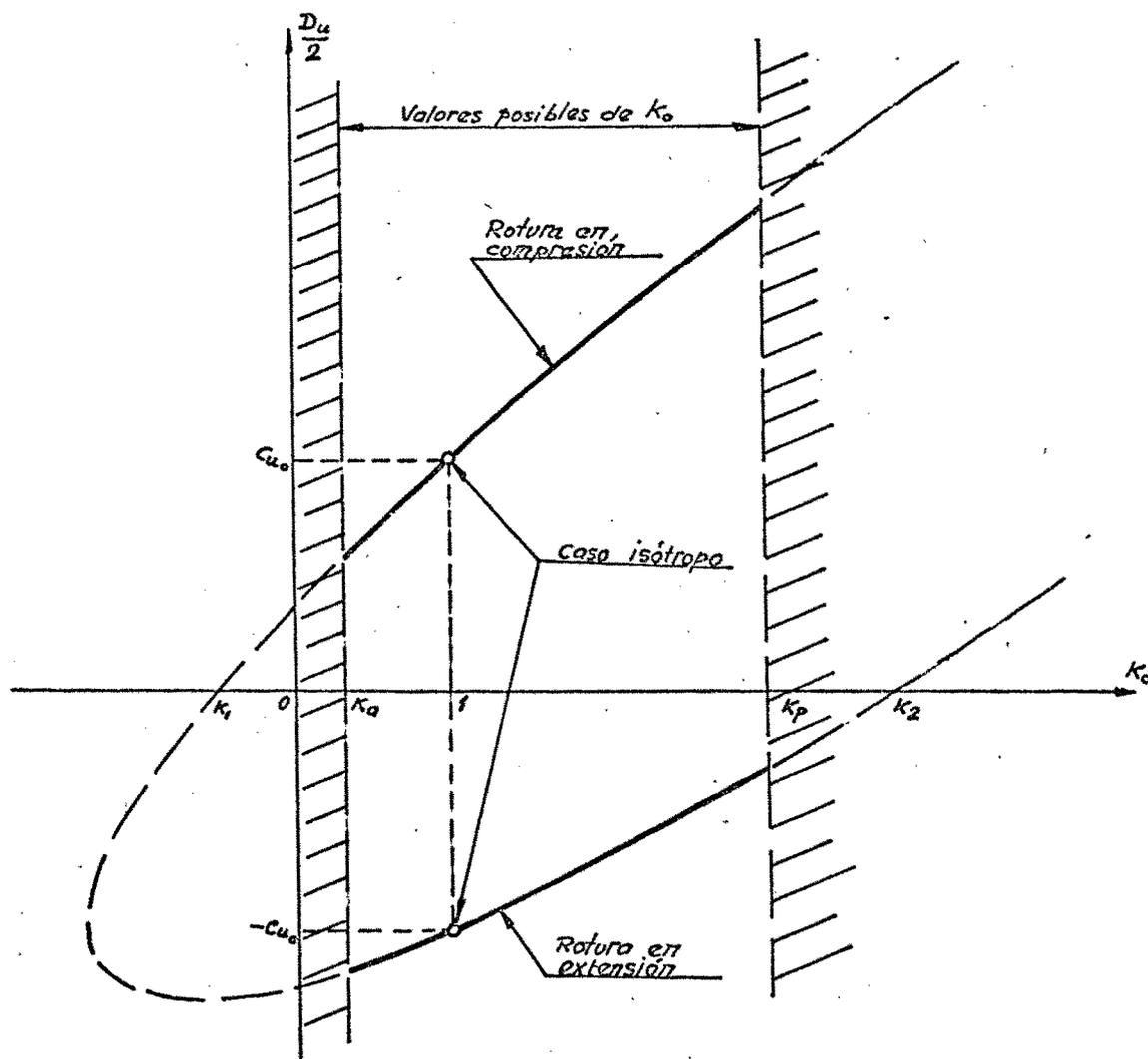


fig. (2-8).— Ecuación 2-56.

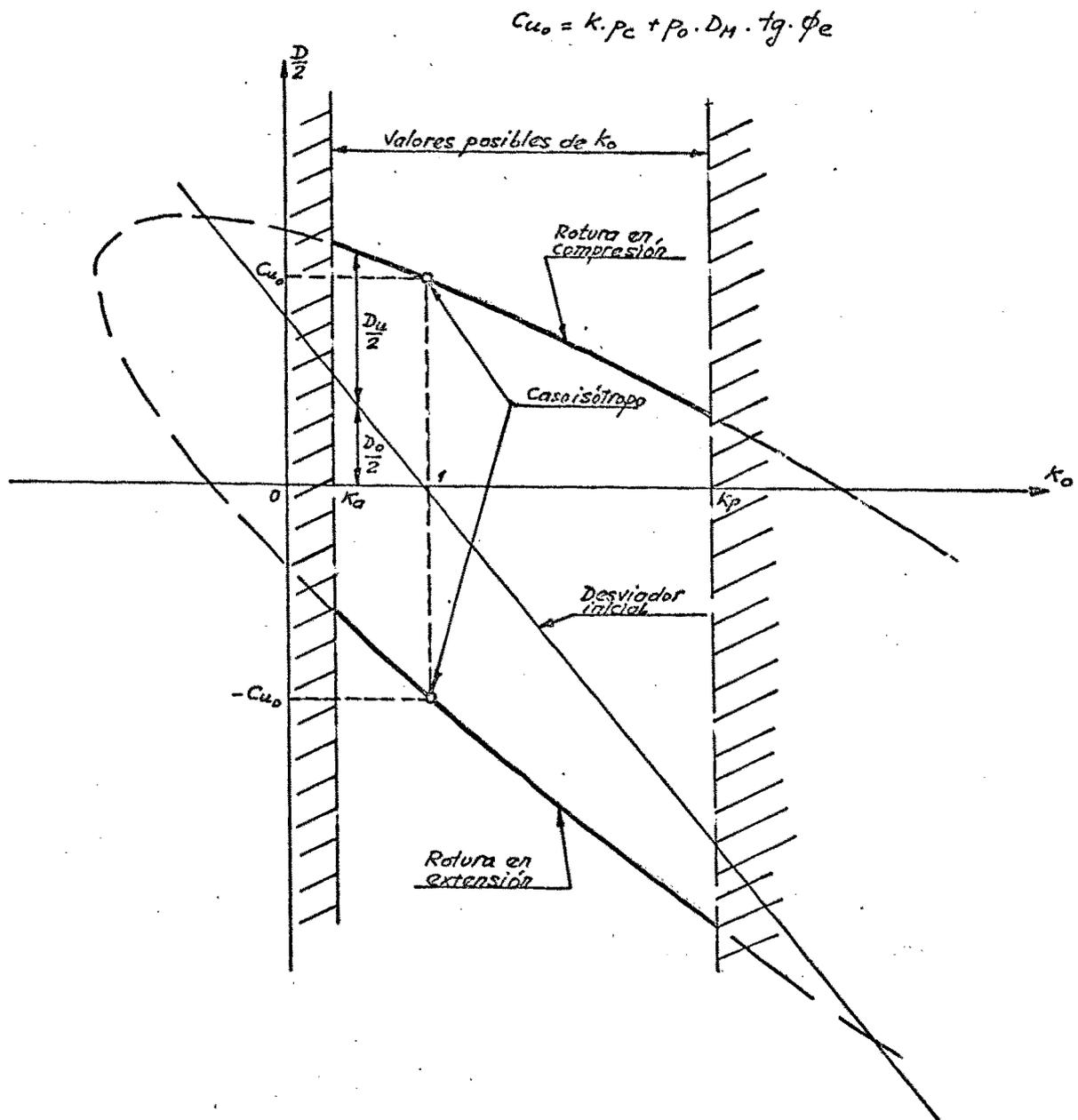


fig. (2-9).- Ecuación 2-57.

que se representa gráficamente en la figura (2-10). Puede verse que en el caso isótropo hay dos planos de rotura, formando ángulos de  $\pm 45^\circ$  con la vertical. Sin embargo, en el caso general ( $K_0 \neq 1$ ) - existen cuatro planos de rotura, simétricos dos a dos respecto a los correspondientes al caso isótropo figura (2-11). Los planos de rotura son los mismos en compresión que en extensión.

Las expresiones (2-56) ó (2-57) son útiles para la determinación en laboratorio del parámetro  $D_M$  de forma directa. En efecto, si se hacen un ensayo de compresión y otro de extensión y resultan  $D_c$  y  $D_e$  los desviadores de rotura respectivos, se tiene, de (2-57):

$$D_c - D_e = p_0 \cdot (1 - D_M) \cdot \frac{1 - K_0}{2} \quad (2-59)$$

de donde:

$$D_M = 1 - \frac{D_c - D_e}{(1 - K_0) \cdot p_0} \quad (2-60)$$

El resto de los parámetros que definen el criterio son los parámetros de HVORSLEV ( $\kappa$ ,  $\phi_e$ ) y pueden determinarse en la forma usual para ellos o realizando ensayos como el descrito con diversos valores de  $p_0$ ,  $K_0$  y  $p_c$  y utilizando las expresiones (2-56) ó (2-57).

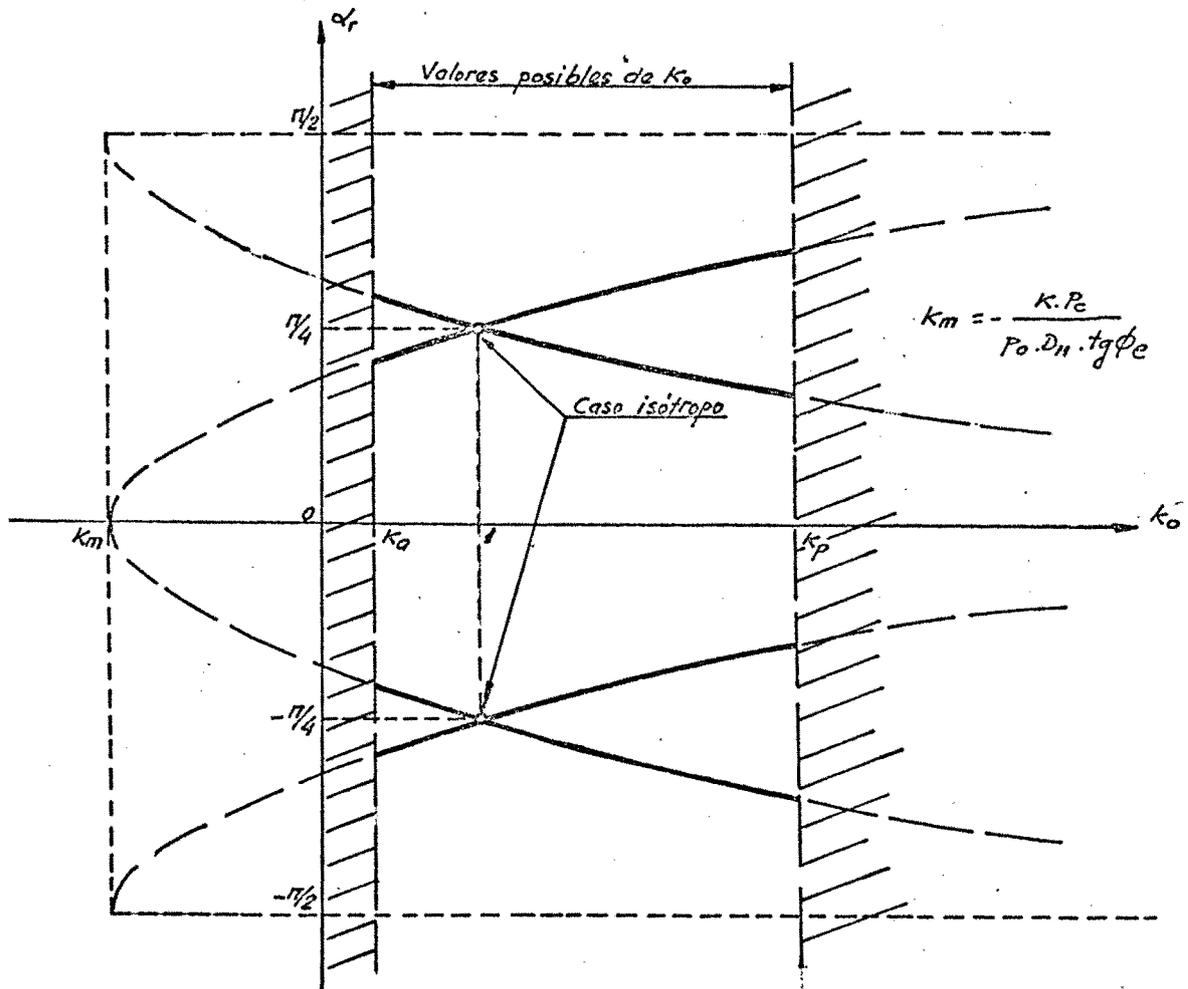


fig. (2-10).— Inclinación de los planos de rotura en función de  $K_0$  .

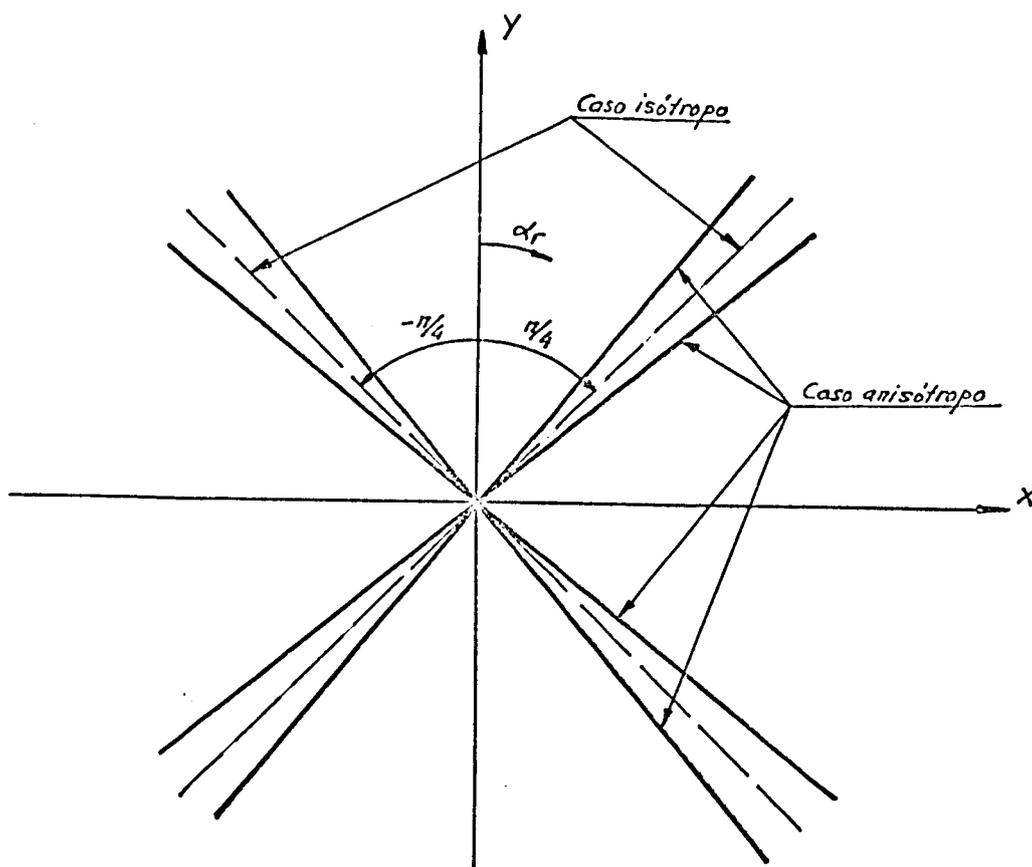


fig. (2-11).- Planos de rotura.

## CAPITULO III

MODELO MATEMATICO ADOPTADO Y  
METODO DE RESOLUCION

## MODELO MATEMATICO ADOPTADO Y METODO DE RESOLUCION

### 1.- CARACTERISTICAS GENERALES DEL MODELO

La resolución del problema teórico que ha sido planteado en el capítulo anterior, ha sido realizada mediante la formulación de un modelo híbrido en tensiones y deformaciones, operando en tensiones totales.

La ley tensión-deformación en la fase elástica, el criterio de rotura y la ley de flujo durante la fase plástica, fueron expuestas y desarrolladas en el capítulo II.

### 2.- FASE ELASTICA

#### 2-1.- PRINCIPIO VARIACIONAL

El principio variacional que rige a los modelos híbridos en tensiones y deformaciones, tal como se mencionó en el capítulo I es el de HELLINGER - REISSNER, que queda enunciado de la siguiente forma:

De todos los campos de tensiones y desplazamientos que cumplen las condiciones de compatibilidad interna (ley deformación-desplazamiento) y externa (condiciones de contorno en desplazamientos), el campo solución es el que hace mínimo el funcional:

$$\begin{aligned} \pi_R = & \int_{\Omega} \sigma^T \epsilon(\delta) d\Omega - \int_{\Omega} W_C(\sigma) d\Omega - \int_{\Omega} f^T \delta d\Omega - \\ & - \int_{\Sigma_P} p^T \delta d\Sigma - F^T \delta_F - \int_{\Sigma_S} r^T (\delta - \delta_0) d\Sigma \end{aligned} \quad (3-1)$$

siendo: fig. (3-1)

$\Omega$  = volumen del recinto estudiado

$\Sigma$  = contorno de  $\Omega$

$\Sigma_P$  = parte del contorno  $\Sigma$  en la que se conocen las tensiones

$\Sigma_S$  = parte de  $\Sigma$  en donde se conocen los desplazamientos

$\sigma$  = tensiones en un punto cualquiera de  $\Omega$

$\epsilon(\delta)$  = deformaciones en un punto cualquiera, expresadas en función de los desplazamientos.

$\delta$  = desplazamientos en un punto cualquiera

$\delta_0$  = desplazamientos prescritos en  $\Sigma_S$

$f$  = fuerzas de masa

$p$  = fuerzas superficiales en  $\Sigma_P$

$F$  = fuerzas concentradas

$r$  = reacciones de apoyo en  $\Sigma_S$

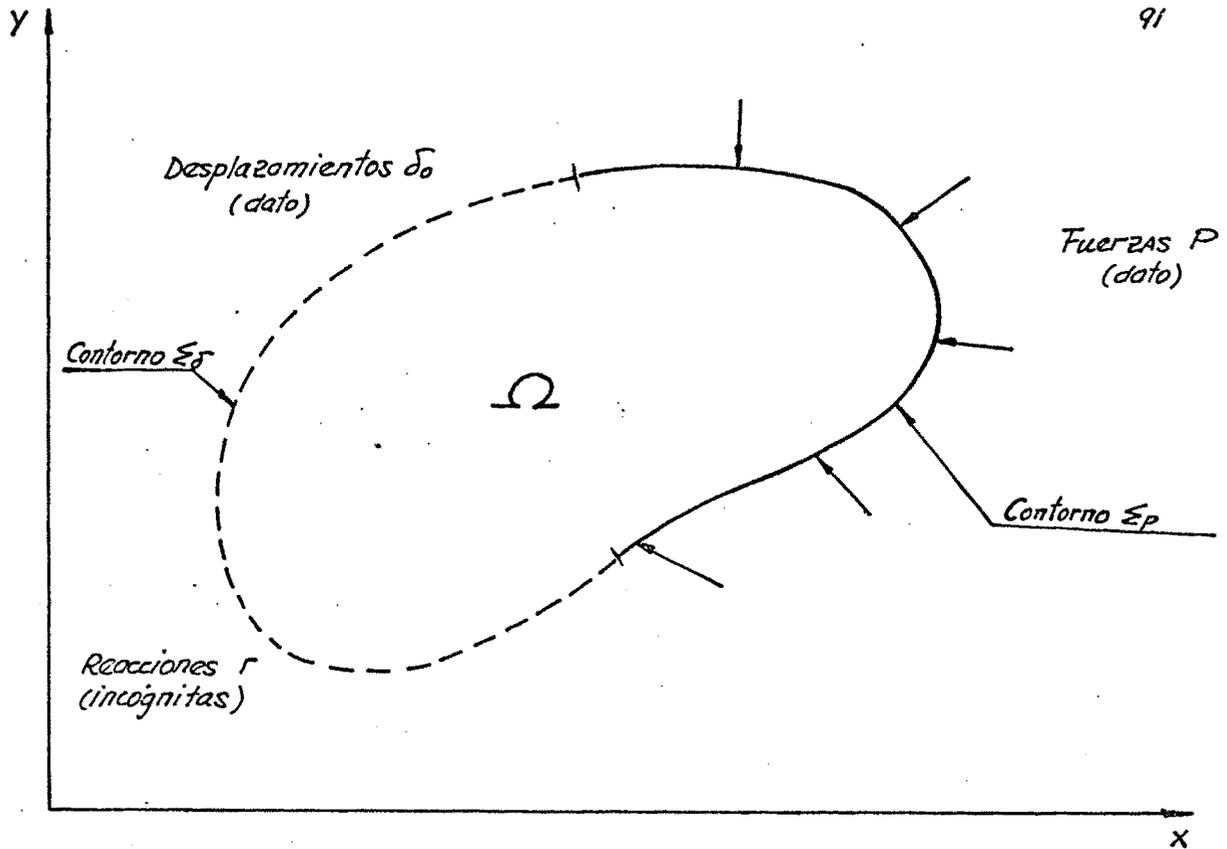


fig. (3-1).- Dominio.

La función de tensiones  $W_c(\sigma)$ , llamada densidad de energía complementaria, es una función que se define, de forma que el campo de deformaciones es la derivada de dicha función respecto a las tensiones

$$\epsilon_{ij} = \frac{\partial W_c}{\partial \sigma_{ij}} \quad (3-2)$$

Si el material es lineal es decir que su ley tensión-deformación es de la forma:

$$\{\epsilon\} = [C] \cdot \{\sigma\} \quad (3-3)$$

puede verse entonces que la densidad de energía debe de ser una forma cuadrática de las tensiones, quedando de la forma

$$W_c = \frac{1}{2} \{ \sigma \}^T \cdot |C| \cdot \{ \sigma \} \quad (3-4)$$

Como ya se dijo en el capítulo anterior, para cualquier valor de los parámetros elásticos que se adopten, esta forma cuadrática resulta siempre definida positiva.

Esto implica que la matriz  $|C|$  sea simétrica para que derivando en la expresión (3-4) respecto  $\{ \sigma \}$  se obtenga (3-3).

En el caso de sólido elástico con anisotropía transversal incompresible, la matriz  $|C|$  es la desarrollada en el apartado 2 del cap. II (ecuac. 2-14)

Como ya se vio entonces esta matriz  $|C|$  es singular por lo que no puede despejarse las tensiones en función de las deformaciones.

$$\text{Det. } |C| = 0 \quad (3-5)$$

La utilización directa del principio variacional de HELLINGER-REISSNER, en un modelo de elementos finitos, no es práctica por exigir un gran número de incógnitas, lo que amplía el número de ecuaciones y dificulta su resolución pues en cada punto aparecen tres incógnitas más, las tres tensiones  $\sigma_x, \sigma_y, \tau_{xy}$ .

Por ello, algunos autores ( HERRMANN, 1.965; HWANG et al, 1.969, URIEL, 1.970 ) han propuesto principios variacionales similares, en los que se utilizan como incógnitas los desplazamientos y una única función de tensiones, que puede ser una de las tensiones o una relación entre ellas.

En el modelo que se presenta en este trabajo se ha optado por esta solución, si bien no se han utilizado directamente los funcionales propuestos por los autores citados, sino que el principio variacional que rige el problema se ha deducido a partir del principio general de REISSNER. Con ello se posibilita la generalización del modelo a la fase plástica, como más adelante, se expondrá. La razón de esto es que los funcionales anteriores están planteados exclusivamente para materiales elásticos lineales, mientras que el de REISSNER (3-1) es válido siempre que la densidad de energía complementaria,  $W_c(\sigma)$ , cumpla la condición (3-2).

HERRMANN (1.965) elige como función de tensiones

$$H = \frac{\sigma_x + \sigma_y + \sigma_z}{3E} \quad (3-6)$$

pues estudia el fenómeno en isotropía.

HWANG et al (1.969), que introducen la anisotropía transversal, generaliza (3-6), definiendo:

$$H = \frac{\partial}{\partial E} \sigma_x + \frac{\partial}{\partial E} \sigma_y + \frac{\partial}{\partial E_1} \sigma_z \quad (3-7)$$

siendo  $z$  la dirección de ortotropía.

En el presente trabajo se va a adoptar la misma definición de la función de tensiones que fué propuesta por HWANG.

En el anejo 2 queda demostrado que el cumplimiento del funcional propuesto (3-1) con la definición (3-7), mediante la aplicación del cálculo variacional, lleva implicado el cumplimiento de los siguientes grupos de ecuaciones básicas:

- Equilibrio interno
- Condiciones de contorno en fuerzas
- Condiciones de contorno en desplazamientos
- Reacciones de apoyo

Introduciendo en (3-7) las condiciones de deformación plana ( $\epsilon_z = 0$ ) e incompresibilidad ( $\frac{\Delta V}{V} = 0$ ) y cambiando por comodidad los ejes  $Y$  y  $Z$  se obtiene:

$$H = \frac{4-3r+2r^2}{4rE_1} \sigma_x + \frac{4-r}{4E_1} \sigma_y \quad (3-7a)$$

gracias a la nueva variable  $H$ , entre las ecuaciones (3-3) y (3-7.a) pueden despejarse las tensiones en función de las deformaciones y de  $H$ , resultando:

$$\begin{Bmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \tau_{xy} \end{Bmatrix} = \begin{vmatrix} \frac{2\Gamma E_I}{4-\Gamma} & 0 & 0 & \frac{2\Gamma E_I}{4-\Gamma} \\ 0 & \frac{2(2-\Gamma)E_I}{4-\Gamma} & 0 & \frac{2\Gamma E_I}{4-\Gamma} \\ 0 & 0 & G' & 0 \end{vmatrix} \begin{Bmatrix} \epsilon_x \\ \epsilon_y \\ \gamma_{xy} \\ H \end{Bmatrix} \quad (3-8)$$

A la nueva matriz columna de las deformaciones con la nueva variable  $H$ , se le llama en adelante deformaciones generalizadas, representándose de la forma  $\{\epsilon^*\}$

De esta forma, se ha podido, gracias a la introducción de la variable  $H$ , obtener una relación que permita obtener las tensiones en función de las deformaciones, salvándose a costa de introducir una nueva incógnita la dificultad que originaba el carácter singular de la matriz  $|C|$ .

A esta nueva matriz que relaciona las tensiones con las deformaciones se le llama  $|M|$ , quedando (3-8) de la forma:

$$\{\sigma\} = |M| \cdot \{\epsilon^*\} \quad (3-9)$$

Introduciendo esta expresión (3-9) en el principio variacional de REISSNER (3-1) quedan como únicas incógnitas las deformaciones y el valor de H en cada punto ( deformaciones generalizadas ). El funcional que se obtiene coincide con el propuesto por HWANG et al. ( 1.969 ):

$$\begin{aligned} \pi_R = & \int_{\Omega} \mathbf{E}^{*T} \mathbf{M}^T \boldsymbol{\varepsilon} \, d\Omega - \int_{\Omega} \frac{1}{2} \mathbf{E}^{*T} \mathbf{M}^T \mathbf{C} \cdot \mathbf{M} \cdot \mathbf{E}^* \, d\Omega - \int_{\Omega} \mathbf{f}^T \boldsymbol{\delta} \, d\Omega \\ & - \int_{\Sigma_P} \mathbf{p}^T \boldsymbol{\delta} \, d\Sigma - \mathbf{F}^T \boldsymbol{\delta}_F - \int_{\Sigma_\delta} \mathbf{r}^T (\boldsymbol{\delta} - \boldsymbol{\delta}_0) \, d\Sigma \end{aligned} \quad (3-10)$$

siendo la notación la adoptada en (3-1).

## 2-2.- DISCRETIZACION EN ELEMENTOS FINITOS

Si se discretiza el continuo en elementos finitos, el principio variacional (3-10) queda de la forma:

$$\begin{aligned} \pi_R = & \sum_e \left[ \int_{\Omega_e} \mathbf{E}^{*T} \mathbf{M}^T \boldsymbol{\varepsilon} \, d\Omega_e - \frac{1}{2} \int_{\Omega_e} \mathbf{E}^{*T} \mathbf{M}^T \mathbf{C} \cdot \mathbf{M} \cdot \mathbf{E}^* \, d\Omega_e - \right. \\ & \left. - \int_{\Omega_e} \mathbf{f}^{*T} \boldsymbol{\delta}^* \, d\Omega_e - \int_{\Sigma_P} \mathbf{p}^T \boldsymbol{\delta}^* \, d\Sigma - \mathbf{F}^{*T} \boldsymbol{\delta}_e^* \right] \end{aligned} \quad (3-11)$$

siendo  $\Omega_e$  el área de cada elemento,  $\{\boldsymbol{\delta}_e^*\}$  los desplazamientos generalizados nodales de cada elemento,  $\{\mathbf{F}^*\}$  las fuerzas nodales generalizadas,  $\{\mathbf{f}^*\}$  expresa las fuerzas másicas generalizadas y  $\{\mathbf{p}^*\}$  las fuerzas superficiales generalizadas. El sumatorio va extendido a todos los elementos.

Se supone que no hay cargas superficiales.

Por razones de homogeneidad en las dimensiones, ya que H no tiene dimensiones por asemejarse a una deformación, se define una nueva variable con dimensiones de desplazamientos, llamándola  $\delta_H$

$$\delta_H = H \cdot \sqrt{2e} \quad (3-12)$$

El valor  $\delta_H$ , al igual que H, variará en el interior del elemento siguiendo una ley del mismo tipo que las leyes elegidas para la variación de tensiones. Esto implica que  $\delta_H$  viene definido por un número finito, n, de parámetros,  $\delta_{H_i}$ :

$$\delta_H(x,y) = \sum_{i=1}^n N_{H_i}(x,y) \cdot \delta_{H_i} \quad (3-14)$$

siendo  $N_{H_i}$  las funciones de forma de tensiones del elemento.

Análogamente, H valdrá en cada punto:

$$H(x,y) = \sum_{i=1}^n B_{H_i}(x,y) \cdot \delta_{H_i} \quad (3-15)$$

siendo:

$$B_{H_i} = \frac{N_{H_i}}{\sqrt{2e}} \quad (3-16)$$

De esta forma se obtiene la matriz columna de los desplazamientos generalizados, formada por los desplazamientos vertical y horizontal de cada uno de los nodos del elemento y de  $\delta_{H_i}$

$$\left\{ \delta_e^* \right\} = \begin{pmatrix} u_1 \\ v_1 \\ \vdots \\ u_m \\ v_m \\ \delta_{H_1} \\ \vdots \\ \delta_{H_n} \end{pmatrix} \quad (3-13)$$

siendo  $m$  el número de nodos del elemento y  $n$  el número de parámetros de  $\delta_H$ .

El subíndice "e", en lo que sigue, indica que se refiere al elemento "e". Los superíndices "e" y "p" indican respectivamente componentes elástica y plástica.

En las matrices columna  $\{F\}^*$ ,  $\{f\}^*$ ,  $\{P\}^*$  su generalización consistirá únicamente en ampliar su número de filas con tantos ceros como número de parámetros tenga  $\delta_H (n)$

En un modelo convencional de elementos finitos en desplazamientos, los desplazamientos y deformaciones en un punto cualquiera del interior del elemento, en función de los desplazamientos nodales, vienen definidos respectivamente por:

$$\begin{aligned} \{\delta\} &= |N| \cdot \{\delta_e\} \\ \text{y} \quad \{\epsilon\} &= |B| \cdot \{\delta_e\} \end{aligned} \quad (3-17)$$

En el modelo híbrido que se presenta, se tiene:

$$\{\delta\} = |N^*| \cdot \{\delta_e^*\} \quad (3-18)$$

$$\text{Siendo: } |N^*| = \left( N, \begin{array}{c} 0 \dots 0 \\ 0 \dots 0 \end{array} \right) \\ \pi \text{ COLUMNAS}$$

$$\{\epsilon\} = |B_1| \cdot \{\delta_e^*\} \quad (3-19)$$

$$\text{siendo: } |B_1| = \left( B, \begin{array}{c} 0 \dots 0 \\ 0 \dots 0 \end{array} \right) \\ \pi \text{ COLUMNAS}$$

$$\{\varepsilon^*\} = [B^*] \cdot \{\delta_e^*\} \quad (3-20)$$

siendo:

$$[B^*] = \begin{array}{c} \begin{array}{c} 0 \\ 0 \dots 0 \\ 0 \end{array} \\ \begin{array}{c} B \\ 0 \dots 0 \\ \underbrace{\hspace{2cm}}_{B_{Hi}} \end{array} \end{array} \quad \begin{array}{l} \\ \\ 1 \text{ FILA} \\ \\ 11 \text{ COLUMNAS} \end{array}$$

Las matrices anteriores vienen definidas en función única del tipo de elemento empleado.

Introduciendo las expresiones (3-18), (3-19) y (3-20) en (3-1) se obtiene el funcional expresado en función de  $\{\delta_e^*\}$  que serán las incógnitas del sistema de ecuaciones a resolver, pues todas las otras variables, tensiones y deformaciones, mediante las relaciones que acabamos de exponer quedan definidas en función de los desplazamientos nodales generalizados.

El funcional será de la forma:

$$\pi_R = \sum_e \left[ \frac{1}{2} \{\delta_e^*\}^T \cdot |K_e| \cdot \{\delta_e^*\} - \{F_e^*\} \cdot \{\delta_e^*\} \right] \quad (3-21)$$

siendo

$\{F_e^*\}$  las fuerzas nodales equivalentes (concentradas y másicas),

que se desarrollarán en el próximo apartado.

$$|K_e| = \int_{\Omega_e} \left[ 2|B^*|^T \cdot |M|^T \cdot |B| - |B^*|^T \cdot |M|^T \cdot |C| \cdot |M| \cdot |B^*| \right] d\Omega_e$$

(3-22)

La matriz  $|K_e|$  no tiene por qué ser simétrica, por ello para realizar la derivada de la forma cuadrática (3-21) es conveniente descomponerla en la suma de una matriz simétrica y una antisimétrica, es decir

$$|K_e| = |K_{oe}| + |K_e'| \quad (3-23)$$

siendo 
$$K_{oe}^{ij} = \frac{K_e^{ij} + K_e^{ji}}{2} \quad (3-24)$$

y 
$$K_e'^{ij} = \frac{K_e^{ij} - K_e^{ji}}{2}$$

De este modo, la minimización de la forma cuadrática (3-21) conduce a:

$$\sum_e \left[ |K_{oe}| \cdot \{\delta_e^*\} - \{F_e^*\} \right] = 0 \quad (3-25)$$

pues queda eliminada la matriz  $|K_e'|$  antisimétrica.

La matriz  $|K_{oe}|$  es la matriz de rigidez del elemento "e", empleada esta denominación en sentido amplio, ya que el término "matriz de rigidez" se reserva en realidad a modelos planteados en desplazamientos.

Como se cumple para este caso el principio de aditividad de las matrices de rigidez, es posible mediante el ensamblaje de las matrices elementales forman la matriz de rigidez general del sistema definido en (3-25).

### 2-3.- INTRODUCCION DE LAS FUERZAS MASICAS Y EXTERIORES

Como ya es sabido existen principalmente dos posibilidades para introducir estas cargas: el método consistente o el método normal.

a) El método consistente, crea unas fuerzas nodales equivalentes generalizadas  $\{F_e^*\}$  (3-25) de forma que:

$$\{F_e^*\} = \{F_e^{F^*}\} + \{F_e^{f^*}\} + \{F_e^{P^*}\}$$

siendo

$$\{F_e^{F^*}\} = \text{cargas concentradas en los nodos}$$

$$\begin{aligned} \{F_e^{f^*}\} &= \text{fuerzas nodales equivalentes a las fuerzas másicas} \\ &= \int_{\Omega_e} \{f^*\} \cdot |N|^* \cdot d\Omega \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \{F_e^{P^*}\} &= \text{fuerzas nodales equivalentes a las fuerzas superficiales} \\ &= \int_{\Sigma_p} \{P^*\} \cdot |N|^* \cdot d\Sigma \end{aligned}$$

La matriz de las fuerzas nodales equivalentes generalizadas  $\{F_e^*\}$  se obtendrá ampliando la matriz  $\{F_e\}$ , colocando un cero en la fila correspondiente a la variable  $\delta_H$ .

b) El método normal consiste en la fuerza resultante, suma de todas las fuerzas actuantes, sobre el elemento y descomponerla en fuerzas estáticamente equivalentes actuantes en los nodos.

En el caso de elementos triangulares ambos métodos dan las mismas fuerzas nodales equivalentes; para otros elementos aunque

los resultados no sean idénticos, está demostrado que ambos métodos convergen hacia la solución exacta.

### 3.- PLASTIFICACION DEL MATERIAL

#### 3-1.- REPRODUCCION DE LA PLASTIFICACION PROGRESIVA

El proceso utilizado para ir analizando la progresiva rotura y plastificación del material ha sido el siguiente.

Se considera en primer lugar que se aplica toda la carga suponiendo el material elástico, esto produce unos incrementos de tensiones en los elementos, los cuales es necesario cuantificarlos con el criterio de rotura que ha sido adoptado para estudiar en cada uno de los elementos si se ha producido la plastificación.

Para realizar el estudio de cual hubiera sido el elemento que de haberse realizado una progresiva aplicación de la carga, habría plastificado primero, se utiliza un parámetro,  $F_p$ , que se define como el valor por el que habría que dividir las tensiones existentes para que se cumpliera estrictamente el criterio de rotura.

Este criterio, que ha sido desarrollado con detalle en el capítulo II, se expresa en función de los incrementos de tensiones totales, es decir descontando las tensiones iniciales debido a su peso propio, en procesos de carga sin drenaje.

$$f = \sqrt{(q_r - A)^2 + (\tau_r + MB)^2} - C = 0 \quad (3-26)$$

siendo

$$q_r = \frac{\sigma_{x_r} - \sigma_{y_r}}{2}$$

$$\tau_r = \tau_{xy_r}$$

$$A = p_0 \frac{1-k_0}{2} D_M$$

$$B = p_0 \frac{1-k_0}{2} D_M \cdot \operatorname{tg} \phi_e$$

$$C = k \cdot p_c + p_0 \frac{1+k_0}{2} D_M \cdot \operatorname{tg} \phi_e$$

$(\sigma_x, \sigma_y, \tau_{xy})_r$  = tensiones que producen la rotura estricta.

Introduciendo el concepto de  $F_p$  queda:

$$\sqrt{\left(\frac{q}{F_p} - A\right)^2 + \left(\frac{\tau}{F_p} + MB\right)^2} = C \quad (3-27)$$

de donde

$$F_p = \frac{A \cdot q - MB \cdot \tau \pm \sqrt{C^2(q^2 + \tau^2) - (A \cdot \tau + MB \cdot q)^2}}{A^2 + B^2 - C^2} \quad (3-28)$$

De esta forma para cada uno de los elementos se tiene un valor de

$F_p$ , al haber aplicado toda la carga.

El elemento que posea el mayor valor de  $F_p$  será el elemento que habría plastificado en primer lugar y su plastificación se habría iniciado al aplicar una carga equivalente a la carga total

minorada con el factor  $F_p$  .

Si en ningún elemento  $F_p$  supera la unidad, quiere decir que el terreno soporta, sin llegar a plastificar en ningún punto, la carga a que está sometido.

Luego para la resolución del problema se supondrá una fase elástica inicial hasta que se inicia la plastificación del primer elemento, fase que viene definida por el máximo valor de  $F_p$  .

El resto de la carga se aplica en escalones iguales, tantos como se deseen, como en otros modelos ya existentes ( CAÑIZO, 1.971; SAGASETA, 1.973 ).

### 3-2.- LEY TENSION-DEFORMACION EN LOS ELEMENTOS PLASTIFICADOS

Una vez definida la fase inicial elástica, se inician los escalones de carga de la fase plástica y en ella se produce la rotura y plastificación sucesiva del terreno.

Se emplea el método incremental de la matriz de rigidez, reduciendo cada escalón de carga a un problema lineal.

La matriz de rigidez a emplear en cada escalón irá variando al modificarse las tensiones en cada elemento plastificado.

La ley tensión-deformación de un elemento plastificado puede deducirse mediante las condiciones de que la componente elástica de

la deformación cumpla la ley tensión-deformación elástica, que la componente plástica de la deformación cumpla la ley de flujo y que las tensiones cumplan el criterio de rotura en todo momento.

Las condiciones anteriores se expresan como sigue:

Componentes de la deformación:

$$\dot{\epsilon}^* = \dot{\epsilon}^{*e} + \dot{\epsilon}^{*p} \quad (3-29)$$

Condiciones de la componente elástica

$$\left\{ \dot{\sigma} \right\} = |M| \cdot \left\{ \dot{\epsilon}^{*e} \right\} \quad (3-30)$$

Condiciones de la componente plástica.

La ley de flujo establece que:

$$\dot{\epsilon}_{ij}^p = \lambda \cdot \frac{\partial f}{\partial \sigma_{ij}} \quad (3-31)$$

en forma matricial y utilizando las deformaciones generalizadas resulta:

$$\left\{ \dot{\epsilon}^{p*} \right\} = \lambda \cdot \left\{ f_1^* \right\} \quad (3-32)$$

siendo

$$\left\{ f_1^* \right\} = \begin{pmatrix} \frac{\partial f}{\partial \sigma_x} \\ \frac{\partial f}{\partial \sigma_y} \\ \frac{\partial f}{\partial \tau_{xy}} \\ 0 \end{pmatrix} \quad (3-33)$$

y empleando la notación de (3-26)

$$\left\{ f_1^* \right\} = \begin{pmatrix} q_r - A \\ -q_r + A \\ 2(\tau_r + B) \\ 0 \end{pmatrix} \quad (3-34)$$

Condiciones de las tensiones:

$$f(\sigma_{ij}) = Cte. = 0 \quad (3-35)$$

ello equivale a que:

$$df = \frac{\partial f}{\partial \sigma_{ij}} d\sigma_{ij} \approx \frac{\partial f}{\partial \sigma_{ij}} \cdot \dot{\sigma}_{ij} = 0 \quad (3-36)$$

derivando el criterio de rotura esta condición se transforma

en:

$$\left[ \frac{\sigma_x - \sigma_y}{2} + A \right] \cdot (\dot{\sigma}_x - \dot{\sigma}_y) + (2C_{xy} + 2.M.B) \dot{\epsilon}_{xy} = 0 \quad (3-37)$$

o bien matricialmente:

$$\{f_i\}^T \cdot \{\dot{\sigma}\} = 0 \quad (3-38)$$

Las ecuaciones anteriores (3-29), (3-30), (3-32), y (3-38)

suman un total de doce (4,3,4 y 1 respectivamente) y en ellas aparecen las siguientes incógnitas: incremento de las tensiones  $\dot{\sigma}$  (3), incremento de deformaciones totales  $\dot{\epsilon}^*$  (4), incremento de defomaciones elásticas  $\dot{\epsilon}^{*e}$  (4) y plásticas  $\dot{\epsilon}^{*p}$  (4) y parámetro  $\lambda$  (1), haciendo un total de diez y seis incógnitas.

Eliminando entre las doce ecuaciones las siguiente nueve incógnitas:  $\dot{\epsilon}^{*e}$ ,  $\dot{\epsilon}^{*p}$ , y  $\lambda$ , resultarán tres ecuaciones que de las cuales podemos obtener los incrementos de las tensiones en función de los incrementos de deformación totales

$$\{\dot{\sigma}\} = [M^p] \cdot \{\dot{\epsilon}^*\}$$

El proceso de eliminación es el siguiente: de las ecuaciones

(3-29) y (3-30)

$$\{\dot{\sigma}\} = |M| \cdot \{\dot{E}^*\} - |M| \cdot \{\dot{E}^{*P}\} \quad (3-39)$$

de (3-32) y (3-39) se deduce

$$\{\dot{\sigma}\} = |M| \cdot \{\dot{E}^*\} - |M| \cdot \lambda \cdot \{f_1^*\} \quad (3-40)$$

o bien, al ser  $\lambda$  un escalar

$$\{\dot{\sigma}\} = |M| \cdot \{\dot{E}^*\} - \lambda \cdot |M| \cdot \{f_1^*\} \quad (3-41)$$

sustituyendo (3-41) en (3-38)

$$\{f_1\}^T \cdot \left[ |M| \cdot \{\dot{E}^*\} - \lambda \cdot |M| \cdot \{f_1^*\} \right] = 0 \quad (3-42)$$

despejando el valor  $\lambda$

$$\lambda = \frac{\{f_1\}^T \cdot |M| \cdot \{\dot{E}^*\}}{\{f_1\}^T \cdot |M| \cdot \{f_1^*\}} \quad (3-43)$$

sustituyendo esta expresión (3-43) en (3-41)

$$\{\dot{\sigma}\} = |M| \cdot \{\dot{E}^*\} - |M| \cdot \{f_1^*\} \cdot \frac{\{f_1\}^T \cdot |M| \cdot \{\dot{E}^*\}}{\{f_1\}^T \cdot |M| \cdot \{f_1^*\}} \quad (3-44)$$

o bien

$$\{\dot{\sigma}\} = \left[ |M| - |M| \cdot \{f_1^*\} \cdot \frac{\{f_1\}^T \cdot |M|}{\{f_1\}^T \cdot |M| \cdot \{f_1^*\}} \right] \cdot \{\dot{E}^*\} \quad (3-45)$$

en forma matricial

$$\{\dot{\sigma}\} = |M^P| \cdot \{\dot{E}^*\} \quad (3-46)$$

siendo 
$$|M^P| = |M| - \frac{|M| \cdot \{f_i^*\} \cdot \{f_i\}^T \cdot |M|}{\{f_i\}^T \cdot |M| \cdot \{f_i^*\}} \quad (3-47)$$

expresión en la que son conocidas todas las matrices que intervienen.

En el anejo 3 se desarrolla la matriz  $|M^P|$  en el caso de material isótropo ( $k_0 = 1$ ). En caso general, las operaciones matriciales definidas en (3-47) son excesivamente laboriosas para efectuarles analíticamente, por lo que en dicho anejo no se desarrollan, siendo calculada únicamente en forma numérica mediante el programa de cálculo elaborado, que se presenta en el anejo 4.

### 3-3.- MATRIZ DE RIGIDEZ DE LOS ELEMENTOS PLASTIFICADOS

La aplicación del funcional (3-21) en la fase plástica exige la utilización de una matriz  $|C|$  análoga a la (3-3) que, en plasticidad no existe.

Por ello, aunque los escalones plásticos se reduzcan a problemas lineales, la aplicación del funcional (3-21) no es posible.

Para obviar la dificultad, se trata la deformación plástica como un problema de deformación inicial.

En este tipo de problemas es aplicable el principio de REISSNER en la forma (3-1), siempre que la función  $W_c$  (densidad de energía) se elija de forma que cumpla la condición (3-2) -- (WASHIZV, 1.968).

Puesto que, como ya se ha visto anteriormente:

$$\{\dot{\epsilon}\} = \{\dot{\epsilon}^e\} + \{\dot{\epsilon}^{*P}\} \quad (3-29)$$

y

$$\{\dot{\epsilon}^e\} = |C| \cdot \{\dot{\sigma}\} \quad (3-3)$$

debe de tomarse:

$$W_c(\dot{\sigma}) = \frac{1}{2} \left[ \{\dot{\sigma}\}^T \cdot |C| \cdot \{\dot{\sigma}\} + \{\dot{\sigma}\}^T \cdot \{\dot{\epsilon}^{*P}\} \right] \quad (3-48)$$

Debido a que estamos considerando la arcilla como un material plástico perfecto y que cumple la ley de la normalidad, el sumando:

$$\{\dot{\sigma}\}^T \cdot \{\dot{\epsilon}^{*P}\} \quad \text{es nulo por ser ambos vectores perpendiculares.}$$

Introduciendo (3-48) en (3-10) y operando análogamente a como se hizo anteriormente en la fase elástica ( apartado 2-2 de este capítulo ) se llega a la expresión del funcional incremental a minimizar, en los elementos plastificados, equivalente a la expresión (3-21):

$$\Pi_R = \sum_e \frac{1}{2} \{ \dot{\delta}_e^* \} \cdot |K_e^p| \cdot \{ \dot{\delta}_e^* \} - \{ \dot{F}^* \} \cdot \{ \dot{\delta}_e^* \} \quad (3-49)$$

siendo:

$$|K_e^p| = \int_{\Omega_e} [2|B^*|^T \cdot |M^p|^T \cdot |B| - |B^*|^T \cdot |M^p|^T \cdot |C| \cdot |M^p| \cdot |B^*|] d\Omega \quad (3-50)$$

que constituye la matriz de rigidez de los elementos plastificados.

Comparándola con la matriz correspondiente a los elementos elásticos

puede verse que es análoga, sustituyendo las matrices  $|M|$  por  $-|M^p|$ .

## CAPITULO IV

TIPOS DE ELEMENTOS FINITOS EMPLEADOS

## TIPOS DE ELEMENTOS FINITOS EMPLEADOS

### 1.- INTRODUCCION

Se comenzó en este trabajo empleando elementos triangulares de deformación constante, por su sencillez. Sin embargo, como más adelante se comenta, los resultados obtenidos con ellos no son buenos. Las deficiencias de estos elementos, que en un modelo convencional en desplazamientos no son importantes, se acentúan en un modelo híbrido, sobre todo tratándose de material incompresible. Los seis grados de libertad de desplazamientos de cada triángulo no son suficientes para reproducir adecuadamente la deformación a volumen constante.

Por esta causa se rechazaron estos elementos, se rehicieron todos los cálculos y se realizó un nuevo programa de ordenador, con elementos cuadrangulares, pues fácilmente puede verse que soportan con mayor libertad la condición de cambio de volumen nulo.

### 2.- ELEMENTO TRIANGULAR HIBRIDO DE DEFORMACION CONSTANTE

#### 2-1.- DESCRIPCION

Es un elemento finito formado por tres nodos y deformación constante en su interior, por lo tanto con leyes de desplazamientos lineales. Es el elemento más sencillo, y en modelos en desplazamientos suficientemente desarrollado (ZIENKIEWICZ, 1.967).

La generalización de este elemento a un modelo híbrido es inmediata, según se indicó en el capítulo anterior. Al ser constantes las deformaciones, también lo son las tensiones, y por lo tanto la función H. Así pues, el vector  $\delta_H$  definido en (3-12) solo tiene una componente y el número total de grados de libertad es siete: seis desplazamientos nodales y el valor  $\bar{\delta}_H$ , constante dentro del elemento.

## 2-2.- MATRICES ELEMENTALES

### 2-2-1.- FUNCIONES DE FORMA. MATRIZ N\*

Las funciones de forma, que definen los corrimientos de un punto cualquiera del elemento en función de los desplazamientos nodales son en este caso leyes lineales del tipo:

$$\begin{aligned} U &= U(x, y) = \alpha_1 + \alpha_2 x + \alpha_3 y \\ V &= V(x, y) = \beta_1 + \beta_2 x + \beta_3 y \end{aligned} \quad (4-1)$$

y operando se obtiene:

$$\left\{ \delta \right\} = \left\{ \begin{matrix} U \\ V \end{matrix} \right\} = \frac{1}{2\Omega} \begin{vmatrix} N_1 & 0 & N_2 & 0 & N_3 & 0 \\ 0 & N_1 & 0 & N_2 & 0 & N_3 \end{vmatrix} \cdot \begin{pmatrix} u_1 \\ v_1 \\ u_2 \\ v_2 \\ u_3 \\ v_3 \end{pmatrix} \quad (4-2)$$

siendo  $N_i = a_i + b_i x + c_i y$  para  $i = 1, 2, 3$ .

y siendo

$$a_i = x_j y_k - x_k y_j$$

$$b_i = y_j - y_k$$

$$c_i = x_k - x_j$$

$(x_i, y_i)$  son las coordenadas del nodo "i".

Introduciendo la nueva variable  $\delta_H$  se obtiene la matriz  $|N^*|$ , de forma que:

$$\left\{ \delta^* \right\} = \begin{Bmatrix} u \\ v \\ \delta_H \end{Bmatrix} = \frac{1}{2\Omega} \begin{vmatrix} N_1 & 0 & N_2 & 0 & N_3 & 0 & 0 \\ 0 & N_1 & 0 & N_2 & 0 & N_3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 2\Omega \end{vmatrix} \cdot \begin{Bmatrix} u_1 \\ v_1 \\ u_2 \\ v_2 \\ u_3 \\ v_3 \\ \delta_H \end{Bmatrix} \quad (4-3)$$

$$\left\{ \delta^* \right\} = |N^*| \cdot \left\{ \delta^{e*} \right\} \quad (4-4)$$

### 2-2-2.- DEFORMACIONES GENERALIZADAS. MATRICES $|B^*|$ y $|B_1|$

Derivando en (4-3) se obtienen las deformaciones generalizadas en función de los desplazamientos nodales generalizados

Utilizando la misma notación definida en (4-2) se -  
 tiene:

$$\{\varepsilon^*\} = \begin{pmatrix} \varepsilon_x \\ \varepsilon_y \\ \gamma_{xy} \\ H \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} u_x \\ v_x \\ u_y + v_x \\ \frac{\delta H}{\sqrt{\Omega}} \end{pmatrix} \quad (4-5)$$

$$\{\varepsilon^*\} = \frac{1}{2\Omega} \begin{vmatrix} b_1 & 0 & b_2 & 0 & b_3 & 0 & 0 \\ 0 & c_1 & 0 & c_2 & 0 & c_3 & 0 \\ c_1 & b_1 & c_2 & b_2 & c_3 & b_3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 2\sqrt{\Omega} \end{vmatrix} \cdot \{\delta e^*\} \quad (4-6)$$

$$\{\varepsilon^*\} = |B^*| \cdot \{\delta e^*\} \quad (4-7)$$

Para la obtención de la matriz de rigidez es necesario  
 definir una nueva matriz  $|B_1|$  que relaciona:

$$\{\varepsilon\} = |B_1| \cdot \{\delta e^*\} \quad (4-8)$$

siendo entonces:

$$|B_1| = \begin{vmatrix} b_1 & 0 & b_2 & 0 & b_3 & 0 & 0 \\ 0 & c_1 & 0 & c_2 & 0 & c_3 & 0 \\ c_1 & b_1 & c_2 & b_2 & c_3 & b_3 & 0 \end{vmatrix} \quad (4-9)$$

### 2-2-3.- MATRIZ TENSION-DEFORMACION GENERALIZADA

Como ya se ha comentado en el capítulo anterior existen dos matrices tensión-deformación según el elemento se encuentre en fase elástica o plástica.

En el capítulo III se dedujeron ambas matrices  $|M|$  y  $|M^p|$ , en los apartados 2-1 y 3-2, respectivamente.

$$\{\sigma\} = |M| \cdot \{\epsilon^*\} \quad (4-10)$$

$$\{\sigma\} = |M^p| \cdot \{\epsilon^*\} \quad (4-11)$$

### 2-2-4.- MATRIZ TENSION-DESPLAZAMIENTOS NODALES

Esta matriz se obtiene por el producto de las matrices  $|M|$  y  $|B^*|$  en la fase elástica y de  $|M^p|$  y  $|B^*|$  en la fase plástica.

De (4-7) y (4-10)

$$\{\sigma\} = |M| \cdot |B^*| \cdot \{\delta^*\} \quad (4-12)$$

y de (4-7) y (4-11)

$$\{\sigma\} = |M^p| \cdot |B^*| \cdot \{\delta^*\} \quad (4-13)$$

El producto de estas matrices se efectúa numéricamente, en el proceso de resolución, mediante el programa de ordenador.

### 2-2-5.- MATRIZ DE RIGIDEZ

Al igual que en los apartados anteriores la matriz de rigidez es diferente si el elemento se encuentra en fase elástica, fase plástica o se prevee, que va a plastificar en el próximo escalón de carga. En este último caso, se opera tal como se indicó en el capítulo anterior, obteniéndose una matriz de rigidez intermedia entre ambas, según el valor del factor de plasticidad.

En el caso de fase elástica la matriz de rigidez tiene la forma de (3-22), que para elementos triangulares queda:

$$|K_e^e| = \Omega \left[ 2 \cdot |B^*|^T \cdot |M|^T |B_e| - |B^*|^T |M|^T |C| |M| |B^*| \right] \quad (4-14)$$

Para la fase plástica se obtiene de (3-50)

$$|K_e^p| = \Omega \left[ 2 \cdot |B^*|^T \cdot |M^p|^T |B_e| - |B^*|^T |M^p|^T |C| |M^p| |B^*| \right] \quad (4-15)$$

En ambos casos la matriz de rigidez es de dimensión ( 7 X 7 ) y no resulta simétrica por lo que hay que operar como se dijo en (3-23) y (3-24).

### 2-3.- CARGAS MASICAS Y SUPERFICIALES

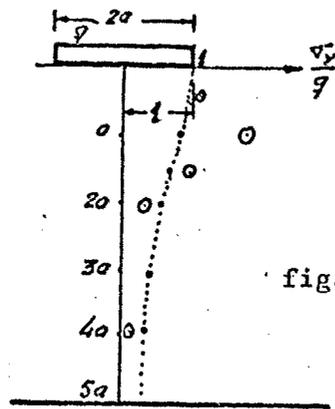
Tal como se ha indicado en el apartado 2-3 del capítulo III, en el caso de elementos triangulares es equivalente la utilización del método normal o el consistente, habiéndose utilizado el segundo de ellos, como se mostró en dicho apartado.

## 2-4.- APLICABILIDAD

### 2-4-1.- EXPERIENCIAS PREVIAS

Diversos autores (ZIENKIEWICZ, 1.970) señalan que la utilización de elementos triangulares originan algunos errores, pero que estos se ven muy disminuidos si las tensiones se calculan en cada nodo como media ponderada de todos los elementos que concurren en él, o simplemente promediando las tensiones entre cada dos elementos contiguos, formando cuadrilátero.

En el caso de elementos híbridos, estas deficiencias son mucho más acusadas pues surgen mayores diferencias entre elementos contiguos (HWANG et al. 1.969) como se puede apreciar en la figura 4-1, en la que se compara la solución analítica con los resultados obtenidos por elementos finitos triangulares de deformación constante. Las tensiones promediadas entre cada dos elementos contiguos se ajustan bien a la solución exacta, pero las tensiones en cada triángulo son francamente dispares. Es obvio que si se utiliza una malla irregular, la elección de los elementos a promediar es arbitraria, con lo que este método pierde buena parte de su utilidad.



○ Elementos triangulares  
 • Promedio  
 .... Solución exacta

fig. (4-1).- Resultados de HWANG et al, 1.969)

Por todo ello, en la aplicación de elementos triangulares, - los resultados obtenidos en las diferentes fases elásticas y plásticas se han promediado de forma automática en el programa de ordenador. Las mallas empleadas han sido regulares, con el fin de obtener resultados lo más fiable posible.

2-4-2.- RESULTADOS OBTENIDOS

Al iniciarse los ensayos como mallas sencillas con poco confinamiento lateral, los resultados que se obtenían eran válidos, si bien se vió que en la promediación de las tensiones se obtenían resultados diferentes según se realizase ésta. Para obtener una mejor promediación con la tensión horizontal

$\sigma_x$ , era conveniente unir dos triángulos que tuvieran en común un lado horizontal, lo mismo ocurría con la tensión vertical,  $\sigma_y$  y para la tensión tangencial  $\tau_{xy}$  era necesario promediar elementos que tuvieran un lado inclinado en común, fig. (4-2). Fenómeno que originaría su realización una gran dificultad en el cálculo por lo que no se ha tenido en cuenta.

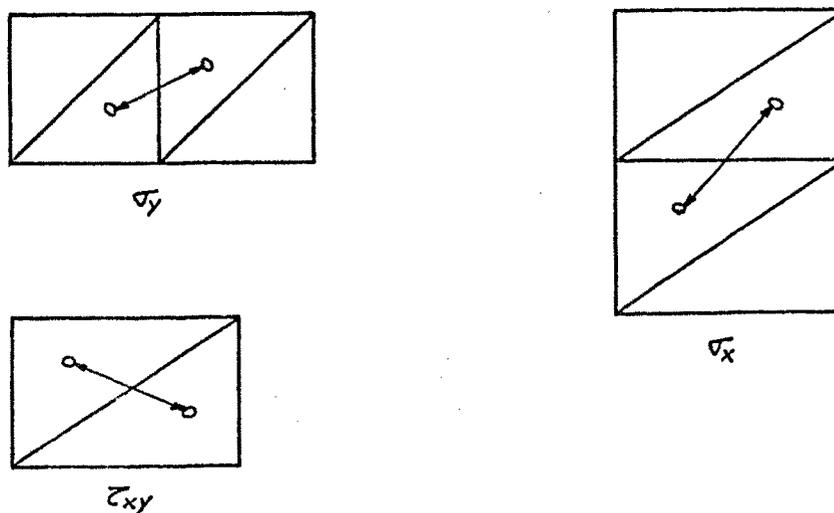


fig. (4-2).- Criterios óptimos de promediar las tensiones.

A medida que se fué ampliando la malla los resultados siguieron siendo válidos, salvo en el caso de confinamiento lateral estricto, pues como se pudo comprobar, y así se ve en los ejemplos que se acompañan a continuación, el fuerte confinamiento podía producir, con la condición de cambio de volumen nulo una malla prácticamente indeformable, influyendo para ello la orientación de los triángulos, originando resultados inexactos.

Puede en efecto comprobarse que, con la malla, cargas y condiciones de contorno de la figura 4-3, siendo el material incompresible, la solución por elementos finitos es que los desplazamientos sean nulos en todos los nodos, solución obviamente absurda. En efecto, para que el elemento A no varíe de área, siendo fijos sus nodos 1 y 7, el nodo dos no debe moverse verticalmente, y horizontalmente

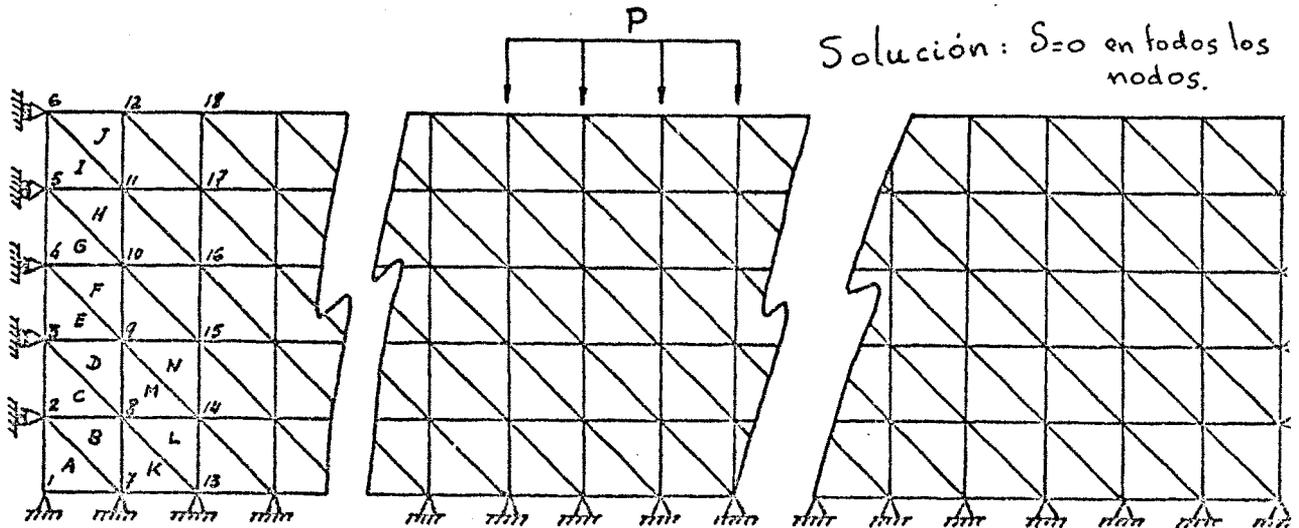


fig. (4-3).- Malla rígida.

también está fijo por el contorno. Siendo fijos los nodos 2 y 7, el nodo 8 debe moverse en dirección 3-13 para que no varíe el área del elemento B, y por otro lado, su movimiento no puede tener componente vertical para que no varíe el área del elemento K.

Prosiguiendo el razonamiento, se deduce la imposibilidad de movimiento de toda la malla. Ello no impide que la solución en tensiones sea correcta, ya que en un modelo híbrido las tensiones no se obtienen a partir de los desplazamientos únicamente, sino que interviene en la solución la función H.

Estudiando y comparando los resultados de los siguientes ejemplos se aprecian fácilmente estas irregularidades.

Por todo ello, y con el fin de evitar estas dificultades se procedió a la creación de unos elementos cuadrangulares híbridos, que serán desarrollados a continuación.

### 3.- ELEMENTO CUADRANGULAR HIBRIDO

#### 3-1.- DESCRIPCION

Los elementos cuadrangulares, para que sean operativos deben de ser irregulares y de esta forma adaptarse a cualquier contorno.

En este caso y como se pretende formar un primer modelo de ensayo, se han tomado inicialmente elementos rectangulares, pues la transformación en elementos isoparamétricos mediante coordenadas curvilíneas, no presenta mayores dificultades.

Las funciones de forma se han elegido de modo que los desplazamientos sean lineales en el contorno, para ello mediante la interpolación de LAGRANGE se obtiene que la ley de los desplazamientos en un punto cualquiera será de la forma:

$$\begin{aligned} u &= u(x,y) = \alpha_1 + \alpha_2 x + \alpha_3 y + \alpha_4 xy \\ v &= v(x,y) = \beta_1 + \beta_2 x + \beta_3 y + \beta_4 xy \end{aligned} \quad (4-16)$$

Los grados de libertad debido a los desplazamientos nodales son ocho.

Las tensiones no son constantes en el elemento, sino que varían linealmente a lo largo del mismo.

Esto origina que la nueva función  $H$  sea lineal en el elemento, así como  $\delta_H$ , lo que introduciría tres nuevos grados de libertad, es decir que cada elemento tendría once grados de libertad.

Existen varias posibilidades para definir la variable  $H$  en cada elemento:

a) Definiendo  $H$  en función de tres parámetros

$H = a + bx + cy$ , introduciendo en el sistema las tres incógnitas  $a$ ,  $b$  y  $c$ .

b) Tomar como incógnitas los valores de  $H$  en tres puntos cualesquiera, por ejemplo en tres de sus nodos,

c) Tomar como incógnitas el valor de  $H$  en un punto ( por ejemplo el centro del elemento ) y sus derivadas en las direcciones  $x$  e  $y$   $\left( \frac{\partial H}{\partial x}, \frac{\partial H}{\partial y} \right)$ , las cuales al ser  $H$  una función lineal serán constantes en todo el elemento.

En este caso concreto las tres posibilidades deben de dar exactamente la misma solución, puesto que con las tres se supone para  $H$  una ley lineal.

Concretamente, si el origen está en el centro del elemento, la c) y la a) son la misma, pues:

$$H(o) = a \quad , \quad \frac{\partial H}{\partial x} = b \quad , \quad \frac{\partial H}{\partial y} = c$$

d) Existe otra posibilidad, teóricamente peor, pero que ofrece resultados bastante aceptables, que consiste en tomar para H un valor medio en el elemento en su centro de gravedad, de esta forma solamente se introduce un grado de libertad con la variable  $\delta_H$  quedando un total de nueve grados de libertad por elemento. Sin embargo, a lo largo de las fases elásticas y plásticas, esta pérdida de precisión no es tan grave, pues aunque las tensiones varíen en el elemento, se va a considerar la tensión en su centro de gravedad, pues en caso contrario podría ocurrir que existiesen elementos parcialmente plastificados, fenómeno que no es compatible con el proceso de cálculo presentado en este trabajo.

### 3-2.- MATRICES ELEMENTALES

#### 3-2-1.- FUNCIONES DE FORMA. MATRIZ $N^*$

Tal como acaba de ser comentado en el apartado anterior, las funciones de forma que originan una variación lineal de los desplazamientos en el contorno son del tipo

$$\begin{aligned} u &= u(x,y) = \alpha_1 + \alpha_2 x + \alpha_3 y + \alpha_n x \cdot y. & (4-16) \\ v &= v(x,y) = \beta_1 + \beta_2 x + \beta_3 y + \beta_n x \cdot y \end{aligned}$$

operando y tomado como incógnitas los desplazamientos nodales

resulta:

$$\left\{ \delta^* \right\} = \begin{Bmatrix} u \\ v \\ \delta_H \end{Bmatrix} = |N^*| \cdot \begin{Bmatrix} u_1 \\ v_1 \\ u_2 \\ v_2 \\ u_3 \\ v_3 \\ u_4 \\ v_4 \\ \delta_H \end{Bmatrix} = |N^*| \cdot \left\{ \delta_e^* \right\} \quad (4-17)$$

siendo  $|N^*|$  :

$$|N^*| = \frac{1}{4} \begin{vmatrix} (1-x')(1-y') & 0 & (1+x')(1-y') & 0 & (1+x')(1+y') & 0 & (1-x')(1+x') & 0 & 0 \\ 0 & (1-x')(1-y') & 0 & (1+x')(1-y') & 0 & (1+x')(1+y') & 0 & (1-x')(1+y') & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{vmatrix}$$

(4-18)



La matriz  $|B_1|$  es la matriz  $|B^*|$  suprimiendo la última fila.

### 3-2-3.- MATRIZ TENSION-DEFORMACION GENERALIZADA

Esta matriz coincide con la de los elementos triangulares, pues no depende de las características de los elementos utilizados, por lo que nos remitimos a lo expuesto en el apartado 2-3-3 de este capítulo.

### 3-2-4.- MATRIZ TENSION-DESPLAZAMIENTOS NODALES

Al igual que en el apartado anterior nos remitimos al apartado 2-2-4 de este capítulo, haciendo la salvedad que en el caso de elementos cuadrangulares las ecuaciones (4-12) y (4-13) expresan los valores de las tensiones mediante una función lineal, en vez de un valor constante como en el caso anterior.

### 3-2-5.- MATRIZ DE RIGIDEZ

En este caso, tanto para obtener la matriz de rigidez en la fase elástica como en la fase plástica, al ser lineal la matriz  $|B^*|$  es preciso realizar la integración expresada en (3-22) y (3-50) respectivamente, que en el caso de elementos triangulares se obviaba multiplicando por el área del elemento, al ser todos los

términos de las expresiones antes citadas constantes.

Esta integración puede efectuarse de varias formas, o bien realizarla analíticamente integrando término a término los ochenta y un términos de la matriz de rigidez o mediante una integración numérica de LEGENDRE-GAUSS particularizando el valor de dicha matriz en cuatro puntos.

El método utilizado para realizar la integración de la matriz de rigidez en la fase elástica y plástica ha sido el primero, facilitando al ordenador la integración analítica de todos los términos de la matriz de rigidez.

A título de ejemplo se escriben a continuación las matrices  $|D^*|$  tanto en elasticidad como en plasticidad, en el caso de material isótropo.

Siendo la matriz  $|D^*|$

$$|K| = |B^*|^T \cdot |D^*| \cdot |B^*| \quad (4-22)$$

$$|D^{e*}| = G \begin{vmatrix} 3 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 4 & 4 & 0 & 0 \end{vmatrix} \quad (4-23)$$

$$|D^{p*}| = G \begin{vmatrix} 3-\sigma^2 & 1+\sigma^2 & -\sigma\tau & 0 \\ 1+\sigma^2 & 3-\sigma^2 & \sigma\tau & 0 \\ -\sigma\tau & \sigma\tau & \sigma^2 & 0 \\ 4 & 4 & 0 & 0 \end{vmatrix} \quad (4-24)$$

$$\text{siendo } \sigma = \frac{\frac{\sigma_x - \sigma_y}{2} - A}{C_1}$$

$$\tau = \frac{\tau_{xy} + MB}{C_1}$$

$$A = \rho_0 \frac{1-k_0}{2} D_M$$

$$B = \rho_0 \frac{1-k_0}{2} D_M \cdot \text{tg } \phi_e$$

$$C_1 = k \cdot \rho_c + \rho_0 \frac{1+k_0}{2} D_M \cdot \text{tg } \phi_e$$

En el Anejo 3 se desarrolla con más detalle esta matriz.

### 3-3.- CARGAS MASICAS Y SUPERFICIALES

Al igual que con los elementos triangulares se han sustituido estas cargas por fuerzas nodales estáticamente equivalentes.

( Ver apartado 2-3 del capítulo III ).

### 3-4.- APLICABILIDAD

Los problemas que surgían con elementos triangulares y que se describen en el apartado 2-4-2 quedan obviados con el empleo de los elementos rectangulares al poder reproducir mejor la deformación sin cambio de volumen.

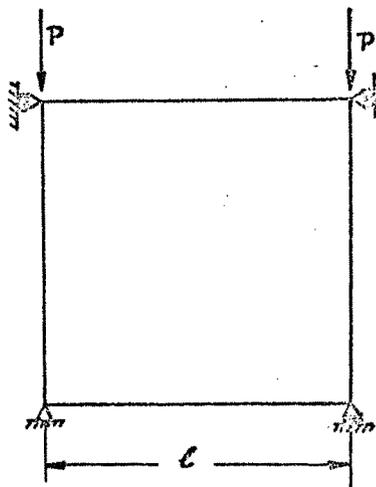
En el apartado siguiente se exponen varios ejemplos para comprobar este punto.

### 4.- ESTUDIO COMPARATIVO DE ELEMENTOS

Con el fin de comprobar la aplicabilidad de los elementos anteriormente descritos, triángulos y cuadriláteros, se exponen a continuación unos sencillos ejemplos, los cuales se han resuelto utilizando diferentes triangulaciones y elementos rectangulares, para proceder a un estudio comparativo de sus resultados y comprobar su exactitud. A este fin se presentan a continuación tres ejemplos básicos.

Ejemplo a)

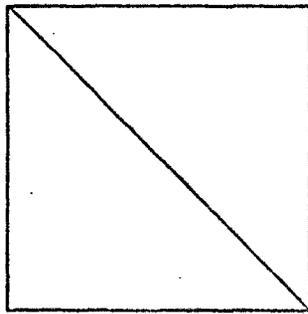
En la figura 4-4 se representan las condiciones de contorno y las cargas actuantes:



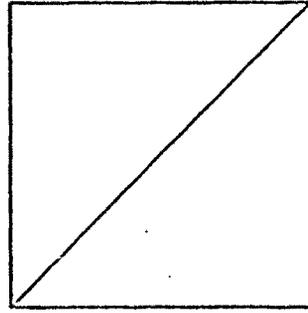
*Material homogéneo, elástico lineal,  
isótropo e incompresible.*

fig. (4-4).-- Ejemplo a.

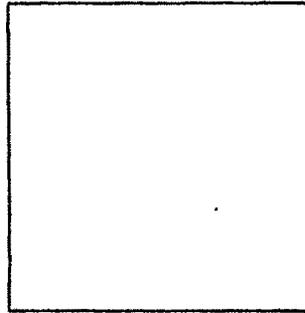
Este caso se ha resuelto por elementos finitos con las tres mallas representadas en la fig. 4-5



*Malla a-1*  
*Elementos triangulares*



*Malla a-2*  
*Elementos triangulares*

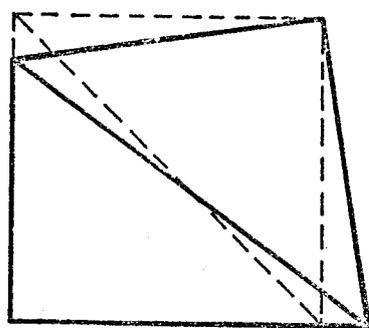


*Malla a-3*  
*Elementos rectangular*

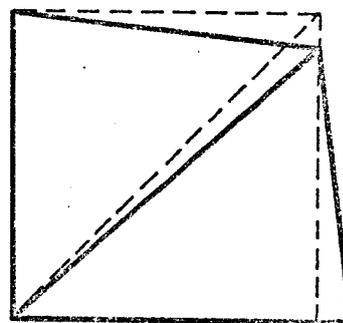
fig. (4-5).-- Mallas utilizadas en el ejemplo a.

Los resultados se exponen a continuación.

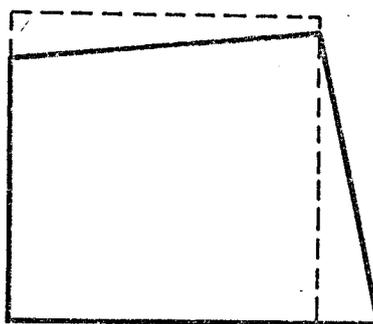
Las deformaciones se aprecian en la fig. 4-6



Malla a-1



Malla a-2



Malla a-3

fig. (4-6).- Deformaciones en cada malla. Ejemplo a.

Fácilmente puede apreciarse que la malla que refleja más exactamente el comportamiento real del modelo es el caso a-3, elemento rectangular, ya que en los otros dos casos uno de los nodos superiores (uno distinto en cada caso) no tiene corrimiento vertical.

La distribución de tensiones sobre el plano medio horizontal queda representada en cada caso en la fig. 4-7

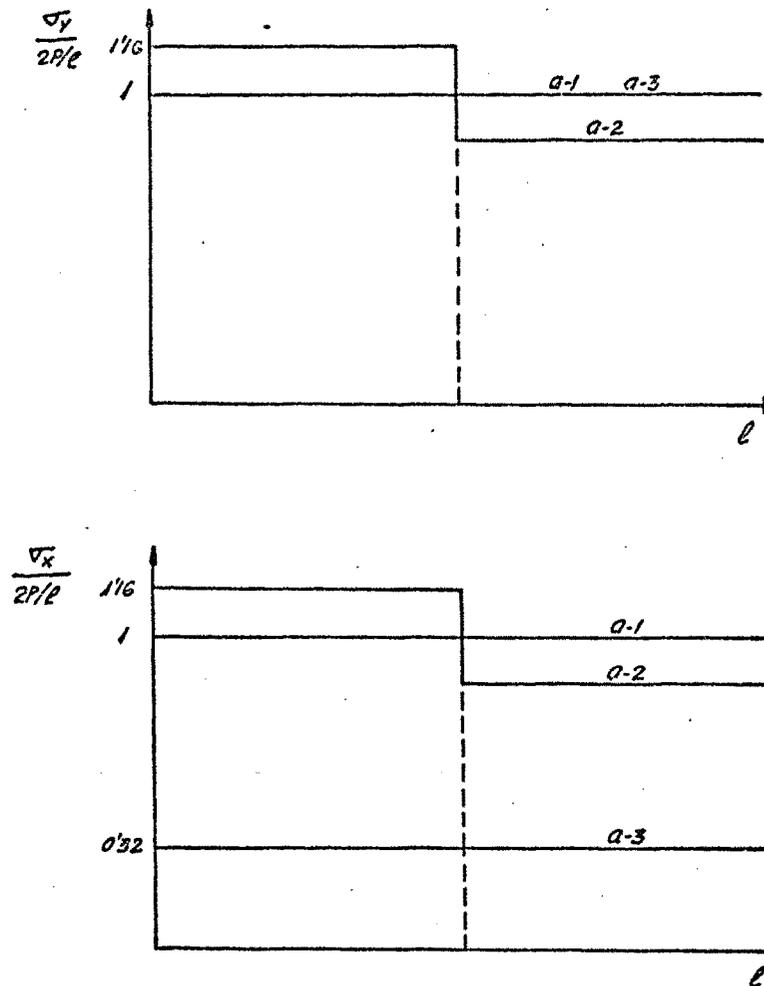


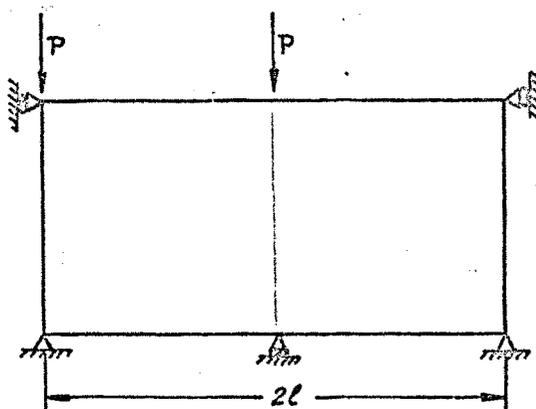
fig. (4-7).— Leyes de  $\sigma_y$  y  $\sigma_x$  sobre el plano horizontal medio. Ejemplo a.

La solución exacta en este caso no es conocida. Sin embargo puede intuirse que la tensión vertical debe de ser sensiblemente igual a  $\frac{2P}{e}$  y la horizontal menor que este valor al no estar confinada totalmente la malla lateralmente.

En estos supuestos la malla que más se aproxima a la realidad es nuevamente la del elemento rectangular.

### Ejemplo b)

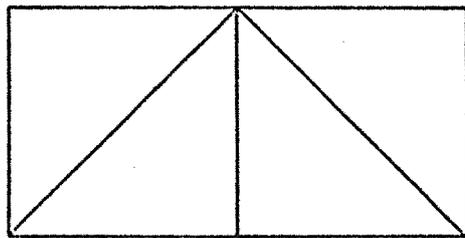
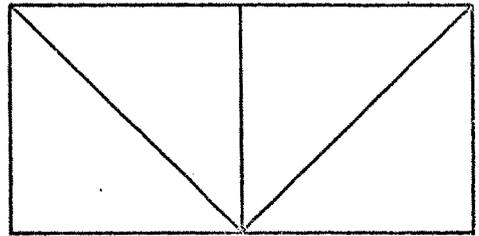
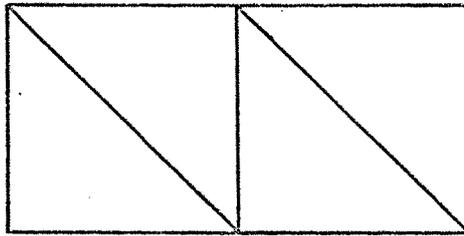
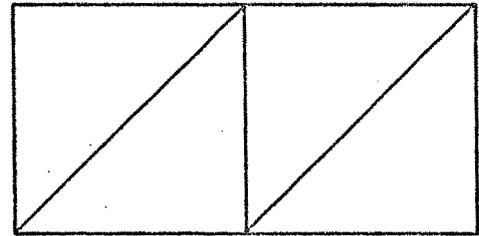
En este caso la geometría, condiciones de contorno y cargas actuantes se representan en la fig. 4-8



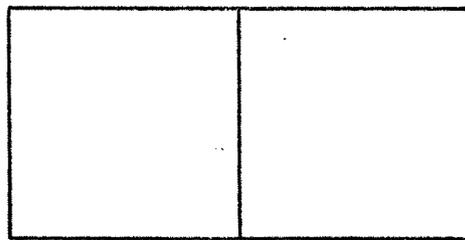
*Material homogéneo, elástico lineal, isotropo e incompresible.*

fig. (4-8).- Ejemplo b.

La resolución en este ejemplo se realizó con las mallas representadas en la fig. 4-9

*Malla b-1**Malla b-2**Malla b-3**Malla b-4*

*Elementos triangulares*

*Malla b-5*

*Elementos rectangulares*

fig. (4-9).- Mallas utilizadas en el ejemplo b.

Las deformadas de este ejemplo para cada una de las mallas se representan en la fig. 4-10 . Las mallas b-3 y b-4 son rígidas debido a que con las condiciones de contorno existente no pueden deformarse a volumen constante.

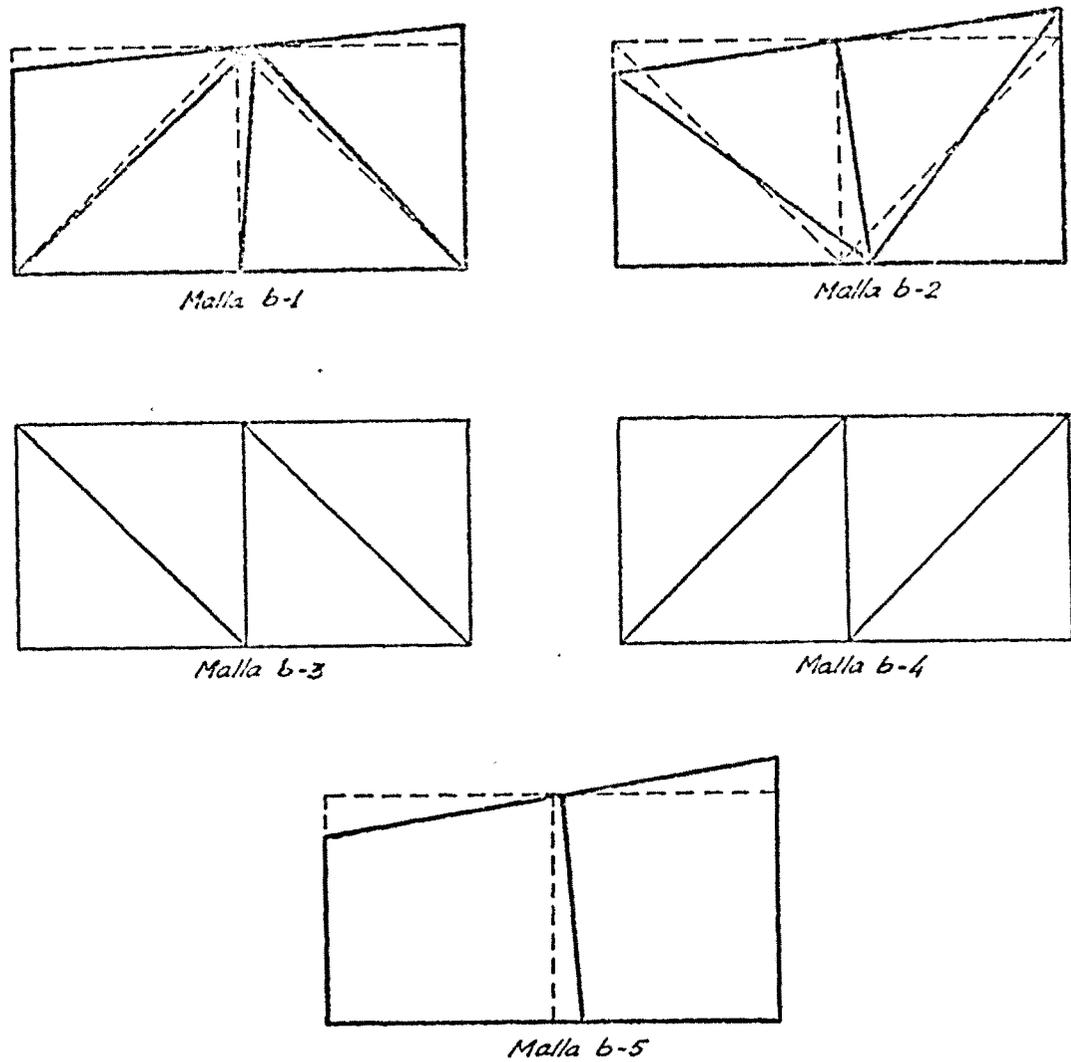


fig. (4-10).- Deformaciones en cada malla. Ejemplo b.

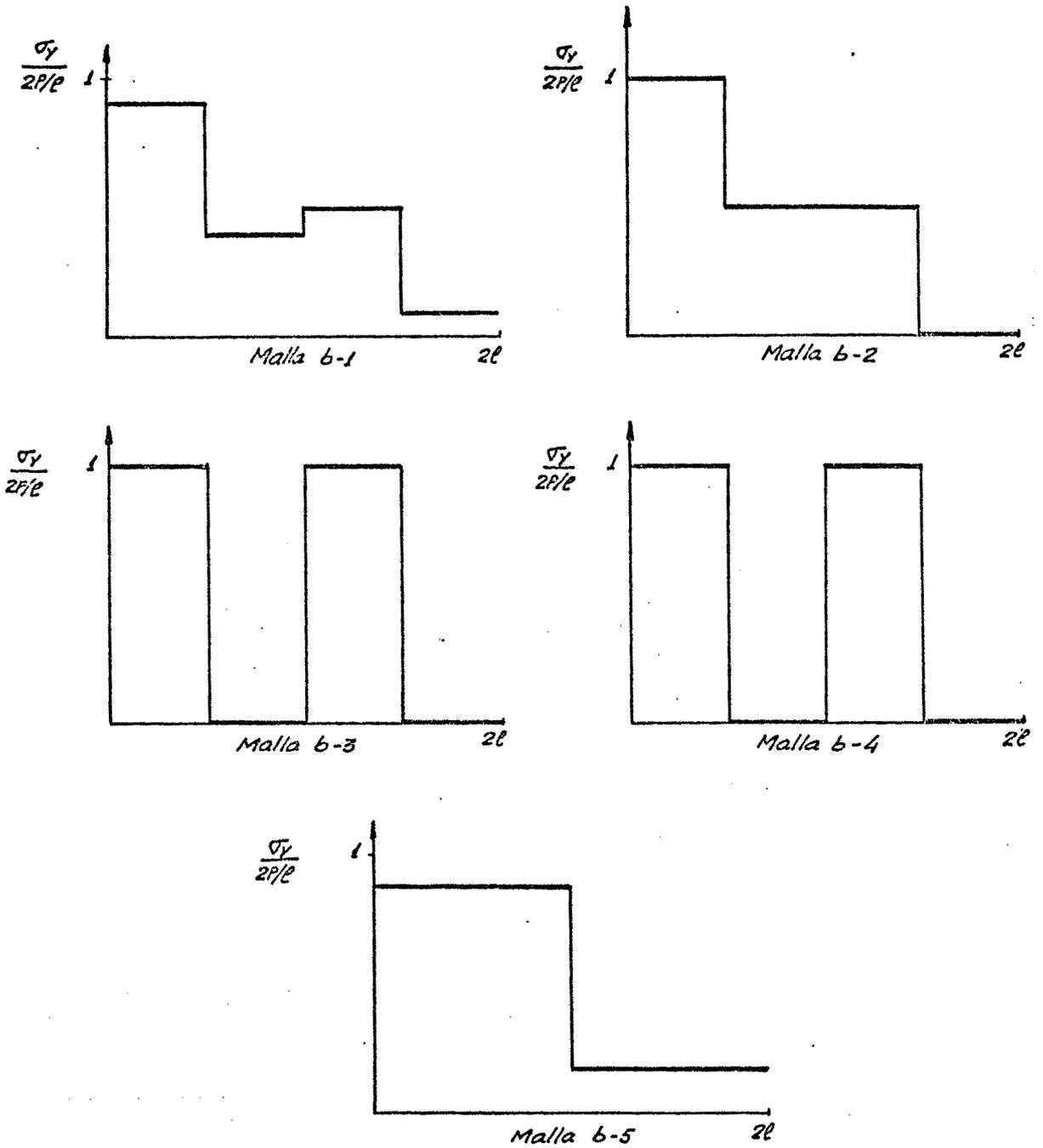


fig. (4-11).— Distribución de  $\sigma_y$  en cada malla del ejemplo b.

En este caso se vuelve a apreciar fácilmente que la malla b-5 es la que mejor refleja el comportamiento real del suelo.

Efectivamente, con las mallas triangulares los resultados difieren enormemente según la forma de dividir en triángulos, resultando que, por ejemplo, en el caso b-1, el nodo inferior central no tiene corrimiento horizontal, mientras que en la b-2 es al superior central al que le ocurre esto. En la malla b-5 ambos nodos pueden moverse horizontalmente. En las mallas b-3 y b-4 los corrimientos resultan todos nulos. Este hecho, en principio puede parecer debido al escaso número de elementos de la malla, pero no es así y en el apartado 2-1-2 se mostró un caso en el que, aunque la malla sea muy extensa y conste de muchos elementos, los desplazamientos nodales resultan todos nulos, solución a todas luces absurda.

La distribución de tensiones  $\sigma_y$  en el plano horizontal medio de la malla, para cada uno de los diferentes casos quedan reflejados en la fig. 4-11

Al igual que en el ejemplo anterior, la distribución exacta de tensiones no es conocida, pero es razonable suponer que sea un poco inferior a  $2p/e$  a la izquierda y vaya decreciendo hacia la derecha. Como se ve en la figura, las mallas de triángulos dan resultados totalmente dispares, siendo únicamente lógico el correspondiente a las mallas b-2 y b-1 y totalmente absurdos con las ma -

llas b-3 y b-4.

La malla de rectángulos da nuevamente resultados lógicos.

### Ejemplo c

En el presente ejemplo se estudia el comportamiento de una malla triangular (malla c-1) y el de una malla rectangular (malla c-2) para el caso de una zapata, apoyada en un estrato de material homogéneo elástico lineal e isótropo, situado sobre una base rígida.

Este ejemplo queda esquematizado en la fig.(4-12)

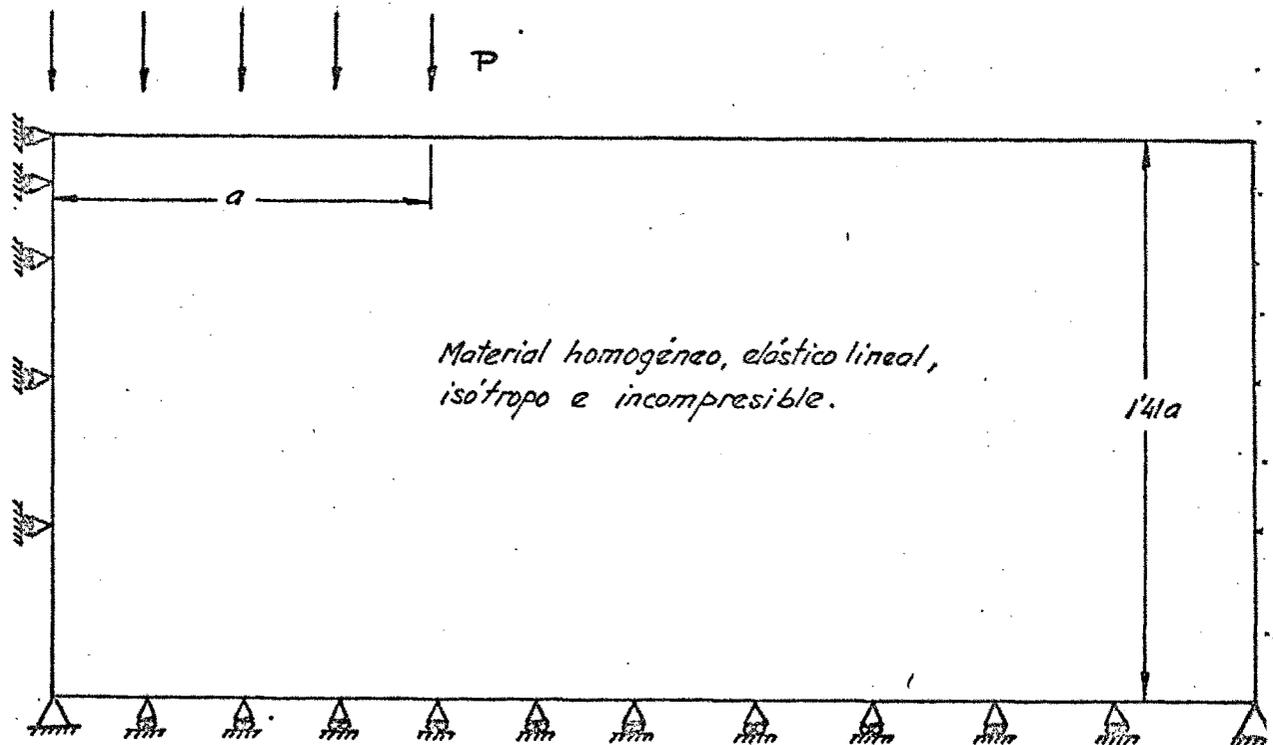
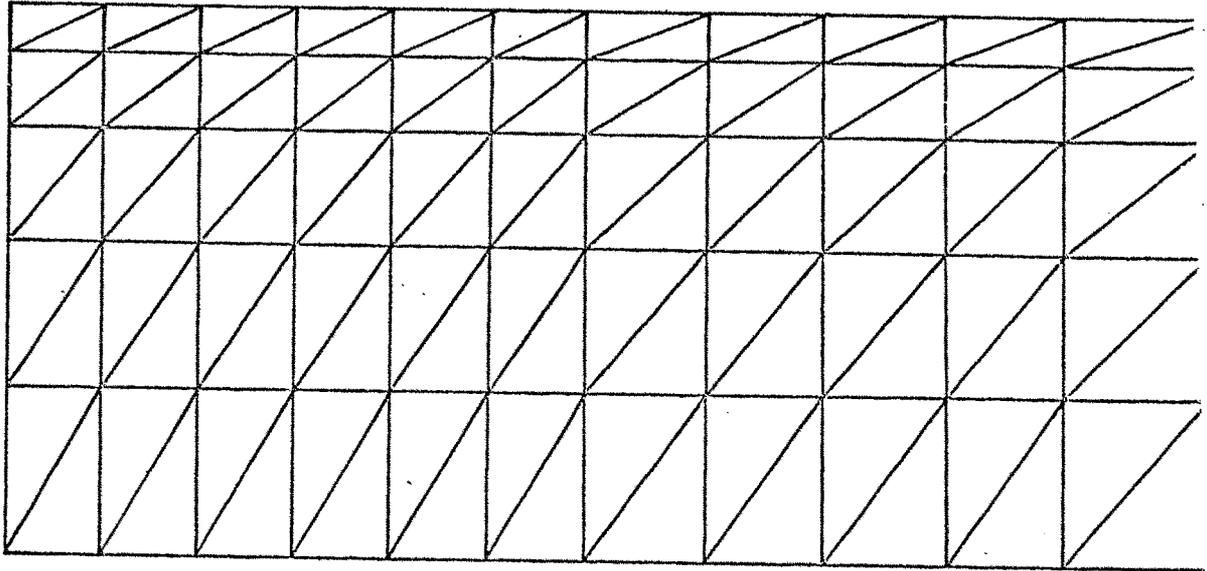
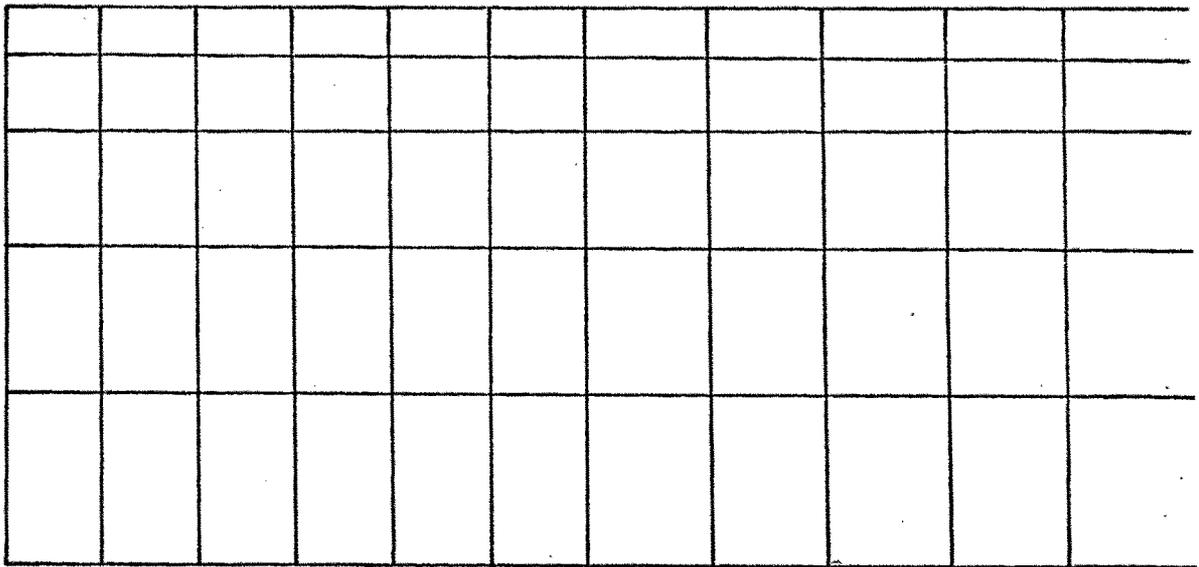


fig. (4-12).- Ejemplo c.

En la fig.(4-13) se representan todas las mallas representadas.



Malla C1-Triángulo.



Malla C2-Rectángulo.

Fig. (4-13).- Tipos de mallas empleadas en el ejemplo c.

Al representar gráficamente fig.(4-14) las tensiones  $\sigma_y$  actuantes en el plano de simetría, se puede apreciar la gran dispersión en los resultados obtenidos con la malla triangular y la gran

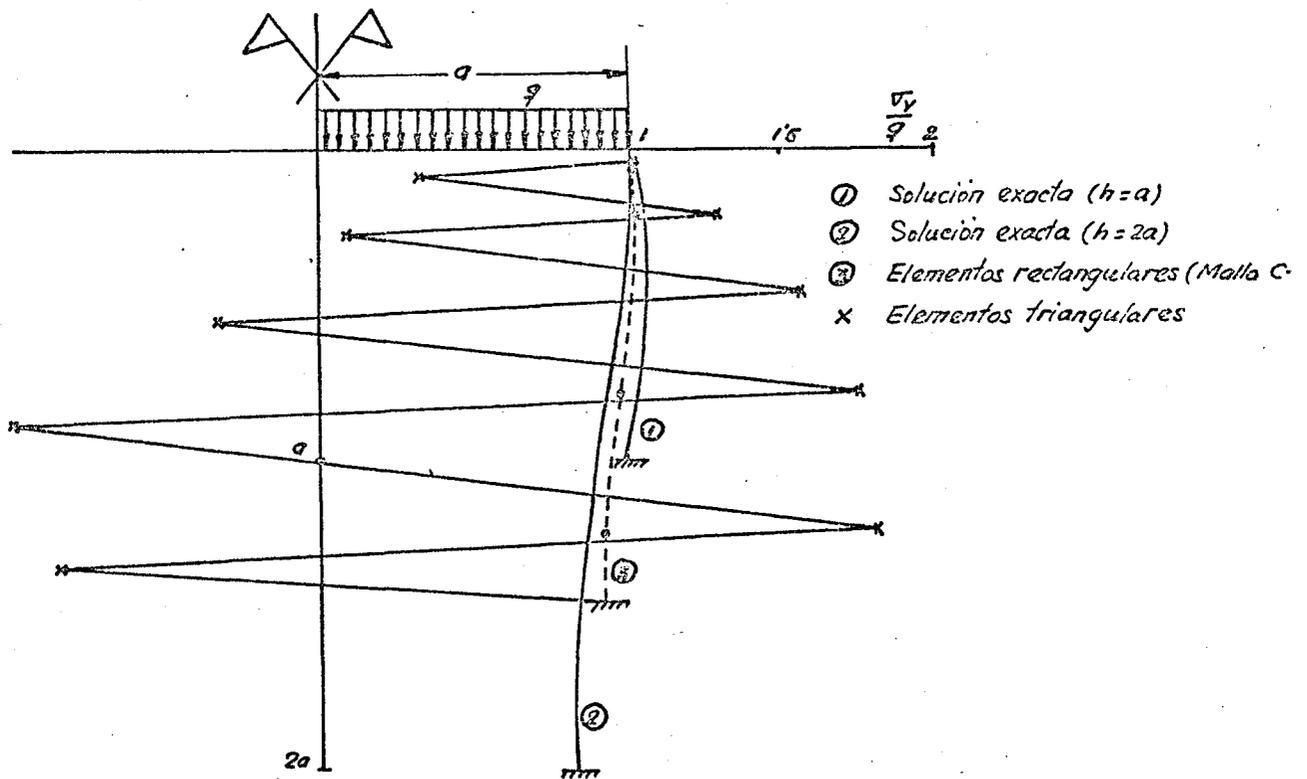


fig. (4-14).- Tensiones verticales en el plano de simetría, con comparación de resultados.

exactitud obtenida con la malla rectangular, comparándose ambos resultados con la solución exacta cuando la base rígida se situa a una profundidad,  $h= 2$  y  $h= 2a$ .

Concluyéndose, tal como se ha repetido varias veces en este capítulo que para el caso de sólido incompresible la discretización en triángulos puede originar resultados erróneos.

## CAPITULO V

### EJEMPLOS DE APLICACION

## EJEMPLOS DE APLICACION

### 1.- INTRODUCCION

Se exponen en este capítulo una serie de ejemplos para comprobar la potencia y aplicabilidad del modelo propuesto. En el capítulo anterior se vió la necesidad de desechar el empleo del elemento triangular de deformación constante y utilizar únicamente el elemento rectangular que se describió en el apartado 3 de dicho capítulo.

Por esta razón los ejemplos realizados son tales, que su contorno sea fácilmente representado por rectángulos, si bién la ampliación a elementos cuadrangulares isoparamétricos de forma irregular resulta fácilmente realizable, siendo en este caso el modelo aplicable a numerosos problemas geotécnicos tales como zapatas, taludes, desmontes, presas, etc. etc., - problemas que se pueden plantear en dos dimensiones.

Se ha elegido un caso típico en Geotecnia, como es el de una cimentación en faja indefinida con carga uniforme sobre un estrato de arcilla saturada sustentado por una base rocosa, con contacto lubricado. La carga se aumenta progresivamente hasta llegar a rotura por plastificación del material. En todo momento se supone la carga suficientemente rápida para no permitir el drenaje de la arcilla.

Con el fin de considerar diversas leyes de variación de la cohesión con la profundidad, en algunos casos se considera una sobrecarga superficial uniforme "q".

Se han considerado variables el espesor del estrato compresible de arcilla y las propiedades geotécnicas del material, concretamente, como ya se ha hecho hincapié en los capítulos anteriores, en la variación de las propiedades con la profundidad y en la anisotropía del material.

## 2.- CASOS ESTUDIADOS

En la fig. (5-1) se esquematiza el problema planteado.

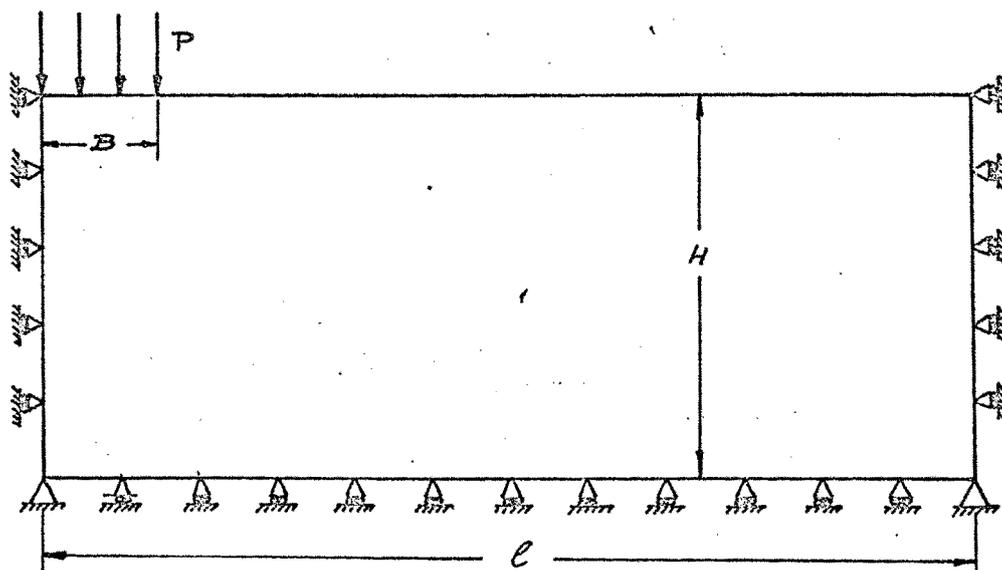


Fig. (5-1).- Esquema del problema estudiado.

Habiéndose tomado como datos fijos los valores de  $b = 2$  metros y  $l = 14$  m.

Se han estudiado dos casos con  $H = 8$  metros y  $H = 3$  metros, y en el primero de ellos se ha considerado una amplia variación de las propiedades -

geotécnicas de la arcilla que se ha tomado como básica.

Esta arcilla ha sido la arcilla plástica de DRAMMEN, ensayada por BJERNUM, que fué comentada en el capítulo II.

Los parámetros de este material son:

$$\begin{aligned} K_0 &= 0,75 \\ p_c/p_0 &= 1,2 \\ K &= 0,14 & (5-1) \\ \phi_e &= 11 \\ D_M &= 0,60 \end{aligned}$$

Como parámetros elásticos, dado que no existían en dicha bibliografía sus valores reales, se ha tomado unos valores medios de unas arcillas plásticas.

Se ha considerado así mismo, la variación de las propiedades de esta arcilla, para estudiar la influencia del grado de variación con la profundidad, la historia de cargas y la anisotropía.

Con el fin de poder realizar un estudio comparativo de los resultados de los diferentes casos, las propiedades geotécnicas del material se han definido en cada uno de ellos de forma que guarden entre sí alguna relación de equivalencia.

Así, el modulo de elasticidad vertical medio es el mismo en todos los casos, y lo mismo ocurre con la cohesión media.

Los casos estudiados se resumen en la tabla 5-I

TABLA 5 - 1 .- Casos estudiados

		Caso 1	Caso 2 y 8	Caso 3	Caso 4	Caso 5	Caso 6	Caso 7
Datos geométricos	H(m)	8,0	8,0	8,0	8,0	8,0	8,0	3,0
Datos de consolidación	$q$ (T/m <sup>2</sup> )	0	3,79	1,91	0	3,99	0	0
	$\gamma$ (T/m <sup>3</sup> )	1,0	0,002	0,48	1,0	0,002	1,0	1,0
	$P_c/P_0$	1,2	1,2	1,2	1,2	1,2	1,2	1,2
	$K_0$	0,75	1,00	1,00	1,00	0,75	0,50	0,75
Parámetros elásticos	$E_{y0}$ (T/m <sup>2</sup> )	0	2000	1333	0	2000	0	0
	$\frac{dE_y}{dy}$ (T/m <sup>3</sup> )	500	0	166,6	500	0	500	500
	$r = \frac{E_x}{E_y}$	0,50	1,00	1,00	1,00	0,50	0,30	0,50
	$G_0$ (T/m <sup>2</sup> )	0	666,6	444,4	0	666,6	0	0
	$\frac{dG}{dy}$ (T/m <sup>3</sup> )	83,3	0	55,5	166,6	0	83,3	83,3

En todos los casos excepto en el último el módulo de elasticidad vertical medio es:

$$E_{y_{medio}} = 2000 \text{ T/m}^2$$

Igualmente, la "cohesión" media es:

$$C_{u_{media}} = P_{o_{media}} \cdot \left[ K \cdot \frac{P_c}{P_0} + D_N \cdot \text{tg} \phi_e \frac{1+K_0}{2} \right] = 1,08 \text{ Tn/m}^2 \quad (5-2)$$

En el último caso, sin embargo, el criterio ha sido mantener los mismos gradientes que en el caso 1.

A continuación se detallan los casos separadamente:

Caso 1

Corresponde a una arcilla plástica de DRAMMEN como se dijo anteriormente. Su módulo de elasticidad es lineal con la profundidad - siendo su variación de 500 Tm/m<sup>2</sup> por metro de profundidad, siendo nulo en la superficie.

En cuanto al grado de anisotropía elástica se ha estimado un valor medio dada la relación de resistencias del material en los planos vertical y horizontal. El módulo transversal aunque es independiente se ha considerado con un valor de

La densidad sumergida se ha tomado de un valor de 1 Tm/m<sup>3</sup>.

La cohesión, definida por (5-2) resulta variar entre cero en la superficie y 2,16 T/m<sup>2</sup> en la base, con un valor medio de 1,08 T/m<sup>2</sup>.

Caso 2

Corresponde al caso 1 estudiado con las simplificaciones usuales en la práctica, es decir, considerando la arcilla isótropa y con los parámetros elásticos constantes con la profundidad, adoptando para ello un valor medio. Se ha supuesto un módulo  $E_{ym}$  constante e igual a 2000 T/m<sup>2</sup>.

La densidad y la sobrecarga se han tomado de forma que la cohesión resultante sea prácticamente constante con la profundidad e igual a  $1,08 \text{ T/m}^2$ .

### Caso 3

Corresponde a un caso de isotropía al igual que el caso 2, pero se supone una variación trapecial de las propiedades del material con la profundidad, con un valor inicial de los módulos de elasticidad y transversal. El valor medio de  $E_y$  coincide con los dos casos anteriores.

### Caso 4

Al igual que los dos casos anteriores se considera al material isótropo, pero con la variación real de los parámetros elásticos con la profundidad. Coincide, pues, con el caso 1 con la salvedad de considerar la arcilla isótropa.

### Caso 5

Es análogo al caso básico 1, considerando que la arcilla es anisótropa pero con propiedades constantes con la profundidad.

### Caso 6

Tiene como fin completar el estudio de la influencia de la anisotropía, con los casos 1 y 4, suponiendo que la arcilla es más anisótropa que en el caso 1, concretamente con  $K_0 = 0,50$  y  $\nu = 0,3$

Caso 7

En este caso se ha reducido el espesor del estrato de arcilla a tres metros manteniéndose las mismas características de los parámetros geotécnicos que en el caso 1.

Caso 8

Para comprobar la influencia del contorno lateral se ha repetido el caso 2, aumentando la dimensión longitudinal de la malla,  $l = 29$  m.

Las mallas estudiadas se pueden ver en las figuras 5-2, 5-3 y 5-4.

3 - RESULTADOS3-1.- CASO BASICO

## a) Tensiones en la fase elástica.

En las figuras 5-5, 5-6 y 5-7 pueden verse las isobaras de

$$\sigma_y/\rho, \sigma_x/\rho, \tau_{xy}/\rho \quad \text{en forma adimensional.}$$

En las figuras 5-8 y 5-9 puede verse igualmente las isobaras de las funciones principales.

A partir de ellas Fig. 5-10 se ha calculado la presión intersticial en cada punto en la hipótesis :

$$\Delta u = \Delta \sigma_{\text{int}} = \frac{\Delta \sigma_1 + \Delta \sigma_2 + \Delta \sigma_3}{3} \quad (5-3)$$

## b) Plastificación progresiva.

En la figura 5-11 se puede ver el progreso de la plastifi-

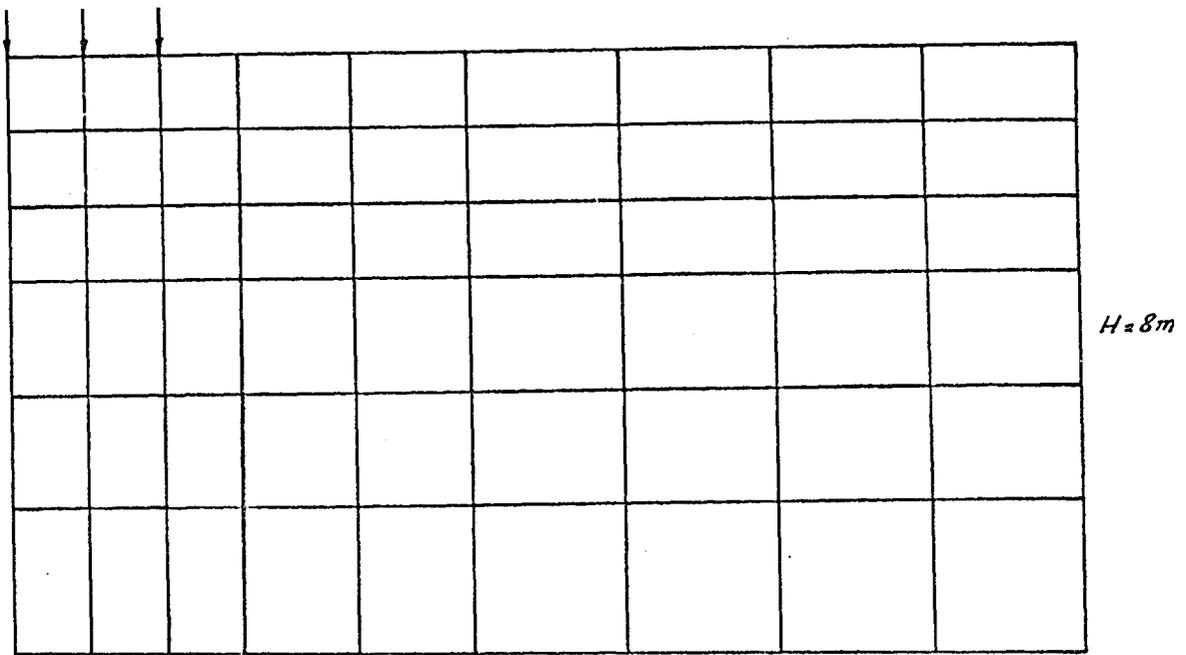


Fig. (5-2).- Malla en los casos 1 á 6.

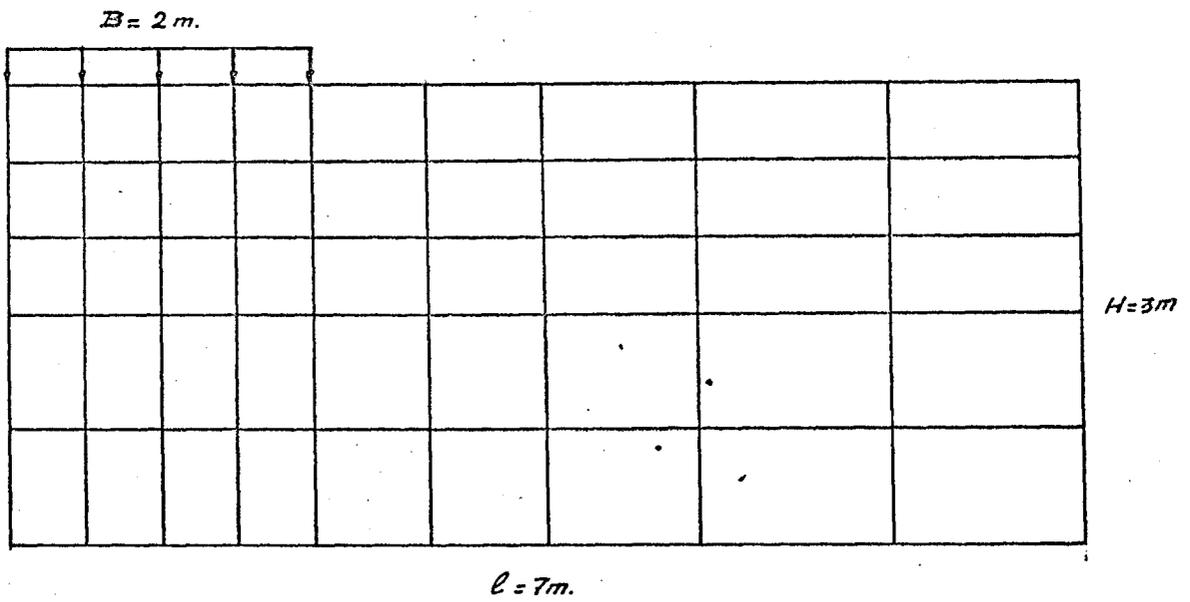


Fig. (5-3).- Malla en el caso 7.

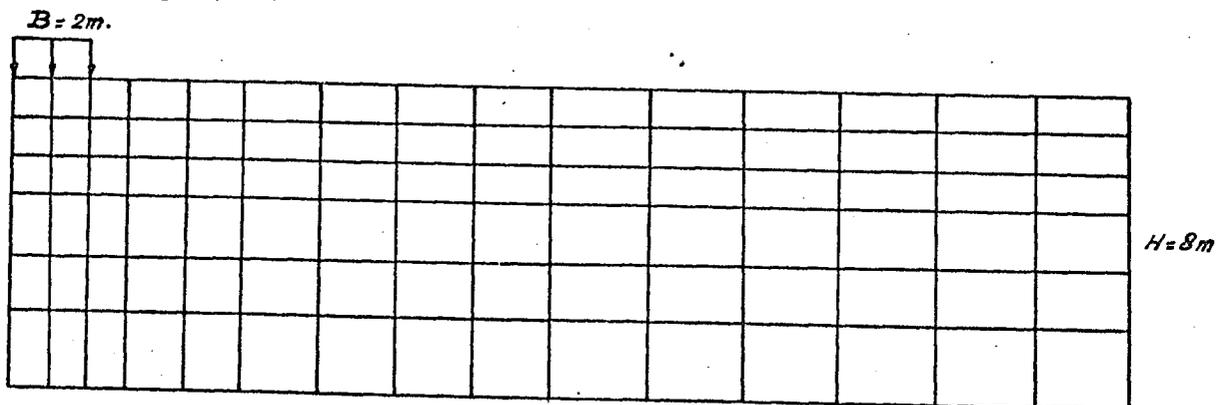


Fig. (5-4).- Malla en el caso 8.

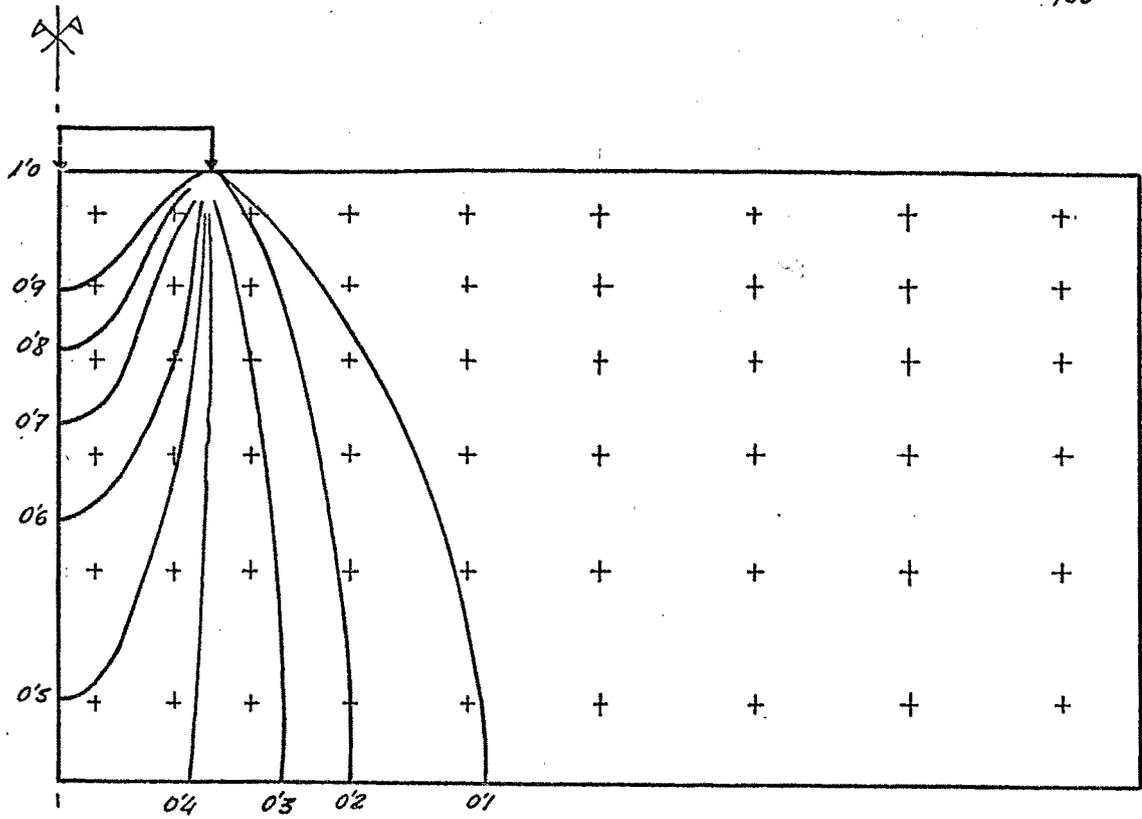


Fig. (5-5).-- Caso 1 - Fase elástica - Isobaras de  $\sigma_y/\rho$

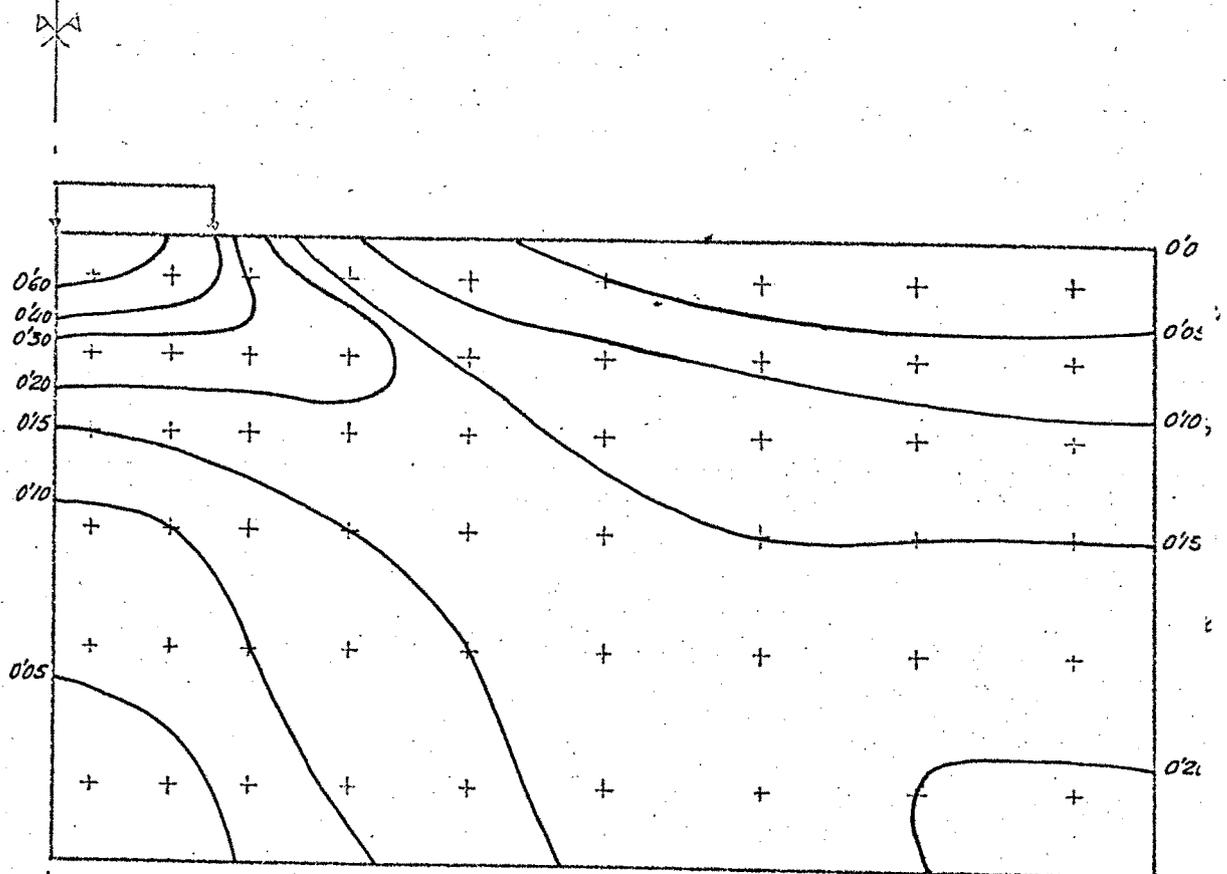


Fig. (5-6).-- Caso 1 - Fase elástica - Isobaras de  $\sigma_x/\rho$

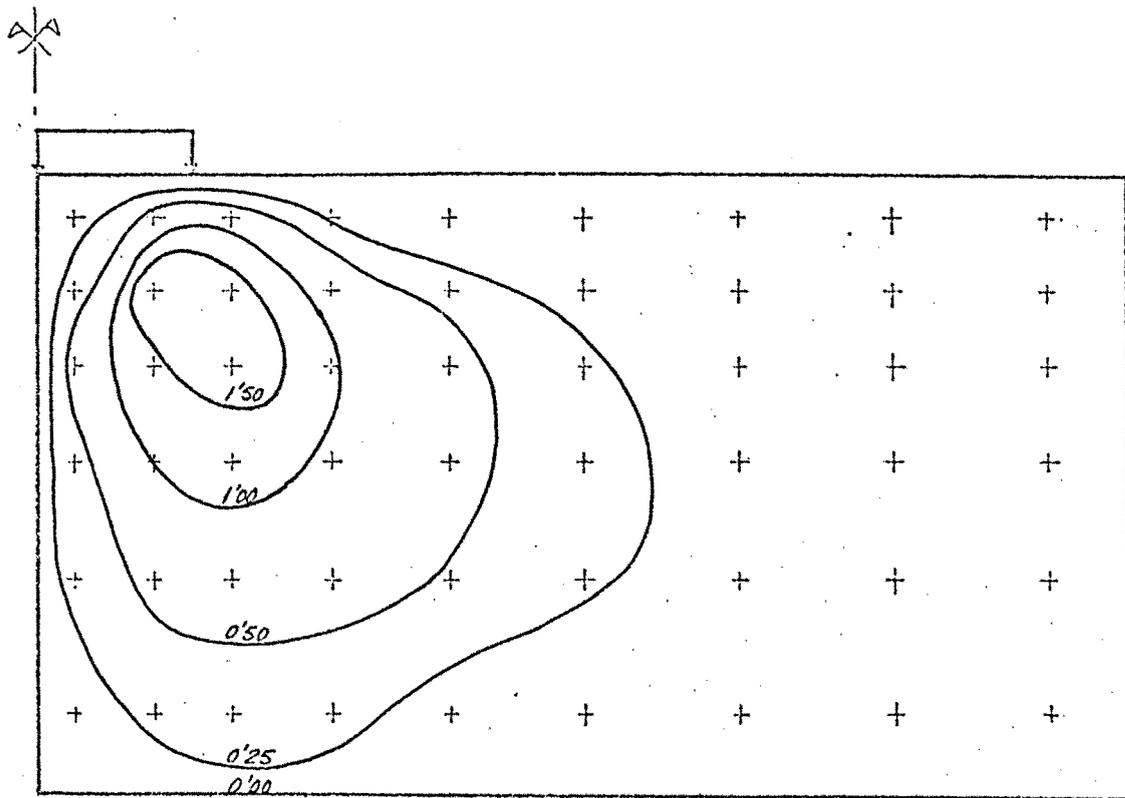


Fig. (5-7).-- Caso 1 - Fase elástica - Isobaras de  $C_{xy}/p$

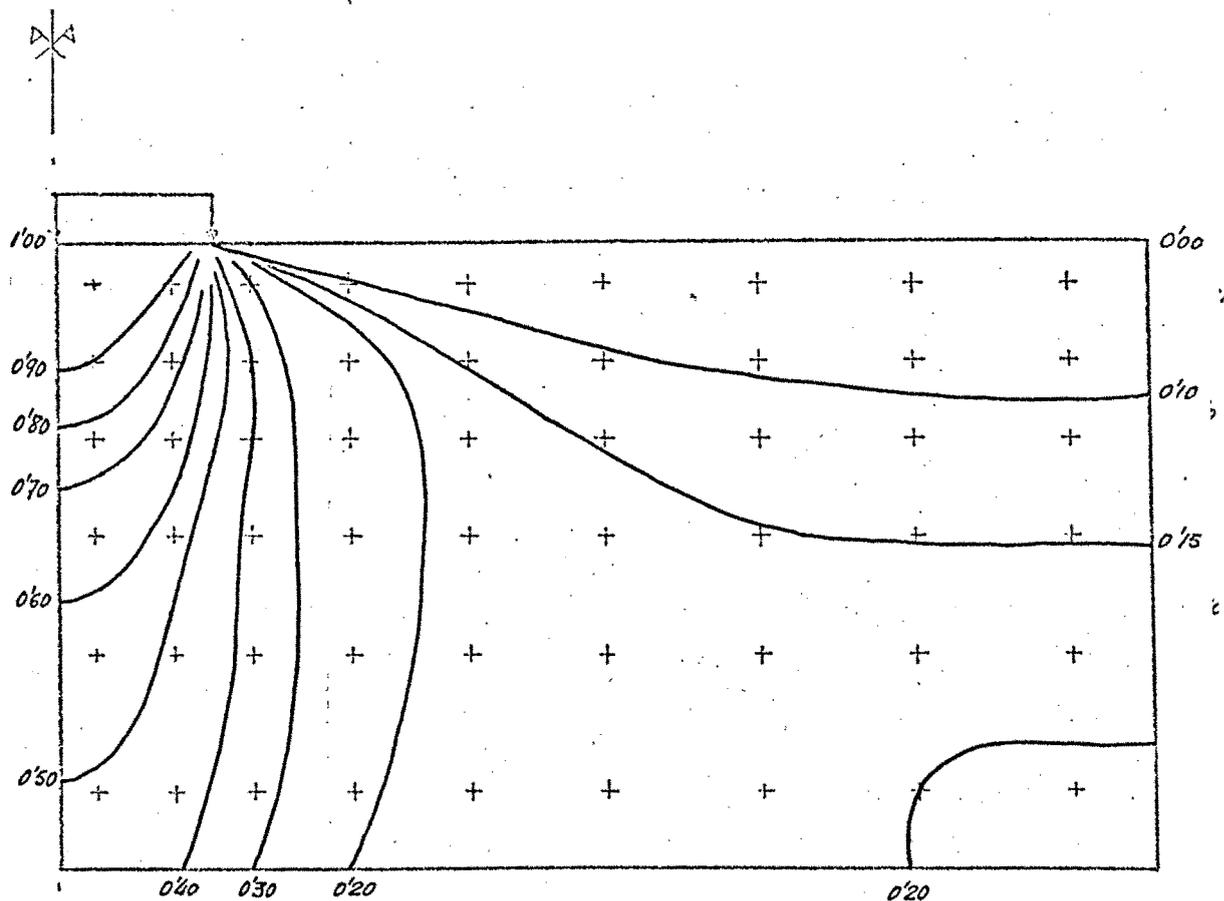


Fig. (5-8).-- Caso 1 - Fase elástica - Isobaras de  $\sigma_1/p$

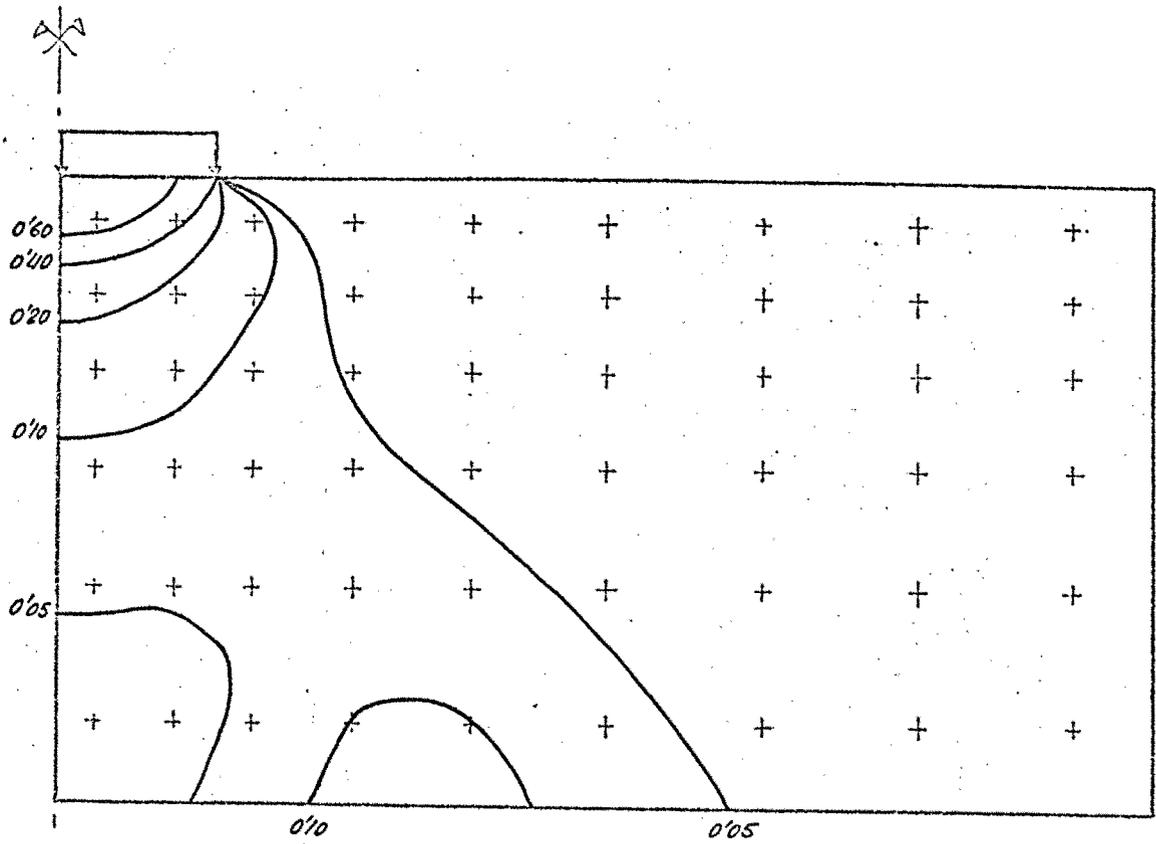


Fig. (5-9).- Caso 1 - Fase elástica - Isobaras de  $\sigma_3/p$

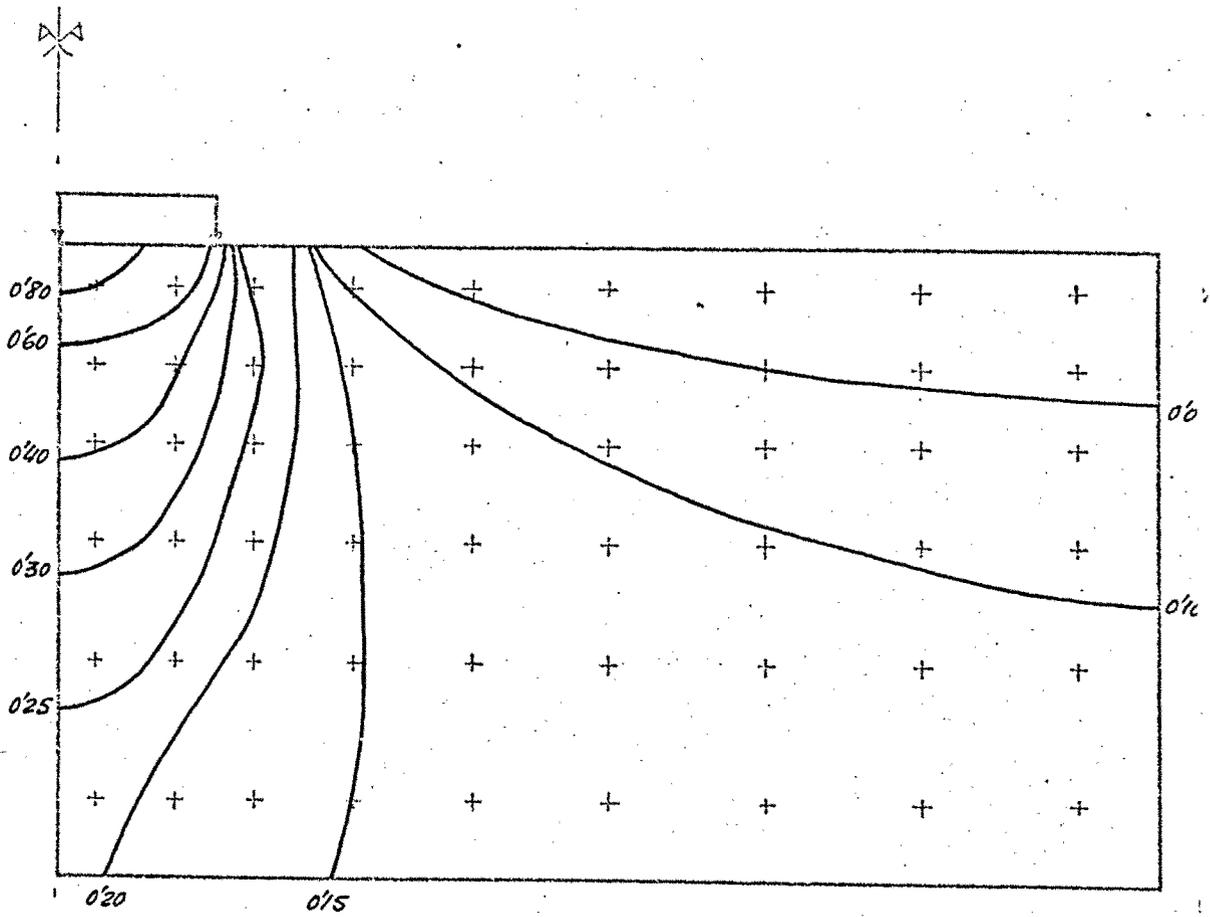


Fig. (5-10).- Caso 1 - Fase elástica - Isobaras de  $u/p$  ( $u=\sqrt{\text{oct}}$ )

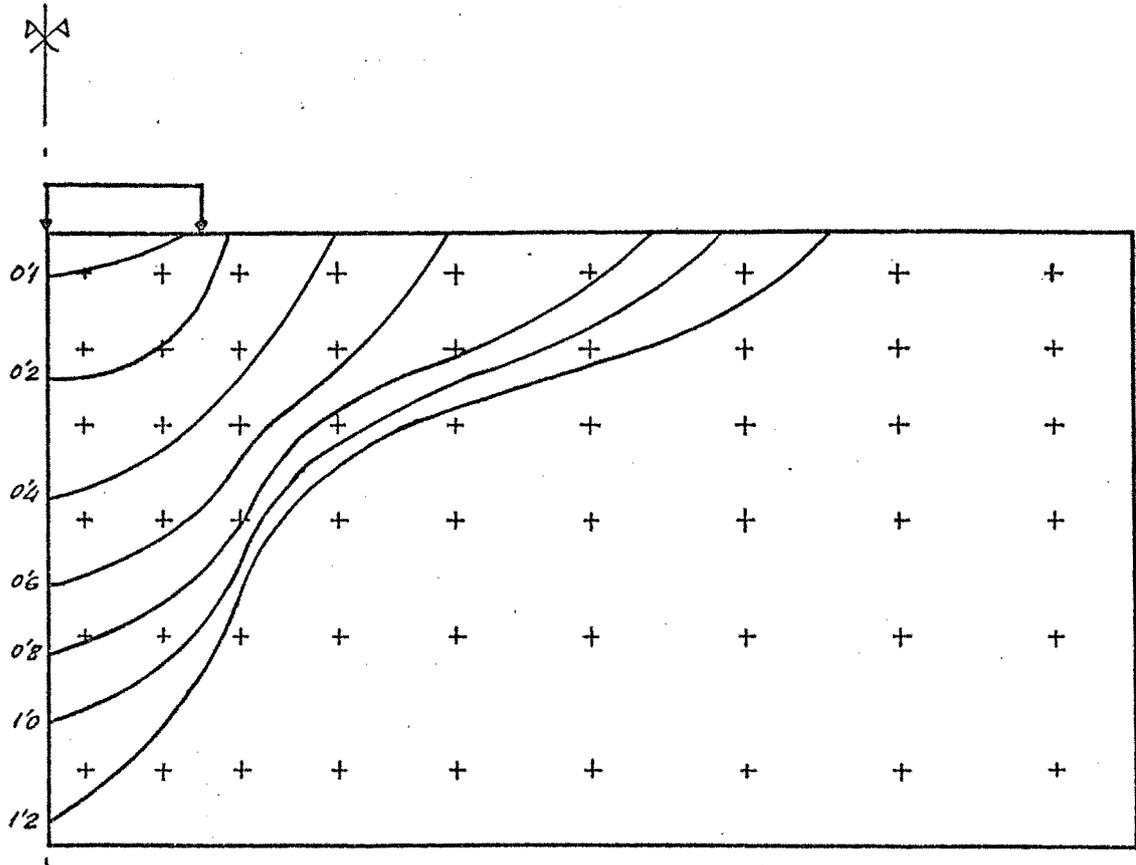


Fig. (5-11).- Caso 1 - Zonas de plastificación progresiva en función de  $P/P_{hi}$

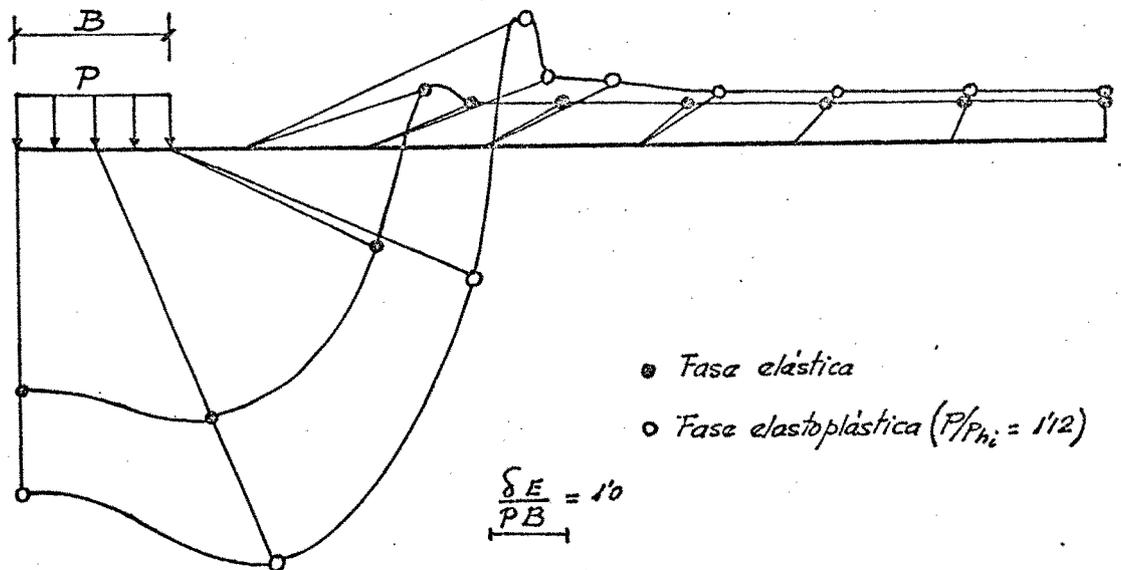


Fig. (5-12).- Caso 1 - Desplazamientos de la superficie. Valores adimensionales.

cación al aumentar la carga. Los valores de la carga están adimensionados con relación a la carga de hundimiento teórico en el caso isotropo y homogéneo:

$$P_{hi} = C_{u,media} \cdot N_c = 1,08 \cdot 5,14 = 5,55 \text{ Tm/m}^2 \quad (5-4)$$

Como se puede observar en la figura 5-11 la plastificación se inicia debajo de la carga aplicada y progresa fundamentalmente en las direcciones horizontal y vertical, debido respectivamente a la pequeña cohesión de la zona superficial y a las elevadas tensiones tangenciales que se producen debajo la zapata.

Así mismo, se puede apreciar que la plastificación total se produce con una carga algo superior a la definida en (5-4).

### c) Desplazamientos.

En la figura (5-12) se han representado los desplazamientos de la superficie en forma adimensional, dibujándose los desplazamientos producidos en el caso elástico y en uno de los estados finales de la fase elastoplástica.

El módulo E que interviene en el factor de adimensionamiento es el módulo de elasticidad vertical medio de la arcilla.

En la figura 5-13 se ha representado la ley carga-asientos del punto medio de la zapata. Puede verse el aumento de la deformabilidad a medida que aumenta la zona plastificada,

La prolongación de trazos y flecha a partir del último escalón

de carga se ha dibujado a sentimiento pues en el siguiente escalón de carga los desplazamientos resultaban absurdos, debido a que ya se había alcanzado la rotura total del material.

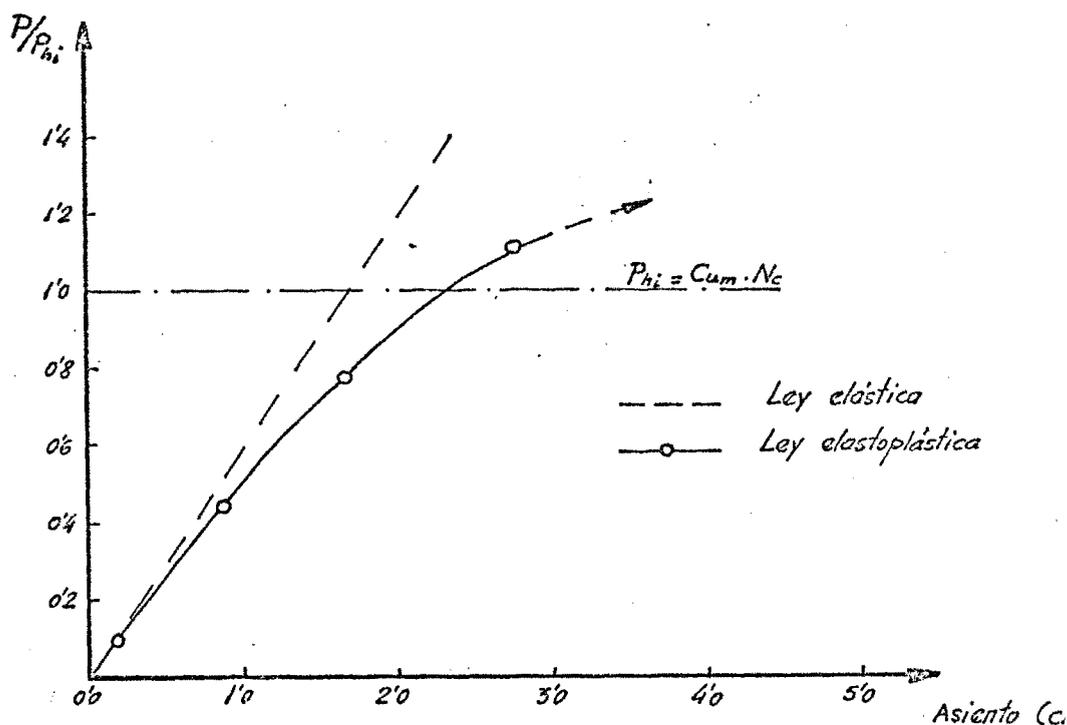


Fig. (5-13).- Caso 1 - Ley carga-asiento en el punto medio de la zapata.

### 3-2.- OTROS CASOS

Con el fin de ordenar la exposición de los resultados y evitar reiteraciones, comentaremos los resultados de estos casos en un conjunto en el próximo apartado 3-3, analizando entonces la influencia de las diferentes variables introducidas. Aquí únicamente representa-

mos la evolución de las zonas plastificadas en cada uno de ellos. (fig 5-11, 5-14, 5-15, 5-16, 5-17, 5-18 y 5-19).

Conviene hacer notar que en el caso 7 (fig. 5-19) el valor de  $P_{hi}$  es 2.11 Tn/m<sup>2</sup>.

### 3-3.- INFLUENCIA DE LA HETEROGENEIDAD.

Nos vamos a limitar al análisis de su influencia en las zonas plastificadas, en los asientos superficiales en la fase elástica y en la ley carga-asiento del punto medio de la zapata. Separaremos las - discusiones en los casos isotropos y anisotropos.

#### a) Zonas plastificadas.

En la figura ( 5-20 ) puede verse las zonas inicial y final de plastificación en los casos 2, 3 y 4, isotropos, de heterogeneidad creciente. Como se observa al aumentar el gradiente de heterogeneidad la zona plastificada se extiende - más en sentido horizontal que en profundidad. Igualmente el comienzo de la plastificación es tanto más rapido cuanto - mayor es dicho gradiente, también varía el lugar donde se inicia dicha plastificación, pues en el caso homogéneo se - producen a una profundidad aproximada del semiancho de la - zapata, mientras que en el caso de mayor heterogeneidad - (caso 4) la plastificación se inicia inmediatamente debajo de la zapata.

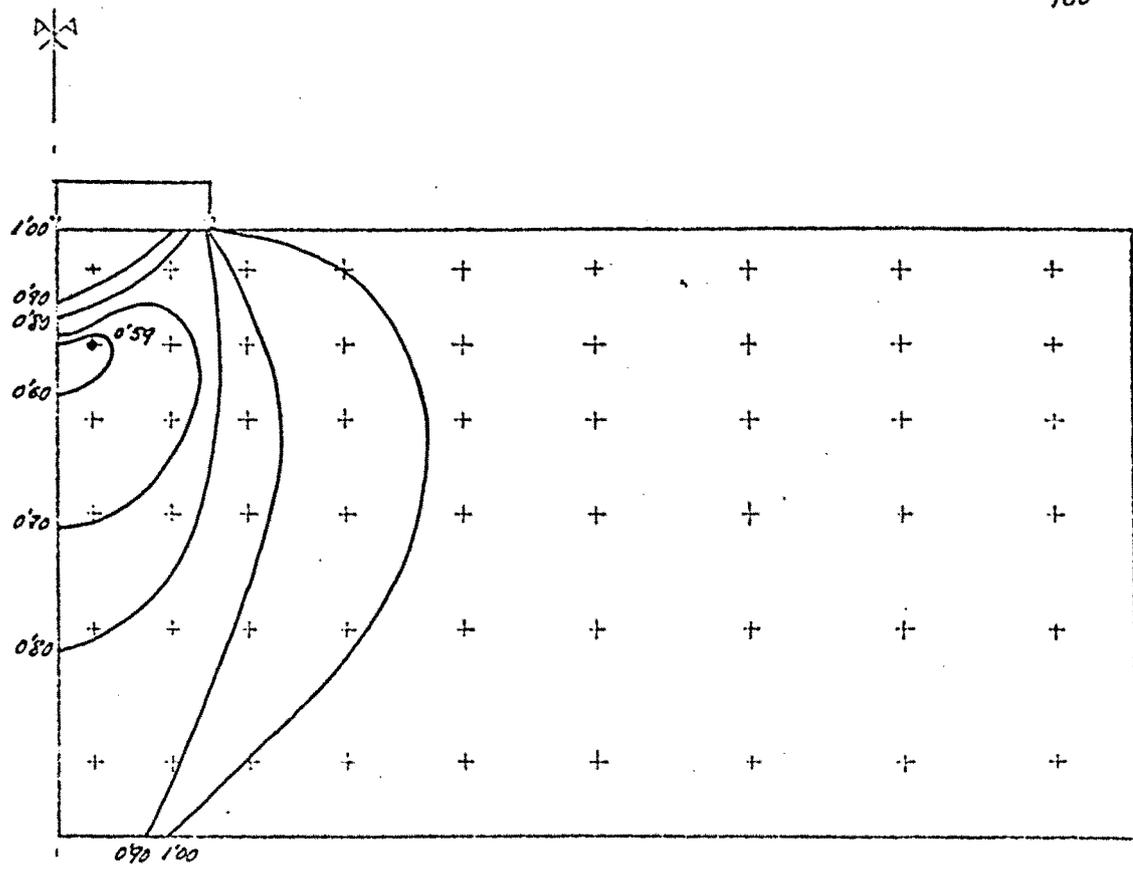


Fig. (5-14).- Caso 2 - Plastificación progresiva en función de  $P/P_{hi}$

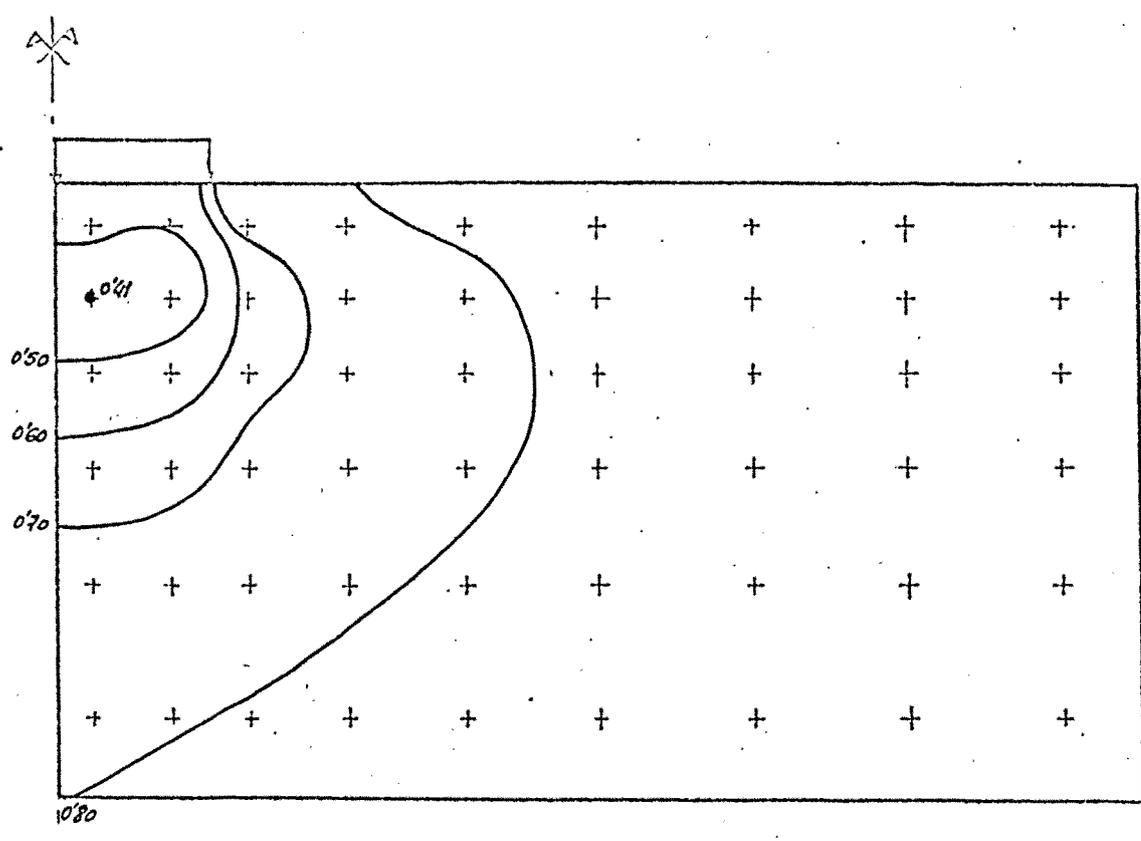


Fig. (5-15).- Caso 3.- Plastificación progresiva en función de  $P/P_{hi}$

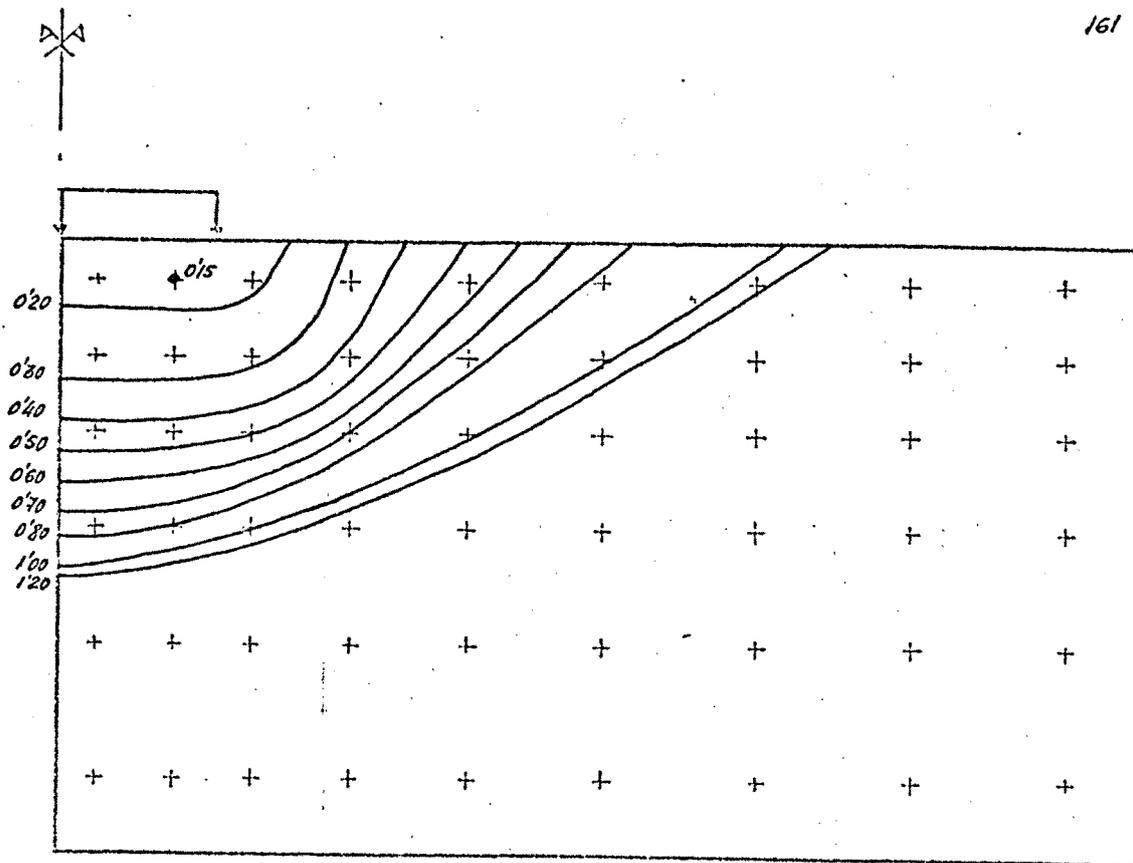


Fig. (5-16).- Caso 4 - Plastificación progresiva en función de  $P/P_{hi}$

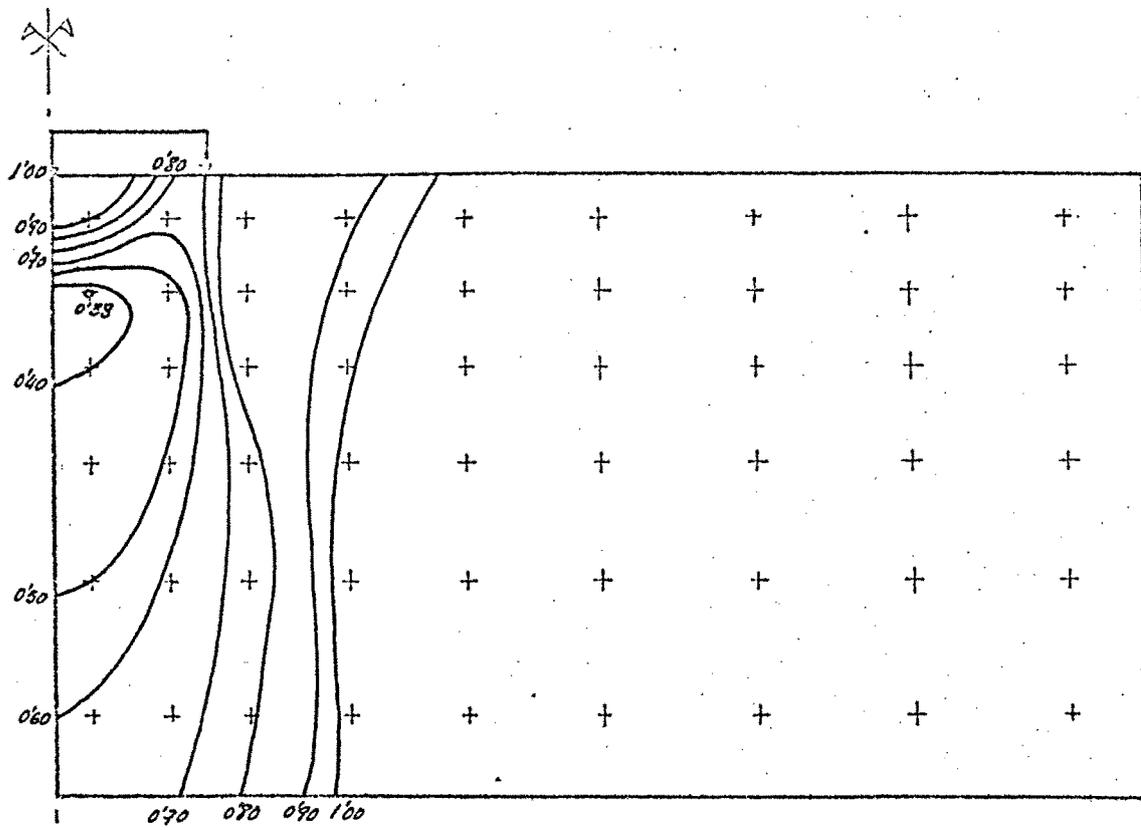


Fig. (5-17).- Caso 5 - Plastificación progresiva en función de  $P/P_{hi}$

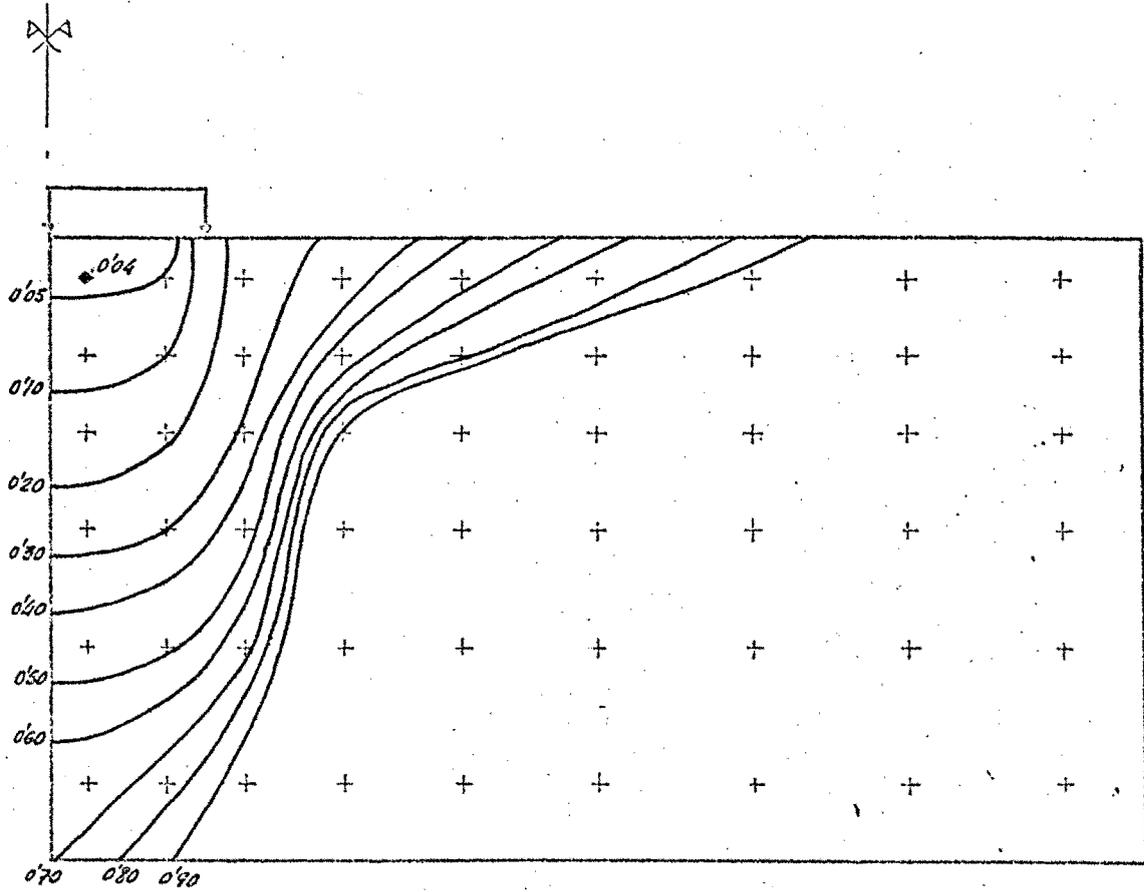


Fig. (5-18).-- Caso 6 - Plastificación progresiva en función de  $P/P_{hi}$

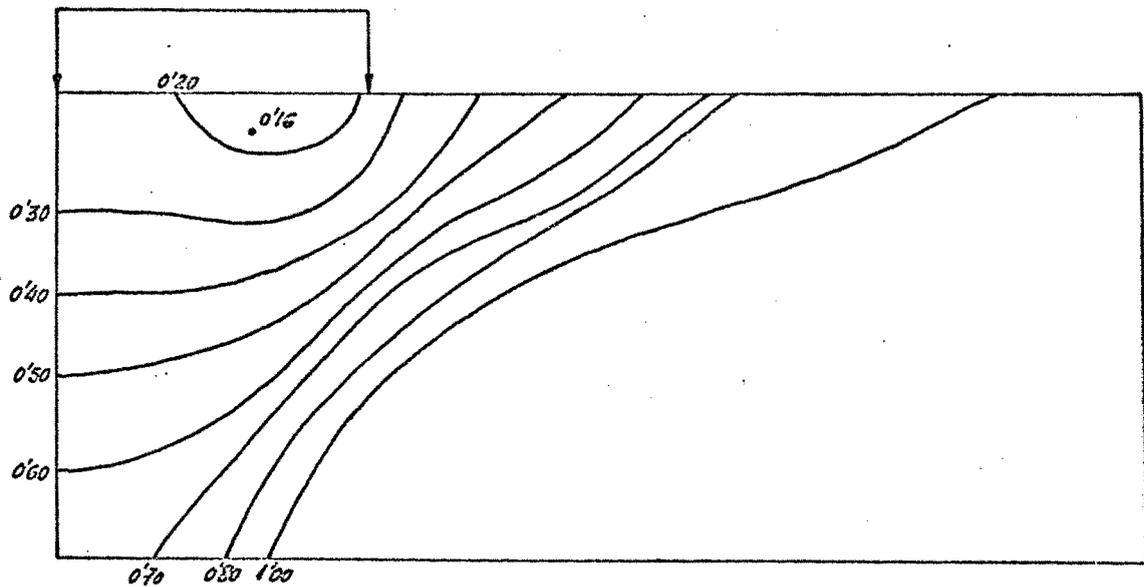


Fig. (5-19).-- Caso 7 - Plastificación progresiva en función de  $P/P_{hi}$

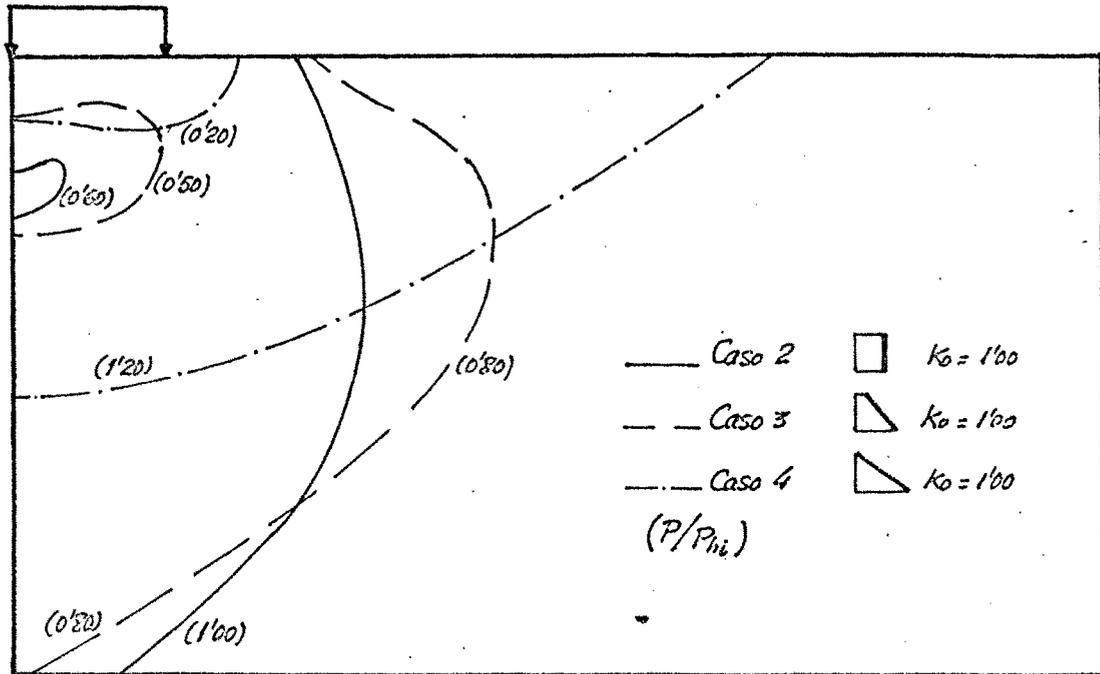


Fig. (5-20).— Influencia de la heterogeneidad en las zonas plastificadas inicial y final. Casos isótropos.

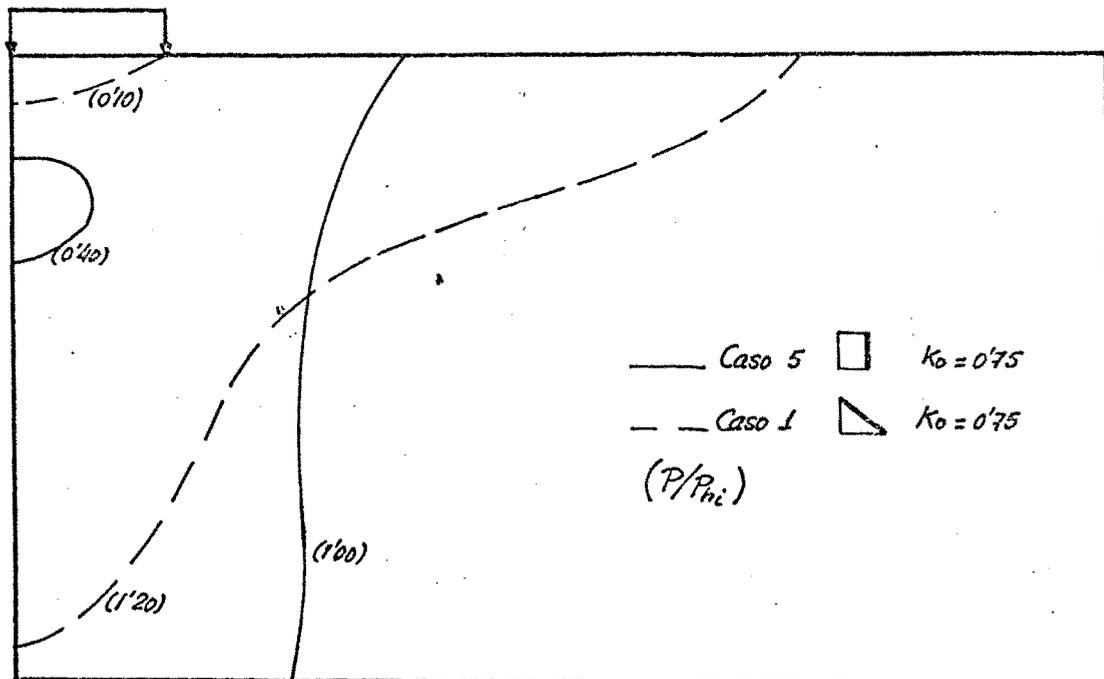


Fig. (5-21).— Influencia de la heterogeneidad en las zonas - plastificadas inicial y final. Casos anisótropos.

En los casos anisótropos (casos 1 y 5) en la figura (5-21) pueden verse estas mismas tendencias.

b) Asientos superficiales.

En los casos isótropos (fig. 5-22) se aprecia como a medida que el material se hace más heterogéneo y posee menor rigidez en la superficie los asientos y especialmente la deformación horizontal aumenta.

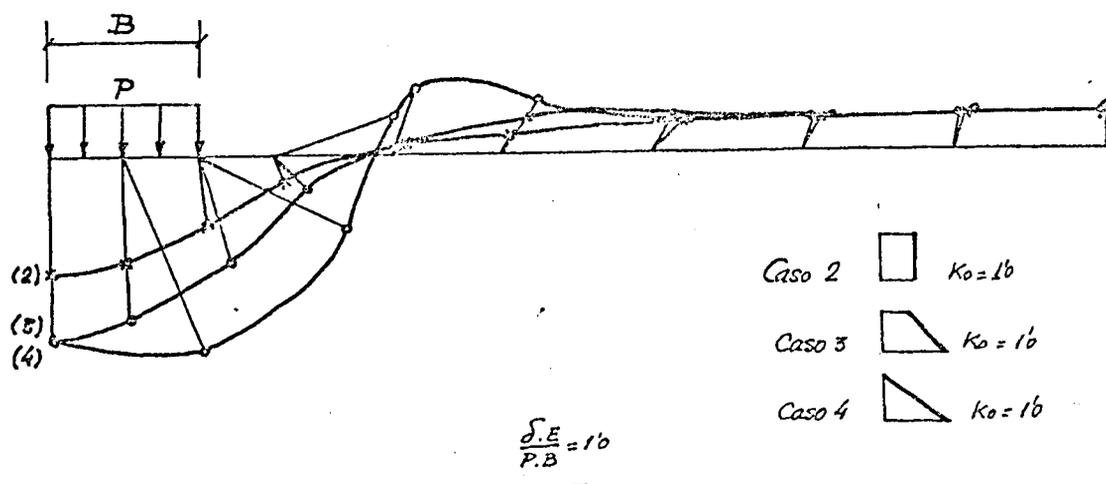


Fig. (5-22).- Desplazamientos de superficie. Casos isótropos.

En los casos anisótropos (fig. 5-23) esta particularidad -

también se aprecia.

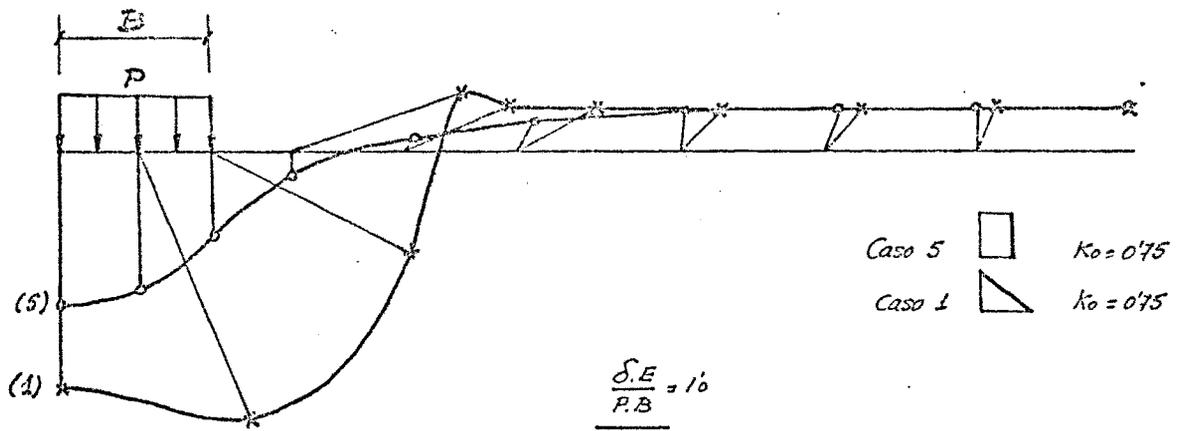


Fig. (5-23).- Desplazamientos de superficie. Casos anisotropos.

c) Ley carga-asiento.

En la figura 5-24 se representa la ley carga-asiento para los casos isótopos, como puede verse a medida que aumenta el gradiente de heterogeneidad aumenta la deformabilidad media. Sin embargo, esta tendencia no queda tan clara en el

caso intermedio (caso 3) debido a que como ya se indicó en el apartado a) la programación de la zona plastificada se realiza fundamentalmente más rápidamente en dirección horizontal que en profundidad, por lo cual la rotura depende mucho de la relación entre la resistencia en la superficie y el gradiente de dicha resistencia con la profundidad.

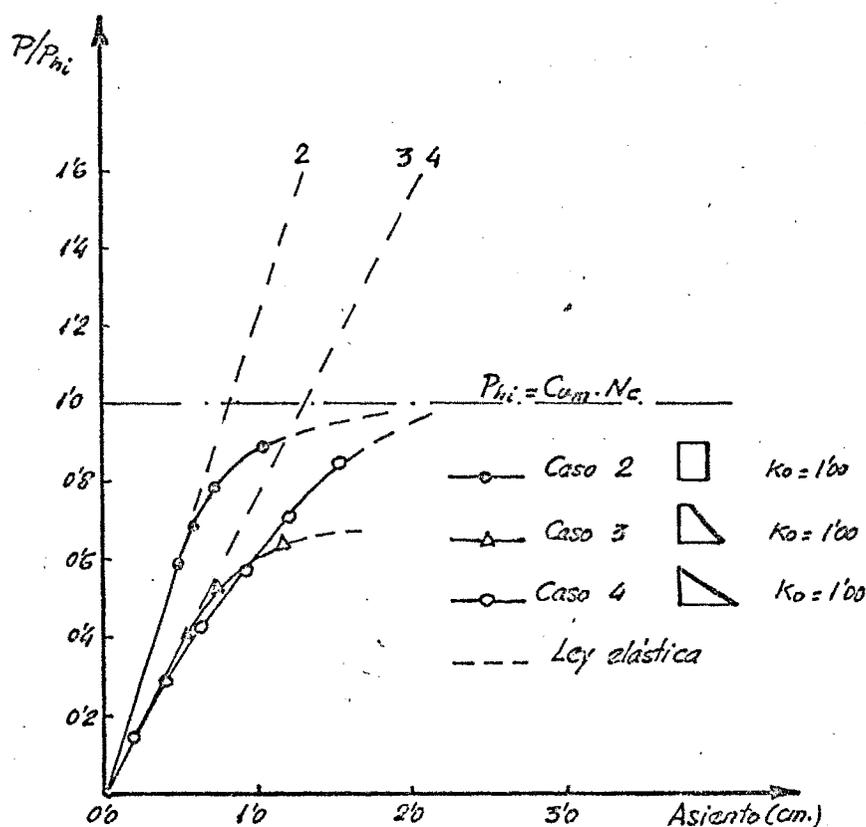


Fig. (5-24).- Influencia de la heterogeneidad en la ley carga-asiento. Casos isótropos.

Se aprecia que el caso 2 coincide la carga de rotura con la que se obtiene por el método de equilibrio límite.

$$P_{hi} = (\pi+2) \cdot C_u \quad (5-5)$$

En los casos anisótropos se observa igualmente (fig. 5-25) este aumento de la deformabilidad con la heterogeneidad.

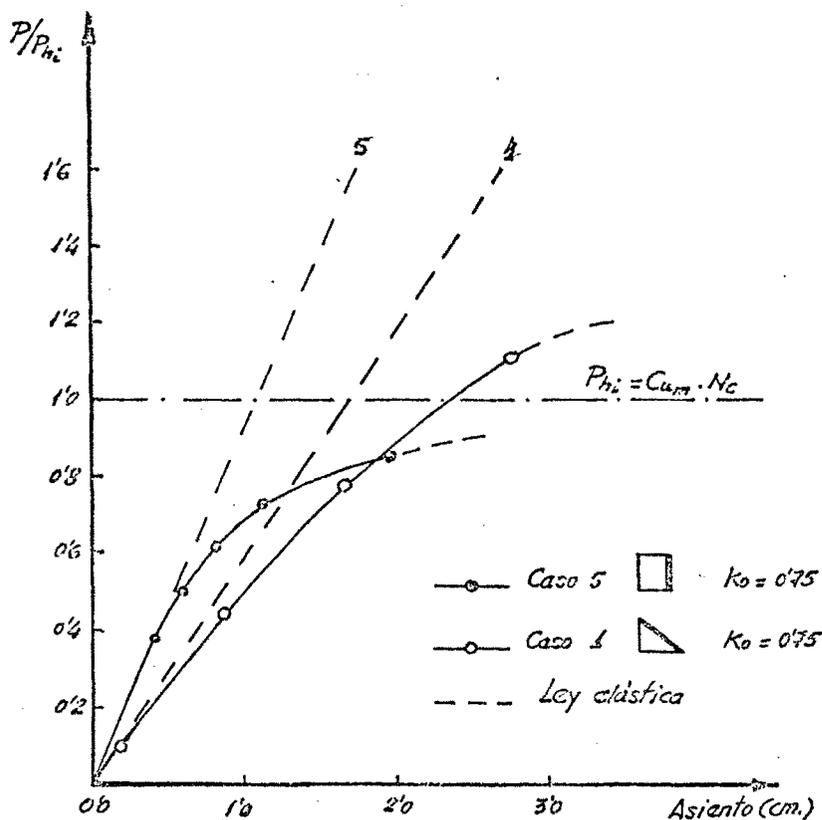


Fig. (5-25).- Influencia de la heterogeneidad en la ley carga-asiento. Casos anisótropos.

### 3-4.- INFLUENCIA DE LA ANISOTROPIA

El estudio se va a realizar en base a los mismos criterios que en el apartado anterior.

#### a) Zonas plastificadas.

En los casos homogéneos 2 y 5 (fig. 5-26) no se establece una diferencia notoria.

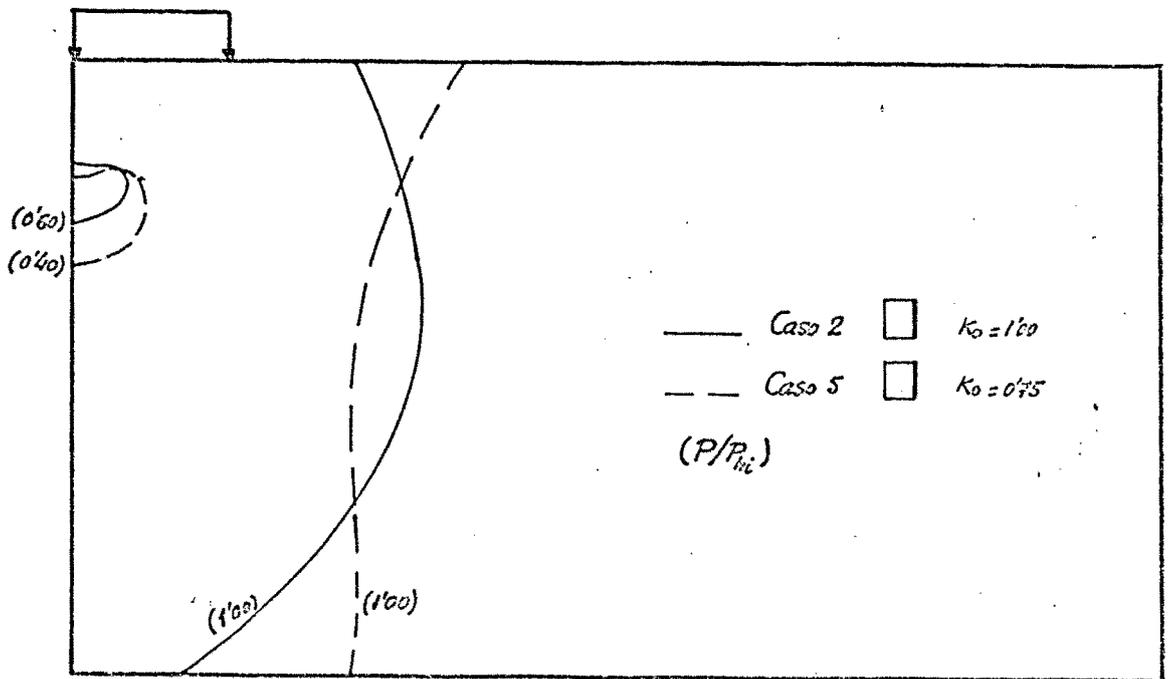


Fig. (5-26).— Influencia de la anisotropía en las zonas plásticas inicial y final. Casos homogéneos.

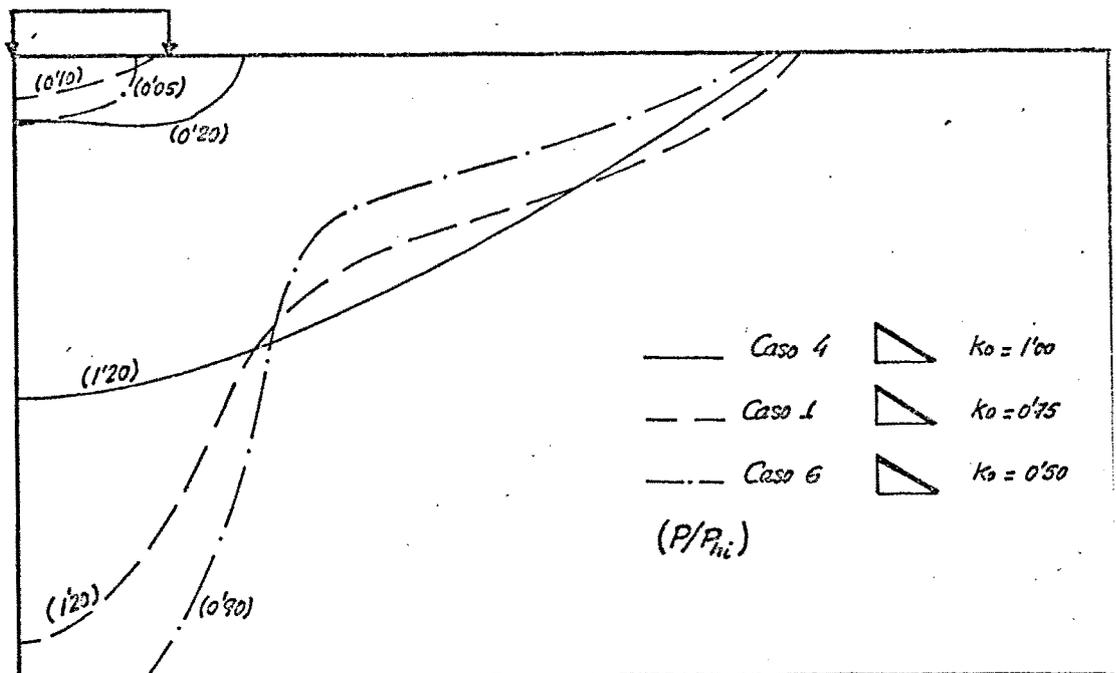


Fig. (5-27).— Influencia de la anisotropía en las zonas plásticas inicial y final. Casos heterogéneos.

En los casos heterogéneos 4-1 y 6 (fig. 5-27) la única diferencia que se puede observar es que en los casos 1 y 6 - la plastificación se inicia debajo de la zapata, alejándose de ella al ir aumentándose el valor de  $K_0$ .

b) Asientos superficiales.

En el caso homogéneo (fig. 5-28) se aprecia que el caso 5, más anisotrópico, los desplazamientos son mayores.

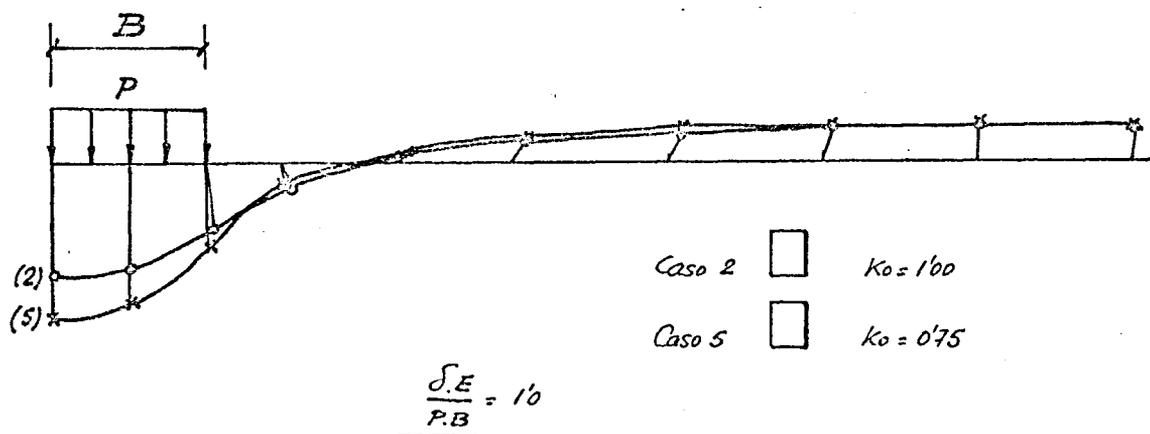


Fig. (5-28).- Desplazamientos de superficie. Casos homogéneos.

En los casos heterogéneos (fig. 5-29) se repite el fenómeno descrito en el párrafo anterior, los desplazamientos resultan proporcionales, manteniendo remisiblemente la dirección de los mismos.

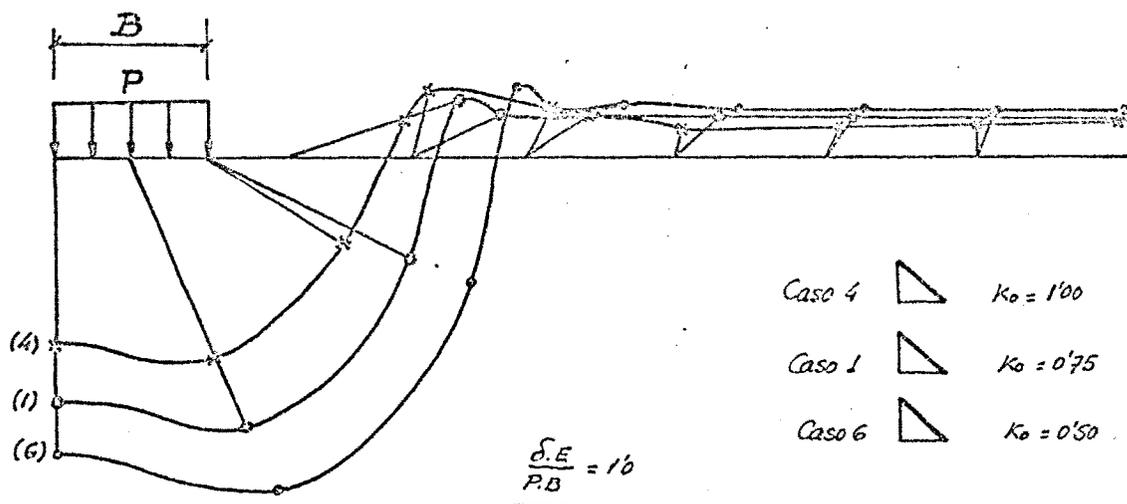


Fig. (5-29).- Desplazamientos de superficie. Casos heterogéneos.

c) Ley carga-asiento.

En los casos homogéneos (casos 2 y 5), figura (5-30) puede apreciarse los mismos fenómenos.

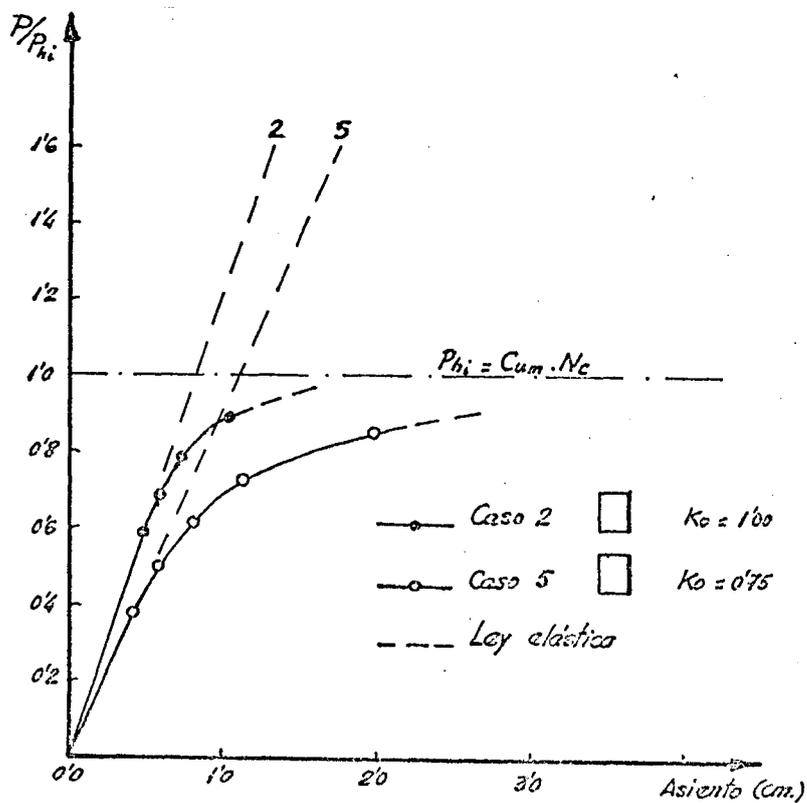


Fig. (5-30).- Influencia de la anisotropía en la ley carga - asiento. Casos homogéneos.

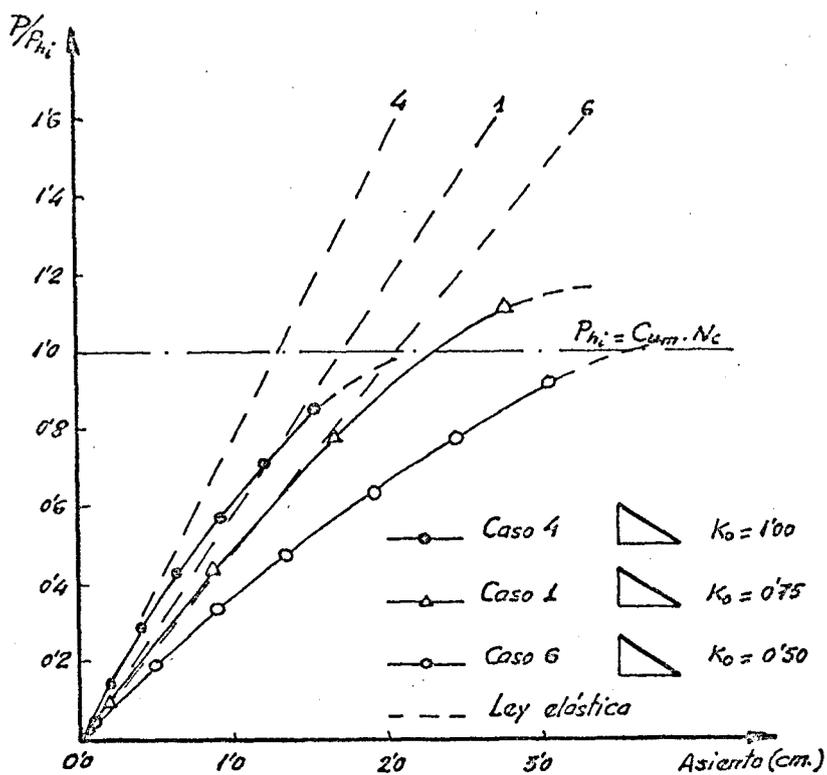


Fig. (5-31).- Influencia de la anisotropía en la ley carga - asiento. Casos heterogéneos.

### 3-5.- INFLUENCIA DEL ESPESOR DEL ESTRATO DE ARCILLA

Este análisis se realizará únicamente estudiando las deformaciones superficiales y la ley carga-asiento.

#### a) Desplazamientos superficiales.

En la figura (5-32) se aprecia como si bien los asientos verticales son algo menores en el caso 7 ( $H = 3m$ ) los desplazamientos horizontales aumentan bastante.

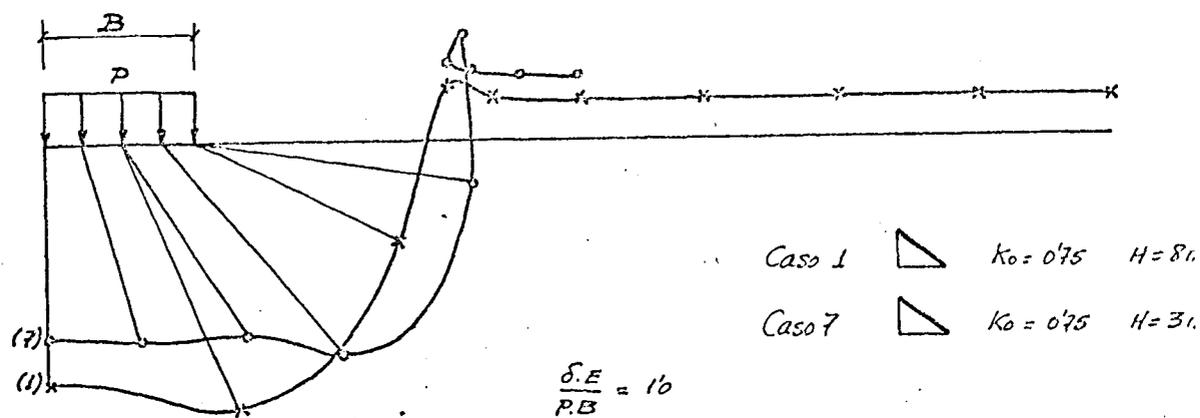


Fig. (5-32).- Desplazamientos de superficie. Casos  $H=8m$  y  $H=3m$

En el caso isótropo con modulo de elasticidad nulo en la superficie GIBSON (1.974) demuestra que el asiento del punto medio de la zapata a igual carga no depende del espesor del estrato compresible en el caso de igualdad del gradiente de

deformabilidad, nosotros no podemos realizar esta comprobación pues los casos 1 y 7 corresponden a terreno anisótropo. Sin embargo, puede observarse que dichos asentamientos en ambos casos, si no iguales, son del mismo orden, habida cuenta que el espesor de la arcilla se ha reducido a menos de la mitad.

b) Ley carga-asiento.

Al disminuir el espesor de arcilla los asentamientos son menores pero también disminuye la carga de rotura. Aproximadamente de la relación entre las cohesiones medias, (fig. 5-33).

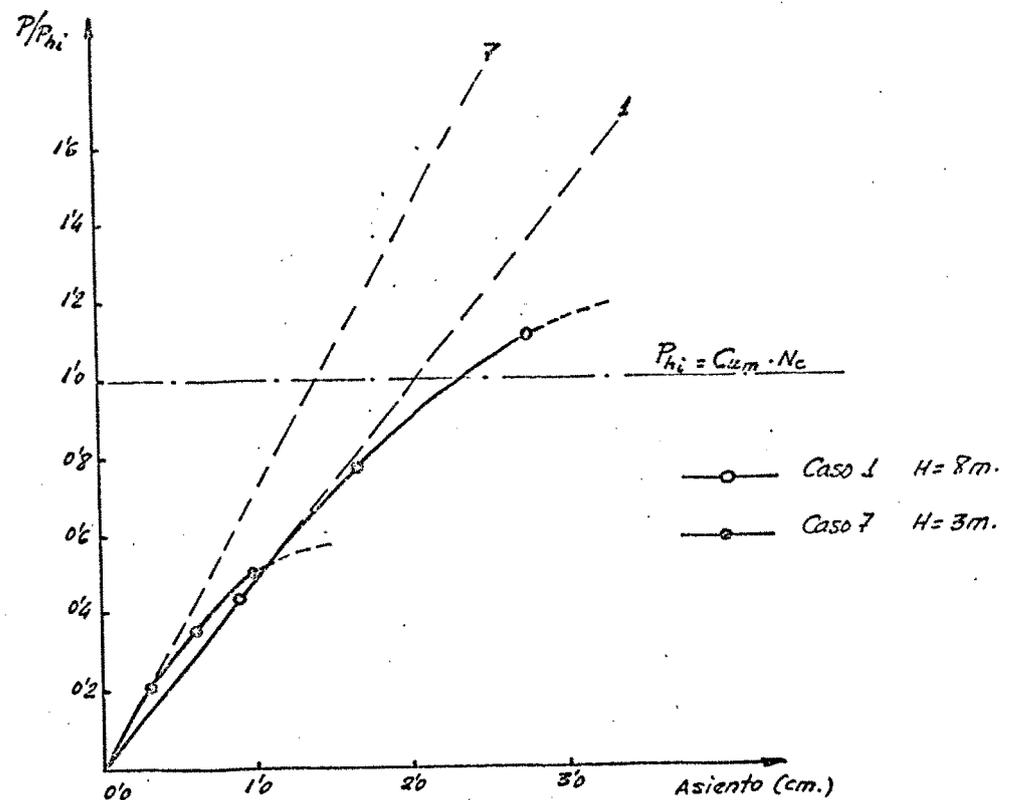


Fig. (5-33).- Ley carga-asiento. Casos.  $H = 8$  y  $H = 3m$ .

#### 4.- INFLUENCIA DEL CONTRNO LATERAL

El problema estudiado por limitaciones de capacidad de ordenador y tiempo de cálculo se ha tenido que estudiar con mallas de longitud  $l = 14$  m. Para estudiar el grado de influencia del contorno lateral se ha realizado el caso 8, que repite el caso 2 con una malla de longitud  $l = 29$  m. (fig. 5-4).

En la figura 5-34 se aprecia que en el caso 8 los asientos bajo la zapata aumenta un poco, pero en cambio los desplazamientos fuera de la misma son menores. Se puede observar que al ir alejado - indefinidamente el contorno lateral el levantamiento uniforme en la zona exterior tiende a anularse.

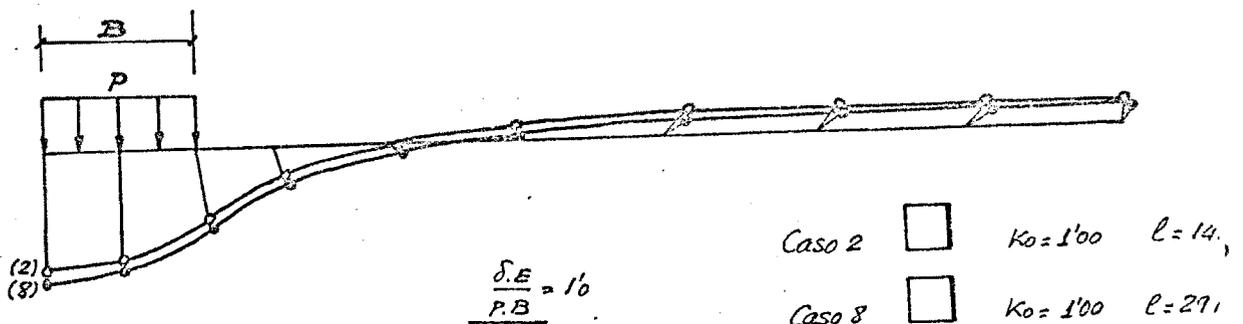


Fig. (5-34).- Desplazamientos de superficie. Caso 2  $l = 14$  m y  $l = 29$  m.

Analizando la ley de las  $\sigma_y$  en el plano de simetría de la zapata: fig. 5-35 se aprecia que no influye el alejamiento del contorno, siendo ambos próximos a la solución exacta de Egorov.

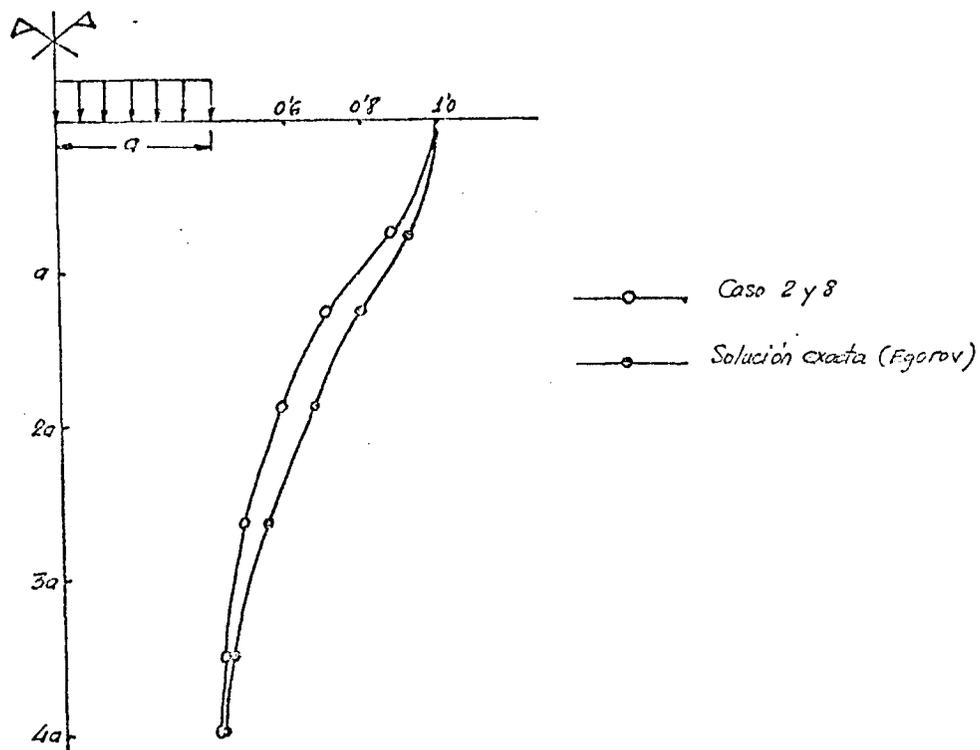


Fig. (5-35).- Ley de  $\sigma_y$  . Casos de  $l = 14m$  y  $l = 29m$

## CAPITULO VI

## CONCLUSIONES

## CONCLUSIONES

- Al realizar la recopilación bibliográfica sobre el tema, se ha podido apreciar que los factores que deben de tenerse en cuenta y que aun no han sido convenientemente tratados en los fenómenos producidos por -- procesos de carga rapida en arcillas son la heterogeneidad del material, es decir, la variación de sus propiedades con la profundidad y debido a la diferente presión de consolidación y la anisotropía del mismo, tanto en deformabilidad como en resistencia. Estos factores -- que poseen ambos una importante repercusión en los resultados de los análisis, en la actualidad se encuentran todavía en período de estudio y experimentación.
- Se ha presentado un nuevo criterio de rotura en tensiones totales, basado en ensayos obtenidos de la bibliografía en el cual se incluyen los dos factores antes mencionados, heterogeneidad y anisotropía, en función, ambos, de la historia tensional de la arcilla.
- Asi mismo, se ha elaborado un modelo híbrido para representar el comportamiento elastoplastico del material, basandose en el principio -- variacional de Reissner para la fase elástica y habiéndose realizado una generalización de dicho principio para la fase plástica.
- Para la resolución numérica de dicho modelo se ha realizado un modelo de elementos finitos capas de considerar todo lo anterior, comprobándose que la discretización en elementos triangulares híbridos de defor-

mación, constante, no es válida en sólidos incompresibles, si en cambio, los elementos cuadrangulares.

- Todo ello ha sido aplicado a su problema típico en geotécnica como es el de una zapata en faja indefinida sobre un estrato deformable sobre una base rígida, con interfaz lisa.

Se han estudiado una serie de casos en los que se han ido variando las variables de heterogeneidad, anisotropía y espesor del estrato de arcilla, obteniéndose unos resultados satisfactorios, comprobándose que ambos factores tienen una amplia repercusión en la plastificación progresiva y en los asentamientos.

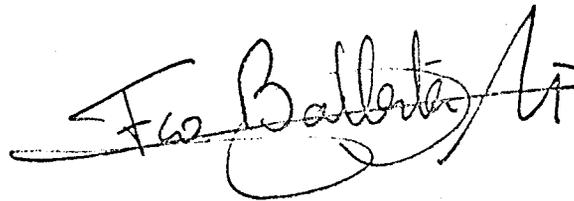
Con este trabajo tan solo se ha pretendido iniciar una línea de investigación, camino que dirigido por el Profesor Sagaseta está siguiendo el Departamento de Ciencias y Técnica del Suelo de la E. T. S. de I. C. C. y P. de Santander.

Las posibles ampliaciones del mismo, de las cuales alguna ya han sido iniciadas son :

- \* Disipación de las presiones intersticiales con el tiempo.
- \* Comprobación experimental del criterio de rotura propuesto a este trabajo.
- \* Realización de una revisión general de todos los problemas geotécnicos que se resuelven normalmente utilizando el criterio de Tresca generalizándolos con este nuevo criterio de rotura.

- \* Estudio de las relaciones existentes entre los distintos parámetros que definen el comportamiento de la arcilla, en particular la influencia de la historia tensional en los parámetros elásticos.
- \* Realización de un modelo de elementos finitos con elementos cuadrangulares isoparamétricos.
- \* Generalización a problemas de interacción suelo-estructura, proceso constructivo, etc.

Consideraremos que hemos cumplido nuestro objetivo si este trabajo - sirve de base para que otros compañeros se incorporen al tren de la investigación, pues de creemos que el resultado de una investigación no se mide por las puertas al saber que va cerrando sino por las que va abriendo.

A handwritten signature in black ink, appearing to read 'Fco Ballester', with a stylized flourish at the end.

Fdo.: Francisco Ballester

**ANEJO 1**

**CONVENIO DE SIGNOS Y DEFINICION  
DE LOS PARAMETROS ELASTICOS**

CONVENIO DE SIGNOS Y DEFINICION DE LOS PARAMETROS ELASTICOS

1.- CONVENIO DE SIGNOS

1-1.- TENSIONES

a) Tensiones normales

Positivas las compresiones, fig. (A1-1)

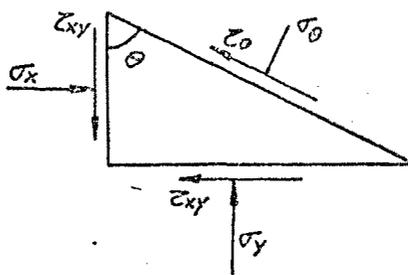


fig. (A1-1).- Convenio de signos. Tensiones.

b) Tensión tangencial sobre un plano cualquiera  $z_\theta$

Positiva cuando vista desde el interior del elemento donde actúa gira en sentido contrario a las agujas del reloj, fig. (A1-1)

c) Tensión tangencial  $z_{xy}$

Posee el signo de la tensión actuante en el plano vertical, fig. (A1-1)

1-2.- DEFORMACIONESa) Deformaciones longitudinales  $\epsilon$ 

Positivos los acortamientos

b) Deformaciones angulares  $\gamma_{xy}$ 

Positivas las deformaciones originadas por tensiones

positivas, fig. (A1-2)

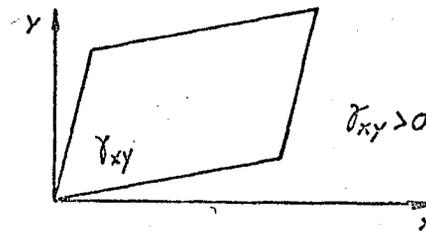


fig. (A1-2).- Convenio de signos. Deformación angular,.

1-3.- DESPLAZAMIENTOS

Positivos según los ejes de coordenadas.

1-4.- FUERZAS.

Positivas según los ejes de coordenadas.

1-5.- ANGULOS

Positivos del eje X al Y, fig. (A1-3)

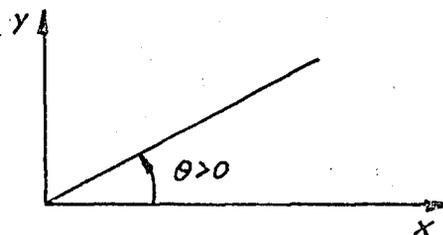


fig. (A1-3).- Convenio de signos. Angulos.

## 2.- DEFINICION DE LOS PARAMETROS ELASTICOS

### 2-1.- MODULOS DE ELASTICIDAD

En la anisotropía transversal los módulos principales de elasticidad son dos: el vertical y el horizontal que han sido llamados a lo largo de este trabajo  $E_v$  y  $E_h$

### 2-2.- COEFICIENTES DE POISSON

Con los coeficientes de POISSON como existe cierta disparidad entre las definiciones adoptadas por diversos autores, se va a proceder a la definición de los números de POISSON adoptados en este trabajo.

Definimos como  $\mu_{x_i x_j}$  a la deformación, cambiada de signo, producida en la dirección  $x_j$  al producirse una deformación unitaria en la dirección  $x_i$

$$\epsilon_{x_j} = -\mu_{x_i x_j} \cdot \epsilon_{x_i} \quad (A1-1)$$

En el caso de anisotropía general existirían seis coeficientes de POISSON, particularizando para el caso de anisotropía transversal, siendo el eje Z el de anisotropía, se reducen a tres  $\mu_{xz}$ ,  $\mu_{zx}$ ,  $\mu_{xx}$  si bien estos tres parámetros no son independientes pues existe una relación entre ellos y los módulos de elasticidad ( LOVE, 1.944 )

La relación existente es:

$$\frac{\mu_{x_i x_j}}{E_{x_i}} = \frac{\mu_{x_j x_i}}{E_{x_j}} \quad (A1-2)$$

De esta forma quedan solamente dos coeficientes de -  
POISSON.

La notación empleada en este trabajo ha sido:

$$\begin{aligned} \nu &= \mu_{xx} \\ \nu' &= \mu_{zx} \end{aligned} \quad (A1-3)$$

Conviene hacer notar que algunos autores ( PICKERING, 1.970;  
URIEL, 1.970) llaman a  $\mu_{xz} = \nu'$

### 2-3.- MODULOS TRANSVERSALES

Así como en anisotropía el módulo transversal G es fun -  
ción del módulo de elasticidad y del coeficiente de POISSON en  
la forma:

$$G = \frac{E}{2(1+\nu)} \quad (A1-4)$$

en anisotropía transversal existen dos módulos transversales,

$$G_{xy} \quad \text{y} \quad G_{xz} \quad .$$

El módulo  $G_{xy}$  tiene por expresión:

$$G_{xy} = \frac{E_x}{2(1+\mu_{xy})} = \frac{E}{2(1+\nu)} \quad (A1-5)$$

El módulo  $G_{xz}$  en cambio es independiente de los restantes parámetros elásticos aunque algunos autores (BARDEN, 1.963) lo hayan relacionado con éstos, introduciendo explícita o implícitamente algunas hipótesis adicional sobre las condiciones de anisotropía (DOOLEY, 1.964).

En este trabajo adoptaremos la notación definida por

$$G = G_{xy} = \frac{E}{2(1+\nu)} \quad (A1-G)$$

$$G_1 = G_{xz} , \text{ independiente}$$

## ANEJO 2

PRINCIPIO VARIACIONAL

## PRINCIPIO VARIACIONAL

### 1.- INTRODUCCION

En el presente anejo, aunque ya es conocida que la minimización del principio de REISSNER conduce a las ecuaciones de equilibrio interno, condiciones de contorno en fuerzas, y en desplazamientos y reacciones de apoyo, se va a demostrar que la utilización del principio de REISSNER modificado, al introducir la nueva función de tensiones  $\Pi$ , cumple también estas ecuaciones.

El desarrollo se realiza en isotropía, pudiéndose ver, que un desarrollo en anisotropía se realizaría de forma análoga.

### 2.- EL PRINCIPIO DE REISSNER

El funcional de partida es el expresado por REISSNER en la forma:

$$\begin{aligned} \Pi = & \int_{\Omega} \sigma^T \cdot \varepsilon \cdot d\Omega - \frac{1}{2} \int_{\Omega} \sigma^T \cdot C \cdot \sigma \cdot d\Omega - \int_{\Omega} f^T \cdot \delta \cdot d\Omega \\ & - \int_{\Sigma_p} p^T \cdot \delta \cdot d\Sigma - \int_{\Sigma_s} r^T \cdot (\delta - \delta_0) \cdot d\Sigma \end{aligned} \quad (A2-1)$$

Siendo:

$\Omega$  = recinto

$\Sigma$  = borde de  $\Omega$

$\Sigma_p$  = parte de  $\Sigma$  donde se conocen las fuerzas

$\Sigma_\delta$  = parte de  $\Sigma$  donde se conocen los desplazamientos

$$\Sigma_p \cup \Sigma_\delta = \Sigma$$

$\sigma$  = tensión en un punto cualquiera

$\epsilon$  = deformación en un punto cualquiera

$\delta$  = desplazamiento en un punto cualquiera

$C$  = matriz tensión-deformación  $\epsilon = C \cdot \sigma$

$f$  = fuerzas de masa

$P$  = fuerzas de superficie en el contorno  $\Sigma_p$

$R$  = reacciones en el contorno  $\Sigma_\delta$

$\delta_0$  = desplazamientos conocidos en  $\Sigma_\delta$

### 3.- DESARROLLO EN DEFORMACION PLANA

Al introducir la condición de deformación plana,  $\epsilon_z = 0$

Se obtiene:

$$\tau_z = \mu (\sigma_x + \sigma_y)$$

$$\epsilon_x = \frac{1}{E} [\sigma_x - \mu (\sigma_y + \tau_z)] = \frac{1+\mu}{E} [(1-\mu) \sigma_x - \mu \sigma_y]$$

$$\epsilon_y = \frac{1+\mu}{E} [-\mu \sigma_x + (1-\mu) \sigma_y] = \frac{1}{2G} [-\mu \sigma_x + (1-\mu) \sigma_y]$$

Puesto en forma matricial

$$\{\epsilon\} = [C] \cdot \{\sigma\}$$

$$\begin{pmatrix} \epsilon_x \\ \epsilon_y \\ \tau_{xy} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1-\mu}{2G} & -\frac{\mu}{2G} & 0 \\ -\frac{\mu}{2G} & \frac{1-\mu}{2G} & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \tau_{xy} \end{pmatrix} =$$

$$= \frac{1}{2G} \begin{pmatrix} 1-\mu & -\mu & 0 \\ -\mu & 1-\mu & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \tau_{xy} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} u'_x \\ v'_y \\ u'_y + v'_x \end{pmatrix}$$

$$\{\sigma\}^T \cdot \{\epsilon\} = (\sigma_x \quad \sigma_y \quad \tau_{xy}) \begin{pmatrix} u'_x \\ v'_y \\ u'_y + v'_x \end{pmatrix} = \sigma_x u'_x + \sigma_y v'_y + \tau_{xy} (u'_y + v'_x)$$

$$\frac{1}{2} \{\sigma\}^T [C] \{\sigma\} = \frac{1}{2} (\sigma_x \quad \sigma_y \quad \tau_{xy}) \cdot \frac{1}{2G} \begin{pmatrix} 1-\mu & -\mu & 0 \\ -\mu & 1-\mu & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \tau_{xy} \end{pmatrix} =$$

$$= \frac{1}{4G} (\sigma_x \quad \sigma_y \quad \tau_{xy}) \begin{pmatrix} (1-\mu) \sigma_x - \mu \sigma_y \\ -\mu \sigma_x + (1-\mu) \sigma_y \\ 2 \tau_{xy} \end{pmatrix} =$$

$$\begin{aligned}
&= \frac{1}{4G} \left[ (1-\mu) \sigma_x^2 - \mu \sigma_x \sigma_y - \mu \sigma_x \sigma_y + (1-\mu) \sigma_y^2 + 2\tau_{xy}^2 \right] = \\
&= \frac{1}{4G} \left[ (1-\mu) (\sigma_x^2 + \sigma_y^2) - 2\mu \sigma_x \sigma_y + 2\tau_{xy}^2 \right] = \\
&= \frac{1}{4G} \left[ (\sigma_x^2 + \sigma_y^2) - \mu (\sigma_x + \sigma_y)^2 + 2\tau_{xy}^2 \right]
\end{aligned}$$

Luego, el principio de REISSNER queda:

$$\begin{aligned}
\mathcal{R} &= \int_{\Omega} \left\{ \sigma_x u'_x + \sigma_y v'_y + \tau_{xy} (u'_y + v'_x) - \frac{1}{4G} \left[ (\sigma_x^2 + \sigma_y^2) - \mu (\sigma_x + \sigma_y)^2 + 2\tau_{xy}^2 \right] \right\} \\
&\quad - \int_{\Omega} (f_x \cdot u + f_y \cdot v) \cdot d\Omega - \int_{\Sigma_p} (p_x \cdot u + p_y \cdot v) d\Sigma - \\
&\quad - \int_{\Sigma_D} \left[ r_x (u - u_0) + r_y (v - v_0) \right] d\Sigma \tag{A2-2}
\end{aligned}$$

#### 4.- INTRODUCCION DE LA FUNCION DE TENSIONES II.

La función II se define en isotropía como:

$$H = \frac{\mu (\sigma_x + \sigma_y + \sigma_z)}{E}$$

que, en deformación plana queda:

$$H = \frac{\mu (1+\mu)}{E} (\sigma_x + \sigma_y) = \frac{\mu}{2G} (\sigma_x + \sigma_y)$$

Es decir que:

$$\sigma_x + \sigma_y = \frac{2G}{\mu} \cdot H$$

$$\begin{aligned} \epsilon_x &= \frac{1}{2G} \left[ (1-\mu) \sigma_x - \mu \sigma_y \right] = \frac{1}{2G} \left[ \sigma_x - \mu (\sigma_x + \sigma_y) \right] = \\ &= \frac{1}{2G} \left[ \sigma_x - \mu \cdot \frac{2G}{\mu} H \right] = \frac{\sigma_x}{2G} - H \end{aligned}$$

Luego:

$$\left. \begin{aligned} \sigma_x &= 2G (\epsilon_x + H) = 2G (u'_x + H) \\ \sigma_y &= 2G (\epsilon_y + H) = 2G (v'_y + H) \\ \tau_{xy} &= G \gamma_{xy} = G (u'_y + v'_x) \end{aligned} \right\}$$

Desarrollando el funcional, tomando como incógnitas,  $u$ ,  $v$  y  $H$

llamando:

$$\pi_1 = \int_{\Omega} (\sigma^T \epsilon - \frac{1}{2} \sigma^T C \cdot \sigma) \cdot d\Omega$$

$$\pi_f = - \int_{\Omega} f^T \cdot \delta \cdot d\Omega$$

$$\pi_p = - \int_{\Sigma_p} p^T \cdot \delta \cdot d\Sigma$$

$$\pi_0 = - \int_{\Sigma_\delta} r^T (\delta - \delta_0) d\Sigma$$

Desarrollando

$$\begin{aligned}
\mathcal{T}_1 &= \sigma_x u'_x + \sigma_y v'_y + \tau_{xy} (u'_y + v'_x) - \frac{1}{4G} \left[ (\sigma_x^2 + \sigma_y^2) - \mu (\sigma_x + \sigma_y)^2 + 2\tau_{xy}^2 \right] \\
&= 2G u'_x (u'_x + H) + 2G v'_y (v'_y + H) + G (u'_y + v'_x)^2 - \\
&\quad - \frac{1}{4G} \left[ 4G^2 \left[ (u'_x + H)^2 + (v'_y + H)^2 \right] - \mu \cdot 4G^2 (u'_x + H + v'_y + H)^2 + 2G^2 (u'_y + v'_x)^2 \right] \\
&= \frac{G}{2} \left\{ 4u'_x (u'_x + H) + 4v'_y (v'_y + H) + 2(u'_y + v'_x)^2 - \right. \\
&\quad \left. - \left[ 2(u'_x + H)^2 + 2(v'_y + H)^2 - 2\mu (u'_x + v'_y + 2H)^2 + (u'_y + v'_x)^2 \right] \right\} = \\
&= \frac{G}{2} \left\{ (u'_x + H)(4u'_x - 2u'_x - 2H) + (v'_y + H)(4v'_y - 2v'_y - 2H) + \right. \\
&\quad \left. + 2\mu (u'_x + v'_y + 2H)^2 + (u'_y + v'_x)^2 \right\} = \\
&= \frac{G}{2} \left\{ 2(u'_x + H)(u'_x - H) + 2(v'_y + H)(v'_y - H) + 2\mu (u'_x + v'_y + 2H)^2 + \right. \\
&\quad \left. + (u'_y + v'_x)^2 \right\} = \\
&= \frac{G}{2} \left[ 2(u_x'^2 - H^2) + 2(v_y'^2 - H^2) + 2\mu (u'_x + v'_y + 2H)^2 + (u'_y + v'_x)^2 \right] \\
&= \frac{G}{2} \left[ 2(u_x'^2 + v_y'^2) - 4H^2 + 2\mu (u'_x + v'_y)^2 + 8\mu H(u'_x + v'_y) + \right. \\
&\quad \left. + 8\mu H^2 + (u'_y + v'_x)^2 \right] = \\
&= \frac{G}{2} \left[ 2(u_x'^2 + v_y'^2) + 2\mu (u'_x + v'_y)^2 + (u'_y + v'_x)^2 + 8\mu H(u'_x + v'_y) \right. \\
&\quad \left. - 4(1 - 2\mu)H^2 \right]
\end{aligned}$$

Luego el principio de REISSNER queda:

$$\pi = \frac{G}{2} \int_{\Omega} \left[ 2(u'_x + v'_y)^2 + 2\mu(u'_x + v'_y)^2 + (u'_y + v'_x)^2 + 8\mu(u'_x + v'_y)H - 4(1-2\mu)H^2 \right] d\Omega$$

$$- \int_{\Omega} (f_x \cdot u + f_y \cdot v) d\Omega - \int_{\Sigma_p} (p_x \cdot u + p_y \cdot v) d\Sigma - \int_{\Sigma_s} [\Gamma_x(u - u_0) + \Gamma_y(v - v_0)] d\Sigma$$

(A2-3)

##### 5.- COMPARACION CON OTROS FUNCIONALES

Al comparar este funcional con el presentado por HWANG et al (1.969)

se observa que coinciden para el caso de sólido incompresible, pues les falta el sumando  $2\mu(u'_x + v'_y)^2$  que equivale a

$2\mu \left(\frac{\Delta V}{V}\right)^2$  y que se anula para el caso de cambio de volumen nulo,

$\Delta V = 0$ .

## 6.- EXPRESION EN FUNCION DE LOS DESPLAZAMIENTOS

Se comprueba que poniendo  $\Pi$  en función de los desplazamientos queda la expresión de la energía potencial. Esto, sólo es posible realizarlo en materiales compresibles.

$$\left. \begin{aligned} \sigma_x &= 2G(u'_x + H) \\ \sigma_y &= 2G(v'_y + H) \\ \sigma_x + \sigma_y &= \frac{2G}{\mu} H \end{aligned} \right\} \begin{aligned} \sigma_x + \sigma_y &= 2G(u'_x + v'_y + 2H) = \frac{2G}{\mu} H \\ u'_x + v'_y + 2H &= \frac{H}{\mu} \\ H\left(\frac{1}{\mu} - 2\right) &= u'_x + v'_y \\ H &= (u'_x + v'_y) \frac{\mu}{1-2\mu} \end{aligned}$$

Entrando en (A2-3)

$$\begin{aligned} \Pi_1 &= \frac{G}{2} \int_{\Omega} \left[ 2(u'_x{}^2 + v'_y{}^2) + 2\mu(u'_x + v'_y)^2 + (u'_y + v'_x)^2 + 8\mu(u'_x + v'_y) \cdot \frac{\mu}{1-2\mu} (u'_x + v'_y) \right. \\ &\quad \left. - 4(1-2\mu) \frac{\mu^2}{(1-2\mu)^2} (u'_x + v'_y)^2 \right] d\Omega = \\ &= \frac{G}{2} \int_{\Omega} \left[ 2(u'_x{}^2 + v'_y{}^2) + (u'_x + v'_y)^2 \left( 2\mu + \frac{8\mu^2}{1-2\mu} - \frac{4\mu^2}{1-2\mu} \right) + (u'_y + v'_x)^2 \right] d\Omega = \\ &= \frac{G}{2} \int_{\Omega} \left[ 2(u'_x{}^2 + v'_y{}^2) + \frac{2\mu}{1-2\mu} (u'_x + v'_y)^2 + (u'_y + v'_x)^2 \right] d\Omega \end{aligned}$$

que es precisamente el primer sumando de la energía potencial.

Con la expresión de HWANG et al (1.969), queda:

$$\pi_1 = \frac{G}{2} \int_{\Omega} \left[ 2(u'_x{}^2 + v'_y{}^2) + \frac{4\mu^2}{1-2\mu} (u'_x + v'_y)^2 + (u'_y + v'_x)^2 \right] d\Omega$$

que no coincide con la energía potencial más que si  $4\mu^2 = 2\mu$ , es decir,  $\mu = 1/2$  como era de esperar, y se comentó en el apartado 5º de este anejo.

#### 7.- MINIMIZACION DEL FUNCIONAL PROPUESTO

Aplicación del cálculo variacional al funcional que se ha obtenido anteriormente.

Calculamos la primera variación:

$$\delta \pi = 0$$

$$\pi = \pi_1 + \pi_f + \pi_p + \pi_0 \quad ; \quad \delta \pi = \delta \pi_1 + \delta \pi_f + \delta \pi_p + \delta \pi_0 = 0$$

$$\pi_1 = \frac{G}{2} \int_{\Omega} F. d\Omega$$

$$\delta \pi_1 = \frac{G}{2} \int_{\Omega} \delta F. d\Omega$$

$$F = 2(u'_x{}^2 + v'_y{}^2) + 2\mu(u'_x + v'_y)^2 + (u'_y + v'_x)^2 + 8\mu(u'_x + v'_y)H - 4(1-2\mu)H^2$$

$$\begin{aligned} \delta F &= 4u'_x \delta u'_x + 4v'_y \delta v'_y + 4\mu(u'_x + v'_y)(\delta u'_x + \delta v'_y) + \\ &+ 2(u'_y + v'_x)(\delta u'_y + \delta v'_x) + 8\mu H(\delta u'_x + \delta v'_y) + \\ &+ 8\mu(u'_x + v'_y)\delta H - 8(1-2\mu)H \cdot \delta H = \\ &= 4(1+\mu)u'_x \delta u'_x + 4(1+\mu)v'_y \delta v'_y + 4\mu u'_x \delta v'_y + \\ &+ 4\mu v'_y \delta u'_x + 2u'_y \delta u'_y + 2v'_x \delta v'_x + 2u'_y \delta v'_x + \\ &+ 2v'_x \delta u'_y + 8\mu H \delta u'_x + 8\mu H \delta v'_y + 8\mu u'_x \delta H + \\ &+ 8\mu v'_y \delta H + 8(1-2\mu)H \delta H \end{aligned}$$

Haciendo uso de la igualdad:

$$\frac{\partial}{\partial x} (A \cdot \delta B) = A'_x \cdot \delta B + A \cdot \delta B'_x$$

Es decir:

$$A \cdot \delta B'_x = \frac{\partial}{\partial x} (A \cdot \delta B) - A'_x \delta B$$

Esto tiene como fin, evitar las incómodas expresiones

$\delta u'_x$ ,  $\delta u'_y$ ,  $\delta v'_x$ ,  $\delta v'_y$ , y poner todo en función de  $\delta u$ ,  $\delta v$ ,  $\delta H$ , que son las incógnitas reales.

Aplicando esto, por ejemplo:

$$u'_x \cdot \delta u'_x = \frac{\partial}{\partial x} (u'_x \delta u) - u''_{x^2} \cdot \delta u \quad \text{etc.}$$

$$\begin{aligned} \delta F = & 4(1+\mu) \left[ \frac{\partial}{\partial x} (u'_x \delta u) - u''_{x^2} \delta u \right] + 4(1+\mu) \left[ \frac{\partial}{\partial y} (v'_y \delta v) - v''_{y^2} \delta v \right] + \\ & + 4\mu \left[ \frac{\partial}{\partial y} (u'_x \delta v) - u''_{xy} \delta v \right] + 4\mu \left[ \frac{\partial}{\partial x} (v'_y \delta u) - v''_{xy} \delta u \right] + \\ & + 2 \left[ \frac{\partial}{\partial y} (u'_y \delta u) - u''_{y^2} \delta u \right] + 2 \left[ \frac{\partial}{\partial x} (v'_x \delta v) - v''_{x^2} \delta v \right] + \\ & + 2 \left[ \frac{\partial}{\partial x} (u'_y \delta v) - u''_{xy} \delta v \right] + 2 \left[ \frac{\partial}{\partial y} (v'_x \delta u) - v''_{xy} \delta u \right] + \\ & + 8\mu \left[ \frac{\partial}{\partial x} (H \delta u) - H'_x \delta u \right] + 8\mu \left[ \frac{\partial}{\partial y} (H \delta v) - H'_y \delta v \right] + \\ & + 8\mu u'_x \delta H + 8\mu v'_y \delta H - 8(1-2\mu) H \delta H \end{aligned}$$

Agrupando :  $\delta F = \delta F_1 + \delta F_2$

$$\delta F_1 = \text{donde no aparecen } \frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y}$$

$$\delta F_2 = \text{donde si aparecen } \frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y}$$

Dentro de cada una, agrupamos la que va con  $\delta u$ , con  $\delta v$  y con  $\delta H$

$$\begin{aligned} \delta F_1 = & \left[ -4(1+\mu) u''_{x^2} - 4\mu v''_{xy} - 2u''_{y^2} - 2v''_{xy} - 8\mu H'_x \right] \delta u + \\ & + \left[ -4(1+\mu) v''_{y^2} - 4\mu u''_{xy} - 2v''_{x^2} - 2u''_{xy} - 8\mu H'_y \right] \delta v + \\ & + \left[ 8\mu u'_x + 8\mu v'_y - 8(1-2\mu) H \right] \delta H \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\delta F_2 &= 4(1+\mu) \frac{\partial}{\partial x} (u'_x \delta u) + 4\mu \frac{\partial}{\partial x} (v'_y \delta u) + 2 \frac{\partial}{\partial y} (u'_y \delta u) + \\
&\quad + 2 \frac{\partial}{\partial y} (v'_x \delta u) + 8\mu \frac{\partial}{\partial x} (H \delta u) + \\
&\quad + 4(1+\mu) \frac{\partial}{\partial y} (v'_y \delta v) + 4\mu \frac{\partial}{\partial y} (u'_x \delta v) + 2 \frac{\partial}{\partial x} (v'_x \delta v) + \\
&\quad + 2 \frac{\partial}{\partial x} (u'_y \delta v) + 8\mu \frac{\partial}{\partial y} (H \delta v)
\end{aligned}$$

Operamos  $\delta F_2$

El teorema de Ostropadski-Gauss dice:

$$\int_{\Omega} \operatorname{div} \bar{a} \cdot d\Omega = \int_{\Sigma} \bar{a} \cdot \bar{\pi} \cdot d\Sigma \quad (\bar{\pi} : \text{vector normal})$$

En forma de componentes:

$$\int_{\Omega} \left( \frac{\partial a_x}{\partial x} + \frac{\partial a_y}{\partial y} \right) \cdot d\Omega = \int_{\Sigma} (a_x \cdot l + a_y \cdot m) \cdot d\Sigma$$

Siendo  $l$  y  $m$  los cosenos directores de la normal.

En la expresión de  $\delta F_2$  buscamos expresiones de la forma

$$\frac{\partial a_x}{\partial x} + \frac{\partial a_y}{\partial y}$$

$$\begin{aligned}
\int_{\Omega} \delta F_2 d\Omega &= \int_{\Omega} \left[ 4(1+\mu) \frac{\partial}{\partial x} (u'_x \delta u) + 4(1+\mu) \frac{\partial}{\partial y} (v'_y \delta v) \right] d\Omega + \\
&\quad + \int_{\Omega} \left[ 4\mu \frac{\partial}{\partial x} (v'_x \delta u) + 4\mu \frac{\partial}{\partial y} (u'_x \delta v) \right] d\Omega + \\
&\quad + \int_{\Omega} \left[ 2 \frac{\partial}{\partial x} (v'_x \delta v) + 2 \frac{\partial}{\partial y} (u'_y \delta u) \right] d\Omega +
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& + \int_{\Omega} \left[ 2 \frac{\partial}{\partial x} (u'_y \delta v) + 2 \frac{\partial}{\partial y} (v'_x \delta u) \right] d\Omega + \\
& + \int_{\Omega} \left[ \delta \mu \frac{\partial}{\partial x} (H \delta u) + \delta \mu \frac{\partial}{\partial y} (H \delta v) \right] d\Omega = \\
& = \int_{\Sigma} \left[ 4(1+\mu) u'_x \delta u \cdot l + 4(1+\mu) v'_y \delta v \cdot m + \right. \\
& \quad + 4\mu v'_y \delta u \cdot l + 4\mu u'_x \delta v \cdot m + \\
& \quad + 2v'_x \delta v \cdot l + 2u'_y \delta u \cdot m + \\
& \quad + 2u'_y \delta v \cdot l + 2v'_x \delta u \cdot m + \\
& \quad \left. + \delta \mu H \delta u \cdot l + \delta \mu H \delta v \cdot m \right] d\Sigma = \\
& = \int_{\Sigma} \left\{ \left[ 4(1+\mu) u'_x \cdot l + 4\mu v'_y \cdot l + 2u'_y \cdot m + 2v'_x \cdot m + \delta \mu H \cdot l \right] \delta u \right. \\
& \quad \left. + \left[ 4(1+\mu) v'_y \cdot m + 4\mu u'_x \cdot m + 2v'_x \cdot l + 2u'_y \cdot l + \delta \mu H \cdot m \right] \delta v \right\}
\end{aligned}$$

Esta integral puede descomponerse en:

$$\int_{\Sigma} = \int_{\Sigma_p} + \int_{\Sigma_\delta}$$

Tenemos, pues:

$$\delta \pi = \delta \pi_1 + \delta \pi_f + \delta \pi_p + \delta \pi_0 = 0$$

$$\delta \pi_1 = \frac{G}{2} \int_{\Omega} \delta F_1 d\Omega + \frac{G}{2} \int_{\Omega} \delta F_2 d\Omega =$$

$$= \frac{G}{2} \int_{\Omega} \delta F_1 d\Omega + \frac{G}{2} \int_{\Sigma} \{ [A] \delta u + [B] \delta v \} d\Sigma =$$

$$= \frac{G}{2} \int_{\Omega} \delta F_1 d\Omega + \frac{G}{2} \int_{\Sigma_p} \{ [A] \delta u + [B] \delta v \} d\Sigma + \frac{G}{2} \int_{\Sigma_\delta} \{ [A] \delta u + [B] \delta v \} d\Sigma$$

$$\delta \pi_f = -\delta \left[ \int_{\Omega} (f_x \cdot u + f_y \cdot v) d\Omega \right] = - \int_{\Omega} (f_x \delta u + f_y \delta v) d\Omega$$

$$\delta \pi_p = -\delta \left[ \int_{\Sigma_p} (p_x u + p_y v) d\Sigma \right] = - \int_{\Sigma_p} (p_x \delta u + p_y \delta v) d\Sigma$$

$$\begin{aligned} \delta \pi_0 &= -\delta \left\{ \int_{\Sigma_\delta} [\Gamma_x (u - u_0) + \Gamma_y (v - v_0)] d\Sigma \right\} = \\ &= - \int_{\Sigma_\delta} [(u - u_0) \delta \Gamma_x + (v - v_0) \delta \Gamma_y + \Gamma_x \delta u + \Gamma_y \delta v] d\Sigma \end{aligned}$$

Agrupando ahora las integrales extendidas a un mismo dominio:

Dominio  $\Omega$  :

$$\begin{aligned} \frac{G}{2} \int_{\Omega} \left\{ \left[ -4(1+\mu) u''_{x^2} - 2(1+2\mu) v''_{xy} - 2u''_{y^2} - 8\mu H'_x \right] \delta u + \right. \\ \left. + \left[ -4(1+\mu) v''_{y^2} - 2(1+2\mu) u''_{xy} - 2v''_{x^2} - 8\mu H'_y \right] \delta v + \right. \\ \left. + \left[ 8\mu (u'_x + v'_y) - 8(1-2\mu) H \right] \delta H - \frac{2}{G} f_x \delta u - \frac{2}{G} f_y \delta v \right\} d\Omega \end{aligned}$$

Dominio  $\Sigma_p$  :

$$\frac{G}{2} \int_{\Sigma_p} \left\{ \left[ 4(1+\mu) u'_x \cdot \ell + 4\mu v'_y \cdot \ell + 2u'_y \cdot m + 2v'_x \cdot m + \delta\mu H \cdot \ell \right] \delta u + \left[ 4(1+\mu) v'_y \cdot m + 4\mu u'_x \cdot m + 2v'_x \cdot \ell + 2u'_y \cdot \ell + \delta\mu H \cdot m \right] \delta v - \frac{2}{G} P_x \cdot \delta u - \frac{2}{G} P_y \cdot \delta v \right\} d\Sigma$$

Dominio  $\Sigma_S$  :

$$\frac{G}{2} \int_{\Sigma_S} \left\{ \left[ 4(1+\mu) u'_x \cdot \ell + 4\mu v'_y \cdot \ell + 2u'_y \cdot m + 2v'_x \cdot m + \delta\mu H \cdot \ell \right] \delta u + \left[ 4(1+\mu) v'_y \cdot m + 4\mu u'_x \cdot m + 2v'_x \cdot \ell + 2u'_y \cdot \ell + \delta\mu H \cdot m \right] \delta v + \left. - \frac{2}{G} r_x \delta u - \frac{2}{G} r_y \delta v - \frac{2}{G} (u-u_0) \delta r_x - \frac{2}{G} (v-v_0) \delta r_y \right\} d\Sigma$$

La suma de estas tres integrales debe anularse para cualquier valor de  $\delta u$  ,  $\delta v$  ,  $\delta H$  ,  $\delta r_x$  ,  $\delta r_y$  , por lo cual, los factores que multiplican a cada uno de ellos, deben de ser cero:

Dominio  $\Omega$  :

$$\left. \begin{aligned} G \left[ -2(1+\mu) u''_{x^2} - (1+2\mu) v''_{xy} - u''_{y^2} - 4\mu H'_x \right] - f_x &= 0 \\ G \left[ -2(1+\mu) v''_{y^2} - (1+2\mu) u''_{xy} - v''_{x^2} - 4\mu H'_y \right] - f_y &= 0 \\ G \left[ 4\mu u'_x + 4\mu v'_y - 4(1-2\mu) H \right] &= 0 \end{aligned} \right\} (A2-4)$$

Dominio  $\Sigma_p$  :

$$\left. \begin{aligned} G \left[ 2(1+\mu) u'_x \cdot l + 2\mu v'_y \cdot l + u'_y \cdot m + v'_x \cdot m + 4\mu H \cdot l \right] - P_x &= 0 \\ G \left[ 2(1+\mu) v'_y \cdot m + 2\mu u'_x \cdot m + v'_x \cdot l + u'_y \cdot l + 4\mu H \cdot m \right] - P_y &= 0 \end{aligned} \right\} (A2-5)$$

Dominio  $\Sigma_f$  :

$$\left. \begin{aligned} G \left[ 2(1+\mu) u'_x \cdot l + 2\mu v'_y \cdot l + u'_y \cdot m + v'_x \cdot m + 4\mu H \cdot l \right] - \Gamma_x &= 0 \\ G \left[ 2(1+\mu) v'_y \cdot m + 2\mu u'_x \cdot m + v'_x \cdot l + u'_y \cdot l + 4\mu H \cdot m \right] - \Gamma_y &= 0 \end{aligned} \right\} (A2-4)$$

$$u - u_0 = 0$$

$$v - v_0 = 0$$

Estas son las ecuaciones resultantes:

(A2-4) son las de equilibrio interno y la definición de H.

(A2-5) son las de contorno en fuerzas.

(A2-6) son las de contorno en desplazamientos y las reacciones correspondientes.

Ecuación (A2-4):

$$\mu (u'_x + v'_y) = (1-2\mu) H \Rightarrow H = \frac{\mu}{1-2\mu} (u'_x + v'_y)$$

Ecuación (A2-4)

Teniendo en cuenta que:

$$2G(u'_x + H) = \tau_x \Rightarrow 2G(u''_{x2} + H'_x) = \frac{\partial \tau_x}{\partial x}$$

$$G(u'_y + v'_x) = \tau_{xy} \Rightarrow G(u''_{y2} + v''_{xy}) = \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial y}$$

$$-2G(u''_{x^2} + H'_x) - G(u''_{y^2} + v''_{xy}) - 2\mu G u''_{x^2} - 2\mu G v''_{xy} + 2G H'_x - 4\mu G H'_x - f_x = 0$$

Es decir:

$$-\frac{\partial \sigma_x}{\partial x} - \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial y} - 2G \left[ \mu u''_{x^2} + \mu v''_{xy} - (1-2\mu) H'_x \right] - f_x = 0$$

Pero, como se vió que:

$$H = \frac{\mu}{1-2\mu} (u'_x + v'_y) \Rightarrow H'_x = \frac{\mu}{1-2\mu} (u''_{x^2} + v''_{xy})$$

Luego:

$$-\frac{\partial \sigma_x}{\partial x} - \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial y} - 2G \left[ \mu u''_{x^2} + \mu v''_{xy} - \mu u''_{x^2} - \mu v''_{xy} \right] - f_x = 0$$

Quedando entonces:

$$\frac{\partial \sigma_x}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial y} + f_x = 0$$

Análogamente, operando con la segunda ecuación de (A2-4) se llega a:

$$\frac{\partial \tau_{xy}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_y}{\partial y} + f_y = 0$$

Teniendo en cuenta, en la primera ecuación de (A2-5) que:

$$\sigma_x = 2G(u'_x + H)$$

$$\tau_{xy} = G(u'_y + v'_x)$$

$$G[2(1+\mu)u'_x + 2\mu v'_y + 4\mu H].l + G(u'_y + v'_x).m = p_x$$

$$G[2(u'_x + H) + 2\mu u'_x + 2\mu v'_y - 2(1-2\mu)H].l + G(u'_y + v'_x).m = p_y$$

Pero, por la ecuación (A2-4) se tiene que:

$$2\mu u'_x + 2\mu v'_y - 2(1-2\mu)H = 0$$

Luego:

$$2G(u'_x + H).l + G(u'_y + v'_x).m = p_x$$

Es decir que:

$$\sigma_x . l + \tau_{xy} . m = p_x \quad \text{en } \Sigma_p$$

Análogamente, operando con la segunda ecuación de (A2-5):

$$\tau_{xy} . l + \sigma_y . m = p_y \quad \text{en } \Sigma_p$$

En la primera ecuación de (A2-6) se repite el proceso con la primera de (A2-5) cambiando  $p_x$  por  $r_x$ , teniéndose:

$$\sigma_x . l + \tau_{xy} . m = r_x \quad \text{en } \Sigma_\delta$$

Análogamente, con la segunda ecuación de (A2-6) se obtiene:

$$\tau_{xy} . l + \sigma_y . m = r_y \quad \text{en } \Sigma_\delta$$

Con la tercera ecuación de (A2-6) se tiene:

$$u = u_0 \quad \text{en } \Sigma_\delta$$

Y de forma similar, operando con la cuarta ecuación de (A2-6) resulta:

$$v = v_0 \quad \text{en } \Sigma_\delta$$

Quedando así demostrado lo expuesto al principio de este apartado.

## 8.- GENERALIZACION EN PLASTICIDAD.

Como ya se expuso anteriormente (Capítulo III, apartado 3-3), el principio variacional en la fase plástica tiene la misma expresión que en elasticidad, pero usando la ley tensión-deformación generalizada correspondiente a Plasticidad. O sea:

$$\Pi^P = \int_{\Omega} (\dot{\sigma}^T \cdot \dot{\epsilon} - \frac{1}{2} \dot{\sigma}^T \cdot c \cdot \dot{\sigma}) d\Omega + \Pi_f + \Pi_p + \Pi_o \quad (A2-7)$$

siendo:

$$\dot{\sigma} = M^P \cdot \dot{\epsilon}^* \quad (A2-8)$$

y  $M^P$  la matriz definida por la ecuación (3-45).

Desarrollando esta matriz en el caso isótropo se obtiene (ver anejo nº 3):

$$M^P = \begin{vmatrix} 2-\sigma_o^2 & \sigma_o^2 & -\sigma_o\tau_o & 2 \\ \sigma_o^2 & 2-\sigma_o^2 & \sigma_o\tau_o & 2 \\ -\sigma_o\tau_o & \sigma_o\tau_o & 1-\tau_o^2 & 0 \end{vmatrix} \quad (A2-9)$$

siendo:

$$\sigma_o = \frac{\sigma_x - \sigma_y}{2c}$$

$$\tau_o = \frac{\tau_{xy}}{c}$$

(A2-10)

Introduciendo (A3-9) y (A2-8) en (A2-7) se obtiene el funcional a

$$\text{minimizar: } \Pi^P = \int_{\Omega} F^P d\Omega + \Pi_f + \Pi_p + \Pi_o \quad (\text{A2-11})$$

$$\begin{aligned} \text{siendo: } F^P = & 2(\dot{u}_x'^2 + \dot{v}_y'^2) + 2 \cdot H \cdot (\dot{u}_x' + \dot{v}_y') + (\dot{u}_y' + \dot{v}_x')^2 - \\ & - [\sigma_o (\dot{u}_x' - \dot{v}_y') + \tau_o (\dot{u}_y' + \dot{v}_x')]^2 - \\ & - \frac{1}{2} [\tau_o (\dot{u}_x' - \dot{v}_y') - \sigma_o (\dot{u}_y' + \dot{v}_x')]^2 \end{aligned} \quad (\text{A2-12})$$

Repitiendo el mismo proceso de cálculo del apartado anterior para establecer las condiciones estacionarias del funcional, resultan las siguientes ecuaciones, análogas a las (A2-4):

$$\begin{aligned} G \cdot \left[ -3 \ddot{u}_x'' - 2 \dot{v}_{xy}'' - \ddot{u}_y'' - 2 H_x' + \sigma_o^2 (u_{xx}'' - v_{xy}'') + \right. \\ \left. + \sigma_o \tau_o (\ddot{u}_{xy}'' + \dot{v}_x''^2) + \sigma_o \tau_o (\ddot{u}_{xy}'' - \dot{v}_y''^2) + \tau_o^2 (\ddot{u}_y'' + \dot{v}_{xy}'') \right] - \int_x = 0 \\ G \cdot \left[ -3 \dot{v}_y'' - 2 \ddot{u}_{xy}'' - \dot{v}_x'' - 2 H_y' - \sigma_o^2 (\ddot{u}_{xy}'' - \dot{v}_y''^2) + \right. \\ \left. - \sigma_o \tau_o (\ddot{u}_y'' + \dot{v}_{xy}'') + \sigma_o \tau_o (\ddot{u}_{xy}'' - \dot{v}_y''^2) + \tau_o^2 (\ddot{u}_y'' + \dot{v}_{xy}'') \right] - \int_y = 0 \\ G \left[ 2 \cdot \dot{u}_x' + 2 \dot{v}_y' \right] = 0 \end{aligned} \quad (\text{A2-13})$$

La tercera ecuación de (A2-13) expresa la incompresibilidad del material (al ser  $\lambda = \frac{1}{2}$ ). Las dos primeras ecuaciones teniendo en cuenta las expresiones (A2-8) y (A2-9), se convierten en :

$$\begin{aligned} \frac{\partial \sigma_x}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial y} + \int_x = 0 \\ \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_y}{\partial y} + \int_y = 0 \end{aligned} \quad (\text{A2-14})$$

que son las ecuaciones de equilibrio interno.

Análogamente, las restantes ecuaciones resultantes de minimizar el funcional (A2-12) conducen a las condiciones de contorno en fuerzas y desplazamientos.

ANEJO 3

MATRIZ TENSION-DEFORMACION  
GENERALIZADA EN PLASTICIDAD

En el apartado 3-2 del capítulo III se obtuvo la expresión de la matriz tensión-deformación generalizada en plasticidad  $|M^P|$  expresión (3-47) que se repite a continuación:

$$|M^P| = |M| - \frac{|M| \cdot \{f_i^*\} \cdot \{f_i^*\}^T \cdot |M|}{\{f_i^*\} \cdot |M| \cdot \{f_i^*\}} \quad (A3-1)$$

siendo  $|M|$  la matriz tensión-deformación en elasticidad que se desarrolló en el apartado 2-1 del mismo capítulo, obteniéndose:

$$|M| = \begin{vmatrix} \frac{2\Gamma E_I}{4-r} & 0 & 0 & \frac{2\Gamma E_I}{4-r} \\ 0 & \frac{2(2-r)E_I}{4-r} & 0 & \frac{2\Gamma E_I}{4-r} \\ 0 & 0 & G' & 0 \end{vmatrix} \quad (A3-2)$$

y la matriz  $\{f_i^*\}$  se obtuvo en (3-34)

$$\{f_i^*\} = \begin{pmatrix} \gamma_r - A \\ -\gamma_r + A \\ 2(\gamma_r + B) \\ 0 \end{pmatrix} \quad (A3-3)$$

Por comodidad llamando a

$$\alpha = \tau_r - A$$

$$\beta = \tau_r - B$$

se obtiene:

$$\left\{ f_1^* \right\} = \begin{Bmatrix} \alpha \\ -\alpha \\ \beta \\ 0 \end{Bmatrix} \quad (A3-4)$$

Para el caso de anisotropía, tal como se dijo al final del apartado 3-2 del capítulo III, debido a la dificultad de operar la expresión (A3-1) no se ha obtenido analíticamente la matriz  $|M_p|$ .

Operando en isotropía se obtiene:

$$|M^p| = G \begin{vmatrix} 2 - \frac{\alpha^2}{c^2} & \frac{\alpha^2}{c^2} & -\frac{\alpha\beta}{c^2} & 2 \\ \frac{\alpha^2}{c^2} & 2 - \frac{\alpha^2}{c^2} & \frac{\alpha\beta}{c^2} & 2 \\ -\frac{\alpha\beta}{c^2} & \frac{\alpha\beta}{c^2} & 1 - \frac{\beta^2}{c^2} & 0 \end{vmatrix} \quad (A3-5)$$

siendo

$$\alpha = \frac{\sigma_x - \sigma_y}{2} - p_0 \frac{1 - k_0}{2} D_M$$

$$\beta = \tau_{xy} + M \cdot p_0 \frac{1 - k_0}{2} D_M \cdot \operatorname{tg} \phi_e$$

$$c = k \cdot p_c + p_0 \cdot D_M \cdot \operatorname{tg} \phi_e \frac{1 + k_0}{2}$$

Particularizando la matriz  $|M|$  (A3-2) en isotropía se obtiene:

$$|M| = G \begin{vmatrix} 2 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 2 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{vmatrix} \quad (A3-6)$$

La matriz  $|M^P|$  puede apreciarse que manda una cierta relación con  $|M|$ . Así puede observarse que los términos de la diagonal principal disminuyen al plastificar mientras que en los términos (1,2) y (1,3) aparecen valores distintos de cero.

ANEJO 4

DESARROLLO DE LOS PROGRAMAS

## DESARROLLO DE LOS PROGRAMAS

### 1.- INTRODUCCION

Para la resolución numérica del modelo presentado se han realizado dos series programas de ordenador en lenguajes BASIC y para ser utilizados en el ordenador WANG 2.200-C de la Escuela Técnica Superior de Ingenieros de Caminos, Canales y Puertos de Santander, con las siguientes características:

- Memoria de 16 K.bytes.
- Memoria auxiliar de disco de 5.000.000 de bytes.
- Plotter Hewlett Packard.

Ambas series de programas resuelven el problema mediante un método de elementos finitos, en el primer caso los elementos son triángulos de deformación constante y en el segundo son cuadriláteros.

Las ecuaciones básicas empleadas en el método de elementos finitos en ambos casos fueron desarrolladas anteriormente.

A continuación se exponen brevemente cada una de las series de programas, para finalizar en este anejo con su listado completo.

Las expresiones encerradas en                    corresponden a la nomenclatura utilizada en los programas.

### 2.- TRIANGULOS

#### 2-1.- ENTRADA DE DATOS

[01] FORMACION DE LA MALLA ( Datos Geométricos )

En este primer programa se introducen de forma automática ó directamente los datos geométricos de la malla  $[B\#]$  . Formándose y guardándose en ficheros catalogados las siguientes matrices:

- $[X (N2,2)]$  coordenadas en los nodos
- $[S (N1)]$  valor adimensional del área de cada triángulo
- $[NO (N1,3)]$  nodos que forman cada elemento
- $[P (PO,4)]$  primer y último nodo, primero y último elemento de cada partición

La entrada automática de datos  $[01]$  efectúa para mallas de contorno rectangular. En este caso tan solo es necesario introducir el número de nodos que se encuentran en cada piso, el número de nodos que tiene cada columna, así como la separación entre pisos y columnas. Obteniéndose de forma automática las matrices antes mencionadas. En el caso de que la malla tenga un contorno no rectangular  $[X1]$  la entrada de datos se realiza a través de la consola del ordenador. A través de la pantalla van apareciendo que dato es el que debe de ser introducido en cada momento formándose únicamente de forma automática la matriz  $[S( )]$  .

Todos los datos, son almacenados adimensionalmente. El factor de adimensionamiento de las longitudes es  $[L1]$  , definido como el inverso de la distancia entre los dos primeros nodos.

[X 2] DATOS GEOTECNICOS DE LOS MATERIALES

Se pueden considerar hasta seis materiales diferentes si -  
tuados en estratos horizontales.

Las variables que se requieren para definir a los materiales  
en este modelo son las siguientes

- Densidad
- Coeficiente de Empuje en reposo
- $P_c$
- Módulo de elasticidad inicial en la dirección X EX
- Variación del módulo de elasticidad  $E_x$  con la profundidad
- Módulo de deformación transversal inicialmente  $G_0$ .
- Variación de  $G_t$  con la profundidad
- Relación entre los módulos de elasticidad en las direcciones  
X e Y,  $[E_x/E_y]$
- Factor K
- D m
- $\phi_E$
- Cota superior de cada material.

Todos estos datos quedan almacenados adimensionalmente en la  
matriz  $[M (M1, 12)]$ , siendo  $[G]$  junto a  $[L1]$  el nuevo factor nece-  
sario para su adimensionamiento.

$$G = \frac{L1}{\text{Densidad} \times 1000}$$

[X 3] CONDICIONES DE CONTORNO

En este programa quedan definidas las condiciones de contorno tanto en desplazamientos como de fuerzas exteriores. Para ello se definen las siguientes matrices:

$[C\phi (C5)]$  enumeración de nodos situados en el contorno.

$[C1( )]$  indica si los desplazamientos de cada nodo son o no libres

$[C2( )]$  expresa el valor de los desplazamientos no libres

$[C4(C3)]$  determina los nodos con cargas exteriores

$[V( )]$  y  $[U( )]$  valor de las fuerzas verticales y horizontales.

[X 5] FORMACION DE CUADRILATEROS

El programa se dedica a agrupar automáticamente de la forma más idónea los elementos triangulares, formando cuadriláteros para que al final de cada escalón de carga se promedien los resultados obtenidos en los triángulos que componen cada cuadrilátero. Asimismo se forma la matriz  $[P2( )]$  que expresa el valor de  $P_0$  de cada cuadrilátero y la matriz  $[B( )]$  en la que se almacena el centro de gravedad de cada cuadrilátero.

[X 54] CONTORNO DE LA MALLA

Obtenemos y almacenamos los nodos que están situados en el contorno de la malla  $[P9( )]$  y el nodo más alejado verticalmente  $[C]$  y horizontalmente  $[A]$ , para facilitar el posterior dibujo de la malla.

[X 4] DIBUJO DE LA MALLA

Mediante el PLOTTER incorporado al ordenador, se procede a dibujar en la escala deseada el dibujo completo de la malla y de las diferentes particiones en las que se encuentra dividida.

2-2.- RESOLUCION DE LA MALLA

Una vez que han sido almacenados en un fichero fijo, cuyo nombre es el nombre de la malla  $[B\$/]$ , todos los datos de la malla, se inicia una serie de programas encadenados que resuelven totalmente el problema, dándonos los resultados intermedios de cada escalón, a través de la impresora y dibujándolos con el PLOTTER.

El método empleado en la resolución del sistema es el de las particiones, de esta forma la matriz de rigidez del sistema queda formada por una serie de submatrices  $[K( )]$  y  $[C( )]$  que ensambladas forman una matriz de rigidez en banda.

Estas submatrices son las que al irse invirtiendo y operando entre sí resuelven el sistema planteado.

[X 0] LECTURA DE LOS DATOS GEOMETRICOS

Una vez que recibe el nombre de la malla  $[B\#]$ , procede a incorporar en la memoria todos los datos geométricos y a irlos escribiendo por la impresora. Así mismo le introducimos el valor del " SCALAR POINT " que nos define el tamaño que queremos dibujar la malla, de los valores de las escalas de los desplazamientos y de las tensiones.

[X 6] LECTURA DE LOS DATOS MATERIALES

Extrayendo del correspondiente registro los valores de las variables Geofécnicas de los materiales procede a su escritura.

[X 7] LECTURA DE LAS CONDICIONES DE CONTORNO

Procede al igual que los programas anteriores escribiendo por la impresora los valores de las cargas exteriores y las condiciones de contorno en desplazamientos.

[X 51] FORMACION DE LA MATRIZ  $[B( )]$ 

Se define para cada elemento su matriz  $[B(4,7)]$  que nos relaciona las deformaciones con los desplazamientos y es almacenada en el fichero  $[B 1]$  semitemporal.

[X 52] PARAMETROS ELASTICOS

Se obtienen para cada elemento los valores de sus variables Geotécnicas elásticas, que son tres:

[E1] Módulo de elasticidad en la dirección X.

[E2] Módulo de elasticidad en dirección Y.

[G2] Módulo de deformación transversal.

[X 53] PARAMETROS PLASTICOS

Se obtienen en este programa los seis parámetros plásticos en función de las variables Geotécnicas de los materiales que definen el comportamiento plástico de cada uno de los elementos.

$$[A] = \frac{(2 - 3/2 \cdot r + 1/4 \cdot r^2)}{E_x}$$

$$[B] = \frac{(4-r)}{4 \cdot E_x}$$

$$[C] = \frac{1}{G_1}$$

$$[D] = P_0 \cdot D_M \cdot \left( \frac{1-K_0}{2} \right)$$

$$[E] = P_0 \cdot D_M \cdot \left( \frac{1-K_0}{2} \right) \cdot \operatorname{tg} \phi_e$$

$$[C_1] = P_c \cdot K + P_0 \cdot D_M \cdot \left( \frac{1+K_0}{2} \right) \cdot \operatorname{tg} \phi_e$$

Todos estos parámetros plásticos, al igual que los elásticos son almacenados para su posterior utilización en el fichero [B 1] .

### [X 9] FORMACION DE [R ( )] Y [D ( )] EN LA FASE ELASTICA

Con este programa se inicia la resolución del problema.

Las matrices  $[R( )]$  y  $[D( )]$  que han sido desarrolladas anteriormente, relacionan las tensiones con las deformaciones ( matriz de rigidez ) y las tensiones con los desplazamientos nodales, respectivamente.

Estas matrices son almacenadas en un nuevo fichero, fichero temporal  $[Q , Q 1]$  , que se ha abierto en este programa y a través del cual se procede a la resolución del sistema en los programas sucesivos.

### [X 91] CREACION DE LA MATRIZ [I( )]

Esta matriz es un contador que indica en que partición se encuentra cada elemento y el orden que ocupa dentro de cada una. Resulta muy útil pues simplifica las instrucciones de localización de los nodos y elementos.

### [X 10] FORMACION DE [K( )]

A partir de las matrices de rigidez  $[R( )]$  de cada elemento, se va formando la matriz  $[K( )]$  de rigidez de cada partición.

Esta matriz expresa las relaciones de rigidez entre los nodos y elementos que forman cada partición.

Una vez que ha sido formada para cada partición, pasa a ser almacenada.

### [X 11] FORMACION DE [C( )]

Esta matriz  $[C( )]$  al igual que la anterior está formada a partir de las matrices de rigidez de cada elemento  $[R( )]$ , pero expresa las relaciones de los nodos y elementos de una partición, con las de las particiones adyacentes.

### [X 12] CARGAS CONCENTRADAS Y PESO PROPIO

En este programa se forma la matriz columna de términos independientes  $[F( )]$  para cada partición.

Que expresa los valores de las fuerzas aplicadas en cada nodo ya sean cargas concentradas y de peso propio, este último, en los casos que se deba de considerar.

### [X 13] CONDICIONES DE CONTORNO

Se introducen en este programa las condiciones de contorno en desplazamientos en las matrices  $[K( )]$ ,  $C( )$  y  $F( )$ .

El método adoptado ha sido el de anular todos los términos de las filas y columnas correspondientes menos el término de la diagonal de la matriz de rigidez general que se convierte en la

unidad y realizando en la matriz  $[F( )]$  las modificaciones pertinentes.

#### [X 14] y [X 15] RESOLUCION DEL SISTEMA

Estos dos programas efectúan la resolución del sistema, mediante el sistema de proporciones, como se ha mencionado anteriormente.

Obteniéndose la matriz  $[U( )]$  que indica los desplazamientos de los nodos de cada partición.

#### [X 16] OBTENCION DE LAS TENSIONES EN LOS TRIANGULOS

Como su título indica, mediante el producto de los desplazamientos de cada elemento  $[U 1( )]$  y la matriz  $[D( )]$ , se van obteniendo las tensiones  $[F 1( )]$  las tensiones principales de los mismos.

Todos estos resultados van siendo escritos a través de la impresora.

#### [X 17] RESIDUOS

Mediante los residuos que se obtienen en este programa, se puede apreciar el condicionamiento del sistema.

En este programa se finaliza la primera parte del programa que ha sido llamada Fase elástica.

### [X 18] OBTENCION DE LAS TENSIONES DE LOS CUADRILATEROS

Promediando las tensiones en los triángulos forman cada cuadrilátero se obtienen las tensiones en los mismos que son escritas por las impresoras y almacenadas.

### [X 19] FACTOR DE PLASTICIDAD [P 1]

Este factor que se definió con anterioridad nos indica la situación de cada cuadrilátero frente a su plastificación.

Para ello se comparan las tensiones de cada uno de ellos con el criterio de rotura y se calcula que elemento posee un mayor valor de P 1, pues este cuadrilátero será el que inicie primero su rotura o plastificación.

### [X 20] FORMACION DE NUEVOS FICHEROS PARA [D( ) , R( ) , F( ) , K( ) , C( )]

Estos ficheros almacenan estas matrices para poderlas utilizar en la fase de plastificación, pues a medida que se realiza esta segunda fase se van formando nuevas matrices de rigidez en

plasticidad y que se deben de superponer a las elásticas, por lo que interesa guardar estas últimas en otro lugar.

[X 21] OBTENCION DE LA MATRIZ [F ( )] MINORADA Y DEFINICION DE [N 3]

Gracias al factor de plasticidad obtenido en [X 191] se puede saber el elemento cuadrangular que inicia la rotura y con qué coeficiente de minoración de cargas se inicia ésta [N]

De esta forma minoramos las fuerzas aplicadas mediante este coeficiente y por el número de escalones plásticos [N 3] que se van a efectuar en este caso.

[X 23] MINORACION DE [F 2( ), y U( )]

Se prosiguen las minoraciones de las matrices de tensiones y desplazamientos quedando definida de esta forma la fase elástica del proceso.

Efectuándose su escritura por la impresora.

[X 22] FORMACION DE [P 1( )]

La matriz [P 1(N,3)] define en sus tres columnas los valores actuales y previsibles de los coeficientes de plasticidad.

La primera columna expresa el valor de dicho coeficiente.

La segunda columna indica el valor previsto en el siguiente escalón de carga.

La tercera y última está formada por el factor de plasticidad.

Gracias a ello se puede saber en todo momento cuales son los elementos que se hallan plastificados y cuales lo van a estar en el siguiente escalón. Todo ello queda escrito por la impresora.

[X 24] PREVEER EL INCREMENTO DE [F 2( )]

Para ganar exactitud en el cálculo, en la parte plástica resulta conveniente conocer los valores que se esperan obtener en las tensiones antes de realizar el escalón de carga, pues la matriz de rigidez de la fase plástica es función de dichas tensiones, esto se efectúa en este programa y los incrementos previstos son almacenados con la forma de [F 3( )]

[X 241] FORMACION DEL NUEVO FICHERO DE [U( )] INCREMENTADAS

Como su nombre indica, con el fin de dejar de nuevo libres los ficheros utilizados durante la realización del proceso, los valores de los desplazamientos que se han ido produciendo cada escalón del proceso van siendo acumulados en un nuevo fichero

abierto para tal fin.

[X 25] FORMACION DE [R( ) y D( )] EN LA FASE PLASTICA

En los elementos que han plastificado se debe de proceder a variar, incrementando los valores de su matriz de rigidez.

Esta matriz de rigidez, como se indicó en su momento, depende del estado tensorial a que se encuentra sometido dicho elemento, en este escalón.

Una vez que es calculada la matriz [R( )] se efectúa su producto por el factor de plasticidad y es almacenada en los mismos ficheros que cuando se calculó por primera vez dicha matriz, ficheros operacionales para la resolución del sistema.

Lo mismo sucede con la matriz [D( )].

[X 251] FORMAR EL INCREMENTO DE [R( )] EN CADA ESCALON

En cada escalón se van incrementando los valores de la matriz de rigidez de los elementos que han sufrido algún cambio, debido a la plastificación de los mismos. En este programa se forman estos incrementos para que sean incorporados a la matriz de rigidez general del sistema.

[X 26] FORMACION EN LA FASE PLASTICA DE [K( )]

Se opera igual que en el programa [X-10] , incrementándose las matrices [K( )] con los nuevos valores de las matrices [R( )] .

[X 27] FORMACION EN LA FASE PLASTICA DE [C( )]

Se efectúa igual que el programa anterior y como se indicó en el programa [X 11] .

El programa sigue volviendo a recorrer todos aquellos programas que realizan la resolución del sistema [X-12, X-13, X-14, X-15] saltando desde este último a uno nuevo [X-31] en el cual obtenemos los incrementos de tensiones de cada triángulo.

[X 31] INCREMENTO DE LAS TENSIONES EN LOS TRIANGULOS DURANTE

ESTE ESCALON DE CARGA

Una vez resuelto el sistema para este escalón de cargas, se acaba de obtener los incrementos de los desplazamientos, lo cuál nos permite sumándolos a los corrimientos ocurridos anteriormente, obtener las tensiones en cada elemento, multiplicando los desplazamientos por la matriz [D( )] .

### [X 33] TENSIONES EN LOS CUADRILATEROS

Conocidas las tensiones en los elementos triangulares, se promedian las tensiones en los cuadriláteros y son escritas por la impresora como resultados parciales del proceso de cálculo.

### [X 34] FORMACION DE [P1( )] EN LA FASE PLASTICA

En [X-22] se efectuó el cálculo de [P1( )] en el primer escalón, por ser el inicial se debió de operar de forma diferente para prever los incrementos esperados del factor de plasticidad.

En los siguientes escalones se efectúa el cálculo de forma distinta, tal como se realiza en este programa, obteniéndose el incremento previsto en función de los ocurridos en los anteriores escalones.

Una vez efectuado el cálculo completo de [P1( )] se procede a dibujar los resultados parciales mediante los programas que se detallan a continuación.

### [X-35] DIBUJO DE LOS INCREMENTOS DE LOS CORRIMIENTOS

En cada escalón se dibujan los desplazamientos de los nodos del contorno y a la escala que se determinó en el programa

[X-0] .

[X-36] DIBUJO DE LOS ELEMENTOS PLASTIFICADOS

Mediante una X se procede a marcar los nodos de los elementos que han plastificado en este escalón.

[X-37] DIBUJO DE LAS TENSIONES TOTALES

Se dibuja a la escala que también se definió en [X-0] los ejes principales de la elipse de tensiones, con su inclinación correspondiente.

Una vez finalizado un escalón se enlaza de nuevo con [X-25] para proceder a un nuevo escalón tantos como se indiquen [X-0] .

### 3.- CUADRILATEROS.

#### 3-1.- Introducción.

Como se indicó en el capítulo IV los elementos triangulares en los procesos sin drenaje no resultaron convenientes por lo que se optó por su sustitución por otros más deformables, eligiéndose los cuadriláteros.

Este cambio obligó a rehacer la serie de programas de ordenador, - aunque el proceso de cálculo seguido básicamente no se modificó.

#### 3-1-2.- FORMACION DE LA MALLA, ENTRADA DE DATOS.

La primera serie de programas realizan la formación de la malla de una forma automática.

#### [E1] FORMACION DE LA MALLA - Datos Geométricos.

En este programa se inicia la formación de los datos geométricos de la malla que se continúan en [E3] .

La formación es automática, únicamente son necesarias para la formación de las matrices que nos definen los datos geométricos  $[X(N2,2)]$  ,  $[S(N1,2)]$  ,  $[NO(N1,4)]$  ,  $[P(P0,4)]$

el introducir el número de pisos  $[R1]$  y el número de filas

$[R2]$  así como las separaciones entre cada uno de ellos -

$[R3( )]$  y  $R4( )$

En este primer programa se forman y almacenan las matrices siguientes.

$[S(N2.2)]$  las dos dimensiones de cada elemento  
 $[X(N1.2)]$  coordenadas de los nodos

### [E3] FORMACION DE LA MALLA ( continuación )

Siguiendo lo iniciado en [E1] son formadas en este programa las siguientes matrices.

$[NO(N1,4)]$  nodos que forman cada elemento.  
 $[P(P\phi,4)]$  primer y último nodo, primero y último elemento de cada partición.

### [E2] DATOS GEOTECNICOS DE LOS MATERIALES

Se pueden considerar hasta seis materiales diferentes situados en estratos horizontales.

Las variables que se requieren para definir a los materiales en este modelo son las siguientes

- Densidad
- Coeficiente de Empuje en reposo
- $P_c$
- Módulo de elasticidad inicial en la dirección  $X$   $E_x$
- Variación del módulo de elasticidad  $E_x$  con la profundidad
- Módulo de deformación transversal inicialmente  $G_1$
- Variación de  $G_1$  con la profundidad

- Relación entre los módulos de elasticidad en las direcciones X e Y,  $E_x E_y$
- Factor K
- D m
- E
- Cota superior de cada material

Todos estos datos quedan almacenados adimensionalmente en la matriz  $[M (M1, 12)]$ , siendo  $[G]$  junto a  $[L1]$  el nuevo factor necesario para su adimensionamiento.

$$G = \frac{L1}{\text{Densidad} \times 1000}$$

[E5] FORMACION DE [B ( )]

En este programa se origina y almacena la matriz  $[B ( )]$  que expresa las coordenadas de los centros de los cuadriláteros.

[E51] FORMACION DE [P2 ( )]

Aquí se forma la matriz  $[P2( )]$  que expresa el valor de de cada cuadrilátero, valor del cual es función algunas de las variables que definen las propiedades del suelo.

[E4] CONDICIONES DE CONTORNO

En este programa quedan definidas las condiciones de contorno tanto en desplazamientos como de fuerzas exteriores. -  
Para ello se definen las siguientes matrices:

$[C (C5)]$  enumeración de nodos situados en el contorno.

$[C1( )]$  indica si los desplazamientos de cada nodo son o no libres

$[C2( )]$  expresa el valor de los desplazamientos no libres.

$[C4(C3)]$  determina los nodos con cargas exteriores

$[V( )]$  y  $[U( )]$  valor de las fuerzas verticales y horizontales.

[E41] CONTORNO DE LA MALLA

Obtenemos y almacenamos los nodos que están situados en el

contorno de la malla [P9( )] y el nodo más alejado verticalmente [C] y horizontalmente [A] , para facilitar el posterior dibujo de la malla.

### 3-1-2.- RESOLUCION DE LA MALLA

Una vez que han sido almacenados en un fichero fijo, cuyo nombre es el nombre de la malla [B#] , todos los datos de la malla, se inicia una serie de programas encadenados que resuelven totalmente el problema, dándonos los resultados intermedios de cada escalón, a través de la impresora y dibujándolos con el PLOTTER.

El método empleado en la resolución del sistema es el mismo que ha sido utilizado, para el caso de elementos triangulares, modificándose los programas para adaptarlos a los elementos cuadrangulares.

### [EO] LECTURA DE LOS DATOS GEOMETRICOS

Una vez que recibí el nombre de la malla [B#] , procede a incorporar en la memoria todos los datos geométricos y a irlos escribiendo por la impresora. Así mismo le introducimos el valor del " SCALAR POINT " que nos define el tamaño que queremos dibujar la malla, de los valores de las escalas de los desplazamientos y de las tensiones.

[E6] LECTURA DE LOS DATOS MATERIALES

Extrayendo del correspondiente registro los valores de las variables Geotécnicas de los materiales procede a su escritura.

[E7] LECTURA DE LAS CONDICIONES DE CONTORNO

Procede al igual que los programas anteriores escribiendo por la impresora los valores de las cargas exteriores y las condiciones de contorno en desplazamientos.

[E 52] FORMACION DE TODOS LOS PARAMETROS DE LOS ELEMENTOS

En este programa se calculan para cada elemento una serie de parámetros que tanto en la fase elástica como plástica facilitan el uso de las variables geotécnicas de los materiales, estos parámetros son:

Parámetros elásticos

[E1] - Módulo de elasticidad en la dirección X

[E2] - Módulo de elasticidad en la dirección Y

[G2] - Módulo transversal.

Parámetros plásticos

$$[A] = \frac{(2 - \frac{3}{2} \cdot r + \frac{1}{4} \cdot r^2)}{E_x}$$

$$[B] = \frac{(4-r)}{4E_x}$$

$$[C] = \frac{1}{G_x}$$

$$[D] = P_0 \cdot D_M \cdot \left( \frac{1 - \kappa_0}{2} \right)$$

$$[E] = P_0 \cdot D_M \left( \frac{1 - \kappa_0}{2} \right) \cdot \text{tg } \phi_e$$

$$[C_1] = P_0 \cdot K + P_0 \cdot D_M \left( \frac{1 + \kappa_0}{2} \right) \cdot \text{tg } \phi_e$$

Todos estos parámetros son almacenados para su posterior utilización en el fichero pseudo temporal [B1]

### [E9] FORMACION DE [R ( ) ] Y [D ( ) ] EN LA FASE ELASTICA

Con este programa se inicia la resolución del problema.

Las matrices [R ( ) ] y [D ( ) ] que han sido desarrolladas anteriormente, relacionan las tensiones con las deformaciones ( matriz de rigidez ) y las tensiones con los desplazamientos nodales, respectivamente.

Estas matrices son almacenadas en un nuevo fichero, fichero temporal [Q , Q 1] , que se ha abierto en este programa y a través del cual se procede a la resolución del sistema en los programas sucesivos.

### [E 10] FORMACION DE [K ( ) ]

A partir de las matrices de rigidez [R ( ) ] de cada elemento, se va formando la matriz [K ( ) ] de rigidez de cada partición.

Esta matriz expresa las relaciones de rigidez entre los nodos y elementos que forman cada partición.

Una vez que ha sido formada por cada partición, pasa a ser almacenada.

### [E 11] FORMACION DE [C( )]

Esta matriz  $[C( )]$  al igual que la anterior está formada a partir de las matrices de rigidez de cada elemento  $[R( )]$ , pero expresa las relaciones de los nodos y elementos de una partición, con las de las particiones adyacentes.

### [E 12] CARGAS CONCENTRADAS Y PESO PROPIO

En este programa se forma la matriz columna de términos independientes  $[F( )]$  para cada partición.

Que expresa los valores de las fuerzas aplicadas en cada nodo ya sean cargas concentradas y de peso propio, éste último, en los casos que se deba de considerar.

### [E 13] CONDICIONES DE CONTORNO

Se introducen en este programa las condiciones de contorno en desplazamientos en las matrices  $[K( )]$ ,  $C( )$  y  $F( )$ .

El método adoptado ha sido el de anular todos los términos de las filas y columnas correspondientes menos el término de la diagonal de la matriz de rigidez general que se convierte en la unidad y realizando en la matriz  $[F( )]$  las modificaciones pertinentes.

### [E14] y [E15] RESOLUCION DEL SISTEMA

Estos dos programas efectúan la resolución del sistema, mediante el sistema de proporciones, como se ha mencionado anteriormente.

Obteniéndose la matriz  $[U( )]$  que indica los desplazamientos de los nodos de cada partición.

### [E 16] OBTENCION DE LAS TENSIONES EN LOS CUADRILATEROS

Como su título indica, mediante el producto de los desplazamientos de cada elemento  $[U 1( )]$  y la matriz  $[D( )]$ , se van obteniendo las tensiones  $[F 1( )]$  las tensiones principales de los mismos.

Todos estos resultados van siendo escritos a través de la impresora.

### [E 17] RESIDUOS

Mediante los residuos que se obtienen en este programa, se puede apreciar el condicionamiento del sistema.

En este programa se finaliza la primera parte del programa que ha sido llamada Fase elástica.

[E 19] FACTOR DE PLASTICIDAD [P 1]

Este factor que se definió con anterioridad nos indica la situación de cada cuadrilátero frente a su plastificación.

Para ello se comparan las tensiones de cada uno de ellos con el criterio de rotura y se calcula que elemento posee un mayor valor de [P 1], pues este cuadrilátero será el que inicie primero su rotura o plastificación.

[E 20] FORMACION DE NUEVOS FICHEROS PARA [D( ), R( ), F( ), K( ), C( )]

Estos ficheros almacenan estas matrices para poderlas utilizar en la fase de plastificación, pues a medida que se realiza esta segunda fase se van formando nuevas matrices de rigidez en plasticidad y que se deben de superponer a las elásticas, por lo que interesa guardar estas últimas en otro lugar.

[E 21] OBTENCION DE LA MATRIZ [F( )] MINORADA Y DEFINICION DE [N3]

Gracias al factor de plasticidad obtenido en X 191 se puede saber el elemento cuadrangular que inicia la rotura y con qué coeficiente de minoración de cargas se inicia ésta [N]

De esta forma minoramos las fuerzas aplicadas mediante este coeficiente y por el número de escalones plásticos  $[N\ 3]$  que se van a efectuar en este caso.

[E 23] MINORACION DE  $[F\ 2(\quad)$ , y  $U(\quad)$ ]

Se prosiguen las minoraciones de las matrices de tensiones y desplazamientos quedando definida de esta forma la fase - elástica del proceso.

Efectuándose su escritura por la impresora.

[E 22] FORMACION DE  $[P\ 1(\quad)]$

La matriz  $[P\ 1(N,3)]$  define en sus tres columnas los valores actuales y previsibles de los coeficientes de plasticidad.

La primera columna expresa el valor de dicho coeficiente.

La segunda columna indica el valor previsto en el siguiente escalón de carga.

La tercera y última está formada por el factor de plasticidad.

Gracias a ello se puede saber en todo momento cuales son los elementos que se hallan plastificados y cuales lo van a estar en el siguiente escalón. Todo ello queda escrito por la impresora.

[E 24] PREVEER EL INCREMENTO DE [F 2( )]

Para ganar exactitud en el cálculo, en la parte plástica resulta conveniente conocer los valores que se esperan obtener en las tensiones antes de realizar el escalón de carga, pues la matriz de rigidez de la fase plástica es función de dichas tensiones. Esto se efectúa en este programa y los incrementos previstos son almacenados con la forma de [F 3( )]

[E 241] FORMACION DEL NUEVO FICHERO DE U( ) INCREMENTADAS.

Como su nombre indica, con el fin de dejar de nuevo libres los ficheros utilizados durante la realización del proceso los valores de los desplazamientos que se han ido produciendo cada escalón del proceso van siendo acumulados en un nuevo fichero abierto para tal fin.

[E 25] FORMACION DE [R( ) y D( )] EN LA FASE PLASTICA

En los elementos que han plastificado se debe de proceder a variar, incrementando los valores de su matriz de rigidez.

Esta matriz de rigidez, como se indicó en su momento, depende del estado tensorial a que se encuentra sometido dicho elemento, en este escalón.

Una vez que es calculada la matriz  $[R( )]$  se efectúa su producto por el factor de plasticidad y es almacenada en los mismos ficheros que cuando se calculó por primera vez dicha matriz, ficheros operacionales para la resolución del sistema.

Lo mismo sucede con la matriz  $[D( )]$ .

#### [E 25] FORMAR EL INCREMENTO DE $R( )$ EN CADA ESCALON

En cada escalón se van incrementando los valores de la matriz de rigidez de los elementos que han sufrido algún cambio, debido a la plastificación de los mismos. En este programa se forman estos incrementos para que sean incorporados a la matriz de rigidez general del sistema.

#### [E 26] FORMACION EN LA FASE PLASTICA DE $[K( )]$

Se opera igual que en el programa X-10 , incrementándose las matrices  $[K( )]$  con los nuevos valores de las matrices  $[R( )]$  .

#### [E 27] FORMACION EN LA FASE PLASTICA DE $[C( )]$

Se efectúa igual que el programa anterior y como se indicó en el programa [E 11].

El programa sigue volviendo a recorrer todos aquellos programas que realizan la resolución del sistema [E 12, E 13, E 14, E 15] saltando desde éste último a uno nuevo [E 31] en el cual obtenemos los incrementos de tensiones de cada triángulo.

[E 31] INCREMENTO DE LAS TENSIONES EN LOS CUADRILATEROS DURANTE ESTE ESCALON DE CARGA

Una vez resuelto el sistema para este escalón de cargas, se acaba de obtener los incrementos de los desplazamientos, los cuál nos permite sumándolos a los corrimientos ocurridos anteriormente, obtener las tensiones en cada elemento, multiplicando los desplazamientos por la matriz  $[D( \quad )]$ .

[E 34] FORMACION DE  $[P1( \quad )]$  EN LA FASE PLASTICA

En [E 22] se efectuó el cálculo de  $[P1( \quad )]$  en el primer escalón, por ser el inicial se debió de operar de forma diferente para prever los incrementos esperados del factor de plasticidad.

En los siguientes escalones se efectúa el cálculo de forma distinta, tal como se realiza en este programa, obteniéndose el incremento previsto en función de los ocurridos en los

anteriores escalones.

Una vez efectuado el cálculo completo de  $[P1( )]$  se procede a dibujar los resultados parciales mediante los programas que se detallan a continuación.

### [E 35] DIBUJO DE LOS INCREMENTOS DE LOS CORRIMIENTOS

En cada escalón se dibujan los desplazamientos de los nodos del contorno y a la escala que se determinó en el programa  $[X0]$ .

### [E 36] DIBUJO DE LOS ELEMENTOS PLASTIFICADOS

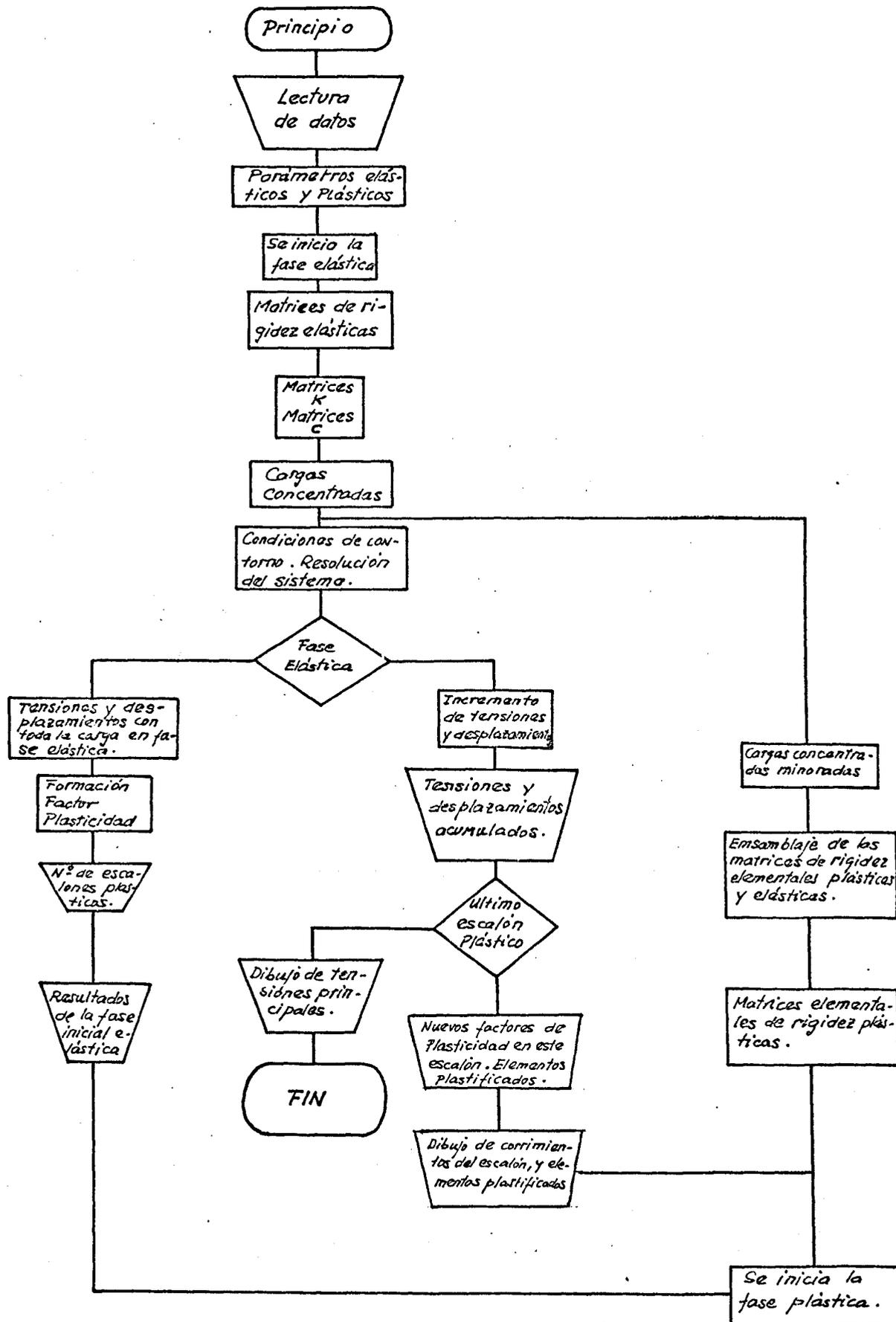
Mediante una  $[X]$  se procede a marcar los nodos de los elementos que han plastificado en este escalón.

### [E 37] DIBUJO DE LAS TENSIONES TOTALES

Se dibuja a la escala que también se definió en  $[E0]$  los ejes principales de la elipse de tensiones, con su inclinación correspondiente.

Una vez finalizado un escalón se enlaza de nuevo con  $[E 25]$  para proceder a un nuevo escalón tantos como se indiquen  $[E0]$ .

4.- ORGANIGRAMA.



5.- LISTADO DE PROGRAMAS

[E1]

```

PRINT "FORMACION DE LA MALLA (E1)"
COM B$, R1, R2
INPUT "NOMBRE DE LA MALLA", B$
ATA LOAD DC OPEN R B$
PRINT "NOMBRE DE LA MALLA", B$
EM X=MATRIZ DE LAS COORDENADAS DE LOS NODOS
EM N0=MATRIZ DE LOS NODOS QUE FORMAN CADA ELEMENTO
EM N1=NUMERO DE ELEMENTOS
EM N2=NUMERO DE NODOS
REM P0=NUMERO DE PARTICIONES
REM P()=PRIMER, ULTIMO ELEMENTO, PRIMER, ULTIMO NODO DE CADA PARTICION
REM S()= (A, B)
DIM S(200, 2), R3(10), R4(25), X(250, 2)
INPUT "NUMERO DE PISOS (NO. DE NODOS EN CADA COLUMNA)", R1
INPUT "NUMERO DE FILAS (NO. DE NODOS EN CADA PISO)", R2
MAT REDIM R3(R1), R4(R2), S((R1-1)*(R2-1), 2), X(R1*R2, 2)
FOR N=1 TO R1
INPUT "DISTANCIAS ENTRE PISOS", R3(N):NEXT N
OR N=1 TO R2
INPUT "DISTANCIAS ENTRE COLUMNAS", R4(N):NEXT N
N2=R1*R2:N1=(R1-1)*(R2-1):L1=1/R3(2):P0=R2
FOR N=1 TO R1:R3(N)=R3(N)*L1/2:NEXT N
FOR N=1 TO R2:R4(N)=R4(N)*L1/2:NEXT N
N=0:FOR I=1 TO R2-1:FOR J=1 TO R1-1:N=N+1
(N, 1)=R4(I+1)-R4(I):S(N, 2)=R3(J+1)-R3(J):NEXT J:NEXT I
OR J=1 TO R1:FOR I=1 TO R2
X(R1*(I-1)+J, 1)=R4(I)*2:X(R1*(I-1)+J, 2)=R3(J)*2:NEXT I:NEXT J
ATA SAVE DC R1, R2, L1, G, N1, N2, P0:DATA SAVE DC R3(), R4():DATA SAVE DC S():DAT
VE DC X()
ORD DC R"E3"

```

[E2]

```

COM B#,R1,R2 :PRINT "DATOS DE LOS MATERIALES (E2)"
EM M()= DATOS DE CADA TIPO DE MATERIAL
EM M0()=MATERIAL A QUE PERTENECE CADA ELEMENTO
DATA LOAD DC OPEN R B# :DATA LOAD DC R1,R2,L1,G,N1,N2,P0
DIM M(6,12),M0(250),P2(250),B(250,2)
MAT REDIM M0(N1)
INPUT "NUMERO DE MATERIALES DIFERENTES",M1:SELECT PRINT 005
FOR I=1 TO M1:PRINT "ELEMENTOS CON EL MATERIAL DE TIPO",I
INPUT "PRIMER Y ULTIMO ELEMENTO",S1,S2
FOR J=S1 TO S2:M0(J)=I:NEXT J:NEXT I
SELECT PRINT 005 :PRINT "ELEMENTO TIPO DE MATERIAL"
FOR I=1 TO N1:PRINT ,I,M0(I):NEXT I
FOR N=1 TO M1
MAT REDIM M(M1,12)
INPUT "DENSIDAD",M(N,1)
INPUT "COEF. EMPUJE EN REPOSO",M(N,2)
INPUT "PC/P0",M(N,3)
INPUT "MODULO EX/P0",M(N,4)
INPUT "MODULO EX INICIAL",M(N,11)
INPUT "RELACION EX/EY",M(N,5)
INPUT "G0 INICIAL",M(N,12)
INPUT "G/P0",M(N,6)
INPUT "K",M(N,7)
INPUT "DM",M(N,8)
INPUT "OE",M(N,9)
INPUT "COTA SUPERIOR DE ESTE MATERIAL",M(N,10)
PRINT USING 280 ,N,M(N,1),M(N,2),M(N,3),M(N,11)
% MATERIAL= # DENSIDAD=-##.### K0=-#.### PC=-#.### E0=####.##
PRINT USING 300, M(N,4),M(N,5),M(N,12),M(N,6),M(N,7)
% EX=#####.## EX/EY=####.### G0=####.## G=#####.## K=-####.##
PRINT USING 320,M(N,8),M(N,9),M(N,10)
% DM=-##.## OE=##.## COTA SUPERIOR=###.###
NEXT N
G=L1/M(1,1)/1000 :G=ABS(G):L1=ABS(L1)
FOR N=1 TO M1
M(N,1)=M(N,1)*G/L1 :M(N,10)=M(N,10)*L1:M(N,11)=M(N,11)*G:M(N,12)=M(N,12)*G
NEXT N
MAT REDIM B(N1,2),P2(N1):MAT B =ZER:MAT P2=ZER
D BACKSPACE BEG :DATA SAVE DC R1,R2,L1,G,N1,N2,P0
S DSKIP 5:DATA SAVE DC M1:DATA SAVE DC M(),M0()
LOAD DC R"E5"

```

[E3]

```

PRINT "FORMACION DE LA MALLA (E3) CONT. "
COM B#, R1, R2
DATA LOAD DC OPEN R B#
REM X=MATRIZ DE LAS COORDENADAS DELOS NODOS
REM N0=MATRIZ DE LOS NODOS QUE FORMAN CADA ELEMENTO
REM N1=NUMERO DE ELEMENTOS
REM N2=NUMERO DE NODOS
REM P0=NUMERO DE PARTICIONES
REM P()=PRIMER, ULTIMO ELEMENTO, PRIMER, ULTIMO NODO DE CADA PARTICION
REM S()= (A, B)
DIM N0(250, 4), R3(10), R4(25), P(26, 4)
DATA LOAD DC R1, R2, L1, G, N1, N2, P0
MAT REDIM P(R2+1, 4), N0((R1-1)*(R2-1), 4)
MAT P=ZER: FOR I=2 TO R2
P(I, 1)=(I-2)*(R1-1)+1:P(I, 2)=(I-1)*(R1-1)
P(I, 3)=(I-2)*R1+1:P(I, 4)=(I-1)*R1:NEXT I:P(R2+1, 3)=(R2-1)*R1+1:P(R2+1, 4)=R2
P(R2+1, 1)=P(R2, 1):P(R2+1, 2)=P(R2, 2)
N=0: FOR I=1 TO R2-1:FOR J =1 TO R1-1:N=N+1
N0(N, 1)=(I-1)*R1+J:N0(N, 2)=I*R1+J:N0(N, 3)=I*R1+J+1:N0(N, 4)=(I-1)*R1+J+1:NEXT
NEXT I
DBACKSPACE BEG : DSKIP 4:DATA SAVE DC N0():DATA SAVE DC P()
LOAD DC R"E2"

```

[E5]

```
RINT "FORMACION DE B() (E5)"
COM B$, R1, R2
DIM B(200, 2), N0(200, 4), X(250, 2)
DATA LOAD DC OPEN R B$:DATA LOAD DC R1, R2, L1, G, N1, N2, P0
MAT REDIM X(N2, 2), N0(N1, 4), B(N1, 2)
SKIP 2:DATA LOAD DC X():DATA LOAD DC N0()
FOR N=1 TO N1:FOR I=1 TO 2
B(N, I)=X(N0(N, 1), I)+(X(N0(N, 3), I)-X(N0(N, 1), I))/2
EXT I:NEXT N
SKIP 3:DATA SAVE DC B()
LOAD DC R"E51"
```

[E51]

```
RINT "FORMACION DE P2() (E51)"
COM B$, R1, R2
IM P2(200), B(200, 2), M0(200), M(6, 12), P9(50)
DATA LOAD DC OPEN R B$:DATA LOAD DC R1, R2, L1, G, N1, N2, P0
MAT REDIM P2(N1), B(N1, 2)
SKIP 5
DATA LOAD DC M1
MAT REDIM M(M1, 12), M0(N1)
DATA LOAD DC M(), M0()
DATA LOAD DC B()
FOR N=1 TO N1
  P2(N)=- (M(M0(N), 10)-B(N, 2))*M(M0(N), 1)
  IF M0(N)=1 THEN 170
  FOR J=M0(N) TO 2 STEP -1
    P2(N)=P2(N)-(M(J-1, 10)-M(J, 10))*M(J-1, 1)
  NEXT J
NEXT N
DATA SAVE DC P2()
LOAD DC R"E4"
```

[E4]

```

COM B#,R1,R2:PRINT "CONDICIONES DE CONTORNO (E4)"
REM C5= NUM. DE NODOS EN EL CONTORNO
REM C0()= NODOS EN EL CONTORNO
REM C1()=1,0 INDICA SI LOS DESPLAZAMIENTOS SON LIBRES O NO
REM C2()=DELPLAZAMIENTOS DE LOS NODOS DEL CONTORNO
DIM C0(30),C1(30,2),C2(30,2),C4(20),V(20),U(20)
ATA LOAD DC OPEN R B#:DATA LOAD DC R1,R2,L1,G,N1,N2,P0
C5=2*R1+R2-2
MAT REDIM C0(C5),C1(C5,2),C2(C5,2)
FOR I=1TO C5
INPUT "NUMERO DEL NODO",C0(I)
INPUT "TIPO DE APOYO,1=FIJO %, 2=FIJO Y, 0=FIJO 3=LIBRE",A
IF A=1THEN 150:IF A=2 THEN 160:IF A=3THEN 165
C1(I,1)=0:C1(I,2)=0:GOTO 170
C1(I,1)=0:C1(I,2)=1:GOTO 170
C1(I,1)=1:C1(I,2)=0:GOTO 170
C1(I,1)=1:C1(I,2)=1
NEXT I
REM CARGAS CONCENTRADAS EN LOS NODOS
PRINT
PRINT " CARGAS CONCENTRADAS EN LOS NODOS"
INPUT "NUMERO DE NODOS CON CARGAS CONCENTRADAS",C3
MAT REDIM V(C3),U(C3),C4(C3)
IF C3=0 THEN 330
MAT U=ZER
MAT V=ZER
FOR I=1TO C3
INPUT "NUMERO DEL NODO",C4(I)
INPUT "CARGA VERTICAL",V(I)
INPUT "CARGA HORIZONTAL",U(I)
SELECT PRINT 215
PRINT "NODO";C4(I),"FY=";V(I),"FX=";U(I)
V(I)=L1*V(I)*G:U(I)=L1*G*U(I):NEXT I
BACKSPACE BEG :DSKIP 10
DATA SAVE DC C5
DATA SAVE DC C0(),C1(),C2()
DATA SAVE DC C3
DATA SAVE DC C4(),U(),V()
LOAD DC R"E41"

```

[E41]

```
ELECT PRINT 005:COM B$  
PRINT "FORMACION DE P9( ) ,NODOS DEL CONTORNO (E41)"  
INPUT "NUMERO DE NODOS DEL CONTORNO",N9  
IM P9(50):MAT REDIM P9(N9)  
FOR I=1 TO N9  
INPUT "NUMERO DEL NODO",P9(I):NEXT I  
ATA LOAD DC OPEN R B$:DATA LOAD DC R1,R2,L1,G,N1,N2,P8  
SKIP 13: DATA SAVE DC N9:DATA SAVE DC P9( )  
INPUT "NODO MAS LEJANO EN HORIZONTAL",A  
INPUT "NODO MAS LEJANO EN VERTICAL",C  
DATA SAVE DC A,C  
END
```

[E0]

```

PRINT "LECTURA DE LOS DATOS GEOMETRICOS (E0)"
DOH B$, Q, Q1, T5, N7, N8, L3, L4 :SELECT PRINT @B5
PRINT "LECTURA DE LOS DATOS, (X0)": T5=0
INPUT "TIPO DE MALLA Y MATERIALES A UTILIZAR", B$
DATA LOAD DC OPEN R B$:DATA LOAD DC R1, R2, L1, G, N1, N2, P0
DIM X(250, 2), N0(200, 4), P(26, 4)
MAT REDIM X(N2, 2), N0(N1, 4), P(P0+1, 4)
SKIP 2:DATA LOAD DC X():DATA LOAD DC N0():DATA LOAD DC P():MAT X=(1/L1)*X
SELECT PRINT 215(80):PRINT HEX(0E):PRINT "          MALLA", B$:PRINT "          $
#####":PRINT :PRINT
)FOR N=1 TO N2
)PRINT "NODO"; N, "X="; X(N, 1), "Y="; X(N, 2)
)NEXT N
)PRINT
)FOR N=1 TO N1
)PRINT "ELEMENTO"; N, "NODOS "; N0(N, 1), N0(N, 2), N0(N, 3), N0(N, 4)
)NEXT N
)PRINT
)PRINT USING 190
)PARTICION 1ELEM LASTELEM 1NODO LASTNODO
)FOR N=1 TO P0
)PRINT USING 220, N, P(N+1, 1), P(N+1, 2), P(N+1, 3), P(N+1, 4)
)X ### ### ### ### ###
)NEXT N
)GOTO 480
)BACKSPACE BEG :DSKIP 14:DATA LOAD DC A, B, C, D: A=ABS(X(A, 1)):B=ABS(X(C, 2))
)IF A>B THEN 270:N7=B*1.5+.6 :GOTO 280
)N7=A+.6
)INPUT "VALOR EN CM. DEL 'SCALAR POINT'", A:N7=1000/N7
)INPUT "CON QUE UNIDADES DE LONGITUD ESTAMOS OPERANDO", R1$
)INPUT "FACTOR DE MAYORACION DE LOS CORRIMIENTOS", L3
)INPUT "ESCALA DE TENSIONES 1 TN. EQUIVALE A CM. =", L4
)SELECT PRINT 215
)PRINT HEX(0E):PRINT "ESCALAS":PRINT
)SELECT PRINT @B5:PRINT "ESCALA DE DIBUJO 1 UD. EQUIVALE A CM. =", A*N7/1000
)INPUT "ESCALA CON LA QUE QUEREMOS DIBUJAR", N7:Y=N7 :N7=N7*1000/A
)CONVERT Y TO Y$, (##, ##)
)SELECT PRINT 215(80):PRINT "ESCALA DEL DIBUJO 1 UD. EQUIVALE A CM. "="; Y:PRINT
)PRINT "FACTOR DE MAYORACION DE LOS CORRIMIENTOS"; L3:PRINT
)INPUT "UNIDAD DE TRABAJO DE LAS TENSIONES", R3$
)PRINT "ESCALA DE TENSIONES 1 TN. EQUIVALE A CM. "="; L4:B1=L4:L4=1000/A*L4
)A$="ESCALAS:":R$="DIBUJO:":U$="=" :R2$="CM. "
)PLOT C, R, <1, 1, C>, <75, 999, U>, <13, S>, C, A$)
)PLOT C, R, <1, C>, <300, 999, U>, <13, S> , C, R$):PLOT C, R, <250, 974, U>, C, R1$
C, U$), C, Y$), C, R2$)
)R$="CORRIMIENTOS":Y=Y*L3:CONVERT Y TO Y$, (####, ##)
)PLOT <1, C>, <13, S> , <100, 25 , U> , C, R$):PLOT <-150, -25, U>, C, R1$), C, U$)
)Y$), C, R2$)
)R$="TENSIONES":Y=B1:CONVERT Y TO Y$, (##, ##)
)PLOT <1, C>, C, R, <840, 999, U>, <13, S> , C, R$):PLOT <-150, -25, U>, C, R3$), C,
)C, Y$), C, R2$)
)LOAD DC R"E6"

```

[E6]

```

ELECT PRINT 005
COM B#, Q, Q1, T5, N7, N8, L3, L4 :PRINT "LECTURA DE LOS DATOS DE LOS MATERIALES (
)
EM M()= DATOS DE CADA TIPO DE MATERIAL
EM M0()=MATERIAL A QUE PERTENECE CADA ELEMENTO
DIM M(6,12),M0(200),B(200,2)
DATA LOAD DC OPEN R B# :DATA LOAD DC R1, R2, L1, G, N1, N2, F0:DSKIP 5:DATA LOAD
M1:MAT REDIM M(M1,12),M0(N1),B(N1,2)
)ATA LOAD DC M(),M0():DATA LOAD DC B()
FOR N=1 TO M1
M(N,1)=M(N,1)/G*L1 :M(N,10)=M(N,10)/L1:M(N,11)=M(N,11)/G:M(N,12)=M(N,12)/G
)SELECT PRINT 215(00):PRINT :PRINT :PRINT " DATOS DE LOS MATERIALES ":P
IT :PRINT
)PRINTUSING 120 ,N,M(N,1),M(N,2),M(N,3),M(N,11)
)MATERIAL= # DENSIDAD=-###.### K0=-#.### PC=-#.### EG=#####.##
)PRINTUSING 140, M(N,4),M(N,5),M(N,12) ,M(N,6),M(N,7)
)EX=#####.## EX/EY= #####.### G0=#####.## G=#####.## K=-#####.##
)PRINTUSING 160,M(N,8),M(N,9),M(N,10)
)DM=-###.## OE=###.## COTA SUPERIOR= ###.###
)NEXT N
)MAT B=(1/L1)*B
)GOTO 240
)PRINT :PRINT :PRINT " CENTRO DE GRAVEDAD DE LOS CUADRILATEROS "
)PRINT :PRINT :PRINT "CUADRILATERO X Y"
)FOR N=1TO N1
)PRINT N,B(N,1),B(N,2):NEXT N
)LOAD DC R "E7".

```

[E7]

```

SELECT PRINT 005
PRINT "LECTURA DE LAS CONDICIONES DE CONTORNO (E7)"
COM B#. 0, 01, T5, N7, N8, L3, L4
REM C5=NUM. DE NODOS EN EL CONTORNO
REM C0(I)=NODOS DEL CONTORNO
REM C1(I)=1, 0 INDICA SI LOS DESPLAZAMIENTOS SON LIBRES O NO
REM C2(I)= VALOR DE LOS DESPLAZAMIENTOS
DIM C0(30), C1(30, 2), C2(30, 2), C4(20), V(20), U(20)
DATA LOAD DC OPEN R B#:DATA LOAD DC R1, R2, L1, G, N1, N2, P0
PRINT :DSKIP 9
DATA LOAD DC C5
MAT REDIM C0(C5), C1(C5, 2), C2(C5, 2)
DATA LOAD DC C0(I), C1(I), C2(I)
DATA LOAD DC C3
MAT REDIM U(C3), V(C3), C4(C3)
DATA LOAD DC C4(I), U(I), V(I)
EN CONDICIONES DE CONTORNO
SELECT PRINT 215:PRINT :MAT C2=(1/L1)*C2
PRINT " CONDICIONES DE CONTORNO"
FOR I=1 TO C5
IF C1(I, 1)=1 THEN 270
IF C1(I, 2)=0 THEN 250
PRINT "NODO"; C0(I), "X="; C2(I, 1), "Y=LIBRE"
GOTO 310
PRINT "NODO"; C0(I), "X="; C2(I, 1), "Y="; C2(I, 2)
GOTO 310
IF C1(I, 2)=0 THEN 300
PRINT "NODO"; C0(I), " DESPLAZAMIENTOS LIBRES"
GOTO 310
PRINT "NODO"; C0(I), "X=LIBRE", "Y="; C2(I, 2)
NEXT I
MAT U=(1/L1/G)*U:MAT V=(1/L1/G)*V
REM CARGAS CONCENTRADAS
PRINT
PRINT " CARGAS CONCENTRADAS EN LOS NODOS"
FOR I=1 TO C3
PRINT "NODO"; C4(I), "FY="; V(I), "FX="; U(I)
NEXT I
LOAD DC R"E52"

```

[E52]

```

JM B#:SELECT PRINT @05
PRINT "FORMACION DE LOS PARAMETROS DE LOS ELEMENTOS (E52)"
SELECT D :DIM M0(200),M(6,12),P2(200),S(200,2)
DATA LOAD DC OPEN R B#:DATA LOAD DC R1,R2,L1,G,N1,N2,P0:MAT REDIM S(N1,2)
)SKIP 1 :DATA LOAD DC S()
)SKIP 3:DATA LOAD DC M1:MAT REDIM M(M1,12)
MAT REDIM M0(N1),P2(N1)
DATA LOAD DC M(),M0()
)SKIP 1:DATA LOAD DC P2()
DATA LOAD DC OPEN R "B1"
FOR N=1 TO N1
T=M0(N)
E1=M(T,4)*P2(N):E1=E1+M(T,11):E2=E1/M(T,5):G2=M(T,6)*P2(N)+M(T,12)
DATA SAVE DC E1,E2,G2,S(N,1),S(N,2) :NEXT N
FOR N=1 TO N1
A=(2-3/2*M(T,5)+1/4*M(T,5)^2)/(M(T,5)*(M(T,4)*P2(N)+M(T,11)))
B=(4-(M(T,5)))/(4*(M(T,4)*P2(N)+M(T,11)))
C=1/(M(T,6)*P2(N)+M(T,12))
D=P2(N)*M(T,8)*(1-M(T,2))*5
E=D*TAN(M(T,9))
C1=P2(N)*M(T,3)*M(T,7)+P2(N)*M(T,8)*(1+M(T,2))*5*TAN(M(T,9))
DATA SAVE DC A,B,C,D,E,C1
NEXT N:LOAD DC R"E95"

```

[E9]

```

COM B#, Q, Q1, T5, N7, N8, L3, L4
SELECT PRINT @B5
PRINT "FORMACION DE R(), D(), EN LA FASE ELASTICA (E9)"
DIM R(9, 9), D(3, 9), B(200, 2), S(200, 2), T(9, 9), M(4, 4)
DATA LOAD DC OPEN R B#:DATA LOAD DC R1, R2, L1, G, N1, N2, P8:MAT REDIM S(N1, 2), B(N
2)
Q=6005:Q1=9500:GOTO 80
INPUT "PRIMER Y ULTIMO SECTOR DEL FICHERO TEMPORAL", Q, Q1
SKIP 1:DATA LOAD DC S():DSKIP 5:DATA LOAD DC B()
FOR N=1 TO N1
DATA LOAD DC OPEN R "B1":DSKIP N-1
DATA LOAD DC E1, E2, G2
A1=S(N, 1):B1=S(N, 2):X=0:Y=0:E=E1/E2:M1=2*E*E2/(4-E):M2=2*(2-E)*E2/(4-E)
MAT D=ZER:MAT R=ZER
D(1, 1)=M1*B1*(1-Y):D(1, 3)=-M1*B1*(1-Y):D(1, 5)=-M1*B1*(1-Y):D(1, 7)=M1*B1*(1+
Y):D(1, 9)=M1*2*SQR(A1*B1):D(2, 2)=M2*A1*(1-X):D(2, 4)=M2*A1*(1+X):D(2, 6)=-M2*A1*(
1-X):D(2, 8)=-M2*A1*(1-X)
D(2, 9)=M1*2*SQR(A1*B1):D(3, 1)=-G2*A1*(1-X):D(3, 2)=-G2*B1*(1-Y):D(3, 3)=-G2*A
1+X):D(3, 4)=G2*B1*(1-Y):D(3, 5)=G2*A1*(1+X):D(3, 6)=G2*B1*(1-Y):D(3, 7)=G2*A1*(
1+X):D(3, 8)=-G2*B1*(1+Y)
MAT D=(1/(4*A1*B1))*D
A2=E1*(2-E)/(4-E):B2=E2*(4-E*E)/(4-E):C2=4*E1/(4-E)
MAT M=ZER:M(1, 1)=E1:M(1, 2)=A2:M(2, 1)=A2:M(2, 2)=B2:M(3, 3)=G2:M(4, 1)=C2:M(4, 2)
=
S1=16/3/A1/A1:S=4/A1/B1:S2=8/3/A1/A1:S3=16/3/B1/B1:S4=8/3/B1/B1
MAT REDIM R(9, 9):MAT R=ZER
R(1, 1)=+(S1)*M(1, 1)-(S )*M(1, 3)-(S )*M(3, 1)+( S3)*M(3, 3)
R(1, 2)=+(S )*M(2, 1)-(S3)*M(2, 3)-(S1)*M(3, 1)+( S )*M(3, 3)
R(2, 1)=(S)*M(1, 2)-(S1)*M(1, 3)-(S3)*M(3, 2)+(S)*M(3, 3)
R(2, 2)=(S3)*M(2, 2)-(S)*M(2, 3)-(S)*M(3, 2)+(S1)*M(3, 3)
R(1, 3)=+(-S1)*M(1, 1)-(S)*M(1, 3)-(-S)*M(3, 1)+(S4)*M(3, 3)
R(1, 4)=+(-S)*M(2, 1)-(-S4)*M(2, 3)+(S1)*M(3, 1)+(S)*M(3, 3)
R(2, 3)=(S)*M(1, 2)-(-S1)*M(1, 3)-(-S4)*M(3, 2)+(-S)*M(3, 3)
R(2, 4)=(S4)*M(2, 2)-(-S)*M(2, 3)-(S)*M(3, 2)+(-S1)*M(3, 3)
R(1, 5)=+(-S2)*M(1, 1)-(-S)*M(1, 3)-(-S)*M(3, 1)+(-S4)*M(3, 3)
R(1, 6)=+(-S)*M(2, 1)-(-S4)*M(2, 3)-(-S2)*M(3, 1)+(-S)*M(3, 3)
R(2, 5)=(-S)*M(1, 2)-(-S2)*M(1, 3)-(-S4)*M(3, 2)+(-S)*M(3, 3)
R(2, 6)=(-S4)*M(2, 2)-(-S)*M(2, 3)-(-S )*M(3, 2)+(-S2)*M(3, 3)
R(1, 7)=+(S2)*M(1, 1)-(-S)*M(1, 3)-(S)*M(3, 1)+(-S3)*M(3, 3)
R(1, 8)=+(S)*M(2, 1)-(-S3)*M(2, 3)-(S2)*M(3, 1)+(-S)*M(3, 3)
R(2, 7)=(-S)*M(1, 2)-(S2)*M(1, 3)-(-S3)*M(3, 2)+(S)*M(3, 3)
R(2, 8)=(-S3)*M(2, 2)-(S)*M(2, 3)-(-S)*M(3, 2)+(S2)*M(3, 3)
R(3, 1)=+(-S1)*M(1, 1)-(-S)*M(1, 3)-(S)*M(3, 1)+(S4)*M(3, 3)
R(3, 2)=+(S)*M(2, 1)-(S4)*M(2, 3)-(-S1)*M(3, 1)+(-S)*M(3, 3)
R(4, 1)=(-S)*M(1, 2)-(-S1)*M(1, 3)-(S4)*M(3, 2)+(S)*M(3, 3)
R(4, 2)=(S4)*M(2, 2)-(S)*M(2, 3)-(-S)*M(3, 2)+(-S1)*M(3, 3)
R(3, 3)=+(S1)*M(1, 1)-(-S)*M(1, 3)-(-S)*M(3, 1)+(S3)*M(3, 3)
R(3, 4)=+(-S)*M(2, 1)-(S3)*M(2, 3)-(S1)*M(3, 1)+(-S)*M(3, 3)
R(4, 3)=(-S)*M(1, 2)-(S1)*M(1, 3)-(S3)*M(3, 2)+(-S)*M(3, 3)
R(4, 4)=(S3)*M(2, 2)-(-S)*M(2, 3)-(-S)*M(3, 2)+(S1)*M(3, 3)
R(3, 5)=+(S2)*M(1, 1)-(-S)*M(1, 3)-(-S)*M(3, 1)+(-S3)*M(3, 3)
R(3, 6)=+(-S)*M(2, 1)-(-S3)*M(2, 3)-(S2)*M(3, 1)+(S)*M(3, 3)
R(4, 5)=(S)*M(1, 2)-(S2)*M(1, 3)-(-S3)*M(3, 2)+(-S)*M(3, 3)
R(4, 6)=(-S3)*M(2, 2)-(-S)*M(2, 3)-(S)*M(3, 2)+(S2)*M(3, 3)
R(3, 7)=+(-S2)*M(1, 1)-(-S)*M(1, 3)-(S)*M(3, 1)+(-S4)*M(3, 3)
R(3, 8)=+(S)*M(2, 1)-(-S4)*M(2, 3)-(-S2)*M(3, 1)+(S)*M(3, 3)
R(4, 7)=(S)*M(1, 2)-(-S2)*M(1, 3)-(-S4)*M(3, 2)+(S)*M(3, 3)

```

```

R(6,1)=(-5)*M(1,2)-(-52)*M(1,3)-(-54)*M(3,2)+(-5)*M(3,3)
R(6,2)=(-54)*M(2,2)-(-5)*M(2,3)-(-5)*M(3,2)+(-52)*M(3,3)
R(5,3)=+(52)*M(1,1)-(-5)*M(1,3)-(5)*M(3,1)+(-53)*M(3,3)
R(5,4)=+(5)*M(2,1)-(-53)*M(2,3)-(52)*M(3,1)+(-5)*M(3,3)
R(6,3)=(-5)*M(1,2)-(-52)*M(1,3)-(-53)*M(3,2)+(-5)*M(3,3)
R(6,4)=(-53)*M(2,2)-(-5)*M(2,3)-(-5)*M(3,2)+(-52)*M(3,3)
R(5,5)=+(51)*M(1,1)-(-5)*M(1,3)-(5)*M(3,1)+(-53)*M(3,3)
R(5,6)=+(5)*M(2,1)-(-53)*M(2,3)-(51)*M(3,1)+(-5)*M(3,3)
R(6,5)=(5)*M(1,2)-(51)*M(1,3)-(53)*M(3,2)+(5)*M(3,3)
R(6,6)=(53)*M(2,2)-(5)*M(2,3)-(5)*M(3,2)+(51)*M(3,3)
R(5,7)=+(-51)*M(1,1)-(-5)*M(1,3)-(-5)*M(3,1)+(54)*M(3,3)
R(5,8)=+(-5)*M(2,1)-(-54)*M(2,3)-(-51)*M(3,1)+(5)*M(3,3)
R(6,7)=(5)*M(1,2)-(-51)*M(1,3)-(-54)*M(3,2)+(-5)*M(3,3)
R(6,8)=(54)*M(2,2)-(-5)*M(2,3)-(5)*M(3,2)+(-51)*M(3,3)
R(7,1)=+(52)*M(1,1)-(-5)*M(1,3)-(-5)*M(3,1)+(-53)*M(3,3)
R(7,2)=+(-5)*M(2,1)-(-53)*M(2,3)-(52)*M(3,1)+(5)*M(3,3)
R(8,1)=(5)*M(1,2)-(52)*M(1,3)-(-53)*M(3,2)+(-5)*M(3,3)
R(8,2)=(-53)*M(2,2)-(-5)*M(2,3)-(5)*M(3,2)+(52)*M(3,3)
R(7,3)=+(-52)*M(1,1)-(-5)*M(1,3)-(5)*M(3,1)+(-54)*M(3,3)
R(7,4)=+(5)*M(2,1)-(-54)*M(2,3)-(-52)*M(3,1)+(5)*M(3,3)
R(8,3)=(5)*M(1,2)-(-52)*M(1,3)-(-54)*M(3,2)+(5)*M(3,3)
R(8,4)=(-54)*M(2,2)-(5)*M(2,3)-(5)*M(3,2)+(-52)*M(3,3)
R(7,5)=+(-51)*M(1,1)-(-5)*M(1,3)-(5)*M(3,1)+(54)*M(3,3)
R(7,6)=+(5)*M(2,1)-(-54)*M(2,3)-(-51)*M(3,1)+(-5)*M(3,3)
R(8,5)=(-5)*M(1,2)-(-51)*M(1,3)-(-54)*M(3,2)+(5)*M(3,3)
R(8,6)=(54)*M(2,2)-(5)*M(2,3)-(-5)*M(3,2)+(-51)*M(3,3)
R(7,7)=+(51)*M(1,1)-(-5)*M(1,3)-(-5)*M(3,1)+(53)*M(3,3)
R(7,8)=+(-5)*M(2,1)-(-53)*M(2,3)-(51)*M(3,1)+(-5)*M(3,3)
R(8,7)=(-5)*M(1,2)-(-51)*M(1,3)-(-53)*M(3,2)+(-5)*M(3,3)
R(8,8)=(53)*M(2,2)-(-5)*M(2,3)-(-5)*M(3,2)+(51)*M(3,3)
MAT R=(A1*A1*B1*B1)*R
R(9,1)=2*SQR(A1*B1)*((-M(4,1))*(-4*B1)+M(4,3))*(-4*A1)
R(9,2)=2*SQR(A1*B1)*((-M(4,2))*(-4*A1)+M(4,3))*(-4*B1)
R(9,3)=2*SQR(A1*B1)*((-M(4,1))*(+4*B1)+M(4,3))*(-4*A1)
R(9,4)=2*SQR(A1*B1)*((-M(4,2))*(-4*A1)+M(4,3))*(+4*B1)
R(9,5)=2*SQR(A1*B1)*((-M(4,1))*(+4*B1)+M(4,3))*(+4*A1)
R(9,6)=2*SQR(A1*B1)*((-M(4,2))*(+4*A1)+M(4,3))*(+4*B1)
R(9,7)=2*SQR(A1*B1)*((-M(4,1))*(-4*B1)+M(4,3))*(+4*A1)
R(9,8)=2*SQR(A1*B1)*((-M(4,2))*(+4*A1)+M(4,3))*(-4*B1)
MAT R=(1/A1/B1/16)*R:MAT T=ZER:MAT REDIM T(9,9)
FOR J=1 TO 9:FOR K=1 TO 9
  T(J,K)=.5*(R(J,K)+R(K,J)):NEXT K:NEXT J
MAT R=T
DATA LOAD DC OPEN R TEMP ,0,01:DSKIP 2*(N-1)
DATA SAVE DC D():DATA SAVE DC R():NEXT N
3LOAD DC R "E10"

```

[E10]

```

SELECT PRINT 005
PRINT "FORMACION DE K(), (E10)"
COM B#, Q, Q1, T5, L3, L4, N7, N8
DIM R(9,9), P(26,4), N0(200,4), F(23), K(23,23), Z(26)
DATA LOAD DC OPEN R B#
DATA LOAD DC R1, R2, L1, G, N1, N2, P0:MAT REDIM P(P0+1,4), N0(N1,4)
DSKIP 3:DATA LOAD DC N0():DATA LOAD DC P()
DATA LOAD DC OPEN R TEMP , Q, Q1:MAT REDIM Z(P0)
FOR J=2 TO P0+1:IF J=P0+1THEN 95 :Z=(P(J,4)-P(J,3)+1)*2+P(J,2)-P(J,1)+1:GOTO
0
Z=(P(J,4)-P(J,3)+1)*2
MAT REDIM K(Z,2), F(Z):MAT K=ZER
FOR N=P(J-1,1) TO P(J,2):IF N>0 THEN 120:N=1
K1=0:K2=0:P1=N0(N,1):P2=N0(N,2):P3=N0(N,3):P4=N0(N,4)
FOR I=1 TO 4:IF N0(N,I)<P(J,3)THEN 140:IF N0(N,I)>P(J,4)THEN 140:K1=K1+1
NEXT I
IF K1=0THEN 280:DBACKSPACE BEG :DSKIP 2*(N-1)+1:DATA LOAD DC R()
IF N<P(J,1)THEN 170:IF N>P(J,2)THEN 170:K2=1
IF P2<P(J,3)THEN 210:IF P2>P(J,4)THEN 210:S2=P2-P(J,3)+1:S2=S2*2-2
FOR I=1 TO 2:FOR F=1 TO 2:K(S2+I,S2+F)=K(S2+I,S2+F)+R(2+I,2+F):NEXT F:NEXT
I
S3=P3-P(J,3)+1:S3=S3*2-2:FOR I=1 TO 2:FOR F=1 TO 2:K(S3+I,S3+F)=K(S3+I,S3+F)
(4+I,4+F):NEXT F:NEXT I
FOR I=1 TO 2:FOR F=1 TO 2:K(S2+I,S3+F)=K(S2+I,S3+F)+R(2+I,4+F):K(S3+F,S2+I)=
S2+I,S3+F):NEXT F:NEXT I
IF P1<P(J,3)THEN 280:IF P1>P(J,4)THEN 280
S1=P1-P(J,3)+1:S1=S1*2-2:FOR I=1 TO 2:FOR F=1 TO 2:K(S1+I,S1+F)=K(S1+I,S1+F)
(1,F):NEXT F:NEXT I
S4=P4-P(J,3)+1:S4=S4*2-2:FOR I=1 TO 2:FOR F=1 TO 2:K(S4+I,S4+F)=K(S4+I,S4+F)
(6+I,6+F):NEXT F:NEXT I
FOR I=1 TO 2:FOR F=1 TO 2:K(S1+I,S4+F)=K(S1+I,S4+F)+R(1,6+F):K(S4+F,S1+I)=K(
1,S4+F):NEXT F:NEXT I
IF K2=0THEN 280:IF J=P0+1THEN 280:S5=2*(P(J,4)-P(J,3)+1)+N-P(J,1)+1
FOR I=1 TO 2:K(S1+I,S5)=R(1,9):K(S5,S1+I)=K(S1+I,S5):NEXT I
FOR I=1 TO 2:K(S4+I,S5)=R(6+I,9):K(S5,S4+I)=K(S4+I,S5):NEXT I
K(S5,S5)=R(9,9)
NEXT N:Z(J-1)=Z:DBACKSPACE BEG :DSKIP 2*N1+2*(J-2):DATA SAVE DC F():DATA SAV
E K():NEXT J
DATA SAVE DC Z()
LOAD DC R"E11"

```

[E//]

```

SELECT PRINT 005
PRINT "FORMACION DE C()", (E11)"
COM B#, Q, Q1, T5, L3, L4, N7, N8
DIM R(9, 9), P(26, 4), N0(200, 4), C(23, 23), Z(26)
DATA LOAD DC OPEN R B#
DATA LOAD DC R1, R2, L1, G, N1, N2, P0: MAT REDIM P(P0+1, 4), N0(N1, 4)
DSKIP 3: DATA LOAD DC N0(): DATA LOAD DC P()
DATA LOAD DC OPEN R TEMP , Q, Q1: MAT REDIM Z(P0)
SKIP 2*N1+2*P0: DATA LOAD DC Z()
FOR J=2 TO P0
MAT REDIM C(Z(J-1), Z(J)): MAT C=ZER
FOR N=P(J, 1) TO P(J, 2)
DBACKSPACE BEG :DSKIP 2*(N-1)+1: DATA LOAD DC R()
P1=N0(N, 1): P2=N0(N, 2): P3=N0(N, 3): P4=N0(N, 4)
S2=P2-P(J+1, 3)+1: S2=S2*2-2: S1=P1-P(J, 3)+1: S1=S1*2-2: S4=P4-P(J, 3)+1: S4=S4*2-
S4=S4*2-2: S3=P3-P(J+1, 3)+1: S3=S3*2-2
FOR I=1 TO 2: FOR F=1 TO 2: C(S1+I, S2+F)=C(S1+I, S2+F)+R(I, 2+F): NEXT F: NEXT I
FOR I=1 TO 2: FOR F=1 TO 2: C(S1+I, S3+F)=C(S1+I, S3+F)+R(I, 4+F): NEXT F: NEXT I
FOR I=1 TO 2: FOR F=1 TO 2: C(S4+I, S3+F)=C(S4+I, S3+F)+R(6+I, 4+F): NEXT F: NEXT
FOR I=1 TO 2: FOR F=1 TO 2: C(S4+I, S2+F)=C(S4+I, S2+F)+R(6+I, 2+F): NEXT F: NEXT
S5=2*(P(J, 4)-P(J, 3)+1)+N-P(J, 1)+1
FOR I=1 TO 2: C(S5, S2+I)=R(9, 2+I): NEXT I
FOR I=1 TO 2: C(S5, S3+I)=R(9, 4+I): NEXT I
NEXT N: DBACKSPACE BEG :DSKIP 2*N1+2*P0+J-1: DATA SAVE DC C()
NEXT J: LOAD DC R"E12"

```

[E/2]

```

ELECT PRINT 005
PRINT "CARGAS CONCENTRADAS Y PESO PROPIO , (E/2)":COM B#, Q, Q1, T5, N7, N8, L3, L4
DATA LOAD DC OPEN R B#:DATA LOAD DC R1, R2, L1, G, N1, N2, P0
DIM S(100, 2), N0(100, 4), P(26, 4), F(23), H(250), Z(23)
MAT REDIM S(N1, 2), N0(N1, 4), P(P0+1, 4), Z(P0)
DSKIP 1:DATA LOAD DC S():DSKIP 1:DATA LOAD DC N0():DATA LOAD DC P()
DATA LOAD DC M1
DIM M(6, 12), M0(100), V(20), U(20), C4(20)
MAT REDIM M(M1, 12), M0(N1)
DATA LOAD DC M(), M0()
DSKIP 4
DATA LOAD DC C3
MAT REDIM U(C3), V(C3), C4(C3)
DATA LOAD DC C4(), U(), V()
MAT REDIM H(2*N2):GOTO 170 :FOR E=1TO N1:FOR I=1 TO 3
H(2*N0(E, I)-1)=H(2*N0(E, I)-1)+S(E, 1)*S(E, 2)*4*0:H(2*N0(E, I))=H(2*N0(E, I))+S
I)*S(E, 2)*4*M(N0(E, 1):NEXT I:NEXT E
FOR C=1TO C3:H(2*C4(C)-1)=H(2*C4(C)-1)+U(C):H(2*C4(C))=H(2*C4(C))+V(C):NEXT
C
DATA LOAD DC OPEN R TEMP , Q, Q1:DSKIP 2*N1+2*P0:DATA LOAD DC Z()
DSPACE BEG :DSKIP 2*N1
FOR J=2TO P0+1
MAT REDIM F(2*(J-1)):MAT F= ZER
FOR T=1 TO P(J, 4)-P(J, 3)+1
F(2*T-1)=H(2*(P(J, 3)+T-1)-1):F(2*T)=H(2*(P(J, 3)+T-1)):NEXT T
DATA SAVE DC F():DSKIP 1:NEXT J
LOAD DC R"E13"

```

[E/3]

```

SELECT PRINT 005
PRINT "CONDICIONES DE CONTORNO, CEROS, (E13)":COM B#, Q, Q1, T5, N7, N8, L3, L4
DIM P(26, 4), C0(40), C1(40, 2), C2(40, 2), K(23, 23), F(23), Z(26), C(23, 23)
DATA LOAD DC OPEN R B#:DATA LOAD DC R1, R2, L1, G, N1, N2, P0:MAT REDIM P(P0+1, 4),
3)
DSKIP 4:DATA LOAD DC P():DSKIP 4:DATA LOAD DC C5:MAT REDIM C0(C5), C1(C5, 2), C
5, 2), P(P0+1, 4), Z(P0)
DATA LOAD DC C0(), C1(), C2()
DATA LOAD DC OPEN R TEMP , Q, Q1:DSKIP 2*N1+2*P0:DATA LOAD DC Z()
FOR N=1 TO C5
FOR I=1 TO 2
IF C1(N, I)>0 THEN 520
FOR J=2 TO P0+1
IF C0(N)<P(J, 3) THEN 510
IF C0(N)>P(J, 4) THEN 510
IF J=P0+1 THEN 400
DBACKSPACE BEG :DSKIP 2*N1+2*(J-2):MAT REDIM K(Z(J-1), Z(J-1)), F(Z(J-1)), C(Z
1), Z(J))
DATA LOAD DC F():DATA LOAD DC K()
IF J=P0+1 THEN 190
DBACKSPACE BEG :DSKIP 2*N1+2*P0+J-1:DATA LOAD DC C()
T=(C0(N)-P(J, 3))*2+I
FOR J1=1 TO Z(J-1)
F(J1)=F(J1)-K(J1, T)*C2(N, I)
K(T, J1)=0:K(J1, T)=0
NEXT J1
IF J=P0+1 THEN 280
FOR J1=1 TO Z(J)
C(T, J1)=0
NEXT J1
F(T)=C2(N, I):K(T, T)=1
DBACKSPACE BEG :DSKIP 2*N1+2*(J-2)
DATA SAVE DC F():DATA SAVE DC K()
DBACKSPACE BEG :DSKIP 2*N1+2*P0-1+J:DATA SAVE DC C()
IF J=2 THEN 520:DBACKSPACE BEG :DSKIP 2*N1+2*P0+J-2 : MAT REDIM C(Z(J-2), Z(
)), F(Z(J-2)) :DATA LOAD DC C()
DBACKSPACE BEG :DSKIP 2*N1+(J-3)*2:DATA LOAD DC F()
MAT K=TRN(C)
FOR J1 =1 TO Z(J-2)
F(J1)=F(J1)-K(T, J1)*C2(N, I)
K(T, J1)=0 :NEXT J1
MAT C= TRN(K):DBACKSPACE 1: DATA SAVE DC F()
DBACKSPACE BEG :DSKIP 2*N1+2*P0+J-2 : DATA SAVE DC C():GOTO 520
DBACKSPACE BEG :DSKIP 2*N1+2*(J-2):MAT REDIM K(Z(J-1), Z(J-1)), F(Z(J-1)), C(Z
), Z(J-1))
T=(C0(N)-P(J, 3))*2+I
DATA LOAD DC F():DATA LOAD DC K()
FOR J1=1 TO Z(J-1)
F(J1)=F(J1)-K(J1, T)*C2(N, I)
K(T, J1)=0:K(J1, T)=0
NEXT J1

```

```
DATA SAVE DC R2,DATA SAVE DC R3  
GOTO 320  
NEXT J  
NEXT I  
NEXT N  
LOAD DC R"E14"
```

[E14]

```

ELECT PRINT 005
PRINT "FORMACION Y ALMACENAMIENTO DE K*-1, F*, C (E14)" :COM B#, Q, Q1, T5, N7, N8,
L4
DIM S(24, 24), F1(24), Z(18), F(24), K(24, 24), C(24, 24)
DATA LOAD DC OPEN R B#: DATA LOAD DC R1, R2, L1, G, N1, N2, P0
MAT REDIM Z(P0):MAT S=ZER:MAT F1=ZER
DATA LOAD DC OPEN R TEMP , Q, Q1:DSKIP 2*N1+2*P0:DATA LOAD DC Z()
FOR J=1TO P0
DBACKSPACE BEG :MAT REDIM F(Z(J)), K(Z(J), Z(J)), S(Z(J), Z(J)), F1(Z(J)) :DSKIP
J+2*(J-1)
DATA LOAD DC F():DATA LOAD DC K()
IF J=P0 THEN 120
DBACKSPACE BEG :DSKIP 2*N1+2*P0+J:MAT REDIM C(Z(J), Z(J+1)):DATA LOAD DC C()

MAT K=K-S
MAT F=F-F1
PRINT "ESTOY INVIRTIENDO LA PARTICION", J
MAT K =INV(K), D
PRINT D
DBACKSPACE BEG :DSKIP 2*N1+3*P0+J-1
IF J=P0 THEN 190
DATA SAVE DC K(), F(), C():GOTO 200
DATA SAVE DC K(), F():GOTO 260
MAT S=TRN(C)
MAT C=S*K
MAT F1=C*F
MAT K =TRN(S)
MAT S=C*K
NEXT J
LOAD DC R"E15"

```

[E/5]

```

ELECT PRINT 005
PRINT "RESOLUCION DEL SISTEMA, (E15)":COM B#, 0, Q1, T5, N7, N8, L3, L4
DIM Z(26), K(23, 23), F(23), C(23, 23), U(23), S(23, 23), F1(23)
DATA LOAD DC OPEN R B#:DATA LOAD DC R1, R2, L1, G, N1, N2, P0:MAT REDIM Z(P0)
DATA LOAD DC OPEN R TEMP , 0, Q1:DSKIP 2*N1+2*P0
DATA LOAD DC Z():MAT U=ZER
FOR J=P0 TO 1 STEP -1
IF J=P0 THEN 120
BACKSPACE BEG :DSKIP 2*N1+3*P0+J-1:MAT REDIM K(Z(J), Z(J)), F(Z(J)), C(Z(J), Z(
)):DATA LOAD DC K(), F(), C()
MAT F1=K*F:MAT S=K*C:MAT C=S*U
MAT U=F1-C:GOTO 170
MAT REDIM K(Z(P0), Z(P0)), F(Z(P0)), U(Z(P0))
BACKSPACE BEG :DSKIP 2*N1+3*P0+J-1:MAT REDIM K(Z(J), Z(J)), F(Z(J)):DATA LOAD
(), F()
MAT U=K*F
BACKSPACE BEG :DSKIP 2*N1+4*P0+P0-J:DATA SAVE DC U()
ELECT PRINT 005
PRINT "CORRIMIENTOS DE LA PARTICION":J:MAT PRINT U
NEXT J: IF T5>0 THEN 210
OAD DC R"E16"
LOAD DC R"E17"

```

[E16]

```

ELECT PRINT 005
PRINT "OBTENCION DE LAS TENSIONES EN LOS CUADRILATEROS, (E16)"
ELECT D
COM B#, Q, Q1, T5, N7, N8, L3, L4
TRA LOAD DC OPEN R B#
TRA LOAD DC R1, R2, L1/G, N1, N2, P0
IN P(26, 4), N0(200, 4), Z(26), U(23), F1(3), D(3, 9), U1(9)
AT REDIM P(P0+1, 4), N0(N1, 4), Z(P0):DSKIP 3:DATA LOAD DC N0():DATA LOAD DC P()

TRA LOAD DC OPEN R TEMP , Q, Q1
DBACKSPACE BEG :DSKIP 2*N1+2*P0:DATA LOAD DC Z()
SELECT PRINT 215(80)
PRINT :PRINT :PRINT HEX(0E):PRINT " FASE ELASTICA TOMANDO TODA LA CARGA":
IT " *****"
PRINT :PRINT :PRINT HEX(0E):PRINT "TENSIONES EN LOS CUADRILATEROS":PRINT :PR
PRINT :PRINT " ELEMENTO TX TY TXY H T. I
I A "
DBACKSPACE BEG
FOR N=1 TO N1
DBACKSPACE BEG :DSKIP (N-1)*2
DATA LOAD DC D():DSKIP 2*N1+4*P0-(N-1)*2-1
FOR J=2 TO P0+1
IF N<P(J, 1)THEN 160:IF N>P(J, 2)THEN 160:P5=J:GOTO 170
EXT J
SKIP P0-P5:MAT REDIM U(Z(P5)):DATA LOAD DC U()
P1=N0(N, 1):P2=N0(N, 2):P3=N0(N, 3):P4=N0(N, 4)
S2=P2-P(P5+1, 3):S2=S2*2:S3=P3-P(P5+1, 3):S3=S3*2
OR I=1 TO 2:U1(2+I)=U(S2+I):NEXT I
OR I=1 TO 2:U1(4+I)=U(S3+I):NEXT I
AT REDIM U(Z(P5-1)):DATA LOAD DC U():DBACKSPACE P0-P5+2
S1=P1-P(P5, 3):S1=S1*2:S4=P4-P(P5, 3):S4=S4*2
OR I=1 TO 2:U1(1)=U(S1+I):NEXT I
OR I=1 TO 2:U1(6+I)=U(S4+I):NEXT I
S5=2*(P(P5, 4)-P(P5, 3)+1)+N-P(P5, 1)+1
U1(9)=U(S5)
MAT F1=D*U1
SKIP P0+N-1
DATA SAVE DC F1(), F1(), U1()
MAT F1=(1/G)*F1
SELECT PRINT 215(80)
T7=SQR((((F1(1)-F1(2))/2)^2)+F1(3)^2): T6=(F1(1)+F1(2))/2
IF F1(1)-F1(2)<>0THEN 430:A=45:GOTO 440
A=ARCTAN(2*F1(3)/(F1(1)-F1(2))): A=1/2*A
PRINT USING 450 , N, F1(1), F1(2), F1(3), U1(9), T6+T7, T6-T7, A
X ### -####, #### -#####, ### -###, ### -#, ##000 -###, #### -###, #### -###
NEXT N
PRINT HEX(0E): PRINT "CORRIMIENTOS DE LOS NODOS":PRINT :PRINT :PRINT "NODO
X Y":T=0
OR J=2 TO P0+1:DBACKSPACE BEG :DSKIP 2*N1+5*P0-J+1:MAT REDIM U(Z(J-1)):DATA
LOAD DC U():MAT U=(1/L1)*U
OR I= 1 TO P(J, 4)-P(J, 3)+1:T=T+1
PRINT T, U(2*I-1), U(2*I)

```

[E17]

```

ELECT PRINT @05:COM B$,Q,Q1,T5,N7,N8,L3,L4
PRINT "RESIDUOS. (E17)"
IM Z(24)
DATA LOAD DC OPEN R B$:DATA LOAD DC R1,R2,L1,G,N1,N2,P0
DATA LOAD DC OPEN R TEMP ,Q,Q1: MAT REDIM Z(P0):DSKIP 2*N1+2*P0:DATA LOAD DC
FOR I=1 TO P0:IF Z(I)<19THEN 70:SELECT PRINT @05:PRINT "NO PODEMOS CALCULAR
RESIDUOS POR FALTA DE MEMORIA":GOTO 370
EXT I
IM F(20),K(18,18),C(18,18),U(18),R(18),U1(18),U2(18),C1(18,18),C2(18,18)
FOR J=1TO P0:MAT REDIM F(Z(J)),K(Z(J),Z(J))
DSPACE BEG :DSKIP 2*N1+2*(J-1):DATA LOAD DC F():DATA LOAD DC K()
IF J=1THEN 200:IF J=P0THEN 280
DSPACE BEG :DSKIP 2*N1+1+2*P0+J-2:MAT REDIM C(Z(J-1),Z(J)):DATA LOAD DC
MAT C1=C:MAT C=ZER
MAT REDIM C(Z(J),Z(J+1)):DATA LOAD DC C()
DSPACE BEG :DSKIP 2*N1+5*P0-J-1:MAT REDIM U(Z(J+1)):DATA LOAD DC U()
MAT U3=U:MAT REDIM U(Z(J)):DATA LOAD DC U()
MAT U2=U:MAT REDIM U(Z(J-1)):DATA LOAD DC U()
MAT C2=TRN(C1):MAT C1=C2*U:MAT C2=K*U2
MAT R=F-C1:MAT C1=R-C2:MAT K=C*U3:MAT R =C1-K:GOTO 340
DSPACE BEG :DSKIP 2*N1+5*P0-1
MAT REDIM U(Z(1)):DATA LOAD DC U():MAT U1=U
MAT REDIM U(Z(2)):DSPACE BEG 2:DATA LOAD DC U()
DSPACE BEG : DSKIP 2*N1+2*P0+1:MAT REDIM C(Z(1),Z(2)):DATA LOAD DC C()
MAT C2=K*U1: MAT K=C2
MAT C2=C*U
MAT C=C2
MAT R=F-K:MAT R=R-C:GOTO 340
DSPACE BEG :DSKIP 2*N1+4*P0:MAT REDIM U(Z(P0)),U1(Z(P0)):DATA LOAD DC U
MAT U1=U
MAT REDIM U(Z(P0-1)):DATA LOAD DC U():DSPACE BEG :DSKIP 2*N1+3*P0-1
MAT REDIM C(Z(P0-1),Z(P0)):DATA LOAD DC C()
MAT C2=TRN(C):MAT C=C2*U
MAT C2=K*U1
MAT R= F-C:MAT R =R-C2
PRINT "RESIDUOS DE LA PARTICION",J
FOR I=2 TO Z(J):R(I)=R(I)+R(I-1):NEXT I:PRINT R(I)
NEXT J
IF T5=0THEN 390
LOAD DC R"E31"
LOAD DC R"E191"

```

[E191]

```

ELECT PRINT 005
PRINT "FORMACION DE P1 FACTOR DE PLASTICIDAD (E191)"
DIM B#, Q, Q1, T5, N7, N8, L3, L4: SELECT D
DATA LOAD DC OPEN R B#
DIM P1(200, 3), F2(3), M(6, 12), M0(200), P2(200)
DATA LOAD DC R1, R2, L1, G, N1, N2, P0
MAT REDIM P1(N1, 3), P2(N1)
DSKIP 5: DATA LOAD DC M1: MAT REDIM M(M1, 12), M0(N1)
DATA LOAD DC M(), M0(): DSKIP 1: DATA LOAD DC F2()
DATA LOAD DC OPEN R TEMP, Q, Q1: DSKIP 2*N1+5*P0
FOR I=1 TO N1
M=M0(I)
A=P2(I)*M(CH, 8)*(1-M(CH, 2))* .5
B=P2(I)*M(CH, 8)*TAN(M(CH, 9))*(1-M(CH, 2))* .5
C=M(CH, 7)*M(CH, 3)*P2(I)+P2(I)*M(CH, 8)*TAN(M(CH, 9))*(1+M(CH, 2))* .5
DATA LOAD DC F2()
R=(F2(1)-F2(2))/2: T=F2(3): IF T>0 THEN 180 : T1=-1: GOTO 190
T1=1
P1(I, 1)=((A*R-T1*B*T)-SQR(C^2*(R^2+T^2)-(A*T+T1*B*R)^2))/(A^2+B^2-C^2)
IF P1(I, 1)<R3 THEN 220
N=I: R3=P1(I, 1): N=R3
NEXT I
DATA SAVE DC N, N3, P1()
LOAD DC R"E20"

```

[E20]

```
SELECT PRINT 005: PRINT "FORMACION DE NUEVOS FICEROS PARA D.R (E20)"
COM B#, D, Q1, T5, N7, N8, L3, L4
DIM R(9, 9), D(3, 9), K(23, 23), F(23), C(23, 23), Z(26)
DATA LOAD DC OPEN R B#:DATA LOAD DC R1, R2, L1, G, N1, N2, P0
DATA LOAD DC OPEN R TEMP , Q, Q1
FOR N=1 TO N1
BACKSPACE BEG : DSKIP 2*N-2
DATA LOAD DC D():DATA LOAD DC R()
DSKIP 3*N1+5*P0-1
DATA SAVE DC D():DATA SAVE DC R()
NEXT N
LOAD DC R"E21"
```

[E21]

```

PRINT "OBTENCION DE LAS NUEVAS F() Y DEF. DE N3 (E21)"
COM B#, Q, Q1, T5, N7, N8, L3, L4
DIM Z(26), F(23), P1(200, 3)
DATA LOAD DC OPEN R B#:DATA LOAD DC R1, R2, L1, G, N1, N2, P0
DATA LOAD DC OPEN R TEMP , Q, Q1:DSKIP 2*N1+2*P0:MAT REDIM P1(N1, 3), Z(P0)
DATA LOAD DC Z():DSKIP 3*P0+N1-1:DATA LOAD DC N, N3, P1()
ELECT PRINT 215(88):PRINT :PRINT :PRINT :PRINT HEX(0E):PRINT " FASE INICI
ELASTICA":PRINT " *****
RINT :PRINT
ELECT PRINT 215(88):PRINT HEX(0E):PRINT "MAX. COEF. PLAST. ";N:SELECT PRINT 0

PRINT "VALOR DEL MAXIMO COEFICIENTE DE PLASTICIDAD",N
N3=12:GOTO 120
INPUT "NUMERO DE ESCALONES DE LA FASE PLASTICA",N3
SELECT PRINT 215:PRINT :PRINT :PRINT HEX(0E):PRINT "NUMERO DE ESCALONES PLAS
(5)":N3
T=(N-1)/(N3*N):DBACKSPACE BEG :DSKIP 2*N1
FOR J=1TO P0
MAT REDIM F(2(J))
DATA LOAD DC F():MAT F=(T)*F:DBACKSPACE 1
DATA SAVE DC F():DSKIP 1:NEXT J
DSKIP 3*P0+N1: DATA SAVE DC N, N3, P1()
LOAD DC R"E22"

```

[E22]

```

5SELECT PRINT 005
PRINT "F2()/P1 MAX.  Y U1()/P1 MAX. (E22)"
COM B#, Q, Q1, T5, N7, N8, L3, L4
DIM F2(3), P1(200, 3), F1(3), U1(9), Z(26), U(23), P(26, 4)
DATA LOAD DC OPEN R B#:DATA LOAD DC R1, R2, L1, G, N1, N2, P0:MAT REDIM Z(P0), P(P0
4):DSKIP 4:DATA LOAD DC P()
DATA LOAD DC OPEN R TEMP , Q, Q1:DSKIP 3*N1+5*P0
MAT REDIM F1(N1, 3), Z(P0), P(P0+1, 4):DATA LOAD DC N, N3, F1()
DBACKSPACE BEG :DSKIP 2*N1+5*P0
5SELECT PRINT 215(80):PRINT :PRINT "TENSIONES DE LOS CUADRILATEROS MINORADAS":
INT
3PRINT "CUADRILATERO      TX          TY          TXY          T. I.      T. II.      A"
3FOR I=1 TO N1:DATA LOAD DC F1(), F2(), U1()
3MAT F2=(1/N)*F2:MAT U1=(1/N)*U1:MAT F1=(1/N)*F1
3DBACKSPACE 1:DATA SAVE DC F1(), F2(), U1()
3  MAT F2=(1/G)*F2
3  T7=SDR(((F2(1)-F2(2))/2)^2+F2(3)^2); T6=(F2(1)+F2(2))/2
3  A=ARCTAN(2*F2(3)/(F2(1)-F2(2))); A=1/2*A
3  PRINT USING 180  , I, F2(1), F2(2), F2(3), T6+T7, T6-T7, A
3  %   ### -####. #### -####. ###  -####. ###  -####. ####  -####. ####  -####. ##
NEXT I
3FOR I1=1 TO N1
3DBACKSPACE BEG :DSKIP 2*N1+2*P0:DATA LOAD DC Z()
3SELECT PRINT 215(79)
3FOR J=2 TO P0+1:DBACKSPACE BEG :DSKIP 2*N1+1+5*P0-J:MAT REDIM U(Z(J-1)):DATA
3D DC U():MAT U=(1/N)*U:DBACKSPACE 1:DATA SAVE DC U():NEXT J
LOAD DC R"E23"

```

[E23]

```

REM (E23):SELECT PRINT 005
PRINT "DIVIDIR P1(.,1)POR P1 MAX. PREVEER P1(.,2) HACER P1(.,3) (E23)"
COM B$, Q, Q1, T5, N7, N8, L3, L4
DIM P1(200,3)
DATA LOAD DC OPEN R B$:DATA LOAD DC R1, R2, L1, G, N1, N2, P0
MAT REDIM P1(N1,3)
DATA LOAD DC OPEN R TEMP / Q, Q1:DSKIP 3*N1+5*P0
DATA LOAD DC N, N3, P1():T=N
FOR I=1 TO N1:IF T<>P1(I,1)THEN 95:P1(I,1)=1:GOTO 100
P1(I,1)=(1/T)*P1(I,1)
P1(I,2)=P1(I,1)*(T-1)/(N3)
IF P1(I,1)+P1(I,2)>1 THEN 120:P1(I,3)=0:GOTO 140
IF P1(I,1)<1 THEN 130:P1(I,3)=1:GOTO 140
P1(I,3)=1-(1-P1(I,1))/P1(I,2)
NEXT I
DBACKSPACE 1:DATA SAVE DC N, N3, P1()
SELECT PRINT 215:PRINT :PRINT :PRINT "ELEMENTOS PLASTIFICADOS"
FOR I=1 TO N1 : IF P1(I,3)<1 THEN 180:PRINT I
NEXT I:PRINT "ELEMENTOS A PUNTO DE PLASTIFICAR"
FOR I=1 TO N1 :IF P1(I,3)=1 THEN 200:IF P1(I,3)=0THEN 200:PRINT I
NEXT I
LOAD DC R"E24"

```

[E24]

```

ELECT PRINT 005
PRINT "PREVEER INCREMENTO DE F2() (E24)"
COM B#, Q, Q1, T5, N7, N8, L3, L4
DIM F2(3), P1(200, 3), F3(3), F1(3)
DATA LOAD DC OPEN R B#
DATA LOAD DC R1, R2, L1, G, N1, N2, P0
DATA LOAD DC OPEN R TEMP , Q, Q1
MAT REDIM P1(N1, 3)
DSKIP 3*N1+5*P0:DATA LOAD DC N, N3, P1()
IF T5>0THEN 170:T=N
DBACKSPACE BEG :DSKIP 2*N1+5*P0:FOR I=1 TO N1
DATA LOAD DC F1(), F2():DSKIP 3*N1 :MAT F3=(1+(T-1)/(N3*2))*F2
DATA SAVE DC F3():DBACKSPACE 3*N1+1:NEXT I:GOTO 240
T=N:DBACKSPACE BEG :DSKIP 2*N1+5*P0
FOR I=1 TO N1:DBACKSPACE BEG :DSKIP 2*N1+5*P0+I-1
DATA LOAD DC F1(), F2():DSKIP 3*N1
MAT F3=(.5)*F1:MAT F3=F3+F1:DATA SAVE DC F3()
NEXT I
LOAD DC R"E241"

```

[E241]

```

SELECT PRINT 005
PRINT "FORMACION DE NUEVO FICHERO DE U() INCREMENTADAS (E241)"
COM B#, Q, Q1, T5, N7, N8, L3, L4
DIM Z(25), U(23), P(26, 4), U5(23), P1(200, 3)
DATA LOAD DC OPEN R B#:DATA LOAD DC R1, R2, L1, G, N1, N2, P0:MAT REDIM Z(P0), P(P0
4):DSKIP 4:DATA LOAD DC P()
DATA LOAD DC OPEN R TEMP , Q, Q1:DSKIP 3*N1+5*P0
MAT REDIM P1(N1, 3):DATA LOAD DC N, N3, P1()
ELECT PRINT 215(80):PRINT :PRINT :PRINT "CUADRILATERO      COEF.
SEMENTO      FACTOR":PRINT :PRINT
OR I=1 TO N1:PRINT I, P1(I, 1), P1(I, 2), P1(I, 3):NEXT I
DBACKSPACE BEG :DSKIP 2*N1+2*P0:DATA LOAD DC Z()
FOR J=2 TO P0+1:DBACKSPACE BEG :DSKIP 2*N1+1+5*P0-J:MAT REDIM U(Z(J-1)), U5(Z
4)):DATA LOAD DC U()
(DSKIP 4*N1+2*J-3:IF T5=0THEN 140
:DATA LOAD DC U5():MAT U5=U+U5:DBACKSPACE 1:GOTO 150
MAT U5=U
:DATA SAVE DC U5():NEXT J
SELECT PRINT 215(80)
PRINT HEX(0E): PRINT "CORRIMIENTOS DURANTE EL ESCALON", T5:PRINT :PRINT :PRI
"NODO      X      Y      X'      Y'":PRINT :
NT :T=0
FOR J=2 TO P0+1:DBACKSPACE BEG :DSKIP 2*N1+1+5*P0-J:MAT REDIM U(Z(J-1)):DATA
D DC U():MAT U=(1/L1)*U
DSKIP 4*N1+2*J-3:MAT REDIM U5(Z(J-1)):DATA LOAD DC U5():MAT U5=(1/L1)*U5
FOR I= 1 TO P(J, 4)-P(J, 3)+1:T=T+1
PRINT T, U5(2*I-1), U5(2*I), U(2*I-1), U(2*I)
NEXT I:NEXT J
PRINT :PRINT :PRINT
IF T5>0THEN 250:SELECT PRINT 215(80):PRINT :PRINT :PRINT :PRINT HEX(0E) :PRI
"      FASES      PLASTICAS":PRINT "      *****
*****":PRINT
LOAD DC R"E35"

```

[E25]

```

COM B$, Q, Q1, T5, N7, N8, L3, L4: SELECT PRINT 005
PRINT "SE INICIA EL ESCALON": T5+1
PRINT "FORMACION DE R(), D(), EN LA FASE PLASTICA (E25)"
DIM T(9, 9), R(9, 9), D(3, 9), C(4, 4), P1(200, 3), F2(3), F3(1, 3), F1(4), M1(4, 4), M(4,
R(4, 2), F0(3)
DATA LOAD DC OPEN R B$: DATA LOAD DC R1, R2, L1, G, N1, N2, P0: MAT REDIM P1(N1, 3)
DATA LOAD DC OPEN R TEMP , Q, Q1: DSKIP 3*N1+5*P0: DATA LOAD DC N, N3, P1()
FOR N=1 TO N1: MAT REDIM F1(4)
IF P1(N, 3)=0 THEN 1060
AIR LOAD DC OPEN R "B1"
DSKIP N-1: DATA LOAD DC E1, E2, G2, A1, B1: DSKIP N1-1: DATA LOAD DC A, B, C, D, E, C1:
ABS(E1/E2-1)>0.01 THEN 110: G2=E1/3
DATA LOAD DC OPEN R TEMP , Q, Q1: DSKIP 5*N1+5*P0+N
DATA LOAD DC F2(): X1=1: IF F2(3)>0 THEN 121: X1=-1: IF F2(3)<0 THEN 121: X1=0
R=(F2(1)-F2(2))/2: T=F2(3): IF T>6 THEN 122 : T1=-1: GOTO 123
T1=1
T3=((D*R-T1*E+T)-SOR(C1^2*(R^2+T^2)-(D*T+T1*E+R)^2))/(D^2+E^2-C1^2)
F8=(F2(1)+F2(2))* .5: F9=(F2(1)-F2(2))* .5/T3: F2(1)=F8+F9: F2(2)=F8-F9: F2(3)=F2
/T3
M5=(F2(1)-F2(2))* .5-D: N5=F2(3)+X1*E: M5=M5/C1: N5=N5/C1
F1(1)=M5: F1(2)=-M5: F1(3)=2*N5: F1(4)=0: F3(1, 1)=F1(1): F3(1, 2)=F1(2): F3(1, 3)=F1
E3=E1/E2: MAT M=ZER: MAT REDIM M(3, 4): M(1, 1)=2*E1/(4-E3): M(1, 4)=M(1, 1): M(2, 4)
(1, 4): M(2, 2)=2*(2-E3)*E2/(4-E3): M(3, 3)=G2
P4=1-(E1/(E2*2)): P5=.5: MAT C=ZER: MAT REDIM C(3, 3)
C(1, 1)=(1-P4+P4)/E1: C(1, 2)=(-P5*(1+P4))/E2: C(2, 1)=C(1, 2): C(2, 2)=(E2-P5*P5*E
(E2+E2): C(3, 3)=1/G2
MAT R=M*F1 : MAT M1=F3*R: A2=M1(1, 1)
MAT M1=M1/R: MAT R=M1*M: MAT R=(1/A2)*R
MAT M1=M-R: MAT REDIM F1(3): MAT R=F3*M: MAT M=F1*R: MAT M=(2/A2)*M : MAT R=C*M1
MAT R=R+M: MAT C=M1: MAT REDIM C(4, 4): MAT M=TRN(M1) : MAT M1=M*R: MAT R=TRN(C
MAT R=(2)*R: MAT R=R-M1: MAT M1=C: MAT M=R
S1=16/3/A1/A1: S=4/A1/B1: S2=8/3/A1/A1: S3=16/3/B1/B1: S4=8/3/B1/B1: X=0: Y=0
A(1, 1)=- (1-Y)/A1: A(1, 2)=- (1-X)/B1: A(2, 1)=(1-Y)/A1: A(2, 2)=- (1+X)/B1: A(3, 1)=(
)/A1: A(3, 2)=(1+X)/B1: A(4, 1)=- (1+Y)/A1: A(4, 2)=(1-X)/B1
FOR I=1 TO 4: FOR F=1 TO 3
D(F, 2*I-1)=-A(I, 1)*M1(F, 1)+A(I, 2)*M1(F, 3)
D(F, 2*I)=-A(I, 2)*M1(F, 2)+A(I, 1)*M1(F, 3)
NEXT F: NEXT I: FOR I=1 TO 3 : D(I, 9)=2*SOR(A1*B1)/A1/B1*M1(I, 4): NEXT I: MAT D=(
)*D
MAT REDIM R(9, 9): MAT R=ZER
R(1, 1)=+(S1 )*M(1, 1)-(S )*M(1, 3)-(S )*M(3, 1)+( S3)*M(3, 3)
R(1, 2)=+(S )*M(2, 1)-(S3 )*M(2, 3)-(S1 )*M(3, 1)+( S )*M(3, 3)
R(2, 1)=(S)*M(1, 2)-(S1)*M(1, 3)-(S3)*M(3, 2)+(S)*M(3, 3)
R(2, 2)=(S3)*M(2, 2)-(S)*M(2, 3)-(S)*M(3, 2)+(S1)*M(3, 3)
R(1, 3)=+(-S1)*M(1, 1)-(S)*M(1, 3)-(-S)*M(3, 1)+(S4)*M(3, 3)
R(1, 4)=+(-S)*M(2, 1)-(S4)*M(2, 3)+(S1)*M(3, 1)+(S)*M(3, 3)
R(2, 3)=(S)*M(1, 2)-(-S1)*M(1, 3)-(S4)*M(3, 2)+(-S)*M(3, 3)
R(2, 4)=(S4)*M(2, 2)-(-S)*M(2, 3)-(S)*M(3, 2)+(-S1)*M(3, 3)
R(1, 5)=+(-S2)*M(1, 1)-(-S)*M(1, 3)-(-S)*M(3, 1)+(-S4)*M(3, 3)
R(1, 6)=+(-S)*M(2, 1)-(-S4)*M(2, 3)-(-S2)*M(3, 1)+(-S)*M(3, 3)
R(2, 5)=(-S)*M(1, 2)-(-S2)*M(1, 3)-(-S4)*M(3, 2)+(-S)*M(3, 3)
R(2, 6)=(-S4)*M(2, 2)-(-S)*M(2, 3)-(-S )*M(3, 2)+(-S2)*M(3, 3)
R(1, 7)=+(S3)*M(1, 1)-(-S)*M(1, 3)-(S)*M(3, 1)+(-S3)*M(3, 3),

```

```

R(3,1)=+(S1)*M(1,1)-(-S1)*M(1,3)-(-S1)*M(3,1)+(-S1)*M(3,3)
R(3,2)=+(-S1)*M(2,1)-(-S1)*M(2,3)-(-S1)*M(3,1)+(-S1)*M(3,3)
R(4,1)=+(-S1)*M(1,2)-(-S1)*M(1,3)-(-S1)*M(3,2)+(-S1)*M(3,3)
R(4,2)=+(-S1)*M(2,2)-(-S1)*M(2,3)-(-S1)*M(3,2)+(-S1)*M(3,3)
R(3,3)=+(-S1)*M(1,1)-(-S1)*M(1,3)-(-S1)*M(3,1)+(-S1)*M(3,3)
R(3,4)=+(-S1)*M(2,1)-(-S1)*M(2,3)-(-S1)*M(3,1)+(-S1)*M(3,3)
R(4,3)=+(-S1)*M(1,2)-(-S1)*M(1,3)-(-S1)*M(3,2)+(-S1)*M(3,3)
R(4,4)=+(-S1)*M(2,2)-(-S1)*M(2,3)-(-S1)*M(3,2)+(-S1)*M(3,3)
R(3,5)=+(-S1)*M(1,1)-(-S1)*M(1,3)-(-S1)*M(3,1)+(-S1)*M(3,3)
R(3,6)=+(-S1)*M(2,1)-(-S1)*M(2,3)-(-S1)*M(3,1)+(-S1)*M(3,3)
R(4,5)=+(-S1)*M(1,2)-(-S1)*M(1,3)-(-S1)*M(3,2)+(-S1)*M(3,3)
R(4,6)=+(-S1)*M(2,2)-(-S1)*M(2,3)-(-S1)*M(3,2)+(-S1)*M(3,3)
R(3,7)=+(-S1)*M(1,1)-(-S1)*M(1,3)-(-S1)*M(3,1)+(-S1)*M(3,3)
R(3,8)=+(-S1)*M(2,1)-(-S1)*M(2,3)-(-S1)*M(3,1)+(-S1)*M(3,3)
R(4,7)=+(-S1)*M(1,2)-(-S1)*M(1,3)-(-S1)*M(3,2)+(-S1)*M(3,3)
R(4,8)=+(-S1)*M(2,2)-(-S1)*M(2,3)-(-S1)*M(3,2)+(-S1)*M(3,3)
R(5,1)=+(-S1)*M(1,1)-(-S1)*M(1,3)-(-S1)*M(3,1)+(-S1)*M(3,3)
R(5,2)=+(-S1)*M(2,1)-(-S1)*M(2,3)-(-S1)*M(3,1)+(-S1)*M(3,3)
R(6,1)=+(-S1)*M(1,2)-(-S1)*M(1,3)-(-S1)*M(3,2)+(-S1)*M(3,3)
R(6,2)=+(-S1)*M(2,2)-(-S1)*M(2,3)-(-S1)*M(3,2)+(-S1)*M(3,3)
R(5,3)=+(-S1)*M(1,1)-(-S1)*M(1,3)-(-S1)*M(3,1)+(-S1)*M(3,3)
R(5,4)=+(-S1)*M(2,1)-(-S1)*M(2,3)-(-S1)*M(3,1)+(-S1)*M(3,3)
R(6,3)=+(-S1)*M(1,2)-(-S1)*M(1,3)-(-S1)*M(3,2)+(-S1)*M(3,3)
R(6,4)=+(-S1)*M(2,2)-(-S1)*M(2,3)-(-S1)*M(3,2)+(-S1)*M(3,3)
R(5,5)=+(-S1)*M(1,1)-(-S1)*M(1,3)-(-S1)*M(3,1)+(-S1)*M(3,3)
R(5,6)=+(-S1)*M(2,1)-(-S1)*M(2,3)-(-S1)*M(3,1)+(-S1)*M(3,3)
R(6,5)=+(-S1)*M(1,2)-(-S1)*M(1,3)-(-S1)*M(3,2)+(-S1)*M(3,3)
R(6,6)=+(-S1)*M(2,2)-(-S1)*M(2,3)-(-S1)*M(3,2)+(-S1)*M(3,3)
R(5,7)=+(-S1)*M(1,1)-(-S1)*M(1,3)-(-S1)*M(3,1)+(-S1)*M(3,3)
R(5,8)=+(-S1)*M(2,1)-(-S1)*M(2,3)-(-S1)*M(3,1)+(-S1)*M(3,3)
R(6,7)=+(-S1)*M(1,2)-(-S1)*M(1,3)-(-S1)*M(3,2)+(-S1)*M(3,3)
R(6,8)=+(-S1)*M(2,2)-(-S1)*M(2,3)-(-S1)*M(3,2)+(-S1)*M(3,3)
R(7,1)=+(-S1)*M(1,1)-(-S1)*M(1,3)-(-S1)*M(3,1)+(-S1)*M(3,3)
R(7,2)=+(-S1)*M(2,1)-(-S1)*M(2,3)-(-S1)*M(3,1)+(-S1)*M(3,3)
R(8,1)=+(-S1)*M(1,2)-(-S1)*M(1,3)-(-S1)*M(3,2)+(-S1)*M(3,3)
R(8,2)=+(-S1)*M(2,2)-(-S1)*M(2,3)-(-S1)*M(3,2)+(-S1)*M(3,3)
R(7,3)=+(-S1)*M(1,1)-(-S1)*M(1,3)-(-S1)*M(3,1)+(-S1)*M(3,3)
R(7,4)=+(-S1)*M(2,1)-(-S1)*M(2,3)-(-S1)*M(3,1)+(-S1)*M(3,3)
R(8,3)=+(-S1)*M(1,2)-(-S1)*M(1,3)-(-S1)*M(3,2)+(-S1)*M(3,3)
R(8,4)=+(-S1)*M(2,2)-(-S1)*M(2,3)-(-S1)*M(3,2)+(-S1)*M(3,3)
R(7,5)=+(-S1)*M(1,1)-(-S1)*M(1,3)-(-S1)*M(3,1)+(-S1)*M(3,3)
R(7,6)=+(-S1)*M(2,1)-(-S1)*M(2,3)-(-S1)*M(3,1)+(-S1)*M(3,3)
R(8,5)=+(-S1)*M(1,2)-(-S1)*M(1,3)-(-S1)*M(3,2)+(-S1)*M(3,3)
R(8,6)=+(-S1)*M(2,2)-(-S1)*M(2,3)-(-S1)*M(3,2)+(-S1)*M(3,3)
R(7,7)=+(-S1)*M(1,1)-(-S1)*M(1,3)-(-S1)*M(3,1)+(-S1)*M(3,3)
R(7,8)=+(-S1)*M(2,1)-(-S1)*M(2,3)-(-S1)*M(3,1)+(-S1)*M(3,3)
R(8,7)=+(-S1)*M(1,2)-(-S1)*M(1,3)-(-S1)*M(3,2)+(-S1)*M(3,3)
R(8,8)=+(-S1)*M(2,2)-(-S1)*M(2,3)-(-S1)*M(3,2)+(-S1)*M(3,3)
MAT R=(A1*A1*B1*B1)*R
R(9,1)=2*SQR(A1*B1)*((-M(4,1))*(-4*B1)+M(4,3))*(-4*A1)
R(9,2)=2*SQR(A1*B1)*((-M(4,2))*(-4*A1)+M(4,3))*(-4*B1)
R(9,3)=2*SQR(A1*B1)*((-M(4,1))*(+4*B1)+M(4,3))*(-4*A1)
R(9,4)=2*SQR(A1*B1)*((-M(4,2))*(+4*A1)+M(4,3))*(+4*B1)
R(9,5)=2*SQR(A1*B1)*((-M(4,1))*(+4*B1)+M(4,3))*(+4*A1)
R(9,6)=2*SQR(A1*B1)*((-M(4,2))*(+4*A1)+M(4,3))*(+4*B1)
R(9,7)=2*SQR(A1*B1)*((-M(4,1))*(-4*B1)+M(4,3))*(+4*A1)
R(9,8)=2*SQR(A1*B1)*((-M(4,2))*(+4*A1)+M(4,3))*(-4*B1)
SMAT R=(1/A1/B1/16)*R
FOR J=1 TO 9:FOR K=1 TO 9
T(J,K)=.5*(R(J,K)+R(K,J)):NEXT K:NEXT J
MAT R=T
DBACKSPACE BEG :IF N=1THEN 1050:DSKIP 2*(N-1)
DATA SAVE DC P1 DATA SAVE DC P2

```

[E26]

```

SELECT PRINT B95
PRINT "FORMACION DE K() (E26)"
DIM B#, G, O1, T5, L3, L4, N7, N8
(1) R(9, 9), P(26, 4), N9(200, 4), F(23), K(23, 23), Z(26)
DATA LOAD DC OPEN R B#:T5=15+1
DATA LOAD DC R1, R2, L1, G, N1, N2, P8:MAT REDIM P(P8+1, 4), N9(N1, 4)
SKIP 3:DATA LOAD DC N9():DATA LOAD DC P()
DATA LOAD DC OPEN R TEMP , 0, 01:MAT REDIM Z(P8)
FOR J=2 TO P8+1:IF J=P8+1THEN 100 :Z=(P(J, 4)-P(J, 3)+1)*2+P(J, 2)-P(J, 1)+1:GOT
10
Z=(P(J, 4)-P(J, 3)+1)*2
MAT REDIM K(Z, 2), F(2):MAT R=ZER:DSKIP 2*N1+2*(J-2)+1:DATA LOAD DC K()
FOR N=P(J-1, 1) TO P(J, 2):IF N#0 THEN 130:N=1
K1=0:K2=0:P1=N9(N, 1):P2=N9(N, 2):P3=N9(N, 3):P4=N9(N, 4)
FOR I=1 TO 4:IF N9(N, I)<P(J, 3)THEN 150:IF N9(N, I)>P(J, 4)THEN 150:K1=K1+1
NEXT I
IF K1=0THEN 300:DBACKSPACE BEG :DSKIP 2*(N-1)+1:DATA LOAD DC R()
IF N<P(J, 1)THEN 180:IF N>P(J, 2)THEN 180:K2=1
IF P2<P(J, 3)THEN 220:IF P2>P(J, 4)THEN 220:S2=P2-P(J, 3)+1:S2=S2*2-2
FOR I=1 TO 2:FOR F=1 TO 2:K(S2+I, S2+F)=K(S2+I, S2+F)+R(2+I, 2+F):NEXT F:NEXT
I
S3=P2-P(J, 3)+1:S3=S3*2-2:FOR I=1 TO 2:FOR F=1 TO 2:K(S3+I, S3+F)=K(S3+I, S3+F)
+I, 4+F):NEXT F:NEXT I
FOR I=1 TO 2:FOR F=1 TO 2:K(S2+I, S3+F)=K(S2+I, S3+F)+R(2+I, 4+F):K(S3+F, S2+I)=
R(2+I, S3+F):NEXT F:NEXT I
IF P1<P(J, 3)THEN 300:IF P1>P(J, 4)THEN 300
S1=P1-P(J, 3)+1:S1=S1*2-2:FOR I=1 TO 2:FOR F=1 TO 2:K(S1+I, S1+F)=K(S1+I, S1+F)
+I, F):NEXT F:NEXT I
S4=P4-P(J, 3)+1:S4=S4*2-2:FOR I=1 TO 2:FOR F=1 TO 2:K(S4+I, S4+F)=K(S4+I, S4+F)
+I, 6+F):NEXT F:NEXT I
FOR I=1 TO 2:FOR F=1 TO 2:K(S1+I, S4+F)=K(S1+I, S4+F)+R(I, 6+F):K(S4+F, S1+I)=K(
I, S4+F):NEXT F:NEXT I
IF K2=0THEN 300:IF J=P8+1THEN 300:S5=2*(P(J, 4)-P(J, 3)+1)+N-P(J, 1)+1
FOR I=1 TO 2:K(S1+I, S5)=K(S1+I, S5)+R(I, 9):K(S5, S1+I)=K(S1+I, S5):NEXT I
FOR I=1 TO 2:K(S4+I, S5)=K(S4+I, S5)+R(6+I, 9):K(S5, S4+I)=K(S4+I, S5):NEXT I
K(S5, S5)=R(9, 9)
NEXT N:Z(J-1)=Z:DBACKSPACE BEG :DSKIP 2*N1+2*(J-2)+1:DATA SAVE DC K():DBACKS
P BEG :NEXT J
LOAD DC R"E27"

```

[E27]

```

ELECT PRINT 985
PRINT "FORMACION DE C(), FASE PLASTICA (E27)"
COM B$, Q, Q1, T5, L3, L4, N7, N8
JM R(9, 9), P(26, 4), N0(200, 4), C(23, 23), Z(26)
ATA LOAD DC OPEN R B$
ATA LOAD DC R1, R2, L1, G, N1, N2, P0:MAT REDIM P(P0+1, 4), N0(N1, 4)
DSKIP 3:DATA LOAD DC N0():DATA LOAD DC P()
ATA LOAD DC OPEN R TEMP , Q, Q1:MAT REDIM Z(P0)
SKIP 2*N1+2*P0:DATA LOAD DC Z()
FOR J=2 TO P0
MAT REDIM C(Z(J-1), Z(J)):DBACKSPACE BEG :DSKIP 2*N1+2*P0+J-1:MAT C=ZER :DAT
OAD DC C()
FOR N=P(J, 1) TO P(J, 2)
DBACKSPACE BEG :DSKIP 2*(N-1)+1:DATA LOAD DC R()
P1=N0(N, 1):P2=N0(N, 2):P3=N0(N, 3):P4=N0(N, 4)
S2=P2-P(J+1, 3)+1:S2=S2*2-2:S1=P1-P(J, 3)+1:S1=S1*2-2:S4=P4-P(J, 3)+1:S4=S4*2-
2:S3=P3-P(J+1, 3)+1:S3=S3*2-2
FOR I=1 TO 2:FOR F=1 TO 2:C(S1+I, S2+F)=C(S1+I, S2+F)+R(I, 2+F):NEXT F:NEXT I
FOR I=1 TO 2:FOR F=1 TO 2:C(S1+I, S3+F)=C(S1+I, S3+F)+R(I, 4+F):NEXT F:NEXT I
FOR I=1 TO 2:FOR F=1 TO 2:C(S4+I, S3+F)=C(S4+I, S3+F)+R(6+I, 4+F):NEXT F:NEXT
FOR I=1 TO 2:FOR F=1 TO 2:C(S4+I, S2+F)=C(S4+I, S2+F)+R(6+I, 2+F):NEXT F:NEXT
S5=2*(P(J, 4)-P(J, 3)+1)+N-P(J, 1)+1
FOR I=1 TO 2:C(S5, S2+I)=C(S5, S2+I)+R(9, 2+I):NEXT I
FOR I=1 TO 2:C(S5, S3+I)=C(S5, S3+I)+R(9, 4+I):NEXT I
EXT N:DBACKSPACE BEG :DSKIP 2*N1+2*P0+J-1:DATA SAVE DC C()
EXT J:LOAD DC R"E13"

```

[E31]

```

SELECT PRINT 005
PRINT "OBTENCION DE LAS TENSIONES EN LOS CUADRILATEROS. (E31)":PRINT "DURANTE
EL ESCALON":T5
SELECT D
COM B#, Q, Q1, T5, N7, N8, L3, L4
DATA LOAD DC OPEN R B#
DATA LOAD DC R1, R2, L1, G, N1, N2, P0
DIM P(26, 4), N0(200, 4), Z(26), U(23), F1(3), D(3, 9), U1(9), F2(3), F3(3)
MAT REDIM P(P0+1, 4), N0(N1, 4), Z(P0):DSKIP 3:DATA LOAD DC N0():DATA LOAD DC P()
DATA LOAD DC OPEN R TEMP , Q, Q1
DDBACKSPACE BEG :DSKIP 2*N1+2*P0:DATA LOAD DC Z()
SELECT PRINT 215(80)
PRINT :PRINT :PRINT HEX(0E):PRINT "          ESCALON DE CARGAS N. ":T5:PRIN
*****"
PRINT :PRINT :PRINT HEX(0E):PRINT "INCREMENTO DE LAS TENSIONES ":PRINT :PRIN
PRINT :PRINT " ELEMENTO      TX          TY          TXY          H          T, I
II      A      "
DDBACKSPACE BEG
FOR N=1 TO N1
DDBACKSPACE BEG :DSKIP (N-1)*2
DATA LOAD DC D():DSKIP 2*N1+4*P0-(N-1)*2-1
FOR J=2 TO P0+1
IF N<P(J, 1)THEN 210:IF N<P(J, 2)THEN 210:P5=J:GOTO 220
NEXT J
DSKIP P0-P5:MAT REDIM U(Z(P5)):DATA LOAD DC U()
P1=N0(N, 1):P2=N0(N, 2):P3=N0(N, 3):P4=N0(N, 4)
S2=P2-P(P5+1, 3):S2=S2*2:S3=P3-P(P5+1, 3):S3=S3*2
FOR I=1 TO 2:U1(2+I)=U(S2+I):NEXT I
FOR I=1 TO 2:U1(4+I)=U(S3+I):NEXT I
MAT REDIM U(Z(P5-1)):DATA LOAD DC U():DDBACKSPACE P0-P5+2
S1=P1-P(P5, 3):S1=S1*2:S4=P4-P(P5, 3):S4=S4*2
FOR I=1 TO 2:U1(I)=U(S1+I):NEXT I
FOR I=1 TO 2:U1(6+I)=U(S4+I):NEXT I
S5=2*(P(P5, 4)-P(P5, 3)+1)+N-P(P5, 1)+1
U1(9)=U(S5)
MAT F1=D*U1
DSKIP P0+N-1
DATA LOAD DC F3(), F2():DDBACKSPACE 1:MAT F2=F2+F1
DATA SAVE DC F1(), F2(), U1()
MAT F1=(1/G)*F1
SELECT PRINT 215(80)
T7=SQR((((F1(1)-F1(2))/2)^2)+F1(3)^2): T6=(F1(1)+F1(2))/2
IF F1(1)-F1(2)>0THEN 410:A=45:GOTO 420
A=ARCTAN(2*F1(3)/(F1(1)-F1(2))): A=1/2*A
PRINTUSING 430 , N, F1(1), F1(2), F1(3), U1(9), T6+T7, T6-T7, A
%   ### -####. #### -####. ### -###. ### -#. ##??? -####. #### -###. #### -###
NEXT N
LOAD DC R "E34"

```

[E24]

```

ELECT PRINT 005
PRINT "PREVEER INCREMENTO DE F2() (E24)"
COM B#, Q, Q1, T5, N7, N8, L3, L4
DIM F2(3), P1(200, 3), F3(3), F1(3)
DATA LOAD DC OPEN R B#
DATA LOAD DC R1, R2, L1, G, N1, N2, P0
DATA LOAD DC OPEN R TEMP , Q, Q1
MAT REDIM P1(N1, 3)
DSKIP 3*N1+5*P0:DATA LOAD DC N, N3, P1()
IF T5>0THEN 170:T=N
DSPACE BEG :DSKIP 2*N1+5*P0:FOR I=1 TO N1
DATA LOAD DC F1(),F2():DSKIP 3*N1 :MAT F3=(1+(T-1)/(N3*2))*F2
DATA SAVE DC F3():DSPACE BEG 3*N1+1:NEXT I:GOTO 240
T=N:DSPACE BEG :DSKIP 2*N1+5*P0
FOR I=1 TO N1:DSPACE BEG :DSKIP 2*N1+5*P0+I-1
DATA LOAD DC F1(),F2():DSKIP 3*N1
MAT F3=(.5)*F1:MAT F3=F3+F1:DATA SAVE DC F3()
NEXT I
LOAD DC R"E241"

```

[E35]

```

ELECT PRINT 005
PRINT "DIBUJO DE LOS INCREMENTOS DE CORRIMIENTOS (E35)"
COM B#, 0, Q1, T5, N7, L3, L4, N8
DATA LOAD DC OPEN R B#:DATA LOAD DC N1, N2, L1, P0
SKIP 9:DATA LOAD DC C8:DBACKSPACE 9
DIM X(100, 2), P(18, 4), Z(22), U5(22), P9(80), U(22)
MAT REDIM X(N2, 2), P(P0+1, 4), Z(P0)
DATA LOAD DC X():DSKIP 8:DATA LOAD DC N9:MAT REDIM P9(N9):DATA LOAD DC P9()
FOR I=1 TO N2:FOR J=1 TO 2
X(I, J)=X(I, J)+. 3:NEXT J:NEXT I
MAT X=(N7)*X
IF T5>0 THEN 220
  Z#=":"
  PLOT C, R, <2, 2, C>, <0, -35, S>, <0, 900, B#>, C, R>
  PLOT <X(P9(1), 1), X(P9(1), 2)*1. 5, U>
  FOR I=1 TO N9:IF I=N9THEN 170
  PLOT <X(P9(I+1), 1)-X(P9(I), 1), (X(P9(I+1), 2)-X(P9(I), 2))*1. 5, D>:GOTO 180
  PLOT <X(P9(1), 1)-X(P9(I), 1), (X(P9(1), 2)-X(P9(I), 2))*1. 5, D>
  NEXT I
  FOR I=1 TO N2
  PLOT C, R, <1, 1, C>, C, S>:PLOT <X(I, 1), X(I, 2)*1. 5, Z#>
  NEXT I
  DATA LOAD DC OPEN R TEMP , 0, Q1
  DBACKSPACE BEG :DSKIP 2*N1+2*P0+1:DATA LOAD DC Z():DBACKSPACE BEG :DSKIP 2
  :DATA LOAD DC P()
  FOR J=2 TO P0+1:DBACKSPACE BEG :MAT REDIM U5(Z(J-1)), U(Z(J-1)):DSKIP 2*N1+5*
  J+2:DATA LOAD DC U() :DBACKSPACE BEG
  IF T5=0THEN 250
  )SKIP 5*N1+7*P0+2*C8+J+1:DATA LOAD DC U5():MAT U5=(1/L1)*U5:MAT U=(1/L1)*U
  MAT U5=(L3*N7)*U5:MAT U=(L3*N7)*U
  FOR I= 1 TO P(J, 4)-P(J, 3)+1:T=T+1
  PLOT <1, 1, C>:IF T5>0THEN 280
  PLOT C, R>:PLOT <X(T, 1), (X(T, 2))*1. 5, U>
  PLOT <U(2*I-1), U(2*I)*1. 5, D>, C, R> :GOTO 300
  PLOT C, R>:PLOT <X(T, 1)+U5(2*I-1), (X(T, 2)+U5(I*2))*1. 5, U>
  PLOT <-U(2*I-1), -U(2*I)*1. 5, D>, C, R>
  NEXT I:NEXT J
  IF T5>1000THEN 300
  LOAD DC R"X25"
  LOAD DC R"X37"
  NEXT I:NEXT N
  LOAD DC R"X251"

```

[E37]

```

SELECT PRINT 005
PRINT "DIBUJO DE LAS TENSIONES TOTALES (E37)"
COM B$, 0, 01, T5, N7, L3, L4, N8 :SELECT D
DATA LOAD DC OPEN R B$
DIM C9(100, 3), B(100, 2), F3(3)
DATA LOAD DC N1, N2, L1, P0, G
DSKIP 9:DATA LOAD DC C8:MAT REDIM C9(C8, 3), B(C8, 2):DBACKSPACE 1:DATA LOAD DC
C9()
DSKIP 2:DATA LOAD DC B()
FOR J=1 TO C8:FOR I=1 TO 2:B(J, I)=B(J, I)+. 3:NEXT I:NEXT J
MAT B=(N7)*B
FOR I=1 TO C8
DATA LOAD DC OPEN R TEMP , 0, 01
DSKIP 5*N1+7*P0+I+2+C8
DATA LOAD DC F3()
MAT F3=(L4)*F3:MAT F3=(1/G)*F3
T7=SQR(((F3(1)-F3(2))/2)^2+F3(3)^2): T6=(F3(1)+F3(2))/2
A=ARCTAN(2*F3(3)/(F3(1)-F3(2))): A=1/2*A
T8=(T6+T7)/2:T9=(T6-T7)/2:PLOT <1, 1, C>
IF T8<0 THEN 200:IF T9<0THEN 200:X1=0:GOTO 210
X1=1 :T8=ABS(T8):T9=ABS(T9)
PLOT <., R>
PLOT <B(I, 1), B(I, 2)*1. 5, U>
IF X1=0 THEN 240:Z$="0":PLOT <0, 0, Z$>
PLOT <T8*COS(A), T8*SIN(A)*1. 5 , D>:PLOT <-T8*COS(A)*2, -T8*SIN(A)*3, D>
PLOT <T8*COS(A), T8*SIN(A)*1. 5, D>:PLOT <-T9*SIN(A), T9*COS(A)*1. 5, D>
PLOT <T9*SIN(A)*2, -T9*COS(A)*3, D>
PLOT <., R>:NEXT I
END

```

## 6.- EJEMPLO DE PRESENTACION DE RESULTADOS

A continuación se presenta la forma de escribir los resultados por el ordenador, en el caso 1º (básico) del Capítulo V, si bien, con el fin de no alargar excesivamente este trabajo tan solo presentamos los resultados de la fase elástica y el 1º escalón plástico.

MALLA A1 (CASO I)

#####

001	X= 0	Y= 0
002	X= 0	Y= 0
003	X= 0	Y= 0
004	X= 0	Y= 0
005	X= 0	Y= 0
006	X= 0	Y= 0
007	X= 0	Y= 0
008	X= 1	Y= 0
009	X= 1	Y= 0
010	X= 1	Y= 0
011	X= 1	Y= 0
012	X= 1	Y= 0
013	X= 1	Y= 0
014	X= 1	Y= 0
015	X= 2	Y= 0
016	X= 2	Y= 0
017	X= 2	Y= 0
018	X= 2	Y= 0
019	X= 2	Y= 0
020	X= 2	Y= 0
021	X= 2	Y= 0
022	X= W	Y= 0
023	X= W	Y= 0
024	X= W	Y= 0
025	X= W	Y= 0
026	X= W	Y= 0
027	X= W	Y= 0
028	X= W	Y= 0
029	X= 4	Y= 0
030	X= 4	Y= 0
031	X= 4	Y= 0
032	X= 4	Y= 0
033	X= 4	Y= 0
034	X= 4	Y= 0
035	X= 4	Y= 0
036	X= 6	Y= 0
037	X= 6	Y= 0
038	X= 6	Y= 0
039	X= 6	Y= 0
040	X= 6	Y= 0
041	X= 6	Y= 0
042	X= 6	Y= 0
043	X= 0	Y= 0
044	X= 0	Y= 0
045	X= 0	Y= 0

00 49	X= 8	Y= 8
00 50	X= 10	Y= 9
00 51	X= 10	Y= 2
00 52	X= 10	Y= 3 5
00 53	X= 10	Y= 5
00 54	X= 10	Y= 6
00 55	X= 10	Y= 7
00 56	X= 10	Y= 8
00 57	X= 12	Y= 9
00 58	X= 12	Y= 2
00 59	X= 12	Y= 3 5
00 60	X= 12	Y= 5
00 61	X= 12	Y= 6
00 62	X= 12	Y= 7
00 63	X= 12	Y= 8
00 64	X= 14	Y= 9
00 65	X= 14	Y= 2
00 66	X= 14	Y= 3 5
00 67	X= 14	Y= 5
00 68	X= 14	Y= 6
00 69	X= 14	Y= 7
00 70	X= 14	Y= 8

EMENTO 1	NODOS 1	8	9	2
EMENTO 2	NODOS 2	9	10	3
EMENTO 3	NODOS 3	10	11	4
EMENTO 4	NODOS 4	11	12	5
EMENTO 5	NODOS 5	12	13	6
EMENTO 6	NODOS 6	13	14	7
EMENTO 7	NODOS 8	15	16	9
EMENTO 8	NODOS 9	16	17	10
EMENTO 9	NODOS 10	17	18	11
EMENTO 10	NODOS 11	18	19	12
EMENTO 11	NODOS 12	19	20	13
EMENTO 12	NODOS 13	20	21	14
EMENTO 13	NODOS 15	22	23	16
EMENTO 14	NODOS 16	23	24	17
EMENTO 15	NODOS 17	24	25	18
EMENTO 16	NODOS 18	25	26	19
EMENTO 17	NODOS 19	26	27	20
EMENTO 18	NODOS 20	27	28	21
EMENTO 19	NODOS 22	29	30	23
EMENTO 20	NODOS 23	30	31	24
EMENTO 21	NODOS 24	31	32	25
EMENTO 22	NODOS 25	32	33	26
EMENTO 23	NODOS 26	33	34	27
EMENTO 24	NODOS 27	34	35	28
EMENTO 25	NODOS 29	36	37	30
EMENTO 26	NODOS 30	37	38	31
EMENTO 27	NODOS 31	38	39	32
EMENTO 28	NODOS 32	39	40	33
EMENTO 29	NODOS 33	40	41	34
EMENTO 30	NODOS 34	41	42	35
EMENTO 31	NODOS 36	43	44	37
EMENTO 32	NODOS 37	44	45	38
EMENTO 33	NODOS 38	45	46	39
EMENTO 34	NODOS 39	46	47	40
EMENTO 35	NODOS 40	47	48	41
EMENTO 36	NODOS 41	48	49	42
EMENTO 37	NODOS 43	50	51	44
EMENTO 38	NODOS 44	51	52	45
EMENTO 39	NODOS 45	52	53	46
EMENTO 40	NODOS 46	53	54	47

ELEMENTO 44	NODOS	51	58	59	52
ELEMENTO 45	NODOS	52	59	60	53
ELEMENTO 46	NODOS	53	60	61	54
ELEMENTO 47	NODOS	54	61	62	55
ELEMENTO 48	NODOS	55	62	63	56
ELEMENTO 49	NODOS	57	64	65	58
ELEMENTO 50	NODOS	58	65	66	59
ELEMENTO 51	NODOS	59	66	67	60
ELEMENTO 52	NODOS	60	67	68	61
ELEMENTO 53	NODOS	61	68	69	62
ELEMENTO 54	NODOS	62	69	70	63

POSICION	1ELEM	LASTELEM	1NODO	LASTNODO
1	1	6	1	7
2	7	12	8	14
3	13	18	15	21
4	19	24	22	28
5	25	30	29	35
6	31	36	36	42
7	37	42	43	49
8	43	48	50	56
9	49	54	57	63
10	49	54	64	70

## DATOS DE LOS MATERIALES

MATERIAL= 1    DENSIDAD= -1.000    K0= 0.750    PC= 1.200    E0= 0.00  
 E= 250.00    EX/EY= 0.500    G0= 0.00    G= 83.33    K= 0.14  
 E= 0.60    OE= 11.00    COTA SUPERIOR= 8.0000

## CONDICIONES DE CONTORNO

0 7	X= 0	Y=LIBRE
0 6	X= 0	Y=LIBRE
0 5	X= 0	Y=LIBRE
0 4	X= 0	Y=LIBRE
0 3	X= 0	Y=LIBRE
0 2	X= 0	Y=LIBRE
0 1	X= 0	Y= 0
0 8	X=LIBRE	Y= 0
0 15	X=LIBRE	Y= 0
0 22	X=LIBRE	Y= 0
0 29	X=LIBRE	Y= 0
0 36	X=LIBRE	Y= 0
0 43	X=LIBRE	Y= 0
0 50	X=LIBRE	Y= 0
0 57	X=LIBRE	Y= 0
0 64	X= 0	Y= 0
0 70	X= 0	Y=LIBRE
0 69	X= 0	Y=LIBRE
0 68	X= 0	Y=LIBRE
0 67	X= 0	Y=LIBRE
0 66	X= 0	Y=LIBRE
0 65	X= 0	Y=LIBRE

## CARGAS CONCENTRADAS EN LOS NODOS

0 7	FY=-5	FX= 0
0 14	FY=-10	FX= 0
0 21	FY=-5	FX= 0

**FASE ELASTICA TOMANDO TODA LA CARGA**

# INSTANCIAS EN LOS CUADRICULADOS

EMENTO	TX	TY	TXY	H	T. I	T. II	288 A
1	0.1385	4.873	0.095	9.35E-04	4.8757	0.1366	-1.15
2	0.6641	5.505	0.268	1.53E-03	5.5205	0.6492	-3.16
3	0.9430	6.544	0.382	2.67E-03	6.5701	0.9170	-3.88
4	1.4577	7.690	0.507	4.22E-03	7.7317	1.4167	-4.62
5	2.4638	8.974	0.482	9.54E-03	9.0101	2.4283	-4.21
6	6.5431	10.036	0.064	5.19E-02	10.0377	6.5420	-1.05
7	0.3214	4.212	0.258	9.15E-04	4.2292	0.3043	-3.78
8	0.8545	4.641	0.685	1.47E-03	4.7611	0.7344	-9.94
9	1.0194	5.191	1.038	2.35E-03	5.4359	0.7750	-13.23
10	1.7364	6.053	1.386	3.94E-03	6.4609	1.3294	-16.35
11	2.2303	6.624	1.643	7.76E-03	7.1709	1.6836	-18.39
12	5.2998	7.873	0.959	4.16E-02	8.1918	4.9817	-18.34
13	0.6535	3.203	0.322	9.12E-04	3.2437	0.6133	-7.09
14	1.0087	3.228	0.839	1.27E-03	3.5104	0.7271	-18.54
15	1.3829	3.285	1.232	2.12E-03	3.8917	0.7771	-26.17
16	1.6523	3.023	1.587	2.79E-03	4.0673	0.6084	-33.32
17	2.7458	2.931	1.792	6.51E-03	4.6333	1.0441	-43.51
18	2.6479	2.092	0.983	1.75E-02	3.3920	1.3484	37.11
19	1.0366	2.012	0.279	1.10E-03	2.0871	0.9623	-14.89
20	1.2801	1.866	0.707	1.42E-03	2.3392	0.8077	-33.73
21	1.5082	1.531	0.908	2.11E-03	2.4277	0.6116	-44.63
22	1.8148	1.110	1.010	2.80E-03	2.5327	0.3924	35.38
23	2.2189	0.516	0.779	5.12E-03	2.5221	0.2130	21.24
24	1.1036	-0.200	0.209	6.66E-03	1.1365	-0.2330	8.91
25	1.4079	1.071	0.196	1.14E-03	1.4982	0.9809	24.69
26	1.4516	0.898	0.472	1.31E-03	1.7228	0.6274	29.83
27	1.5653	0.657	0.567	1.87E-03	1.8377	0.3846	25.65
28	1.6826	0.415	0.533	2.34E-03	1.8774	0.2202	20.05
29	1.4212	0.133	0.319	3.14E-03	1.4961	0.0585	13.19
30	0.7327	0.140	0.106	5.01E-03	0.7513	0.1215	9.90
31	1.6812	0.599	0.122	1.41E-03	1.6949	0.5857	6.38
32	1.5706	0.492	0.297	1.50E-03	1.6471	0.4160	14.43
33	1.5722	0.358	0.340	2.05E-03	1.6612	0.2698	14.65
34	1.4089	0.190	0.281	2.18E-03	1.4708	0.1282	12.40
35	1.1316	0.121	0.168	2.90E-03	1.1589	0.0942	9.20
36	0.4654	-0.000	0.049	3.45E-03	0.4705	-0.0053	5.98
37	1.8773	0.382	0.076	1.50E-03	1.8812	0.3783	2.92
38	1.6712	0.313	0.182	1.53E-03	1.6952	0.2890	7.50
39	1.5123	0.204	0.194	1.91E-03	1.5407	0.1758	8.29
40	1.2707	0.128	0.149	1.95E-03	1.2899	0.1093	7.31
41	0.8887	0.042	0.079	2.23E-03	0.8961	0.0354	5.32
42	0.3510	0.022	0.021	2.66E-03	0.3524	0.0212	3.72
43	1.9979	0.297	0.043	1.57E-03	1.9990	0.2964	1.46
44	1.7116	0.229	0.099	1.54E-03	1.7182	0.2231	3.81
45	1.4816	0.155	0.102	1.85E-03	1.4894	0.1474	4.38
46	1.1566	0.078	0.072	1.75E-03	1.1615	0.0736	3.84
47	0.7901	0.047	0.037	1.99E-03	0.7920	0.0453	2.88
48	0.2910	0.009	0.010	2.18E-03	0.2914	0.0087	2.09
49	2.0532	0.262	0.013	1.60E-03	2.0533	0.2627	0.43
50	1.7339	0.202	0.031	1.56E-03	1.7345	0.2021	1.19
51	1.4557	0.129	0.031	1.81E-03	1.4565	0.1287	1.36
52	1.1172	0.074	0.022	1.69E-03	1.1176	0.0742	1.22
53	0.7392	0.035	0.011	1.85E-03	0.7394	0.0356	0.94
54	0.2697	0.011	0.002	2.03E-03	0.2697	0.0118	0.62

ARRIMIENTOS DE LOS NODOS

0	-3. 21607293E-03
0	-1. 39142956E-02
0	-2. 15349927E-02
0	-3. 10870036E-02
1. 08944493E-03	0
2. 27816463E-03	-2. 25130480E-03
1. 94953778E-03	-4. 51451842E-03
3. 27818775E-03	-6. 20181815E-03
5. 44806464E-03	-1. 22303179E-02
9. 74387366E-03	-1. 98015590E-02
1. 47101082E-02	-3. 47035300E-02
1. 97737488E-03	0
2. 33561552E-03	-1. 63945688E-03
3. 41638610E-03	-3. 16269208E-03
5. 70528371E-03	-5. 31630875E-03
9. 06531974E-03	-7. 33216016E-03
1. 63792178E-02	-1. 00135181E-02
2. 60919615E-02	-1. 31287446E-02
2. 59617855E-03	0
2. 99187731E-03	-9. 10674029E-04
4. 24027000E-03	-1. 60765736E-03
6. 65749813E-03	-2. 11818816E-03
1. 00326750E-02	-2. 02190652E-03
1. 58453980E-02	2. 25915979E-04
2. 27382876E-02	7. 22863624E-03
2. 96327554E-03	0
3. 35695376E-03	-6. 55572172E-05
4. 46184522E-03	4. 47744539E-05
6. 46800315E-03	5. 23225014E-04
8. 74246047E-03	1. 41341643E-03
1. 11764009E-02	3. 13840169E-03
1. 37167637E-02	5. 26269536E-03
2. 66934066E-03	0
3. 19834888E-03	4. 02276890E-04
4. 06741319E-03	8. 44982123E-04
5. 59084891E-03	1. 63811782E-03
6. 95769434E-03	2. 52253998E-03
8. 45401652E-03	3. 80232178E-03
1. 02179502E-02	5. 82549347E-03
2. 37585122E-03	0
2. 60999610E-03	6. 79565327E-04
3. 21831208E-03	1. 31495051E-03
4. 17500663E-03	2. 22052235E-03
4. 96117732E-03	3. 04227985E-03
5. 73646973E-03	4. 11952994E-03
6. 41786949E-03	5. 35517200E-03
1. 66778758E-03	0
1. 82294943E-03	8. 15544985E-04
2. 19435695E-03	1. 53841115E-03
2. 75723264E-03	2. 46413614E-03
3. 18037946E-03	3. 24166457E-03
3. 56957793E-03	4. 13825930E-03
3. 98633127E-03	5. 20183227E-03
8. 58668480E-04	0
9. 31714129E-04	8. 84809427E-04
1. 10981569E-03	1. 64377568E-03
1. 36592833E-03	2. 57493485E-03
1. 55295525E-03	3. 30677069E-03
1. 72980280E-03	4. 14377562E-03
1. 87955661E-03	5. 05347755E-03
0	0
0	9. 05573181E-04
0	1. 67775429E-03

FASE INICIAL ELASTICA

\*\*\*\*\*

PK. COEF. PLAST. 17. 9911317943

NUMERO DE ESCALONES PLASTICOS 5

REDUCCIONES DE LOS CUADRILATEROS MINORADAS

CUADRILATERO	TX	TY	TXY	T. I.	T. II.	A
1	0. 0077	0. 270	0. 005	0. 2710	0. 0075	-1. 15
2	0. 0369	0. 306	0. 014	0. 3068	0. 0360	-3. 16
3	0. 0524	0. 363	0. 021	0. 3651	0. 0509	-3. 88
4	0. 0810	0. 427	0. 028	0. 4297	0. 0787	-4. 62
5	0. 1369	0. 498	0. 026	0. 5008	0. 1349	-4. 21
6	0. 3636	0. 557	0. 003	0. 5579	0. 3636	-1. 05
7	0. 0178	0. 234	0. 014	0. 2350	0. 0169	-3. 78
8	0. 0475	0. 257	0. 038	0. 2646	0. 0408	-9. 94
9	0. 0566	0. 288	0. 057	0. 3021	0. 0430	-13. 23
10	0. 0965	0. 336	0. 077	0. 3591	0. 0738	-16. 35
11	0. 1239	0. 368	0. 091	0. 3985	0. 0935	-18. 39
12	0. 2945	0. 437	0. 053	0. 4553	0. 2769	-18. 34
13	0. 0363	0. 178	0. 017	0. 1802	0. 0340	-7. 09
14	0. 0560	0. 179	0. 046	0. 1951	0. 0404	-18. 54
15	0. 0768	0. 182	0. 068	0. 2163	0. 0431	-26. 17
16	0. 0918	0. 168	0. 088	0. 2260	0. 0338	-33. 32
17	0. 1526	0. 162	0. 099	0. 2575	0. 0580	-43. 51
18	0. 1471	0. 116	0. 054	0. 1885	0. 0749	37. 11
19	0. 0576	0. 111	0. 015	0. 1160	0. 0534	-14. 89
20	0. 0711	0. 103	0. 039	0. 1300	0. 0448	-33. 73
21	0. 0838	0. 085	0. 050	0. 1349	0. 0339	-44. 63
22	0. 1008	0. 061	0. 056	0. 1407	0. 0218	35. 38
23	0. 1233	0. 028	0. 043	0. 1401	0. 0118	21. 24
24	0. 0613	-0. 011	0. 011	0. 0631	-0. 0129	8. 91
25	0. 0782	0. 059	0. 010	0. 0832	0. 0545	24. 69
26	0. 0806	0. 049	0. 026	0. 0957	0. 0348	29. 83
27	0. 0870	0. 036	0. 031	0. 1021	0. 0213	25. 65
28	0. 0935	0. 023	0. 029	0. 1043	0. 0122	20. 05
29	0. 0789	0. 007	0. 017	0. 0831	0. 0032	13. 19
30	0. 0407	0. 007	0. 005	0. 0417	0. 0067	9. 90
31	0. 0934	0. 033	0. 006	0. 0942	0. 0325	6. 38
32	0. 0872	0. 027	0. 016	0. 0915	0. 0231	14. 43
33	0. 0873	0. 019	0. 018	0. 0923	0. 0149	14. 65
34	0. 0783	0. 010	0. 015	0. 0817	0. 0071	12. 40
35	0. 0629	0. 006	0. 009	0. 0644	0. 0052	9. 20
36	0. 0258	-0. 000	0. 002	0. 0261	-0. 0002	5. 98
37	0. 1043	0. 021	0. 004	0. 1045	0. 0210	2. 92
38	0. 0928	0. 017	0. 010	0. 0942	0. 0160	7. 50
39	0. 0840	0. 011	0. 010	0. 0856	0. 0097	8. 29
40	0. 0706	0. 007	0. 008	0. 0716	0. 0060	7. 31
41	0. 0494	0. 002	0. 004	0. 0498	0. 0019	5. 32
42	0. 0195	0. 001	0. 001	0. 0195	0. 0011	3. 72
43	0. 1110	0. 016	0. 002	0. 1111	0. 0164	1. 46
44	0. 0951	0. 012	0. 005	0. 0955	0. 0124	3. 81
45	0. 0823	0. 008	0. 005	0. 0827	0. 0081	4. 38
46	0. 0642	0. 004	0. 004	0. 0645	0. 0040	3. 84
47	0. 0439	0. 002	0. 002	0. 0440	0. 0025	2. 88

51	0.0809	0.007	0.001	0.0809	0.0071	1.36
52	0.0620	0.004	0.001	0.0621	0.0041	1.22
53	0.0410	0.001	0.000	0.0411	0.0019	0.94
54	0.0149	0.000	0.000	0.0149	0.0006	0.62

ELEMENTOS PLASTIFICADOS

ELEMENTOS A PUNTO DE PLASTIFICAR

IDRILATERO	COEF.	INCREMENTO	FACTOR
	9. 68467166E-02	. 3291070651522	0
	. 1330386732603	. 452095526221	0
	. 2162556214369	. 7348855530186	0
	. 3624765818619	1. 231777474953	. 482436210191
	. 6295555574401	2. 13937228966	. 82684432983
	1	3. 39822635886	1
	8. 04286330E-02	. 273314700849	0
	. 1097024115818	. 3727936266678	0
	. 1765527270351	. 5999661307392	0
	. 2887110215000	. 9811054033574	. 27501267849
	. 5103599065628	1. 734318486987	. 717675791897
	. 8958913486285	3. 044441595584	. 965803695653
	5. 39065800E-02	. 1831867883872	0
	7. 39144225E-02	. 2511779389754	0
	. 1110132416445	. 3772481239388	0
	. 1752074503167	. 5953945759348	0
	. 2756685130334	. 9367840072978	. 226789226413
	. 4279188357105	1. 454165066964	. 606591316704
	2. 27169633E-02	7. 71973837E-02	0
	3. 68131973E-02	. 1250995776849	0
	5. 51723199E-02	. 1874880319513	0
	8. 80625866E-02	. 2992566032548	0
	. 1387079518142	. 4713610180384	0
	. 2276147555443	. 7734864619562	1. 42370623E-03
	6. 85724662E-03	2. 33024762E-02	0
	2. 03084481E-02	6. 90127037E-02	0
	3. 62671967E-02	. 1232441438515	0
	5. 91590849E-02	. 2010359618706	0
	8. 15183699E-02	. 2770178734614	0
	. 105173011563	. 357401700134	0
	1. 30214091E-02	4. 42496959E-02	0
	2. 01002780E-02	6. 83052947E-02	0
	3. 18518968E-02	. 1082399553763	0
	4. 54637141E-02	. 1544959919309	0
	5. 90604582E-02	. 2007008059024	0
	7. 80867001E-02	. 2653562827574	0
	1. 74339044E-02	5. 92443536E-02	0
	2. 21145385E-02	7. 51502079E-02	0
	3. 01539937E-02	. 1024700964571	0
	3. 89545929E-02	. 1323765247241	0
	4. 69640972E-02	. 1595946333215	0

2. 31904397E-02	9. 91957218E-02	0
3. 54320933E-02	. 1204062736214	0
4. 04201166E-02	. 1373567057915	0
4. 57975224E-02	. 1556303479221	0
2. 06441623E-02	7. 01535368E-02	0
2. 35964366E-02	8. 01860330E-02	0
2. 86337161E-02	9. 73038490E-02	0
3. 37403381E-02	. 1146573064941	0
3. 79004780E-02	. 1288215892879	0
4. 16386361E-02	. 1414975107724	0

ORRIMIENTOS DURANTE EL ESCALON 0

X	Y	X'	Y'
0	0	0	0
0	-1. 38063261E-04	0	-1. 38063261E-04
0	-2. 81374979E-04	0	-2. 81374979E-04
0	-5. 12282553E-04	0	-5. 12282553E-04
0	-7. 73397462E-04	0	-7. 73397462E-04
0	-1. 19697821E-03	0	-1. 19697821E-03
0	-1. 72790706E-03	0	-1. 72790706E-03
6. 05545525E-05	0	6. 05545525E-05	0
7. 10441481E-05	-1. 25134139E-04	7. 10441481E-05	-1. 25134139E-04
1. 08361042E-04	-2. 50930206E-04	1. 08361042E-04	-2. 50930206E-04
1. 82211313E-04	-4. 55881166E-04	1. 82211313E-04	-4. 55881166E-04
3. 02819450E-04	-6. 79797021E-04	3. 02819450E-04	-6. 79797021E-04
5. 41593145E-04	-1. 10062887E-03	5. 41593145E-04	-1. 10062887E-03
8. 17631065E-04	-1. 92892423E-03	8. 17631065E-04	-1. 92892423E-03
1. 09908309E-04	0	1. 09908309E-04	0
1. 29820377E-04	-9. 11258338E-05	1. 29820377E-04	-9. 11258338E-05
1. 89892783E-04	-1. 75791724E-04	1. 89892783E-04	-1. 75791724E-04
3. 17116442E-04	-2. 95496071E-04	3. 17116442E-04	-2. 95496071E-04
5. 03877123E-04	-4. 07543018E-04	5. 03877123E-04	-4. 07543018E-04
9. 10405083E-04	-5. 56580781E-04	9. 10405083E-04	-5. 56580781E-04
1. 45026793E-03	-7. 29734228E-04	1. 45026793E-03	-7. 29734228E-04
1. 44303237E-04	0	1. 44303237E-04	0
1. 66297337E-04	-5. 06179399E-05	1. 66297337E-04	-5. 06179399E-05
2. 35686673E-04	-8. 93583230E-05	2. 35686673E-04	-8. 93583230E-05
3. 70043319E-04	-1. 17735126E-04	3. 70043319E-04	-1. 17735126E-04
5. 57645578E-04	-1. 12383509E-04	5. 57645578E-04	-1. 12383509E-04

1. 26386087E-03	4. 01788854E-04	1. 26386087E-03	4. 01788854E-04
1. 64707567E-04	0	1. 64707567E-04	0
1. 86589359E-04	-3. 64386287E-06	1. 86589359E-04	-3. 64386287E-06
2. 48002475E-04	2. 48869579E-06	2. 48002475E-04	2. 48869579E-06
3. 59510631E-04	2. 90823846E-05	3. 59510631E-04	2. 90823846E-05
4. 85931656E-04	7. 85618410E-05	4. 85931656E-04	7. 85618410E-05
6. 21217226E-04	1. 74441593E-04	6. 21217226E-04	1. 74441593E-04
7. 62418058E-04	2. 92516081E-04	7. 62418058E-04	2. 92516081E-04
1. 59486390E-04	0	1. 59486390E-04	0
1. 77773634E-04	2. 23597323E-05	1. 77773634E-04	2. 23597323E-05
2. 26078783E-04	4. 69665907E-05	2. 26078783E-04	4. 69665907E-05
3. 10755820E-04	9. 10514050E-05	3. 10755820E-04	9. 10514050E-05
3. 86729107E-04	1. 40210188E-04	3. 86729107E-04	1. 40210188E-04
4. 69899093E-04	2. 11344223E-04	4. 69899093E-04	2. 11344223E-04
5. 67943713E-04	3. 23798054E-04	5. 67943713E-04	3. 23798054E-04
1. 32056796E-04	0	1. 32056796E-04	0
1. 45071257E-04	3. 77722388E-05	1. 45071257E-04	3. 77722388E-05
1. 78883247E-04	7. 30888154E-05	1. 78883247E-04	7. 30888154E-05
2. 32059143E-04	1. 23423160E-04	2. 32059143E-04	1. 23423160E-04
2. 75756821E-04	1. 69098858E-04	2. 75756821E-04	1. 69098858E-04
3. 18849853E-04	2. 28975586E-04	3. 18849853E-04	2. 28975586E-04
3. 56724055E-04	2. 97656204E-04	3. 56724055E-04	2. 97656204E-04
9. 27005372E-05	0	9. 27005372E-05	0
1. 01324889E-04	4. 53303880E-05	1. 01324889E-04	4. 53303880E-05
1. 21968811E-04	8. 55094147E-05	1. 21968811E-04	8. 55094147E-05
1. 53255096E-04	1. 36963931E-04	1. 53255096E-04	1. 36963931E-04
1. 76774841E-04	1. 80181247E-04	1. 76774841E-04	1. 80181247E-04
1. 98407636E-04	2. 30016619E-04	1. 98407636E-04	2. 30016619E-04
2. 21572012E-04	2. 89133131E-04	2. 21572012E-04	2. 89133131E-04
4. 77273186E-05	0	4. 77273186E-05	0
5. 17874105E-05	4. 91803093E-05	5. 17874105E-05	4. 91803093E-05
6. 16868194E-05	9. 13658854E-05	6. 16868194E-05	9. 13658854E-05
7. 59223129E-05	1. 43122449E-04	7. 59223129E-05	1. 43122449E-04
8. 63178190E-05	1. 83800037E-04	8. 63178190E-05	1. 83800037E-04

0	0	0	0
0	5. 03344198E-05	0	5. 03344198E-05
			294
0	9. 32545164E-05	0	9. 32545164E-05
0	1. 44704801E-04	0	1. 44704801E-04
0	1. 85147279E-04	0	1. 85147279E-04
0	2. 29856757E-04	0	2. 29856757E-04
0	2. 79602253E-04	0	2. 79602253E-04

## FASES PLASTICAS

\*\*\*\*\*

### ESCALON DE CARGAS N. 1

\*\*\*\*\*

### INCREMENTO DE LAS TENSIONES

ELEMENTO	TX	TY	TXY	H	T. I	T. II	R
1	0. 0340	0. 790	0. 012	1. 57E-04	0. 7910	0. 0338	-0. 97
2	0. 1022	0. 877	0. 034	2. 41E-04	0. 8788	0. 1007	-2. 53
3	-0. 0138	1. 033	0. 063	2. 03E-04	1. 0370	-0. 0177	-3. 47
4	0. 3470	1. 117	0. 098	7. 55E-04	1. 1299	0. 3346	-7. 17
5	1. 0666	1. 360	0. 061	2. 66E-03	1. 3725	1. 0541	-11. 40
6	1. 7255	1. 729	-0. 026	1. 20E-02	1. 7547	1. 7006	42. 69
7	0. 0592	0. 706	0. 038	1. 56E-04	0. 7086	0. 0569	-3. 43
8	0. 1240	0. 788	0. 096	2. 36E-04	0. 8020	0. 1104	-8. 06
9	0. 0505	0. 898	0. 187	3. 00E-04	0. 9381	0. 0110	-11. 91
10	0. 3801	1. 059	0. 274	7. 69E-04	1. 1568	0. 2828	-19. 49
11	0. 8265	1. 007	0. 240	2. 03E-03	1. 1736	0. 6600	-34. 70
12	1. 4140	1. 332	0. 101	9. 75E-03	1. 4823	1. 2637	33. 97
13	0. 1149	0. 573	0. 051	1. 62E-04	0. 5789	0. 1092	-6. 34
14	0. 1312	0. 585	0. 140	1. 99E-04	0. 6258	0. 0912	-15. 87
15	0. 2117	0. 656	0. 260	3. 69E-04	0. 7768	0. 0914	-24. 76
16	0. 3270	0. 630	0. 406	5. 63E-04	0. 9122	0. 0448	-34. 77
17	0. 8202	0. 678	0. 383	1. 83E-03	1. 1394	0. 3588	39. 75
18	0. 6022	0. 439	0. 095	3. 93E-03	0. 6464	0. 3951	24. 81
19	0. 1759	0. 387	0. 050	1. 98E-04	0. 3984	0. 1645	-12. 74
20	0. 2131	0. 381	0. 138	2. 55E-04	0. 4600	0. 1349	-29. 35
21	0. 2715	0. 323	0. 211	3. 98E-04	0. 5105	0. 0840	-41. 53
22	0. 4447	0. 247	0. 265	6. 77E-04	0. 6292	0. 0627	34. 80
23	0. 5804	0. 075	0. 196	1. 29E-03	0. 6476	0. 0078	18. 91
24	0. 2938	-0. 053	0. 046	1. 77E-03	0. 3000	-0. 0601	7. 54
25	0. 2499	0. 232	0. 040	2. 12E-04	0. 2827	0. 1996	38. 92
26	0. 2601	0. 202	0. 105	2. 45E-04	0. 3409	0. 1217	37. 39
27	0. 3270	0. 166	0. 146	4. 01E-04	0. 4139	0. 0797	30. 65
28	0. 3995	0. 101	0. 148	5. 57E-04	0. 4611	0. 0395	22. 47
29	0. 3803	0. 046	0. 092	8. 48E-04	0. 4041	0. 0228	14. 45

33	0.3384	0.094	0.094	4.48E-04	0.3785	0.0620	18.80
34	0.3397	0.056	0.083	5.32E-04	0.3623	0.0337	15.20
35	0.2899	0.030	0.050	7.42E-04	0.2995	0.0206	10.68
36	0.1263	0.001	0.014	9.40E-04	0.1280	-0.0005	6.64
37	0.3589	0.098	0.019	2.93E-04	0.3604	0.0973	4.33
38	0.3373	0.082	0.049	3.15E-04	0.3464	0.0735	10.54
39	0.3326	0.057	0.055	4.26E-04	0.3435	0.0466	11.07
40	0.2981	0.033	0.044	4.59E-04	0.3055	0.0262	9.36
41	0.2209	0.013	0.024	5.57E-04	0.2238	0.0101	6.62
42	0.0904	0.005	0.006	6.85E-04	0.0910	0.0049	4.57
43	0.3907	0.077	0.011	3.12E-04	0.3911	0.0772	2.12
44	0.3524	0.061	0.027	3.23E-04	0.3550	0.0591	5.39
45	0.3251	0.041	0.029	4.10E-04	0.3282	0.0381	5.89
46	0.2682	0.021	0.021	4.09E-04	0.2701	0.0199	5.04
47	0.1896	0.011	0.011	4.78E-04	0.1903	0.0109	3.74
48	0.0722	0.002	0.003	5.42E-04	0.0723	0.0023	2.61
49	0.4060	0.068	0.003	3.21E-04	0.4060	0.0685	0.64
50	0.3590	0.053	0.008	3.26E-04	0.3593	0.0531	1.67
51	0.3194	0.034	0.009	4.01E-04	0.3197	0.0341	1.85
52	0.2560	0.019	0.006	3.89E-04	0.2562	0.0189	1.62
53	0.1748	0.009	0.003	4.40E-04	0.1748	0.0090	1.20
54	0.0653	0.002	0.000	4.92E-04	0.0653	0.0028	0.82

295

DRILATEROS EN LOS QUE EL COEF. DE PLASTICIDAD ES <0>1

.9419732240901

- 1
- 1
- 1
- 1
- 1
- 1
- 1

.9557665410824

- 1
- 1
- 1

ENSIONES TOTALES EN LOS CUADRILATROS

DRILATERO	TX	TY	TXV	T. I	T. II	A
1	0.0417	1.061	0.018	1.0620	0.0414	-1.02
2	0.1391	1.183	0.049	1.1856	0.1368	-2.69
3	-0.0032	1.438	0.090	1.4443	-0.0089	-3.57
4	0.4280	1.545	0.126	1.5592	0.4138	-6.39
5	1.2035	1.858	0.088	1.8706	1.1918	-7.55
6	2.0892	2.287	-0.023	2.2904	2.0865	6.63
7	0.0771	0.940	0.053	0.9436	0.0738	-3.51
8	0.1716	1.046	0.134	1.0665	0.1514	-8.52
9	0.1072	1.187	0.244	1.2401	0.0542	-12.20
10	0.4766	1.396	0.352	1.5153	0.3573	-18.72
11	0.9504	1.375	0.331	1.5568	0.7690	-28.68
12	1.7086	1.769	0.154	1.8967	1.5815	-39.42
13	0.1513	0.751	0.069	0.7592	0.1433	-6.51
14	0.1873	0.765	0.187	0.8207	0.1319	-16.47
15	0.2885	0.839	0.329	0.9930	0.1347	-25.04
16	0.4101	0.806	0.517	1.1627	0.0542	-34.51
17	0.9728	0.841	0.483	1.3948	0.4190	41.11
18	0.7493	0.555	0.150	0.8314	0.4737	28.61
19	0.2335	0.498	0.065	0.5143	0.2181	-13.20
20	0.2842	0.485	0.178	0.5896	0.1802	-30.26
21	0.3553	0.408	0.262	0.6452	0.1182	-42.12
22	0.5456	0.309	0.321	0.7700	0.0846	34.90
23	0.7037	0.183	0.239	0.7876	0.0199	19.30
24	-	-	-	0.3634	-0.0730	7.78

27	0. 4140	0. 202	0. 178	0. 5156	0. 1016	29. 68
28	0. 4930	0. 124	0. 178	0. 5653	0. 0519	22. 03
29	0. 4593	0. 054	0. 109	0. 4872	0. 0261	14. 23
30	0. 2423	0. 043	0. 037	0. 2490	0. 0371	10. 23
31	0. 4029	0. 177	0. 035	0. 4084	0. 1719	8. 72
32	0. 3935	0. 154	0. 091	0. 4244	0. 1232	13. 68
33	0. 4258	0. 114	0. 113	0. 4625	0. 0773	17. 97
34	0. 4180	0. 066	0. 098	0. 4439	0. 0410	14. 68
35	0. 3528	0. 037	0. 060	0. 3639	0. 0259	10. 42
36	0. 1522	0. 001	0. 017	0. 1542	-0. 0008	6. 53
37	0. 4633	0. 120	0. 024	0. 4649	0. 1183	3. 99
38	0. 4302	0. 100	0. 059	0. 4405	0. 0898	9. 86
39	0. 4166	0. 068	0. 066	0. 4290	0. 0565	10. 50
40	0. 3687	0. 040	0. 053	0. 3771	0. 0323	8. 97
41	0. 2703	0. 015	0. 028	0. 2736	0. 0121	6. 38
42	0. 1099	0. 006	0. 008	0. 1106	0. 0061	4. 42
43	0. 5017	0. 094	0. 014	0. 5022	0. 0936	1. 97
44	0. 4475	0. 074	0. 033	0. 4504	0. 0716	5. 04
45	0. 4074	0. 049	0. 035	0. 4109	0. 0464	5. 58
46	0. 3325	0. 026	0. 025	0. 3347	0. 0240	4. 81
47	0. 2335	0. 014	0. 013	0. 2344	0. 0134	3. 58
48	0. 0884	0. 002	0. 003	0. 0885	0. 0027	2. 51
49	0. 5201	0. 093	0. 004	0. 5202	0. 0831	0. 59
50	0. 4554	0. 064	0. 010	0. 4557	0. 0643	1. 56
51	0. 4003	0. 041	0. 010	0. 4006	0. 0412	1. 74
52	0. 3181	0. 023	0. 007	0. 3183	0. 0231	1. 54
53	0. 2159	0. 011	0. 004	0. 2159	0. 0110	1. 15
54	0. 0803	0. 003	0. 001	0. 0803	0. 0035	0. 78

DRILATEROS PLASTIFICADOS

- 3
- 4
- 5
- 6
- 10
- 11
- 12
- 16
- 17
- 18
- 24

DRILATEROS A PUNTO DE PLASTIFICAR

- 9
- 23
- 30

DRILATERO

COEF.

INCREMENTO

FACTOR

. 3751854864587	. 278338769849	0
. 5151143814874	. 3820757082271	0
1	. 7348855530186	1
1	1. 231777474953	1
1	2. 13937228966	1
1	3. 39822635886	1
. 320620180947	. 2401915478937	0
. 4493144072869	. 3396119957051	0
1	. 6337212143012	. 700615894841
1	. 9811054033574	1
1	1. 734318486987	1
1	3. 044441595584	1
. 2271315324804	. 1732249444424	0
. 3318451391325	. 2579307165925	0

1  
2  
3  
4  
5  
6  
7  
8  
9  
10  
11  
12  
13  
14  
15  
16  
17  
18  
19  
20  
21  
22  
23  
24  
25  
26  
27  
28  
29  
30  
31  
32  
33  
34  
35  
36  
37  
38  
39  
40  
41  
42  
43  
44  
45  
46  
47  
48  
49  
50  
51  
52  
53  
54  
55  
56  
57  
58  
59  
60  
61  
62  
63  
64  
65  
66  
67  
68  
69  
70  
71  
72  
73  
74  
75  
76  
77  
78  
79  
80  
81  
82  
83  
84  
85  
86  
87  
88  
89  
90  
91  
92  
93  
94  
95  
96  
97  
98  
99  
100

1	1081561485762	1. 4541658668964	1
	. 1828775125037	8. 54391771E-02	0
	. 2953208681751	. 1452643151254	0
	. 5049212569969	. 2481485402199	0
1		. 4168586703259	0
1		. 6783764715405	. 730362734677
2. 886944438E-02		. 7734864619562	1
9. 85338672E-02		2. 20121972E-02	0
. 1938578270621		7. 82254190E-02	0
. 33588645078		. 1567906303434	0
. 4734522741527		. 275927365822	0
1		. 3919339042128	0
5. 04781413E-02		. 5325963695625	. 319877791934
9. 11676623E-02		3. 74487321E-02	0
. 1623173495039		7. 10673843E-02	0
. 2489786885732		. 1304654526772	0
. 3394277715042		. 2035149743836	0
. 4587321995225		. 2803673132805	0
7. 25708240E-02		. 3806454993634	0
. 100336015804		5. 51369195E-02	0
. 1496965153116		7. 82214772E-02	0
. 2062428785589		. 1195425215408	0
. 2576977509401		. 167288285561	0
. 3066936682123		. 2107336536529	0
8. 50423015E-02		. 2527689115177	0
. 1061403307501		6. 53686108E-02	0
. 1432619856093		8. 29547654E-02	0
. 1826190261717		. 1140714658461	0
. 2155682174541		. 1471869328071	0
. 2503543997492		. 175148100815	0
9. 06940277E-02		. 2045568773104	0
. 108511954682		7. 00498653E-02	0
. 139576219556		8. 49155180E-02	0
. 1718864594339		. 1109425033916	0
. 1986656353774		. 1381461212734	0
. 2233308087323		. 1607571573409	0
		. 1816921726234	0

ARRIMIENTOS DURANTE EL ESCALON 1

DO	X	Y	X'	Y'
	0	0	0	0
	0	-5. 30248911E-04	0	-3. 92185650E-04
	0	-1. 07700613E-03	0	-7. 95631150E-04
	0	-2. 06733342E-03	0	-1. 55505087E-03
	0	-3. 53279669E-03	0	-2. 75939943E-03
	0	-6. 03806730E-03	0	-4. 84108909E-03
	0	-8. 65969229E-03	0	-6. 93178523E-03
2. 33049224E-04	0		1. 72494672E-04	0
2. 76955391E-04	-4. 89760319E-04		2. 05911242E-04	-3. 64626179E-04
4. 19150878E-04	-9. 87162504E-04		3. 10789836E-04	-7. 36232297E-04
8. 48604694E-04	-1. 89846856E-03		6. 66393380E-04	-1. 44258740E-03
				-2. 34890499E-03

4. 46687487E-03	-1. 05584203E-02	3. 64924380E-03	-8. 62949610E-03
4. 26351197E-04	0	3. 16442887E-04	0
5. 15278834E-04	-3. 73490512E-04	3. 85458456E-04	-2. 82364678E-04
7. 64040611E-04	-7. 50908092E-04	5. 74147827E-04	-5. 75116368E-04
1. 51168493E-03	-1. 35155699E-03	1. 19456849E-03	-1. 05606092E-03
2. 81348739E-03	-1. 95079896E-03	2. 30961026E-03	-1. 54325594E-03
5. 41453845E-03	-2. 74726415E-03	4. 50413337E-03	-2. 19068337E-03
8. 23768147E-03	-3. 64471269E-03	6. 78741354E-03	-2. 91497846E-03
5. 74041791E-04	0	4. 29738554E-04	0
6. 67584496E-04	-2. 26501999E-04	5. 01287158E-04	-1. 75884059E-04
9. 97042454E-04	-4. 27045676E-04	7. 61355780E-04	-3. 37687353E-04
1. 79261295E-03	-5. 97291566E-04	1. 42256963E-03	-4. 79556440E-04
3. 06343049E-03	-5. 28920705E-04	2. 50578491E-03	-4. 16537196E-04
5. 09733831E-03	3. 34801523E-04	4. 21660450E-03	3. 22244449E-04
7. 23679102E-03	2. 55034066E-03	5. 97293014E-03	2. 14855181E-03
6. 66388128E-04	0	5. 01680561E-04	0
7. 74225967E-04	-3. 88150777E-05	5. 87636600E-04	-3. 51712148E-05
1. 09177920E-03	-3. 96496215E-05	8. 43776727E-04	-4. 21383173E-05
1. 77179209E-03	5. 66803794E-05	1. 41228145E-03	2. 75979948E-05
2. 58748172E-03	3. 19489272E-04	2. 10155006E-03	2. 40927431E-04
3. 47333990E-03	8. 55731827E-04	2. 85212267E-03	6. 81290234E-04
4. 44287395E-03	1. 58546966E-03	3. 68045589E-03	1. 29295358E-03
6. 59795721E-04	0	5. 00309331E-04	0
7. 53668148E-04	7. 50153786E-05	5. 75894514E-04	5. 26556463E-05
1. 02409108E-03	1. 64095856E-04	7. 98012304E-04	1. 17129265E-04
1. 54421912E-03	3. 63026935E-04	1. 23346330E-03	2. 71975530E-04
2. 04053579E-03	6. 16563969E-04	1. 65380669E-03	4. 76353780E-04
2. 60170113E-03	1. 02604454E-03	2. 13180204E-03	8. 14700317E-04
3. 22999094E-03	1. 68598788E-03	2. 66204723E-03	1. 36218983E-03
5. 57061802E-04	0	4. 25005006E-04	0
6. 30748007E-04	1. 50638681E-04	4. 85676750E-04	1. 12866442E-04
8. 27748850E-04	3. 01004988E-04	6. 48865603E-04	2. 27916172E-04
1. 15851610E-03	5. 38607855E-04	9. 26456957E-04	4. 15184695E-04
1. 44296780E-03	7. 76706332E-04	1. 16721090E-03	6. 07607473E-04

1	1. 99182083E-03	1. 50150305E-03	1. 63509677E-03	1. 20384685E-03
2	3. 97435349E-04	0	3. 04734812E-04	0 <span style="float: right;">299</span>
3	4. 47146390E-04	1. 92589388E-04	3. 45821501E-04	1. 47259000E-04
4	5. 71209132E-04	3. 72329083E-04	4. 49240321E-04	2. 86819668E-04
5	7. 65981816E-04	6. 21531717E-04	6. 12726719E-04	4. 84567785E-04
6	9. 17015867E-04	8. 42676351E-04	7. 40241026E-04	6. 62495103E-04
7	1. 06136543E-03	1. 11016515E-03	8. 62957801E-04	8. 80148532E-04
8	1. 21047019E-03	1. 43551501E-03	9. 88898182E-04	1. 14636188E-03
9	2. 06362601E-04	0	1. 58635282E-04	0
0	2. 30637080E-04	2. 14992669E-04	1. 78849669E-04	1. 65812360E-04
1	2. 90402518E-04	4. 08239918E-04	2. 28715699E-04	3. 16874033E-04
2	3. 79258301E-04	6. 59684880E-04	3. 03335988E-04	5. 16562431E-04
3	4. 46180540E-04	8. 67319667E-04	3. 59862721E-04	6. 83519630E-04
4	5. 09330104E-04	1. 11126619E-03	4. 13182579E-04	8. 80942965E-04
5	5. 66154372E-04	1. 38409190E-03	4. 61683090E-04	1. 10320476E-03
6	0	0	0	0
7	0	2. 22007011E-04	0	1. 71672591E-04
8	0	4. 19539461E-04	0	3. 26284945E-04
9	0	6. 70340115E-04	0	5. 25635313E-04
0	0	8. 75424748E-04	0	6. 90277468E-04
1	0	1. 10923354E-03	0	8. 79376784E-04
2	0	1. 37415007E-03	0	1. 09454781E-03

**ESCALON DE CARGAS N. 2**

\*\*\*\*\*

**INCREMENTO DE LAS TENSIONES**

ELEMENTO	TX	TY	TXY	H	T. I	T. II	A
1	0. 0148	0. 682	0. 000	1. 28E-04	0. 6828	0. 0148	-0. 07
2	-0. 2826	0. 765	0. 076	-1. 68E-05	0. 7710	-0. 2882	-4. 16
3	0. 7890	0. 770	0. 062	8. 96E-04	0. 8435	0. 7163	40. 89
4	1. 0739	1. 090	-0. 036	1. 50E-03	1. 1194	1. 0447	38. 71
5	1. 1375	1. 189	-0. 097	2. 68E-03	1. 2648	1. 0625	37. 49
6	1. 5011	1. 532	0. 049	1. 05E-02	1. 5692	1. 4645	-36. 20
7	0. 0060	0. 640	0. 016	1. 16E-04	0. 6412	0. 0056	-1. 49
8	-0. 0346	0. 740	0. 178	1. 30E-04	0. 7798	-0. 0736	-12. 34

## BIBLIOGRAFIA

BIBLIOGRAFIA

- AAS, G. (1.965).- " A study of the effect of vane shape and rate of strain on the measured values of in situ shear strength of clays ". Proc. 6 th. Int. Conf. Soil Mech. Fdn. Engng, Montreal 1, pp. 141-145.
  
- ARTHUR, J.R.F. Y B.K. MENZIES (1.972).- " Inherent anisotropy in a sand ". Geotechnique 22, No 1, pp. 115-128.
  
- ATKINSON, J.H. (1.975).- " Anisotropic elastic deformations in laboratory tests on undisturbed London Clay ". Geotechnique 25 N. 2, pp. 357-374.
  
- BARDEN, L. (1.963).- " Stresses and displacements in a crossanisotropic soil ". Geotechnique 13, pp. 198-210.
  
- BHASKARAN, B. (1.974).- " Strength anisotropy in kaolinite clay ". Geotechnique 24, N<sup>o</sup> 4, pp. 674-677.

- BISHOP, A.W. (1.966).- " The strength of soils as engineering materials ". Geotechnique 16, Nº 2, pp. 91-130.
  
- BJERRUM, L. (1.973).- " Problems of Soil Mechanics and construction on soft clays and structurally unstable soils ". State-of-the-art Report. Proc. 8th. Int. Conf. Soil Mech. Found. Eng Moscú. Vol. 3. pp. 109-190.
  
- BJERRUM, L. y A. LANDVA (1.966).- " Direct simple shear-tests on a Norwegian quick clay ". Geotechnique 16, Vol. 1, - pp. 1-20.
  
- BJERRUM, L. y T.C. KENNEY (1.967).- " Effect of structure on the shear behaviour of normally consolidated quick clays ". Geat. Conf. Oslo on Shear Strength Properties of Natural Soil and Rocks, Vol. 2, pp. 19-27.
  
- BURLAND J.B. Y C.P. WROTH (1.974).- " Allowable and differential settlements of structures, including damage and soil - structure interaction ". Conf. on Settlement of Structures, Cambridge, General Report.

- CAÑIZO, L. (1.971).- " Plastificación progresiva de un talud cou - lombiano ". Tesis doctoral. Univ. Polit. Madrid.
  
- CASAGRANDE, A. Y N. CARRILLO (1.944).- " Shear failure of aniso - tropic materials ". Journ. Boston Soc. Civ. Engrs. Vol. 31, pp. 74-87.
  
- CHEN, W. F., N. SNITBHAN Y H. Y. FANG (1.975).- " Stability of slopes in anisotropic, nonhomogeneous soils ". Canadian Geotechnical Journal, Vol. 12, pp. 146-152.
  
- CHEN, W. F. (1.975).- "Limit analysis and soil plasticity". El sevier. N. York.
  
- CHRISTIAN, J. T. (1.968).- " Undrained stress distribution by numerical methods ". Journ. Soil Mech. Found. Div. ASCE Vol. 94.SM6, pp. 1333-1345.
  
- DAHL, D. y B. VOIGHT (1.969).- " Isotropic and anisotropic plas - tic yield associated with cylindrical underground open - ings ". Proc. Int. Symp. on Large Permanent Underground Openings. Oslo pp. 105-110.
  
- DASCAL, O. y J.-P. TOURNIER (1.975).- " Embankments on soft and sensitive clay foundation ". Jpurnal of Geotechnical Engineering Division. Proc. ASCE. Vol. 101, GT3, pp. 297-314.

- DeLORY, F. A. y H. W. LAI (1.971).- " Variation in undrained shearing strength by semiconfined tests ". Can. Geot. Journ. Vol. 8, pp. 538-545.
- DOOLEY, J. C. (1.964).- Discusión a " Stresses and displacements in a crossanisotropic soil ". Géotechnique 14, Nº 3.
- DUNCAN, J. M. y H. B. SEED (1.966).- " Anisotropy and stress reorientation in clay ". A.S.C.E. Proceedings, Vol. 92, Nº SM6, pp. 81-104.
- DUNLOP, P y DUNCAN, J. M., (1.970).- " Development of failure around excavated slopes ". Jnc Soil Mech. Fdns Div. A.S.C.E. Engrs 96, SMZ, pp. 471-493.
- EL-SOHBY, M. A. y K. Z. ANDRAWES (1.972).- " Deformation characteristics of granular materials under hydrostatic compression ". Canad. Geot. Journ., Vol. 9, Nº 7, pp. 338-351.
- FLAATE, K. y T. PREBBER (1.974).- " Stability of road embankments on soft clay ". Can. Geot. Journ., Vol. 11, pp. 72-88.
- GIBSON, R. E. (1.967).- " Some results concerning displacements and stresses in a non homogeneous elastic half-space ". Geotechnique 17, nº 1, pp. 58-67.

- GIBSON, R. E. (1.974).- " The analytical method in Soil Mechanics".  
Geotechnique 24, Nº 2, pp. 115-139.
- GREEN G. E. y D. W. READES (1.975).- " Boundary conditions, ani -  
isotropy and sample shape effects on the stress-strain  
behaviour of sand in triaxial compression and plane  
strain ". Geotechnique 25, Nº 2, pp. 333-356.
- HAMBLY, E. C. (1.969).- " A new triaxial apparatus ". Geotechnique  
19, pp. 307-309.
- HANSEN, J. BRINCH y R. E. GIBSON (1.949).- " Undrained shear  
strengths of anisotropically consolidated clays ". Geo-  
technique 1, Nº 3, pp. 189-204.
- HEARMON, R. F. S. (1.961).- " An introduction to Applied Anisotro-  
pic Elasticity ". Oxford Univ. Press. Oxford.
- HERRMANN, L. R. (1.965).- " Elasticity equations for incompressi -  
ble and nearly incompressible materials by a variatio -  
nal theorem ". AIAA Journal, Vol. 3, pp. 1896-1900.
- HILL, R. (1.950).- " The matematical theory of Plasticity ". Ox -  
ford University Press.

- HOLLINGSHEAD, G. W. y G. P. RAYMOND (1.971).- " Prediction of undrained movements caused by embankments on muskeg ".  
Can. Geot. Journ., Vol. 5, pp. 23-35.
  
- HWANG, C. T., M. K. HO y N. E. WILSON (1.969).- " Finite element analysis of soil deformations ". Proc. Symp. on Applications of Finite Element Methods in Civil Engineering. Nashville. pp. 729-746.
  
- KHERA, R. P. y R. J. KRIZEK (1.968).- " Effect of principal consolidation stress difference on undrained shear strength"  
Soils and Foundations. Vol. 8, Nº 1, pp. 1-17.
  
- LA ROCHELLE, P., B. TRAK, F. TAVENAS y M. ROY (1.974).- " Failure of a test embankment on a sensitive Champlain clay ".  
Can. Geot. Journ., Vol. 11, pp. 142-164.
  
- LADD, C. C. (1.965).- "Stress-strain behaviour of anisotropically consolidated clays during undrained shear ". VI th. Int Conf. Soil Mech. and Found Eng. Montreal. Vol 1, pp. - 282-286.

- LADD, C. C. y W. A. BAILEY, (1.964).- " The behaviour of saturated clays during sampling and testing". Geotechnique, 14: 1: pp. 353-358.
  
- LADD, C. C. y R. FOOTT (1.974).- " New design procedure for stability of soft clays ". Journ Geot. Engr. Div., ASCE, Vol. 100, proc. pp. 10664.
  
- LAMBE, T. W. (1.973).- " Up-to-date methods of investigating the strength and deformability of soils (Laboratory and field testing of soils for their strength, deformative and rheological properties ". General Report of Session 1 of the 8 th. Int. Conf. on SoilMech. and Found. Eng. Moscow, Vol. 3, pp. 2-43.
  
- LEKHNITSKII, S. G. (1.963).- " Theory of Elasticity of an anisotropic elastic body ". Holden-Day Inc. San Francisco.
  
- LO, K. Y. (1.965).- " Stability of slopes in anisotropic soils ". Journ Soil Mech. and Found Div. ASCE 91, SM4, pp. 85-106.

- LO, K. F., (1.969).- " The pore pressure-strain relationship of normally consolidated undisturbed clays ". Canadian Geotech. J., 6, pp. 383-412.
- LO, K. Y. y A. G. STERMAC (1.965).- " Failure of an embankment founded on a varved clay ". Can. Geot. Journ., Vol. 2, pp. 234-253.
- LOH, A. K. y R. T. HOLT (1.974).- " Directional variation in undrained shear strength and fabric of Winnipeg Upper Brown Clay ". Can. Geot. Journ., Vol. 11, Nº 3, pp. 430-437.
- LOVE, A. E. H. (1.944).- " A Treatise on the Mathematical Theory of Elasticity ". Dover. N. York.
- MARCHE, R. y R. CHAPUIS (1.974).- " Contrôle de la stabilité des remblais par la mesure des déplacements horizontaux ". Can. Geot. Journ., Vol. 11. pp. 182-201.
- MATSUMOTO, T., (1.976).- " Finite element analysis of immediate and consolidation de formations based on efective stress principle". Soils and Foundations, Vol. 16, nº 4, pp. 23-34.

- Mc CONNACHIE, I. (1.974).- " Fabric changes in consolidated kaolin ".  
Geotechnique 24, N° 2, pp. 207-222.
  
- MENZIES, B. K. (1.976).- " An approximate correction for the influence of strength anisotropy on conventional shear vane measurements used to predict field bearing capacity ".  
Geotechnique 26, N° 4, pp. 631-636.
  
- MENZIES, B. K. y L. K. MAILEY (1.976).- " Some measurements of strength anisotropy in soft clays using diamond-shaped shear vanes ". Geotechnique 26, N° 3, pp. 535-538.
  
- MITCHELL, R. J. (1.972). " Some deviations from isotropy in a lightly overconsolidated clay ". Geotechnique 22, N° 3, pp. 459-467.
  
- PARRY, R. H. G. y V. NADARAJAH (1.974).- " Observations of laboratory prepared, lightly overconsolidated specimens of kaolin ". Geotechnique 24, N° 3, pp. 345-358.
  
- PICKERING, D. J. (1.970).- " Anisotropic elastic parameters for soil ". Geotechnique 20, pp. 271-276.

- POULOS H. G. y E. H. DAVIS (1.974).- " Elastic Solutions for soil and rock Mechanics ". J. Wiley, New York.
- QUIGLEY, R. M. y C. D. THOMPSON (1.966).- " The fabric of anisotropically-consolidated sensitive marine clay ". Canad. Geot. Journ. Vol. 3, Nº 2, pp. 61-73.
- RAYMOND, G. P. (1.972).- " Prediction of undrained deformations and pore pressures in weak clay under two embankments ". Geotechnique 22, pp. 381-401.
- RAYMOND, G. P. (1.973).- Respuesta a discusión de A. O. Uriel. Geotechnique 23, pp. 298-301.
- REISSNER, E.- " On a variational Theorem in Elasticity ". Journal of Math. Phys., pp. 29-1950.
- ROSCOE, K. H. (1.970).- " The influence of strains in Soil Mechanics! Geotechnique 20, pp. 129-170.
- SAGASETA, C. (1.973).- " Estado tensodeformacional alrededor, de un túnel excavado en un medio elastoplástico, con especial consideración de la influencia del proceso constructivo ". Tesis doctoral. Univ. Polit. Madrid.

- SAGASETA, C. y F. BALLESTER (1.976).- " Un modelo elastoplástico anisótropo para arcillas blandas en procesos de carga sin drenaje ". Bol. Soc. Esp. Mec. Suelo y Cim. Nº 22, pp. 3-11.
  
- SALAMON, M. D. G. (1.968).- " Elastic moduli of a stratified rock mass ". Int. Journ. Rock Mech. Min. Sci., Vol 5, - Nº 6, pp. 519-527.
  
- SANKARAN, K. S. y R. BHASKARAN (1.972).- " Strength anisotropy in cohesive soils ". Proc. Symp. on Modern Trends in Civil Engineering, Roorkee, India, Vol 1, pp. 27-31.
  
- SANKARAN, K. S. y R. BHASKARAN (1.972 b).- " Discussion on the influence of structure on deformation and failure in a clay soil ". Geotechnique 22, Nº 4, pp. 669-670.
  
- SANKARAN; K. S. y R. BHASKARAN (1.973 a).- " Deformation and failure pattern in an anisotropic kaolinite clay ". Geotechnique 23, Nº 1, pp. 113-117.

- SANKARAN, K. S. y R. BHASKARAN (1.973 b).- Discusión: " Strength anisotropy and time effects in two sensitive clays ".  
Canad. Geot. Journ. Vol. 10, Nº 3, pp. 564-566.
  
- SKEMPTON, A. W., y HUTCHINSON, J., ( 1.969).- " Stability of Natural Slopes and Embankment Foundations ". Sesión 5. VII Congreso Internacional de Mecánica de Suelos e Ingeniería de Cimentaciones. México. .
  
- SCHMERTMANN, J. H. y J. O. OSTERBERG, (1.960).- " An experimental study of the development of cohesión and fricción - with axial strain in saturated cohesive soils ".  
ASCE. Res. Conf. on Shear Strength of Cohesive Soils.  
Boulder, Colo. pp. 643-694.
  
- STERMAC, A. G., K. Y. LO y A. K. BARSVARY (1.967).- " The performance of an embankment on a deep deposit of varved clay ". Can. Geot. Journ., Vol. 4, pp. 45-60.
  
- SUKLJE, (1.963). " The equivalent elastic constants of saturated soils exhibiting anisotropy and creep effects ". Geotechnique 13, pp. 291-309.

- TAVENAS, F. A., C. CHAPEAU, P. LA ROCHELLE y M. ROY (1.974).- -  
" Immediate settlements of three tests embankments on  
Champlain clay ". Can. Geot. Journ., Vol. 11, pp. 109-14.
  
- URIEL, A. (1.970).- " Analysis of stresses, pore pressures and  
settlements in anisotropic saturated undrained soils  
by finite elements ". M. Sc. Thesis. Univ. of London.
  
- URIEL, A. O. (1.972),- Discusión a " Anisotropic elastic parameters  
for soil ". por D. J. Pickering. Geotechnique 22, Nº 3,  
pp. 533-534.
  
- URIEL, A. y L. CAÑIZO (1.971).- " On the elastic anisotropy of  
soil ". Geotechnique 22, pp. 533-534.
  
- URIEL, S. y C. OTEO (1.976).- " Propiedades geotécnicas de las  
margas azules de Sevilla ". Simp. Nal. sobre Rocas  
Blandas. Madrid. Vol. I, A-9.
  
- WARD, W. H., A. MARSLAND y S. G. BUTLER (1.965).- " Properties -  
of the London Clay at the Ashford Common shaft ". -  
Geotechnique 15, Nº 4, pp. 321-344.

- WARD, W. H., S. G. SAMUELS y M E. BUTLER (1.959).- " Further studies of the properties of London Clay ". Geotechnique 9, Vol. 2, pp. 33-58.
  
- WASHIZU, K. (1.968).- " Variational methods in elasticity and plasticity ". Pergamon Press. Oxford.
  
- WROTH. C. P. y SIMPSON (1.972).- " An induced failure at a trial embankment: Part II finite element computations ". - Proc. Specialty Conf. en Performance of Earth and Earth-Supported Structures. Purdue Univ. Lafayette, Ind. - A.S.C.E. Vol. I, pt 1. pp. 64-78.
  
- ZIENKIEWICZ, O. C. (1.970).- " The finite element method in engineering science ". Mc. Graw-Hill-Londres.
  
- ZIENKIEWICZ, O. C. y Y. K. CHEUNG (1.967).- " The finite element method in structural and continuum Mechanics ". - McGraw-Hill-Londres.