DEPARTAMENTO DE MATEMATICA ECONOMICA, FINANCIERA Y ACTUARIAL

FACULTAD DE CIENCIAS ECONOMICAS Y EMPRESARIALES

UNIVERSIDAD DE BARCELONA

# HACIA UNA TEORIA DE CARTERAS DESDE EL PUNTO DE VISTA DE LA REVISION

TESIS DOCTORAL PRESENTADA POR:

*Mª Teresa Preixens Benedicto*

DIRECTOR:

*Dr.D. Máximo Borrell Vidal*

CATEDRATICO DE UNIVERSIDAD

BARCELONA, FEBRERO DE 1992

## 3.4. MODELO ESPERANZA-SEMIVARIANZA

### 3.4.1. Introducción

En el modelo E-V básico se utiliza la varianza como medida del riesgo de la rentabilidad de un título o de una cartera[134]. Ahora bien, **Markowitz**[135], **Mao**[136], **Mao** y **Brewster**[137], entre otros, admiten la posibilidad de utilizar otras medidas del riesgo alternativas, entre las cuales destaca la semivarianza.

Estas dos medidas del riesgo, varianza y semivarianza, obedecen (en el contexto de la Teoría de la Cartera) a dos formas distintas de definir el riesgo asociado a un título o a una cartera. Así, la varianza mide el riesgo suponiendo que al inversor le preocupa cualquier desviación (positiva o negativa) de la rentabilidad real respecto a la media; mientras que la semivarianza supone preocupación por una sóla clase de desviaciones.

Pueden ponerse dos objeciones a la varianza:

---

[134] Ver hipótesis **H.7.** del apartado **1.2.3.** de la presente Tesis.

[135] **H.MARKOWITZ**, op. cit., 1959, pp.188-201.

[136] **J.C.T.MAO**, "Models of Capital Budgeting, E-V vs. E-S", J.F.Q.A., 1970, pp.657-675.

[137] **J.C.T.MAO-J.F.BREWSTER**, "An E-$S_h$ Model of Capital Budgeting", incluido en **J.P.DICKINSON**, Portfolio Analysis. A Book of Readings (Saxon House/Lexington Books, Lexington, 1974), pp.85-100.

1) No todas las desviaciones tienen la misma importancia para el inversor. De hecho, mientras que una desviación negativa es considerada preocupante y no deseada por el inversor, no ocurre lo mismo con las desviaciones positivas que pueden reportarle importantes ventajas.

2) El inversor determina un nivel de rentabilidad deseado y lo que realmente le interesa es que la rentabilidad de la cartera no sea inferior a ese nivel fijado. Por tanto, al inversor le preocupan, especialmente, las desviaciones negativas de la rentabilidad real respecto al nivel considerado como objetivo y no con respecto a la rentabilidad esperada.

La medida del riesgo que recoge estas dos objeciones a la varianza es la semivarianza negativa definida como el valor esperado de las desviaciones negativas de la rentabilidad real respecto a un valor de referencia arbitrariamente escogido, al cuadrado.

Dados

•) $\tilde{R}_c$: variable aleatoria que representa la tasa de rentabilidad de la cartera;

•) h: valor crítico con el que se compara la rentabilidad de la cartera y por debajo del cual no se desea que se halle $\tilde{R}_c$. Este valor que no tiene porque coincidir con $E(\tilde{R}_c)$;

la semivarianza negativa ($S_h$) asociada al valor crítico h se define del siguiente modo:

$$S_h = E[(\tilde{R}_c - h)^-]^2 \qquad [27]$$

Si se mide el riesgo a través de la semivarianza negativa, se considera que el inversor se preocupa, únicamente, por las desviaciones negativas de la rentabilidad de la cartera respecto a un nivel previamente fijado. En este caso se define el riesgo como la posibilidad de no alcanzar el nivel deseado de rentabilidad[138].

Las desviaciones positivas de $\tilde{R}_c$ respecto a h no se tienen en cuenta puesto que el inversor sólo considera el riesgo de que $\tilde{R}_c$ no alcance el nivel deseado y no le preocupa que esté por encima del nivel previsto puesto que este hecho no le perjudica. Por tanto,

$$(\tilde{R}_c - h)^- = \begin{cases} \tilde{R}_c - h & \text{si } \tilde{R}_c - h \leq 0 \\ 0 & \text{si } \tilde{R}_c - h > 0 \end{cases} \qquad [28]$$

### 3.4.2. Hipótesis del modelo

Las hipótesis que comporta la utilización del modelo E-S son las siguientes:

**H.1.** La rentabilidad de los títulos ($\tilde{r}_i$) es una variable aleatoria cuya distribución de probabilidad no ha de ser, necesariamente, simétrica. Se admite, por tanto, cualquier tipo de distribución a diferencia de la hipótesis más restrictiva utilizada en el modelo E-V (distribución normal de la variable aleatoria).

**H.2.** El inversor admite como conocida la distribución de probabilidad de cada variable aleatoria $\tilde{r}_i$.

---

[138] R.B.PORTER, "Semivariance and Stochastic Dominance: A Comparison", A.E.R., 1974, p.201.

**H.3.** Todos los títulos considerados son arriesgados.

**H.4.** El inversor prefiere siempre más rentabilidad a menos rentabilidad.

**H.5.** Los inversores manifiestan aversión al riesgo para niveles de rentabilidad inferiores a h y neutralidad para niveles superiores a h. Puede decirse, de acuerdo con esta hipótesis, que la aversión al riesgo está acotada superiormente.

Diremos que el inversor presenta racionalidad limitada cuando su comportamiento es el descrito en **H.4.** y **H.5.**, es decir, cuando prefiere más rentabilidad a menos y su aversión al riesgo está acotada superiormente.

**H.6.** La función de utilidad es de la forma[139]

$$U(\tilde{R}_c) = a + b\cdot\tilde{R}_c + d\cdot[\min(\tilde{R}_c-h,0)]^2 =$$

$$= \begin{cases} a + b\cdot\tilde{R}_c + d\cdot(\tilde{R}_c-h)^2 & \text{si } \tilde{R}_c\leq h \\ a + b\cdot\tilde{R}_c & \text{si } \tilde{R}_c > h \end{cases} \qquad [29]$$

Esta función de utilidad es cuadrática para $\tilde{R}_c\leq h$ y lineal para $\tilde{R}_c > h$.

Como consecuencia de **H.4.** la función de utilidad ha de ser creciente en todo su dominio $[U'(\tilde{R}_c)>0]$ y además cóncava cuando $\tilde{R}_c\leq h$ y lineal cuando $\tilde{R}_c>h$ $[U''(\tilde{R}_c)<0$ si $\tilde{R}_c\leq h$ y $U''(\tilde{R}_c)=0$ si $\tilde{R}_c>h]$ para reflejar la hipótesis **H.5.**

[139] **H.MARKOWITZ**, op. cit., 1959, pp.290-291.

Las exigencias sobre el signo de estas dos derivadas determinan el signo de los parámetros que intervienen en la función de utilidad.

Teniendo en cuenta [29] la primera derivada de la función de utilidad es

$$U'(\tilde{R}_c) = \begin{cases} b + 2\cdot d\cdot(\tilde{R}_c - h) & \text{si } \tilde{R}_c \leq h \\ b & \text{si } \tilde{R}_c > h \end{cases} \qquad [30]$$

y su segunda derivada es

$$U''(\tilde{R}_c) = \begin{cases} 2\cdot d & \text{si } \tilde{R}_c \leq h \\ 0 & \text{si } \tilde{R}_c > h \end{cases} \qquad [31]$$

De [4] y [5] se desprende que $d<0$ y $b>0$

**H.7.** El inversor maximiza la utilidad esperada de la rentabilidad de la cartera.

**H.8.** Respecto a la participación de cada título en la cartera se cumplirá que

$$\sum_{i=1}^{N} X_i = 1$$

$$X_i \geq 0 \qquad i=1,2,\ldots,N.$$

### *3.4.3. Selección de la cartera óptima*

El objetivo del criterio Esperanza-Semivarianza (E-S), al igual que el criterio E-V, consiste en escoger, entre todas las carteras del conjunto eficiente, aquella cartera que maximice la utilidad esperada del inversor. Es decir, la selección de la cartera óptima se realiza en dos fases:

1) Obtención de todas las **carteras eficientes**, ó lo que es lo mismo, elección, de entre todas las carteras factibles, aquellas que según el criterio de eficiencia utilizado no sean dominadas por otras carteras.

El criterio E-S basa sus decisiones para determinar el conjunto eficiente en la esperanza de la rentabilidad y su semivarianza, en lugar de la varianza utilizada por el criterio E-V.

Según el criterio E-S, una cartera A es preferida a una cartera B si y sólo si:

a) $E_A \geq E_B$ y $S_{hA} < S_{hB}$ ó

b) $E_A > E_B$ y $S_{hA} \leq S_{hB}$

Y una cartera es eficiente según el criterio E-S si para su nivel de E, no existe otra cartera que tenga una $S_h$ menor ó si para su nivel de

$S_h$ no existe otra cartera con una E superior[140].

Para encontrar el conjunto eficiente mediante la aplicación del criterio E-S, deberá resolverse el siguiente problema[141]:

$$\left.\begin{array}{ll} \text{Max } [\phi \cdot E(\tilde{R}_c) - S_h(\tilde{R}_c)] & \\ \text{sujeto a} & \\ \sum_{i=1}^{N} X_i = 1 & \\ X_i \geq 0 & i=1,2,\ldots,N \end{array}\right\}$$

[140]En el caso de que la variable aleatoria "rentabilidad de la cartera" se distribuya normalmente, el criterio E-S proporciona el mismo conjunto de carteras eficientes que el criterio E-V siempre y cuando $h=E(\tilde{R}_c)$, es decir, el valor tomado como base de comparación para hallar la semivarianza es, precisamente, el valor esperado de la rentabilidad de la cartera.

Así, si $h=E(\tilde{R}_c)$, la semivarianza es:

$$S_E(\tilde{R}_c) = E[(R_c - E(\tilde{R}_c))^-]^2$$

Y la relación entre la varianza y la semivarianza es

$$V(\tilde{R}_c)=E[R_c - E(\tilde{R}_c)]^2=E\{2\cdot[(R_c - E(\tilde{R}_c))^-]^2\}=2\cdot E[(R_c - E(\tilde{R}_c)^-]^2=2\cdot S_E(\tilde{R}_c)$$

Esta relación demuestra que la cartera con mínima $V(\tilde{R}_c)$ es también la que tiene mínima $S_E(\tilde{R}_c)$.

[141]El problema que se trata de resolver se diferencia del correspondiente al modelo E-V en su función objetivo. Una solución al mismo se halla en **W.W.HOGAN-J.M.WARREN**, "Computation of the Efficient Boundary in the E-S Portfolio Selection Model", J.F.Q.A., 1972, pp.1884-1886.

2) Una vez determinado el conjunto eficiente, cada inversor, en función de sus preferencias entre rentabilidad y riesgo, escoge aquella cartera que optimiza su utilidad esperada.

La función de utilidad esperada es:

$$E[U(\tilde{R}_c)] = \begin{cases} a + b\cdot E(\tilde{R}_c) + c\cdot E[(\tilde{R}_c-h)^2] & \text{si } \tilde{R}_c \leq h \\ a + b\cdot E(\tilde{R}_c) & \text{si } \tilde{R}_c > h \end{cases} =$$

$$= a + bE(\tilde{R}_c) + cS_h(\tilde{R}_c)$$

De este modo, la utilidad esperada de la cartera es una función de $E(\tilde{R}_c)$ y $S_h(\tilde{R}_c)$. Y, como de la fase anterior se conocen todas las carteras eficientes en términos de estas dos variables, se podrá determinar cuál es la cartera que maximiza la utilidad esperada.

En todo lo expuesto se ha considerado que los costes de mantenimiento y de revisión de cartera eran nulos. En caso contrario, se determinará el conjunto eficiente teniendo en cuenta que los costes constituyen una restricción presupuestaria o que disminuyen la rentabilidad de la cartera del mismo modo que se hizo para el modelo E-V (apartado 3.2.).

Al igual que en el modelo E-L, el conjunto eficiente resultante de la aplicación del modelo E-S es particular para cada inversor puesto que h, que es el nivel de $\tilde{R}_c$ deseado, es distinto para cada inversor (excepto en el caso en que $h=E(\tilde{R}_c)$)[142]. Igualmente, h puede ir variando con el transcurso del tiempo por lo que al inicio de cada periodo deberá

[142] La relación entre los criterios E-S y E-L es la misma que la existente entre los criterios E-V y E-L puesto que el conjunto eficiente de E-S y E-V es coincidente si la distribución de la rentabilidad es normal (hipótesis del modelo E-V básico y del modelo E-L).

determinarse el conjunto eficiente para cada inversor y para el valor de h de ese periodo. La incorporación de estos elementos propios de cada inversor añade más problemas a la determinación de la cartera óptima y dificulta su aplicación práctica.

## *3.5. MODELO ESPERANZA-ENTROPIA*

### *3.5.1. Introducción*

**Philippatos** y **Wilson**[143] definen un nuevo criterio de eficiencia partiendo de la base de que la varianza no es una buena medida del riesgo asociado a una cartera, especialmente cuando los resultados de la misma no se distribuyen simétricamente. Para subsanar esta deficiencia, proponen la sustitución de la varianza por la entropía o "información esperada", cuya ventaja más destacable es su independencia respecto a la función de distribución de probabilidad de la variable aleatoria y respecto a la esperanza, además de permitir la consideración de características tanto mensurables como no mensurables.

La entropía es un concepto surgido de la Termodinámica y utilizado posteriormente por la teoría de la información, que se define como la cantidad de información que se puede obtener por la ocurrencia de un determinado suceso. Dicha cantidad de información se mide a través de una función logarítmica de la probabilidad de ocurrencia de dicho suceso.

De este modo, la entropía, H, asociada a un evento determinado es:

---

[143] **G.C.PHILIPPATOS-C.J.WILSON**, "Entropy, market risk, and the selection of efficient portfolios", A.E., 1972, pp.209-220.

$$p_i = 2^{-H} = \frac{1}{2^H} \qquad [32]$$

o, como suele escribirse

$$H = -\log_2 p_i \qquad [33]$$

siendo $p_i$ la probabilidad de ocurrencia del suceso considerado.

### *3.5.2. Entropía de la rentabilidad de la cartera*

De acuerdo con la definición de entropía y en el contexto de la cartera de valores, la entropía asociada a la rentabilidad de un determinado título se calcula del siguiente modo:

$$H(\tilde{r}_1) = -\sum_{j=1}^{m} p_j \cdot \log_2 p_j \qquad [34]$$

donde

•) $\tilde{r}_1$ es la variable aleatoria "tasa de rentabilidad" del título considerado que puede tomar m valores distintos.

•) $p_j$ es la probabilidad asociada a cada uno de los valores que puede tomar $\tilde{r}_1$; $j=1,2,\ldots,m$.

Si se consideran dos títulos, la entropía conjunta asociada a la rentabilidad de ambos títulos es:

$$H(\tilde{r}_1,\tilde{r}_2) = -\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{m} p(r_{1_i},r_{2_j})\cdot \log_2[p(r_{1_i},r_{2_j})] \qquad [35]$$

donde

•) la variable aleatoria $\tilde{r}_1$ puede tomar n valores distintos $(r_{1_i})$, cada uno de los cuales tiene asociada una probabilidad $p_i$; $i=1,2,\ldots,n$.

•) la variable aleatoria $\tilde{r}_2$ puede tomar m valores distintos $(r_{2_j})$, cada uno de los cuales tiene asociada una probabilidad $p_j$; $j=1,2,\ldots,m$.

•) $p(r_{1_i},r_{2_j})$ es la probabilidad de que $\tilde{r}_1$ se halle en el estado i y $\tilde{r}_2$ se halle en el estado j. Esta probabilidad es

$$p(r_{1_i},r_{2_j}) = p(r_{2_j}/r_{1_i})\cdot p(r_{1_i}) \qquad [36]$$

siendo $p(r_{2_j}/r_{1_i})$ la probabilidad de que $\tilde{r}_2$ se halle en el estado j sabiendo que $\tilde{r}_1$ se halla en el estado i (probabilidad de $\tilde{r}_2$ condicionada a $\tilde{r}_1$).

$H(\tilde{r}_1,\tilde{r}_2)$ se puede expresar también , teniendo en cuenta [36], del siguiente modo:

$$H(\tilde{r}_1,\tilde{r}_2) = -\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{m} p(r_{1_i},r_{2_j})\cdot \log_2[p(r_{1_i},r_{2_j})] =$$

$$= -\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{m} p(r_{1_i},r_{2_j})\cdot \log_2[p(r_{2_j}/r_{1_i})\cdot p(r_{1_i})] =$$

$$= -\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{m} p(r_{1_i},r_{2_j})\cdot[\log_2 p(r_{2_j}/r_{1_i}) + \log_2 p(r_{1_i})] =$$

$$= -\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{m} p(r_{1_i},r_{2_j})\cdot\log_2 p(r_{2_j}/r_{1_i}) -$$

$$- \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{m} p(r_{2_j}/r_{1_i})\cdot p(r_{1_i})\cdot\log_2 p(r_{1_i})] =$$

$$= -\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{m} p(r_{1_i},r_{2_j})\cdot\log_2 p(r_{2_j}/r_{1_i}) -$$

$$- \sum_{i=1}^{n} p(r_{1_i})\cdot\log_2 p(r_{1_i})\left[\sum_{j=1}^{m} p(r_{2_j}/r_{1_i})\right] =^{144}$$

$$= -\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{m} p(r_{1_i},r_{2_j})\cdot\log_2 p(r_{2_j}/r_{1_i}) - \sum_{i=1}^{n} p(r_{1_i})\cdot\log_2 p(r_{1_i}) \qquad [37]$$

Haciendo:

•) $H(\tilde{r}_2/\tilde{r}_1) = -\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{m} p(r_{1_i},r_{2_j})\cdot\log_2 p(r_{2_j}/r_{1_i})$

•) $H(\tilde{r}_1) = -\sum_{i=1}^{n} p(r_{1_i})\cdot\log_2 p(r_{1_i})$

la expresión de $H(\tilde{r}_1,\tilde{r}_2)$, [37], es

---

[144] Se cumple que $\sum_{j=1}^{m} p(r_{2_j}/r_{1_i}) = 1$.

$$H(\tilde{r}_1,\tilde{r}_2) = H(\tilde{r}_2/\tilde{r}_1) + H(\tilde{r}_1) \qquad [38]$$

donde $H(\tilde{r}_2/\tilde{r}_1)$ es la entropia condicional entre $\tilde{r}_1$ y $\tilde{r}_2$.

La entropia conjunta proporcionada por tres títulos se obtiene del siguiente modo:

$$H(\tilde{r}_1,\tilde{r}_2,\tilde{r}_3) =$$

$$= -\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{m}\sum_{k=1}^{l} p(r_{1_i},r_{2_j},r_{3_k})\cdot\log_2[p(r_{1_i},r_{2_j},r_{3_k})] =^{145}$$

$$= -\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{m}\sum_{k=1}^{l} p(r_{1_i},r_{2_j},r_{3_k})\cdot\log_2[p(r_{3_k}/r_{1_i},r_{2_j})] -$$

$$-\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{m}\sum_{k=1}^{l} p(r_{1_i},r_{2_j},r_{3_k})\cdot\log_2[p(r_{2_j}/r_{1_i})] -$$

$$-\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{m}\sum_{k=1}^{l} p(r_{1_i},r_{2_j},r_{3_k})\cdot\log_2[p(r_{1_i})] =$$

---

[145] 1) $p(r_{1_i},r_{2_j},r_{3_k}) = p(r_{3_k}/r_{1_i},r_{2_j})\cdot p(r_{1_i},r_{2_j}) =$
$= p(r_{3_k}/r_{1_i},r_{2_j})\cdot p(r_{2_j}/r_{1_i})\cdot p(r_{1_i})$

2) $\log_2[p(r_{1_i},r_{2_j},r_{3_k})] = \log_2[p(r_{3_k}/r_{1_i},r_{2_j})] +$
$+ \log_2[p(r_{2_j}/r_{1_i})] + \log_2[p(r_{1_i})]$

$$= -\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{m}\sum_{k=1}^{l} p(r_{1_i},r_{2_j},r_{3_k})\cdot\log_2[p(r_{3_k}/r_{1_i},r_{2_j})] -$$

$$- \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{m}\sum_{k=1}^{l} p(r_{3_k}/r_{1_i},r_{2_j})\cdot p(r_{1_i},r_{2_j})\cdot\log_2[p(r_{2_j}/r_{1_i})] -$$

$$- \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{m}\sum_{k=1}^{l} p(r_{3_k}/r_{1_i},r_{2_j})\cdot p(r_{2_j}/r_{1_i})\cdot p(r_{1_i})\cdot\log_2[p(r_{1_i})] =$$

$$= -\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{m}\sum_{k=1}^{l} p(r_{1_i},r_{2_j},r_{3_k})\cdot\log_2[p(r_{3_k}/r_{1_i},r_{2_j})] -$$

$$- \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{m} p(r_{1_i},r_{2_j})\cdot\log_2[p(r_{2_j}/r_{1_i})]\cdot\left[\sum_{k=1}^{l} p(r_{3_k}/r_{1_i},r_{2_j})\right] -$$

$$- \sum_{i=1}^{n} p(r_{1_i})\cdot\log_2[p(r_{1_i})]\cdot\left\{\sum_{j=1}^{m} p(r_{2_j}/r_{1_i})\cdot\left[\sum_{k=1}^{l} p(r_{3_k}/r_{1_i},r_{2_j})\right]\right\} =$$

146 $$= -\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{m}\sum_{k=1}^{l} p(r_{1_i},r_{2_j},r_{3_k})\cdot\log_2[p(r_{3_k}/r_{1_i},r_{2_j})] -$$

$$- \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{m} p(r_{1_i},r_{2_j})\cdot\log_2[p(r_{2_j}/r_{1_i})] - \sum_{i=1}^{n} p(r_{1_i})\cdot\log_2[p(r_{1_i})] \qquad [39]$$

---

[146] Se cumple que $\sum_{k=1}^{l} p(r_{3_k}/r_{1_i},r_{2_j}) = 1$.

Si en [39] hacemos

$$\bullet)\ H(\tilde{r}_3/\tilde{r}_1,\tilde{r}_2) = -\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{m}\sum_{k=1}^{l} p(r_{1_i},r_{2_j},r_{3_k})\cdot \log_2[p(r_{3_k}/r_{1_i},r_{2_j})]$$

$$\bullet)\ H(\tilde{r}_2/\tilde{r}_1) = -\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{m} p(r_{1_i},r_{2_j})\cdot \log_2[p(r_{2_j}/r_{1_i})]$$

$$\bullet)\ H(\tilde{r}_1) = -\sum_{i=1}^{n} p(r_{1_i})\cdot \log_2[p(r_{1_i})]$$

la expresión de $H(\tilde{r}_1,\tilde{r}_2,\tilde{r}_3)$ es

$$H(\tilde{r}_1,\tilde{r}_2,\tilde{r}_3) = H(\tilde{r}_3/\tilde{r}_1,\tilde{r}_2) + H(\tilde{r}_2/\tilde{r}_1) + H(\tilde{r}_1) \qquad [40]$$

Generalizando, la entropía de una cartera formada por N títulos es

$$H_c = H(\tilde{r}_1,\tilde{r}_2,\ldots,\tilde{r}_N) =$$

$$= H(\tilde{r}_1) + H(\tilde{r}_2/\tilde{r}_1) + H(\tilde{r}_3/\tilde{r}_1,\tilde{r}_2) +\ldots+ H(\tilde{r}_N/\tilde{r}_1,\tilde{r}_2,\ldots\tilde{r}_{N-1}) \qquad [41]$$

La entropía, como medida del grado de desorden existente en un sistema cerrado en un momento dado, representa en el modelo una medida del riesgo promedio de los resultados de un proyecto inversor.

La dificultad que supone el cálculo de las probabilidades conjuntas y condicionales hace que se suela considerar la rentabilidad como una variable asociada a un índice de mercado, $\tilde{I}$ (modelo de Sharpe, $\tilde{r}_i = a_i + b_i\tilde{I} + \tilde{e}_i$). De este modo, la única relación entre la rentabilidad de varios títulos se establece a través del índice y como consecuencia se deriva la independencia entre $\tilde{r}_i$ y $\tilde{r}_j$, $i \neq j$.

En este caso, la entropía conjunta asociada a la rentabilidad de dos títulos de la cartera se calcula del siguiente modo:

$$H(\tilde{r}_1,\tilde{r}_2) = -\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{m} p(r_{1_i},r_{2_j})\cdot\log_2[p(r_{1_i},r_{2_j})] =$$

$$= -\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{m} p(r_{1_i},r_{2_j})\cdot\log_2[p(r_{2_j}/r_{1_i})\cdot p(r_{1_i})] =^{147}$$

$$= -\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{m} p(r_{1_i})\cdot p(r_{2_j})\cdot[\log_2 p(r_{2_j}) + \log_2 p(r_{1_i})] =$$

$$= -\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{m} p(r_{1_i})\cdot p(r_{2_j})\cdot\log_2 p(r_{1_i}) - \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{m} p(r_{1_i})\cdot p(r_{2_j})\cdot\log_2 p(r_{2_j}) =$$

$$= -\sum_{i=1}^{n} p(r_{1_i})\cdot\log_2 p(r_{1_i})\cdot\left[\sum_{i=1}^{m} p(r_{2_j})\right] -$$

$$- \sum_{j=1}^{m} p(r_{2_j})\cdot\log_2 p(r_{2_j})\cdot\left[\sum_{i=1}^{n} p(r_{1_i})\right] =$$

[147] $p(r_{1_i},r_{2_j}) = p(r_{2_j}/r_{1_i})\cdot p(r_{1_i}) = p(r_{2_j})\cdot p(r_{1_i})$ puesto que $\tilde{r}_1$ y $\tilde{r}_2$ son independientes.

$$= -\sum_{i=1}^{n} p(r_{1_i})\cdot \log_2 p(r_{1_i}) - \sum_{j=1}^{m} p(r_{2_j})\cdot \log_2 p(r_{2_j}) = H(\tilde{r}_1) + H(\tilde{r}_2) \qquad [42]$$

Generalizando, si consideramos una cartera constituida por N títulos, la entropía de dicha cartera es:

$$H_c = H(\tilde{r}_1,\tilde{r}_2,\ldots,\tilde{r}_N) = H(\tilde{r}_1) + H(\tilde{r}_2) + \ldots + H(\tilde{r}_N) \qquad [43]$$

Sin embargo, es necesario matizar este resultado y lo haremos a través de dos ejemplos:

1) Supongamos que N=2 y que la rentabilidad de cada uno de los títulos ($\tilde{r}_1$, $\tilde{r}_2$) toma, con una probabilidad (p) determinada, los siguientes valores:

| | $\tilde{r}_1$ | p | | $\tilde{r}_2$ | p |
|---|---|---|---|---|---|
| $r_{11}$ | 0.2 | 0.6 | $r_{21}$ | 0.1 | 0.3 |
| $r_{12}$ | 0.3 | 0.4 | $r_{22}$ | 0.5 | 0.7 |

Si invertimos el 75% de la riqueza disponible en el título 1 ($X_1$=0.75) y el resto en el título 2 ($X_2$=0.25), la rentabilidad de la cartera constituida por estos dos títulos ($\tilde{R}_c = X_1\tilde{r}_1 + X_2\tilde{r}_2$) tomará los siguientes valores:

| | $\tilde{R}_c$ | p |
|---|---|---|
| $R_{c_1}$ | 0.175 | 0.18 |
| $R_{c_2}$ | 0.275 | 0.42 |
| $R_{c_3}$ | 0.250 | 0.12 |
| $R_{c_4}$ | 0.350 | 0.28 |

Conocidos estos datos, podemos calcular $H(\tilde{r}_1)$, $H(\tilde{r}_2)$ y $H_c = H(\tilde{r}_1,\tilde{r}_2)$:

$$H(\tilde{r}_1) = -\left[0.6\cdot\log_2(0.6) + 0.4\cdot\log_2(0.4)\right] = 0.97095$$

$$H(\tilde{r}_2) = -\left[0.3\cdot\log_2(0.3) + 0.7\cdot\log_2(0.7)\right] = 0.88129$$

$$H_c = H(\tilde{r}_1,\tilde{r}_2) = -\Big[0.18\cdot\log_2(0.18) + 0.42\cdot\log_2(0.42) +$$

$$+ 0.12\cdot\log_2(0.12) + 0.28\cdot\log_2(0.28)\Big] = 1.85224$$

En este caso se cumple que $H_c = H(\tilde{r}_1) + H(\tilde{r}_2)$.

De este resultado se podría deducir que la proporción invertida en cada título no influye en la entropía de la cartera. Sin embargo, el siguiente ejemplo nos pondrá de manifiesto que, en realidad, los valores de $X_1$ y $X_2$ sí determinan dicha entropía.

2) Si $\tilde{r}_1$ y $\tilde{r}_2$ toman los mismos valores que en el ejemplo 1) con las mismas probabilidades, pero $X_1$=0.8 y $X_2$=0.2, la rentabilidad de la cartera tomará los siguientes valores:

| | $\tilde{R}_c$ | p |
|---|---|---|
| $R_{c_1}$ | 0.18 | 0.18 |
| $R_{c_2}$ | 0.26 | 0.54 |
| $R_{c_3}$ | 0.34 | 0.28 |

En este caso, la entropía asociada a la cartera formada por los dos títulos es:

$$H_c = H(\tilde{r}_1,\tilde{r}_2) =$$

$$= -\left[0.18\cdot\log_2(0.18)+0.54\cdot\log_2(0.54)+0.28\cdot\log_2(0.28)\right] = 1.43957$$

Como se puede comprobar, $H_c \neq H(\tilde{r}_1) + H(\tilde{r}_2)$. En este resultado puede evidenciarse la influencia de $X_1$ y $X_2$ en la entropía de la cartera y la necesidad de introducir estas proporciones en el cálculo de $H_c$.

En general, si la variable aleatoria $\tilde{r}_i$ $(i=1,2,\ldots,N)$ que cumple

$$\tilde{r}_i = a_i + b_i\cdot\tilde{I} + \tilde{r}_i$$

puede tomar $s_i$ valores distintos y $\tilde{R}_c$ toma $S = \prod_{s=i}^{N} s_i$ valores, todos ellos distintos, la entropía de la cartera es

$$H_c = H_1 + H_2 +\ldots+ H_N$$

pero si $\tilde{R}_c$ toma un número de valores inferior a S deja de cumplirse la anterior igualdad. Que $\tilde{R}_c$ pueda tomar un número de valores igual o *inferior a S depende de $X_i$ por lo que las proporciones acaban influyendo* en la entropía.

Para poner de manifiesto la influencia de las proporciones invertidas en cada título en la entropía de la cartera, **Philippatos y Wilson**[148] proponen definirla del siguiente modo

---

[148] **G.C.PHILIPPATOS-C.J.WILSON**, op. cit., 1972, p.214.

$$H_c = \sum_{i=1}^{N} X_i \cdot H_i \qquad [44]$$

de donde resulta que la entropía de la cartera es una media ponderada de la entropía de los títulos que la componen y el peso de ponderación es la proporción invertida en cada título.

La definición original de la entropía, $H_c = \sum_{i=1}^{N} H_i$, pone de manifiesto que $H_c$ es siempre positiva y mayor que algún $H_i$, propiedades que están garantizadas en la definición de **Philippatos** y **Wilson.** La posibilidad de una definición alternatia como, por ejemplo, $H_c = \sum_{i=1}^{N} X_i^2 \cdot H_i$ no puede ser adimitida puesto que podría darse el caso que la entropía de la cartera fuera inferior a la entropía de cualquiera de los títulos que la componen.

### *3.5.3. Hipótesis del modelo*[149]

**H.1.** Se acepta cualquier tipo de distribución, simétrica o no, representativa del comportamiento de $\tilde{R}_c$.

**H.2.** Se admite como conocida la distribución de probabilidad de $\tilde{R}_c$.

[149] **G.C.PHILIPPATOS-N.GRESSIS**, "Conditions of equivalence among E-V, SSD, and E-H Portfolio Selection Criteria: the Case for Uniform, Normal and Lognormal Distributions", M.S., 1975, pp.617-625.

**H.3.** El inversor prefiere más rentabilidad a menos.

**H.4.** El inversor es adverso al riesgo que se mide por la entropía.

**H.5.** El objetivo del inversor consiste en maximizar la utilidad esperada de la rentabilidad de la cartera.

**H.6.** No se permite el endeudamiento ni las ventas a corto.

### *3.5.4. Selección de la cartera óptima*

Las dos fases en que se divide la selección de la cartera óptima son:

1) Determinación del conjunto eficiente.

Dados

•) $E(\tilde{R}_{cA})$ y $E(\tilde{R}_{cB})$: rentabilidad esperada de la cartera A y de la cartera B respectivamente;

•) $H_{cA}$ y $H_{cB}$: entropía de la cartera A y de la cartera B respectivamente;

el criterio de eficiencia Esperanza-Entropía (E-H) establece que la cartera A es preferida a la cartera B si y sólo si,

$$a)\ E(\tilde{R}_{cA}) \geq E(\tilde{R}_{cB}) \quad y$$

$$b)\ H_{cA} \leq H_{cB}$$

no pudiéndose dar las dos igualdades a la vez.

Definido el criterio de eficiencia E-H, la frontera o conjunto eficiente es la solución al siguiente problema de optimización:

$$\left.\begin{array}{ll} & \text{Min } H_c \\ \text{sujeto a} & \\ & E(\tilde{R}_c) = E^* \\ & \sum_{i=1}^{N} X_i = 1 \\ & X_i \geq 0 \qquad i=1,2,\ldots,N \end{array}\right\}$$

donde $H_c$ se define como en [44].

2) Determinación de la cartera óptima.

El inversor escoge, entre todas las carteras del conjunto eficiente, la que maximiza su función de utilidad esperada.

**Philippatos y Gressis**[150] han establecido las condiciones bajo las cuales el criterio E-H y el criterio E-V son equivalentes, es decir, conducen al mismo conjunto eficiente. En concreto, en el caso que la distribución de la rentabilidad sea normal, el conjunto eficiente es el mismo para los dos criterios.

El inversor que se guíe por el modelo E-H y mantenga una cartera durante T periodos deberá repetir al final de cada uno de ellos (momento de revisar la cartera, t=1,2,...,T-1) los siguientes pasos:

[150] **G.C.PHILIPPATOS-N.GRESSIS**, op. cit. 1975, pp.619-624.

a) determinación del nuevo conjunto eficiente, según el criterio E-H, para el siguiente periodo

b) elección de la cartera eficiente que proporcione la utilidad esperada máxima.

En el caso que no se consideren ni los costes de mantenimiento ni de revisión, el conjunto eficiente se determina según el modelo definido en la página anterior. En el caso contrario, puede añadirse una nueva restricción de carácter presupuestario tal como se hizo en el apartado 3.2.

## *3.6. MODELO DE DOMINANCIA ESTOCASTICA*

### *3.6.1. Introducción*

La dominancia estocástica se aplica por primera vez en el contexto de la selección de carteras en 1962 y dicha aportación se debe a **Quirk y Saposnik**[151].

La característica más destacable de la dominancia estocástica es que, para elegir entre un conjunto de carteras cuyas rentabilidades constituyen variables aleatorias, precisa disponer únicamente de la función de distribución de probabilidad de dichas variables. En realidad,

---

[151] **J.P.QUIRK-R.SAPOSNIK**, "Admissibility and Measurable Utility Functions", R.E.S., 1962, pp.140-146.

la elección se realiza entre distribuciones de probabilidad alternativas, ordenando las mismas según diversos criterios que más adelante se señalarán. Esa característica, a su vez, es la que más diferencia este modelo de todos los demás analizados hasta ahora en los que la decisión se basaba siempre en dos elementos de la distribución de probabilidad (media y varianza en el modelo E-V, media y semivarianza en el modelo E-S, etc.). Al fundamentar su decisión en el conocimiento de la función de distribución, no precisa ninguna hipótesis acerca de la forma de la misma, al contrario de lo que ocurre con otros modelos como el E-V que supone una distribución normal de la rentabilidad de la cartera.

### *3.6.2. Hipótesis del modelo*

H.1. El objetivo del inversor es el de maximizar la utilidad esperada de la rentabilidad de su cartera. Dicha función de utilidad viene determinada, únicamente, por las preferencias de dicho inversor.

H.2. Respecto a la función de utilidad, no se dispone de una total información sobre la misma. Unicamente se conocen algunos rasgos sobre el tipo de función que es, pero se desconoce la propia función. Esta hipótesis engloba funciones de utilidad de muy diversa índole a diferencia del criterio E-V que suponía una función de utilidad cuadrática, restringiendo enormemente la aplicación de dicho criterio.

Las funciones de utilidad analizadas pertenecen a uno de los siguientes tipos:

1. $U_1 = \{U(\tilde{R}_c)/U(\tilde{R}_c)$ es finita $\forall \tilde{R}_c \in \mathbb{R}$; $U'(\tilde{R}_c) > 0 \ \forall \tilde{R}_c \in \mathbb{R}\}$ [45]

siendo $\tilde{R}_c$ la tasa de rentabilidad aleatoria de la cartera.

$U_1$ está formada por todas las funciones de utilidad crecientes, lo cual corresponde a un supuesto básico de la teoría de la utilidad según el cual siempre se prefiere más rentabilidad a menos.

2. $U_2 = \{U(\tilde{R}_c)/U(\tilde{R}_c) \in U_1;\ U''(\tilde{R}_c) < 0 \ \forall \tilde{R}_c \in \mathbb{R}\}$ [46]

$U_2$ es aquel subconjunto de $U_1$ formado por todas aquellas funciones de utilidad con $U''(\tilde{R}_c) < 0$, es decir, funciones de utilidad de inversores adversos al riesgo.

3. $U_3 = \{U(\tilde{R}_c)/U(\tilde{R}_c) \in U_2;\ U'''(\tilde{R}_c) > 0 \ \forall \tilde{R}_c \in \mathbb{R}\}$ [47]

$U_3$ es aquel subconjunto de $U_2$ formado por aquellas funciones de utilidad cuya tercera derivada es positiva, lo cual es considerado también por algunos autores como descriptivo del comportamiento de determinados inversores.

4. $U_4 = \left\{U(\tilde{R}_c)/U(\tilde{R}_c) \in U_2;\ r'(\tilde{R}_c) = \left[- \dfrac{U''(\tilde{R}_c)}{U'(\tilde{R}_c)}\right]' < 0 \ \forall \tilde{R}_c \in \mathbb{R}\right\}$ [48]

Las funciones incluidas en $U_4$ son aquellas que muestran una aversión al riesgo absoluta decreciente[152].

### *3.6.3. Selección de la cartera óptima*

El proceso de determinación de la cartera óptima para el inversor se divide en dos fases:

1) Determinación del conjunto eficiente.

El conjunto de carteras factibles se divide en dos subconjuntos: en uno de ellos (conjunto eficiente) se agrupan todas las carteras que según el criterio utilizado son eficientes (una cartera es eficiente o no dominada cuando no existe otra cartera que sea preferida a ella) y en el otro, todas las carteras dominadas por una o más de las carteras del conjunto eficiente.

---

[152] La siguiente reflexión pone de manifiesto la diferencia entre los conjuntos $U_3$ y $U_4$:

$$r'(\tilde{R}_c) = \left[ - \frac{U''(\tilde{R}_c)}{U'(\tilde{R}_c)} \right]' = \frac{-U'''(\tilde{R}_c)U'(\tilde{R}_c) + [U''(\tilde{R}_c)]^2}{[U'(\tilde{R}_c)]^2}$$

Si la expresión anterior es siempre negativa y tenemos en cuenta que $U(\tilde{R}_c) \in U_2$ $(U'(\tilde{R}_c) > 0$ y $U''(\tilde{R}_c) < 0)$, entonces $U'''(\tilde{R}_c)$ ha de ser positiva, pero ello no es condición suficiente. Se desprende, por tanto, que en $U_3$ se incluyen funciones con aversión absoluta al riesgo decreciente $[r'(\tilde{R}_c)<0]$ y funciones con aversión absoluta al riesgo creciente $[r'(\tilde{R}_c)>0]$ y además $U_4 \subset U_3$.

El criterio de dominancia estocástica determina si una cartera A es preferida a la cartera B (o a la inversa) en base a la comparación de sus respectivas funciones de distribución de probabilidad de la rentabilidad:

$$F(x) = P(\tilde{R}_{cA} \leq x)$$

$$G(x) = P(\tilde{R}_{cB} \leq x)$$

donde $\tilde{R}_{cA}$ y $\tilde{R}_{cA}$ son las variables aleatorias que representan la tasa de rentabilidad de las carteras A y B respectivamente. El dominio de ambas variables es el mismo, $x \in [a,b]$.

2) Del conjunto eficiente se escoge aquella cartera que maximiza la utilidad esperada del inversor (objetivo por él definido).

Para cada tipo de función de utilidad descrito ($U_1$, $U_2$, $U_3$, $U_4$), se determinan las reglas de elección óptimas, entendiendo por tales aquéllas que conducen al conjunto eficiente menor[153], reduciendo así al máximo el campo de elección del inversor. El conjunto eficiente es común para todos los inversores cuya función de utilidad pueda englobarse en uno de los cuatro tipos definidos. Dentro de dicho conjunto, la elección final se particulariza en base a la propia función de utilidad del inversor.

Las reglas de decisión óptimas son las siguientes:

[153] **V.S.BAWA**, "Optimal rules for ordering uncertain prospects", J.F.E., 1975, p.95.

**A) Dominancia estocástica de primer orden**[154] **(DEPO)**

Si la función de utilidad del inversor es del tipo $U_1$, definido en [45], **Quirk y Saposnik**[155] demuestran que la regla óptima que permite determinar el menor conjunto eficiente es la siguiente:

F domina a G y por tanto, la cartera A es preferida a la B $\Leftrightarrow$

$$G(x) \geq F(x) \qquad \forall x \in [a,b]$$

y además

$$G(x) > F(x) \qquad \text{para algún } x \in [a,b]$$

El conjunto eficiente está formado por todas aquellas carteras no dominadas según el criterio citado.

**B) Dominancia estocástica de segundo orden (DESO)**

Si la función de utilidad del inversor es del tipo $U_2$, definido en [46], **Hadar y Rusell**[156] demuestran que

$$\text{F domina a G} \Leftrightarrow \int_a^x G(y)\, dy \geq \int_a^x F(y)\, dy \qquad \forall x \in [a,b]$$

y además

---

[154] La dominancia estocástica aplicada sobre funciones de utilidad del tipo $U_1$ recibe el nombre de primer orden para hacer referencia al orden más elevado de la derivada a la que se imponen restricciones. En general, la dominancia estocástica de orden n indica que se imponen restricciones sobre el signo de todas las derivadas hasta orden n.

[155] **J.P.QUIRK-R.SAPOSNIK**, op. cit., 1962, p.141.

[156] **J.HADAR-W.R.RUSSELL**, "Rules for ordering uncertainty prospects", A.R., 1969, p.31.

$$\int_a^x G(y)\,dy > \int_a^x F(y)\,dy \qquad \text{para algún } x \in [a,b]$$

El conjunto eficiente, en este caso, está formado por todas las carteras no dominadas según el criterio DESO.

**C) Dominancia estocástica de tercer orden (DETO)**

Si la función de utilidad del inversor es del tipo $U_3$, definido en [47], **Whitmore**[157] demuestra que

F domina a G $\Longleftrightarrow \mu_F \geq \mu_G$

y además

$$\int_a^x \int_a^y G(z)\,dz\,dy \geq \int_a^x \int_a^y F(z)\,dz\,dy \qquad \forall x \in [a,b]$$

$$\int_a^x \int_a^y G(z)\,dz\,dy > \int_a^x \int_a^y F(z)\,dz\,dy \qquad \text{para algún } x\in[a,b]$$

donde $\mu_F$ y $\mu_G$ representan, respectivamente, la esperanza matemática de la rentabilidad de las carteras A y B.

Las carteras no dominadas por otras según el criterio DETO constituyen el conjunto eficiente.

---

[157] **G.A.WHITMORE**, "Third - Degree Stochastic Dominance", A.E.R., 1970, p.458.

**D) Dominancia estocástica de tercer orden restringida (DETGO)**

Si la función de utilidad del inversor es del tipo $U_4$, definido en [48], Bawa[158] demuestra que

a) Si $\mu_F = \mu_G$, entonces

F domina a G $\Longleftrightarrow$

$$\int_a^x \int_a^y G(z)\,dz\,dy \geq \int_a^x \int_a^y F(z)\,dz\,dy \qquad \forall x \in [a,b]$$

y además

$$\int_a^x \int_a^y G(z)\,dz\,dy > \int_a^x \int_a^y F(z)\,dz\,dy \qquad \text{para algún } x \in [a,b]$$

Esta condición necesaria y suficiente coincide con la de DETO.

b) Dadas dos distribuciones cualesquiera F y G,

i) F domina a G si $\mu_F \geq \mu_G$ y además

$$\int_a^x \int_a^y G(z)\,dz\,dy \geq \int_a^x \int_a^y F(z)\,dz\,dy \qquad \forall x \in [a,b]$$

$$\int_a^x \int_a^y G(z)\,dz\,dy > \int_a^x \int_a^y F(z)\,dz\,dy \qquad \text{para algún } x \in [a,b]$$

Esto significa que la DETO es condición suficiente para que F domine a G.

---

[158] V.S.BAWA, op. cit., 1975, pp.103-106.

ii) Si F domina a G entonces $\mu_F \geq \mu_G$ y además para algún $x_0 \in [a,b]$ se cumple

$$\int_a^x \int_a^y G(z)\, dz\, dy \geq \int_a^x \int_a^y F(z)\, dz\, dy \qquad \text{para } a \leq x \leq x_0$$

$$\int_a^x \int_a^y G(z)\, dz\, dy > \int_a^x \int_a^y F(z)\, dz\, dy \qquad \text{para algún } x \leq x_0$$

Que $\mu_F \geq \mu_G$, es también condicion necesaria para que F domine a G pero no lo es que la desigualdad entre la integrales dobles se cumpla $\forall x \in [a,b]$; sólo se necesita que sea asi $\forall x \in [a,x_0]$ y $x_0 \in [a,b]$. En este caso no es posible deducir una condición necesaria y suficiente de dominancia.

El concepto de dominancia estocástica[159], tal como ha sido definido para distintos tipos de funciones de utilidad, se aplica para eliminar de un conjunto de carteras, aquéllas que estén dominadas por otras. Pero el conjunto eficiente encontrado (carteras no dominadas por otras) puede reducirse todavía más si se eliminan de dicho conjunto aquellas carteras que sean dominadas por combinaciones de otras. Este es el cometido de la dominancia estocástica convexa[160].

---

[159] Aunque la dominancia estocástica se ha desarrollado normalmente hasta el tercer orden, puede generalizarse hasta orden n, tal como lo hace **J.S.HAMMOND** III, "Simplifying the Choice Between Uncertain Prospects where Preference is Nonlinear", M.S., 1974, pp.1047-1072.

[160] La dominancia estocástica convexa es tratada por **P.C.FISHBURN**, "Convex Stochastic Dominance with Continuous Distributions Functions", J.E.T., 1974, pp. 143-158 , **P.C.FISHBURN**, "Convex Stochastic Dominance", incluido en **G.A.WHITMORE-M.Ch.FINDLAY** (eds.), Stochastic Dominance: An Approach to Decision Making under Uncertainty, (Lexington Books, Lexington, 1978), pp.337-351. Otra referencia más reciente se halla en **V.S.BAWA-J.N.BODURTHA-M.R.RAO-H.L.SURI**, "On Determination of Stochastic Dominance Optimal Sets", J.F., 1985, pp.417-431.

La dominancia estocástica convexa genera los siguientes criterios, que son equivalentes a la DEPO, DESO y DETO definidos anteriormente para el caso corriente. Para ello es necesario definir

$$\lambda = (\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n), \ \lambda \in \mathbb{R}_n$$

tal que

$$\lambda_i \geq 0 \qquad \forall i = 1,2,\ldots,n$$

$$\sum_{i=1}^{n} \lambda_i = 1$$

**A') Dominancia estocástica convexa de primer orden (DECPO)**

Si la función de utilidad del inversor es del tipo $U_1$, definido en [45], dado un conjunto de funciones de distribución $F_i$, i=1,2,...,n+1 (cada función está asociada a la rentabilidad de una cartera i; i=1,2,...,n+1),

$$F_i, \ i=1,2,\ldots,n \text{ domina } F_{n+1} \Longleftrightarrow \exists \ \lambda \in \mathbb{R}_n;$$

$$F_{n+1}(x) \geq \sum_{i=1}^{n} \lambda_i \cdot F_i(x) \qquad \forall x \in [a,b]$$

$$F_{n+1}(x) > \sum_{i=1}^{n} \lambda_i \cdot F_i(x) \qquad \text{para algún } x \in [a,b]$$

**B') Dominancia estocástica convexa de segundo orden (DECSO)**

Si la función de utilidad del inversor es del tipo $U_2$, definido en [46], dado un conjunto de funciones de distribución $F_i$, $i=1,2,\ldots,n+1$,

$F_i$, $i = 1,2,..,n$ domina $F_{n+1} \Longleftrightarrow \exists\ \lambda \in \mathbb{R}_n$;

$$\int_a^x F_{n+1}(y)\ dy \geq \sum_{i=1}^{n} \lambda_i \cdot \int_a^x F_i(y)\ dy \qquad \forall x \in [a,b]$$

$$\int_a^x F_{n+1}(y)\ dy > \sum_{i=1}^{n} \lambda_i \cdot \int_a^x F_i(y)\ dy \qquad \text{para algún } x \in [a,b]$$

**C') Dominancia estocástica convexa de tercer orden (DECTO)**

Si la función de utilidad del inversor es del tipo $U_3$, definido en [47], dado un conjunto de funciones de distribución, $F_i$, $i=1,2,\ldots,n+1$,

$F_i$, $i=1,2,..,n$ domina $F_{n+1} \Longleftrightarrow \exists\ \lambda \in \mathbb{R}_n$ ;

$$\text{(a)} \quad \sum_{i=1}^{n} \lambda_i \cdot \mu_i \geq \left[ \sum_{i=1}^{n} \lambda_i \right] \cdot \mu_{n+1}$$

donde $\mu_i$ es la esperanza matemática de la cartera cuya función de distribución es $F_i$ $(i=1,2,\ldots,n)$;

$$\text{(b)} \quad \int_a^x \int_a^y F_{n+1}(z)\ dz\ dy \geq \sum_{i=1}^{n} \lambda_i \cdot \int_a^x \int_a^y F_i(z)\ dz\ dy \qquad \forall x \in [a,b]$$

$$\int_a^x \int_a^y F_{n+1}(z)\ dz\ dy > \sum_{i=1}^{n} \lambda_i \cdot \int_a^x \int_a^y F_i(z)\ dz\ dy \qquad \text{para algún } x \in [a,b]$$

El procedimiento señalado en este apartado para la selección de la cartera óptima deberá repetirse al final de cada uno de los periodos en los que el inversor desea mantener su cartera bajo el supuesto que el inversor desea maximizar la utilidad esperada y se guía por el modelo de dominancia estocástica para conseguir su objetivo.

La ventaja de la dominancia estocástica (convexa y no convexa) es que sus resultados son consistentes con las hipótesis de la utilidad esperada sin depender de una determinada forma de la función de utilidad o de un tipo específico de distribución de la rentabilidad de las carteras. Cabría esperar, por tanto, una superioridad de dicho criterio respecto al criterio E-V, puesto que este último necesita funciones de utilidad cuadráticas o distribuciones de probabilidad normales, supuestos muy restrictivos y no siempre reales. Sin embargo, estudios empíricos realizados para evaluar ambos criterios han puesto en evidencia que las diferencias entre ambos criterios no son grandes. **Porter** y **Gaumnitz**[161], **Porter**[162], y **Porter** y **Bey**[163] llegan a las siguientes conclusiones después de comparar la dominancia estocástica (no convexa) y el criterio Esperanza-Varianza:

---

[161] **R.B.PORTER-J.E.GAUMNITZ**, "Stochastic Dominance vs. Mean - Variance Portfolio Analysis: An Empirical Evaluation", <u>A.E.R.</u>, 1972, pp.438-446.

[162] **R.B.PORTER**, "An Empirical Comparison of Stochastic Dominance and Mean - Variance Portfolio Choice Criteria", <u>J.F.Q.A.</u>, 1973, pp.587-608.

[163] **R.B.PORTER-R.P.BEY**, "An Evaluation of the Empirical Significance of Optimal Seeking Algorithms in Portfolio Selection", <u>J.F.</u>, 1974, pp.1479-1490.

a) La mayoría de las carteras eficientes según la DESO y según la DETO son tambien eficientes según el criterio E-V. Y las que no están incluidas, se hallan muy cerca de la frontera eficiente. La mayoria de las carteras que son eficientes según el criterio E-V pero no según la DESO y la DETO tienen baja esperanza y baja varianza (la dominancia estocástica tiende a eliminar las carteras de baja rentabilidad esperada y baja varianza).

b) Un inversor poco adverso al riesgo escogerá, prácticamente, la misma cartera, independientemente del modelo usado. Si la aversión al riesgo es fuerte, la DESO y la DETO son mas consistentes con la maximización de la utilidad esperada que la regla E-V. Según los autores, ello es debido a que la varianza no mide bien el riesgo.

**Porter**[164] compara también el criterio de la dominancia estocástica no convexa con el criterio E-S y llega a la conclusión que excepto para carteras con igual media y semivarianza, toda cartera eficiente según la regla E-S es eficiente según la regla DESO. Por tanto, el conjunto E-S eficiente es un subconjunto del conjunto DESO eficiente. Además, cuanto mayor sea h (nivel de rentabilidad con el que se compara la rentabilidad real de la cartera), más se acerca el conjunto E-S eficiente al conjunto DESO eficiente. Mayor relación, por tanto, entre la dominancia estocástica y el criterio E-S que entre la dominancia estocástica y el criterio E-V.

**Philippatos y Gressis**[165] comparan los criterios E-V, DESO y E-H y concluyen que los tres criterios son equivalentes para distribuciones uniformes y normales, mientras que si la distribución es lognormal, el criterio DESO es óptimo puesto que conduce al mínimo conjunto eficiente.

---

[164] **R.B.PORTER**, op. cit., 1974, pp.200-204.

[165] **G.C.PHILIPPATOS-N.GRESSIS**, op. cit., 1975, pp.617-625.

## *3.7. MODELO MEDIA GEOMETRICA*

### *3.7.1. Introducción*

La utilización de la media geométrica en el contexto financiero y en concreto, como criterio de selección de carteras se debe a **Latané**[166] en 1959, aunque con posterioridad han sido muchos los autores que se han interesado por este modelo debido a las propiedades que presentan las carteras óptimas derivadas de su aplicación y que se pondrán de manifiesto en el estudio que aquí realizaremos.

Pero quizás, lo más destacable de este modelo, y por ello el gran interés que despierta, es su fácil conexión con un modelo de selección de carteras en el que el objetivo del inversor sea el de maximizar la utilidad esperada de su riqueza al final de los T periodos durante los cuales piensa mantenerla (modelos que serán tratados en la **Parte II** de la presente Tesis). Avanzando resultados, el modelo Media Geométrica aplicado al inicio de cada uno de los periodos en los que dividimos el horizonte temporal de posesión de la cartera y con el fin de maximizar la utilidad esperada de la riqueza obtenida al final de cada uno de dichos periodos, proporciona la misma secuencia de carteras que si dicho criterio se aplica con el fin de maximizar la utilidad esperada de la riqueza obtenida en T (al final de todos los periodos). Las políticas de revisión de carteras que cumplen esta propiedad reciben el nombre de políticas "miopes" óptimas[167].

---

[166] **H.A.LATANE**, "Criteria for Choice among Risky Ventures", J.P.E., 1959, pp.144-155.

[167] **J.MOSSIN**, op. cit., 1968, pp.223-226.

En este apartado nos limitaremos a analizar cual es la cartera óptima para el inversor suponiendo que se halla en el punto decisorio t (t=0,1,2,...,T-1) y desea maximizar la utilidad esperada de la riqueza en t+1 mediante la aplicación del criterio Media Geométrica.

### *3.7.2. Hipótesis del modelo*

**H.1.** El inversor siempre prefiere más a menos riqueza.

**H.2.** El inversor se comporta manifestando aversión por el riesgo.

**H.1.** y **H.2.** se funden en una única hipótesis: el inversor se comporta de forma racional.

**H.3.** El objetivo del inversor, en el momento t, es el de maximizar la utilidad esperada de la riqueza en el momento t+1, $\forall t;\ t=0,1,\dots,T-1$.

**H.4.** La función de utilidad de la riqueza es una función logarítmica:

$$U(W_t) = \ln W_t$$

De **H.1.** se desprende que $U(W_t)$ ha de ser una función de la riqueza creciente:

$$U'(W_t) = (W_t)^{-1} > 0 \qquad \text{para } W_t > 0$$

De **H.2.** se desprende que $U(W_t)$ ha de ser una función cóncava:

$$U''(W_t) = -(W_t)^{-2} < 0 \qquad \text{para } W_t > 0$$

La función de utilidad logarítmica cumple adecuadamente **H.1.** y **H.2.**

Además, la función de utilidad logarítmica comporta (a diferencia de la función de utilidad cuadrática) que el coeficiente absoluto de aversión al riesgo $\left[\frac{-U''(W_t)}{U'(W_t)}\right]$ sea decreciente[168].

**H.5.** No se permiten ventas al descubierto ni prestar ni tomar prestado dinero. Ello implica que

$$\sum_{i=1}^{N} X_{it} = 1 \qquad t=0,1,2,\ldots,T-1$$

$$X_{it} > 0 \qquad i=1,2,\ldots,N;\ t=0,1,2,\ldots,T-1$$

**H.6.** Se consideran nulos los costes de negociación y transacción de una cartera antigua a otra nueva.

### *3.7.3. Selección de la cartera óptima*

El objetivo del inversor en el punto decisorio t, según **H.3.** y **H.4.**, consiste en maximizar la utilidad esperada de la riqueza en el momento t+1, transcurrido un periodo desde t. Es decir, se trata de maximizar

[168] La derivada $\left[\frac{-U''(W_t)}{U'(W_t)}\right]' = -\left[(W_t)^{-2}\right] < 0$ y ello implica que $\frac{U''(W_t)}{U'(W_t)}$ es decreciente

$$E[U(\tilde{W}_{t+1})] = E(\ln \tilde{W}_{t+1})$$

donde[169],

$$\tilde{W}_{t+1} = (1 + \tilde{R}_{ct+1}) \cdot W_t \qquad [49]$$

Haciendo

$$\tilde{R}'_{ct+1} = 1 + \tilde{R}_{ct+1} \qquad [50]$$

la expresión [49] se convierte en

$$\tilde{W}_{t+1} = \tilde{R}'_{ct+1} \cdot W_t \qquad [51]$$

donde $\tilde{R}'_{ct+1}$ es una variable aleatoria que, en t+1, puede tomar S valores distintos, distinguiéndose por $R'_{st+1}$ (s=1,2,...,S). Cada valor $R'_{st+1}$ tiene asociada una probabilidad $q_{st+1}$.

Definidas las anteriores variables, puede hallarse la **utilidad esperada de la riqueza** en t+1 del siguiente modo:

$$E[U(\tilde{W}_{t+1})] = E(\ln \tilde{W}_{t+1}) = E[\ln (\tilde{R}'_{ct+1} \cdot W_t)] =$$

$$= E(\ln \tilde{R}'_{ct+1} + \ln W_t) = E(\ln \tilde{R}'_{ct+1}) + E(\ln W_t) = E(\ln \tilde{R}'_{ct+1}) + \ln W_t =$$

$$= \sum_{s=1}^{S} [(\ln R'_{st+1}) \cdot q_{st+1}] + \ln W_t = \sum_{s=1}^{S} \ln (R'_{st+1})^{q_{st+1}} + \ln W_t =$$

---

169 Véase el apartado **1.2.5.** de la presente Tesis.

$$= \ln \prod_{s=1}^{S} (R'_{st+1})^{q_{st+1}} + \ln W_t \qquad [52]$$

De las diferentes expresiones en [52] se desprende que maximizar $E[U(\tilde{W}_{t+1})]$ equivale a

$$1)\ \mathrm{Max}\ E[\ln \tilde{R}'_{ot+1}] \qquad [53]$$

$$2)\ \mathrm{Max} \sum_{s=1}^{S} \ln (R'_{st+1})^{q_{st+1}} \qquad [54]$$

$$3)\ \mathrm{Max} \prod_{s=1}^{S} (R'_{st+1})^{q_{st+1}} \qquad [55]$$

En definitiva, si el inversor quiere maximizar la utilidad esperada de la riqueza en t+1 (final del periodo t+1), deberá maximizar

$$\prod_{s=1}^{S} (R'_{st+1})^{q_{st+1}}$$

que es la **media geométrica de la rentabilidad de la cartera.** Por tanto, en el caso de que la función de utilidad sea logarítmica, la maximización de la utilidad esperada equivale a la maximización de la media geométrica de la rentabilidad de la cartera.

Dada la función que se trata de maximizar y las hipótesis **H.5.** y **H.6.**, para encontrar la cartera óptima, se deberá resolver el siguiente problema[170]:

---

[170]**S.F.MAIER-D.W.PETERSON-J.H.VAN DER WEIDE** en "A Monte Carlo Investigation of Characteristics of Optimal Geometric Mean Portfolio", J.F.Q.A., 1977, pp.215-233, presentan la solución a este problema.

$$\left.\begin{array}{ll} & \text{Max} \displaystyle\prod_{s=1}^{S} (R'_{st+1})^{q_{st+1}} \\ \text{sujeto a} & \\ & \displaystyle\sum_{i=1}^{N} X_{it} = 1 \qquad t=0,1,2,\ldots,T-1 \\ & X_{it} \geq 0 \qquad i=1,2,\ldots,N; \\ & \qquad\qquad t=0,1,2,\ldots,T-1 \end{array}\right\}$$

En el caso que se permita al inversor prestar una parte de su presupuesto o tomar prestada una determinada cantidad de dinero a un tipo de interés conocido y libre de riesgo, el problema anterior se convierte en[171]:

$$\left.\begin{array}{ll} & \text{Max} \displaystyle\prod_{s=1}^{S} (R'_{st+1})^{q_{st+1}} \\ \text{sujeto a} & \\ & \displaystyle\sum_{i=1}^{N} X_{it} = 1 + X_{N+1} \\ & \qquad\qquad t=0,1,2,\ldots,T-1 \\ & X_{it} \geq 0 \qquad i=1,2,\ldots,N; \\ & \qquad\qquad t=0,1,2,\ldots,T-1 \\ & X_{N+1} \geq -1 \end{array}\right\}$$

[171] Véase el apartado **2.3.2.** de esta Tesis para interpretar $X_{N+1}$.

donde $X_{N+1}$ es la cantidad prestada $(X_{N+1}<0)$ o procedente de un préstamo $(X_{N+1}>0)$.

Si además se permiten las ventas al descubierto, deberá eliminarse la hipótesis $X_{it}\geq 0$.

Por otra parte, de acuerdo con lo ya visto en el epígrafe **3.2.** de la Tesis, si se introducen los costes como restricción presupuestaria, el problema que se debería resolver es:

$$\left.\begin{array}{l}
\text{Max} \prod_{s=1}^{S} (R'_{st+1})^{q_{st+1}} \\
\text{sujeto a} \\
\sum_{i=1}^{N} [(1-k)\cdot C_{it} - (1-k')\cdot V_{it} - y_{it-1}\cdot d_{it}] = 0 \\
\qquad\qquad t=0,1,\ldots,T-1 \\
X_{it} \geq 0 \qquad i=1,2,\ldots,N;\ t=0,1,2,\ldots,T-1
\end{array}\right\}$$

En cualquiera de los casos considerados, el inversor maximiza la media geométrica de la rentabilidad de la cartera en cada uno de los periodos en que divide el horizonte temporal de posesión de dicha cartera.

Aunque se procede maximizando la media geométrica, en realidad estamos maximizando la utilidad esperada por lo que este modelo podría incluirse dentro del conjunto de modelos que directamente reconocen este objetivo.

Por otra parte, suponiendo que $\tilde{R}'_{ct+1}$ se distribuye según una lognormal se puede comprobar que la cartera que maximiza la media geométrica (y, por tanto, la utilidad esperada) es también una cartera eficiente según el criterio E-V.

De [53] se desprende que la maximización de la media geométrica equivale a la maximización de $m = E(\ln \tilde{R}'_{ct+1})$ y para demostrar la anterior afirmación basta con analizar el efecto de $E(\tilde{R}'_{ct+1})$ y $V(\tilde{R}'_{ct+1})$ sobre m. Para ello es necesario expresar m en función de estas dos variables[172]:

$$m = \ln \mu - \frac{1}{2} \cdot \ln\left[\frac{\sigma^2}{\mu^2} + 1\right] \qquad [56]$$

donde

•) $\mu = E(\tilde{R}'_{ct+1})$

•) $\sigma^2 = V(\tilde{R}'_{ct+1})$

y hallar su derivada, en [56], respecto a $\mu$ y $\sigma^2$:

$$\bullet)\ \frac{\partial m}{\partial \mu} = \frac{2\cdot\sigma^2 + \mu^2}{\mu\cdot(\sigma^2 + \mu^2)}$$

$$\bullet)\ \frac{\partial m}{\partial \sigma^2} = \frac{-1}{2\cdot(\sigma^2 + \mu^2)}$$

De estas derivadas se deduce el efecto positivo de $E(\tilde{R}'_{ct+1})$ en m y el efecto negativo de $V(\tilde{R}'_{ct+1})$ sobre m. Este resultado implica que la cartera que maximiza m se halla en la frontera E-V eficiente[173].

---

[172] **E.J.ELTON-M.J.GRUBER**, "On the Maximization of the Geometric Mean with Lognormal Return Distribution", M.S., 1974, p.486.

[173] E y V hacen referencia a $\tilde{R}'_{ct+1} = 1 + \tilde{R}_{ct+1}$

## *3.8. MODELOS "SAFETY FIRST"*

### *3.8.1. Introducción*

Bajo el nombre de **modelos "Safety First"**[174] se incluyen tres criterios que destacan, por encima de cualquier otra característica, el riesgo asociado a una cartera y la aversión que, en general, siente hacia él un inversor. El rasgo común a los tres criterios es el supuesto de que el inversor busca ante todo seguridad, aunque, como veremos, cada uno lo aborda desde un punto de vista distinto.

El primer criterio es el que desarrolla **Roy**[175] que propone un modelo de selección de carteras adecuado para aquellos inversores cuyo objetivo no consiste en maximizar la utilidad esperada de la rentabilidad de la cartera sino en reducir al máximo la probabilidad de que la rentabilidad de dicha cartera no alcance un nivel deseado, D, llamado "nivel de desastre" o "de subsistencia". Según este autor, al inversor, lo que verdaderamente le preocupa es la posibilidad de fracasar en la obtención de un determinado nivel de rentabilidad.

A diferencia de **Roy**, **Kataoka**[176] propone la maximización del "nivel de desastre" fijada la probabilidad de obtener una rentabilidad real inferior a dicho nivel.

---

[174] "Safety First" puede traducirse por "seguridad ante todo", lo cual pone de manifiesto la preocupación del inversor que selecciona su cartera de acuerdo con este modelo por el riesgo asociado a la inversión.

[175] **A.D.ROY**, "Safety First and the Holding of Assets", <u>Ec.</u>, 1952, pp.431-449.

[176] **S.KATAOKA**, "A Stochastic Programmnig Model", <u>Ec.</u>, 1963, pp.181-196.

Por último, Telser[177] adapta el modelo de Roy al supuesto de que una cartera pueda incluir títulos sin riesgo.

### *3.8.2. Hipótesis del modelo*

**H.1.** La rentabilidad de los títulos considerados, y por tanto de la cartera, es una variable aleatoria que admite cualquier distribución de probabilidad[178]. Pero, para poder realizar comparaciones con el modelo E-V básicosupondremos que la distribución es normal.

**H.2.** De la distribución de la variable aleatoria sólo se conoce (por estimaciones del pasado) el valor esperado y la varianza[179], desconociéndose la función de densidad.

**H.3.** El inversor prefiere más rentabilidad a menos.

**H.4.** El inversor siente aversión por el riesgo.

**H.5.** Cada inversor fija el nivel de rentabilidad, D, por debajo del cual no se desea que caiga la rentabilidad real de la cartera. Por tanto, el nivel de desastre, D, es un dato conocido.

---

[177] **L.G.TELSER**, "Safety First and Hedging", R.E.S., 1955-56, pp.1-16.

[178] **G.C.PHILIPPATOS**, "Alternatives to Mean-Variance for Portfolio Selection", incluido en **J.L.BICKSLER**, Handobook of Financial Economics, *(North Holland, Amsterdam, 1979 b))*, p.378.

[179] En el caso de que la distribución no sea normal se sustituirá la varianza por una adecuada medida de la dispersión respecto al valor esperado.

La probabilidad de que el valor real de la rentabilidad de la cartera, R', sea inferior o igual al nivel de desastre, D, tiene una cota superior[180] tal que:

$$p(R' \leq D) \leq \frac{V(\tilde{R}_c)}{[E(\tilde{R}_c) - D]^2} \qquad [57]$$

donde

•) $E(\tilde{R}_c)$: Rentabilidad esperada de la cartera;

•) $V(\tilde{R}_c)$: Varianza de la rentabilidad de la cartera;

•) D: Nivel de desastre fijado por el inversor.

### *3.8.3. Selección de la cartera óptima*

#### *3.8.3.1. Modelo de Roy*

El modelo diseñado por **Roy** propone que, entre todas las carteras eficientes, se escoja aquella que minimice la probabilidad de que la rentabilidad real de la cartera sea inferior al nivel fijado, $P(R' \leq D)$, y que coincidirá con la que minimice $\dfrac{V(\tilde{R}_c)}{[E(\tilde{R}_c) - D]^2}$ o $\dfrac{\sigma(\tilde{R}_c)}{E(\tilde{R}_c) - D}$ siendo $\sigma(\tilde{R}_c)$ la desviación estándar de la rentabilidad de la cartera.

180 **A.D.ROY**, op. cit., 1952, p.434.

Se desprende, por tanto, que la selección de la cartera óptima, al igual que en los modelos E-V, se realiza en dos fases:

1) Debe determinarse, en primer lugar, la frontera eficiente del mismo modo que en el modelo E-V básico.

Puesto que todas las carteras disponibles se describen a partir de su rentabilidad esperada, $E(\tilde{R}_c)$, y su varianza asociada, $V(\tilde{R}_c)$ la frontera eficiente puede encontrarse resolviendo el problema:

$$\left.\begin{array}{l} \text{Min } V(\tilde{R}_c) = \sum_{i=1}^{N} \sum_{j=1}^{N} X_i \cdot X_j \cdot \sigma_{ij} \\ \text{sujeto a} \\ E(\tilde{R}_c) = \sum_{i=1}^{N} X_i \cdot \mu_i = E^* \\ \sum_{i=1}^{N} X_i = 1 \end{array}\right\}$$

Para N=2, la frontera eficiente es[181]:

$$V(\tilde{R}_c) = \frac{1}{F} \cdot \left[A \cdot [E(\tilde{R}_c)]^2 - 2 \cdot B \cdot [E(\tilde{R}_c)] + G\right] \qquad [58]$$

donde

•) $F = (\mu_2 - \mu_1)^2$

•) $A = \sigma_{11} + \sigma_{22} - 2 \cdot \sigma_{12}$

[181] Véase el apartado **1.2.4.** de esta Tesis.

•) $B = \mu_1 \cdot (\sigma_{22} - \sigma_{11}) + \mu_2 \cdot (\sigma_{11} - \sigma_{12})$

•) $G = \mu_1^2 \cdot \sigma_{22} + \mu_2^2 \cdot \sigma_{11} - 2 \cdot \mu_1 \cdot \mu_2 \cdot \sigma_{12}$

2) El inversor escogerá, en segundo lugar, la cartera eficiente que minimice $\dfrac{V(\tilde{R}_c)}{[E(\tilde{R}_c) - D]^2}$.

La cartera que minimiza el cociente

$$\frac{V(\tilde{R}_c)}{[E(\tilde{R}_c) - D]^2} \qquad [59]$$

se halla sustituyendo $V(\tilde{R}_c)$ por la expresión de la frontera eficiente e igualando a cero la derivada de dicho cociente.

Sustituyendo [58] en [59] se obtiene

$$H[E(\tilde{R}_c)] = \frac{1}{F} \cdot \frac{A \cdot [E(\tilde{R}_c)]^2 - 2 \cdot B \cdot [E(\tilde{R}_c)] + G}{[E(\tilde{R}_c) - D]^2} \qquad [60]$$

Para que $\dfrac{d\, H[E(\tilde{R}_c)]}{d\, E(\tilde{R}_c)}$ se anule se deberá cumplir que

$$[A \cdot E(\tilde{R}_c) - B] \cdot [E(\tilde{R}_c) - D] - [A \cdot E^2(\tilde{R}_c) - 2 \cdot B \cdot E(\tilde{R}_c) + G] = 0$$

de donde se deduce que

$$E^* = \frac{G - B \cdot D}{B - A \cdot D} \qquad [61]$$

Sustituyendo el valor obtenido en [61] en las proporciones, $X_1$ y $X_2$, de las carteras que constituyen la frontera eficiente[182]

$$X_1 = \frac{\mu_2 - E^*}{\mu_2 - \mu_1} \qquad X_2 = \frac{E^* - \mu_1^*}{\mu_2 - \mu_1}$$

obtendremos la cartera óptima.

Si tenemos en cuenta que para el criterio E-V básico se obtuvo que[183]

$$E^* = \frac{2\cdot B\cdot c - F\cdot b}{2\cdot c\cdot (A+F)} \qquad [62]$$

donde b y c son los coeficientes de la función de utilidad del inversor, la cartera óptima coincidirá con la deducida del criterio de **Roy** si se cumple la siguiente relación:

$$D = \frac{2\cdot c\cdot (A\cdot G + F\cdot G - B^2)}{2\cdot B\cdot F\cdot c + A\cdot F\cdot b}$$

Analíticamente, se demuestra (**Roy**[184], **Philippatos**[185], **Levy** y **Sarnat**[186] y **Pyle** y **Turnovsky**[187]) que la cartera que minimiza $\frac{V(\tilde{R}_c)}{[E(\tilde{R}_c) - D]^2}$ es una cartera eficiente en el sentido de **Markowitz** y en

[182] Véase el apartado **1.2.4.** del presente trabajo.

[183] Véase el apartado **1.2.4.** de esta Tesis.

[184] **A.D.ROY**, op. cit., 1952, p.435.

[185] **G.C.PHILIPPATOS**, op. cit., 1979 b), pp.378-380.

[186] **H.LEVY-M.SARNAT**, "Safety First- An Expected Utility Principle", J.F.Q.A., 1972, pp.1829-1834.

[187] **D.H.PYLE-S.J.TURNOVSKY**, "Safety-First and Expected Utility Maximization in Mean-Standard Deviation Portfolio Analysis", R.E.S., pp.75-81.

concreto, es la cartera que resulta de la tangencia entre la frontera eficiente y una recta que parte de la cartera con rentabilidad esperada igual a D y varianza nula.

### *3.8.3.2. Modelo de Kataoka*

**Kataoka**[188], bajo el mismo principio que **Roy** (seguridad ante todo), propone el siguiente modelo:

$$\left.\begin{array}{ll} & \text{Max } D \\ \text{sujeto a} & \\ & p(R' \leq D) \leq K \end{array}\right\}$$

o de modo equivalente

$$\left.\begin{array}{ll} & \text{Max } D \\ \text{sujeto a} & \\ & \dfrac{V(\tilde{R}_c)}{[E(\tilde{R}_c) - D]^2} \leq K \end{array}\right\}$$

Suponiendo que[189] $E(\tilde{R}_c) - D > 0$, la restricción

$$\frac{V(\tilde{R}_c)}{[E(\tilde{R}_c) - D]^2} \leq K$$

---

[188] S.**KATAOKA**, op. cit., 1963, p.181.

[189] El supuesto $E(\tilde{R}_c) - D < 0$ no lo consideraremos puesto que es poco lógico fijar una D superior a la rentabilidad esperada.

se convierte en

$$D \leq E(\tilde{R}_c) - \frac{\sigma(\tilde{R}_c)}{\sqrt{K}} \qquad [63]$$

Como se desea que D sea tan grande como sea posible, esta desigualdad puede escribirse en forma de igualdad:

$$D = E(\tilde{R}_c) - \frac{\sigma(\tilde{R}_c)}{\sqrt{K}} \qquad [64]$$

Por tanto, maximizar D sujeto a la restricción

$$\frac{V(\tilde{R}_c)}{[E(\tilde{R}_c) - D]^2} \leq K$$

equivale a maximizar

$$E(\tilde{R}_c) - \frac{\sigma(\tilde{R}_c)}{\sqrt{K}} \qquad [65]$$

Despues de determinar el conjunto eficiente del mismo modo que en el criterio de **Roy**, el inversor debe escoger aquella cartera que maximiza [65] teniendo en cuenta que $\sigma(\tilde{R}_c) = \sqrt{V(\tilde{R}_c)}$ y que $V(\tilde{R}_c)$ está definido en [58].

Sustituyendo en [65] $\sigma(\tilde{R}_c)$ por la expresión que resulta de [58], se obtiene que la función que se trata de maximizar es

$$H[E(\tilde{R}_c)] = E(\tilde{R}_c) - \frac{1}{\sqrt{K}} \cdot \left[\frac{1}{F}[A \cdot E^2(\tilde{R}_c) - 2 \cdot B \cdot E(\tilde{R}_c) + G]\right]^{1/2} \qquad [66]$$

De la condición necesaria de máximo

$$\frac{dH\left[E(\tilde{R}_c)\right]}{dE(\tilde{R}_c)} = 0$$

resulta que

$$E^* = \frac{B}{A} + \sqrt{\frac{K \cdot F \cdot (B^2 - A \cdot G)}{A^2 \cdot (K \cdot F - A)}} \qquad [67]$$

Si comparamos el resultado obtenido con [62] que es el correspondiente al modelo E-V básico podremos deducir que la cartera óptima resultante de ambos modelos coincidirá sólo en el caso siguiente

$$K = \frac{- F \cdot (A^3 \cdot b^2 + 4 \cdot A \cdot B^2 \cdot c^2 + 4 \cdot A^2 \cdot B \cdot b \cdot c)}{4 \cdot c^2 \cdot [(A^2 \cdot B + 2 \cdot A \cdot B^2) \cdot (B - 2 \cdot C) - A^3 \cdot C + B^2 \cdot (B^2 - F^2) - 4 \cdot A \cdot B \cdot F^2 \cdot b \cdot c - A^2 \cdot F^2 \cdot b^2}$$

### *3.8.3.3. Modelo de Telser*

Telser[190] introduce una ligera modificación en el modelo original de **Roy** puesto que considera que si se pueden introducir valores carentes de riesgo en la cartera ya no tiene sentido minimizar la probabilidad de desastre:

---

[190]**L.G.TELSER**, op. cit., 1955-56, pp.1-2.

$$\left.\begin{array}{ll} & \text{Max } E(\tilde{R}_c) \\ \text{sujeto a} & \\ & p(R' \leq D) \leq K \end{array}\right\}$$

La restricción $p(R' \leq D) \leq K$ es equivalente a:

•) $$\frac{V(\tilde{R}_c)}{[E(\tilde{R}_c) - D]^2} \leq K \qquad [68]$$

•) $$V(\tilde{R}_c) \leq K \cdot E^2(\tilde{R}_c) - 2 \cdot K \cdot E(\tilde{R}) \cdot D + K \cdot D^2 \qquad [69]$$

En definitiva, la cartera óptima es la cartera eficiente que tiene la máxima rentabilidad esperada sujeta a la restricción [69].

Si tenemos en cuenta que para N=2 el conjunto de carteras eficientes viene descrito por la ecuación [58] y que la cartera óptima ha de cumplir también la restricción [69], la elección debe recaer en una parte de la frontera eficiente que está limitada por los puntos de intersección entre dicha frontera eficiente y la restricción. Dichos puntos de intersección son los que permiten la siguiente igualdad:

$$\frac{1}{F} \cdot [A \cdot E^2(\tilde{R}_c) - 2 \cdot B \cdot E(\tilde{R}_c) + G] = K \cdot E^2(\tilde{R}_c) - 2 \cdot K \cdot E(\tilde{R}) \cdot D + K \cdot D^2 \qquad [70]$$

De la igualdad [70] se desprende que los puntos de intersección son:

$$E_1(\tilde{R}_c) = \frac{2 \cdot \left[\frac{B}{F} - K \cdot D\right] + H}{2 \cdot \left[\frac{A}{F} - K\right]} \qquad [71]$$

$$E_2(\tilde{R}_c) = \frac{2 \cdot \left[\frac{B}{F} - K \cdot D\right] - H}{2 \cdot \left[\frac{A}{F} - K\right]} \qquad [72]$$

donde

$$H = \sqrt{4 \cdot \left[K \cdot D - \frac{B}{F}\right]^2 - 4 \cdot \left[\frac{A}{F} - K\right]\left[\frac{G}{F} - K \cdot D^2\right]} \qquad [73]$$

La frontera eficiente está delimitada por $E_2(\tilde{R}_c)$ en la parte inferior y por $E_1(\tilde{R}_c)$ en la parte superior.

De la nueva frontera eficiente, se escoge la cartera con máxima rentabilidad esperada, que es precisamente el límite superior de la frontera eficiente, es decir:

$$E_1(\tilde{R}_c) = \frac{2 \cdot \left[\frac{B}{F} - K \cdot D\right] + H}{2 \cdot \left[\frac{A}{F} - K\right]}$$

Para que la cartera óptima según el criterio de **Telser** sea la misma que según el criterio E-V se debe cumplir que:

$$K = \frac{\left[\frac{A \cdot B}{F} + A \cdot H + 2 \cdot B + F \cdot H\right] \cdot c + A \cdot B}{\left[(2 \cdot A \cdot D + 2 \cdot D \cdot F - B) \cdot c + F \cdot b\right]}$$

Según los modelos **"Safety First"** y bajo el supuesto de que el objetivo en cada periodo sea el mismo, el inversor elige, en el momento de la revisión, la cartera eficiente que le proporcina la máxima seguridad para el siguiente periodo.

## 3.9. MODELO DE PROGRAMACION POR OBJETIVOS

### 3.9.1. Introducción

Los modelos tradicionales de selección de carteras de valores consideran que el inversor persigue un único objetivo: maximizar la utilidad esperada de la rentabilidad de la cartera en el modelo E-V y en todas sus extensiones; minimizar la probabilidad de que la rentabilidad de la cartera sea inferior a un nivel prefijado en los modelos "Safety First", etc. Tales modelos no son aplicables a aquellos casos en que el inversor persigue más de un objetivo, pudiendo ocurrir incluso que los objetivos marcados sean contradictorios entre si (la consecución de un objetivo supone no alcanzar otro). En estos casos, además, el inversor pretende, no tanto optimizar, como satisfacer los objetivos marcados de modo que el resultado real esté lo más cerca posible del resultado deseado.

La Programación por Objetivos (P.O.) es la indicada para resolver este tipo de problemas, admitiendo múltiples objetivos e incluso que cada objetivo se subdivida, a su vez, en diversos subobjetivos. Permite además, la existencia de objetivos contrapuestos y en este caso se asignan unas prioridades de modo que un objetivo no se considera hasta que se hayan satisfecho todos los objetivos situados por encima de él en la ordenación establecida.

Las primeras referencias a la P.O. se encuentran en **Charnes** y

Cooper[191] y en Ijiri[192], aunque los primeros en aplicar la P.O. a la selección de carteras fueron Lee y Lerro[193].

### *3.9.2. Modelo general de Programación por Objetivos de Lee y Lerro*[194]

El modelo general de selección de carteras mediante la P.O. se formaliza del siguiente modo:

$$\left.\begin{array}{ll} & \text{Min } Z = e\cdot y^{+} + e\cdot y^{-} \\ \text{sujeto a} & \\ & A\cdot X - I\cdot y^{+} + I\cdot y^{-} = b \\ & X,\ y^{+},\ y^{-} \geq 0 \end{array}\right\}$$

donde

•) e: vector fila formado por "m" unos;

•) m: número de objetivos que persigue el inversor;

---

[191] A.CHARNES-W.W.COOPER, Managemente Models and Industrial Applications of Linear Programming (John Wiley and Sons, Nueva York, 1961).

[192] Y.IJIRI, Management Goals and Accounting for Control (North-Holland, Amsterdam, 1965).

[193] S.M.LEE-A.J.LERRO, "Optimizing the Portfolio Selection for Mutial Funds", J.F. ,1973, pp.1087-1101.

[194] S.M.LEE-A.J.LERRO, op. cit., 1973, p.1090.

•) $y^+$: vector columna de "m" componentes que representan las desviaciones positivas respecto al resultado deseado (se ha sobrepasado el objetivo deseado);

•) $y^-$: vector columna de "m" componentes que representan las desviaciones negativas respecto al resultado deseado (no se ha alcanzado el objetivo deseado);

•) A: matriz de orden "m*n", llamada matriz de coeficientes tecnológicos[195] ó matriz de relaciones entre los objetivos y los subobjetivos[196];

•) X: vector columna de "n" componentes que representan las variables de decisión;

•) I: matriz identidad cuadrada de orden "m";

•) b: vector columna de "m" componentes en el que se especifican los resultados deseados (los objetivos marcados para cada variable).

El inversor ha de analizar cada uno de los objetivos considerados en el modelo para saber si una desviación positiva ó negativa (ó ninguna) respecto al resultado deseado es satisfactoria. De la función objetivo se elimina aquella desviación que favorece al inversor.

Las variables de desviación ($y_i^+$, $y_i^-$; $i=1,2,\ldots,m$) deben ordenarse de acuerdo con la prioridad establecida por el inversor. De este modo, los objetivos menos importantes sólo se tendran en cuenta despues de

---

[195] P.C.KUMAR-G.C.PHILLIPATOS-J.R.EZZELL, " Goal Programming and the Selection of Portfolios by Dual - Purpose Funds", J.F. 1978, p.305.

[196] S.M.LEE-A.J.LERRO, op. cit., 1973, p.1090.

haber satisfecho los más deseados. Para ello, se dividen las variables en K grupos, asignando a cada variable un factor de prioridad $P_j$ $(j=1,2,\ldots,K)$, de modo que $P_j > P_{j+1}$. Es decir, un objetivo al que se le ha asignado un factor de prioridad $P_2$ ha de ser satisfecho antes que otro objetivo al que se le ha asignado un factor de prioridad $P_3$.

### *3.9.3. Modelo específico de Programación por Objetivos*

En este apartado vamos a considerar el caso concreto de un inversor que, entre todas las carteras factibles, elige aquella que mejor satisface los múltiples objetivos que se ha fijado.

Para desarrollar este modelo supondremos que la rentabilidad de los títulos que constituyen una cartera se relaciona linealmente con un índice de mercado del siguiente modo (**modelo de Sharpe**)[197]:

$$\tilde{r}_i = a_i + b_i \cdot \tilde{I} + \tilde{e}_i \qquad [74]$$

$$\tilde{I} = a_{N+1} + \tilde{e}_{N+1} \qquad [75]$$

En este caso, la rentabilidad de la cartera es

$$\tilde{R}_c = \sum_{i=1}^{N+1} X_i \cdot (a_i + \tilde{e}_i) \qquad [76]$$

donde

[197] Véase el apartado **1.3.6.** para interpretar las variables.

$$X_{N+1} = \sum_{i=1}^{N} X_i \cdot b_i \qquad [77]$$

y la esperanza y varianza de $\tilde{R}_c$ son, respectivamente

$$E(\tilde{R}_c) = \sum_{i=1}^{N+1} X_i \cdot a_i = \sum_{i=1}^{N} X_i \cdot a_i + \left[\sum_{i=1}^{N} X_i \cdot b_i\right] \cdot a_i \qquad [78]$$

$$V(\tilde{R}_c) = \sum_{i=1}^{N+1} X_i^2 \cdot Q_i = \sum_{i=1}^{N} X_i^2 \cdot Q_i + \left[\sum_{i=1}^{N} X_i \cdot b_i\right]^2 \cdot Q_{N+1} \qquad [79]$$

Además supondremos que los objetivos del inversor son:

1) Objetivo respecto a la rentabilidad esperada de la cartera.

El inversor desea que el valor de $\sum_{i=1}^{N} X_i \cdot a_i$ no sea muy diferente al nivel, A, deseado. Y además, como las desviaciones positivas respecto a dicho nivel le favorecen, sólo tendrá en cuenta las desviaciones negativas de modo que se cumpla

$$\sum_{i=1}^{N} X_i \cdot a_i + y_1^- = A \qquad [80]$$

En el orden de prioridades marcado por el inversor, el objetivo respecto a la rentabilidad esperada se halla en primer lugar. Se le asigna, por tanto, el coeficiente $P_1$.

2) Objetivo respecto al riesgo de la cartera de carácter sistemático.

El riesgo de la cartera, medido por $V(\tilde{R}_c)$ y definido en [79], puede dividirse en dos componentes:

a) Riesgo sistemático: $$\left[\sum_{i=1}^{N} X_i \cdot b_i\right]^2 \cdot Q_{N+1} \qquad [81]$$

b) Riesgo no sistemático: $$\sum_{i=1}^{N} X_i^2 \cdot Q_i \qquad [82]$$

El inversor puede decidir que un objetivo sea que el riesgo sistemático definido en [81] esté lo más próximo posible a un nivel deseado y considera igualmente perjudiciales las desviaciones positivas y negativas respecto a dicho nivel.

Actuar sobre el riesgo sistemático equivale a actuar sobre

$$\sum_{i=1}^{N} X_i \cdot b_i \qquad [83]$$

y si bien en principio se puede pensar que al inversor sólo le perjudica una desviación positiva respecto al nivel deseado, se debe tener en cuenta que esta expresión forma parte también de la rentabilidad esperada de la cartera. Por dicha razón, al inversor le perjudica, también, que se produzca una desviación negativa respecto al nivel deseado.

En definitiva, el inversor desea que

$$\sum_{i=1}^{N} X_i \cdot b_i + y_2^- - y_2^+ = B \qquad [84]$$

y el en el orden de prioridades marcado, este objetivo se halla en segundo lugar. Se le asigna el coeficiente $P_2$.

3) Objetivo respecto al riesgo de la cartera de carácter no sistemático.

Si bien el riesgo de carácter no sistemático de la cartera es, según [82], $\sum_{i=1}^{N} X_i^2 \cdot Q_i$ aproximaremos dicha expresión por

$$\sum_{i=1}^{N} X_i \cdot Q_i \qquad [85]$$

para conseguir una restricción lineal. Esta aproximación es válida ya que se cumple

$$\sum_{i=1}^{N} X_i^{2} \cdot Q_i \leq \sum_{i=1}^{N} X_i \cdot Q_i$$

al ser $0 \leq X_i \leq 1$. Por tanto, si aseguramos que la condición [85] sea igual o inferior a C, estaremos asegurando que $\sum_{i=1}^{N} X_i^{2} \cdot Q_i$ no alcance ese nivel.

Si se considera que una desviación positiva respecto al nivel, C, deseado perjudica al inversor, se deberá conseguir que

$$\sum_{i=1}^{N} X_i \cdot Q_i - y_3^+ = C \qquad [86]$$

Consideraremos que este objetivo tiene la misma prioridad que el anterior. Por tanto, su coeficiente es $P_2$.

4) Objetivo respecto a la proporción de la riqueza que se invierte en cada título.

El inversor puede desear que la proporción invertida en cada título no sea superior a un determinado nivel. Por dicho motivo, la restricción deberá incluir las desviaciones positivas pero no las negativas:

$$X_i - y_{i+3}^+ = d_i \qquad [87]$$

A este objetivo se le asigna el tercer lugar en el orden de consecución de los objetivos ($P_3$).

Estos cuatro objetivos están sometidos a las dos restricciones siguientes que deberán cumplirse sin desviación alguna:

$$\sum_{i=1}^{N} X_i = 1 \qquad [88]$$

$$X_i \geq 0 \qquad [89]$$

Definidos los múltiples objetivos ([70], [74], [86] y [87]) que el inversor desea conseguir y las restricciones[198] señaladas ([88] y [89]), el modelo de selección de carteras se formaliza del siguiente modo:

$$\text{Min } P_1(y_1^-) + P_2(y_2^- + y_2^+ + y_3^+) + P_3\left[\sum_{i=1}^{N} y_{i+3}^+\right]$$

sujeto a

$$\sum_{i=1}^{N} X_i a_i + y_1^- = A$$

$$\sum_{i=1}^{N} X_i b_i + y_2^- - y_2^+ = B$$

$$\sum_{i=1}^{N} X_i Q_i - y_3^+ = C$$

$$X_i - y_{i+3}^+ = d_i$$

$$\sum_{i=1}^{N} X_i = 1$$

$$X_i \geq 0$$

$$y^- \geq 0 \quad y^+ \geq 0$$

[198] Los objetivos se distinguen de las restricciones en que los primeros representan los deseos de los decisores, mientras que las segundas representan el contexto de la operación en el que deben conseguirse dichos objetivos.
**P.C.KUMAR-G.C.PHILIPPATOS-J.R.EZZELL**, op. cit., 1978, p.305.

Este problema se puede resolver a través del algoritmo Simplex al que se incorpora una modificación para garantizar la minimización de las desviaciones asociadas al objetivo de máxima prioridad, antes de minimizar las desviaciones asociadas al objetivo situado en segundo lugar en prioridad, y así sucesivamente.

Si el inversor se plantea en el momento de la revisión cuál es la cartera del próximo periodo, puede decidir cambiar de objetivos o, manteniendo los mismos objetivos, variar el orden de prioridades del periodo anterior. Ello le permite, no sólo adaptarse a cambios en las expectativas de los títulos sino también adaptarse a cambios en su propia política de cartera.

# PARTE II

# MODELOS MULTIPERIODICOS DE REVISION DE CARTERA

## *CARACTERISTICAS Y CLASIFICACION DE LOS MODELOS MULTIPERIODICOS DE REVISION DE CARTERA*

### - *Características de los modelos multiperiódicos de revisión de cartera*

Desde el nacimiento de la moderna Teoría de la Cartera en 1952, son numerosos los estudios que se han desarrollado en el contexto de la selección de carteras considerando que el inversor está dispuesto a mantener su cartera durante un único periodo. Por el contrario, son menos los estudios que, bajo un supuesto más real, consideran que el inversor crea una cartera con el propósito de mantenerla durante más de un periodo.

En los capítulos precedentes hemos considerado que el inversor, aunque desea mantener una cartera durante T periodos fija el mismo objetivo para cada uno de ellos. De este modo, el problema general de selección de la cartera multiperiódica óptima (o secuencia de carteras debido a las revisiones que se van produciendo), se subdivide en T problemas de carácter estático.

**Smith**[199], si bien desarrolla su modelo bajo este supuesto, considera que, en general, la optimización periodo a periodo no es

[199]**K.V.SMITH**, op. cit., 1968, p.402.

óptima:

> los métodos de revisión desarrollados en este estudio no son, en sentido estricto, óptimos. Es decir, implican la sucesiva aplicación de un modelo estático de un único periodo en un horizonte multiperiodo. Un modelo verdaderamente óptimo para la revisión de una cartera dinámica debería implicar necesariamente la formación de expectativas para todos los periodos del horizonte de planeación. Y, aunque los cambios en la cartera pueden todavía hacerse periódicamente, basados en la información existente, tales cambios, deberían ser óptimos con respecto al resto del horizonte.

En la línea señalada por **Smith**, se puede considerar que el inversor plantea un único objetivo para el final de los T periodos y que condiciona el comportamiento en cada uno de dichos periodos para la consecución de dicho fin.

En este sentido, el primer artículo aparece en 1961 y sus autores, **Chambers** y **Charnes**[200] intentan aplicar un modelo de selección de cartera multiperiódico a la cartera de un banco:

> El modelo presentado corresponde al problema de determinación de la cartera óptima de un banco para varios periodos de acuerdo con los requisitos fijados por los inspectores del banco, que se traducen en la definición de límites dentro de los cuales el nivel de riesgo asociado a la rentabilidad de la cartera es aceptable.

En 1962, **Naslund** y **Winston**[201] adaptan el modelo "Safety First" al supuesto de que el inversor tenga un único objetivo final y, en 1965, es

---

[200] **D.CHAMBERS-A.CHARNES**, "Inter-Temporal Analysis and Optimization of Bank Portfolios", M.S., 1961, pp.393-410.

[201] **B.NASLUND-A.WINSTON**, "A model of Multi-Period Investment Under Uncertainty", M.S., 1962, pp.184-200.

**Tobin**[202] quien hace extensivo el modelo E-V al caso multiperiódico.

A pesar de estas primeras tentativas, el verdadero empuje hacia una Teoría de la selección y revisión multiperiódica se debe a **Mossin**[203]:

> el inversor determina un momento cierto en el futuro en el que planea consumir la riqueza disponible en ese momento. Y toma sus decisiones de inversión con el objetivo de maximimizar la utilidad esperada de la riqueza en dicho punto.

Con posterioridad, la mayoría de los estudios que han abordado la Teoría de la selección y revisión de la cartera han seguido la línea marcada por **Mossin**, lo cual implica la utilización de métodos de optimización dinámica, en concreto la Programación Dinámica, instrumento cuyos principales rasgos se exponen en el **Anexo** al **Capítulo 5.**

En los dos capítulos siguientes, consideraremos que el inversor está interesado en mantener una cartera durante T periodos y pretende conseguir el objetivo marcado al final del último de ellos, lo cual condiciona su comportamiento en cada uno de los periodos anteriores. En este caso, los modelos propuestos permiten, mediante la utilización de la Programación Dinámica, conocer cuál ha de ser la cuantía invertida en cada activo y en cada periodo con el fin de conseguir el objetivo propuesto.

---

[202] **J.TOBIN**, op cit., 1974, (aunque el artículo orginal aparece en 1965), pp.56-67.

[203] **J.MOSSIN**, op. cit., 1968, p.220.

- ***Clasificación de los modelos multiperiódicos de revisión de cartera***

La clasificación de los modelos multiperiódicos de cartera amplía con detalle la clasificación general de los modelos de revisión presentada en el apartado **4.** del **Capítulo Planteamiento, Objetivos y Estructura de la Tesis Doctoral.**

I) Del mismo modo que se hizo con los modelos uniperiódicos, podríamos clasificar los modelos multiperiódicos en función del **número de objetivos que el inversor desea conseguir al final del último de los T periodos de posesión de la cartera:**

•) Modelos con **un único objetivo**

•) Modelos con **múltiples objetivos**

A pesar de que sea posible hacer esta clasificación no hemos encontrado ningún trabajo que además del tratamiento multiperiodo de la revisión considere la posibilidad de más de un objetivo.

II) Los modelos que consideran un único objetivo se pueden clasificar en función de la **naturaleza del objetivo elegido por el inversor:**

•) Modelos cuyo objetivo es la **maximización de la utilidad esperada;**

•) Modelos cuyo objetivo es la **maximización de la media geométrica** de la rentabilidad de la cartera para el conjunto de los T periodos;

•) Modelos cuyo objetivo es la seguridad del inversor.

La mayoría de los modelos multiperiódicos pueden incluirse en la primera categoría aunque, como veremos posteriormente, se pueden diferenciar tres grandes grupos de modelos según cuál sea la función de utilidad considerada.

En el segundo grupo se incluye el **Modelo Media Geométrica** de carácter multiperiódico que, al igual que el mismo modelo de carácter uniperiódico, está maximizando, bajo unas determinadas hipótesis, la utilidad esperada de la riqueza disponible en el momento T.

En el tercer grupo puede incluirse el **Modelo de Naslund-Whinston**[204] que constituye la versión de carácter multiperiodo del modelo "**Safety First**" de **Telser**[205]. Así, al igual que en el modelo de **Telser**, el objetivo del inversor es maximizar el valor esperado de la rentabilidad de la cartera que en el caso del modelo de **Naslund-Whinston** es global para el conjunto de T periodos (aunque la rentabilidad global se halla por simple suma de la rentabilidad de cada uno de los periodos).

Fijado un nivel máximo de pérdida para cada periodo, el objetivo anterior ha de conseguirse asegurando que la probabilidad de que la rentabilidad real de la cartera supere ese nivel sea igual o mayor a un valor determinado por el inversor. Junto a esta restricción que trata de limitar el riesgo de la cartera los autores consideran una restricción de capital en la que admiten la posibilidad de que en cada periodo se produzcan nuevas aportaciones de capital y que parte del mismo se mantenga sin invertir (en caja).

---

[204] **B.NASLUND-A.WHINSTON**, op. cit., 1962, p.192.

[205] Véase apartado **3.8.3.3.** de la presente Tesis.

III) Por lo que respecta al primer grupo de modelos y tal como avanzamos, es posible clasificarlos de nuevo según cual sea la **función de utilidad considerada** (según la variable de la que se hace depender dicha función):

•) Modelos que consideran una **función de utilidad dependiente de la riqueza final** (riqueza disponible en el momento de liquidar definitivamente la cartera poseida durante T periodos, $\tilde{W}_T$). Los modelos que maximizan la utilidad esperada de $\tilde{W}_T$ son los que constituyen el objeto de nuestro trabajo.

•) Modelos que consideran una **función de utilidad dependiente del consumo que el inversor realiza a lo largo de toda su vida,** $U(\tilde{C}_1,\tilde{C}_2,\ldots,\tilde{C}_t,\ldots)$ donde $\tilde{C}_t$ es el consumo realizado en el periodo t. Aunque estos modelos ("**Lifetime Portfolio Selection Models**") no serán tratados en la presente Tesis puesto que plantean un problema de características notablemente distintas al considerado en este trabajo, merecen ser contemplados dentro de la clasificación de modelos multiperiódicos debido al interés que este planteamiento alternativo presenta y al número de trabajos que profundizan en este línea.

El problema planteado en estos modelos, en palabras de **Fama**[206] es

> *Las decisiones sobre consumo-inversión* deben tomarse al principio de cada periodo hasta que el consumidor muera y su riqueza se distribuya entre sus herederos. El objetivo del consumidor es maximizar la utilidad esperada del consumo realizado durante toda su vida ("lifetime consumption").

[206] **E.F.FAMA**, "Multiperiod Consumption-Investment Decisions", A.E.R., 1970, p.163.

En estos modelos se supone que el consumidor-inversor reparte la riqueza disponible al inicio de cada periodo entre consumo e inversión y quiere saber como ha de realizar el reparto para maximizar la utilidad esperada del "lifetime consumption". En realidad se trata de un problema donde se combina la selección de la cartera óptima y las reglas de consumo.

Además del trabajo de **Fama** ya citado, merecen especial atención los trabajos de **Phelps**[207] (uno de los primeros en avanzar por esta línea), **Merton**[208], **Samuelson**[209], **Hakansson**[210] y los más recientes de **Bodily-White**[211] y **Cox-Huang**[212].

•) Modelos que consideran una **función de utilidad dependiente de la rentabilidad de la cartera en cada periodo,** $U(\tilde{R}_{c1},\tilde{R}_{c2},\dots,\tilde{R}_{cT})$ y que suponiendo linealidad se obtiene

---

[207] **E.S.PHELPS,** "The Accumulation of Risky Capital: a Sequential Utility Analysis", Ec., 1962, pp.729-743.

[208] **R.C.MERTON,** "Lifetime Portfolio Selection Under Uncertainty: the Continuous-Time Case", R.E.A.S., 1969, pp.247-257.
"Optimum Consumption and Portfolio Rules in a Continuous-Time Model", J.E.T., 1971, pp.373-413.

[209] **P.A.SAMUELSON,** "Lifetime Portfolio Selection by Dynamic Stochastic Programming", R.E.A.S., 1969, pp.239-246.

[210] **N.H.HAKANSSON,** "*Optimal Investment and Consumption Strategies Under* Risk for a Class of Utility Function", Ec., 1970, pp.587-607.

[211] **S.A.BODILY-Ch.C.WHITE,** "Optimal Consumption and Portfolio Strategies in a Discrete-Time Model with Summary-Dependent Preferences", J.F.Q.A., 1982, pp.1-14.

[212] **J.C.COX-Ch.F.HUANG,** "Optimal Consumption and Portfolio Policies when Asset Prices Follow a Diffusion Process", J.E.T., 1989, pp.33-83.

sumando la utilidad de la rentabilidad de cada periodo[213]. Este modelo (**Modelo Time-State-Preference**) implica la consideración de una función de utilidad dinámica que escapa a los objetivos de nuestro trabajo.

IV) En cuanto a los modelos que maximizan la utilidad esperada de la riqueza disponible en el momento T, éstos pueden clasificarse, del mismo modo que se hizo para los modelos uniperiódicos[214], según cuál sea el **camino seguido para conseguir dicho objetivo:**

•) La cartera que **maximiza la utilidad esperada de la riqueza se escoge de entre el conjunto de carteras eficientes.**

En este caso, la maximización de la utilidad esperada constituye un objetivo de carácter mixto puesto que está sujeto a que las carteras consideradas sean eficientes.

•) La determinación de la cartera óptima se hace de una sola vez **maximizando directamente la función de utilidad esperada** (objetivo puro).

Mientras que los modelos uniperiódicos se han desarrollado especialmente en la línea de los modelos que maximizan la utilidad esperada de la rentabilidad a través de la determinación previa del conjunto eficiente, los modelos multiperiódicos se han desarrollada a través de los modelos de maximización directa de la utilidad esperada de la riqueza final debido a los problemas que surgen al buscar el conjunto eficiente multiperiódico.

---

[213] **S.C.MYERS**, "A Time-State-Preference Model of Security Valuation", <u>J.F.Q.A.</u>, 1968, pp.1-33.

[214] Véase la clasificación de los modelos uniperiódicos de revisión de cartera incluida en la **Parte I** de esta Tesis.

V) Los modelos que buscan previamente el conjunto eficiente pueden clasificarse, a su vez, en función del **criterio utilizado para determinar la eficiencia de una cartera:**

•) Modelos de **dos momentos**

En el contexto de los modelos multiperiódicos se ha desarrollado únicamente el **modelo Esperanza-Varianza multiperiódico.**

•) Modelos de **tres momentos**

Se incluye en este grupo el modelo que se basa en los tres primeros momentos de la distribución multiperiodo (Esperanza, Varianza, Tercer Momento) para determinar la eficiencia de la cartera (**Modelo E-V-$\mu_3$**).

•) Modelos de **Dominancia Estocástica**

Estos modelos se basan en la distribución de probabilidad de la rentabilidad global para los T periodos de cada cartera para decidir si es o no eficiente. En nuestro trabajo estos modelos no serán tratados porque, en realidad, no contemplan la sucesiva revisión de cartera sino que suponen que la misma cartera (sin cambio alguno) será mantenida durante T periodos. En este sentido **Levy**[215] afirma que

> Suponemos que el inversor escoge la misma inversión para el periodo completo; por tanto, en este

[215] **H.LEVY,** "Stochastic Dominance, Efficiency Criteria and Efficient Portfolios: The Multi-Period Case", A.E.R., 1973, p.986.

modelo, carteras[216] $F_1G_2$, $G_1F_2$ no están permitidas. Esto significa que en el momento de tomar la decisión el inversor no intenta cambiar la cartera.

Otro trabajo que estudia el criterio de la Dominancia Estocástica desde la misma persepectiva que el anterior es el de **Levy-Paroush**[217].

La clasificación de los modelos multiperiódicos de revisión de cartera puede esquematizarse del siguiente modo:

[216] $F_1$ y $F_2$ son las distribuciones de probabilidad de la rentabilidad de una cartera A en los periodos 1 y 2, y $G_1$ y $G_2$ tienen el mismo significado para una cartera B.

[217] **H.LEVY-J.PAROUSH**, "Multi-Period Stochastic Dominance", M.S., 1974, pp.428-435.

- Modelos multiperiódicos de revisión de cartera
  - Modelos con un único objetivo
    - Maximización de la utilidad esperada
      - de la riqueza final, $U(\tilde{W}_T)$
        - Determinación del conjunto eficiente
          - Modelo E-V
          - Modelo E-V-$\mu_3$
          - Modelo de Dominancia Estocástica
        - Maximización directa de la utilidad esperada
      - del consumo "lifetime", $U(\tilde{C}_1,\ldots,\tilde{C}_t,\ldots)$
      - de la rentabilidad, $U(\tilde{R}_{c1},\tilde{R}_{c2},\ldots,\tilde{R}_{cT})$
    - Maximización de la media geométrica (Modelo Media Geométrica)
    - Seguridad ante todo (Modelo Naslund-Whinston)
  - Modelos con múltiples objetivos

# CAPITULO 4

# MODELO ESPERANZA - VARIANZA MULTIPERIODICO

### *4.1. INTRODUCCION*

En los capítulos anteriores se ha supuesto que el inversor persigue el mismo objetivo al final de cada uno de los T periodos durante los que piensa mantener la cartera. En el caso que se guíe por el modelo E-V básico, el inversor selecciona al inicio de cada periodo (en t, t=0,1,2,...,T-1) la cartera de la frontera eficiente, resultante del criterio utilizado, que proporciona la máxima utilidad esperada de la riqueza obtenida al final del periodo considerado (en t+1, t=0,1,...,T-1). Ello supone la determinación del conjunto de *carteras eficientes para cada periodo* (*T fronteras eficientes*).

Este criterio puede aplicarse, con las modificaciones precisas, a aquellos casos en que el inversor pretenda maximizar la utilidad esperada de la riqueza obtenida en T (al final del último periodo). Para ello será necesario determinar la frontera eficiente para el conjunto de los T periodos, lo cual requiere de la definición de la esperanza y varianza multiperiódicas y del criterio de eficiencia E-V de carácter multiperiódico.

Además de las hipótesis que se añadan en los apartados siguientes, siguen siendo válidas, para cada periodo considerado individualmente, las hipótesis del epígrafe **1.2.3.** aplicables al modelo E-V básico.

### 4.2. ESPERANZA Y VARIANZA MULTIPERIODICAS

Sea:

•) $W_t$: riqueza (en unidades monetarias) de la que dispone el inversor en el momento t, $t=0,1,2,\ldots,T$;

•) $W_0$: riqueza inicial del inversor (en $t=0$)

•) $W_T$: riqueza final del inversor (en $t=T$)

•) $\tilde{R}_{ct+1}$: variable aleatoria "tasa de rentabilidad de la cartera" en el momento t, $t=0,1,2,\ldots,T-1$;

•) $\tilde{R}_T$: variable aleatoria "tasa de rentabilidad de la cartera" para el conjunto de T periodos ($T\geq 2$);

•) $E_{t+1}$: Valor esperado de $\tilde{R}_{ct+1}$, $E_{t+1} = E(\tilde{R}_{ct+1})$, $t=0,1,2,\ldots,T-1$;

•) $V_{t+1}$: Varianza asociada a $\tilde{R}_{ct+1}$, $V_{t+1} = V(\tilde{R}_{ct+1})$, $t=0,1,2,\ldots,T-1$.

La relación[218]

$$\tilde{W}_{t+1} = W_t \cdot (1 + \tilde{R}_{ct+1}) \qquad [1]$$

nos permite deducir la tasa de rentabilidad de la cartera para el conjunto de T periodos, suponiendo que todos tienen la misma duración, del siguiente modo:

[218] Esta relación fue deducida en el apartado **1.2.5.** de esta Tesis.

$$\tilde{W}_T = \tilde{W}_{T-1}\cdot(1 + \tilde{R}_{cT}) = \tilde{W}_{T-2}\cdot(1 + \tilde{R}_{cT-1})\cdot(1 + \tilde{R}_{cT}) =$$

$$= \tilde{W}_{T-3}\cdot(1 + \tilde{R}_{cT-2})\cdot(1 + \tilde{R}_{cT-1})\cdot(1 + \tilde{R}_{cT}) = \ldots\ldots\ldots =$$

$$= \tilde{W}_1\cdot(1 + \tilde{R}_{c2})\cdot(1 + \tilde{R}_{c3})\cdot\ldots\cdot(1 + \tilde{R}_{cT-1})\cdot(1 + \tilde{R}_{cT}) =$$

$$= W_0\cdot(1 + \tilde{R}_{c1})\cdot(1 + \tilde{R}_{c2})\cdot\ldots\cdot(1 + \tilde{R}_{cT-1})\cdot(1 + \tilde{R}_{cT}) =$$

$$= W_0\cdot\prod_{t=0}^{T-1}(1 + \tilde{R}_{ct+1}) = W_0\cdot(1 + \tilde{R}_T) \qquad [2]$$

Así, la **tasa de rentabilidad de la cartera** para el conjunto de T periodos es

$$\tilde{R}_T = \prod_{t=0}^{T-1}(1 + \tilde{R}_{ct+1}) - 1 \qquad [3]$$

aunque normalmente utilizaremos

$$(1 + \tilde{R}_T) = \prod_{t=0}^{T-1}(1 + \tilde{R}_{ct+1}) \qquad [4]$$

El **valor esperado** de $(1 + \tilde{R}_T)$, teniendo en cuenta su definición en [4], es el siguiente:

$$E(1 + \tilde{R}_T) = E\left[\prod_{t=0}^{T-1}(1 + \tilde{R}_{ct+1})\right] \qquad [5]$$

Supondremos siempre que $\tilde{R}_{ct+1}$ es una variable estadísticamente independiente en el tiempo, es decir, la distribución de probabilidad de dicha variable para un periodo es independiente de la distribución de cualquier otro periodo.

Bajo este supuesto se cumplirá que

$$\left[\prod_{t=0}^{T-1}(1 + \tilde{R}_{ct+1})\right] = \prod_{t=0}^{T-1}\left[E(1 + \tilde{R}_{ct+1})\right] = \prod_{t=0}^{T-1}(1 + E_{t+1}) \qquad [6]$$

y, por tanto, el valor esperado de $(1 + \tilde{R}_T)$, en función de [6], es

$$E(1 + \tilde{R}_T) = \prod_{t=0}^{T-1}(1 + E_{t+1}) \qquad [7]$$

La varianza asociada a $\tilde{R}_T$ es

$$V(\tilde{R}_T) = E[\tilde{R}_T - E(\tilde{R}_T)]^2 =$$

$$= E\left[\prod_{t=0}^{T-1}(1 + \tilde{R}_{ct+1}) - \prod_{t=0}^{T-1}(1 + E_{t+1})\right]^2 = E\left\{\left[\prod_{t=0}^{T-1}(1 + \tilde{R}_{ct+1})\right]^2 +\right.$$

$$\left. + \left[\prod_{t=0}^{T-1}(1 + E_{t+1})\right]^2 - 2\cdot\left[\prod_{t=0}^{T-1}(1 + \tilde{R}_{ct+1})\right]\cdot\left[\prod_{t=0}^{T-1}(1 + E_{t+1})\right]\right\} =$$ [219]

$$= E\left[\prod_{t=0}^{T-1}(1 + \tilde{R}_{ct+1})\right]^2 + E\left[\prod_{t=0}^{T-1}(1 + E_{t+1})\right]^2 - 2\cdot\left[\prod_{t=0}^{T-1}(1 + E_{t+1})\right]^2 =$$

---

[219] $E\left[\prod_{t=0}^{T-1} (1 + \tilde{R}_{ct+1})\right] = \prod_{t=0}^{T-1} (1 + E_{t+1})$

$$= E\left[\prod_{t=0}^{T-1}(1 + \tilde{R}_{ct+1})\right]^2 - E\left[\prod_{t=0}^{T-1}(1 + E_{t+1})\right]^2 =$$

$$= E\left[\prod_{t=0}^{T-1}(1 + \tilde{R}_{ct+1})^2\right] - E\left[\prod_{t=0}^{T-1}(1 + E_{t+1})\right]^2 =$$

$$= \prod_{t=0}^{T-1}\left[E(1 + \tilde{R}_{ct+1})^2\right] - E\left[\prod_{t=0}^{T-1}(1 + E_{t+1})\right]^2 =$$

$$= \prod_{t=0}^{T-1}\left[E(1 + \tilde{R}_{ct+1})^2\right] - \left[E(1 + \tilde{R}_T)\right]^2 \qquad [8]$$

De esta última expresión, [8], $\prod_{t=0}^{T-1}\left[E(1 + \tilde{R}_{ct+1})^2\right]$ puede desarrollarse en función de $E_{t+1}$ y $V_{t+1}$:

$$\prod_{t=0}^{T-1}\left[E(1 + \tilde{R}_{ct+1})^2\right] = \prod_{t=0}^{T-1}\left[1 + E(\tilde{R}^2_{ct+1}) + 2E_{t+1}\right] =$$

$$= \prod_{t=0}^{T-1}\left[1 + V_{t+1} + (E_{t+1})^2 + 2E_{t+1}\right] = \prod_{t=0}^{T-1}\left[V_{t+1} + (1 + E_{t+1})^2\right] \qquad [9]$$

Teniendo en cuenta [9], $V(\tilde{R}_T)$ es

$$V(\tilde{R}_T) = \prod_{t=0}^{T-1}\left[V_{t+1} + (1 + E_{t+1})^2\right] - \left[E(1 + \tilde{R}_T)\right]^2 \qquad [10]$$

De otra manera[220],

$$V(\tilde{R}_T) + \left[E(1 + \tilde{R}_T)\right]^2 = \prod_{t=0}^{T-1}\left[V_{t+1} + (1 + E_{t+1})^2\right] \qquad [11]$$

Si además de la independencia en el tiempo, suponemos que la distribución de probabilidad de $\tilde{R}_{ct+1}$ es la misma para todos los periodos (estacionariedad), entonces,

$$E_{t+1} = E' \qquad \forall t,\ t=0,1,\ldots,T-1;$$

$$V_{t+1} = V' \qquad \forall t,\ t=0,1,\ldots,T-1$$

y, en este caso, el **valor esperado**, [7] y la **varianza**, [11], de $\tilde{R}_T$ pueden expresarse del siguiente modo:

$$E(1 + \tilde{R}_T) = (1 + E')^T \qquad [12]$$

o de modo equivalente

$$E(\tilde{R}_T) = (1 + E')^T - 1 \qquad [13]$$

$$V(\tilde{R}_T) = \left[V' + (1 + E')^2\right]^T - (1 + E')^{2\cdot T} =$$

$$= \left[V' + (1 + E')^2\right]^T - \left[E(1 + \tilde{R}_T)\right]^2 \qquad [14]$$

---

[220] **J.TOBIN**, op. cit., 1974, p.65.

De la definición de la esperanza y varianza multiperiódicas se aprecia su dependencia respecto a la esperanza y varianza para un sólo periodo, además de su dependencia respecto a T:

$$E(\tilde{R}_T) = f_1(E',T)$$

$$V(\tilde{R}_T) = f_2(E',V',T)$$

Por este motivo, analizaremos el signo de las derivadas parciales de $E(\tilde{R}_T)$ y $V(\tilde{R}_T)$ respecto a E' y V' para poder determinar la influencia de estas variables en la esperanza y varianza multiperiodo. En cuanto a la influencia de T en $E(\tilde{R}_T)$ y $V(\tilde{R}_T)$, al ser ésta una variable de carácter discreto, deberá analizarse desde otra perspectiva:

1) Derivada de $E(\tilde{R}_T)$ y $V(\tilde{R}_T)$ respecto a E' que supondremos positiva[221]

$$\cdot)\ \frac{\partial E(\tilde{R}_T)}{\partial E'} = T\cdot(1 + E')^{T-1} > 0 \qquad [15]$$

$$\cdot)\ \frac{\partial V(\tilde{R}_T)}{\partial E'} = 2\cdot T\cdot\left[V'+(1+E')^2\right]^{T-1}(1+E') - 2\cdot T\cdot(1+E')^{2\cdot T-1} =$$

$$= 2\cdot T\cdot\left[(1 + E')\cdot\sum_{r=0}^{T-1}\begin{bmatrix}T-1\\ r\end{bmatrix}\cdot(V')^r\cdot(1 + E')^{2\cdot(T-1-r)} -\right.$$

[221]El inversor, cuando elige los títulos que constituirán la base para la formación de la cartera, no tiene en cuenta aquéllos cuya rentabilidad esperada es negativa para evitar que la rentabilidad esperada de la cartera también lo sea.

$$- (1 + E')^{2\cdot T-1}\Bigg] = 2\cdot T\cdot \Bigg[(1 + E')\cdot(1 + E')^{2\cdot(T-1)} +$$

$$+ (1 + E')\cdot\sum_{r=1}^{T-1} \begin{bmatrix}T-1\\ r\end{bmatrix}\cdot(V')^{r}\cdot(1 + E')^{2\cdot(T-1-r)} - (1 + E')^{2T-1}\Bigg] =$$

$$= (1 + E')\cdot\sum_{r=1}^{T-1} \begin{bmatrix}T-1\\ r\end{bmatrix}\cdot(V')^{r}\cdot(1 + E')^{2\cdot(T-1-r)} > 0 \qquad [16]$$

De los resultados [15] y [16], se puede concluir que cuanto mayor sea E' mayor será la esperanza y varianza multiperiódica.

2) Derivada de $V(\tilde{R}_T)$ respecto a V'

$$\cdot)\ \frac{\partial V(\tilde{R}_T)}{\partial V'} = T\cdot\left[V'+(1 + E')^2\right]^{T-1} > 0 \qquad [17]$$

Igual que en el caso de E', $V(\tilde{R}_T)$ es una función creciente de V'.

3) Dependencia de $E(\tilde{R}_T)$ y $V(\tilde{R}_T)$ respecto a T

De la definición de $E(1 + \tilde{R}_T)$ en [12], se desprende, claramente, que es una función creciente de T.

En cuanto a $V(\tilde{R}_T)$, para poder establecer su relación con T, compararemos $V(\tilde{R}_{T+1})$ con $V(\tilde{R}_T)$:

$$\cdot) V(\tilde{R}_T) = \left[V' + (1 + E')^2\right]^T - (1 + E')^{2\cdot T} =$$

$$= \sum_{r=0}^{T} \begin{bmatrix} T \\ r \end{bmatrix} \cdot (V')^r \cdot (1 + E')^{2\cdot(T-r)} - (1 + E')^{2\cdot T} =$$

$$= \sum_{r=1}^{T} \begin{bmatrix} T \\ r \end{bmatrix} \cdot (V')^r \cdot (1 + E')^{2\cdot(T-r)} \qquad [18]$$

$$\cdot) V(\tilde{R}_{T+1}) = \sum_{r=1}^{T+1} \begin{bmatrix} T+1 \\ r \end{bmatrix} \cdot (V')^r \cdot (1 + E')^{2\cdot(T+1-r)} =$$

$$= (1 + E')^2 \cdot \sum_{r=1}^{T+1} \begin{bmatrix} T+1 \\ r \end{bmatrix} \cdot (V')^r \cdot (1 + E')^{2\cdot(T-r)} \qquad [19]$$

Si tenemos en cuenta que $\begin{bmatrix} T+1 \\ r \end{bmatrix} > \begin{bmatrix} T \\ r \end{bmatrix}$ y que $E' > 0$, entonces,

$$(1 + E')^2 \cdot \sum_{r=1}^{T+1} \begin{bmatrix} T+1 \\ r \end{bmatrix} \cdot (V')^r \cdot (1 + E')^{2\cdot(T-r)} > \sum_{r=1}^{T} \begin{bmatrix} T \\ r \end{bmatrix} \cdot (V')^r \cdot (1 + E')^{2\cdot(T-r)}$$

y, por tanto, $V(\tilde{R}_{T+1}) > V(\tilde{R}_T)$ de lo cual se deduce que $V(\tilde{R}_T)$ es también una función creciente de T.

## 4.3. SELECCION DE LA CARTERA MULTIPERIODICA OPTIMA

El inversor, al igual que en el modelo E-V básico, determina, en primer lugar, la frontera eficiente multiperiódica y, a continuación, escoge la cartera de este conjunto que maximiza la utilidad esperada de la riqueza obtenida en T. De este modo, el proceso de selección de la cartera óptima puede dividirse en las dos siguientes etapas:

1) Determinación de la frontera eficiente multiperiódica

De modo similar al criterio E-V básico, la cartera A (o, con mayor propiedad, la secuencia de carteras A) es preferida a la cartera o secuencia de carteras B para el conjunto de T periodos si y sólo si,

$$E_A(\tilde{R}_T) \geq E_B(\tilde{R}_T) \quad y \quad V_A(\tilde{R}_T) < V_B(\tilde{R}_T) \text{ o bien}$$

$$E_A(\tilde{R}_T) > E_B(\tilde{R}_T) \quad y \quad V_A(\tilde{R}_T) \leq V_B(\tilde{R}_T)$$

Y una cartera es eficiente para los T periodos si:

i) para su rentabilidad multiperiodo esperada, $E(\tilde{R}_T)$, no existe otra cartera con menos riesgo medido por $V(\tilde{R}_T)$;

ii) para su nivel de riesgo, $V(\tilde{R}_T)$, no existe otra cartera con una rentabilidad esperada mayor, $E(\tilde{R}_T)$.

Para determinar la frontera eficiente deberá resolverse el siguiente problema:

$$\left.\begin{array}{lll} & \text{Min } V(\tilde{R}_T) & \\ \text{sujeto a} & & \\ & E(\tilde{R}_T) = \bar{E} & \\ & \sum_{i=1}^{N} X_{it} = 1 & t=0,1,\ldots,T-1 \\ & X_{it} \geq 0 & \forall i,\ i=1,2,\ldots,N \\ & & \forall t,\ t=0,1,\ldots,T-1 \end{array}\right\}$$

A continuación, determinaremos la frontera eficiente para el caso en que N=2 y T=2 y además de la independencia y estacionariedad en el tiempo de $\tilde{R}_{ct+1}$ supondremos que $\tilde{r}_{it+1}$ es también una variable aleatoria independiente y estacionaria $[E(\tilde{r}_{it+1}) = \mu_i,\ V(\tilde{r}_{it+1}) = \sigma_{ii},\ Cov(\tilde{r}_{it+1}, \tilde{r}_{jt+1}) = \sigma_{ij}]$ y que el inversor elige como política de cartera el mantenimiento, en cada periodo, de las proporciones invertidas en los N títulos. Es decir,

$$X_{it} = X_i \qquad \forall t,\ t=0,1,\ldots,T-1.$$

Teniendo en cuenta estos supuestos, la esperanza y la varianza para los dos periodos tienen la siguiente expresión:

$$E(1 + \tilde{R}_2) = (1 + E')^2 = \left[1 + \sum_{i=1}^{2} X_i \cdot \mu_i\right]^2$$

$$V(\tilde{R}_2) = \left[V' + (1 + E')^2\right]^2 - (1 + E')^4 =$$

$$= \left\{\left[\sum_{i=1}^{2}\sum_{j=1}^{2} X_i \cdot X_j \cdot \sigma_{ij}\right] + \left[1 + \sum_{i=1}^{2} X_i \cdot \mu_i\right]^2\right\}^2 - \left[1 + \sum_{i=1}^{2} X_i \cdot \mu_i\right]^4$$

Para este caso concreto, el problema queda formalizado del siguiente modo:

$$\left.\begin{array}{l} \text{Min} \left\{\left[\sum_{i=1}^{2}\sum_{j=1}^{2} X_i \cdot X_j \cdot \sigma_{ij}\right] + \left[1 + \sum_{i=1}^{2} X_i \cdot \mu_i\right]^2\right\}^2 - \left[1 + \sum_{i=1}^{2} X_i \cdot \mu_i\right]^4 \\ \text{sujeto a} \\ \qquad\qquad \left[1 + \sum_{i=1}^{2} X_i \cdot \mu_i\right]^2 - 1 = \bar{E} \\ \qquad\qquad X_1 + X_2 = 1 \\ \qquad\qquad X_1,\ X_2 \geq 0 \end{array}\right\}$$

La solución a este problema, a partir de Lagrange, es

$$X_1 = \frac{-(1 + \mu_2) + \sqrt{1 + \bar{E}}}{\mu_1 - \mu_2}$$

$$X_2 = \frac{(1 + \mu_1) - \sqrt{1 + \bar{E}}}{\mu_1 - \mu_2}$$

Igual que en el modelo E-V básico, deberemos limitar los valores que puede tomar $\bar{E}$ para garantizar que $X_1$ y $X_2$ sean siempre positivas:

a) $\mu_1 - \mu_2 > 0$

$$X_1 \geq 0 \Rightarrow -(1 + \mu_2) + \sqrt{1+ \bar{E}} \geq 0 \Rightarrow (1 + \bar{E}) \geq (1 + \mu_2)^2$$

$$X_2 \geq 0 \Rightarrow (1 + \mu_1) - \sqrt{1+ \bar{E}} \geq 0 \Rightarrow (1 + \bar{E}) \leq (1 + \mu_1)^2$$

$$(1 + \mu_2)^2 \leq (1 + \bar{E}) \leq (1 + \mu_1)^2$$

b) $\mu_1 - \mu_2 < 0$

$$X_1 \geq 0 \Rightarrow -(1 + \mu_2) + \sqrt{1+ \bar{E}} \leq 0 \Rightarrow (1 + \bar{E}) \leq (1 + \mu_2)^2$$

$$X_2 \geq 0 \Rightarrow (1 + \mu_1) - \sqrt{1+ \bar{E}} \leq 0 \Rightarrow (1 + \bar{E}) \geq (1 + \mu_1)^2$$

$$(1 + \mu_1)^2 \leq (1 + \bar{E}) \leq (1 + \mu_2)^2$$

Si tenemos en cuenta que

$$E(1 + \tilde{R}_2) = [1 + E(\tilde{R}_2)] = (1 + E')^2$$

fijar el valor de $E(\tilde{R}_T) = \bar{E}$ equivale a fijar el valor de $E' = E(\tilde{R}_{ct+1}) = E^*$ cumpliéndose que

$$[1 + \bar{E}] = (1 + E^*)^2$$

Por tanto, $X_1$ y $X_2$ pueden expresarse en función de $E^*$:

$$X_1 = \frac{-(1 + \mu_2) + \sqrt{1 + \bar{E}}}{\mu_1 - \mu_2} = \frac{-(1 + \mu_2) + \sqrt{(1 + E^*)^2}}{\mu_1 - \mu_2} =$$

$$= \frac{\mu_2}{\mu_2 - \mu_1} - \frac{E^*}{\mu_2 - \mu_1}$$

$$X_2 = \frac{(1 + \mu_1) - \sqrt{1 + \bar{E}}}{\mu_1 - \mu_2} = \frac{-\mu_1}{\mu_2 - \mu_1} + \frac{E^*}{\mu_2 - \mu_1}$$

Estas últimas expresiones de $X_1$ y $X_2$ coinciden con las obtenidas en el epígrafe **1.2.4.** donde se determinó la frontera eficiente para un único periodo. Esto significa que, **bajo las hipótesis de independencia, estacionariedad y mantenimiento en el tiempo de las proporciones de los activos, la cartera eficiente para un periodo también lo será para los dos periodos conjuntamente y a la inversa.** Este resultado se puede generalizar a T periodos puesto que si se considera que

$$V(\tilde{R}_T) = \left[V' + (1 + E')^2\right]^T - \left[1 + E(\tilde{R}_T)\right]^2$$

para minimizar $V(\tilde{R}_T)$ sujeto a $E(\tilde{R}_T) = \bar{E}$ es suficiente con minimizar

$\left[V' + (1 + E')^2\right]^T$ o $\left[V' + (1 + E')^2\right]$ sujeto a $E' = E^*$, lo cual equivale a minimizar V' sujeto a $E' = E^*$ que coincide con el problema planteado para un único periodo.

2) Determinación de la cartera óptima para el conjunto de T periodos.

Suponiendo que la función de utilidad de la riqueza final (en T) es cuadrática, ésta será[222]

$$U(\tilde{W}_T) = \alpha + \beta\cdot\tilde{W}_T + \gamma\cdot(\tilde{W}_T)^2 \qquad [20]$$

Como $\tilde{W}_T = W_0\cdot(1 + \tilde{R}_T)$, la función [20] se convierte en

$$U(\tilde{W}_T) = \alpha + \beta\cdot[W_0\cdot(1 + \tilde{R}_T)] + \gamma\cdot[W_0\cdot(1 + \tilde{R}_T)]^2 =$$

$$= \alpha + \beta\cdot W_0 + \gamma\cdot(W_0)^2 + [\beta\cdot W_0 + 2\cdot\gamma\cdot(W_0)^2]\cdot\tilde{R}_T + \gamma\cdot(W_0)^2\cdot(\tilde{R}_T)^2 \qquad [21]$$

Haciendo

•) $\alpha' = \alpha + \beta\cdot W_0 + \gamma\cdot(W_0)^2$

•) $\beta' = \beta\cdot W_0 + 2\cdot\gamma\cdot(W_0)^2$

•) $\gamma' = \gamma\cdot(W_0)^2$

222Véase el apartado **1.2.5.** del presente trabajo.

la función de utilidad de $\tilde{W}_T$, [21], es

$$U(\tilde{W}_T) = \alpha' + \beta' \cdot \tilde{R}_T + \gamma' \cdot (\tilde{R}_T)^2 \qquad [22]$$

Dada [22], la **utilidad esperada** de $\tilde{W}_T$ es

$$E[U(\tilde{W}_T)] = E[\alpha' + \beta' \cdot \tilde{R}_T + \gamma' \cdot (\tilde{R}_T)^2] = \alpha' + \beta' \cdot E(\tilde{R}_T) + \gamma' \cdot E(\tilde{R}_T{}^2) =$$

$$= \alpha' + \beta' \cdot E(\tilde{R}_T) + \gamma' \cdot V(\tilde{R}_T) + \gamma' \cdot [E(\tilde{R}_T)]^2 \qquad [23]$$

puesto que $E(\tilde{R}_T{}^2) = V(\tilde{R}_T) + [E(\tilde{R}_T)]^2$

$V(\tilde{R}_T)$ es la varianza asociada a las carteras de la frontera eficiente y es una función de $E(\tilde{R}_T)$ por lo que $E[U(\tilde{W}_T)]$ es una función de una única variable, $E(\tilde{R}_T)$, cuya maximización se logrará haciendo

$$\frac{dE(\tilde{W}_T)}{dE(\tilde{R}_T)} = 0$$

Hasta ahora hemos supuesto que todas las carteras factibles para el conjunto de T periodos podían describirse mediante la esperanza y la varianza y, si bien esto es cierto, bajo las hipótesis del epígrafe **1.2.3.**, para cada periodo por separado, no lo es cuando consideramos conjuntamente los T periodos. En este sentido, el artículo de **Arditti** y

Levy[223] pone de manifiesto la necesidad de tener en cuenta el tercer momento estadístico cuando se considera la rentabilidad para los T periodos.

En el siguiente epígrafe estudiaremos la importancia del tercer momento en el caso multiperiódico y su influencia en la determinación de la frontera eficiente para los T periodos.

### 4.4. TERCER MOMENTO MULTIPERIODICO

El **tercer momento estadístico** de la variable aleatoria $\tilde{R}_T$ es

$$\mu_3(\tilde{R}_T) = E[\tilde{R}_T - E(\tilde{R}_T)]^3 = E\left[\prod_{t=0}^{T-1}(1 + \tilde{R}_{ct+1}) - \prod_{t=0}^{T-1}(1 + E_{t+1})\right]^3 =$$

$$= E\left\{\left[\prod_{t=0}^{T-1}(1 + \tilde{R}_{ct+1})\right]^3 - 3\cdot\left[\prod_{t=0}^{T-1}(1 + \tilde{R}_{ct+1})\right]^2\cdot\left[\prod_{t=0}^{T-1}(1 + E_{t+1})\right] + \right.$$

$$\left. + 3\cdot\left[\prod_{t=0}^{T-1}(1 + \tilde{R}_{ct+1})\right]\cdot\left[\prod_{t=0}^{T-1}(1 + E_{t+1})\right]^2 - \left[\prod_{t=0}^{T-1}(1 + E_{t+1})\right]^3\right\} = \quad 224$$

---

[223] **F.D.ARDITTI-H.LEVY**, "Portfolio Efficiency Analysis in Three Moments. The Multiperiod Case", J.F., 1975, pp.197-209.

[224] Se supone independencia estadística en el tiempo y se tiene en cuenta que $\prod_{t=0}^{T-1}\left[E(1 + \tilde{R}_{ct+1})^2\right] = \prod_{t=0}^{T-1}\left[V_{t+1} + (1 + E_{t+1})^2\right]$.

$$= \prod_{t=0}^{T-1}\left[E(1 + \tilde{R}_{ct+1})^3\right] - 3\cdot\left[\prod_{t=0}^{T-1}(1 + E_{t+1})\right]\cdot\left[\prod_{t=0}^{T-1}[V_{t+1} + (1 + E_{t+1})^2]\right] +$$

$$+ 2\cdot\prod_{t=0}^{T-1}(1 + E_{t+1})^3 \qquad [24]$$

Para poder expresar $\mu_3(\tilde{R}_T)$ en función de $E_{t+1}$, $V_{t+1}$ y $\mu_{3t+1}$ $[\mu_{3t+1} = \mu_3(\tilde{R}_{ct+1})]$, debemos desarrollar en [24] la expresión de

$$\prod_{t=0}^{T-1}\left[E(1 + \tilde{R}_{ct+1})^3\right] = \prod_{t=0}^{T-1}\left[E(\tilde{R}_{ct+1})^3 + 3\cdot E(\tilde{R}_{ct+1})^2 + 3\cdot E_{t+1} + 1\right] \qquad [25]$$

De [25] sabemos que

$$E(\tilde{R}_{ct+1})^2 = V_{t+1} + (E_{t+1})^2$$

$$E(\tilde{R}_{ct+1})^3 = \mu_{3t+1} + 3\cdot V_{t+1}\cdot E_{t+1} + (E_{t+1})^3$$

y, por tanto, [25] es

$$\prod_{t=0}^{T-1}\left[E(1 + \tilde{R}_{ct+1})^3\right] =$$

$$= \prod_{t=0}^{T-1}\left[\mu_{3t+1} + 3\cdot V_{t+1}\cdot E_{t+1} + (E_{t+1})^3 + 3\cdot V_{t+1} + 3\cdot(E_{t+1})^2 + 3\cdot E_{t+1} + 1\right] =$$

$$= \prod_{t=0}^{T-1} \left[\mu_{3_{t+1}} + 3 \cdot V_{t+1} \cdot (1 + E_{t+1}) + (1 + E_{t+1})^3\right] \qquad [26]$$

La expresión de $\mu_3(\tilde{R}_T)$ en función de $E_{t+1}$, $V_{t+1}$ y $\mu_{3_{t+1}}$ es, pues,

$$\mu_3(\tilde{R}_T) = \prod_{t=0}^{T-1} \left[\mu_{3_{t+1}} + 3 \cdot V_{t+1} \cdot (1 + E_{t+1}) + (1 + E_{t+1})^3\right] -$$

$$- 3 \cdot \left[\prod_{t=0}^{T-1} (1 + E_{t+1})\right] \cdot \left[\prod_{t=0}^{T-1} [V_{t+1} + (1 + E_{t+1})^2]\right] + 2 \cdot \prod_{t=0}^{T-1} (1 + E_{t+1})^3 \qquad [27]$$

Si suponemos que, en todos los periodos, la distribución de probabilidad de $\tilde{R}_{ct+1}$ $(t=0,1,2,\ldots,T-1)$ es normal, entonces $\mu_{3_{t+1}}=0$ y en este caso, $\mu_3(\tilde{R}_T)$, en [27], es

$$\mu_3(\tilde{R}_T) = \prod_{t=0}^{T-1} \left[3 \cdot V_{t+1} \cdot (1 + E_{t+1}) + (1 + E_{t+1})^3\right] -$$

$$- 3 \cdot \left[\prod_{t=0}^{T-1} (1 + E_{t+1})\right] \cdot \left[\prod_{t=0}^{T-1} [V_{t+1} + (1 + E_{t+1})^2]\right] + 2 \cdot \prod_{t=0}^{T-1} (1 + E_{t+1})^3 \qquad [28]$$

Si además suponemos estacionariedad, se obtiene para $\mu_3(\tilde{R}_T)$ la siguiente expresión

$$\mu_3(\tilde{R}_T) = [3 \cdot V' \cdot (1 + E') + (1 + E')^3]^T -$$

$$- 3 \cdot (1 + E')^T \cdot [V' + (1 + E')^2]^T + 2 \cdot (1 + E')^{3 \cdot T} =$$

$$=(1 + E')^{T}\cdot\left[[3\cdot V' + (1 + E')^2]^{T} - 3\cdot[V' + (1 + E')^2]^{T}\right]+2\cdot(1 + E')^{3\cdot T} \quad [29]$$

Aún suponiendo que, periodo a periodo, la rentabilidad de los títulos y de la cartera se distribuye según una normal y que, por tanto, la cartera para un periodo puede describirse únicamente a través de $E(\tilde{R}_{ct+1})$ y $V(\tilde{R}_{ct+1})$, este supuesto no sirve cuando se analiza la rentabilidad global de una cartera mantenida durante T periodos puesto que su distribución no es normal como lo demuestra el hecho que $\mu_3(\tilde{R}_T)\neq 0$. La cartera multiperiódica necesita de los tres primeros momentos estadísticos $[E(\tilde{R}_T), V(\tilde{R}_T), \mu_3(\tilde{R}_T)]$ para ser descrita.

Además, se puede demostrar que $\mu_3(\tilde{R}_T)$ es una función creciente de T, razón por la cual todavía es más necesario tomar en consideración $\mu_3(\tilde{R}_T)$. En efecto, expresemos $\mu_3(\tilde{R}_T)$ del siguiente modo:

$$\mu_3(\tilde{R}_T) = (1 + E')^{T}\cdot\left[\sum_{r=0}^{T}\begin{bmatrix}T\\r\end{bmatrix}\cdot(3\cdot V')^{r}\cdot(1 + E')^{2\cdot(T-r)} -\right.$$

$$\left.- 3\cdot\sum_{r=0}^{T}\begin{bmatrix}T\\r\end{bmatrix}\cdot(V')^{r}\cdot(1 + E')^{2\cdot(T-r)}\right] + 2\cdot(1 + E')^{3\cdot T} =$$

$$= (1 + E')^{T}\cdot\left[\sum_{r=0}^{T}\begin{bmatrix}T\\r\end{bmatrix}\cdot(V')^{r}\cdot(1 + E')^{2\cdot(T-r)}\cdot(3^{r}-3)\right]+ 2\cdot(1 + E')^{3\cdot T} =$$ [225]

[225] Para $r=0$ $\begin{bmatrix}T\\r\end{bmatrix}\cdot(V')^{r}\cdot(1 + E')^{2\cdot(T-r)}\cdot(3^{r}-3) = - 2\cdot(1 + E')^{2\cdot T}$

$$= (1+E')^{T} \cdot \left[ -2\cdot(1+E')^{2\cdot T} + \sum_{r=1}^{T} \begin{bmatrix} T \\ r \end{bmatrix} \cdot (V')^{r} \cdot (1+E')^{2\cdot(T-r)} \cdot (3^{r}-3) \right] +$$

$$+ 2\cdot(1+E')^{3\cdot T} = (1+E')^{T} \cdot \left[ \sum_{r=1}^{T} \begin{bmatrix} T \\ r \end{bmatrix} \cdot (V')^{r} \cdot (1+E')^{2\cdot(T-r)} \cdot (3^{r}-3) \right] \qquad [30]$$

Teniendo en cuenta [30], la expresión correspondiente para $\mu_3(\tilde{R}_{T+1})$ es

$$\mu_3(\tilde{R}_{T+1}) = (1+E')^{T+1} \cdot \left[ \sum_{r=1}^{T+1} \begin{bmatrix} T+1 \\ r \end{bmatrix} \cdot (V')^{r} \cdot (1+E')^{2\cdot(T+1-r)} \cdot (3^{r}-3) \right] \qquad [31]$$

Si comparamos las expresiones de $\mu_3(\tilde{R}_{T+1})$ y $\mu_3(\tilde{R}_{T})$ en [31] y [30], respectivamente, podemos comprobar que:

a) $(1+E')^{T+1} = (1+E')^{T} \cdot (1+E') > (1+E')^{T}$ puesto que $E'>0$.

b) $\begin{bmatrix} T+1 \\ r \end{bmatrix} \cdot (V')^{r} \cdot (1+E')^{2\cdot(T+1-r)} = (1+E')^{2} \cdot \begin{bmatrix} T+1 \\ r \end{bmatrix} \cdot (V')^{r} \cdot (1+E')^{2\cdot(T-r)}$

Como $E'>0$ y $\begin{bmatrix} T+1 \\ r \end{bmatrix} > \begin{bmatrix} T \\ r \end{bmatrix}$ $\forall r$ $(r=1,2,\ldots,T+1)$ se cumplirá que

$$(1+E')^{2} \cdot \begin{bmatrix} T+1 \\ r \end{bmatrix} \cdot (V')^{r} \cdot (1+E')^{2\cdot(T-r)} > \begin{bmatrix} T \\ r \end{bmatrix} \cdot (V')^{r} \cdot (1+E')^{2\cdot(T-r)}$$

Si además tenemos en cuenta que $(3^{r}-3)$, $r=1,2,\ldots,T+1$, es siempre positivo (o nulo cuando $r=0$), entonces podremos concluir que

$$\sum_{r=1}^{T+1} \begin{bmatrix} T+1 \\ r \end{bmatrix} \cdot (V')^r \cdot (1 + E')^{2\cdot(T+1-r)} \cdot (3^r - 3) >$$

$$> \sum_{r=1}^{T} \begin{bmatrix} T \\ r \end{bmatrix} \cdot (V')^r \cdot (1 + E')^{2\cdot(T-r)} \cdot (3^r - 3)$$

*Teniendo en cuenta a) y b) se desprende que* $\mu_3(\tilde{R}_{T+1}) > \mu_3(\tilde{R}_T)$ y, por tanto, que $\mu_3(\tilde{R}_T)$ **es una función creciente respecto a T.**

A continuación y del mismo modo que hicimos con $E(\tilde{R}_T)$ y $V(\tilde{R}_T)$, vamos a analizar cuál es el efecto de E' y V' en $\mu_3(\tilde{R}_T)$. Para ello estudiaremos el signo de las derivadas parciales de $\mu_3(\tilde{R}_T)$ respecto a E' y V':

1) $\dfrac{\partial\mu_3(\tilde{R}_T)}{\partial E'}$

$$\frac{\partial\mu_3(\tilde{R}_T)}{\partial E'} = T\cdot(1 + E')^{T-1}\cdot\Big[[3\cdot V' + (1 + E')^2]^T -$$

$$- 3\cdot[V' + (1 + E')^2]^T\Big] + (1 + E')^T\cdot\Big[2\cdot T\cdot[3V' + (1 + E')^2]^{T-1}\cdot(1 + E') -$$

$$- 6\cdot T\cdot[V' + (1 + E')^2]^{T-1}\cdot(1 + E')\Big] + 6\cdot T\cdot(1 + E')^{3\cdot T-1} =$$

$$= T\cdot(1 + E')^{T-1}\cdot\Big[[3\cdot V' + (1 + E')^2]^T - 3\cdot[V' + (1 + E')^2]^T\Big] +$$

$$+ 2\cdot T\cdot(1 + E')^{T+1}\cdot\Big[[3\cdot V' + (1 + E')^2]^{T-1} - 3\cdot[V' + (1 + E')^2]^{T-1}\Big] +$$

$$+\ 6\cdot T\cdot(1+E')^{3\cdot T-1} = T\cdot(1+E')^{T-1}\left[\sum_{r=0}^{T}\binom{T}{r}\cdot(3\cdot V')^{r}\cdot(1+E')^{2\cdot(T-r)}\ -\right.$$

$$\left.-\ 3\cdot\sum_{r=0}^{T}\binom{T}{r}\cdot(V')^{r}\cdot(1+E')^{2\cdot(T-r)}\right]\ +$$

$$+\ 2\cdot T\cdot(1+E')^{T+1}\cdot\left[\sum_{r=0}^{T-1}\binom{T-1}{r}\cdot(3\cdot V')^{r}\cdot(1+E')^{2\cdot(T-1-r)}\ -\right.$$

$$\left.-\ 3\cdot\sum_{r=0}^{T-1}\binom{T-1}{r}\cdot(V')^{r}\cdot(1+E')^{2\cdot(T-1-r)}\right]\ +\ 6\cdot T\cdot(1+E')^{3\cdot T-1}\ =$$

$$=\ T\cdot(1+E')^{T-1}\cdot\sum_{r=0}^{T}\binom{T}{r}\cdot(V')^{r}\cdot(1+E')^{2\cdot(T-r)}\cdot(3^{r}-3)\ +$$

$$+2\cdot T\cdot(1+E')^{T+1}\cdot\sum_{r=0}^{T-1}\binom{T-1}{r}\cdot(V')^{r}\cdot(1+E')^{2\cdot(T-1-r)}\cdot(3^{r}-3)\ +\ 6\cdot T\cdot(1+E')^{3\cdot T-1}\ =$$

$$=\ T\cdot(1+E')^{T-1}\cdot\left[-2\cdot(1+E')^{2\cdot T}+\sum_{r=1}^{T}\binom{T}{r}\cdot(V')^{r}\cdot(1+E')^{2\cdot(T-r)}\cdot(3^{r}-3)\right]\ +$$

$$+\ 2\cdot T\cdot(1+E')^{T+1}\cdot\left[-2\cdot(1+E')^{2\cdot(T-1)}\ +\right.$$

$$\left.+\sum_{r=1}^{T-1}\binom{T-1}{r}\cdot(V')^{r}\cdot(1+E')^{2\cdot(T-1-r)}\cdot(3^{r}-3)\right]\ +\ 6\cdot T\cdot(1+E')^{3\cdot T-1}\ =$$

$$= T\cdot(1+E')^{T-1}\cdot\sum_{r=1}^{T}\begin{bmatrix}T\\r\end{bmatrix}\cdot(V')^{r}\cdot(1+E')^{2\cdot(T-r)}\cdot(3^{r}-3) +$$

$$+ 2\cdot T\cdot(1+E')^{T+1}\cdot\sum_{r=1}^{T-1}\begin{bmatrix}T-1\\r\end{bmatrix}\cdot(V')^{r}\cdot(1+E')^{2\cdot(T-1-r)}\cdot(3^{r}-3) > 0 \qquad [32]$$

2) $\dfrac{\partial\mu_3(\tilde{R}_T)}{\partial V'}$

$$\frac{\partial\mu_3(\tilde{R}_T)}{\partial V'} =$$

$$= (1 + E')^{T}\cdot\left[3\cdot T\cdot[3\cdot V' + (1 + E')^2]^{T-1} - 3\cdot T\cdot[V' + (1 + E')^2]^{T-1}\right] =$$

$$= 3\cdot T\cdot(1 + E')^{T}\cdot\left[[3\cdot V' + (1 + E')^2]^{T-1} - [V' + (1 + E')^2]^{T-1}\right] =$$

$$= 3\cdot T\cdot(1 + E')^{T}\left[\sum_{r=0}^{T-1}\begin{bmatrix}T-1\\r\end{bmatrix}\cdot(V')^{r}\cdot(1 + E')^{2\cdot(T-1-r)}\cdot(3^{r}-1)\right] = {}^{226}$$

$$= 3\cdot T\cdot(1 + E')^{T}\cdot\left[\sum_{r=1}^{T-1}\begin{bmatrix}T-1\\r\end{bmatrix}\cdot(V')^{r}\cdot(1 + E')^{2\cdot(T-1-r)}\cdot(3^{r}-1)\right] > 0 \qquad [33]$$

De los resultados obtenidos en [32] y [33], se deduce que cuanto mayor sea E' o V' mayor será $\mu_3(\tilde{R}_T)$, lo cual coincide con las conclusiones del apartado **4.2.** respecto a la influencia de E' y V' sobre $E(\tilde{R}_T)$ y $V(\tilde{R}_T)$.

---

[226] Para r=0, $\begin{bmatrix}T-1\\0\end{bmatrix}\cdot(V')^{0}\cdot(1 + E')^{2\cdot(T-1)}\cdot(3^{0}-1) = 0$

## *4.5. CARTERAS E-V-$\mu_3$ MULTIPERIODICAS EFICIENTES*

Si cualquier cartera de naturaleza multiperiódica puede ser descrita a partir de los tres primeros momentos estadísticos, parece necesario definir el conjunto de carteras E-V-$\mu_3$ eficientes para, después, escoger la cartera que maximiza la función de utilidad de cada inversor.

Dado que anteriormente definimos el conjunto de carteras E-V eficientes, bastará con decidir cuáles de las carteras incluidas en él pueden ser eliminadas para constituir el nuevo conjunto E-V-$\mu_3$ eficiente. Para ello necesitamos conocer cuál es el efecto de una variación de $E(\tilde{R}_T)$ y $V(\tilde{R}_T)$ sobre $\mu_3(\tilde{R}_T)$, es decir, necesitamos saber el signo de las derivadas parciales

$$\frac{\partial \mu_3(\tilde{R}_T)}{\partial E(\tilde{R}_T)} \qquad\qquad \frac{\partial \mu_3(\tilde{R}_T)}{\partial V(\tilde{R}_T)}$$

En [29] obtuvimos que

$$\mu_3(\tilde{R}_T) = (1+E')^T\cdot\left[[3\cdot V' + (1+E')^2]^T - 3\cdot[V' + (1+E')^2]^T\right] + 2\cdot(1+E')^{3\cdot T}$$

Si además tenemos en cuenta que

a) $E(1 + \tilde{R}_T) = [1 + E(\tilde{R}_T)] = (1 + E')^T$, de donde

$$(1 + E') = [1 + E(\tilde{R}_T)]^{1/T}$$

b) $V(\tilde{R}_T) = [V' + (1 + E')^2]^T - [1 + E(\tilde{R}_T)]^2$, de donde

$$V' = \left[V(\tilde{R}_T) + [1 + E(\tilde{R}_T)]^2\right]^{1/T} - [1 + E(\tilde{R}_T)]^{2/T}$$

podremos expresar $\mu_3(\tilde{R}_T)$ en función de $E(\tilde{R}_T)$ y $V(\tilde{R}_T)$:

$$\mu_3(\tilde{R}_T) = [1+E(\tilde{R}_T)]\cdot\left\{3\cdot\left[V(\tilde{R}_T) + [1+E(\tilde{R}_T)]^2\right]^{1/T} - 2\cdot[1+E(\tilde{R}_T)]^{2/T}\right\} -$$

$$- 3\cdot[1 + E(\tilde{R}_T)]\cdot\left[V(\tilde{R}_T) + [1 + E(\tilde{R}_T)]^2\right] + 2[1 + E(\tilde{R}_T)]^3 \qquad [34]$$

De las relaciones expuestas se desprende que

$$\cdot)\ \frac{\partial\mu_3(\tilde{R}_T)}{\partial E(\tilde{R}_T)} = \frac{\partial\mu_3(\tilde{R}_T)}{\partial E'}\cdot\frac{\partial E'}{\partial E(\tilde{R}_T)} + \frac{\partial\mu_3(\tilde{R}_T)}{\partial V'}\cdot\frac{\partial V'}{\partial E(\tilde{R}_T)}$$

$$\cdot)\ \frac{\partial\mu_3(\tilde{R}_T)}{\partial V(\tilde{R}_T)} = \frac{\partial\mu_3(\tilde{R}_T)}{\partial V'}\cdot\frac{\partial V'}{\partial V(\tilde{R}_T)}$$

$$1)\ \frac{\partial\mu_3(\tilde{R}_T)}{\partial E(\tilde{R}_T)}$$

Como en el apartado **4.4.** hemos obtenido $\frac{\partial\mu_3(\tilde{R}_T)}{\partial E'}$, [32], y $\frac{\partial\mu_3(\tilde{R}_T)}{\partial V(\tilde{R}_T)}$, [33], (ambas positivas) basta con hallar $\frac{\partial E'}{\partial E(\tilde{R}_T)}$ y $\frac{\partial V'}{\partial E(\tilde{R}_T)}$ para determinar el signo de la derivada deseada.

$$a)\quad \frac{\partial E'}{\partial E(\tilde{R}_T)} = \frac{1}{T}\cdot[1+E(\tilde{R}_T)]^{(1/T)\,-1} = \frac{1}{T}\cdot\left[(1+E')^T\right]^{\frac{1-T}{T}} = \frac{1}{T}(1+E')^{1-T} \quad [35]$$

$$\frac{\partial E'}{\partial E(\tilde{R}_T)} > 0 \text{ suponiendo, como siempre, que } E'>0.$$

$$b)\quad \frac{\partial V'}{\partial E(\tilde{R}_T)} = \frac{2}{T}\cdot\left[V(\tilde{R}_T) + [1+E(\tilde{R}_T)]^2\right]^{(1/T)-1}\cdot[1+E(\tilde{R}_T)] -$$

$$- \frac{2}{T}\cdot[1+E(\tilde{R}_T)]^{(2/T)\,-1} \overset{227}{=} \frac{2}{T}\cdot\left[[V'+(1+E')^2]^{1-T}\cdot(1+E')^T - (1+E')^{2-T}\right]$$

$$=$$

$$= \frac{2}{T}\cdot\left[\frac{(1+E')^T}{[V'+(1+E')^2]^{T-1}} - \frac{1}{(1+E')^{T-2}}\right] =$$

$$= \frac{2}{T}\cdot\left[\frac{(1+E')^{2(T-1)} - [V'+(1+E')^2]^{T-1}}{(1+E')^{T-2}\,[V'+(1+E')^2]^{T-1}}\right] \quad [36]$$

Para conocer el signo de $\frac{\partial V'}{\partial E(\tilde{R}_T)}$ desarrollaremos la expresión [36] a partir de la fórmula del binomio de Newton, aunque basta con analizar el signo del numerador puesto que el denominador, siendo $E'>0$ y $V'>0$, es siempre positivo.

---

[227] En el apartado **4.2.** se vio que $V(\tilde{R}_T) + [1+E(\tilde{R}_T)]^2 = [V'+(1+E')^2]^T$

Así, el numerador de [36] es

$$(1 + E')^{2\cdot(T-1)} - [V' + (1 + E')^2]^{T-1} =$$

$$= (1 + E')^{2\cdot(T-1)} - \sum_{r=0}^{T-1} \begin{bmatrix} T-1 \\ r \end{bmatrix} \cdot (V')^r \cdot (1 + E')^{2\cdot(T-1-r)} =$$

$$= (1+E')^{2\cdot(T-1)} - (1+E')^{2\cdot(T-1)} - \sum_{r=1}^{T-1} \begin{bmatrix} T-1 \\ r \end{bmatrix} \cdot (V')^r \cdot (1+E')^{2\cdot(T-1-r)} =$$

$$= - \sum_{r=1}^{T-1} \begin{bmatrix} T-1 \\ r \end{bmatrix} \cdot (V')^r \cdot (1+E')^{2\cdot(T-1-r)} \qquad [37]$$

De [37] se deduce que el numerador es siempre negativo.

En cuanto al denominador de [35], éste es

$$(1 + E')^{T-2} \cdot [V' + (1 + E')^2] =$$

$$= (1 + E')^{T-2} \cdot \sum_{r=0}^{T-1} \begin{bmatrix} T-1 \\ r \end{bmatrix} \cdot (V')^r \cdot (1+E')^{2\cdot(T-1-r)} \qquad [38]$$

que, como ya ha quedado demostrado, es siempre positivo.

Por tanto,

$$\frac{\partial V'}{\partial E(\tilde{R}_T)} = - \frac{2}{T} \cdot \frac{\sum_{r=1}^{T-1} \begin{bmatrix} T-1 \\ r \end{bmatrix} (V')^r (1 + E')^{2(T-1-r)}}{(1 + E')^{T-2} \sum_{r=0}^{T-1} \begin{bmatrix} T-1 \\ r \end{bmatrix} (V')^r (1 + E')^{2(T-1-r)}} \qquad [39]$$

y será siempre negativa.

De esta manera

$$\frac{\partial\mu_3(\tilde{R}_T)}{\partial E(\tilde{R}_T)} = \frac{\partial\mu_3(\tilde{R}_T)}{\partial E'}\cdot\frac{\partial E'}{\partial E(\tilde{R}_T)} + \frac{\partial\mu_3(\tilde{R}_T)}{\partial V'}\cdot\frac{\partial V'}{\partial E(\tilde{R}_T)}$$

no tiene, en principio, el signo definido puesto que mientras el primer sumando es positivo, el segundo es negativo.

Desarrollaremos $\frac{\partial\mu_3(\tilde{R}_T)}{\partial E(\tilde{R}_T)}$ para saber, finalmente, si el signo de esta derivada está definido o no.

$$\frac{\partial\mu_3(\tilde{R}_T)}{\partial E(\tilde{R}_T)} = \left[T\cdot(1+E')^{T-1}\cdot\sum_{r=1}^{T}\begin{bmatrix}T\\r\end{bmatrix}\cdot(V')^r\cdot(1+E')^{2\cdot(T-r)}\cdot(3^r-3)\; +\right.$$

$$\left. +\; 2\cdot T\cdot(1+E')^{T+1}\cdot\sum_{r=1}^{T-1}\begin{bmatrix}T-1\\r\end{bmatrix}\cdot(V')^r\cdot(1+E')^{2\cdot(T-1-r)}\cdot(3^r-3)\right]\cdot\left[\frac{1}{T}\cdot(1+E')^{1-T}\right] +$$

$$+ \left[3\cdot T\cdot(1+E')^{T}\cdot\sum_{r=0}^{T-1}\begin{bmatrix}T-1\\r\end{bmatrix}\cdot(V')^r\cdot(1+E')^{2\cdot(T-1-r)}\cdot(3^r-1)\right]\cdot$$

$$\cdot\left[-\frac{2}{T}\cdot\frac{\sum_{r=1}^{T-1}\begin{bmatrix}T-1\\r\end{bmatrix}(V')^r(1+E')^{2(T-1-r)}}{(1+E')^{T-2}\sum_{r=0}^{T-1}\begin{bmatrix}T-1\\r\end{bmatrix}(V')^r(1+E')^{2(T-1-r)}}\right] =$$

$$= \sum_{r=1}^{T} \begin{bmatrix} T \\ r \end{bmatrix} \cdot (V')^{r} \cdot (1+E')^{2\cdot(T-r)} \cdot (3^{r}-3) \; +$$

$$+\; 2\cdot(1+E')^{2} \cdot \sum_{r=1}^{T-1} \begin{bmatrix} T-1 \\ r \end{bmatrix} \cdot (V')^{r} \cdot (1+E')^{2\cdot(T-1-r)} \cdot (3^{r}-3) \; -$$

$$-\; 6 \cdot \frac{(1+E')^{T} \displaystyle\sum_{r=\emptyset}^{T-1} \begin{bmatrix} T-1 \\ r \end{bmatrix} (V')^{r} (1+E')^{2(T-1-r)} \; 3^{r}}{(1+E')^{T-2} \displaystyle\sum_{r=\emptyset}^{T-1} \begin{bmatrix} T-1 \\ r \end{bmatrix} (V')^{r} (1'E')^{2(T-1-r)}} \cdot$$

$$\cdot \left[ \sum_{r=\emptyset}^{T-1} \begin{bmatrix} T-1 \\ r \end{bmatrix} \cdot (V')^{r} \cdot (1+E')^{2\cdot(T-1-r)} - (1+E')^{2\cdot(T-1)} \right] \; +$$

$$+\; 6 \cdot \frac{(1+E')^{T} \displaystyle\sum_{r=\emptyset}^{T-1} \begin{bmatrix} T-1 \\ r \end{bmatrix} (V')^{r} (1+E')^{2(T-1-r)}}{(1+E')^{T-2} \displaystyle\sum_{r=\emptyset}^{T-1} \begin{bmatrix} T-1 \\ r \end{bmatrix} (V')^{r} (1'E')^{2(T-1-r)}} \cdot$$

$$\cdot \left[ \sum_{r=1}^{T-1} \begin{bmatrix} T-1 \\ r \end{bmatrix} \cdot (V')^{r} \cdot (1+E')^{2\cdot(T-1-r)} \right] = \sum_{r=1}^{T} \begin{bmatrix} T \\ r \end{bmatrix} \cdot (V')^{r} \cdot (1+E')^{2\cdot(T-r)} \cdot (3^{r}-3) \; +$$

$$+\; 2\cdot(1+E')^{2} \cdot \left[ \sum_{r=1}^{T-1} \begin{bmatrix} T-1 \\ r \end{bmatrix} \cdot (V')^{r} \cdot (1+E')^{2\cdot(T-1-r)} \cdot 3^{r} \; - \right.$$

$$\left. -\; 3 \cdot \sum_{r=1}^{T-1} \begin{bmatrix} T-1 \\ r \end{bmatrix} \cdot (V')^{r} \cdot (1+E')^{2\cdot(T-1-r)} \right] \; -$$

$$- 6\cdot(1+E')^2\cdot\sum_{r=0}^{T-1}\begin{bmatrix}T-1\\r\end{bmatrix}\cdot(V')^r\cdot(1+E')^{2\cdot(T-1-r)}\cdot 3^r +$$

$$+ 6\cdot(1+E')^{2\cdot T}\cdot\frac{\sum_{r=0}^{T-1}\begin{bmatrix}T-1\\r\end{bmatrix}(V')^r(1+E')^{2(T-1-r)}\ 3^r}{\sum_{r=0}^{T-1}\begin{bmatrix}T-1\\r\end{bmatrix}(V')^r(1+E')^{2(T-1-r)}} +$$

$$+ 6\cdot(1+E')^2\cdot\sum_{r=1}^{T-1}\begin{bmatrix}T-1\\r\end{bmatrix}\cdot(V')^r\cdot(1+E')^{2\cdot(T-1-r)} =$$

$$= \sum_{r=1}^{T}\begin{bmatrix}T\\r\end{bmatrix}\cdot(V')^r\cdot(1+E')^{2\cdot(T-r)}\cdot(3^r-3) +$$

$$+ 2\cdot(1+E')^2\sum_{r=1}^{T-1}\begin{bmatrix}T-1\\r\end{bmatrix}\cdot(V')^r\cdot(1+E')^{2\cdot(T-1-r)}\cdot 3^r -$$

$$- 6\cdot(1+E')^2\cdot\sum_{r=1}^{T-1}\begin{bmatrix}T-1\\r\end{bmatrix}\cdot(V')^r\cdot(1+E')^{2\cdot(T-1-r)} -$$

$$- 6\cdot(1+E')^2\cdot\left[(1+E')^{2\cdot(T-1)} + \sum_{r=1}^{T-1}\begin{bmatrix}T-1\\r\end{bmatrix}\cdot(V')^r\cdot(1+E')^{2\cdot(T-1-r)}\cdot 3^r\right] +$$

$$+ 6\cdot(1+E')^{2\cdot T}\cdot\frac{\sum_{r=0}^{T-1}\begin{bmatrix}T-1\\r\end{bmatrix}(V')^r(1+E')^{2(T-1-r)}\ 3^r}{\sum_{r=0}^{T-1}\begin{bmatrix}T-1\\r\end{bmatrix}(V')^r(1'E')^{2(T-1-r)}} +$$

$$+\ 6\cdot(1+E')^2\cdot\sum_{r=1}^{T-1}\begin{bmatrix}T-1\\r\end{bmatrix}\cdot(V')^r\cdot(1+E')^{2\cdot(T-1-r)} =$$

$$= \sum_{r=1}^{T}\begin{bmatrix}T\\r\end{bmatrix}\cdot(V')^r\cdot(1+E')^{2\cdot(T-r)}\cdot(3^r-3)\ +$$

$$+\ 2\cdot(1+E')^2\cdot\sum_{r=1}^{T-1}\begin{bmatrix}T-1\\r\end{bmatrix}\cdot(V')^r\cdot(1+E')^{2\cdot(T-1-r)}\cdot 3^r\ -$$

$$-\ 6\cdot(1+E')^{2\cdot T} - 6\cdot(1+E')^2\cdot\sum_{r=1}^{T-1}\begin{bmatrix}T-1\\r\end{bmatrix}\cdot(V')^r\cdot(1+E')^{2\cdot(T-1-r)}\cdot 3^r\ +$$

$$+\ 6\cdot(1+E')^{2\cdot T}\cdot\frac{\displaystyle\sum_{r=0}^{T-1}\begin{bmatrix}T-1\\r\end{bmatrix}(V')^r(1+E')^{2(T-1-r)}\ 3^r}{\displaystyle\sum_{r=0}^{T-1}\begin{bmatrix}T-1\\r\end{bmatrix}(V')^r(1'E')^{2(T-1-r)}} =$$

$$= \sum_{r=1}^{T}\begin{bmatrix}T\\r\end{bmatrix}\cdot(V')^r\cdot(1+E')^{2\cdot(T-r)}\cdot(3^r-3)\ -$$

$$-\ 4\cdot(1+E')^2\cdot\sum_{r=1}^{T-1}\begin{bmatrix}T-1\\r\end{bmatrix}\cdot(V')^r\cdot(1+E')^{2\cdot(T-1-r)}\cdot 3^r\ +$$

$$+\ 6\cdot(1+E')^{2\cdot T}\cdot\left[\frac{\displaystyle\sum_{r=0}^{T-1}\begin{bmatrix}T-1\\r\end{bmatrix}(V')^r(1+E')^{2(T-1-r)}\ 3^r}{\displaystyle\sum_{r=0}^{T-1}\begin{bmatrix}T-1\\r\end{bmatrix}(V')^r(1'E')^{2(T-1-r)}} - 1\right] \qquad [40]$$

Definitivamente, el signo de la expresión [40] no puede determinarse con exactitud, pudiendo ocurrir que $\dfrac{\partial\mu_3(\tilde{R}_T)}{\partial E(\tilde{R}_T)}>0$ en unos casos y que $\dfrac{\partial\mu_3(\tilde{R}_T)}{\partial E(\tilde{R}_T)}<0$ en otros. Ello implica que el efecto de $E(\tilde{R}_T)$ sobre $\mu_3(\tilde{R}_T)$ no está definido.

2) $\dfrac{\partial\mu_3(\tilde{R}_T)}{\partial V(\tilde{R}_T)}$

De esta derivada

$$\frac{\partial\mu_3(\tilde{R}_T)}{\partial V(\tilde{R}_T)} = \frac{\partial\mu_3(\tilde{R}_T)}{\partial V'}\cdot\frac{\partial V'}{\partial V(\tilde{R}_T)}$$

sabemos que $\dfrac{\partial\mu_3(\tilde{R}_T)}{\partial V'}>0$, por lo que el signo de $\dfrac{\partial V'}{\partial V(\tilde{R}_T)}$ nos determinará el signo de $\dfrac{\partial\mu_3(\tilde{R}_T)}{\partial V(\tilde{R}_T)}$.

$$\frac{\partial V'}{\partial V(\tilde{R}_T)} = \frac{1}{T}\cdot\left[V(\tilde{R}_T) + [1 + E(\tilde{R}_T)]^2\right]^{(1/T)\ -1} =$$

$$= \frac{1}{T}\cdot[V' + (1 + E')^2]^{1-T} > 0 \qquad [41]$$

Por tanto, $\dfrac{\partial\mu_3(\tilde{R}_T)}{\partial V(\tilde{R}_T)}>0$, lo cual pone de manifiesto una relación positiva entre $\mu_3(\tilde{R}_T)$ y $V(\tilde{R}_T)$.

Si bien la relación entre $\mu_3(\tilde{R}_T)$ y $V(\tilde{R}_T)$ está bien definida, no ocurre lo mismo con la relación entre $\mu_3(\tilde{R}_T)$ y $E(\tilde{R}_T)$ por lo que no es posible definir una regla de eficiencia E-V-$\mu_3$.

La dificultad que supone la imposibilidad de determinar la eficiencia multiperiódica basada en los tres primeros momentos estadísticos junto con la pérdida de la hipótesis sobre la distribución normal de la rentabilidad multiperiódica hace que, en el caso que nos ocupa, el inversor maximice directamente la función de utilidad esperada de la riqueza disponible en T sin antes determinar el conjunto eficiente. Este nuevo enfoque es el utilizado por la mayoría de los autores que se plantean la revisión de la cartera desde el punto de vista descrito en el inicio de la **Parte II** de esta Tesis y que será analizado en el siguiente capítulo.

# CAPITULO 5

# MAXIMIZACION DIRECTA DE LA FUNCION DE UTILIDAD ESPERADA DE LA VARIABLE "RIQUEZA DISPONIBLE EN T"

## *5.1. INTRODUCCION*

En el capítulo anterior se han puesto de manifiesto las dificultades que lleva consigo la búsqueda del conjunto eficiente para el conjunto de los T periodos considerado en su globalidad. Ello conduce a que en el caso de revisión multiperiódica la mayoría de los autores, utilizando métodos de optimización dinámica, **maximicen directamente la función de utilidad esperada de la riqueza obtenida al final del último periodo del horizonte de inversión previsto (en T).**

El primer autor que aplica técnicas de optimización dinámica (en concreto la programación dinámica) para hallar la composición de la cartera óptima en cada periodo es **Mossin**[228], quien además determina para qué tipo de funciones de utilidad, la maximización de la utilidad esperada de la riqueza obtenida en T equivale a la maximización de cada una de las funciones de utilidad esperada de la riqueza disponible al final de cada uno de los periodos en que se divide el horizonte temporal de posesión de la cartera[229].

Basándose en el modelo diseñado por **Mossin**, es **Hakansson** quien lo

---

[228] **J.MOSSIN**, op. cit., 1968, pp.215-229.

[229] Ibídem, pp.223-226.

hace extensivo a otros supuestos diferentes de los originales[230], que serán comentados posteriormente.

Debe destacarse también el trabajo de **Elton** y **Gruber** que **relaciona la maximización de la utilidad esperada de la riqueza obtenida en T con la maximización de la Media Geométrica de carácter multiperiódico y con la maximización de la utilidad esperada de la rentabilidad para el conjunto de T periodos**[231].

Nosotros, siguiendo las pautas indicadas por estos autores proponemos un modelo de revisión de carteras de carácter multiperiódico en el que a partir de una determinada función de utilidad de la riqueza disponible en el momento T determinamos cuál ha de ser la cuantía invertida en cada activo i y en cada punto decisorio t, $Y^*_{it}$, $(i=1,2,\ldots,N;\ t=0,1,\ldots,T-1)$.

En este modelo consideramos tres funciones de utilidad distintas:

•) $U(\tilde{W}_T) = \alpha + \beta \cdot \tilde{W}_T + \gamma \cdot (\tilde{W}_T)^2$

•) $U(\tilde{W}_T) = \ln\ (\mu + \tilde{W}_T)$

•) $U(\tilde{W}_T) = \dfrac{1}{\lambda - 1} \cdot (\mu + \lambda \cdot \tilde{W}_T)^{1-(1/\lambda)}$

y, para cada una de éllas, obtendremos una expresión de $Y^*_{it}$ de carácter

---

[230] **Hakansson** admite, por ejemplo, la posibilidad de endeudamiento. **N.H.HAKANSSON**, "On Optimal Myopic Portfolio Policies With and Without Serial Correlation of Yields", J.B., 1971, pp.324-334.

[231] **E.J.ELTON-M.J.GRUBER**, "On the Optimality of Some Multiperiod Portfolio Selection Criteria", J.B., 1974 a), pp.231-243.

general, de la cuál se deducirán, a su vez, las expresiones correspondientes para unos casos particulares.

El estudio realizado nos permitirá determinar qué función de utilidad y qué hipótesis son necesarias para que la política miope sea la óptima.

La Programación Dinámica, cuyos principales rasgos se exponen en el **Anexo** de este **Capítulo 5**, nos servirá para desarrollar el modelo propuesto.

## *5.2. VARIABLES QUE INTERVIENEN EN EL MODELO*

El modelo que proponemos se basa en técnicas de optimización dinámica y por ello utilizaremos la nomenclatura apropiada para definir las variables que intervienen en él:

•) **Variable tiempo**

En el contexto de la revisión de cartera, se considera que la variable tiempo, t, tiene **carácter discreto**. Así,

$$t = t_0,\ t_1,\ t_2, \ldots,\ T-1,\ T$$

y, para nuestro problema, donde t representa el momento en que se realiza la revisión, esta variable toma los valores

$$t = 0,\ 1,\ 2, \ldots,\ T-1,\ T$$

de modo que[232] $\Delta t = t_{s+1} - t_s = 1$.

[232] Véase el apartado 3. del capítulo de Planteamiento, Objetivos y Estructura de la Tesis Doctoral donde se justifica el carácter discreto de la revisión y su equiperiodicidad.

•) **Variables de estado**

El estado de la cartera en el momento t+1 (al final del periodo considerado) se describe a partir de la **riqueza de la que dispone el inversor en ese momento**, $W_{t+1}$. Existe, por tanto, una única variable de estado y, como consecuencia, el vector de estado estará formado por un único elemento:

$$\vec{W}_{t+1} = (W_{t+1})$$

La trayectoria de estado está constituida por la riqueza disponible en cada punto decisorio t+1:

$$\{\vec{W}_{t+1}\} = \{\tilde{W}_1,\ \tilde{W}_2, \ldots, \tilde{W}_T\}$$

donde $\tilde{W}_{t+1}$ $(t=0,1,2,\ldots,T-1)$ es una variable de carácter aleatorio mientras no llega el momento t+1.

$W_0$ es el estado inicial que se toma como punto de partida y es un dato puesto que el inversor decide la cuantía que destina a la constitución de la primera cartera.

$\tilde{W}_T$ es el estado final de la cartera (para t=T-1). Si bien T está fijado por el inversor desde el momento inicial, la riqueza disponible en el momento final no se conoce puesto que depende de la forma en que se haya repartido la riqueza entre los activos disponibles en cada punto decisorio y de la rentabilidad de cada uno de estos activos.

•) **Variables de control**

En el ámbito de la Teoría de la Revisión de la Cartera de carácter multiperiódico, las variables de control, es decir, las variables cuyo valor debe determinarse, son las **proporciones invertidas en cada activo** y en cada punto de decisión, $X_{it}$ $(i=1,2,\ldots,N;\ t=0,1,2,\ldots,T-1)$.

Si $X_{1t}, X_{2t},\ldots, X_{Nt}$ son las variables de control en t, el vector de control es:

$$\vec{X}_t = (X_{1t}, X_{2t},\ldots, X_{Nt})'$$

La trayectoria de control se define como:

$$\{\vec{X}_t\} = \{\vec{X}_0, \vec{X}_1,\ldots, \vec{X}_{T-1}\}$$

En lugar de las proporciones invertidas en cada activo pueden utilizarse como variables de control las **cuantías efectivamente invertidas en cada activo**, es decir,

$$Y_{it} = X_{it}\cdot\tilde{W}_t \qquad i=1,2,\ldots,N;\ t=0,1,2,\ldots,T-1$$

y en este caso, el vector de control (vector de cuantías) será

$$\vec{Y}_t = (Y_{1t}, Y_{2t},\ldots, Y_{Nt})'$$

La cuantía invertida en cada activo y en cada punto decisorio será la variable utilizada en nuestro modelo con el fin de simplificar las expresiones deducidas.

•) **Variables aleatorias**

Además de $\tilde{W}_{t+1}$ que constituye la variable de estado debe reconocerse la presencia de otra variable aleatoria que representa la **tasa de rentabilidad de un título i en el momento t+1,** $\tilde{r}_{it+1}$ $(i=1,2,\ldots,N;\ t=0,1,2,\ldots,T-1)$.

$$\vec{\tilde{r}}_{t+1} = (\tilde{r}_{1t+1}, \tilde{r}_{2t+1}, \ldots, \tilde{r}_{Nt+1})'$$

La relación entre todas las variables definidas da lugar a la siguiente ecuación de movimiento[233] deducida en el epígrafe **1.2.5.**:

$$\tilde{W}_{t+1} = W_t \cdot (1 + \tilde{R}_{ct+1}) = W_t \cdot \left[1 + \sum_{i=1}^{N} X_{it} \cdot \tilde{r}_{it+1}\right] =$$

$$= W_t + \sum_{i=1}^{N} Y_{it} \cdot \tilde{r}_{it+1}$$

Vectorialmente, $\tilde{W}_{t+1}$ puede expresarse del siguiente modo:

$$\tilde{W}_{t+1} = W_t \cdot \left[1 + (\vec{X}_t)' \cdot \vec{\tilde{r}}_{t+1}\right] = W_t + \left[(\vec{Y}_t)' \cdot \vec{\tilde{r}}_{t+1}\right]$$

[233] En t, $W_t$ no es una variable aleatoria puesto que su valor está plenamente determinado en ese momento.

## *5.3. HIPOTESIS DEL MODELO*

En este epígrafe incluiremos las hipótesis de carácter general que serán comunes para todos los casos que desarrollaremos y las hipótesis de carácter particular las iremos mostrando a medida que nos sean necesarias:

**H.1.** El inversor muestra un comportamiento racional y ello implica que siente preferencia por la rentabilidad (y, por tanto, por la riqueza) y aversión por el riesgo.

De esta hipótesis se deduce inmediatamente que las funciones de utilidad de la riqueza que utilizaremos deberán ser crecientes ($U'>0$) y cóncavas ($U''<0$).

**H.2.** El tiempo durante el que el inversor mantiene su cartera se divide en T periodos de igual duración.

**H.3.** Al inicio de cada uno de los periodos en que dividimos el tiempo total de posesión de la cartera (punto decisorio t, $t=0,1,2,\dots,T-1$), el inversor procede a la formación ($t=0$) ó a la revisión de su cartera ($t\neq0$) con el fin de conseguir la cartera óptima para el periodo considerado.

**H.4.** El único objetivo del inversor es maximizar la utilidad esperada de la riqueza disponible al final del último de los periodos de posesión de la cartera (en T).

**H.5.** Durante el plazo temporal de posesión de la cartera no se producen retiradas de dinero para destinarlas a consumo. Es decir, la riqueza disponible al final de un periodo se reinvierte, inmediatamente, en la cartera del siguiente periodo. Tampoco se producen nuevas aportaciones de capital.

**H.6.** No se permite prestar dinero ni tomarlo prestado.

**H.7.** Las tasas de rentabilidad para un mismo periodo asociadas a dos activos diferentes ($\tilde{r}_{it+1}$, $\tilde{r}_{jt+1}$; $i=1,2,\ldots N$; $j=1,2,\ldots N$; $j\neq i$) constituyen variables aleatorias independientes. Es decir,

$$\mathrm{Cov}(\tilde{r}_{it+1}, \tilde{r}_{jt+1}) = 0 \qquad j\neq i$$

**H.8.** La variable aleatoria "tasa de rentabilidad" es una variable independiente en el tiempo y estacionaria[234].

**H.9.** Los costes de negociación y transacción asociados al mantenimiento y revisión de la cartera son nulos.

## *5.4. RESOLUCION DEL PROBLEMA GENERAL MEDIANTE LA PROGRAMACION DINAMICA*

El problema general que trataremos de resolver mediante la Programación Dinámica (P.D.) es el siguiente:

$$\left.\begin{array}{l}
\qquad\qquad \mathrm{Max}\ E[U(\tilde{W}_T)] \\
\text{sujeto a} \\
\qquad \tilde{W}_{t+1} = W_t \cdot \left[1 + (\vec{X}_t)' \cdot \vec{\tilde{r}}_{t+1}\right] = W_t + (\vec{Y}_t)' \cdot \vec{\tilde{r}}_{t+1} \\
\qquad W_{t_0} = W_0 \\
\qquad T \text{ dado}
\end{array}\right\}$$

---

[234]Véase el apartado **4.2.** de la presente Tesis donde se explicita esta hipótesis.

donde $E[U(\tilde{W}_T)]$ es la función de utilidad esperada de $\tilde{W}_T$.

El procedimiento seguido para determinar la cuantía óptima que debe invertirse en cada título i $(i=1,2,\ldots,N)$ en el punto decisorio t $(t=0,1,2,\ldots,T-1)$ es un procedimiento de optimización que empieza resolviendo el problema asociado al último periodo (que empieza en $t=T-1$) y va retrocediendo hacia atrás hasta llegar al primero (en términos del profesor **Borrell, retro-optimización**).

Así, en el momento T-1 (inicio del último periodo) el inversor se enfrenta al problema de selección de cartera para un único periodo y debe dividir la riqueza disponible en ese momento $(W_{T-1})$ entre los diferentes activos con el fin de maximizar $E[U(\tilde{W}_T)]$.

Dado

$$f_T(\tilde{W}_T) = U(\tilde{W}_t) \qquad [1]$$

el objetivo en T-1 consiste en

$$\left.\begin{array}{l} \max\limits_{Y_{iT-1}} E[f_T(\tilde{W}_T)] = \max\limits_{Y_{iT-1}} E[U(\tilde{W}_T)] \\ \text{sujeto a} \\ \tilde{W}_T = W_{T-1} + (\vec{Y}_{T-1})' \cdot \vec{\tilde{r}}_T \end{array}\right\}$$

Al resolver este problema se obtiene el valor óptimo de $Y_{iT-1}$ $(Y^*_{iT-1})$ en función de $W_{T-1}$ cuyo valor no se conoce con certeza hasta llegar a $t=T-1$. Como consecuencia, también el valor máximo de $E[U(\tilde{W}_T)]$ es una función de $W_{T-1}$:

$$\operatorname{Max} E[U(\tilde{W}_T)] = f_{T-1}(\tilde{W}_{T-1}) \qquad [2]$$

$f_{T-1}(\tilde{W}_{T-1})$ es la función de utilidad indirecta o "derivada"[235] de la riqueza disponible en T-1 y no tiene porqué coincidir con la original.

Una vez resuelto el problema para t=T-1, la decisión óptima en el momento T-2 (inicio del penúltimo periodo) consistirá en escoger los valores de $Y_{iT-2}$ con el fin de maximizar[236] $E[f_{T-1}(\tilde{W}_{T-1})]$. Es decir, en T-2 el problema es

$$\left.\begin{array}{ll} & \underset{Y_{iT-2}}{\operatorname{Max}} \quad E[f_{T-1}(\tilde{W}_{T-1})] \\ \text{sujeto a} & \\ & \tilde{W}_{T-1} = W_{T-2} + (\vec{Y}_{T-2})' \cdot \vec{\tilde{r}}_{T-1} \end{array}\right\}$$

Según este procedimiento, en T-2 se maximiza una función de utilidad "derivada" esperada de la riqueza disponible en T-1, $E[f_{T-1}(\tilde{W}_{T-1})]$, por lo que vuelve a plantearse un problema de optimización para un solo periodo, aunque ahora la función de utilidad "derivada" es

---

[235] **J.MOSSIN**, op. cit., 1968, pp.221.

[236] En el momento T-2, $W_{T-1}$ se convierte en una variable de carácter aleatorio: $\tilde{W}_{T-1}$. En general simbolizaremos la función de utilidad derivada por $f_t(\tilde{W}_t)$ considerando $\tilde{W}_t$ como una variable aleatoria.

diferente, en general, de la original[237].

Repitiendo este proceso para cada uno de los puntos decisorios llegaremos hasta el primer periodo donde se determina la composición de la primera cartera orientada a la maximización de la utilidad esperada de la riqueza en T.

La composición de la cartera óptima en el punto decisorio t ($t=0,1,2,\ldots,T-1$) está condicionada por la composición de totas las restantes carteras hasta $t=T-1$.

Teniendo en cuenta la relación existente entre la función de utilidad "derivada" para T-1 y la función de utilidad para T,

$$f_T(\tilde{W}_T) = U(\tilde{W}_T)$$

$$f_{T-1}(\tilde{W}_{T-1}) = \text{Max } E[U(\tilde{W}_T)] = \text{Max } E[f_T(\tilde{W}_T)]$$

se puede deducir la siguiente relación de recurrencia:

$$f_t(\tilde{W}_t) = \text{Max } E[f_{t+1}(\tilde{W}_{t+1})] \qquad t=0,1,\ldots,T-1 \qquad [3]$$

La P.D. permite al inversor maximizar periodo a periodo una función de utilidad "derivada" de modo que esta maximización sea consistente con la maximización de la utilidad de la riqueza final (en T). Cabe señalar que este comportamiento no es el mismo que el

[237]**Elton** y **Gruber** demuestran que si la función de utilidad de la riqueza final, $U(\tilde{W}_T)$, es creciente y cóncava con respecto a $\tilde{W}_T$ (hipótesis **H.1.**, del apartado **5.3.** de la presente Tesis), las funciones de utilidad derivadas presentan iguales características. **E.J.ELTON-M.J.GRUBER**, Finance as a Dynamic Process (Prentice-Hall, New Jersey, 1975), pp.88-89.

considerado en la Parte I, donde se supuso que el inversor actuaba **maximizando la función de utilidad de la riqueza disponible al final de cada uno de los periodos en que dividimos el tiempo total de posesión de la cartera.** Sólo en algunos casos, como veremos posteriormente, ambos comportamientos coinciden.

En los apartados que siguen a continuación aplicaremos la P.D. a diferentes funciones de utilidad para deducir, en los casos que sea posible, una expresión general para $Y^{*}_{it}$ $(i=1,2,\ldots,N;\ t=0,1,\ldots,T-1)$ y también, en que casos puede sustituirse la función de utilidad "derivada" por la función de utilidad original.

## *5.5. APLICACION DE LA PROGRAMACION DINAMICA A UNA FUNCION DE UTILIDAD CUADRATICA*

### *5.5.1. Introducción*

Después de haber visto cuál es el procedimiento seguido por la P.D. para poder determinar la cartera óptima en cada punto decisorio $(t=0,1,2,\ldots,T-1)$, la aplicaremos al caso en que la función de utilidad de la riqueza final sea cuadrática puesto que es una de las funciones más utilizadas en el contexto de la Teoría de la Cartera. En primer lugar, desarrollaremos el modelo considerando que en la cartera existe un solo activo sin riesgo y posteriormente supondremos que todos los activos que componen la cartera son arriesgados.

### *5.5.2. Consideración de N activos arriesgados y un activo sin riesgo*

Además de las hipótesis señaladas en el apartado **5.3.** hay que añadir las dos siguientes:

**H.10.** Se considera la existencia de N títulos arriesgados y un título sin riesgo.

**H.11.** La función de utilidad de la riqueza final es de la forma[238]:

$$U(\tilde{W}_T) = \alpha + \beta \cdot \tilde{W}_T + \gamma \cdot (\tilde{W}_T)^2 \qquad [4]$$

Dados:

•) Cuantía invertida en el activo sin riesgo en el momento t, $Y_{ot}$, $t=0,1,2,\ldots,T-1$;

•) Tipo de interés del activo sin riesgo vigente en el momento t y en todo el periodo que le sigue (periodo **t+1**), $s_{ot}$, $t=0,1,2,\ldots,T-1$;

•) Cuantía invertida en el activo arriesgado i en el momento t, $Y_{it}$, $i=1,2,\ldots,N$; $t=0,1,2,\ldots,T-1$;

•) Variable aleatoria que representa la tasa de rentabilidad del activo arriesgado en el momento t+1 (final del periodo considerado), $\tilde{r}_{it+1}$, $i=1,2,\ldots,N$; $t=0,1,2,\ldots,T-1$;

---

[238] Véase el apartado **1.2.5.** de la presente Tesis donde se define esta función.

la relación existente entre la riqueza disponible al final de dos periodos consecutivos (en los momentos t y t+1) es:

$$\tilde{W}_{t+1} = \tilde{W}_t + Y_{ot} \cdot s_{ot} + \sum_{i=1}^{N} Y_{it} \cdot \tilde{r}_{it+1} \qquad [5]$$

Por la hipótesis de no endeudamiento (**H.6.** del apartado **5.3.**) se debe cumplir que

$$\tilde{W}_t = Y_{ot} + \sum_{i=1}^{N} Y_{it} \qquad [6]$$

y, teniendo en cuenta [6], $\tilde{W}_{t+1}$ es

$$\tilde{W}_{t+1} = W_t + \left[ W_t - \sum_{i=1}^{N} Y_{it} \right] \cdot s_{ot} + \sum_{i=1}^{N} Y_{it} \cdot \tilde{r}_{it+1} =$$

$$= W_t \cdot (1 + s_{ot}) + \sum_{i=1}^{N} Y_{it} \cdot (\tilde{r}_{it+1} - s_{ot}) \qquad [7]$$

Haciendo en [7]

$$\mathfrak{s}_{ot} = 1 + s_{ot}$$

$$\tilde{\mathfrak{r}}_{it+1} = 1 + \tilde{r}_{it+1}$$

se obtiene

$$\tilde{W}_{t+1} = W_t \cdot s_{ot} + \sum_{i=1}^{N} Y_{it} \cdot (\tilde{r}_{it+1} - s_{ot}) \qquad [8]$$

En función de [8], la riqueza final (en T) es:

$$\tilde{W}_T = W_{T-1} \cdot s_{oT-1} + \sum_{i=1}^{N} Y_{iT-1} \cdot (\tilde{r}_{iT} - s_{oT-1}) \qquad [9]$$

y el objetivo en el momento T-1 (inicio del último periodo) consiste en determinar la cuantía que hay que invertir en dicho momento y en cada activo ($Y^*_{iT-1}$, $i=1,2,..,N$) para que la utilidad esperada de la riqueza disponible en T sea máxima. Es decir,

$$\left.\begin{array}{l} \max\limits_{Y_{iT-1}} \quad E[U(\tilde{W}_T)] \\ \text{sujeto a} \\ \tilde{W}_T = W_{T-1} \cdot s_{oT-1} + \sum\limits_{i=1}^{N} Y_{iT-1} \cdot (\tilde{r}_{iT} - s_{oT-1}) \end{array}\right\}$$

Para poder maximizar $E[U(\tilde{W}_T)]$ respecto a $Y_{iT-1}$ $(i=1,2,...,N)$ debemos expresar la función de utilidad esperada del modo más conveniente después de haber desarrollado la función $U(\tilde{W}_T)$ de [4]:

$$U(\tilde{W}_T) = \alpha + \beta \cdot \tilde{W}_T + \gamma \cdot (\tilde{W}_T)^2 =$$

$$= \alpha + \beta \cdot \left[ W_{T-1} \cdot s_{oT-1} + \sum_{i=1}^{N} Y_{iT-1} \cdot (\tilde{r}_{iT} - s_{oT-1}) \right] +$$

$$+ \gamma\cdot\left[W_{T-1}\cdot a_{oT-1} + \sum_{i=1}^{N} Y_{iT-1}\cdot(\tilde{r}_{iT} - a_{oT-1})\right]^2 =$$

$$= \alpha + \beta\cdot\left[W_{T-1}\cdot a_{oT-1} + \sum_{i=1}^{N} Y_{iT-1}\cdot(\tilde{r}_{iT} - a_{oT-1})\right] +$$

$$+ \gamma\cdot\Bigg\{W^2_{T-1}\cdot a^2_{oT-1} + \sum_{i=1}^{N} Y^2_{iT-1}\cdot(\tilde{r}^2_{iT} + a^2_{oT-1} - 2\cdot\tilde{r}_{iT}\cdot a_{oT-1}) +$$

$$+ \sum_{i=1}^{N}\sum_{\substack{j=1\\ j\neq i}}^{N} Y_{iT-1}\cdot Y_{jT-1}\cdot(\tilde{r}_{iT} - a_{oT-1})\cdot(\tilde{r}_{jT} - a_{oT-1}) +$$

$$+ 2\cdot W_{T-1}\cdot a_{oT-1}\cdot\left[\sum_{i=1}^{N} Y_{iT-1}\cdot(\tilde{r}_{iT} - a_{oT-1})\right]\Bigg\} \qquad [10]$$

De acuerdo con las hipótesis **H.7.** y **H.8.** incluidas en el epígrafe **5.3.** respecto a la independencia y estacionariedad de las variables aleatorias, se cumplen las siguientes relaciones:

•) $E(\tilde{r}_{it+1}\cdot\tilde{r}_{jt+1}) = E(\tilde{r}_{it+1})\cdot E(\tilde{r}_{jt+1}) - Cov(\tilde{r}_{it+1},\tilde{r}_{jt+1}) =$

$= E(\tilde{r}_{it+1})\cdot E(\tilde{r}_{jt+1}) = \varepsilon_i\cdot\varepsilon_j \qquad i=1,\dots,N;\ j=1,\dots,N; t=0,\dots,T-1$

•) $E(\tilde{r}_{it+1}) = \varepsilon_i \qquad i=1,\dots,N;\ t=0,\dots,T-1$

Dado que $\tilde{r}_{it} = 1 + \tilde{r}_{it}$ y que $E(\tilde{r}_{it}) = E_i$, entonces $\varepsilon_i = 1 + E_i$.

•) $V(\tilde{r}_{it+1}) = V(\tilde{r}_{it+1}) = V_i \quad i=1,\ldots,N;\ t=0,\ldots,T-1$

Además, por definición, se cumple que

•) $E(\tilde{r}_{it+1})^2 = \varepsilon_i^2 + V_i \qquad i=1,\ldots,N;\ t=0,\ldots,T-1$

Si tenemos en cuenta estas relaciones, podremos expresar la función de utilidad esperada de $\tilde{W}_T$ del siguiente modo:

$$E[U(\tilde{W}_T)] = \alpha + \beta\cdot\left[W_{T-1}\cdot r_{0T-1} + \sum_{i=1}^{N} Y_{iT-1}\cdot(\varepsilon_i - r_{0T-1})\right] +$$

$$+ \gamma\cdot\left\{W_{T-1}^2\cdot r_{0T-1}^2 + \sum_{i=1}^{N} Y_{iT-1}^2\cdot(\varepsilon_i^2 + V_i + r_{0T-1}^2 - 2\cdot\varepsilon_i\cdot r_{0T-1}) +\right.$$

$$+ \sum_{i=1}^{N}\sum_{\substack{j=1\\ j\neq i}}^{N} Y_{iT-1}\cdot Y_{jT-1}\cdot(\varepsilon_i - r_{0T-1})\cdot(\varepsilon_j - r_{0T-1}) +$$

$$\left. + 2\cdot W_{T-1}\cdot r_{0T-1}\cdot\left[\sum_{i=1}^{N} Y_{iT-1}\cdot(\varepsilon_i - r_{0T-1})\right]\right\} =$$

$$= \left[\alpha + \beta\cdot W_{T-1}\cdot r_{0T-1} + \gamma\cdot W_{T-1}^2\cdot r_{0T-1}^2\right] +$$

$$+ \sum_{i=1}^{N}\left[(\varepsilon_i - r_{0T-1})\cdot(\beta + 2\cdot\gamma\cdot r_{0T-1}\cdot W_{T-1})\right]\cdot Y_{iT-1} +$$

$$+ \gamma \cdot \sum_{i=1}^{N} \left[ (\varepsilon_i - a_{0T-1})^2 + V_i \right] \cdot Y_{iT-1}^2 +$$

$$+ \gamma \cdot \sum_{i=1}^{N} \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^{N} (\varepsilon_i - a_{0T-1}) \cdot (\varepsilon_j - a_{0T-1}) \cdot Y_{iT-1} \cdot Y_{jT-1} \qquad [11]$$

Para hallar el máximo de esta función deberemos igualar a cero

$$\frac{dE[U(\tilde{W}_T)]}{dY_{iT-1}} \qquad \forall i, \; i=1,2,\ldots,N$$

donde,

$$\frac{dE[U(\tilde{W}_T)]}{dY_{iT-1}} = \left[ (\varepsilon_i - a_{0T-1}) \cdot (\beta + 2 \cdot \gamma \cdot a_{0t} \cdot W_{T-1}) \right] +$$

$$+ 2 \cdot \gamma \cdot \left[ (\varepsilon_i - a_{0T-1})^2 + V_i \right] \cdot Y_{iT-1} +$$

$$+ 2 \cdot \gamma \cdot \left[ \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^{N} [(\varepsilon_i - a_{0T-1}) \cdot (\varepsilon_j - a_{0T-1})] \cdot Y_{jT-1} \right]$$

Matricialmente, el sistema de ecuaciones resultante es:

$$A_{T-1} \cdot Y_{T-1}^{*} = - \frac{1}{2 \cdot \gamma} \cdot (\beta + 2 \cdot \gamma \cdot a_{0T-1} \cdot W_{T-1}) \cdot C_{T-1}$$

donde

•) $A_{T-1} = (a_{ijT-1}) \qquad i=1,2,\ldots,N; \; j=1,2,\ldots,N$

$$a_{ijT-1} = (\varepsilon_i - \omega_{oT-1})^2 + V_i \qquad i=j$$
$$a_{ijT-1} = (\varepsilon_i - \omega_{oT-1})\cdot(\varepsilon_j - \omega_{oT-1}) \qquad i\neq j$$

•) $Y^*_{T-1} = (Y^*_{iT-1}) \qquad i=1,2,\ldots,N$

•) $C_{T-1} = (c_{iT-1}) \qquad i=1,2,\ldots,N$

$$c_{iT-1} = (\varepsilon_i - \omega_{oT-1})$$

Despejando $Y^*_{T-1}$ se obtiene

$$Y^*_{T-1} = -\frac{1}{2\cdot\gamma}\cdot(\beta + 2\cdot\gamma\cdot\omega_{oT-1}\cdot W_{T-1})\cdot(A_{T-1})^{-1}\cdot C_{T-1} =$$

$$= (\beta + 2\cdot\gamma\cdot\omega_{oT-1}\cdot W_{T-1})\cdot D_{T-1}$$

donde

•) $D_{T-1} = -\frac{1}{2\cdot\gamma}\cdot(A_{T-1})^{-1}\cdot C_{T-1}$

$D_{T-1} = (d_{iT-1}) \qquad i=1,2,\ldots,N$

**Por tanto, la cuantía que hay que invertir en cada activo i (i=1,2,...,N) en el *momento T-1 para maximizar la utilidad esperada de la* riqueza disponible en el momento T es:**

$$Y^*_{iT-1} = d_{iT-1}\cdot(\beta + 2\cdot\gamma\cdot\omega_{oT-1}\cdot W_{T-1}) \qquad [12]$$

En esta expresión, $d_{iT-1}$ no depende de $W_{T-1}$ puesto que las matrices $A_{T-1}$ y $C_{T-1}$ son independientes respecto a $W_{T-1}$.

Una vez determinada la composición óptima de la cartera para el último periodo debemos determinar la **función de utilidad "derivada"** para $W_{T-1}$ para poder decidir la composición de la cartera del penúltimo periodo.

La función de utilidad "derivada" para $W_{T-1}$ es

$$f_{T-1}(\tilde{W}_{T-1}) = \text{Max } E[U(\tilde{W}_T)]$$

y el máximo valor esperado de $U(\tilde{W}_T)$ se obtendrá sustituyendo $Y^*_{iT-1}$ en $E[U(\tilde{W}_T)]$:

$$f_{T-1}(\tilde{W}_{T-1}) = \text{Max } E[U(\tilde{W}_T)] = E[U(\tilde{W}_T^*)]$$

$$= E\left\{U\left[\tilde{W}_{T-1}\cdot r_{oT-1} + \sum_{i=1}^{N} Y^*_{iT-1}\cdot(\tilde{r}_{iT} - r_{oT-1})\right]\right\} =$$

$$= \left[\alpha + \beta\cdot\tilde{W}_{T-1}\cdot r_{oT-1} + \gamma\cdot\tilde{W}^2_{T-1}\cdot r^2_{oT-1}\right] +$$

$$+ (\beta + 2\cdot\gamma\cdot r_{oT-1}\cdot\tilde{W}_{T-1})^2\cdot\left[\sum_{i=1}^{N}(\varepsilon_i - r_{oT-1})\cdot d_{iT-1}\right] +$$

$$+ \gamma\cdot(\beta + 2\cdot\gamma\cdot r_{oT-1}\cdot\tilde{W}_{T-1})^2\cdot\left[\sum_{i=1}^{N}\left[(\varepsilon_i - r_{oT-1})^2 + v_i\right]\cdot d^2_{iT-1}\right] +$$

$$+\ \gamma\cdot(\beta+2\cdot\gamma\cdot a_{0T-1}\cdot\tilde{W}_{T-1})^2\cdot\left[\sum_{i=1}^{N}\sum_{\substack{j=1\\ j\neq i}}^{N}(\varepsilon_i - a_{0T-1})\cdot(\varepsilon_j - a_{0T-1})\cdot d_{iT-1}\cdot d_{jT-1}\right] =$$

$$=\left[\alpha + \beta\cdot\tilde{W}_{T-1}\cdot a_{0T-1} + \gamma\cdot\tilde{W}^2_{T-1}\cdot a^2_{0T-1}\right] +$$

$$+\ (\beta+2\cdot\gamma\cdot a_{0T-1}\cdot\tilde{W}_{T-1})^2\cdot\left[\sum_{i=1}^{N}(\varepsilon_i - a_{0T-1})\cdot d_{iT-1} + \gamma\cdot\sum_{i=1}^{N}\left[(\varepsilon_i - a_{0T-1})^2 + V_i\right]\cdot d^2_{iT-1} +\right.$$

$$\left.+\ \gamma\cdot\sum_{i=1}^{N}\sum_{\substack{j=1\\ j\neq i}}^{N}(\varepsilon_i - a_{0T-1})\cdot(\varepsilon_j - a_{0T-1})\cdot d_{iT-1}\cdot d_{jT-1}\right] \qquad [13]$$

Haciendo, en [13],

$$\eta_{T-1} = \left[\sum_{i=1}^{N}(\varepsilon_i - a_{0T-1})\cdot d_{iT-1} + \gamma\cdot\sum_{i=1}^{N}\left[(\varepsilon_i - a_{0T-1})^2 + V_i\right]\cdot d^2_{iT-1} +\right.$$

$$\left.+\ \gamma\cdot\sum_{i=1}^{N}\sum_{\substack{j=1\\ j\neq i}}^{N}(\varepsilon_i - a_{0T-1})\cdot(\varepsilon_j - a_{0T-1})\cdot d_{iT-1}\cdot d_{jT-1}\right]$$

se obtiene que

$$f_{T-1}(\tilde{W}_{T-1}) = \left[\alpha + \beta\cdot\tilde{W}_{T-1}\cdot a_{0T-1} + \gamma\cdot\tilde{W}^2_{T-1}\cdot a^2_{0T-1}\right] +$$

$$+\ (\beta + 2\cdot\gamma\cdot a_{0T-1}\cdot\tilde{W}_{T-1})^2\cdot\eta_{T-1} = (\alpha + \beta^2\cdot\eta_{T-1}) +$$

$$+\ \beta\cdot a_{0T-1}\cdot(1 + 4\cdot\gamma\cdot\eta_{T-1})\cdot\tilde{W}_{T-1} + \gamma\cdot a^2_{0T-1}\cdot(1 + 4\cdot\gamma\cdot\eta_{T-1})\cdot\tilde{W}^2_{T-1} \qquad [14]$$

Puede observarse que $f_{T-1}(\tilde{W}_{T-1})$, en [14], es una **función cuadrática de $\tilde{W}_{T-1}$ distinta de la función de utilidad original.** $f_{T-1}(\tilde{W}_{T-1})$ es la función de utilidad "derivada" de la riqueza disponible en el momento T-1.

Una vez obtenida la función $f_{T-1}(\tilde{W}_{T-1})$, **en el momento T-2, el inversor se enfrenta al problema:**

$$\max_{Y_{iT-2}} E[f_{T-1}(\tilde{W}_{T-1})]$$

sujeto a

$$\tilde{W}_{T-1} = W_{T-2} \cdot a_{oT-2} + \sum_{i=1}^{N} Y_{iT-2} \cdot (\tilde{r}_{iT-1} - a_{oT-2})$$

Sustituyendo $\tilde{W}_{T-1}$ en $f_{T-1}(\tilde{W}_{T-1})$, se obtiene

$$f_{T-1}(\tilde{W}_{T-1}) = (\alpha + \beta^2 \cdot \eta_{T-1}) +$$

$$+ \beta \cdot a_{oT-1} \cdot (1 + 4 \cdot \gamma \cdot \eta_{T-1}) \cdot \left[ W_{T-2} \cdot a_{oT-2} + \sum_{i=1}^{N} Y_{iT-2} \cdot (\tilde{r}_{iT-1} - a_{oT-2}) \right] +$$

$$+ \gamma \cdot a_{oT-1}^2 \cdot (1 + 4 \cdot \gamma \cdot \eta_{T-1}) \cdot \left[ W_{T-2} \cdot a_{oT-2} + \sum_{i=1}^{N} Y_{iT-2} \cdot (\tilde{r}_{iT-1} - a_{oT-2}) \right]^2 \quad [15]$$

Haciendo,

$$\alpha' = (\alpha + \beta^2 \cdot \eta_{T-1})$$

$$\beta' = \beta\cdot\omega_{0T-1}\cdot(1 + 4\cdot\gamma\cdot\eta_{T-1})$$

$$\gamma' = \gamma\cdot\omega^2_{0T-1}\cdot(1 + 4\cdot\gamma\cdot\eta_{T-1})$$

la expresión [15] se transforma en

$$f_{T-1}(\tilde{W}_{T-1}) = \alpha' + \beta'\cdot\left[W_{T-2}\cdot\omega_{0T-2} + \sum_{i=1}^{N} Y_{iT-2}\cdot(\tilde{r}_{iT-1} - \omega_{0T-2})\right] +$$

$$+ \gamma'\cdot\left[W_{T-2}\cdot\omega_{0T-2} + \sum_{i=1}^{N} Y_{iT-2}\cdot(\tilde{r}_{iT-1} - \omega_{0T-2})\right]^2 \qquad [16]$$

Si aplicamos las mismas hipótesis que para hallar $E[U(\tilde{W}_T)]$, en [11], se obtiene que:

$$E[f_{T-1}(\tilde{W}_{T-1})] = \left[\alpha' + \beta'\cdot W_{T-2}\cdot\omega_{0T-2} + \gamma'\cdot W^2_{T-2}\cdot\omega^2_{0T-2}\right] +$$

$$+ \sum_{i=1}^{N}\left[(\varepsilon_i - \omega_{0T-2})\cdot(\beta' + 2\cdot\gamma'\cdot\omega_{0T-2}\cdot W_{T-2})\right]\cdot Y_{iT-2} +$$

$$+ \gamma'\cdot\sum_{i=1}^{N}\left[(\varepsilon_i - \omega_{0T-2})^2 + V_i\right]\cdot Y^2_{iT-2} +$$

$$+ \gamma'\cdot\sum_{i=1}^{N}\sum_{\substack{j=1\\ j\neq i}}^{N}(\varepsilon_i - \omega_{0T-2})\cdot(\varepsilon_j - \omega_{0T-2})\cdot Y_{iT-2}\cdot Y_{jT-2}$$

Si igualamos a cero la derivada

$$\frac{dE[f_{T-1}(\tilde{W}_{T-1})]}{dY_{iT-2}} \qquad \forall i,\ i=1,2,\dots,N$$

obtendremos el valor de $Y_{iT-2}$ que proporciona el máximo de $E[f_{T-1}(\tilde{W}_{T-1})]$.

Por un procedimiento análogo al utilizado para encontrar $Y^*_{T-1}$ se deduce que

$$Y^*_{T-2} = -\frac{1}{2\cdot\gamma'}\cdot(\beta' + 2\cdot\gamma'\cdot\Delta_{oT-2}\cdot W_{T-2})\cdot(A_{T-2})^{-1}\cdot C_{T-2} \qquad [17]$$

donde

•) $Y^*_{T-2} = (Y^*_{iT-2})$ $\qquad i=1,2,\dots,N$

•) $A_{T-2} = (a_{ijT-2})$ $\qquad i=1,2,\dots,N;\ j=1,2,\dots,N$

$$a_{ijT-2} = (\varepsilon_i - \Delta_{oT-2})^2 + V_i \qquad i=j$$
$$a_{ijT-2} = (\varepsilon_i - \Delta_{oT-2})\cdot(\varepsilon_j - \Delta_{oT-2}) \qquad i\neq j$$

•) $C_{T-2} = (c_{iT-2})$ $\qquad i=1,2,\dots,N$

$$c_{iT-2} = (\varepsilon_i - \Delta_{oT-2})$$

Sustituyendo $\beta'$ y $\gamma'$ por sus respectivas expresiones en [17] obtenemos:

$$Y^*_{T-2} = -\frac{1}{2\cdot\gamma\cdot\Delta^2_{oT-1}\cdot(1+4\cdot\gamma\cdot\eta_{T-1})}\cdot\Big[\beta\cdot\Delta_{oT-1}\cdot(1+4\cdot\gamma\cdot\eta_{T-1}) +$$

$$+ 2\cdot\gamma\cdot a_{oT-1}^{2}\cdot(1+4\cdot\gamma\cdot\eta_{T-1})\cdot a_{oT-2}\cdot W_{T-2}\Big]\cdot(A_{T-2})^{-1}\cdot C_{T-2} =$$

$$= -\frac{1}{2\cdot\gamma\cdot a_{oT-1}}\cdot(\beta + 2\cdot\gamma\cdot a_{oT-1}\cdot a_{oT-2}\cdot W_{T-2})\cdot(A_{T-2})^{-1}\cdot C_{T-2} =$$

$$= \frac{1}{a_{oT-1}}\cdot(\beta + 2\cdot\gamma\cdot a_{oT-1}\cdot a_{oT-2}\cdot W_{T-2})\cdot D_{T-2} \qquad [18]$$

donde

$\cdot$) $D_{T-2} = -\frac{1}{2\cdot\gamma}\cdot(A_{T-2})^{-1}\cdot C_{T-2}$

$D_{T-2} = (d_{iT-2}) \qquad i=1,2,\ldots,N$

En definitiva, **la cuantía óptima que debe invertirse en el título i (i=1,2,...,N) en el momento T-2 es:**

$$Y^{*}_{iT-2} = \cdot d_{iT-2}\cdot\left[\frac{\beta}{a_{oT-1}} + 2\cdot\gamma\cdot a_{oT-2}\cdot W_{T-2}\right] \qquad [19]$$

De nuevo, si sustituimos $Y^{*}_{iT-2}$ en $E[f_{T-1}(\tilde{W}_{T-1})]$ hallaremos su valor máximo que será una función de $W_{T-2}$, $f_{T-2}(\tilde{W}_{T-2})$.

La expresión para $f_{T-2}(\tilde{W}_{T-2})$, de forma análoga a $f_{T-1}(\tilde{W}_{T-1})$ en [14] es:

$$f_{T-2}(\tilde{W}_{T-2}) = \text{Max } E[f_{T-1}(\tilde{W}_{T-1})] = E[f_{T-1}(\tilde{W}^{*}_{T-1})] =$$

$$= (\alpha' + \beta'^{2}\cdot\eta_{T-2}) + \beta'\cdot a_{oT-2}\cdot(1+4\cdot\gamma'\cdot\eta_{T-2})\cdot\tilde{W}_{T-2} + \gamma'\cdot a_{oT-2}^{2}\cdot(1+4\cdot\gamma'\cdot\eta_{T-2})\cdot\tilde{W}_{T-2}^{2} \qquad [20]$$

Haciendo:

$$\alpha'' = (\alpha' + \beta'^2 \cdot \eta_{T-1})$$

$$\beta'' = \beta' \cdot r_{oT-1} \cdot (1+4 \cdot \gamma' \cdot \eta_{T-1})$$

$$\gamma'' = \gamma' \cdot r_{oT-1}^2 \cdot (1+4 \cdot \gamma' \cdot \eta_{T-1})$$

la anterior expresión se transforma en

$$f_{T-2}(\tilde{W}_{T-2}) = \alpha'' + \beta'' \cdot \tilde{W}_{T-2} + \gamma'' \cdot \tilde{W}_{T-2}^2 \qquad [21]$$

que es también una función cuadrática de $\tilde{W}_{T-2}$.

Para poder deducir una expresión de carácter general, necesitamos avanzar un paso más en el proceso de optimización hacia atrás. Así, **en el momento T-3, el objetivo del inversor consiste en determinar $Y_{iT-3}$ con el fin de maximizar el valor esperado de $f_{T-2}(\tilde{W}_{T-2})$**, es decir,

$$\left.\begin{aligned} &\underset{Y_{iT-3}}{\text{Max}}\ E[f_{T-2}(\tilde{W}_{T-2})] \\ &\text{sujeto a} \\ &\tilde{W}_{T-2} = W_{T-3} \cdot r_{oT-3} + \sum_{i=1}^{N} Y_{iT-3} \cdot (\tilde{r}_{iT-2} - r_{oT-3}) \end{aligned}\right\}$$

Sustituyendo $\tilde{W}_{T-2}$ en $f_{T-2}(\tilde{W}_{T-2})$, se obtiene

$$f_{T-2}(\tilde{W}_{T-2}) = \alpha'' + \beta''\cdot\left[W_{T-3}\cdot r_{oT-3} + \sum_{i=1}^{N} Y_{iT-3}\cdot(\tilde{r}_{iT-2}-r_{oT-3})\right] +$$

$$+ \gamma''\cdot\left[W_{T-3}\cdot r_{oT-3} + \sum_{i=1}^{N} Y_{iT-3}\cdot(\tilde{r}_{iT-2}-r_{oT-3})\right]^2 \qquad [22]$$

Y el valor esperado de $f_{T-2}(\tilde{W}_{T-2})$ es

$$E[f_{T-2}(W_{T-2})] =$$

$$= \left[\alpha'' + \beta''\cdot W_{T-3}\cdot r_{oT-3} + \gamma''\cdot W_{T-3}^2\cdot r_{oT-3}^2\right] +$$

$$+ \sum_{i=1}^{N} \left[(\varepsilon_i - r_{oT-3})\cdot(\beta'' + 2\cdot\gamma''\cdot r_{oT-3}\cdot W_{T-3})\right]\cdot Y_{iT-3} +$$

$$+ \gamma''\cdot\sum_{i=1}^{N} \left[(\varepsilon_i - r_{oT-3})^2 + V_i\right]\cdot Y_{iT-3}^2 +$$

$$+ \gamma''\cdot\sum_{i=1}^{N}\sum_{\substack{j=1\\ j\neq i}}^{N} (\varepsilon_i - r_{oT-3})\cdot(\varepsilon_j - r_{oT-3})\cdot Y_{iT-3}\cdot Y_{jT-3} \qquad [23]$$

Igualando a cero la derivada

$$\frac{dE[f_{T-2}(\tilde{W}_{T-2})]}{dY_{iT-3}} \qquad \forall i,\ i=1,2,\ldots,N$$

obtendremos el valor de $Y_{iT-3}$ que proporciona el máximo de $E[f_{T-2}(\tilde{W}_{T-2})]$.

El valor óptimo de $Y_{iT-3}$, $Y^*_{iT-3}$, es

$$Y^*_{T-3} = -\frac{1}{2\cdot\gamma''}\cdot(\beta'' + 2\cdot\gamma''\cdot a_{oT-3}\cdot W_{T-3})\cdot(A_{T-3})^{-1}\cdot C_{T-3} \qquad [24]$$

donde

•) $Y^*_{T-3} = (Y^*_{iT-3}) \qquad i=1,2,\ldots,N$

•) $A_{T-3} = (a_{ijT-3}) \qquad i=1,2,\ldots,N;\ j=1,2,\ldots,N;$

$$a_{ijT-3} = (\varepsilon_i - a_{oT-3})^2 + V_i \qquad i=j$$
$$a_{ijT-3} = (\varepsilon_i - a_{oT-3})\cdot(\varepsilon_j - a_{oT-3}) \qquad i\neq j$$

•) $C_{T-3} = (c_{iT-3}) \qquad i=1,2,\ldots,N$

$$c_{iT-3} = (\varepsilon_i - a_{oT-3})$$

Sustituyendo $\beta''$ y $\gamma''$ por sus respectivas expresiones que relacionan estos parámetros con $\beta$ y $\gamma$ en $Y^*_{T-3}$ obtenemos:

$$Y^*_{T-3} = -\frac{1}{2\cdot\gamma\cdot a^2_{oT-1}\cdot a^2_{oT-2}\cdot(1+4\cdot\gamma\cdot\eta_{T-1})\cdot(1+4\cdot\gamma\cdot\eta_{T-2})}\cdot$$

$$\cdot\Big[\beta\cdot a_{oT-1}\cdot a_{oT-2}\cdot(1+4\cdot\gamma\cdot\eta_{T-1})\cdot(1+4\cdot\gamma\cdot\eta_{T-2}) +$$

$$+ 2\cdot\gamma\cdot a^2_{oT-1}\cdot a^2_{oT-2}\cdot a_{oT-3}\cdot(1+4\cdot\gamma\cdot\eta_{T-1})\cdot(1+4\cdot\gamma\cdot\eta_{T-2})\cdot W_{T-3}\Big]\cdot(A_{T-3})^{-1}\cdot C_{T-3} =$$

$$= -\frac{1}{2\cdot\gamma\cdot a_{oT-1}\cdot a_{oT-2}}\cdot(\beta + 2\cdot\gamma\cdot a_{oT-1}\cdot a_{oT-2}\cdot a_{oT-3}\cdot W_{T-3})\cdot(A_{T-3})^{-1}\cdot C_{T-3} =$$

$$= \frac{1}{\omega_{oT-1} \cdot \omega_{oT-2}} \cdot (\beta + 2 \cdot \gamma \cdot \omega_{oT-1} \cdot \omega_{oT-2} \cdot \omega_{oT-3} \cdot W_{T-3}) \cdot D_{T-3} \qquad [25]$$

donde

$\bullet$) $D_{T-3} = - \frac{1}{2 \cdot \gamma} \cdot (A_{T-3})^{-1} \cdot C_{T-3}$

$D_{T-3} = (d_{iT-3}) \qquad i=1,2,\ldots,N$

Por tanto, la **cuantía óptima invertida en el activo i (i=1,2,...,N) en el momento T-3 es**

$$Y^{*}_{iT-3} = d_{iT-3} \cdot \left[ \frac{\beta}{\omega_{oT-1} \cdot \omega_{oT-2}} + 2 \cdot \gamma \cdot \omega_{oT-3} \cdot W_{T-3}) \right] \qquad [26]$$

Generalizando para cualquier t ($t=0,1,2,\ldots,T-1$) los resultados obtenidos en [12], [19] y [26], se deriva la siguiente expresion para la cuantía óptima que hay que invertir en cada título, $Y^{*}_{it}$ ($i=1,2,\ldots,N$):

$$Y^{*}_{it} = d_{it} \cdot \left[ \frac{\beta}{\prod_{k=t+1}^{T-1} \omega_{ok}} + 2 \cdot \gamma \cdot \omega_{ot} \cdot W_t \right] \qquad [27]$$

donde

$\bullet$) $D_t = - \frac{1}{2\gamma} \cdot (A_t)^{-1} \cdot C_t$

$D_t = (d_{it}) \qquad i=1,2,\ldots,N; \; t=0,1,2,\ldots,T-1$

•) $A_t = (a_{ijt})$ $\qquad i=1,2,\ldots,N;\ j=1,2,\ldots,N;\ t=0,1,\ldots,T-1$

$$a_{ijt} = (\varepsilon_i - a_{ot})^2 + V_i \qquad i=j$$
$$a_{ijt} = (\varepsilon_i - a_{ot})\cdot(\varepsilon_j - a_{ot}) \quad i\neq j$$

•) $C_t = (c_{it})$ $\qquad i=1,2,\ldots,N;\ t=0,1,2,\ldots,T-1$

$$c_{it} = (\varepsilon_i - a_{ot})$$

Otra relación importante que puede deducirse y que permitirá conectar el caso general con otros casos particulares es la siguiente:

•) Para $U(\tilde{W}_T)$ se cumple que

$$-\frac{U'(\tilde{W}_T)}{U''(\tilde{W}_T)} = -\left[\frac{\beta}{2\cdot\gamma} + \tilde{W}_T\right]$$

•) Para $f_{T-1}(\tilde{W}_{T-1})$, definida en [13], se cumple que

$$-\frac{f'_{T-1}(\tilde{W}_{T-1})}{f''_{T-1}(\tilde{W}_{T-1})} = -\left[\frac{\beta}{2\cdot\gamma\cdot a_{oT-1}} + \tilde{W}_{T-1}\right]$$

•) Para $f_{T-2}(\tilde{W}_{T-2})$, definida en [20] se cumple que

$$-\frac{f'_{T-2}(\tilde{W}_{T-2})}{f''_{T-2}(\tilde{W}_{T-2})} = -\left[\frac{\beta}{2\cdot\gamma\cdot a_{oT-1}\cdot a_{oT-2}} + \tilde{W}_{T-2}\right]$$

Y en general, para cualquier t (t=0,1,2,...,T-1) se cumple que,

$$-\frac{f_t'(\tilde{W}_t)}{f_t''(\tilde{W}_t)} = -\left[\frac{\beta}{2\cdot\gamma\cdot\prod_{k=t}^{T-1} r_{0k}} + \tilde{W}_t\right] \qquad [28]$$

Obsérvese que si $\beta=0$, entonces

$$Y_t^* = 2\cdot\gamma\cdot r_{0t}\cdot W_t\cdot D_t$$

lo cual significaría que, en cada periodo, sólo se tiene en cuenta el tipo de interés vigente en el mismo y las distribuciones de probabilidad correspondientes a dicho periodo. Si fuera así, la política miope (ignorar todo lo relativo a otros periodos) resultaría la óptima. Sin embargo, tal como se vio en el apartado 1.2.3. de esta Tesis, para poder utilizar una función de utilidad cuadrática se deben imponer restricciones a los coeficientes de la misma y en concreto se exige que $\beta>0$ y $\gamma<0$, por lo que este caso no es posible.

En general, la aplicación de una política miope cuando la función de utilidad es cuadrática y se considera la existencia de un título sin riesgo no es óptima puesto que la función de utilidad "derivada" aunque es cuadrática no coincide con la original ni puede considerarse una transformación lineal de ésta última. Sin embargo, existe un caso particular para el que la política miope es la óptima y que estudiamos a continuación.

### *5.5.2.1. Caso particular: $s_{ot} = 0$*

Si se considera que un activo sin riesgo, como es por ejemplo el dinero en caja, puede formar parte de la cartera, entonces se debe tener en cuenta que

$$s_{ot} = 0 \quad \Longrightarrow \quad \alpha_{ot} = 1 \quad \forall t,\ t=0,1,2,\dots,T-1$$

y, como consecuencia, la expresión de $Y_t^*$ $(t=0,1,2,\dots,T-1)$ se convierte en

$$Y_t^* = -\left[\beta + 2\cdot\gamma\cdot W_t\right]\cdot\frac{1}{2\cdot\gamma}\cdot(A_t)^{-1}\cdot C_t \qquad [29]$$

donde

•) $A_t = (a_{ijt})$ $\qquad i=1,2,\dots,N;\ j=1,2,\dots,N;\ t=0,1,\dots,T-1$

$$a_{ijt} = (\varepsilon_i - 1)^2 + V_i \qquad i=j$$
$$a_{ijt} = (\varepsilon_i - 1)\cdot(\varepsilon_j - 1) \qquad i\neq j$$

•) $C_t = (c_{it})$ $\qquad i=1,2,\dots,N;\ t=0,1,2,\dots,T-1$

$$c_{it} = (\varepsilon_i - 1)$$

Para este caso concreto, las matrices $A_t$ y $C_t$ son las mismas para cualquier t $(t=0,1,2,\dots,T-1)$; por tanto, podemos escribir:

$$A_t = A \qquad t=0,1,2,\dots,T-1$$
$$C_t = C \qquad t=0,1,2,\dots,T-1$$
$$D_t = D = -\frac{1}{2\cdot\gamma}\cdot A^{-1}\cdot C \qquad t=0,1,2,\dots,T-1$$

$$Y_t^* = \left[\beta + 2\cdot\gamma\cdot W_t\right]\cdot D \qquad [30]$$

Además, se cumple que

$$\eta_t = \eta = \left[\sum_{i=1}^{N} (\varepsilon_i - 1)\cdot d_i + \gamma\cdot\sum_{i=1}^{N}\left[(\varepsilon_i - 1)^2 + v_i\right]\cdot d_i^2 + \right.$$

$$\left. + \gamma\cdot\sum_{i=1}^{N}\sum_{\substack{j=1\\ j\neq i}}^{N} (\varepsilon_i - 1)\cdot(\varepsilon_j - 1)\cdot d_i\cdot d_j\right] \qquad [31]$$

**En el caso que $\alpha_{0t}=1$, la maximización de la función de utilidad esperada original (y no la derivada) para la riqueza disponible al final de cada periodo (comportamiento miope) conduce a los mismos resultados que procediendo mediante la Programación Dinámica.**

Es decir, si en cada punto decisorio, t $(t=0,1,2,\ldots,T-1)$, se resuelve el problema

$$\left.\begin{array}{ll} & \text{Max } E[U(\tilde{W}_{t+1})] \\ \text{sujeto a} & \\ & \tilde{W}_{t+1} = W_t + \displaystyle\sum_{i=1}^{N} Y_{it}\cdot(\tilde{r}_{it+1} - 1) \end{array}\right\}$$

el resultado, como demostraremos seguidamente, coincide con el obtenido a partir de la aplicación de la Programación Dinámica.

Demostración:

Sea $t=T-1$ y $V(\tilde{W}_{T-1})$, una función de utilidad de la riqueza disponible en el momento T-1 de la forma:

$$V(\tilde{W}_{T-1}) = \beta\cdot\tilde{W}_{T-1} + \gamma\cdot\tilde{W}^2_{T-1}$$

Consideremos, ahora, la función de utilidad original aplicada a $\tilde{W}_{T-1}$:

$$U(\tilde{W}_{T-1}) = \alpha + \beta\cdot\tilde{W}_{T-1} + \gamma\cdot\tilde{W}^2_{T-1}$$

Como puede observarse, $U(\tilde{W}_{T-1})$ es una transformación lineal de $V(\tilde{W}_{T-1})$:

$$U(\tilde{W}_{T-1}) = \alpha + V(\tilde{W}_{T-1})$$

y ello implica que ambas funciones muestran el mismo orden de preferencias $[U(\tilde{W}_{T-1}) \sim V(\tilde{W}_{T-1})]$

Asímismo, si $\Delta_{0T-1}=1$, la función de utilidad "derivada" para $\tilde{W}_{T-1}$, deducida de [13] y [31] es

$$f_{T-1}(\tilde{W}_{T-1}) = (\alpha + \beta^2\cdot\eta) + \beta\cdot(1 + 4\cdot\gamma\cdot\eta)\cdot\tilde{W}_{T-1} +$$

$$+ \gamma\cdot(1 + 4\cdot\gamma\cdot\eta)\cdot\tilde{W}^2_{T-1} = (1 + 4\cdot\gamma\cdot\eta)\cdot(\beta\cdot\tilde{W}_{T-1} + \gamma\cdot\tilde{W}^2_{T-1}) + (\alpha + \beta^2\cdot\eta) =$$

$$= (1 + 4\cdot\gamma\cdot\eta)\cdot V(\tilde{W}_{T-1}) + (\alpha + \beta^2\cdot\eta)$$

lo cual significa que $f_{T-1}(\tilde{W}_{T-1})$ es, también, una transformación lineal de $V(\tilde{W}_{T-1})$. De todo ello se deduce que las tres funciones consideradas proporcionan la misma ordenación y que, por tanto, se obtendrán los mismos resultados para $Y^{*}_{it}$ tanto si se maximiza $E[f_{T-1}(\tilde{W}_{T-1})]$ como si se maximiza $E[U(\tilde{W}_{T-1})]$.

Del mismo modo se llega a la conclusión que $f_t(\tilde{W}_t)$ y $U(\tilde{W}_t)$ son **funciones de utilidad equivalentes**, es decir, $f_t(\tilde{W}_t) \sim U(\tilde{W}_t)$.

De hecho, para este caso particular, se obtiene que:

$$- \frac{f'_t(\tilde{W}_t)}{f''_t(\tilde{W}_t)} = - \left[\frac{\beta}{2\cdot\gamma} + \tilde{W}_t\right] = - \frac{U'(\tilde{W}_t)}{U''(\tilde{W}_t)}$$

de donde se deduce que $f_t(\tilde{W}_t)$ es una transformación lineal de $U(\tilde{W}_t)$ y puede utilizarse, indistintamente, cualquiera de las dos funciones de utilidad.

Si además consideramos la existencia de **un único título arriesgado** (N=1), la expresión para $Y^{*}_{1t}$ es

$$Y^{*}_{1t} = - \frac{\mathcal{E}_1 - 1}{2\cdot\gamma\cdot[(\mathcal{E}_1 - 1)^2 + V_1]} \cdot \left[\beta + 2\cdot\gamma\cdot\tilde{W}_t\right]$$

Si tomamos t=T-1, $\alpha = 0$, $\beta = 1$ y $\gamma = -\lambda$ y además tenemos en cuenta que $\mathcal{E}_1 - 1 = E_1$, la anterior expresión se transforma en

$$Y^{*}_{1T-1} = \frac{E_1}{2\cdot\lambda\cdot(E_1^2 + V_1)} \cdot \left[1 - 2\cdot\lambda\cdot\tilde{W}_{T-1}\right]$$

que es el resultado obtenido, para este caso particular, por Mossin[239].

### 5.5.2.2. Posibilidad de prestar y tomar prestado

En el epígrafe 5.3. se establecieron cuáles eran las hipótesis de carácter general para todos los casos que serán considerados. Una de estas hipótesis (H.6.) hacía referencia a la imposibilidad de prestar dinero o tomarlo prestado. En el presente apartado pretendemos ver cómo afecta la relajación de dicho supuesto al modelo que estamos desarrollando, con una función de utilidad cuadrática y un título libre de riesgo.

Si se permite que el inversor pueda prestar o recibir un préstamo, la relación entre la riqueza disponible en dos puntos decisorios consecutivos ($t$ y $t+1$; $t=0,1,2,\ldots,T-1$) es

$$\tilde{W}_{t+1} = W_t + Y_{ot}\cdot s_{ot} + \sum_{i=1}^{N} Y_{it}\cdot\tilde{r}_{it+1}$$

La aplicación de la P.D. para hallar la secuencia de carteras óptima supone la resolución de T problemas de optimización del siguiente tipo:

$$\left.\begin{array}{l} \displaystyle\max_{Y_{it-1}} E[f_t(\tilde{W}_t)] \\ \text{sujeto a} \\ \displaystyle\tilde{W}_t = W_{t-1} + Y_{ot-1}\cdot s_{ot-1} + \sum_{i=1}^{N} Y_{it-1}\cdot\tilde{r}_{it} \end{array}\right\}$$

---

[239] J.MOSSIN, op. cit., 1968, pp.216-217.

donde

$$f_t(\tilde{W}_t) = \text{Max } E[f_{t+1}(\tilde{W}_{t+1})] \qquad t=0,1,2,\dots,T-1$$

$$f_T(\tilde{W}_T) = U(\tilde{W}_T)$$

Así, en el momento T-1 el problema que debe resolverse es:

$$\left.\begin{array}{l} \max\limits_{Y_{iT-1}} E[U(\tilde{W}_T)] \\ \text{sujeto a} \\ \tilde{W}_T = W_{T-1} + Y_{oT-1}\cdot s_{oT-1} + \sum\limits_{i=1}^{N} Y_{iT-1}\cdot \tilde{r}_{iT} \end{array}\right\}$$

donde

$$U(\tilde{W}_T) = \alpha + \beta\cdot\tilde{W}_T + \gamma\cdot\tilde{W}^2_{T-1}$$

Si sustituimos $\tilde{W}_T$ por su expresión y hallamos el valor esperado de la función de utilidad teniendo en cuenta las hipótesis de estacionariedad e independencia (en cada periodo y entre periodos) se obtiene la siguiente función de utilidad esperada:

$$E[U(\tilde{W}_T)] = \alpha + \beta\cdot\left[W_{T-1} + Y_{oT-1}\cdot s_{oT-1} + \sum_{i=1}^{N} Y_{iT-1}\cdot E_i\right] +$$

$$+ \gamma\cdot\left[W^2_{T-1} + Y^2_{oT-1}\cdot s^2_{oT-1} + \sum_{i=1}^{N} Y^2_{iT-1}\cdot(E^2_i + V_i) + \right.$$

$$+ \sum_{i=1}^{N} \sum_{\substack{j=1 \\ j\neq i}}^{N} Y_{iT-1} \cdot Y_{jT-1} \cdot E_i \cdot E_j + 2 \cdot W_{T-1} \cdot \sum_{i=1}^{N} Y_{iT-1} \cdot E_i +$$

$$\left. + 2 \cdot Y_{oT-1} \cdot s_{oT-1} \cdot \sum_{i=1}^{N} Y_{iT-1} \cdot E_i + 2 \cdot Y_{oT-1} \cdot s_{oT-1} \cdot W_{T-1} \right] \qquad [32]$$

Para maximimar esta función es necesario que las derivadas siguientes sean nulas:

$$\cdot) \ \frac{dE[U(\tilde{W}_T)]}{dY_{oT-1}} = 2 \cdot \gamma \cdot s^2_{oT-1} \cdot Y_{oT-1} + 2 \cdot \gamma \cdot s_{oT-1} \cdot \sum_{i=1}^{N} Y_{iT-1} \cdot E_i +$$

$$+ (\beta + 2 \cdot \gamma \cdot W_{T-1}) \cdot s_{oT-1} = 0 \Longrightarrow$$

$$\Longrightarrow 2 \cdot \gamma \cdot s_{oT-1} \cdot Y_{oT-1} + 2 \cdot \gamma \cdot \sum_{i=1}^{N} Y_{iT-1} \cdot E_i + (\beta + 2 \cdot \gamma \cdot W_{T-1}) = 0$$

$$\cdot) \ \frac{dE[U(\tilde{W}_T)]}{dY_{iT-1}} = 2 \cdot \gamma \cdot s_{oT-1} \cdot E_i \cdot Y_{oT-1} + 2 \cdot \gamma \cdot (E_i^2 + V_i) \cdot Y_{iT-1} +$$

$$+ 2 \cdot \gamma \cdot Y_{iT-1} \cdot E_i \cdot \sum_{\substack{j=1 \\ j\neq i}}^{N} Y_{jT-1} \cdot E_j + (\beta + 2 \cdot \gamma \cdot W_{T-1}) \cdot E_i = 0$$

Matricialmente, el sistema de ecuaciones resultante es

$$2 \cdot \gamma \cdot A_{T-1} \cdot Y^*_{T-1} = - (\beta + 2 \cdot \gamma \cdot W_{T-1}) \cdot C_{T-1}$$

donde

•) $A_{T-1} = (a_{ijT-1})$ $\quad i=0,1,2,\ldots,N;\ j=0,1,2,\ldots,N;$

$$a_{ooT-1} = s_{oT-1}$$
$$a_{ioT-1} = s_{oT-1}\cdot E_i \qquad i=1,2,\ldots,N$$
$$a_{ojT-1} = E_j \qquad j=1,2,\ldots,N$$
$$a_{ijT-1} = E_i^2 + V_i \qquad i=1,2,\ldots,N;\ i=j$$
$$a_{ijT-1} = E_i\cdot E_j \qquad i=1,2,\ldots,N;\ j=1,2,\ldots,N;\ i\neq j$$

•) $Y^*_{T-1} = (Y^*_{iT-1})$ $\quad i=0,1,2,\ldots,N$

•) $C_{T-1} = (c_{iT-1})$ $\quad i=0,1,2,\ldots,N;$

$$c_{oT-1} = 1$$
$$c_{iT-1} = E_i \qquad i=1,2,\ldots,N$$

Por tanto, despejando la matriz de cuantías óptimas se obtiene:

$$Y^*_{T-1} = (\beta + 2\cdot\gamma\cdot W_{T-1})\cdot D_{T-1} \qquad \text{o bien}$$

$$Y^*_{iT-1} = d_{iT-1}\cdot(\beta + 2\cdot\gamma\cdot W_{T-1}) \tag{33}$$

donde

•) $D_{T-1} = -\dfrac{1}{2\cdot\gamma}\cdot(A_{T-1})^{-1}\cdot C_{T-1}$

$D_{T-1} = (d_{iT-1})$ $\quad i=0,1,2,\ldots,N$

Una vez resuelto el problema para el momento T-1, debemos resolver el correspondiente para el momento T-2:

$$\left.\begin{array}{l} \qquad\qquad \text{Max } E[f_{T-1}(\tilde{W}_{T-1})] \\ \text{sujeto a} \\ \qquad\qquad \tilde{W}_{T-1} = W_{T-2} + Y_{oT-2}\cdot s_{oT-2} + \sum_{i=1}^{N} Y_{iT-2}\cdot\tilde{r}_{iT-1} \end{array}\right\}$$

donde

$$f_{T-1}(\tilde{W}_{T-1}) = \text{Max } E[U(\tilde{W}_T)] =$$

$$= E\left\{U\left[\tilde{W}_{T-1} + Y^*_{oT-1}\cdot s_{oT-1} + \sum_{i=1}^{N} Y^*_{iT-1}\cdot\tilde{r}_{iT}\right]\right\} =$$

$$= \alpha + \beta\cdot\left[\tilde{W}_{T-1} + (\beta+2\cdot\gamma\cdot\tilde{W}_{T-1})\cdot d_{oT-1}\cdot s_{oT-1} + (\beta+2\cdot\gamma\cdot\tilde{W}_{T-1})\cdot\sum_{i=1}^{N} Y_{iT-1}\cdot E_i\right] +$$

$$+\gamma\cdot\left[\tilde{W}^2_{T-1} + (\beta+2\cdot\gamma\cdot\tilde{W}_{T-1})^2\cdot d^2_{oT-1}\cdot s^2_{oT-1} + (\beta+2\cdot\gamma\cdot\tilde{W}_{T-1})^2\cdot\sum_{i=1}^{N} d^2_{iT-1}\cdot(E^2_i + V_i) +\right.$$

$$+(\beta+2\cdot\gamma\cdot\tilde{W}_{T-1})^2\cdot\sum_{i=1}^{N}\sum_{\substack{j=1\\ j\neq i}}^{N} d_{iT-1}\cdot d_{jT-1}\cdot E_i\cdot E_j + 2\cdot\tilde{W}_{T-1}\cdot(\beta+2\cdot\gamma\cdot\tilde{W}_{T-1})\cdot\sum_{i=1}^{N} d_{iT-1}\cdot E_i +$$

$$+ 2\cdot(\beta + 2\cdot\gamma\cdot\tilde{W}_{T-1})^2\cdot d_{oT-1}\cdot s_{oT-1}\cdot\sum_{i=1}^{N} d_{iT-1}\cdot E_i +$$

$$\left. + 2\cdot(\beta + 2\cdot\gamma\cdot\tilde{W}_{T-1})\cdot d_{oT-1}\cdot s_{oT-1}\cdot\tilde{W}_{T-1}\right] =$$

$$= (\alpha + \beta\cdot\tilde{W}_{T-1} + \gamma\cdot\tilde{W}^2_{T-1}) + (\beta + 2\cdot\gamma\cdot\tilde{W}_{T-1})^2\cdot\left\{\left[d_{oT-1}\cdot s_{oT-1} + \sum_{i=1}^{N} d_{iT-1}\cdot E_i\right] +\right.$$

$$\left. + \gamma\cdot\left[d_{oT-1}\cdot s_{oT-1} + \sum_{i=1}^{N} d_{iT-1}\cdot E_i\right]^2 + \gamma\cdot\sum_{i=1}^{N} d^2_{iT-1}\cdot V_i\right\} \qquad [34]$$

Si en [34] llamamos $\eta_{T-1}$ a la expresión

$$\eta_{T-1} = \left[d_{oT-1}\cdot s_{oT-1} + \sum_{i=1}^{N} d_{iT-1}\cdot E_i\right] +$$

$$+ \gamma\cdot\left[d_{oT-1}\cdot s_{oT-1} + \sum_{i=1}^{N} d_{iT-1}\cdot E_i\right]^2 + \gamma\cdot\sum_{i=1}^{N} d^2_{iT-1}\cdot V_i$$

se obtiene que

$$f_{T-1}(\tilde{W}_{T-1}) = (\alpha+\beta\cdot\tilde{W}_{T-1}+\gamma\cdot\tilde{W}^2_{T-1}) + (\beta+2\cdot\gamma\cdot\tilde{W}_{T-1})^2\cdot\eta_{T-1} =$$

$$= (\alpha+\beta^2\cdot\eta_{T-1}) + \beta\cdot(1+4\cdot\gamma\cdot\eta_{T-1})\cdot\tilde{W}_{T-1} + \gamma\cdot(1+4\cdot\gamma\cdot\eta_{T-1})\cdot\tilde{W}^2_{T-1} \qquad [35]$$

Si se considera la función de utilidad

$$V(\tilde{W}_{T-1}) = \beta\cdot\tilde{W}_{T-1} + \gamma\cdot\tilde{W}^2_{T-1}$$

entonces, la función de utilidad original aplicada a $\tilde{W}_{T-1}$ es una transformación lineal de $V(\tilde{W}_{T-1})$

$$U(\tilde{W}_{T-1}) = \alpha + \beta\cdot\tilde{W}_{T-1} + \gamma\cdot\tilde{W}^2_{T-1} = \alpha + V(\tilde{W}_{T-1})$$

Asimismo, $f_{T-1}(\tilde{W}_{T-1})$, definida en [35], es otra transformación lineal de $V(\tilde{W}_{T-1})$

$$f_{T-1}(\tilde{W}_{T-1}) = (1+4\cdot\gamma\cdot\eta_{T-1})\cdot V(\tilde{W}_{T-1}) + (\alpha + \beta^2\cdot\eta_{T-1})$$

Si $f_{T-1}(\tilde{W}_{T-1})$ y $U(\tilde{W}_{T-1})$ son transformaciones lineales de $V(\tilde{W}_{T-1})$, entonces todas estas funciones de utilidad son equivalentes en cuanto que muestran la misma ordenación de preferencias

$$f_{T-1}(\tilde{W}_{T-1}) \sim U(\tilde{W}_{T-1}) \sim V(\tilde{W}_{T-1})$$

De ello se desprende que **en el momento T-2, el inversor puede maximizar la utilidad esperada de la riqueza disponible en T-1, $E[U(\tilde{W}_{T-1})]$, en lugar de maximizar $E[f_{T-1}(\tilde{W}_{T-1})]$** puesto que en ambos casos se obtendrán los mismos resultados al tratarse de funciones de utilidad equivalentes.

El mismo resultado se repetirá para todos los periodos y por tanto, $f_t(\tilde{W}_t) \sim U(\tilde{W}_t)$, lo cual simplifica el proceso de optimización y permite que la política miope sea la óptima.

Para este caso, la cuantía que hay que invertir en el momento t $(t=0,1,2,\ldots,T-1)$ y en cada título para conseguir una secuencia de carteras óptima es

$$Y_t^* = (\beta + 2\cdot\gamma\cdot W_t)\cdot D_t \qquad [36]$$

donde

•) $Y_t^* = (Y_{it}^*)$ $\qquad i=0,1,2,\ldots,N;\ t=0,1,2,\ldots,T-1$

•) $D_t = -\frac{1}{2\cdot\gamma}\cdot(A_t)^{-1}\cdot C_t$

$D_t = (d_{it})$ $\qquad i=0,1,2,\dots,N;\ t=0,1,2,\dots,T-1$

•) $A_t = (a_{ijt})$ $\qquad i=0,1,2,\dots,N;\ j=0,1,2,\dots,N$

$a_{oot} = s_{ot}$

$a_{iot} = s_{ot}\cdot E_i$ $\qquad i=1,2,\dots,N$

$a_{ojt} = E_j$ $\qquad j=1,2,\dots,N$

$a_{ijt} = E_i^2 + V_i$ $\qquad i=1,2,\dots,N;\ i=j$

$a_{ijt} = E_i\cdot E_j$ $\qquad i=1,2,\dots,N;\ j=1,2,\dots,N;\ i\neq j$

•) $C_t = (c_{it})$ $\qquad i=0,1,2,\dots,N$

$c_{ot} = 1$

$c_{it} = E_i$ $\qquad i=1,2,\dots,N$

### *5.5.3. Consideración de N activos arriesgados*

Ahora, además de las hipótesis señaladas en el apartado **5.3.** deben añadirse las siguientes:

**H.10.** Existen de N títulos arriesgados.

**H.11.** La función de utilidad de la riqueza final es de la forma:

$$U(\tilde{W}_T) = \alpha + \beta\cdot\tilde{W}_T + \gamma\cdot(\tilde{W}_T)^2$$

Dadas:

•) Cuantía invertida en el activo arriesgado i en el momento t, $Y_{it}$, $i=1,2,\ldots,N$; $t=0,1,2,\ldots,T-1$;

•) Variable aleatoria que representa la tasa de rentabilidad del activo arriesgado en el momento t+1 (final del periodo considerado), $\tilde{r}_{it+1}$, $i=1,2,\ldots,N$; $t=0,1,2,\ldots,T-1$;

la relación existente entre la riqueza disponible al final de dos periodos consecutivos (en los momentos t y t+1) es:

$$\tilde{W}_{t+1} = W_t + \sum_{i=1}^{N} Y_{it} \cdot \tilde{r}_{it+1}$$

Si consideramos que

$$W_t = \sum_{i=1}^{N} Y_{it} \quad \Longrightarrow \quad Y_{Nt} = W_t - \sum_{i=1}^{N-1} Y_{it}$$

entonces,

$$\tilde{W}_{t+1} = W_t \cdot (1 + \tilde{r}_{Nt+1}) + \sum_{i=1}^{N-1} Y_{it} \cdot (\tilde{r}_{it+1} - \tilde{r}_{Nt+1})$$

Si además se considera que

$$\tilde{\kappa}_{it+1} = 1 + \tilde{r}_{it+1}$$

se obtiene

$$\tilde{W}_{t+1} = W_t \cdot \tilde{\kappa}_{Nt+1} + \sum_{i=1}^{N-1} Y_{it} \cdot (\tilde{\kappa}_{it+1} - \tilde{\kappa}_{Nt+1})$$

De acuerdo con la P.D., si el inversor quiere determinar la secuencia de carteras óptima para maximizar la utilidad esperada de la riqueza disponible al final del horizonte temporal de posesión de la cartera (en T), deberá resolver T problemas de optimización y el primero es

$$\left.\begin{array}{l} \max\limits_{Y_{iT-1}} \quad E[U(\tilde{W}_T)] \\ \text{sujeto a} \\ \tilde{W}_T = W_{T-1}\cdot\tilde{r}_{NT} + \sum\limits_{i=1}^{N-1} Y_{iT-1}\cdot(\tilde{r}_{iT} - \tilde{r}_{NT}) \end{array}\right\}$$

Para resolver este problema hallaremos la función de utilidad esperada teniendo en cuenta la restricción que relaciona $\tilde{W}_T$ y $W_{T-1}$, y después de haber definido la función de utilidad respecto a $W_{T-1}$:

$$U(\tilde{W}_T) = \alpha + \beta\cdot\tilde{W}_T + \gamma\cdot(\tilde{W}_T)^2 =$$

$$=\alpha+\beta\cdot\left[W_{T-1}\cdot\tilde{r}_{NT}+\sum_{i=1}^{N-1} Y_{iT-1}\cdot(\tilde{r}_{iT}-\tilde{r}_{NT})\right]+\gamma\cdot\left[W_{T-1}\cdot\tilde{r}_{NT}+\sum_{i=1}^{N-1} Y_{iT-1}\cdot(\tilde{r}_{iT}-\tilde{r}_{NT})\right]^2=$$

$$= \alpha + \beta\cdot\left[W_{T-1}\cdot\tilde{r}_{NT}+\sum_{i=1}^{N-1} Y_{iT-1}\cdot(\tilde{r}_{iT} - \tilde{r}_{NT})\right] +$$

$$+ \gamma\cdot\left[W_{T-1}^2\cdot\tilde{r}_{NT}^2 + \sum_{i=1}^{N-1} Y_{iT-1}^2\cdot(\tilde{r}_{iT}^2 + \tilde{r}_{NT}^2 - 2\tilde{r}_{iT}\cdot\tilde{r}_{NT}) +\right.$$

$$+ \sum_{i=1}^{N-1} \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^{N-1} Y_{iT-1} \cdot Y_{jT-1} \cdot (\tilde{r}_{iT} \cdot \tilde{r}_{jT} - \tilde{r}_{NT} \cdot \tilde{r}_{jT} - \tilde{r}_{NT} \cdot \tilde{r}_{iT} + \tilde{r}_{NT}^2) +$$

$$\left. + 2 \cdot W_{T-1} \cdot \tilde{r}_{NT} \cdot \sum_{i=1}^{N-1} Y_{iT-1} \cdot (\tilde{r}_{iT} - \tilde{r}_{NT}) \right] \qquad [37]$$

Si tenemos en cuenta las relaciones definidas en el epígrafe **5.5.2.** derivadas de las hipótesis de independencia y estacionariedad (**H.6.** y **H.7.** del apartado **5.3.**) podemos definir la función de utilidad esperada del siguiente modo:

$$E[U(\tilde{W}_T)] = \alpha + \beta \cdot \left[ W_{T-1} \cdot \varepsilon_N + \sum_{i=1}^{N-1} Y_{iT-1} \cdot (\varepsilon_i - \varepsilon_N) \right] +$$

$$+ \gamma \cdot \left\{ W_{T-1}^2 \cdot (\varepsilon_N{}^2 + V_N) + \sum_{i=1}^{N-1} Y_{iT-1}^2 \cdot \left[ (\varepsilon_i^2 + V_i) + (\varepsilon_N^2 + V_N) - 2\varepsilon_i \cdot \varepsilon_N \right] + \right.$$

$$+ \sum_{i=1}^{N-1} \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^{N-1} Y_{iT-1} \cdot Y_{jT-1} \cdot \left[ \varepsilon_i \cdot \varepsilon_j - \varepsilon_N \cdot \varepsilon_j - \varepsilon_N \cdot \varepsilon_i + (\varepsilon_N^2 + V_N) \right] +$$

$$\left. + 2 \cdot W_{T-1} \cdot \sum_{i=1}^{N-1} Y_{iT-1} \cdot \left[ \varepsilon_i \cdot \varepsilon_N - (\varepsilon_N^2 + V_N) \right] \right\} =$$

$$= [\alpha + \beta \cdot W_{T-1} \cdot \varepsilon_N + \gamma \cdot W_{T-1}^2 \cdot (\varepsilon_N^2 + V_N)] +$$

$$+ \sum_{i=1}^{N-1} \left[ (\beta + 2 \cdot \gamma \cdot W_{T-1} \cdot \varepsilon_N) \cdot (\varepsilon_i - \varepsilon_N) - 2 \cdot \gamma \cdot W_{T-1} \cdot V_N \right] \cdot Y_{iT-1} +$$

$$+ \gamma\cdot\sum_{i=1}^{N-1}\left[(\varepsilon_i - \varepsilon_N)^2 + V_i + V_N\right]\cdot Y_{iT-1}^2 +$$

$$+ \gamma\cdot\sum_{i=1}^{N-1}\sum_{\substack{j=1\\ j\neq i}}^{N-1}\left[(\varepsilon_i - \varepsilon_N)\cdot(\varepsilon_j - \varepsilon_N) + V_N\right]\cdot Y_{iT-1}\cdot Y_{jT-1} \qquad [38]$$

Si ahora igualamos a cero $\dfrac{dE[U(\tilde{W}_T)]}{dY_{iT-1}}$, obtendremos los valores óptimos de $Y_{iT-1}$ $(Y^*_{iT-1})$ que maximizan $E[U(\tilde{W}_T)]$.

La expresión de esta derivada es:

$$\frac{dE[U(\tilde{W}_T)]}{dY_{iT-1}} = \left[(\beta + 2\cdot\gamma\cdot W_{T-1}\cdot\varepsilon_N)\cdot(\varepsilon_i - \varepsilon_N) - 2\cdot\gamma\cdot W_{T-1}\cdot V_N\right] +$$

$$+ 2\cdot\gamma\cdot\left[(\varepsilon_i-\varepsilon_N)^2 + V_i + V_N\right]\cdot Y_{iT-1} + 2\cdot\gamma\cdot\sum_{\substack{j=1\\ j\neq i}}^{N-1}\left[(\varepsilon_i-\varepsilon_N)\cdot(\varepsilon_j-\varepsilon_N)+V_N\right]\cdot Y_{jT-1}$$

Matricialmente, el sistema de ecuaciones resultante es

$$2\cdot\gamma\cdot A_{T-1}\cdot Y^*_{T-1} = -(\beta + 2\cdot\gamma\cdot W_{T-1}\cdot\varepsilon_N)\cdot C_{T-1} + 2\cdot\gamma\cdot W_{T-1}\cdot V_N\cdot I$$

donde

•) $A_{T-1} = (a_{ijT-1})$ $\qquad i=1,2,\ldots,N-1;\ j=1,2,\ldots,N-1$

$$a_{ijT-1} = (\varepsilon_i - \varepsilon_N)^2 + V_i + V_N \qquad i=j$$
$$a_{ijT-1} = (\varepsilon_i - \varepsilon_N)\cdot(\varepsilon_j - \varepsilon_N) + V_N \qquad i\neq j$$

•) $Y^*_{T-1} = (Y^*_{iT-1}) \qquad i=1,2,\ldots,N-1$

•) $C_{T-1} = (c_{iT-1}) \qquad i=1,2,\ldots,N-1$

$$c_{iT-1} = (\varepsilon_i - \varepsilon_N)$$

•) $I = (1)$ matriz formada por unos de orden $(N-1,1)$

Dadas las hipótesis sobre independencia y estacionariedad, las matrices $A_{T-1}$ y $C_{T-1}$ coincidirán con las mratices $A_t$ y $C_t$ para todo t $(t=0,1,2,\ldots,T-1)$ y, por tanto,

$$A_{T-1} = A \qquad\qquad C_{T-1} = C$$

Teniendo en cuenta esta característica y utilizando la siguiente notación para facilitar el proceso

$$\alpha = \alpha_T \qquad \beta = \beta_T \qquad \gamma = \gamma_T$$

se obtiene que la cuantía que hay que invertir en cada título en el momento T-1 es

$$Y^*_{T-1} = -\frac{1}{2\cdot\gamma_T}\cdot(\beta_T + 2\cdot\gamma_T\cdot W_{T-1}\cdot\varepsilon_N)\cdot A^{-1}\cdot C + W_{T-1}\cdot V_N\cdot A^{-1}\cdot I \qquad [39]$$

Haciendo

•) $D_{T-1} = -\frac{1}{2\cdot\gamma_T}\cdot A^{-1}\cdot C$

$D_{T-1} = (d_{iT-1}) \qquad i=1,2,\ldots,N;$

•) $G = A^{-1} \cdot I$

$G = (g_i) \qquad i=1,2,\ldots,N;$

obtenemos la siguiente expresión para la **cuantía que debe invertirse en el activo i (i=1,2,...,N-1) en el momento T-1:**

$$Y^*_{iT-1} = d_{iT-1} \cdot (\beta_T + 2 \cdot \gamma_T \cdot W_{T-1} \cdot \varepsilon_N) + g_i \cdot W_{T-1} \cdot V_N \qquad [40]$$

Para poder deducir una expresión general para $Y^*_{it}$ y concluir si, para este caso, la política miope es o no la óptima, deberemos dar una paso más en la aplicación de la Programación Dinámica.

El siguiente paso, en el momento T-2, consiste en determinar las cuantías invertidas, en ese momento, en cada uno de los títulos. Es decir,

$$\left.\begin{array}{l} \underset{Y_{iT-2}}{\text{Max}} \quad E[f_{T-1}(\tilde{W}_{T-1})] \\ \text{sujeto a} \\ \tilde{W}_{T-1} = W_{T-2} \cdot \tilde{r}_{NT-1} + \sum_{i=1}^{N-1} Y_{iT-2} \cdot (\tilde{r}_{iT-1} - \tilde{r}_{NT-1}) \end{array}\right\}$$

donde

$$f_{T-1}(\tilde{W}_{T-1}) = \text{Max } E[U(\tilde{W}_T)]$$

Si sustituimos en $E[U(\tilde{W}_T)]$, definida en [52], las cuantías $Y_{iT-1}$ por las cuantías óptimas $Y^*_{iT-1}$ se obtendrá el valor máximo de esta función:

$$f_{T-1}(\tilde{W}_{T-1}) = \text{Max } E[U(\tilde{W}_T)] =$$

$$= [\alpha_T + \beta_T \cdot \tilde{W}_{T-1} \cdot \varepsilon_N + \gamma_T \cdot \tilde{W}^2_{T-1} \cdot (\varepsilon^2_N + V_N)] +$$

$$+ \sum_{i=1}^{N-1} \left[ (\beta_T + 2 \cdot \gamma_T \cdot \tilde{W}_{T-1} \cdot \varepsilon_N) \cdot (\varepsilon_i - \varepsilon_N) - 2 \cdot \gamma_T \cdot \tilde{W}_{T-1} \cdot V_N \right] \cdot$$

$$\cdot \left[ d_{iT-1} \cdot (\beta_T + 2 \cdot \gamma_T \cdot \tilde{W}_{T-1} \cdot \varepsilon_N) + g_i \cdot \tilde{W}_{T-1} \cdot V_{T-1} \right] + \gamma_T \cdot \sum_{i=1}^{N-1} \left[ (\varepsilon_i - \varepsilon_N)^2 + V_i + V_N \right] \cdot$$

$$\cdot \left[ d_{iT-1} \cdot (\beta_T + 2 \cdot \gamma_T \cdot \tilde{W}_{T-1} \cdot \varepsilon_N) + g_i \cdot \tilde{W}_{T-1} \cdot V_{T-1} \right]^2 +$$

$$+ \gamma_T \cdot \sum_{i=1}^{N-1} \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^{N-1} \left[ (\varepsilon_i - \varepsilon_N) \cdot (\varepsilon_j - \varepsilon_N) + V_N \right] \cdot \left[ d_{iT-1} \cdot (\beta_T + 2 \cdot \gamma_T \cdot \tilde{W}_{T-1} \cdot \varepsilon_N) + g_i \cdot \tilde{W}_{T-1} \cdot V_{T-1} \right] \cdot$$

$$\cdot \left[ d_{jT-1} \cdot (\beta_T + 2 \cdot \gamma_T \cdot \tilde{W}_{T-1} \cdot \varepsilon_N) + g_j \cdot \tilde{W}_{T-1} \cdot V_{T-1} \right] =$$

$$= [\alpha_T + \beta_T \cdot \tilde{W}_{T-1} \cdot \varepsilon_N + \gamma_T \cdot \tilde{W}^2_{T-1} \cdot (\varepsilon^2_N + V_N)] +$$

$$+ \left[ \sum_{i=1}^{N-1} (\varepsilon_i - \varepsilon_N) \cdot d_{iT-1} + \gamma_T \cdot \sum_{i=1}^{N-1} [(\varepsilon_i - \varepsilon_N)^2 + V_i + V_N] \cdot d^2_{iT-1} + \right.$$

$$\left. + \gamma_T \cdot \sum_{i=1}^{N-1} \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^{N-1} [(\varepsilon_i - \varepsilon_N) \cdot (\varepsilon_j - \varepsilon_N) + V_N] \cdot d_{iT-1} \cdot d_{jT-1} \right] \cdot (\beta_T + 2 \cdot \gamma_T \cdot \tilde{W}_{T-1} \cdot \varepsilon_N)^2 +$$

$$+\left[\sum_{i=1}^{N-1}(\varepsilon_i-\varepsilon_N)\cdot g_i - 2\cdot\gamma_T\cdot\sum_{i=1}^{N-1} d_{iT-1} + 2\cdot\gamma_T\cdot\sum_{i=1}^{N-1}[(\varepsilon_i-\varepsilon_N)^2+V_i+V_N]\cdot d_{iT-1}\cdot g_i + \right.$$

$$\left. + \gamma_T\cdot\sum_{i=1}^{N-1}\sum_{\substack{j=1\\ j\neq i}}^{N-1}[(\varepsilon_i-\varepsilon_N)\cdot(\varepsilon_j-\varepsilon_N)+V_N]\cdot[g_i\cdot d_{jT-1} + g_j\cdot d_{iT-1}]\right]\cdot$$

$$\cdot\left[(\beta_T+2\cdot\gamma_T\cdot\tilde{W}_{T-1}\cdot\varepsilon_N)\cdot\tilde{W}_{T-1}\cdot V_N\right]+$$

$$+\left[\sum_{i=1}^{N-1}[(\varepsilon_i - \varepsilon_N)^2 + V_i + V_N]\cdot g_i^2 - 2\cdot\sum_{i=1}^{N-1} g_i + \right.$$

$$\left. + \sum_{i=1}^{N-1}\sum_{\substack{j=1\\ j\neq i}}^{N-1}[(\varepsilon_i - \varepsilon_N)\cdot(\varepsilon_j - \varepsilon_N) + V_N]\cdot g_i\cdot g_j\right]\cdot\gamma_T\cdot\tilde{W}_{T-1}^2\cdot V_N^2 \qquad [41]$$

Si en [41] se hace:

$$\cdot)\ \eta_{1T-1} = \left[\sum_{i=1}^{N-1}(\varepsilon_i-\varepsilon_N)\cdot d_{iT-1} + \gamma_T\cdot\sum_{i=1}^{N-1}[(\varepsilon_i-\varepsilon_N)^2+V_i+V_N]\cdot d_{iT-1}^2 + \right.$$

$$\left. + \gamma_T\cdot\sum_{i=1}^{N-1}\sum_{\substack{j=1\\ j\neq i}}^{N-1}[(\varepsilon_i-\varepsilon_N)\cdot(\varepsilon_j-\varepsilon_N) + V_N]\cdot d_{iT-1}\cdot d_{jT-1}\right]$$

$$\cdot)\ \eta_{2T-1} = \left[\sum_{i=1}^{N-1}(\varepsilon_i-\varepsilon_N)\cdot g_i - 2\cdot\gamma_T\cdot\sum_{i=1}^{N-1} d_{iT-1} + \right.$$

$$+ 2\cdot\gamma_T\cdot\sum_{i=1}^{N-1}[(\varepsilon_i-\varepsilon_N)^2 + V_i + V_N]\cdot d_{iT-1}\cdot g_i +$$

$$\left. + \gamma_T\cdot\sum_{i=1}^{N-1}\sum_{\substack{j=1\\ j\neq i}}^{N-1}[(\varepsilon_i - \varepsilon_N)\cdot(\varepsilon_j - \varepsilon_N) + V_N]\cdot[g_i\cdot d_{jT-1} + g_j\cdot d_{iT-1}]\right]$$

$$\cdot)\ \eta_{3T-1} = \left[\sum_{i=1}^{N-1}[(\varepsilon_i - \varepsilon_N)^2 + V_i + V_N]\cdot g_i^2 - 2\cdot\sum_{i=1}^{N-1} g_i +\right.$$

$$\left. + \sum_{i=1}^{N-1}\sum_{\substack{j=1\\ j\neq i}}^{N-1}[(\varepsilon_i - \varepsilon_N)\cdot(\varepsilon_j - \varepsilon_N) + V_N]\cdot g_i\cdot g_j\right]$$

se obtiene que

$$f_{T-1}(\tilde{W}_{T-1}) =$$

$$= (\alpha_T + \beta_T^2\cdot\eta_{1T-1}) + \beta_T\cdot[(1 + 4\cdot\gamma_T\cdot\eta_{1T-1})\varepsilon_N + V_N\cdot\eta_{2T-1}]\cdot\tilde{W}_{T-1} +$$

$$+ \eta_T\cdot[(1 + 4\cdot\gamma_T\cdot\eta_{1T-1})\varepsilon_N^2 + (1 + 2\cdot\eta_{2T-1}\cdot\varepsilon_N + \eta_{3T-1}\cdot V_N)\cdot V_N]\cdot\tilde{W}_{T-1}^2 \qquad [42]$$

Y, de nuevo, mediante el siguiente cambio de variables

$$\alpha_{T-1} = \alpha_T + \beta_T^2\cdot\eta_{1T-1}$$

$$\beta_{T-1} = \beta_T\cdot[(1 + 4\cdot\gamma_T\cdot\eta_{1T-1})\varepsilon_N + V_N\cdot\eta_{2T-1}]$$

$$\gamma_{T-1} = \eta_T\cdot[(1 + 4\cdot\gamma_T\cdot\eta_{1T-1})\varepsilon_N^2 + (1 + 2\cdot\eta_{2T-1}\cdot\varepsilon_N + \eta_{3T-1}\cdot V_N)\cdot V_N]$$

la función $f_{T-1}(\tilde{W}_{T-1})$ puede expresarse como

$$f_{T-1}(\tilde{W}_{T-1}) = \alpha_{T-1} + \beta_{T-1}\cdot\tilde{W}_{T-1} + \eta_{T-1}\cdot\tilde{W}^2_{T-1} \qquad [43]$$

que, aunque es una función cuadrática de $\tilde{W}_{T-1}$ no coincide con la función de utilidad original. $f_{T-1}(\tilde{W}_{T-1})$ es la función de utilidad "derivada" de $\tilde{W}_{T-1}$.

Una vez obtenida la función $f_{T-1}(\tilde{W}_{T-1})$, deberemos sustituir, en [57], $\tilde{W}_{T-1}$ por la restricción

$$\tilde{W}_{T-1} = W_{T-2}\cdot\tilde{r}_{NT-1} + \sum_{i=1}^{N-1} Y_{iT-2}\cdot(\tilde{r}_{iT-1} - \tilde{r}_{NT-1})$$

y a continuación hallar $E[f_{T-1}(\tilde{W}_{T-1})]$. Debido a la naturaleza cuadrática de $f_{T-1}(\tilde{W}_{T-1})$ su valor esperado tendrá una forma similar a $E[U(\tilde{W}_T)]$, definida en [38],

$$E[f_{T-1}(\tilde{W}_{T-1})] =$$

$$= [\alpha_{T-1} + \beta_{T-1}\cdot W_{T-2}\cdot \varepsilon_N + \gamma_{T-1}\cdot W^2_{T-2}\cdot(\varepsilon^2_N + V_N)] +$$

$$+ \sum_{i=1}^{N-1}\left[(\beta_{T-1}+2\cdot\gamma_{T-1}\cdot W_{T-2}\cdot\varepsilon_N)\cdot(\varepsilon_i-\varepsilon_N) - 2\cdot\gamma_{T-1}\cdot W_{T-2}\cdot V_N\right]\cdot Y_{iT-2} +$$

$$+ \gamma_{T-1}\cdot\sum_{i=1}^{N-1}\left[(\varepsilon_i - \varepsilon_N)^2 + V_i + V_N\right]\cdot Y^2_{iT-2} +$$

$$+ \gamma_{T-1} \cdot \sum_{i=1}^{N-1} \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^{N-1} \left[ (\varepsilon_i - \varepsilon_N) \cdot (\varepsilon_j - \varepsilon_N) + V_N \right] \cdot Y_{iT-2} \cdot Y_{jT-2} \qquad [44]$$

Igualando a cero $\dfrac{dE[f_{T-1}(\tilde{W}_{T-1})]}{dY_{iT-2}}$, cuya expresión puede deducirse de la obtenida para el momento T-1, se halla que

$$Y^*_{T-2} = - \frac{1}{2 \cdot \gamma_{T-1}} \cdot (\beta_{T-1} + 2 \cdot \gamma_{T-1} \cdot W_{T-2} \cdot \varepsilon_N) \cdot A^{-1} \cdot C + W_{T-2} \cdot V_N \cdot A^{-1} \cdot I$$

donde las matrices A, C e I son las mismas que las definidas para $Y^*_{T-1}$.

Haciendo

•) $D_{T-2} = - \dfrac{1}{2 \cdot \gamma_{T-1}} \cdot A^{-1} \cdot C$

$D_{T-2} = (d_{iT-2}) \qquad i=1,2,\ldots,N-1$

•) $G = A^{-1} \cdot I$

$G = (g_i) \qquad i=1,2,\ldots,N-1$

obtenemos que, para cualquier activo i (i=1,2,...,N-1), la cuantía óptima que debe invertirse es

$$Y^*_{iT-2} = d_{iT-2} \cdot (\beta_{T-1} + 2 \cdot \gamma_{T-1} \cdot W_{T-2} \cdot \varepsilon_N) + g_i \cdot W_{T-2} \cdot V_N \qquad [45]$$

Sustituyendo $Y^*_{iT-2}$ en $E[f_{T-1}(\tilde{W}_{T-1})]$ se obtiene el valor máximo de esta función que, siguiendo un procedimiento análogo al utilizado para hallar el valor máximo de $E[U(\tilde{W}_T)]$ en [43], es:

$$\text{Max } E[f_{T-1}(\tilde{W}_{T-1})] = \alpha_{T-2} + \beta_{T-2}\cdot\tilde{W}_{T-2} + \eta_{T-2}\cdot\tilde{W}^2_{T-2} \qquad [46]$$

donde,

•) $\alpha_{T-2} = \alpha_{T-1} + \beta^2_{T-1}\cdot\eta_{1T-2}$

•) $\beta_{T-2} = \beta_{T-1}\cdot[(1 + 4\cdot\gamma_{T-1}\cdot\eta_{1T-2})\cdot\varepsilon_N + V_N\cdot\eta_{2T-2}]$

•) $\gamma_{T-2} = \eta_{T-1}\cdot[(1 + 4\cdot\gamma_{T-1}\cdot\eta_{1T-2})\cdot\varepsilon^2_N + (1 + 2\cdot\eta_{2T-2}\cdot\varepsilon_N + \eta_{3T-2}\cdot V_N)\cdot V_N]$

•) $$\eta_{1T-2} = \left[\sum_{i=1}^{N-1} (\varepsilon_i-\varepsilon_N)\cdot d_{iT-2} + \gamma_{T-1}\cdot\sum_{i=1}^{N-1} [(\varepsilon_i-\varepsilon_N)^2 + V_i + V_N]\cdot d^2_{iT-2} + \right.$$

$$\left. + \gamma_{T-1}\cdot\sum_{i=1}^{N-1}\sum_{\substack{j=1\\j\neq i}}^{N-1} [(\varepsilon_i-\varepsilon_N)\cdot(\varepsilon_j-\varepsilon_N) + V_N]\cdot d_{iT-2}\cdot d_{jT-2}\right]$$

•) $$\eta_{2T-2} = \left[\sum_{i=1}^{N-1} (\varepsilon_i-\varepsilon_N)\cdot g_i - 2\cdot\gamma_{T-1}\cdot\sum_{i=1}^{N-1} d_{iT-2} + \right.$$

$$+ 2\cdot\gamma_{T-1}\cdot\sum_{i=1}^{N-1} [(\varepsilon_i-\varepsilon_N)^2 + V_i + V_N]\cdot d_{iT-2}\cdot g_i +$$

$$\left. + \gamma_{T-1}\cdot\sum_{i=1}^{N-1}\sum_{\substack{j=1\\j\neq i}}^{N-1} [(\varepsilon_i-\varepsilon_N)\cdot(\varepsilon_j-\varepsilon_N) + V_N]\cdot[g_i\cdot d_{jT-2} + g_j\cdot d_{iT-2}]\right]$$

•) $$\eta_{3T-2} = \left[\sum_{i=1}^{N-1} [(\varepsilon_i-\varepsilon_N)^2 + V_i + V_N]\cdot g^2_i - 2\cdot\sum_{i=1}^{N-1} g_i + \right.$$

$$+\sum_{i=1}^{N-1}\sum_{\substack{j=1\\ j\neq i}}^{N-1}[(\varepsilon_i-\varepsilon_N)\cdot(\varepsilon_j-\varepsilon_N)+V_N]\cdot g_i\cdot g_j\Bigg]$$

Como $f_{T-2}(\tilde{W}_{T-2}) = \text{Max}\ E[f_{T-1}(\tilde{W}_{T-1})]$, en el momento T-3 debe resolverse el problema

$$\left.\begin{array}{l} \max\limits_{Y_{iT-3}} \ E[f_{T-2}(\tilde{W}_{T-2})] \\ \text{sujeto a} \\ \tilde{W}_{T-2} = W_{T-3}\cdot\tilde{r}_{NT-2} + \sum_{i=1}^{N-1} Y_{iT-3}\cdot(\tilde{r}_{iT-2} - \tilde{r}_{NT-2}) \end{array}\right\}$$

y, al ser la estructura de $f_{T-2}(\tilde{W}_{T-2})$ igual a la de $f_{T-1}(\tilde{W}_{T-1})$, se **obtendrá para cada activo i (i=1,2,...,N-1) la solución:**

$$Y^{*}_{iT-3} = d_{iT-3}\cdot(\beta_{T-2} + 2\cdot\gamma_{T-2}\cdot W_{T-3}\cdot\varepsilon_N) + g_i\cdot W_{T-3}\cdot V_N \qquad [47]$$

donde

•) $D_{T-3} = -\dfrac{1}{2\cdot\gamma_{T-3}}\cdot A^{-1}\cdot C$

$D_{T-3} = (d_{iT-3}) \qquad i=1,2,\ldots,N-1$

y las demás matrices son las definidas anteriormente.

En general, **para cualquier activo** i (i=1,2,...,N-1) y **cualquier punto decisorio t (t=0,1,2,...,T-1) pueden deducirse las siguientes expresiones:**

$$Y_t^* = (\beta_{t+1} + 2\cdot\gamma_{t+1}\cdot W_t\cdot\varepsilon_N)\cdot D_t + W_t\cdot V_N\cdot G \qquad [48]$$

donde

•) $\beta_{t+1} = \beta_T\cdot\prod_{k=t+1}^{T-1}[(1 + 4\cdot\gamma_{k+1}\cdot\eta_{1k})\cdot\varepsilon_N + V_N\cdot\eta_{2k}]$

•) $\gamma_{t+1} = \gamma_T\cdot\prod_{k=t+1}^{T-1}[(1+4\cdot\gamma_{k+1}\cdot\eta_{1k})\cdot\varepsilon_N^2 + (1+2\cdot\eta_{2k}\cdot\varepsilon_N+\eta_{3k}\cdot V_N)\cdot V_N]$

•) $D_t = -\dfrac{1}{2\cdot\gamma_{t+1}}\cdot A^{-1}\cdot C$

$D_t = (d_{it}) \qquad i=1,2,\dots,N-1$

•) $A = (a_{ij}) \qquad i=1,2,\dots,N-1;\ j=1,2,\dots,N-1$

$a_{ij} = (\varepsilon_i - \varepsilon_N)^2 + V_i + V_N \qquad i=j$

$a_{ij} = (\varepsilon_i - \varepsilon_N)\cdot(\varepsilon_j - \varepsilon_N) + V_N \qquad i\neq j$

•) $C = (c_i) \qquad i=1,2,\dots,N-1$

$c_i = (\varepsilon_i - \varepsilon_N)$

•) $G = A^{-1}\cdot I$

$G = (g_i) \qquad i=1,2,\dots,N-1$

•) $I = (1)$ matriz de orden $(N-1,1)$

•) $\eta_{1t} = \left[\sum_{i=1}^{N-1}(\varepsilon_i-\varepsilon_N)\cdot d_{it} + \gamma_{t+1}\cdot\sum_{i=1}^{N-1}[(\varepsilon_i-\varepsilon_N)^2+V_i+V_N]\cdot d_{it}^2 + \right.$

$$+ \gamma_{t+1} \cdot \sum_{i=1}^{N-1} \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^{N-1} [(\varepsilon_i - \varepsilon_N) \cdot (\varepsilon_j - \varepsilon_N) + V_N] \cdot d_{it} \cdot d_{jt} \Bigg]$$

$$\cdot) \ \eta_{2t} = \Bigg[ \sum_{i=1}^{N-1} (\varepsilon_i - \varepsilon_N) \cdot g_i - 2 \cdot \gamma_{t+1} \cdot \sum_{i=1}^{N-1} d_{it} +$$

$$+ 2 \cdot \gamma_{t+1} \cdot \sum_{i=1}^{N-1} [(\varepsilon_i - \varepsilon_N)^2 + V_i + V_N] \cdot d_{it} \cdot g_i +$$

$$+ \gamma_{t+1} \cdot \sum_{i=1}^{N-1} \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^{N-1} [(\varepsilon_i - \varepsilon_N) \cdot (\varepsilon_j - \varepsilon_N) + V_N] \cdot [g_i \cdot d_{jt} + g_j \cdot d_{it}] \Bigg]$$

$$\cdot) \ \eta_{3t} = \Bigg[ \sum_{i=1}^{N-1} [(\varepsilon_i - \varepsilon_N)^2 + V_i + V_N] \cdot g_i^2 - 2 \cdot \sum_{i=1}^{N-1} g_i +$$

$$+ \cdot \sum_{i=1}^{N-1} \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^{N-1} [(\varepsilon_i - \varepsilon_N) \cdot (\varepsilon_j - \varepsilon_N) + V_N] \cdot g_i \cdot g_j \Bigg] = \eta_3$$

Además se cumple que

$$f_t(\tilde{W}_t) = \alpha_t + \beta_t \cdot \tilde{W}_t + \gamma_t \cdot \tilde{W}_t^2$$

De esta última expresión se deduce que, en este caso, **no es posible sustituir la función de utilidad "derivada" por la función de utilidad original** puesto que la primera no puede expresarse como combinación lineal de la segunda y ello implica que el orden de preferencias para cada función es distinto.

### *5.5.3.1. Caso particular: N = 2*

De acuerdo con el estudio realizado para el caso general de N títulos, la cuantía que hay que invertir en el título i=1 en el momento T-1 si se consideran únicamente dos títulos (N=2) es

$$Y^{*}_{1T-1} = d_{1T-1}\cdot(\beta_T + 2\cdot\gamma_T\cdot W_{T-1}\cdot\varepsilon_2) + g_1\cdot W_{T-1}\cdot V_2$$

donde

•) $d_{1T-1} = -\dfrac{1}{2\cdot\gamma_T}\cdot\dfrac{c_1}{a_{11}} = -\dfrac{\varepsilon_1 - \varepsilon_2}{2\cdot\gamma_T\cdot[(\varepsilon_1 - \varepsilon_2)^2 + V_1 + V_2]}$

•) $g_1 = \dfrac{1}{a_{11}} = \dfrac{1}{[(\varepsilon_1 - \varepsilon_2)^2 + V_1 + V_2]}$

Así, se obtiene que

$$Y^{*}_{1T-1} =$$

$$= -\frac{(\varepsilon_1 - \varepsilon_2)\cdot(\beta_T+2\cdot\gamma_T\cdot W_{T-1}\cdot\varepsilon_2)}{2\cdot\gamma_T\cdot[(\varepsilon_1 - \varepsilon_2)^2 + V_1 + V_2]} + \frac{W_{T-1}\cdot V_2}{[(\varepsilon_1 - \varepsilon_2)^2 + V_1 + V_2]} =$$

$$= -\frac{\beta_T\cdot(\varepsilon_1 - \varepsilon_2) + 2\cdot\gamma_T\cdot[\varepsilon_2\cdot(\varepsilon_1 - \varepsilon_2) - V_2]\cdot W_{T-1}}{2\cdot\gamma_T\cdot[(\varepsilon_1 - \varepsilon_2)^2 + V_1 + V_2]}$$

En el supuesto que $\alpha=0$, $\beta_T=1$ y $\gamma_T=-\lambda$ y teniendo en cuenta que $\varepsilon_i = 1 + E_i$ (i=1,2) la expresión anterior se convierte en

$$Y^{*}_{1T-1} = \frac{(E_1-E_2) - 2\cdot\lambda\cdot[(1+E_2)\cdot(E_1-E_2)-V_2]\cdot W_{T-1}}{2\cdot\lambda\cdot[(E_1-E_2)^2 + V_1+V_2]}$$

que es el resultado que encuentra **Mossin** para este caso concreto[240].

La *función* de utilidad "derivada" para $\tilde{W}_{T-1}$, tal como se dedujo para el caso de N títulos, es

$$f_{T-1}(\tilde{W}_{T-1}) = \alpha_{T-1} + \beta_{T-1}\cdot\tilde{W}_{T-1} + \gamma_{T-1}\cdot\tilde{W}^2_{T-1}$$

donde

•) $\alpha_{T-1} = \alpha_T + \beta^2_T\cdot\eta_{1T-1}$

•) $\beta_{T-1} = \beta_T\cdot[(1 + 4\cdot\gamma_T\cdot\eta_{1T-1})\cdot\varepsilon_2 + V_2\cdot\eta_{2T-1}]$

•) $\gamma_{T-1} = \gamma_T\cdot[(1 + 4\cdot\gamma_T\cdot\eta_{1T-1})\cdot\varepsilon^2_2 + (1 + 2\cdot\eta_{2T-1}\cdot\varepsilon_2 + \eta_{3T-1}\cdot V_2)\cdot V_2]$

Si tenemos en cuenta que

•) $\eta_{1T-1} = \left[(\varepsilon_1-\varepsilon_2)\cdot d_{1T-1} + \gamma_T\cdot[(\varepsilon_1-\varepsilon_2)^2+V_1+V_2]\cdot d^2_{1t}\right] =$

$$= - \frac{(\varepsilon_1-\varepsilon_2)^2}{4\cdot\gamma_T\cdot[(\varepsilon_1-\varepsilon_2)^2+V_1+V_2]}$$

•) $\eta_{2T-1} = \left[(\varepsilon_1-\varepsilon_2)\cdot g_1 - 2\cdot\gamma_T\cdot d_{1T-1} + 2\cdot\gamma_T\cdot[(\varepsilon_1-\varepsilon_2)^2 + V_1 + V_2]\cdot d_{1t}\cdot g_1\right] =$

240 **J.MOSSIN**, op. cit., 1968, pp.219-220.

$$= \frac{(\varepsilon_1-\varepsilon_2)}{[(\varepsilon_1-\varepsilon_2)^2+V_1+V_2]}$$

$$\bullet)\ \eta_{3T-1} = \left[[(\varepsilon_1-\varepsilon_2)^2+V_1+V_2]\cdot g_1^2 - 2\cdot g_1\right] = -\frac{1}{[(\varepsilon_1-\varepsilon_2)^2+V_1+V_2]}$$

entonces, los parámetros de la función $f_{T-1}(\tilde{W}_{T-1})$ son:

$$\bullet)\ \alpha_{T-1} = \alpha_T - \frac{\beta_T^2\cdot(\varepsilon_1-\varepsilon_2)^2}{4\cdot\gamma_T\cdot[(\varepsilon_1-\varepsilon_2)^2+V_1+V_2]}$$

$$\bullet)\ \beta_{T-1} = \beta_T\cdot\frac{V_1\cdot\varepsilon_2+V_2\cdot\varepsilon_1}{[(\varepsilon_1-\varepsilon_2)^2+V_1+V_2]}$$

$$\bullet)\ \gamma_{T-1} = \gamma_T\cdot\frac{V_1\cdot\varepsilon_i^2+V_2\cdot\varepsilon_1^2+V_1\cdot V_2}{[(\varepsilon_1-\varepsilon_2)^2+V_1+V_2]}$$

En defintiva, la función $f_{T-1}(\tilde{W}_{T-1})$ es

$$f_{T-1}(\tilde{W}_{T-1}) = \alpha_T - \frac{\beta_T^2\cdot(\varepsilon_1-\varepsilon_2)^2}{4\cdot\gamma_T\cdot[(\varepsilon_1-\varepsilon_2)^2+V_1+V_2]} +$$

$$+ \beta_T\cdot\frac{V_1\cdot\varepsilon_2+V_2\cdot\varepsilon_1}{[(\varepsilon_1-\varepsilon_2)^2+V_1+V_2]}\cdot\tilde{W}_{T-1} + \gamma_T\cdot\frac{V_1\cdot\varepsilon_i^2+V_2\cdot\varepsilon_1^2+V_1\cdot V_2}{[(\varepsilon_1-\varepsilon_2)^2+V_1+V_2]}\cdot\tilde{W}_{T-1}^2 =$$

$$= \alpha_T - \frac{\beta_T^2\cdot(\varepsilon_1-\varepsilon_2)^2}{4\cdot\gamma_T\cdot[(\varepsilon_1-\varepsilon_2)^2+V_1+V_2]} +$$

$$+ \beta_T\cdot\frac{V_1\cdot\varepsilon_2+V_2\cdot\varepsilon_1}{[(\varepsilon_1-\varepsilon_2)^2+V_1+V_2]}\cdot\left[\tilde{W}_{T-1} + \frac{\gamma_T\cdot(V_1\cdot\varepsilon_i^2+V_2\cdot\varepsilon_1^2+V_1\cdot V_2)}{\beta_T\cdot(V_1\cdot\varepsilon_2+V_2\cdot\varepsilon_1)}\cdot\tilde{W}_{T-1}^2\right]$$

Si se considera que $\alpha_T=0$, $\beta_T=1$ y $\gamma_T=-1$ y se tiene en cuenta que $\varepsilon_i = 1 + E_i$ $(i=1,2)$, la función de utilidad "derivada" para $\tilde{W}_{T-1}$ es:

$$f_{T-1}(\tilde{W}_{T-1}) = \frac{(\varepsilon_1-\varepsilon_2)^2}{4\cdot\lambda\cdot[(\varepsilon_1-\varepsilon_2)^2+V_1+V_2]} +$$

$$+ \frac{V_1\cdot\varepsilon_2+V_2\cdot\varepsilon_1}{[(\varepsilon_1-\varepsilon_2)^2+V_1+V_2]}\cdot\left[\tilde{W}_{T-1} - \lambda\cdot\frac{(V_1\cdot\varepsilon_i^2+V_2\cdot\varepsilon_1^2+V_1\cdot V_2)}{(V_1\cdot\varepsilon_2+V_2\cdot\varepsilon_1)}\cdot\tilde{W}_{T-1}^2\right]$$

En este caso es suficiente considerar la expresión

$$h_{T-1}(\tilde{W}_{T-1}) = \tilde{W}_{T-1} - \lambda\cdot\frac{(V_1\cdot\varepsilon_i^2+V_2\cdot\varepsilon_1^2+V_1\cdot V_2)}{(V_1\cdot\varepsilon_2+V_2\cdot\varepsilon_1)}\cdot\tilde{W}_{T-1}^2$$

para hallar la cartera óptima en T-2 puesto que $f_{T-1}(\tilde{W}_{T-1})$ es una transformación lineal de $h_{T-1}(\tilde{W}_{T-1})$. Se puede tomar $h_{T-1}(\tilde{W}_{T-1})$ como la función de utilidad "derivada" para $\tilde{W}_{T-1}$ y aunque es cuadrática como la original $[U(\tilde{W}_T) = \tilde{W}_T - \lambda\cdot\tilde{W}_T^2]$ el coeficiente de $\tilde{W}_{T-1}^2$ $(\lambda')$ es distinto[241]

$$\lambda' = \lambda\cdot\frac{(V_1\cdot\varepsilon_i^2+V_2\cdot\varepsilon_1^2+V_1\cdot V_2)}{(V_1\cdot\varepsilon_2+V_2\cdot\varepsilon_1)}$$

Este resultado es el que **impide que la política miope sea óptima** puesto que $U(\tilde{W}_{T-1})$ y $h_{T-1}(\tilde{W}_{T-1})$ no proporciona el mismo orden de preferencias.

---

[241] Este resultado coincide, naturalmente, con el que aporta **Mossin** para el caso de que la cartera esté formada por dos títulos arriesgados. **J.MOSSIN**, op. cit., 1968, p.223.

### *5.5.3.2. Posibilidad de prestar y tomar prestado*

La hipótesis sobre la imposiblidad de prestar o tomar dinero prestado que se ha utilizado para el caso general en que se considera que la cartera está formada por N títulos arriesgados se va a eliminar en este apartado para poder analizar cuál es su efecto sobre la política de revisión de cartera.

Si se considera que el número de títulos que forman la cartera es N y que el inversor tiene la posibilidad de prestar o tomar dinero en préstamo, la relación entre la riqueza en dos momentos sucesivos (t y t+1) es, simplemente,

$$\tilde{W}_{t+1} = W_t + \sum_{i=1}^{N} Y_{it} \cdot \tilde{r}_{it+1}$$

El primero de los T problemas que deberemos resolver si aplicamos la P.D. es:

$$\left.\begin{array}{l} \max\limits_{Y_{iT-1}} E[U(\tilde{W}_T)] \\ \text{sujeto a} \\ \tilde{W}_T = W_{T-1} + \displaystyle\sum_{i=1}^{N} Y_{iT-1} \cdot \tilde{r}_{iT} \end{array}\right\}$$

donde la función de utilidad esperada, hallada del mismo modo que para el caso general es

$$E[U(\tilde{W}_T)] = \alpha + \beta \cdot \left[ W_{T-1} + \sum_{i=1}^{N} Y_{iT-1} \cdot E_i \right] +$$

$$+\gamma\cdot\left[W_{T-1}^2+\sum_{i=1}^{N} Y_{iT-1}^2\cdot(E_i^2+V_i)+\sum_{i=1}^{N}\sum_{\substack{j=1\\ j\neq i}}^{N} Y_{iT-1}\cdot Y_{jT-1}\cdot E_i\cdot E_j+2\cdot W_{T-1}\cdot\sum_{i=1}^{N} Y_{iT-1}\cdot E_i\right]$$

Para que esta función tenga un máximo se precisa que $\forall i, i=1,2..N$

$$\frac{dE[U(\tilde{W}_T)]}{dY_{iT-1}} =$$

$$= \beta\cdot E_i + \gamma\cdot\left[2\cdot Y_{iT-1}\cdot(E_i^2 + V_i) + 2\cdot\sum_{\substack{j=1\\ j\neq i}}^{N} Y_{jT-1}\cdot E_i\cdot E_j + 2\cdot W_{T-1}\cdot E_i\right] = 0$$

Matricialmente, el sistema de ecuaciones resultante es

$$A\cdot Y_{T-1}^{*} = -\frac{1}{2\cdot\gamma}\cdot(\beta + 2\cdot\gamma\cdot W_{T-1})\cdot C$$

donde

•) $A_t = A = (a_{ij}) \quad i=1,2,\ldots,N;\ j=1,2,\ldots,N;\ t=0,1,2,\ldots,T-1$

$$a_{ij} = E_i^2 + V_i \qquad i=j$$
$$a_{ij} = E_i\cdot E_j \qquad i\neq j$$

•) $Y_{T-1}^{*} = (Y_{iT-1}^{*}) \quad i=1,2,\ldots,N$

•) $C_t = C = (c_{it}) \quad i=1,2,\ldots,N;\ t=0,1,2,\ldots,T-1$

$$c_i = E_i$$

En definitiva, la cuantía óptima que hay que invertir en cada título i (i=1,2,...,N) es

$$Y^{*}_{T-1} = (\beta + 2\cdot\gamma\cdot W_{T-1})\cdot D_T$$

o bien

$$Y^{*}_{iT-1} = d_{iT}\cdot(\beta + 2\cdot\gamma\cdot W_{T-1})$$

donde

•) $D_T = -\frac{1}{2\cdot\gamma}\cdot A^{-1}\cdot C$

$D_T = (d_i) \qquad i=1,2,\ldots,N$

Una vez obtenida la solución para el primer problema, el siguiente (planteado en el momento T-2) consiste en

$$\left.\begin{array}{l} \underset{Y_{iT-2}}{\text{Max}}\ E[f_{T-1}(\tilde{W}_{T-1})] \\ \text{sujeto a} \\ \tilde{W}_{T-1} = W_{T-2} + \sum_{i=1}^{N} Y_{iT-2}\cdot\tilde{r}_{iT-1} \end{array}\right\}$$

donde

$$f_{T-1}(\tilde{W}_{T-1}) = \text{Max}\ E[U(\tilde{W}_T)] =$$

$$= \alpha + \beta\cdot\left[\tilde{W}_{T-1} + (\beta + 2\cdot\gamma\cdot\tilde{W}_{T-1})\cdot\sum_{i=1}^{N} d_i\cdot E_i\right] +$$

$$+ \gamma\cdot\left[\tilde{W}^2_{T-1} + (\beta + 2\cdot\gamma\cdot\tilde{W}_{T-1})^2\cdot\sum_{i=1}^{N} d_i^2\cdot(E_i^2 + V_i) + \right.$$

$$\left. +(\beta + 2\cdot\gamma\cdot\tilde{W}_{T-1})^2\cdot\sum_{i=1}^{N}\sum_{\substack{j=1\\ j\neq i}}^{N} d_i\cdot d_j\cdot E_i\cdot E_j + 2\cdot\tilde{W}_{T-1}\cdot(\beta + 2\cdot\gamma\cdot\tilde{W}_{T-1})\cdot\sum_{i=1}^{N} d_{i1}\cdot E_i\right] =$$

$$= (\alpha+\beta\cdot\tilde{W}_{T-1}+\gamma\cdot\tilde{W}^2_{T-1})+(\beta+2\cdot\gamma\cdot\tilde{W}_{T-1})^2\cdot\left\{\sum_{i=1}^{N} d_i\cdot E_i+\gamma\cdot\left[\sum_{i=1}^{N} d_i\cdot E_i\right]^2+\gamma\cdot\sum_{i=1}^{N} d_i\cdot V_i\right\}$$

Haciendo

$$\eta = \sum_{i=1}^{N} d_i\cdot E_i+\gamma\cdot\left[\sum_{i=1}^{N} d_i\cdot E_i\right]^2+\gamma\cdot\sum_{i=1}^{N} d_i\cdot V_i$$

la función $f_{T-1}(\tilde{W}_{T-1})$ es

$$f_{T-1}(\tilde{W}_{T-1}) = (\alpha+\beta^2\cdot\eta) + \beta\cdot(1+4\cdot\gamma\cdot\eta)\cdot\tilde{W}_{T-1} + \gamma\cdot(1+4\cdot\gamma\cdot\eta)\cdot\tilde{W}^2_{T-1}$$

Por el mismo razonamiento realizado en el apartado **5.5.2.2.** donde se consideró la existencia de un título sin riesgo, **la política miope es la óptima** puesto que en general se cumple que

$$f_k(\tilde{W}_k) \sim U(\tilde{W}_k)$$

Por tanto, en este caso, no es necesario buscar la función de utilidad "derivada" para cada periodo sino que es suficiente maximizar la función de utilidad esperada original correspondiente al periodo considerado.

En general, la cuantía invertida en cada título i $(i=1,2,\ldots,N)$ y en cada momento $t(t=0,1\ldots,T-1)$ es

$$Y_i^* = d_i\cdot(\beta + 2\cdot\gamma\cdot W_{T-1})$$

## 5.6. *APLICACION DE LA PROGRAMACION DINAMICA A FUNCIONES DE UTILIDAD QUE CUMPLEN LA RELACION* $-\dfrac{U'(\tilde{W}_T)}{U''(\tilde{W}_T)} = \mu + \lambda\cdot\tilde{W}_T$

### 5.6.1. *Introducción*

En el apartado **5.5.** se ha analizado la revisión de la cartera para el caso multiperiódico aceptando que la función de utilidad del inversor fuera cuadrática; sin embargo, ésta no es la única función admisible. En el presente epígrafe efectuaremos un estudio paralelo al realizado para la función cuadrática aplicado a otros dos tipos de funciones de utilidad de la riqueza final (en T) que presentan una característica común que permite un estudio generalizado de ambas funciones. Estas son:

•) Función de utilidad logarítimica

$$U(\tilde{W}_T) = \ln\,(\mu + \tilde{W}_T)$$

•) Función de utilidad potencial

$$U(\tilde{W}_T) = \frac{1}{\lambda - 1}\cdot(\mu + \lambda\cdot\tilde{W}_T)^{1-(1/\lambda)}$$

Para estas funciones, los valores de $\mu$ y $\lambda$ son los necesarios para garantizar el cumplimiento de la hipótesis **H.1.** del apartado **5.3.** que hace referencia a la positividad de la primera derivada de la función de utilidad y a la negatividad de su segunda derivada.

La característica común a estas dos funciones que permite un tratamiento unificado para los dos casos es:

$$-\frac{U'(\tilde{W}_T)}{U''(\tilde{W}_T)} = \mu + \lambda\cdot\tilde{W}_T \qquad \text{si } \lambda\neq 0 \text{ y } \mu\neq 0$$

Para la función de utilidad logarítmica, $\lambda$ toma el valor 1.

El cociente anterior es el inverso del coeficiente de aversión absoluta al riesgo de **Arrow-Pratt.** En el caso de la función logarítmica, dicho coeficiente es decreciente siempre, mientras que para la función de utilidad potencial se precisa que $\lambda > 0$.

Se demuestra también que las únicas funciones que cumplen la anterior ecuación diferencial son la logarítmica y la potencial:

Si hacemos $U'(\tilde{W}_T) = V(\tilde{W}_T)$, la ecuación diferencial es

$$-\frac{V(\tilde{W}_T)}{V'(\tilde{W}_T)} = \mu + \lambda\cdot\tilde{W}_T \Longrightarrow V(\tilde{W}_T) = -(\mu + \lambda\cdot\tilde{W}_T)\cdot\frac{dV(\tilde{W}_T)}{d\tilde{W}_T} \Longrightarrow$$

$$\Longrightarrow \frac{d\tilde{W}_T}{\mu + \lambda\cdot\tilde{W}_T} = \frac{dV(\tilde{W}_T)}{V(\tilde{W}_T)}$$

•) Si $\lambda\neq 0$ y $\lambda\neq 1$, la solución a esta ecuación es

$$\frac{1}{\lambda}\cdot \ln\,(\mu + \lambda\cdot\tilde{W}_T) = -\ln V(\tilde{W}_T) + C \Longrightarrow$$

$$\Longrightarrow (\mu+\lambda\cdot\tilde{W}_T)^{1/\lambda} = K\cdot V(\tilde{W}_T)^{-1} \Longrightarrow V(\tilde{W}_T) = K\cdot(\mu+\lambda\cdot\tilde{W}_T)^{-1/\lambda} \Longrightarrow$$

$$\Longrightarrow U(\tilde{W}_T) = K\cdot\frac{1}{\lambda - 1}\cdot(\mu + \lambda\cdot\tilde{W}_T)^{1-(1/\lambda)} + K'$$

Como k y K' no influyen en la ordenación de las preferencias, tomaremos como función de utilidad

$$U(\tilde{W}_T) = \frac{1}{\lambda - 1}\cdot(\mu + \lambda\cdot\tilde{W}_T)^{1-(1/\lambda)}$$

•) Si $\lambda=1$, la solución a la ecuación diferencial es

$$\ln\,(\mu + \tilde{W}_T) = -\ln V(\tilde{W}_T) + C \Longrightarrow$$

$$\Longrightarrow (\mu + \tilde{W}_T) = K\cdot V(\tilde{W}_T)^{-1} \Longrightarrow V(\tilde{W}_T) = K\cdot(\mu + \tilde{W}_T)^{-1} \Longrightarrow$$

$$\Longrightarrow U(\tilde{W}_T) = K\cdot\ln\,(\mu + \tilde{W}_T) + K'$$

Como k y K' no influyen en la ordenación de las preferencias, tomaremos como función de utilidad

$$U(\tilde{W}_T) = \ln\,(\mu + \tilde{W}_T)$$

En el caso que $\lambda=0$, la función de utilidad es

$$U(\tilde{W}_T) = -\mu\cdot e^{-\tilde{W}_T/\mu}$$

pero este caso no puede tratarse del mismo modo que las otras dos funciones de utilidad, como se justificará posteriormente.

·) En el caso que $\mu=0$, la solución a la ecuación diferencial es:

$$*)\ U(\tilde{W}_T) = \frac{1}{\lambda - 1}\cdot\tilde{W}_T^{\,1-(1/\lambda)} \qquad \text{si } \lambda\neq 0 \text{ y } \lambda\neq 1$$

$$*)\ U(\tilde{W}_T) = \ln \tilde{W}_T \qquad \text{si } \lambda=1$$

### *5.6.2. Consideración de N activos arriesgados y un activo sin riesgo*

A las hipótesis señaladas en el epígrafe 5.3. debemos añadir ahora:

**H.10.** Se considera la existencia de N títulos arriesgados y un título sin riesgo.

**H.11.** La función de utilidad de la riqueza final (en T) cumple la propiedad

$$-\frac{U'(\tilde{W}_T)}{U''(\tilde{W}_T)} = \mu + \lambda\cdot\tilde{W}_T \qquad \lambda\neq 0 \tag{49}$$

La presencia de un título sin riesgo junto con la imposibilidad de prestar dinero o tomarlo prestado, permiten definir la siguiente relación:

$$\tilde{W}_{t+1} = W_t \cdot r_{ot} + \sum_{i=1}^{N} Y_{it} \cdot (\tilde{r}_{it+1} - r_{ot})$$

que fue deducida en el apartado **5.5.2.**

El inversor que quiere determinar aquélla secuencia de carteras que maximizará la utilidad esperada de la riqueza disponible en T (momento en que liquida definitivamente la cartera), debe empezar determinando la composición de la cartera que será mantenida en el último periodo. Es decir, **en el momento T-1, el inversor se enfrenta al problema:**

$$\left.\begin{array}{l} \max\limits_{Y_{iT-1}} E[U(\tilde{W}_T)] \\ \text{sujeto a} \\ \tilde{W}_T = W_{T-1} \cdot r_{oT-1} + \sum\limits_{i=1}^{N} Y_{iT-1} \cdot (\tilde{r}_{iT} - r_{oT-1}) \end{array}\right\}$$

Introduciendo la restricción en la función objetivo, la condición necesaria de máximo es

$$\frac{dE[U(\tilde{W}_T)]}{dY_{iT-1}} = 0 \qquad \forall i,\ i=1,2,\ldots,N$$

Cuando la función de utilidad era cuadrática resultaba posible encontrar la función de utilidad esperada gracias a las propiedades del operador esperanza, tal como se ha puesto de manifiesto en el apartado 5.5.; sin embargo, cuando la función es logarítmica o potencial no es posible determinar exactamente cuál es la función de utilidad esperada, por lo que deberemos tener en cuenta la propiedad que ambas funciones cumplen.

Así, para el caso que estamos tratando y gracias a la propiedad [49] la derivada de $E[U(\tilde{W}_T)]$ con respecto a $Y_{iT-1}$ puede expresarse como

$$\frac{dE[U(\tilde{W}_T)]}{dY_{iT-1}} =$$

$$= E\left[U'(\tilde{W}_T)\cdot\frac{d\tilde{W}_T}{dY_{iT-1}}\right] = E\left[-\,U''(\tilde{W}_T)\cdot(\mu + \lambda\cdot\tilde{W}_T)\cdot(\tilde{r}_{iT} - r_{0T-1})\right] \qquad [50]$$

donde

$$U''(\tilde{W}_T)\cdot(\mu + \lambda\cdot\tilde{W}_T)\cdot(\tilde{r}_{iT} - r_{0T-1}) =$$

$$= U''(\tilde{W}_T)\cdot\left\{\mu + \lambda\cdot\left[W_{T-1}\cdot r_{0T-1} + \sum_{j=1}^{N} Y_{jT-1}\cdot(\tilde{r}_{jT}-r_{0T-1})\right]\right\}\cdot(\tilde{r}_{iT}-r_{0T-1}) =$$

$$= (\mu + \lambda\cdot r_{0T-1}\cdot W_{T-1})\cdot U''(\tilde{W}_T)\cdot(\tilde{r}_{iT}-r_{0T-1}) + \lambda\cdot U''(\tilde{W}_T)\cdot$$

$$\cdot\left[Y_{iT-1}(\tilde{r}_{iT} - r_{0T-1})^2 + \sum_{\substack{j=1\\ j\neq i}}^{N} Y_{jT-1}\cdot(\tilde{r}_{iT}-r_{0T-1})\cdot(\tilde{r}_{jT} - r_{0T-1})\right] \qquad [51]$$

Sustituyendo [51] en [50] se obtiene

$$\frac{dE[U(\tilde{W}_T)]}{dY_{iT-1}} =$$

$$= - (\mu + \lambda \cdot a_{0T-1} \cdot W_{T-1} \cdot) \cdot E[U''(\tilde{W}_T) \cdot (\tilde{r}_{iT} - a_{0T-1})] -$$

$$- \lambda \cdot \left[ Y_{iT-1} \cdot E[U''(\tilde{W}_T) \cdot (\tilde{r}_{iT} - a_{0T-1})^2] + \right.$$

$$\left. + \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^{N} Y_{jT-1} \cdot E[U''(\tilde{W}_T) \cdot (\tilde{r}_{iT} - a_{0T-1}) \cdot (\tilde{r}_{jT} - a_{0T-1}) \right] \qquad [52]$$

Si la derivada anterior ha de anularse deberá cumplirse que

$$Y_{iT-1} \cdot E[U''(\tilde{W}_T) \cdot (\tilde{r}_{iT} - a_{0T-1})^2] +$$

$$+ \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^{N} Y_{jT-1} \cdot E[U''(\tilde{W}_T) \cdot (\tilde{r}_{iT} - a_{0T-1}) \cdot (\tilde{r}_{jT} - a_{0T-1})] =$$

$$= - \frac{1}{\lambda} \cdot (\mu + \lambda \cdot a_{0T-1} \cdot W_{T-1}) \cdot E[U''(\tilde{W}_T) \cdot (\tilde{r}_{iT} - a_{0T-1})]$$

Matricialmente, el sistema de ecuaciones resultante es

$$A_{T-1} \cdot Y^*_{T-1} = - \frac{1}{\lambda} \cdot (\mu + \lambda \cdot a_{0T-1} \cdot W_{T-1}) \cdot C_{T-1}$$

*donde*

$\cdot)\ A_{T-1} = (a_{ijT-1}) \qquad i=1,2,\ldots,N;\ j=1,2,\ldots,N;$

$$a_{ijT-1} = E[U''(\tilde{W}_T)\cdot(\tilde{r}_{iT}-r_{oT-1})^2] \qquad i=j$$
$$a_{ijT-1} = E[U''(\tilde{W}_T)\cdot(\tilde{r}_{iT}-r_{oT-1})\cdot(\tilde{r}_{jT}-r_{oT-1})] \qquad i\neq j$$

$\cdot)\ Y^*_{T-1} = (Y^*_{iT-1}) \qquad i=1,2,\ldots,N$

$\cdot)\ C_{T-1} = (c_{iT-1}) \qquad i=1,2,\ldots,N$

$$c_{iT-1} = E[U'(\tilde{W}_T)\cdot(\tilde{r}_{iT} - r_{oT-1})]$$

Este sistema de ecuaciones sólo tendrá solución si $\lambda\neq 0$, de ahí que este resultado no sea operativo para la función de utilidad

$$U(\tilde{W}_T) = -\mu\cdot e^{-W_T/\mu}$$

Despejando la matriz de cuantías, se obtiene

$$Y^*_{T-1} = (\mu + \lambda\cdot r_{oT-1}\cdot W_{T-1})\cdot D_{T-1}$$

o bien

$$Y^*_{iT-1} = d_{iT-1}\cdot(\mu + \lambda\cdot r_{oT-1}\cdot W_{T-1}) \qquad [53]$$

donde

$\cdot)\ D_{T-1} = -\dfrac{1}{\lambda}\cdot(A_{T-1})^{-1}\cdot C_{T-1}$

$D_{T-1} = (d_{iT-1}) \qquad i=1,2,\ldots,N$

Una vez resuelto el problema para el último periodo, **el inversor debe proceder a determinar (en el momento T-2) la cartera óptima que deberá mantener durante el penúltimo periodo.** La composición de esta cartera (cuantía invertida en cada título en T-2, $Y_{iT-2}$) se obtiene a partir de la solución al siguiente problema:

$$\left.\begin{array}{l} \displaystyle\max_{Y_{iT-2}} E[f_{T-1}(\tilde{W}_{T-1})] \\ \text{sujeto a} \\ \displaystyle\tilde{W}_{T-1} = W_{T-2}\cdot r_{0T-2} + \sum_{i=1}^{N} Y_{iT-2}(\tilde{r}_{iT-1} - r_{0T-2}) \end{array}\right\}$$

donde

$$f_{T-1}(\tilde{W}_{T-1}) = \max E[U(\tilde{W}_T)] = E[U(\tilde{W}_T^{*})] =$$

$$= E\left\{U\left[\tilde{W}_{T-1}\cdot r_{0T-1} + \sum_{i=1}^{N} Y^{*}_{iT-1}(\tilde{r}_{iT} - r_{0T-1})\right]\right\} =$$

$$= E\left\{U\left[\tilde{W}_{T-1}\cdot r_{0T-1} + (\mu+\lambda\cdot r_{0T-1}\cdot\tilde{W}_{T-1})\cdot\sum_{i=1}^{N} d_{iT-1}\cdot(\tilde{r}_{iT}-r_{0T-1})\right]\right\} =$$

$$= E\left\{U\left[r_{0T-1}\cdot\left[1 + \lambda\cdot\sum_{i=1}^{N} d_{iT-1}\cdot(\tilde{r}_{iT} - r_{0T-1})\right]\cdot\tilde{W}_{T-1} + \right.\right.$$

$$\left.\left. + \mu\cdot\sum_{i=1}^{N} d_{iT-1}\cdot(\tilde{r}_{iT} - r_{0T-1})\right]\right\} \qquad [54]$$

Cuando la función de utilidad es cuadrática puede determinarse exactamente la forma de la función de utilidad "derivada" lo cual no es posible en el caso que nos ocupa. Por dicho motivo no se puede hallar directamente la derivada

$$\frac{dE[f_{T-1}(\tilde{W}_{T-1})]}{dY_{iT-2}}$$

Para solventar este problema deberemos llegar a un tipo de relación entre $f'_{T-1}(\tilde{W}_{T-1})$ y $f''_{T-1}(\tilde{W}_{T-1})$ parecida a la existente entre $U'(\tilde{W}_T)$ y $U''(\tilde{W}_T)$.

•) La primera derivada de $f_{T-1}(\tilde{W}_{T-1})$ es:

$$f'_{T-1}(\tilde{W}_{T-1}) = E\left[U'(\tilde{W}_T^*)\cdot\frac{d\tilde{W}_T^*}{d\tilde{W}_{T-1}}\right] =$$

$$= E\left\{U'(\tilde{W}_T^*)\cdot r_{oT-1}\cdot\left[1 + \lambda\cdot\sum_{i=1}^{N} d_{iT-1}\cdot(\tilde{r}_{iT}-r_{oT-1})\right]\right\} \qquad [55]$$

•) La segunda derivada de $f_{T-1}(\tilde{W}_{T-1})$ es:

$$f''_{T-1}(\tilde{W}_{T-1}) = E\left\{U''(\tilde{W}_T^*)\cdot r_{oT-1}^2\cdot\left[1+ \lambda\cdot\sum_{i=1}^{N} d_{iT-1}\cdot(\tilde{r}_{iT}-r_{oT-1})\right]^2\right\} =$$

$$= E\left\{-\frac{U'(\tilde{W}_T^*)}{\mu+\lambda\cdot\tilde{W}_T^*}\cdot r_{oT-1}^2\cdot\left[1 + \lambda\cdot\sum_{i=1}^{N} d_{iT-1}\cdot(\tilde{r}_{iT}-r_{oT-1})\right]^2\right\} \qquad [56]$$

donde

$$\mu + \lambda\cdot\tilde{W}_T^* =$$

$$= \mu + \lambda \cdot \left[ \tilde{W}_{T-1} \cdot r_{oT-1} + (\mu + \lambda \cdot r_{oT-1} \cdot \tilde{W}_{T-1}) \cdot \sum_{i=1}^{N} d_{iT-1} \cdot (\tilde{r}_{iT} - r_{oT-1}) \right] =$$

$$= (\mu + \lambda \cdot r_{oT-1} \cdot \tilde{W}_{T-1}) \cdot \left[ 1 + \lambda \cdot \sum_{i=1}^{N} d_{iT-1} \cdot (\tilde{r}_{iT} - r_{oT-1}) \right] \qquad [57]$$

Sustituyendo [57] en [56] se obtiene

$$f''_{T-1}(\tilde{W}_{T-1}) =$$

$$= - \frac{r_{oT-1}}{\mu + \lambda \cdot r_{oT-1} \cdot W_{T-1}} \cdot E\left\{ U'(\tilde{W}_T^*) \cdot r_{oT-1} \cdot \left[ 1 + \lambda \cdot \sum_{i=1}^{N} d_{iT-1} \cdot (\tilde{r}_{iT} - r_{oT-1}) \right] \right\} \qquad [58]$$

Una vez definida $f'_{T-1}(\tilde{W}_{T-1})$, [55], y $f''_{T-1}(\tilde{W}_{T-1})$, [58], podemos establecer la siguiente relación entre estas funciones:

$$- \frac{f'_{T-1}(\tilde{W}_{T-1})}{f''_{T-1}(\tilde{W}_{T-1})} = \frac{\mu + \lambda \cdot r_{oT-1} \cdot \tilde{W}_{T-1}}{r_{oT-1}} = \frac{\mu}{r_{oT-1}} + \lambda \cdot \tilde{W}_{T-1} \qquad [59]$$

Teniendo en cuenta esta relación, es posible expresar del siguiente modo la derivada buscada

$$\frac{dE[f_{T-1}(\tilde{W}_{T-1})]}{dY_{iT-2}} = E\left[ f'_{T-1}(\tilde{W}_{T-1}) \cdot \frac{d\tilde{W}_{T-1}}{dY_{iT-2}} \right] =$$

$$= E\left\{ - f''_{T-1}(\tilde{W}_{T-1}) \cdot \left[ \frac{\mu}{r_{oT-1}} + \lambda \cdot \tilde{W}_{T-1} \right] \cdot (\tilde{r}_{iT-1} - r_{oT-2}) \right\} =$$

$$= E\left\{- f''_{T-1}(\tilde{W}_{T-1})\cdot\left[\frac{\mu}{r_{0T-1}} + \lambda\cdot\left[W_{T-2}\cdot r_{0T-2}+\right.\right.\right.$$

$$\left.\left.\left.+\sum_{\substack{j=1\\j\neq i}}^{N} Y_{jT-2}(\tilde{r}_{jT-1} - r_{0T-2})\right]\right]\cdot(\tilde{r}_{iT-1} - r_{0T-2})\right\} =$$

$$= E\left\{- \left[\frac{\mu}{r_{0T-1}} + \lambda\cdot r_{0T-2}\cdot W_{T-2}\right]\cdot f''_{T-1}(\tilde{W}_{T-1})\cdot(\tilde{r}_{iT-1} - r_{0T-2}) -\right.$$

$$- \lambda\cdot\left[Y_{iT-2}\cdot(\tilde{r}_{iT-1} - r_{0T-2})^2 + \sum_{\substack{j=1\\j\neq i}}^{N} Y_{jT-2}\cdot(\tilde{r}_{jT-1} - r_{0T-2})\cdot\right.$$

$$\left.\left.\cdot(\tilde{r}_{iT-1} - r_{0T-2})\right]\cdot f''_{T-1}(\tilde{W}_{T-1})\right\} =$$

$$= - \left[\frac{\mu}{r_{0T-1}} + \lambda\cdot r_{0T-2}\cdot W_{T-2}\right]\cdot E[f''_{T-1}(\tilde{W}_{T-1})\cdot(\tilde{r}_{iT-1} - r_{0T-2})] -$$

$$- \lambda\cdot Y_{iT-2}\cdot E[f''_{T-1}(\tilde{W}_{T-1})\cdot(\tilde{r}_{iT-1} - r_{0T-2})^2] -$$

$$- \lambda\cdot\sum_{\substack{j=1\\j\neq i}}^{N} Y_{jT-2}\cdot E[f''_{T-1}(\tilde{W}_{T-1})\cdot(\tilde{r}_{iT-1} - r_{0T-2})\cdot(\tilde{r}_{jT-1} - r_{0T-2})] \qquad [60]$$

Si la derivada debe anularse para garantizar la existencia de un máximo, deberá cumplirse que

$$Y_{iT-2}\cdot E[f''_{T-1}(\tilde{W}_{T-1})\cdot(\tilde{r}_{iT-1} - r_{oT-2})^2] +$$

$$+ \lambda\cdot\sum_{\substack{j=1\\ j\neq i}}^{N} Y_{jT-2}\cdot E[f''_{T-1}(\tilde{W}_{T-1})\cdot(\tilde{r}_{iT-1} - r_{oT-2})\cdot(\tilde{r}_{jT-1} - r_{oT-2})] =$$

$$= -\frac{1}{\lambda}\cdot\left[\frac{\mu}{r_{oT-1}} + \lambda\cdot r_{oT-2}\cdot W_{T-2}\right]\cdot E[f''_{T-1}(\tilde{W}_{T-1})\cdot(\tilde{r}_{iT-1} - r_{oT-2})]$$

Matricialmente, la solución a este sistema de ecuaciones es

$$Y^*_{T-2} = \left[\frac{\mu}{r_{oT-1}} + \lambda\cdot r_{oT-2}\cdot W_{T-2}\right]\cdot D_{T-2}$$

donde

•) $Y^*_{T-2} = (Y^*_{iT-2})$ $\qquad i=1,2,\ldots,N$

•) $D_{T-2} = -\frac{1}{\lambda}\cdot(A_{T-2})^{-1}\cdot C_{T-2}$

$D_{T-2} = (d_{iT-2})$ $\qquad i=1,2,\ldots,N$

•) $A_{T-2} = (a_{ijT-2})$ $\qquad i=1,2,\ldots,N;\ j=1,2,\ldots,N;$

$$a_{ijT-2} = E[f''_{T-1}(\tilde{W}_{T-1})\cdot(\tilde{r}_{iT-1}-r_{oT-2})^2] \qquad i=j$$

$$a_{ijT-2} = E[f''_{T-1}(\tilde{W}_{T-1})\cdot(\tilde{r}_{iT-1}-r_{oT-2})\cdot(\tilde{r}_{jT-1}-r_{oT-2})] \qquad i\neq j$$

•) $C_{T-2} = (c_{iT-2})$ $\qquad i=1,2,\ldots,N$

$$c_{iT-2} = E[f''_{T-1}(\tilde{W}_{T-1})\cdot(\tilde{r}_{iT-1} - r_{oT-2})]$$

La cuantía óptima que debe invertirse en cada activo i ($i=1,2,...,N$) en el momento T-2 es

$$Y^*_{iT-2} = d_{iT-2}\cdot\left[\frac{\mu}{r_{oT-1}} + \lambda\cdot r_{oT-2}\cdot W_{T-2}\right] \qquad [61]$$

De nuevo, una vez resuelto el problema para el penúltimo periodo, la aplicación de la P.D. supone la determinación de cómo ha de repartirse la riqueza disponible en T-3 con el fin de

$$\left.\begin{array}{l} \max\limits_{Y_{iT-3}} E[f_{T-2}(\tilde{W}_{T-2})] \\ \text{sujeto a} \\ \tilde{W}_{T-2} = W_{T-3}\cdot r_{oT-3} + \sum\limits_{i=1}^{N} Y_{iT-3}\cdot(\tilde{r}_{iT-2} - r_{oT-3}) \end{array}\right\}$$

donde

$$f_{T-2}(\tilde{W}_{T-2}) = \max E[f_{T-1}(\tilde{W}_{T-1})] = E[f_{T-1}(\tilde{W}^*_{T-1})] =$$

$$= E\left\{f_{T-1}\left[\tilde{W}_{T-2}\cdot r_{oT-2} + \sum_{i=1}^{N} Y^*_{iT-2}\cdot(\tilde{r}_{iT-1} - r_{oT-2})\right]\right\} =$$

$$= E\left\{f_{T-1}\left[r_{oT-2}\cdot\left(1 + \lambda\cdot\sum_{i=1}^{N} d_{iT-2}\cdot(\tilde{r}_{iT-1} - r_{oT-2})\right)\cdot\tilde{W}_{T-2} + \right.\right.$$

$$\left.\left. + \frac{\mu}{r_{oT-1}}\cdot\sum_{i=1}^{N} d_{iT-2}\cdot(\tilde{r}_{iT-1} - r_{oT-2})\right]\right\} \qquad [62]$$

Procediendo del mismo modo que para el penúltimo periodo, necesitamos igualar a cero la derivada

$$\frac{dE[f_{T-2}(\tilde{W}_{T-2})]}{dY_{iT-3}}$$

para lo cual deberemos tener en cuenta la relación entre $f'_{T-2}(\tilde{W}_{T-2})$ y $f''_{T-2}(\tilde{W}_{T-2})$.

•) La primera derivada de $f_{T-2}(\tilde{W}_{T-2})$ es:

$$f'_{T-2}(\tilde{W}_{T-2}) = E\left[f'_{T-1}(\tilde{W}^*_{T-1})\cdot\frac{d\tilde{W}^*_{T-1}}{d\tilde{W}_{T-2}}\right] =$$

$$= E\left\{f'_{T-1}(\tilde{W}^*_{T-1})\cdot s_{oT-2}\cdot\left[1+\lambda\cdot\sum_{i=1}^{N} d_{iT-2}\cdot(\tilde{r}_{iT-1}-s_{oT-2})\right]\right\} \qquad [63]$$

•) La segunda derivada de $f_{T-2}(\tilde{W}_{T-2})$ es:

$$f''_{T-2}(\tilde{W}_{T-2}) =$$

$$= E\left\{f''_{T-1}(\tilde{W}^*_{T-1})\cdot s^2_{oT-2}\cdot\left[1+\lambda\cdot\sum_{i=1}^{N} d_{iT-2}\cdot(\tilde{r}_{iT-1}-s_{oT-2})\right]^2\right\} =$$

$$= E\left\{-\frac{f'_{T}(\tilde{W}^*_{T-1})}{\frac{\mu}{s_{oT-1}}+\lambda\cdot\tilde{W}^*_{T-1}}\cdot s^2_{oT-2}\cdot\left[1+\lambda\cdot\sum_{i=1}^{N} d_{iT-2}\cdot(\tilde{r}_{iT-1}-s_{oT-2})\right]^2\right\} \qquad [64]$$

donde

$$\frac{\mu}{r_{oT-1}} + \lambda\cdot\tilde{W}^{*}_{T-1} =$$

$$= \frac{\mu}{r_{oT-1}} + \lambda\cdot\left\{\tilde{W}_{T-2}\cdot r_{oT-2} + \left[\frac{\mu}{r_{oT-1}} + \lambda\cdot r_{oT-2}\cdot\tilde{W}_{T-2}\right]\cdot\right.$$

$$\left. + \sum_{i=1}^{N} d_{iT-2}\cdot(\tilde{r}_{iT-1}-r_{oT-2})\right\} =$$

$$= \left[\frac{\mu}{r_{oT-1}} + \lambda\cdot r_{oT-2}\cdot\tilde{W}_{T-2}\right]\cdot\left[1 + \lambda\cdot\sum_{i=1}^{N} d_{iT-2}\cdot(\tilde{r}_{iT-1}-r_{oT-2})\right] \qquad [65]$$

Sustituyendo [65] en [64] se obtiene

$$f''_{T-2}(\tilde{W}_{T-2}) = -\frac{r_{oT-2}}{\dfrac{\mu}{r_{oT-1}} + \lambda\cdot r_{oT-2}\cdot\tilde{W}_{T-2}}\cdot$$

$$\cdot E\left\{f'_{T-1}(\tilde{W}^{*}_{T-1})\cdot r_{oT-2}\cdot\left[1 + \lambda\cdot\sum_{i=1}^{N} d_{iT-2}\cdot(\tilde{r}_{iT-1}-r_{oT-2})\right]\right\} \qquad [66]$$

El cociente entre $f'_{T-2}(\tilde{W}_{T-2})$ y $f''_{T-2}(\tilde{W}_{T-2})$, en función de las expresiones halladas en [63] y [66], es:

$$\therefore\ -\frac{f'_{T-2}(\tilde{W}_{T-2})}{f''_{T-2}(\tilde{W}_{T-2})} = \frac{\mu}{r_{oT-2}\cdot r_{oT-1}} + \lambda\cdot\tilde{W}_{T-2} \qquad [67]$$

y, por tanto, la derivada deseada se puede expresar del siguiente modo

$$\frac{dE[f_{T-2}(\tilde{W}_{T-2})]}{dY_{iT-3}} = E\left[f'_{T-2}(\tilde{W}_{T-2})\cdot\frac{d\tilde{W}_{T-2}}{dY_{iT-3}}\right] =$$

$$= E\left\{-\ f''_{T-2}(\tilde{W}_{T-2})\cdot\left[\frac{\mu}{r_{oT-2}\cdot r_{oT-1}} + \lambda\cdot\tilde{W}_{T-2}\right]\cdot(\tilde{r}_{iT-2} - r_{oT-3})\right\} \qquad [68]$$

Teniendo en cuenta que

$$f''_{T-2}(\tilde{W}_{T-2})\cdot\left[\frac{\mu}{r_{oT-2}\cdot r_{oT-1}} + \lambda\cdot\tilde{W}_{T-2}\right]\cdot(\tilde{r}_{iT-2} - r_{oT-3}) =$$

$$= f''_{T-2}(\tilde{W}_{T-2})\cdot\left[\frac{\mu}{r_{oT-2}\cdot r_{oT-1}} + \lambda\cdot\left[W_{T-3}\cdot r_{oT-3} +\right.\right.$$

$$\left.\left.+ \sum_{\substack{j=1\\j\neq i}}^{N} Y_{jT-3}\cdot(\tilde{r}_{jT-2} - r_{oT-3})\right]\right]\cdot(\tilde{r}_{iT-2} - r_{oT-3}) =$$

$$= \left[\frac{\mu}{r_{oT-2}\cdot r_{oT-1}} + \lambda\cdot r_{oT-3}\cdot W_{T-3}\right]\cdot f''_{T-2}(\tilde{W}_{T-2})\cdot(\tilde{r}_{iT-2} - r_{oT-3}) +$$

$$+ \lambda\cdot\left[Y_{iT-3}\cdot(\tilde{r}_{iT-2} - r_{oT-3})^2 +\right.$$

$$\left.+ \sum_{\substack{j=1\\j\neq i}}^{N} Y_{jT-3}\cdot(\tilde{r}_{iT-2} - r_{oT-3})\cdot(\tilde{r}_{jT-2} - r_{oT-3})\right]\cdot f''_{T-2}(\tilde{W}_{T-2})$$

la derivada [68] es

$$\frac{dE[f_{T-2}(\tilde{W}_{T-2})]}{dY_{iT-3}} =$$

$$= -\left[\frac{\mu}{r_{oT-2}\cdot r_{oT-1}} + \lambda\cdot r_{oT-3}\cdot W_{T-3}\right]\cdot E[f''_{T-2}(\tilde{W}_{T-2})\cdot(\tilde{r}_{iT-2} - r_{oT-3})] -$$

$$-\lambda\cdot Y_{iT-3}\cdot E[f''_{T-2}(\tilde{W}_{T-2})\cdot(\tilde{r}_{iT-2} - r_{oT-3})^2] -$$

$$-\lambda\cdot\sum_{\substack{j=1\\ j\neq i}}^{N} Y_{jT-3}\cdot E[f''_{T-2}(\tilde{W}_{T-2})\cdot(\tilde{r}_{iT-2} - r_{oT-3})\cdot(\tilde{r}_{jT-2} - r_{oT-3})] \qquad [69]$$

Igualando a cero esta derivada se obtiene, matricialmente:

$$Y^{*}_{T-3} = \left[\frac{\mu}{r_{oT-2}\cdot r_{oT-1}} + \lambda\cdot r_{oT-3}\cdot W_{T-3}\right]\cdot D_{T-3}$$

donde

•) $Y^{*}_{T-3} = (Y^{*}_{iT-3}) \qquad i=1,2,\ldots,N$

•) $D_{T-3} = -\frac{1}{\lambda}\cdot(A_{T-3})^{-1}\cdot C_{T-3}$

$D_{T-3} = (d_{iT-3}) \qquad i=1,2,\ldots,N$

•) $A_{T-3} = (a_{ijT-3}) \qquad i=1,2,\ldots,N;\ j=1,2,\ldots,N$

$$a_{ijT-3} = E[f''_{T-2}(\tilde{W}_{T-2})\cdot(\tilde{r}_{iT-2}-r_{oT-3})^2] \qquad i=j$$

$$a_{ijT-3} = E[f''_{T-2}(\tilde{W}_{T-2})\cdot(\tilde{r}_{iT-2}-r_{oT-3})\cdot(\tilde{r}_{jT-2}-r_{oT-3})] \qquad i\neq j$$

•) $C_{T-3} = (c_{iT-3}) \qquad i=1,2,\dots,N$

$$c_{iT-3} = E[f''_{T-2}(\tilde{W}_{T-2})\cdot(\tilde{r}_{iT-2} - r_{oT-3})]$$

**En T-3 la cuantía óptima que debe invertirse en cada activo i (i=1,2,...,N) es**

$$Y^{*}_{iT-3} = d_{iT-3}\cdot\left[\frac{\mu}{r_{oT-2}\cdot r_{oT-1}} + \lambda\cdot r_{oT-3}\cdot W_{T-3}\right] \qquad [70]$$

Generalizando, la matriz de cuantías en el punto decisorio t (t=0,1,2,...,T-1) es[242]

$$Y^{*}_{t} = \left[\frac{\mu}{\prod_{k=t+1}^{T-1} r_{ok}} + \lambda\cdot r_{ot}\cdot W_{t}\right]\cdot D_{t} \qquad [71]$$

donde

•) $Y^{*}_{t} = (Y^{*}_{it}) \qquad i=1,2,\dots,N$

•) $D_{t} = -\frac{1}{\lambda}\cdot(A_{t})^{-1}\cdot C_{t}$

$D_{t} = (d_{it}) \qquad i=1,2,\dots,N$

[242] Estas expresiones coinciden con las que presenta **Bertsekas** en su trabajo aunque no especifica la naturaleza de la matriz $D_t=(d_{it})$; **D.P.BERTSEKAS**, Dynamic Programming: Deterministic and Stochastic Models (Prentice-Hall, Englewood Cliffs, 1987), p.77.

•) $A_t = (a_{ijt}) \qquad i=1,2,\ldots,N;\ j=1,2,\ldots,N$

$$a_{ijt} = E[f''_{t+1}(\tilde{W}_{t+1})\cdot(\tilde{r}_{it+1}-r_{ot})^2] \qquad i=j$$

$$a_{ijt} = E[f''_{t+1}(\tilde{W}_{t+1})\cdot(\tilde{r}_{it+1}-r_{ot})\cdot(\tilde{r}_{jt+1}-r_{ot})] \qquad i\neq j$$

•) $C_t = (c_{it}) \qquad i=1,2,\ldots,N$

$$c_{it} = E[f''_{t+1}(\tilde{W}_{t+1})\cdot(\tilde{r}_{it+1} - r_{ot})]$$

**En el momento t (t=0,1,2,...,T-1), la cuantía óptima que debe invertirse en el activo i (i=1,2,...,N) es:**

$$Y^*_{it} = d_{it}\cdot\left[\frac{\mu}{\prod_{k=t+1}^{T-1} r_{ok}} + \lambda\cdot r_{ot}\cdot W_t\right] \qquad [72]$$

Además, se cumple que

$$-\frac{f'_t(\tilde{W}_t)}{f''_t(\tilde{W}_t)} = \left[\frac{\mu}{\prod_{k=t}^{T-1} r_{ok}} + \lambda\cdot W_t\right] \qquad [73]$$

En general, **cuando la función de utilidad considerada es logarítmica o potencial ($\lambda\neq 0$ y $\mu\neq 0$) y se considera la posibilidad de que en la cartera puede existir un título sin riesgo, la política miope no la es óptima.** Si lo es en el caso que la función de utilidad derivada sea una transformación lineal de la función de utilidad, pero en el caso que estamos analizando no ocurre así puesto que la estructura del cociente $-\dfrac{f'_t(\tilde{W}_t)}{f''_t(\tilde{W}_t)}$ es distinta a la del cociente $-\dfrac{U'(\tilde{W}_T)}{U''(\tilde{W}_T)}$.

Demostración:

Si en [73] se considera

$$\frac{\mu}{\prod_{k=t}^{T-1} a_{ok}} = \mu'$$

resulta

$$-\frac{f'_t(\tilde{W}_t)}{f''_t(\tilde{W}_t)} = \mu' + \lambda \cdot \tilde{W}_t$$

De la resolución de esta ecuación diferencial se obtiene

$$\cdot)\ f_t(\tilde{W}_t) = \frac{1}{\lambda - 1} \cdot (\mu' + \lambda \cdot \tilde{W}_t)^{1-(1/\lambda)} =$$

$$= \frac{1}{\lambda - 1} \cdot \left[ \frac{\mu}{\prod_{k=t}^{T-1} a_{ok}} + \lambda \cdot \tilde{W}_t \right]^{1-(1/\lambda)} \qquad (\lambda \neq 0,\ \lambda \neq 1)$$

$$\cdot)\ f_t(\tilde{W}_t) = \ln\ (\mu' + \tilde{W}_t) = \ln \left[ \frac{\mu}{\prod_{k=t}^{T-1} a_{ok}} + \tilde{W}_t \right] \qquad (\lambda = 1)$$

y estas funciones de utilidad "derivada" no son transformaciones lineales de la función de utilidad original $U(\tilde{W}_t)$.

**En este caso el resultado no es el mismo si periodo a periodo se optimiza en base a la función de utilidad "derivada" que si se optimiza sobre la función de utilidad real.**

### *5.6.2.1. Caso particular: λ = 1*

Si el parámetro λ toma el valor uno, la función de utilidad es logarítmica:

$$U(\tilde{W}_T) = \ln(\mu + \tilde{W}_T)$$

y para este caso particular, de [71] se deducen las siguientes expresiones:

$$Y_t^* = \left[\frac{\mu}{\prod_{k=t+1}^{T-1} a_{0k}} + a_{0t}\cdot W_t\right]\cdot D_t \qquad t=0,1,2,\dots,T-1$$

donde .

•) $Y_t^* = (Y_{it}^*)$ $\qquad i=1,2,\dots,N$

•) $D_t = -(A_t)^{-1}\cdot C_t$

$D_t = (d_{it})$ $\qquad i=1,2,\dots,N$

Las matrices $A_t$ y $C_t$ son las definidas para el caso general.

**La cuantía óptima para el activo i (i=1,2,...,N) y para el momento t (t=0,1,2,...,T-1) es:**

$$Y_{it}^* = d_{it}\cdot\left[\frac{\mu}{\prod_{k=t+1}^{T-1} a_{0k}} + a_{0t}\cdot W_t\right]$$

Además, de [73] se deduce que

$$- \frac{f'_t(\tilde{W}_t)}{f''_t(\tilde{W}_t)} = \left[ \frac{\mu}{\prod_{k=t}^{T-1} r_{ok}} + W_t \right]$$

y, por tanto, la función de utilidad "derivada" en t $(t=0,1,2,\ldots,T-1)$ es:

$$f_t(W_t) = \ln \left[ \frac{\mu}{\prod_{k=t}^{T-1} r_{ok}} + W_t \right]$$

En este caso no se alcanzará el mismo resultado si se maximiza periodo a periodo la función de utilidad original en lugar de la "derivada" puesto que ambas funciones proporcionan un orden de preferencias distinto. Como consecuencia, **la política miope no es la óptima.**

### *5.6.2.2. Caso particular: $s_{ot} = 0$*

En el caso que $s_{ot}=0$ o, de modo equivalente, $r_{ot}=1$ (se admite como activo sin riesgo el dinero en caja), **la cuantía que debe invertirse en el momento t $(t=0,1,2,\ldots,T-1)$ en cada título, deducida** de [91] es:

$$Y_t^* = (\mu + \lambda \cdot W_t) \cdot D_t$$

$$Y_{it}^* = d_{it} \cdot (\mu + \lambda \cdot W_t)$$

donde

•) $Y_t^* = (Y_{it}^*)$ $\qquad i=1,2,\ldots,N$

•) $D_t = -\frac{1}{\lambda}\cdot(A_t)^{-1}\cdot C_t$

$D_t = (d_{it})$ $\qquad i=1,2,\ldots,N$

•) $A_t = (a_{ijt})$ $\qquad i=1,2,\ldots,N;\ j=1,2,\ldots,N$

$$a_{ijt} = E[f''_{t+1}(\tilde{W}_{t+1})\cdot(\tilde{r}_{it+1}-1)^2] \qquad i=j$$
$$a_{ijt} = E[f''_{t+1}(\tilde{W}_{t+1})\cdot(\tilde{r}_{it+1}-1)\cdot(\tilde{r}_{jt+1}-1)] \qquad i\neq j$$

•) $C_t = (c_{it})$ $\qquad i=1,2,\ldots,N$

$$c_{it} = E[f''_{t+1}(\tilde{W}_{t+1})\cdot(\tilde{r}_{it+1} - 1)]$$

Además se cumple que

$$-\frac{f'_t(\tilde{W}_t)}{f''_t(\tilde{W}_t)} = \mu + \lambda\cdot\tilde{W}_t$$

que coincide con el cociente $-\dfrac{U'(\tilde{W}_t)}{U''(\tilde{W}_t)} = \mu + \lambda\cdot\tilde{W}_t$ lo cual implica que la función de utilidad "derivada" es una transformación lineal de la función de utilidad original. Como consecuencia, en cada punto decisorio $t$ $(t=0,1,2,\ldots,T-1)$ se puede sustituir $f_t(\tilde{W}_t)$ por $U(\tilde{W}_t)$ simplificándose el proceso de optimización.

En definitiva, para este caso particular, en cada periodo podemos prescindir por completo de lo que ocurrirá en el futuro y actuar, simplemente sobre la función de utilidad original (política miope óptima).

### *5.6.2.3. Caso particular: $\mu = 0$*

En el caso que $\mu=0$, la matriz de cuantías óptimas en un punto decisorio t (t=0,1,...,T-1), según [71], es:

$$Y_t^* = \lambda \cdot \omega_{ot} \cdot W_t \cdot D_t$$

$$Y_{it}^* = d_{it} \cdot \lambda \cdot \omega_{ot} \cdot W_t$$

siendo $D_t = (d_{it})$ la misma matriz que la definida para el caso general.

Además, si $\mu=0$ se cumple que

$$\cdot) \quad -\frac{U'(\tilde{W}_T)}{U''(\tilde{W}_T)} = \lambda \cdot W_T$$

$$\cdot) \quad -\frac{f_t'(\tilde{W}_t)}{f_t''(\tilde{W}_t)} = \lambda \cdot W_t$$

De la comparación de estas dos últimas expresiones se deduce que $f_t(\tilde{W}_t)$ es una transformación lineal de $U(\tilde{W}_t)$ y como consecuencia la política miope es la óptima cuando $\mu=0$ sin importar el valor de $\omega_{ot}$.

En concreto, para la **función de utilidad potencial**

$$U(\tilde{W}_T) = \tilde{W}_T^{1-(1/\lambda)} \qquad (\lambda\neq 0,\ \lambda\neq 1)$$

se puede deducir[243] una relación entre $f_t(\tilde{W}_t)$ y $f_{t+1}(\tilde{W}_{t+1})$ que permite demostrar de una forma alternativa por qué en este caso la política miope es la óptima:

$$\bullet)\ f_T(\tilde{W}_T) = U(\tilde{W}_T) \qquad [74]$$

$$\bullet)\ f_{T-1}(\tilde{W}_{T-1}) = \text{Max } E[U(\tilde{W}_T)] =$$

$$= \text{Max } E\left\{\left[\tilde{W}_{T-1}\cdot r_{oT-1} + \sum_{i=1}^{N} Y_{iT-1}\cdot(\tilde{r}_{iT} - r_{oT-1})\right]^{1-(1/\lambda)}\right\} =$$

$$= \text{Max } E\left\{\left[\tilde{W}_{T-1}\cdot\left[r_{oT-1} + \sum_{i=1}^{N} \frac{Y_{iT-1}}{\tilde{W}_{T-1}}\cdot(\tilde{r}_{iT} - r_{oT-1})\right]\right]^{1-(1/\lambda)}\right\} =$$

$$= \text{Max } E\left\{(\tilde{W}_{T-1})^{1-(1/\lambda)}\cdot\left[r_{oT-1} + \sum_{i=1}^{N} X_{iT-1}\cdot(\tilde{r}_{iT} - r_{oT-1})\right]^{1-(1/\lambda)}\right\} =$$

$$= (\tilde{W}_{T-1})^{1-(1/\lambda)}\cdot\text{Max } E\left\{\left[r_{oT-1} + \sum_{i=1}^{N} X_{iT-1}\cdot(\tilde{r}_{iT} - r_{oT-1})\right]^{1-(1/\lambda)}\right\} =$$

$$= (\tilde{W}_{T-1})^{1-(1/\lambda)}\cdot E\left\{\left[r_{oT-1} + \sum_{i=1}^{N} X^{*}_{iT-1}\cdot(\tilde{r}_{iT} - r_{oT-1})\right]^{1-(1/\lambda)}\right\} \qquad [75]$$

---

[243] **E.J.ELTON-M.J.GRUBER**, op. cit., 1975, pp.96-98.

donde $X^*_{iT-1}$ es el valor que maximiza el valor esperado.

Haciendo,

$$g_t = E\left\{\left[r_{0t} + \sum_{i=1}^{N} X^*_{it}\cdot(\tilde{r}_{it+1} - r_{0t})\right]^{1-(1/\lambda)}\right\} \qquad t=0,1,\ldots,T-1$$

la función $f_{T-1}(\tilde{W}_{T-1})$, en [75], es

$$f_{T-1}(\tilde{W}_{T-1}) = (\tilde{W}_{T-1})^{1-(1/\lambda)}\cdot g_{T-1} \qquad [76]$$

$$\bullet)\ f_{T-2}(\tilde{W}_{T-2}) = \text{Max } E[f_{T-1}(\tilde{W}_{T-1})] = \text{Max }\left[(\tilde{W}_{T-1})^{1-(1/\lambda)}\cdot g_{T-1}\right] =$$

$$= \text{Max } E\left\{\left[\tilde{W}_{T-2}\cdot r_{0T-2} + \sum_{i=1}^{N} Y_{iT-2}\cdot(\tilde{r}_{iT-1} - r_{0T-2})\right]^{1-(1/\lambda)}\cdot g_{T-1}\right\} =$$

$$= (\tilde{W}_{T-2})^{1-(1/\lambda)}\cdot\text{Max } E\left\{\left[r_{0T-2} + \sum_{i=1}^{N} X_{iT-2}\cdot(\tilde{r}_{iT-1} - r_{0T-2})\right]^{1-(1/\lambda)}\right\}\cdot g_{T-1} =$$

$$= (\tilde{W}_{T-2})^{1-(1/\lambda)}\cdot g_{T-2}\cdot g_{T-1} \qquad [77]$$

Y, en general, de [74], [76] y [77] se deduce que

$$f_t(\tilde{W}_t) = \tilde{W}_t^{\,1-(1/\lambda)}\cdot\prod_{k=t}^{T-1} g_k = \tilde{W}_t^{\,1-(1/\lambda)}\cdot g_t\cdot\prod_{k=t}^{T-1} g_{k+1} =$$

$$= \tilde{W}_t^{1-(1/\lambda)} \cdot \text{Max } E\left\{\left[a_{0t} + \sum_{i=1}^{N} X_{it} \cdot (\tilde{r}_{it+1} - a_{0t})\right]^{1-(1/\lambda)}\right\} \cdot \prod_{k=t}^{T-1} g_{k+1} =$$

$$= \text{Max } E\left\{\left[\tilde{W}_t \cdot a_{0t} + \sum_{i=1}^{N} Y_{it} \cdot (\tilde{r}_{it+1} - a_{0t})\right]^{1-(1/\lambda)}\right\} \cdot \prod_{k=t}^{T-1} g_{k+1} =$$

$$= \text{Max } E[U_t(\tilde{W}_{t+1})] + \prod_{k=t}^{T-1} g_{k+1} \qquad [78]$$

Excepto por el término $\prod_{k=t}^{T-1} g_{k+1}$, el problema al que se enfrenta el inversor en el punto decisorio t $(t=0,1,2,\ldots,T-1)$ es un **problema de optimización para un único periodo de la función de utilidad original** ($\text{Max } E[U_t(\tilde{W}_{t+1})]$). Pero como este término es constante no afecta a la maximización y, por tanto, es **válido maximizar periodo a periodo la función de utilidad original (política miope óptima)**.

En el caso que la **función de utilidad sea logarítmica**

$$U(\tilde{W}_T) = \ln \tilde{W}_T$$

las expresiones obtenidas para el caso general se convierten en las siguientes:

$$Y_t^* = a_{0t} \cdot \tilde{W}_t \cdot D_t \qquad Y_t^* = (Y_{it}^*) \qquad t=0,1,2,\ldots,T-1$$

$$Y_{it}^* = d_{it} \cdot a_{0t} \cdot \tilde{W}_t$$

donde las matrices $D_t$, $A_t$ y $C_t$ coinciden con las definidas para la función logarítmica general.

Para este caso particular es posible deducir (por un procedimiento análogo al utilizado para la función de utilidad potencial) una relación entre $f_t(\tilde{W}_t)$ y $f_{t+1}(\tilde{W}_{t+1})$ que permite afirmar de una forma alternativa que ,en este caso, **la política miope es la óptima**[244]:

$$\bullet)\ f_T(\tilde{W}_T) = U(\tilde{W}_T) \tag{79}$$

$$\bullet)\ f_{T-1}(\tilde{W}_{T-1}) = \mathrm{Max}\ E[U(\tilde{W}_T)] =$$

$$= \mathrm{Max}\ E\left\{\ln\left[\tilde{W}_{T-1}\cdot r_{0T-1} + \sum_{i=1}^{N} Y_{iT-1}\cdot(\tilde{r}_{iT} - r_{0T-1})\right]\right\} =$$

$$= \mathrm{Max}\ E\left\{\ln\left[\tilde{W}_{T-1}\cdot\left[r_{0T-1} + \sum_{i=1}^{N} \frac{Y_{iT-1}}{W_{T-1}}\cdot(\tilde{r}_{iT} - r_{0T-1})\right]\right]\right\} =$$

$$= \mathrm{Max}\ E\left\{\ln \tilde{W}_{T-1} + \ln\left[r_{0T-1} + \sum_{i=1}^{N} X_{iT-1}\cdot(\tilde{r}_{iT} - r_{0T-1})\right]\right\} =$$

$$= \ln \tilde{W}_{T-1} + \mathrm{Max}\ E\left\{\ln\left[r_{0T-1} + \sum_{i=1}^{N} X_{iT-1}\cdot(\tilde{r}_{iT} - r_{0T-1})\right]\right\} =$$

$$= \ln \tilde{W}_{T-1} + E\left\{\ln\left[r_{0T-1} + \sum_{i=1}^{N} X^{*}_{iT-1}\cdot(\tilde{r}_{iT} - r_{0T-1})\right]\right\} \tag{80}$$

donde $X^{*}_{iT-1}$ es el valor que maximiza el valor esperado.

---

244 **E.J.ELTON-M.J.GRUBER**, op. cit., 1975, pp.96-98.

Haciendo,

$$g_t = E\left\{\ln\left[r_{ot} + \sum_{i=1}^{N} X^{*}_{it}\cdot(\tilde{r}_{it+1}-r_{ot})\right]\right\} \qquad t=0,1,\ldots,T-1$$

la función $f_{T-1}(\tilde{W}_{T-1})$, en [80], es

$$f_{T-1}(\tilde{W}_{T-1}) = \ln \tilde{W}_{T-1} + g_{T-1} \qquad [81]$$

•) $f_{T-2}(\tilde{W}_{T-2}) = \text{Max } E[f_{T-1}(\tilde{W}_{T-1})] = \text{Max } [\ln \tilde{W}_{T-1} + g_{T-1}] =$

$$= \text{Max } E\left\{\ln\left[\tilde{W}_{T-2}\cdot r_{oT-2} + \sum_{i=1}^{N} Y_{iT-2}\cdot(\tilde{r}_{iT-1} - r_{oT-2})\right] + g_{T-1}\right\} =$$

$$= \ln \tilde{W}_{T-2} + \text{Max } E\left\{\ln\left[r_{oT-2} + \sum_{i=1}^{N} X_{iT-2}\cdot(\tilde{r}_{iT-1} - r_{oT-2})\right]\right\} + g_{T-1} =$$

$$= \ln \tilde{W}_{T-2} + g_{T-2} + g_{T-1} \qquad [82]$$

Y, en general, se deduce de [79], [81] y [82] que

$$f_t(\tilde{W}_t) = \ln \tilde{W}_t + \sum_{k=t}^{T-1} g_k = \ln \tilde{W}_t + g_t + \sum_{k=t}^{T-1} g_{k+1} =$$

$$= \ln \tilde{W}_t + \text{Max } E\left\{\ln\left[r_{ot} + \sum_{i=1}^{N} X_{it}\cdot(\tilde{r}_{it+1}-r_{ot})\right]\right\} + \sum_{k=t}^{T-1} g_{k+1} =$$

$$= \text{Max } E\left\{\ln\left[\tilde{W}_t \cdot r_{0t} + \sum_{i=1}^{N} Y_{it}\cdot(\tilde{r}_{it+1} - r_{0t})\right]\right\} + \sum_{k=t}^{T-1} g_{k+1} =$$

$$= \text{Max } E[U_t(\tilde{W}_{t+1})] + \sum_{k=t}^{T-1} g_{k+1} \qquad [83]$$

En el punto decisorio t $(t=0,1,2,\ldots,T-1)$ el inversor se enfrenta a **un problema de optimización para un único periodo** (Max $E[U_t(\tilde{W}_{t+1})]$) si no fuera por la presencia de $\sum_{k=t}^{T-1} g_{k+1}$; pero como este término es constante no afecta a la maximización, se deduce que **la política miope es óptima** para este caso.

### *5.6.2.4. Caso particular:* $\lambda = -1$

Si $\lambda=-1$, la función de utilidad resultante es cuadrática:

$$U(\tilde{W}_T) = \frac{1}{\lambda-1}\cdot(\mu + \lambda\cdot\tilde{W}_T)^{1-(1/\lambda)} = -\frac{1}{2}\cdot(\mu - \tilde{W}_T)^2 =$$

$$= -\frac{\mu^2}{2} + \mu\cdot\tilde{W}_T - \frac{1}{2}\cdot\tilde{W}_T^{\,2}$$

Si comparamos esta función cuadrática con la de carácter general definida en el apartado 5.5:

$$U(\tilde{W}_T) = \alpha + \beta\cdot\tilde{W}_T + \gamma\cdot\tilde{W}_T^{\,2}$$

se obtiene que

•) $\alpha = -\dfrac{\mu^2}{2}$

•) $\beta = \mu$

•) $\gamma = -\dfrac{1}{2}$

Para la función cuadrática general con N títulos arriesgados y 1 título sin riesgo se dedujo[245] que la matriz de cuantías óptimas en el punto decisorio t (t=0,1,2,...,T-1) era:

$$Y_t^* = -\frac{1}{2\cdot\gamma}\cdot\left[\frac{\beta}{\prod_{k=t+1}^{T-1} \alpha_{ok}} + 2\cdot\gamma\cdot\alpha_{ot}\cdot\tilde{W}_t\right]\cdot(A_t)^{-1}\cdot C_t \qquad [84]$$

donde

•) $A_t = (a_{ijt})$ $\qquad$ $i=1,2,...N;\ j=1,2,...,N;\ t=0,1,...,T-1$

$$a_{ijt} = (\varepsilon_i - \alpha_{ot})^2 + V_i \qquad i=j$$
$$a_{ijt} = (\varepsilon_i - \alpha_{ot})\cdot(\varepsilon_j - \alpha_{ot}) \qquad i\neq j$$

•) $C_t = (c_{it})$ $\qquad$ $i=1,2,...N;\ t=0,1,...,T-1$

$$c_{it} = (\varepsilon_i - \alpha_{ot})$$

Si $\beta = \mu$ y $\gamma = -\dfrac{1}{2}$ la expresión [84] se convierte en

[245] Véase el apartado 5.5.2. de la presente Tesis.

$$Y_t^* = \left[ \frac{\mu}{\prod_{k=t+1}^{T-1} r_{ok}} - r_{ot} \cdot W_t \right] \cdot (A_t)^{-1} \cdot C_t \qquad [85]$$

Para la función cuadrática particular

$$U(\tilde{W}_T) = -\frac{\mu^2}{2} + \mu \cdot \tilde{W}_T - \frac{1}{2} \cdot \tilde{W}_T^2$$

las expresiones que se deducen del estudio realizado en el apartado **5.6.2.** para las funciones de utilidad que cumplen

$$-\frac{U'(\tilde{W}_T)}{U''(\tilde{W}_T)} = \mu + \lambda \cdot \tilde{W}_T$$

son las siguientes:

$$*)\ Y_t^* = \left[ \frac{\mu}{\prod_{k=t+1}^{T-1} r_{ok}} - r_{ot} \cdot W_t \right] \cdot (A_t')^{-1} \cdot C_t' \qquad [86]$$

*donde*

$\cdot)\ A_t' = (a'_{ijt})$ $\qquad$ $i=1,2,\ldots N;\ j=1,2,\ldots,N;\ t=0,1,\ldots,T-1$

$$a'_{ijt} = E[f''_{t+1}(W_{t+1}) \cdot (\tilde{r}_{it+1} - r_{ot})^2] \qquad i=j$$
$$a'_{ijt} = E[f''_{t+1}(W_{t+1}) \cdot (\tilde{r}_{it+1} - r_{ot}) \cdot (\tilde{r}_{jt+1} - r_{ot})] \qquad i \neq j$$

$\cdot)\ C_t' = (c'_{it})$ $\qquad$ $i=1,2,\ldots N;\ t=0,1,\ldots,T-1$

$$c'_{it} = E[f''_{t+1}(W_{t+1})\cdot(\tilde{r}_{it+1} - r_{ot})]$$

$$*) \quad - \frac{f'_t(\tilde{W}_t)}{f''_t(\tilde{W}_t)} = \left[ \frac{\mu}{\prod_{k=t}^{T-1} r_{ok}} - W_t \right] \qquad [87]$$

Comparando las dos expresiones obtenidas para $Y^*_t$, [85] y [86], deberemos demostrar que $(A_t)^{-1}\cdot C_t = (A'_t)^{-1}\cdot C'_t$ para que ambas expresiones sean equivalentes.

Para hacer esta demostración resolveremos la ecuación diferencial [87], que haciendo los siguientes cambios

$$f'_t(\tilde{W}_t) = Y(\tilde{W}_t)$$

$$\frac{\mu}{\prod_{k=t}^{T-1} r_{ok}} = \rho$$

se convierte en

$$- \frac{Y(\tilde{W}_t)}{Y'(\tilde{W}_t)} = \rho - \tilde{W}_t \Longrightarrow - Y(\tilde{W}_t) = (\rho - \tilde{W}_t)\cdot\frac{dY(\tilde{W}_t)}{d\tilde{W}_t} \Longrightarrow$$

$$\Longrightarrow \frac{d\tilde{W}_t}{\rho - \tilde{W}_t} = - \frac{dY(\tilde{W}_t)}{Y(\tilde{W}_t)} \Longrightarrow - \ln(\rho - \tilde{W}_t) = - \ln Y(\tilde{W}_t) + C =$$

$$= - \ln k\cdot Y(\tilde{W}_t) \Longrightarrow Y(\tilde{W}_t) = \frac{1}{k}\cdot(\rho - \tilde{W}_t) \Longrightarrow$$

$$\Longrightarrow f_t(\tilde{W}_t) = \frac{1}{k}\cdot(\rho\cdot\tilde{W}_t - \frac{1}{2}\cdot\tilde{W}_t^2) + k'$$

Como $\frac{1}{k}$ y k' son constantes, no influyen en el orden de preferencias de la función de utilidad "derivada" y, por tanto, tomaremos

$$f_t(\tilde{W}_t) = (\rho \cdot \tilde{W}_t - \frac{1}{2} \cdot \tilde{W}_t^2)$$

La primera y segunda derivada de esta función de utilidad derivada son, respectivamente:

$$f_t'(\tilde{W}_t) = Y(\tilde{W}_t) = (\rho - \tilde{W}_t)$$
$$f_t''(\tilde{W}_t) = -1$$

Teniendo en cuenta el valor de la segunda derivada y la hipótesis de estacionariedad e independencia (en cada periodo y entre periodos) que se utilizó en el apartado 5.5. se obtiene que

$$a'_{ijt} = - E[(\tilde{r}_{it+1} - r_{ot})^2] = - E[(\varepsilon_i - r_{ot})^2 + V_i] = - a_{ijt} \quad i=j$$
$$a'_{ijt} = -E[(\tilde{r}_{it+1} - r_{ot}) \cdot (\tilde{r}_{jt+1} - r_{ot})] = - E[(\varepsilon_i - r_{ot}) \cdot (\varepsilon_j - r_{ot})] =$$
$$= -a_{ijt} \quad i \neq j$$
$$c'_{it} = - E[(\tilde{r}_{it+1} - r_{ot})] = - E[(\varepsilon_i - r_{ot})] = - c_{it}$$

De ello se desprende que

$$A_t' \cdot C_t' = A_t \cdot C_t$$

y, en definitiva, la validez de los resultados para la función cuadrática particular estudiada.

### *5.6.2.5. Posibilidad de prestar y tomar prestado*

Si se considera la posibilidad de poder prestar dinero o tomarlo prestado (se elimina la hipótesis **H.6.** del conjunto de hipótesis generales detallado en el apartado **5.3.**) en el caso de que exista, además, un título sin riesgo, el problema que debe solucionarse en cada punto decisorio t ($t=0,1,2,\ldots,T-1$) es[246]:

$$\left.\begin{array}{l} \max\limits_{Y_{it}} E[f_t(\tilde{W}_t)] \\ \text{sujeto a} \\ \tilde{W}_t = W_{t-1} + Y_{ot-1}\cdot s_{ot-1} + \sum\limits_{i=1}^{N} Y_{it-1}\cdot\tilde{r}_{it} \end{array}\right\}$$

donde

$$f_t(\tilde{W}_t) = \operatorname{Max} E[f_{t+1}(\tilde{W}_{t+1})]$$
$$f_T(\tilde{W}_T) = U(\tilde{W}_T)$$

Los T problemas planteados no son independientes entre si sino que debe empezarse por resolver el problema planteado para $t=T-1$ y continuar con un proceso de optimización hacia atrás ("backward optimization") hasta llegar a $t=0$.

La condición necesaria de máximo para $t=T-1$ obliga a que las siguientes derivadas sean nulas:

$$\bullet)\quad \frac{dE[U(\tilde{W}_T)]}{dY_{oT-1}} = E\left[U'(\tilde{W}_T)\cdot\frac{d\tilde{W}_T}{dY_{oT-1}}\right]$$

[246]Véase el apartado **5.5.2.2.** de la presente Tesis.

$$\cdot)\quad \frac{dE[U(\tilde{W}_T)]}{dY_{iT-1}} = E\left[U'(\tilde{W}_T)\cdot\frac{d\tilde{W}_T}{dY_{iT-1}}\right] \qquad \forall i,\ i=1,2,\ldots,N$$

Teniendo en cuenta que

$$-\frac{U'(\tilde{W}_T)}{U''(\tilde{W}_T)} = \mu + \lambda\cdot\tilde{W}_T$$

$$\tilde{W}_T = W_{T-1} + Y_{oT-1}\cdot s_{oT-1} + \sum_{i=1}^{N} Y_{iT-1}\cdot\tilde{r}_{iT}$$

las anteriores derivadas son:

$$\cdot)\quad \frac{dE[U(\tilde{W}_T)]}{dY_{oT-1}} = E\left[-\ U''(\tilde{W}_T)\cdot(\mu + \lambda\cdot\tilde{W}_T)\cdot s_{oT-1}\right] =$$

$$= E\left\{-\ U''(\tilde{W}_T)\cdot\left[\mu+\lambda\cdot\left[W_{T-1}+Y_{oT-1}\cdot s_{oT-1} + \sum_{i=1}^{N} Y_{iT-1}\cdot\tilde{r}_{iT}\right]\right]\cdot s_{oT-1}\right\} =$$

$$= -\ E\left[(\mu + \lambda\cdot W_{T-1}\cdot s_{oT-1})\cdot U''(\tilde{W}_T) + \lambda\cdot Y_{oT-1}\cdot s^2_{oT-1}\cdot U''(\tilde{W}_T) + \right.$$

$$\left. + \lambda\cdot s_{oT-1}\cdot\sum_{i=1}^{N} Y_{iT-1}\cdot\tilde{r}_{iT}\cdot U''(\tilde{W}_T)\right] =$$

$$= -\ (\mu + \lambda\cdot W_{T-1}\cdot s_{oT-1})\cdot E[U''(\tilde{W}_T)] - \lambda\cdot Y_{oT-1}\cdot s^2_{oT-1}\cdot E[U''(\tilde{W}_T)] -$$

$$- \lambda \cdot s_{oT-1} \cdot \sum_{i=1}^{N} Y_{iT-1} \cdot E[U''(\tilde{W}_T) \cdot \tilde{r}_{iT}]$$

Si esta derivada ha de anularse, debe cumplirse que

$$\lambda \cdot Y_{oT-1} \cdot s_{oT-1} \cdot E[U''(\tilde{W}_T)] + \lambda \cdot \sum_{i=1}^{N} Y_{iT-1} \cdot E[U''(\tilde{W}_T) \cdot \tilde{r}_{iT}] =$$

$$= - (\mu + \lambda \cdot W_{T-1}) \cdot E[U''(\tilde{W}_T)]$$

$$\cdot) \quad \frac{dE[U(\tilde{W}_T)]}{dY_{iT-1}} = E\left[- U''(\tilde{W}_T) \cdot (\mu + \lambda \cdot \tilde{W}_T) \cdot \tilde{r}_{iT}\right] =$$

$$= E\left\{- U''(\tilde{W}_T) \cdot \left[\mu + \lambda \cdot \left[W_{T-1} + Y_{oT-1} \cdot s_{oT-1} + \sum_{j=1}^{N} Y_{jT-1} \cdot \tilde{r}_{jT}\right]\right] \cdot \tilde{r}_{iT}\right\} =$$

$$= - E\left[(\mu + \lambda \cdot W_{T-1}) \cdot U''(\tilde{W}_T) \cdot \tilde{r}_{iT} + \lambda \cdot Y_{oT-1} \cdot s_{oT-1} \cdot U''(\tilde{W}_T) \cdot \tilde{r}_{iT} + \right.$$

$$\left. + \lambda \cdot Y_{iT-1} \cdot U''(\tilde{W}_T) \cdot \tilde{r}^2_{iT} + \lambda \cdot \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^{N} Y_{jT-1} \cdot \tilde{r}_{iT} \cdot \tilde{r}_{jT} \cdot U''(\tilde{W}_T)\right] =$$

$$= - (\mu + \lambda \cdot W_{T-1}) \cdot E[U''(\tilde{W}_T) \cdot \tilde{r}_{iT}] - \lambda \cdot Y_{oT-1} \cdot s_{oT-1} \cdot E[U''(\tilde{W}_T) \cdot \tilde{r}_{iT}] -$$

$$- \lambda \cdot Y_{iT-1} \cdot E[U''(\tilde{W}_T) \cdot \tilde{r}^2_{iT}] - \lambda \cdot \sum_{\substack{i=1 \\ j \neq i}}^{N} Y_{iT-1} \cdot E[U''(\tilde{W}_T) \cdot \tilde{r}_{iT} \cdot \tilde{r}_{jT}]$$

Si esta derivada ha de anularse, debe cumplirse que

$$\lambda\cdot Y_{oT-1}\cdot s_{oT-1}\cdot E[U''(\tilde{W}_T)\cdot\tilde{r}_{iT}] + \lambda\cdot Y_{iT-1}\cdot E[U''(\tilde{W}_T)\cdot\tilde{r}^2_{iT}]$$

$$+\ \lambda\cdot\sum_{\substack{i=1\\ j\neq i}}^{N} Y_{iT-1}\cdot E[U''(\tilde{W}_T)\cdot\tilde{r}_{iT}\cdot\tilde{r}_{jT}] = -\ (\mu+\lambda\cdot W_{T-1})\cdot E[U''(\tilde{W}_T)\cdot\tilde{r}_{iT}]$$

Matricialmente, el sistema de ecuaciones resultante es:

$$\lambda\cdot A_{T-1}\cdot Y^*_{T-1} = -\ (\mu + \lambda\cdot W_{T-1})\cdot C_{T-1}$$

donde

•) $Y^*_{T-1} = (Y^*_{iT-1})$ $\qquad i=0,1,2,\ldots,N$

•) $A_{T-1} = (a_{ijT-1})$ $\qquad i=0,1,2,\ldots,N;\ j=0,1,2,\ldots N$

$$\begin{array}{ll}
a_{ooT-1} = s_{oT-1}\cdot E[U''(\tilde{W}_T)] & \\
a_{ioT-1} = s_{oT-1}\cdot E[U''(\tilde{W}_T)\cdot\tilde{r}_{iT}] & i=1,2,\ldots,N \\
a_{ojT-1} = E[U''(\tilde{W}_T)\cdot\tilde{r}_{jT}] & j=1,2,\ldots,N \\
a_{ijT-1} = E[U''(\tilde{W}_T)\cdot\tilde{r}^2_{jT}] & i=1,2,\ldots,N;\ i=j \\
a_{ijT-1} = E[U''(\tilde{W}_T)\cdot\tilde{r}_{iT}\cdot\tilde{r}_{jT}] & i=1,2,\ldots,N;\ j=1,2,\ldots,N\ \ i\neq j
\end{array}$$

•) $C_{T-1} = (c_{iT-1})$ $\qquad i=0,1,2,\ldots,N$

$$\begin{array}{ll}
c_{oT-1} = E[U''(\tilde{W}_T)] & \\
c_{iT-1} = E[U''(\tilde{W}_T)\cdot\tilde{r}_{iT}] & i=1,2,\ldots,N
\end{array}$$

Despejando la matriz de cuantías se obtiene, para t=T-1:

$$Y^{*}_{T-1} = (\mu + \lambda \cdot W_{T-1}) \cdot D_{T-1}$$

$$Y^{*}_{iT-1} = d_{iT-1} \cdot (\mu + \lambda \cdot W_{T-1}) \qquad [88]$$

donde

•) $D_{T-1} = -\frac{1}{\lambda} \cdot (A_{T-1})^{-1} \cdot C_{T-1}$

$D_{T-1} = (d_{iT-1}) \qquad i=0,1,2,\ldots,N$

Una vez determinada la composición óptima de la cartera del último periodo, el siguiente paso consiste en la búsqueda de la función de utilidad "derivada" para la riqueza disponible en T-1 $[f_{T-1}(\tilde{W}_{T-1})]$.

$$f_{T-1}(\tilde{W}_{T-1}) = \text{Max } E[f_T(\tilde{W}_T)] = \text{Max } E[U(\tilde{W}_T)] = E[U(\tilde{W}^{*}_T)] =$$

$$= E\left\{U\left[\tilde{W}_{T-1} + Y^{*}_{oT-1} \cdot s_{oT-1} + \sum_{i=1}^{N} Y^{*}_{iT-1} \cdot \tilde{r}_{iT}\right]\right\} =$$

$$= E\left\{U\left[\tilde{W}_{T-1} + d_{oT-1} \cdot (\mu + \lambda \cdot \tilde{W}_{T-1}) \cdot s_{oT-1} + (\mu + \lambda \cdot \tilde{W}_{T-1}) \cdot \sum_{i=1}^{N} d_{iT-1} \cdot \tilde{r}_{iT}\right]\right\} =$$

$$= E\left\{U\left[\left[1 + \lambda \cdot d_{oT-1} \cdot s_{oT-1} + \lambda \cdot \sum_{i=1}^{N} d_{iT-1} \cdot \tilde{r}_{iT}\right] \cdot \tilde{W}_{T-1} + \right.\right.$$

$$+ \mu \cdot \left[ d_{oT-1} \cdot s_{oT-1} + \sum_{i=1}^{N} d_{iT-1} \cdot \tilde{r}_{iT} \right] \Bigg] \Bigg\} \qquad [89]$$

Las dos primeras derivadas de la función [89] son las siguientes:

$$\cdot)\ f'_{T-1}(\tilde{W}_{T-1}) = E\left[ U'(\tilde{W}_T^*) \cdot \frac{d\tilde{W}_T^*}{d\tilde{W}_{T-1}} \right] =$$

$$= E\left[ U'(\tilde{W}_T^*) \cdot \left[ 1 + \lambda \cdot d_{oT-1} \cdot s_{oT-1} + \lambda \cdot \sum_{i=1}^{N} d_{iT-1} \cdot \tilde{r}_{iT} \right] \right] \qquad [90]$$

$$\cdot)\ f''_{T-1}(\tilde{W}_{T-1}) =$$

$$= E\left[ U''(\tilde{W}_T^*) \cdot \left[ 1 + \lambda \cdot d_{oT-1} \cdot s_{oT-1} + \lambda \cdot \sum_{i=1}^{N} d_{iT-1} \cdot \tilde{r}_{iT} \right]^2 \right] =$$

$$= E\left[ - \frac{U'(\tilde{W}_T^*)}{\mu + \lambda \cdot \tilde{W}_T^*} \cdot \left[ 1 + \lambda \cdot d_{oT-1} \cdot s_{oT-1} + \lambda \cdot \sum_{i=1}^{N} d_{iT-1} \cdot \tilde{r}_{iT} \right]^2 \right] \qquad [91]$$

donde

$$\mu + \lambda \cdot \tilde{W}_T^* =$$

$$= \mu + \lambda \cdot \left[ \tilde{W}_{T-1} + d_{oT-1} \cdot (\mu + \lambda \cdot \tilde{W}_{T-1}) \cdot s_{oT-1} + (\mu + \lambda \cdot \tilde{W}_{T-1}) \cdot \sum_{i=1}^{N} d_{iT-1} \cdot \tilde{r}_{iT} \right] =$$

$$= (\mu + \lambda \cdot \tilde{W}_{T-1}) \cdot \left[ 1 + \lambda \cdot d_{oT-1} \cdot s_{oT-1} + \lambda \cdot \sum_{i=1}^{N} d_{iT-1} \cdot \tilde{r}_{iT} \right] \qquad [92]$$

Sustituyendo [92] en [91] se obtiene

$$f''_{T-1}(\tilde{W}_{T-1}) =$$

$$= -\frac{1}{\mu + \lambda \cdot W_{T-1}} \cdot E\left[U'(\tilde{W}_T^*) \cdot \left[1 + \lambda \cdot d_{oT-1} \cdot s_{oT-1} + \lambda \cdot \sum_{i=1}^{N} d_{iT-1} \cdot \tilde{r}_{iT}\right]\right] \qquad [93]$$

Del cociente

$$-\frac{f'_{T-1}(\tilde{W}_{T-1})}{f''_{T-1}(\tilde{W}_{T-1})} = \mu + \lambda \cdot \tilde{W}_{T-1}$$

se desprende que $f_{T-1}(\tilde{W}_{T-1})$ es una transformación lineal de la función de utilidad $U(\tilde{W}_{T-1})$ y que, por tanto, proporciona la misma ordenación de las alternativas.

Este resultado implica que en el momento t=T-2 y, generalizando, en cualquier punto decisorio t (t=0,1,2,...,T-1), **se puede maximizar directamente la función de utilidad esperada original.** Concluyendo, la política miope es la óptima cuando se permite al inversor prestar y tomar prestado y la función de utilidad es del tipo que se ha definido en este apartado.

Generalizando, para cualquier punto decisorio t (t=0,1,2,...,T-1) la matriz de cuantías es

$$Y_t^* = (\mu + \lambda \cdot W_t) \cdot D_t \qquad [94]$$

donde

•) $Y_t^* = (Y_{it}^*)$ $\qquad i=0,1,2,\ldots,N$

•) $D_t = -\frac{1}{\lambda}\cdot(A_t)^{-1}\cdot C_t$

$D_t = (d_{it})$ $\qquad i=0,1,2,\ldots,N$

•) $A_t = (a_{ijt})$ $\qquad i=0,1,2,\ldots,N;\ j=0,1,2,\ldots N$

$$a_{oot} = s_{ot}\cdot E[U''(\tilde{W}_{t+1})]$$

$$a_{iot} = s_{ot}\cdot E[U''(\tilde{W}_{t+1})\cdot\tilde{r}_{it+1}] \qquad i=1,2,\ldots,N$$

$$a_{ojt} = E[U''(\tilde{W}_{t+1})\cdot\tilde{r}_{jt+1}] \qquad j=1,2,\ldots,N$$

$$a_{ijt} = E[U''(\tilde{W}_{t+1})\cdot\tilde{r}^2_{jt+1}] \qquad i=1,2,\ldots,N;\ i=j$$

$$a_{ijt} = E[U''(\tilde{W}_{t+1})\cdot\tilde{r}_{it+1}\cdot\tilde{r}_{jt+1}] \qquad i=1,2,\ldots,N;\ j=1,2,\ldots,N\ i\neq j$$

•) $C_t = (c_{it})$ $\qquad i=0,1,2,\ldots,N$

$$c_{ot} = E[U''(\tilde{W}_{t+1})]$$

$$c_{it} = E[U''(\tilde{W}_{t+1})\cdot\tilde{r}_{it+1}] \qquad i=1,2,\ldots,N$$

### *5.6.3. Consideración de N activos arriesgados*

Las hipótesis nuevas que hay que añadir a las consideradas en el apartado 5.3. son:

**H.10.** Todos los títulos considerados son arriesgados.

H.11. Las funciones de utilidad consideradas cumplen la propiedad:

$$- \frac{U'(\tilde{W}_T)}{U''(\tilde{W}_T)} = \mu + \lambda \cdot \tilde{W}_T$$

En el caso que se consideren únicamente N títulos arriesgados, la relación entre la riqueza disponible en dos puntos decisorios consecutivos (t y t+1; t=0,1,2,...,T-1) es[247]:

$$\tilde{W}_{t+1} = W_t \cdot \tilde{r}_{Nt+1} + \sum_{i=1}^{N-1} Y_{it} \cdot (\tilde{r}_{it+1} - \tilde{r}_{Nt+1})$$

Al principio del último periodo (en T-1) el inversor se enfrenta ante un problema de selección de cartera para un único periodo y su objetivo es determinar como debe repartir la riqueza disponible en ese punto decisorio, $W_{T-1}$, para conseguir la máxima utilidad esperada de la riqueza disponible en T, $E[U(\tilde{W}_T)]$:

$$\max_{Y_{iT-1}} E[U(\tilde{W}_T)]$$

sujeto a

$$\tilde{W}_T = W_{T-1} \cdot \tilde{r}_{NT} + \sum_{i=1}^{N-1} Y_{iT-1} \cdot (\tilde{r}_{iT} - \tilde{r}_{NT})$$

o, de modo equivalente,

$$\max_{Y_{iT-1}} E\left\{U\left[W_{T-1} \cdot \tilde{r}_{NT} + \sum_{i=1}^{N-1} Y_{iT-1} \cdot (\tilde{r}_{iT} - \tilde{r}_{NT})\right]\right\}$$

[247]Esta relación se define en el apartado 5.5.3. de la presente Tesis.

Para resolver ese problema, como en todos los caso tratados hasta ahora, debe igualarse a cero la derivada

$$\frac{dE[U(\tilde{W}_T)]}{dY_{iT-1}} = E\left[U'(\tilde{W}_T)\cdot(\tilde{r}_{iT} - \tilde{r}_{NT})\right] \quad \forall i,\ i=1,2,\ldots,N-1$$

Las funciones de utilidad que contemplamos en este apartado cumplen

$$-\frac{U'(\tilde{W}_T)}{U''(\tilde{W}_T)} = \mu + \lambda\cdot\tilde{W}_T$$

y, por tanto, la derivada anterior es

$$\frac{dE[U(\tilde{W}_T)]}{dY_{iT-1}} = E[-U''(\tilde{W}_T)\cdot(\mu + \lambda\cdot\tilde{W}_T)\cdot(\tilde{r}_{iT} - \tilde{r}_{NT})]$$

donde

$$U''(\tilde{W}_T)\cdot(\mu + \lambda\cdot\tilde{W}_T)\cdot(\tilde{r}_{iT} - \tilde{r}_{NT}) =$$

$$= U''(\tilde{W}_T)\cdot\left[\mu+\lambda\cdot\left[W_{T-1}\cdot\tilde{r}_{NT} + \sum_{j=1}^{N-1} Y_{jT-1}(\tilde{r}_{jT}-\tilde{r}_{NT})\right]\right]\cdot(\tilde{r}_{iT}-\tilde{r}_{NT}) =$$

$$= (\mu + \lambda\cdot W_{T-1}\cdot\tilde{r}_{NT})\cdot U''(\tilde{W}_T)\cdot(\tilde{r}_{iT} - \tilde{r}_{NT}) + \lambda\cdot Y_{iT-1}\cdot(\tilde{r}_{iT} - \tilde{r}_{NT})^2\cdot U''(\tilde{W}_T) +$$

$$+ \lambda\cdot\sum_{\substack{j=1\\ j\neq i}}^{N-1} Y_{jT-1}\cdot(\tilde{r}_{iT} - \tilde{r}_{NT})\cdot(\tilde{r}_{jT} - \tilde{r}_{NT})\cdot U''(\tilde{W}_T)$$

Se obtiene, en definitiva,

$$\frac{dE[U(\tilde{W}_T)]}{dY_{iT-1}} =$$

$$= -\mu\cdot E[U''(\tilde{W}_T)\cdot(\tilde{r}_{iT} - \tilde{r}_{NT})] - \lambda\cdot W_{T-1}\cdot E[U''(\tilde{W}_T)\cdot(\tilde{r}_{iT}\cdot\tilde{r}_{NT} - \tilde{r}^2_{NT})] -$$

$$- \lambda\cdot Y_{iT-1}\cdot E[U''(\tilde{W}_T)\cdot(\tilde{r}_{iT} - \tilde{r}_{NT})^2] -$$

$$- \lambda\cdot\sum_{\substack{j=1\\ j\neq i}}^{N-1} Y_{jT-1}\cdot E[U''(\tilde{W}_T)\cdot(\tilde{r}_{iT} - \tilde{r}_{NT})\cdot(\tilde{r}_{jT} - \tilde{r}_{NT})]$$

Para que esta derivada sea nula debe cumplirse

$$\lambda\cdot\left[Y_{iT-1}\cdot E[U''(\tilde{W}_T)\cdot(\tilde{r}_{iT}-\tilde{r}_{NT})^2]+\sum_{\substack{j=1\\ j\neq i}}^{N-1} Y_{jT-1}\cdot E[U''(\tilde{W}_T)\cdot(\tilde{r}_{iT}-\tilde{r}_{NT})\cdot(\tilde{r}_{jT}-\tilde{r}_{NT})]\right]=$$

$$= -\mu\cdot E[U''(\tilde{W}_T)\cdot(\tilde{r}_{iT}-\tilde{r}_{NT})] - \lambda\cdot W_{T-1}\cdot E[U''(\tilde{W}_T)\cdot(\tilde{r}_{iT}\cdot\tilde{r}_{NT}-\tilde{r}^2_{NT})]$$

que, matricialmente, de lugar al siguiente sistema de ecuaciones

$$\lambda\cdot A_{T-1}\cdot Y^*_{T-1} = -\mu\cdot C_{T-1} - \lambda\cdot W_{T-1}\cdot G_{T-1}$$

donde

•) $Y^*_{T-1} = (Y^*_{iT-1})$ $\qquad i=1,2,\ldots,N-1$

•) $A_{T-1} = (a_{ijT-1})$ $\quad i=1,2,\ldots,N-1; \ j=1,2,\ldots,N-1$

$$a_{ijT-1} = E[U''(\tilde{W}_T)\cdot(\tilde{r}_{iT}-\tilde{r}_{NT})^2] \qquad i=j$$
$$a_{ijT-1} = E[U''(\tilde{W}_T)\cdot(\tilde{r}_{iT}-\tilde{r}_{NT})\cdot(\tilde{r}_{jT}-\tilde{r}_{NT})] \qquad i\neq j$$

•) $C_{T-1} = (c_{iT-1})$ $\quad i=1,2,\ldots,N-1$

$$c_{iT-1} = E[U''(\tilde{W}_T)\cdot(\tilde{r}_{iT}-\tilde{r}_{NT})]$$

•) $G_{T-1} = (g_{iT-1})$ $\quad i=1,2,\ldots,N-1$

$$g_{iT-1} = E[U''(\tilde{W}_T)\cdot(\tilde{r}_{iT}\cdot\tilde{r}_{NT}-\tilde{r}_{NT}^2)]$$

La matriz de cuantias óptimas es

$$Y^*_{T-1} = \mu\cdot D_{T-1} + \lambda\cdot W_{T-1}\cdot H_{T-1}$$

y la **cuantía óptima que debe invertirse en cada activo i (i=1,2,...,N-1) en el momento T-1 es:**

$$Y^*_{iT-1} = \mu\cdot d_{iT-1} + \lambda\cdot h_{iT-1}\cdot W_{T-1} \qquad [95]$$

donde

•) $D_{T-1} = -\frac{1}{\lambda}\cdot(A_{T-1})^{-1}\cdot C_{T-1}$

$D_{T-1} = (d_{iT-1})$ $\quad i=1,2,\ldots,N-1$

•) $H_{T-1} = -\frac{1}{\lambda}\cdot(A_{T-1})^{-1}\cdot G_{T-1}$

$H_{T-1} = (h_{iT-1})$ $\quad i=1,2,\ldots,N$

La máxima utilidad esperada de $\tilde{W}_T$ se obtiene sustituyendo en $E[U(\tilde{W}_T)]$ la cuantía invertida en cada título en el momento T-1 por la cuantía óptima que hemos encontrado y la función resultante es la función de utilidad "derivada" para $\tilde{W}_{T-1}$:

$$f_{T-1}(\tilde{W}_{T-1}) = \text{Max } E[U(\tilde{W}_T)] = E[U(\tilde{W}_T^{*})] =$$

$$= E\left\{U\left[\tilde{W}_{T-1}\cdot\tilde{r}_{NT} + \sum_{i=1}^{N-1} Y^{*}_{iT-1}\cdot(\tilde{r}_{iT} - \tilde{r}_{NT})\right]\right\} =$$

$$= E\left\{U\left[\tilde{W}_{T-1}\cdot\tilde{r}_{NT} + \sum_{i=1}^{N-1} (\mu\cdot d_{iT-1} + \lambda\cdot h_{iT-1}\cdot\tilde{W}_{T-1})\cdot(\tilde{r}_{iT} - \tilde{r}_{NT})\right]\right\} =$$

$$= E\left\{U\left[\left[\tilde{r}_{NT} + \lambda\cdot\sum_{i=1}^{N-1} h_{iT-1}\cdot(\tilde{r}_{iT} - \tilde{r}_{NT})\right]\cdot\tilde{W}_{T-1} + \mu\cdot\sum_{i=1}^{N-1} d_{iT-1}\cdot(\tilde{r}_{iT} - \tilde{r}_{NT})\right]\right\} \quad [96]$$

En el caso que la función de utilidad considerada sea cuadrática es posible deducir exactamente cuál es la función $f_{T-1}(\tilde{W}_{T-1})$, posibilidad que desaparece cuando la utilidad del inversor viene representada por una función logarítmica o potencial.

El inversor, en el momento T-2 debe decidir como reparte su riqueza, $W_{T-2}$, para maximizar $E[f_{T-1}(\tilde{W}_{T-1})]$ sabiendo que

$$\tilde{W}_{T-1} = W_{T-2}\cdot\tilde{r}_{NT-1} + \sum_{i=1}^{N-1} Y_{iT-2}\cdot(\tilde{r}_{iT-1}-\tilde{r}_{NT-1})$$

Para ello será necesario igualar a cero la derivada

$$\frac{E[f_{T-1}(\tilde{W}_{T-1})]}{dY_{iT-2}} = E\left[f'_{T-1}(\tilde{W}_{T-1})\cdot\frac{d\tilde{W}_{T-1}}{dY_{iT-2}}\right]$$

pero como de las funciones de utilidad consideradas sólo conocemos la relación entre su primera y segunda derivada, deberemos encontrar una relación parecida para las funciones de utilidad "derivadas".

Las dos primeras derivadas de la función [96] son

$$\bullet)\ f'_{T-1}(\tilde{W}_{T-1}) = E\left[U'(\tilde{W}^*_T)\cdot\frac{d\tilde{W}^*_T}{d\tilde{W}_{T-1}}\right] =$$

$$= E\left[U'(\tilde{W}^*_T)\cdot\left[\tilde{r}_{NT} + \lambda\cdot\sum_{i=1}^{N-1} h_{iT-1}\cdot(\tilde{r}_{iT} - \tilde{r}_{NT})\right]\right] \qquad [97]$$

$$\bullet)\ f''_{T-1}(\tilde{W}_{T-1}) = E\left[U''(\tilde{W}^*_T)\cdot\left[\tilde{r}_{NT} + \lambda\cdot\sum_{i=1}^{N-1} h_{iT-1}\cdot(\tilde{r}_{iT} - \tilde{r}_{NT})\right]^2\right] =$$

$$= E\left[-\frac{U'(\tilde{W}^*_T)}{\mu + \lambda\cdot\tilde{W}^*_T}\cdot\left[\tilde{r}_{NT} + \lambda\cdot\sum_{i=1}^{N-1} h_{iT-1}\cdot(\tilde{r}_{iT} - \tilde{r}_{NT})\right]^2\right] \qquad [98]$$

Si en [98] se considera que

$$\mu + \lambda\cdot\tilde{W}^*_T =$$

$$= \mu + \lambda \cdot \left[ \tilde{W}_{T-1} \cdot \tilde{r}_{NT} + \sum_{i=1}^{N-1} \left(\mu \cdot d_{iT-1} + \lambda \cdot h_{iT-1} \cdot \tilde{W}_{T-1}\right) \cdot \left(\tilde{r}_{iT} - \tilde{r}_{NT}\right) \right] =$$

$$= \lambda \cdot \left[ \tilde{r}_{NT} + \lambda \cdot \sum_{i=1}^{N-1} h_{iT-1} \cdot \left(\tilde{r}_{iT} - \tilde{r}_{NT}\right) \right] \cdot \tilde{W}_{T-1} + \mu \cdot \left[ 1 + \sum_{i=1}^{N-1} d_{iT-1} \cdot \left(\tilde{r}_{iT} - \tilde{r}_{NT}\right) \right]$$

se obtiene para $f''_{T-1}(\tilde{W}_{T-1})$ la siguiente expresión:

$$E \left[ \frac{- U'(\tilde{W}_T) \cdot \left[ \tilde{r}_{NT} + \lambda \cdot \sum_{i=1}^{N} h_{iT-1} \cdot \left(\tilde{r}_{iT} - \tilde{r}_{NT}\right) \right]^2}{\lambda \left[ \tilde{r}_{NT} + \lambda \cdot \sum_{i=1}^{N-1} h_{iT-1} \cdot \left(\tilde{r}_{iT} - \tilde{r}_{NT}\right) \right] \cdot \tilde{W}_{T-1} + \mu \left[ 1 + \lambda \cdot \sum_{i=1}^{N-1} d_{iT-1} \cdot \left(\tilde{r}_{iT} - \tilde{r}_{NT}\right) \right]} \right]$$

En el caso que $\mu \neq 0$, **no es posible deducir una relación entre $f'_{T-1}(\tilde{W}_{T-1})$ y $f''_{T-1}(W_{T-1})$ ni tampoco deducir una expresión para $Y^*_t$ ($t=0,1,2,\ldots,T-1$)**, por lo que para cada caso particular deberá determinarse la cuantía óptima de cada activo en la cartera.

### *5.6.3.1. Caso particular: $\mu = 0$*

Si $\mu=0$, entonces la matriz de cuantías óptimas en T-1, deducida de [95], es

$$Y^*_{T-1} = \lambda \cdot W_{T-1} \cdot H_{T-1}$$

es decir,

$$Y^*_{iT-1} = \lambda \cdot h_{iT-1} \cdot W_{T-1}$$

donde $H_{T-1} = (h_{iT-1})$ es la misma matriz que la definida para el caso general.

Si definimos

$$\bullet)\ M_{T-1} = \lambda \cdot H_{T-1} = \lambda \left[ - \frac{1}{\lambda} \cdot (A_{T-1})^{-1} \cdot G_{T-1} \right] = - (A_{T-1})^{-1} \cdot G_{T-1}$$

$$M_{T-1} = (m_{iT-1}) \qquad i=1,2,\ldots,N-1$$

la matriz de cuantías es

$$Y^*_{T-1} = W_{T-1} \cdot M_{T-1}$$

y la cuantía óptima que debemos invertir en el activo i $(i=1,2,\ldots,N-1)$ en el momento T-1 es

$$Y^*_{iT-1} = m_{iT-1} \cdot W_{T-1}$$

En este caso particular, la segunda derivada de la función de utilidad "derivada" de $\tilde{W}_{T-1}$ es

$$f''_{T-1}(\tilde{W}_{T-1}) = - \frac{1}{\lambda \cdot \tilde{W}_{T-1}} \cdot E\left[ U'(\tilde{W}^*_T) \cdot \left[ \tilde{r}_{NT} + \lambda \cdot \sum_{i=1}^{N-1} h_{iT-1} \cdot (\tilde{r}_{iT} - \tilde{r}_{NT}) \right] \right]$$

po lo que la relación entre las dos primeras derivadas de $f_{T-1}(\tilde{W}_{T-1})$ da lugar al siguiente cociente:

$$-\frac{f'_{T-1}(\tilde{W}_{T-1})}{f''_{T-1}(\tilde{W}_{T-1})} = \lambda \cdot \tilde{W}_{T-1}$$

que coincide con el cociente

$$-\frac{U'(\tilde{W}_{T-1})}{U''(\tilde{W}_{T-1})} = \lambda \cdot \tilde{W}_{T-1}$$

De esta coincidencia se deduce que $f_{T-1}(\tilde{W}_{T-1})$ es una transformación lineal de $U(\tilde{W}_{T-1})$ lo cual implica que estas dos funciones son equivalentes como funciones de utilidad $[f_{T-1}(\tilde{W}_{T-1}) \sim U(\tilde{W}_{T-1})]$. Esta relación entre la función de utilidad "derivada" y la original permite sustituir la primera por la segunda para determinar, en el momento T-2, la composición óptima de la cartera del penúltimo periodo.

La equivalencia citada se cumplirá para cualquier punto decisorio t $(t=0,1,2,....,T-1)$

$$f_t(\tilde{W}_t) \sim U(\tilde{W}_t)$$

y, como consecuencia, para cada periodo es suficiente maximizar la utilidad esperada original de la riqueza disponible al final del mismo pudiendo prescindir de todo lo que hace referencia a otros periodos que no sean el que se está considerando. En definitiva, puede decirse que **la política miope es la óptima si todos los títulos que componen la cartera son arriesgados y el parámetro $\mu$ de la función de utilidad es nulo.**

Si en cada periodo optimizamos la función de utilidad original se puede generalizar para cualquier t $(t=0,1,2,...,T-1)$ el resultado obtenido para $t=T-1$:

$$Y_t^* = W_t \cdot M_t$$

donde

•) $Y_t^* = (Y_{it}^*) \qquad i=1,2,\ldots,N$

•) $M_t = -\,(A_t)^{-1} \cdot G_t$

$M_t = (m_{it}) \qquad i=1,2,\ldots,N$

•) $A_t = (a_{ijt}) \qquad i=1,2,\ldots,N;\; j=1,2,\ldots,N$

$$a_{ijt} = E[U''(\tilde{W}_{t+1}) \cdot (\tilde{r}_{it+1} - \tilde{r}_{Nt+1})^2] \qquad i=j$$
$$a_{ijt} = E[U''(\tilde{W}_{t+1}) \cdot (\tilde{r}_{it+1} - \tilde{r}_{Nt+1}) \cdot (\tilde{r}_{jt+1} - \tilde{r}_{Nt+1})] \qquad i\neq j$$

•) $G_t = (g_{it}) \qquad i=1,2,\ldots,N$

$$g_{it} = E[U''(\tilde{W}_{t+1}) \cdot (\tilde{r}_{it+1} \cdot \tilde{r}_{Nt+1} - \tilde{r}_{Nt+1}^2)]$$

### *5.6.3.2. Posibilidad de prestar y tomar prestado*

En el caso que el inversor pueda prestar dinero o endeudarse, la relación entre $\tilde{W}_{t+1}$ y $W_t$ $(t=0,1,2,\ldots,T-1)$ tal como se dedujo en el apartado 5.5.3.2. es

$$\tilde{W}_{t+1} = W_t + \sum_{i=1}^{N} Y_{it} \cdot \tilde{r}_{it+1}$$

En el momento T-1, el inversor debe decidir como reparte la riqueza con la que cuenta en ese momento, $W_{T-1}$, con el fin de maximizar la utilidad esperada de la riqueza en T, teniendo en cuenta que

$$\tilde{W}_T = W_{T-1} + \sum_{i=1}^{N} Y_{iT-1} \cdot \tilde{r}_{iT}$$

$$-\frac{U'(\tilde{W}_T)}{U''(\tilde{W}_T)} = \mu + \lambda \cdot \tilde{W}_T$$

La condición necesaria para maximizar la función de utilidad esperada es

$$\frac{dE[U(\tilde{W}_T)]}{dY_{iT-1}} = 0 \qquad \forall i,\ i=1,2,\ldots,N$$

Y, para este caso particular, esta derivada tienen la siguiente expresión

$$\frac{dE[U(\tilde{W}_T)]}{dY_{iT-1}} = E\left[U'(\tilde{W}_T) \cdot \frac{d\tilde{W}_T}{dY_{iT-1}}\right] = E\left[-\ U''(\tilde{W}_T) \cdot (\mu + \lambda \cdot \tilde{W}_T) \cdot \tilde{r}_{iT}\right] =$$

$$= -\ E\left\{U''(\tilde{W}_T) \cdot \left[\mu + \lambda \cdot \left[W_{T-1} + \sum_{j=1}^{N} Y_{jT-1} \cdot \tilde{r}_{jT}\right] \cdot \tilde{r}_{iT}\right]\right\} =$$

$$= -\ \left\{(\mu + \lambda \cdot W_{T-1}) \cdot E[U''(\tilde{W}_T) \cdot \tilde{r}_{iT}] + \lambda \cdot Y_{iT-1} \cdot E[U''(\tilde{W}_T) \cdot \tilde{r}^2_{iT}] + \right.$$

$$+ \lambda\cdot\sum_{\substack{j=1\\ j\neq i}}^{N} Y_{jT-1}\cdot E[U''(\tilde{W}_T)\cdot\tilde{r}_{iT}\cdot\tilde{r}_{jT}]\Bigg\}$$

Para que esta derivada se anule se debe cumplir que

$$\lambda\cdot\left\{Y_{iT-1}\cdot E[U''(\tilde{W}_T)\cdot\tilde{r}^2_{iT}] + \sum_{\substack{j=1\\ j\neq i}}^{N} Y_{jT-1}\cdot E[U''(\tilde{W}_T)\cdot\tilde{r}_{iT}\cdot\tilde{r}_{jT}]\right\} =$$

$$= - (\mu + \lambda\cdot W_{T-1})\cdot E[U''(\tilde{W}_T)\cdot\tilde{r}_{iT}]$$

Matricialmente, el sistema de ecuaciones que resulta es

$$\lambda\cdot A_{T-1}\cdot Y^*_{T-1} = - (\mu + \lambda\cdot W_{T-1})\cdot C_{T-1}$$

donde

•) $Y^*_{T-1} = (Y^*_{iT-1})$ $\qquad i=1,2,\ldots,N$

•) $A_{T-1} = (a_{ijT-1})$ $\qquad i=1,2,\ldots,N;\ j=1,2,\ldots,N$

$$a_{ijT-1} = E[U''(\tilde{W}_T)\cdot\tilde{r}^2_{iT}] \qquad i=j$$
$$a_{ijT-1} = E[U''(\tilde{W}_T)\cdot\tilde{r}_{iT}\cdot\tilde{r}_{jT}] \qquad i\neq j$$

•) $C_{T-1} = (c_{iT-1})$ $\qquad i=1,2,\ldots,N$

$$c_{iT-1} = E[U''(\tilde{W}_T)\cdot\tilde{r}_{iT}]$$

Haciendo

$$\bullet)\ D_{T-1} = -\frac{1}{\lambda}\cdot(A_{T-1})^{-1}\cdot C_{T-1}$$

$$D_{T-1} = (d_{iT-1}) \qquad\qquad i=1,2,\dots,N$$

la matriz de cuantías óptimas es

$$Y^{*}_{T-1} = (\mu + \lambda\cdot\tilde{W}_{T-1})\cdot D_{T-1}$$

es decir, la cuantía que debe invertirse en el activo i $(i=1,2,\dots,N)$ es:

$$Y^{*}_{iT-1} = d_{iT-1}\cdot(\mu + \lambda\cdot\tilde{W}_{T-1})$$

La función de utilidad "derivada" para $\tilde{W}_{T-1}$ se obtiene del siguiente modo:

$$f_{T-1}(\tilde{W}_{T-1}) = \text{Max } E[U(\tilde{W}_T)] = E[U(\tilde{W}^{*}_T)] =$$

$$= E\left\{U\left[\tilde{W}_{T-1} + \sum_{i=1}^{N} Y^{*}_{iT-1}\cdot\tilde{r}_{iT}\right]\right\} =$$

$$= E\left\{U\left[\tilde{W}_{T-1} + (\mu + \lambda\cdot\tilde{W}_{T-1})\cdot\sum_{i=1}^{N} d_{iT-1}\cdot\tilde{r}_{iT}\right]\right\} =$$

$$= E\left\{U\left[\left[1 + \lambda\cdot\sum_{i=1}^{N} d_{iT-1}\cdot\tilde{r}_{iT}\right]\cdot W_{T-1} + \mu\cdot\sum_{i=1}^{N} d_{iT-1}\cdot\tilde{r}_{iT}\right]\right\} \qquad [100]$$

Las dos primeras derivadas de esta función son

$$\cdot)\ f'_{T-1}(\tilde{W}_{T-1}) = E\left[U'(\tilde{W}^*_T)\cdot\frac{d\tilde{W}_T}{d\tilde{W}_{T-1}}\right] =$$

$$= E\left[U'(\tilde{W}^*_T)\cdot\left[1 + \lambda\cdot\sum_{i=1}^{N} d_{iT-1}\cdot\tilde{r}_{iT}\right]\right] \qquad [101]$$

$$\cdot)\ f''_{T-1}(\tilde{W}_{T-1}) = E\left[U''(\tilde{W}^*_T)\cdot\left[1 + \lambda\cdot\sum_{i=1}^{N} d_{iT-1}\cdot\tilde{r}_{iT}\right]^2\right] =$$

$$= -\,E\left[\frac{U'(\tilde{W}^*_T)}{\mu + \lambda\cdot\tilde{W}^*_T}\cdot\left[1 + \lambda\cdot\sum_{i=1}^{N} d_{iT-1}\cdot\tilde{r}_{iT}\right]^2\right] \qquad [102]$$

Si en [102] se considera que

$$\mu + \lambda\cdot\tilde{W}^*_T = \mu + \lambda\cdot\left[\tilde{W}_{T-1} + (\mu + \lambda\cdot\tilde{W}_{T-1})\cdot\sum_{i=1}^{N} d_{iT-1}\cdot\tilde{r}_{iT}\right] =$$

$$= (\mu + \lambda\cdot\tilde{W}_{T-1})\cdot\left[1 + \sum_{i=1}^{N} d_{iT-1}\cdot\tilde{r}_{iT}\right]$$

la segunda derivada, [102], es

$$f''_{T-1}(\tilde{W}_{T-1}) = -\,\frac{1}{\mu + \lambda\cdot\tilde{W}_{T-1}}\cdot E\left[U''(\tilde{W}^*_T)\cdot\left[1 + \lambda\cdot\sum_{i=1}^{N} d_{iT-1}\cdot\tilde{r}_{iT}\right]^2\right] \qquad [103]$$

El cociente entre las dos primeras derivadas de la función $f_{T-1}(\tilde{W}_{T-1})$, teniendo en cuenta [101] y [103] es:

$$- \frac{f'_{T-1}(\tilde{W}_{T-1})}{f''_{T-1}(\tilde{W}_{T-1})} = \mu + \lambda \cdot \tilde{W}_{T-1}$$

De este resultado se deriva que $f_{T-1}(\tilde{W}_{T-1})$ es una transformación lineal de $U(\tilde{W}_{T-1})$ y como consecuencia podemos actuar en el penúltimo periodo maximizando la función de utilidad original. La equivalencia entre la función de utilidad derivada y la función de utilidad original para $\tilde{W}_{T-1}$ $[f_{T-1}(\tilde{W}_{T-1}) \sim U(\tilde{W}_{T-1})]$ puede generalizarse para cualquier punto decisorio t $(t=0,1,2,\ldots,T-1)$

$$f_t(\tilde{W}_t) \sim U(\tilde{W}_t)$$

pudiéndose concluir que **la política miope es la óptima** para el caso que estamos estudiando.

Si en cada punto decisorio t $(t=0,1,2,\ldots,T-1)$ podemos prescindir del futuro y basar la decisión en las distribuciones de probabilidad y la función de utilidad del periodo considerado, se obtienen los siguientes resultados:

$$Y_t^* = (\mu + \lambda \cdot W_t) \cdot D_t$$

$$Y_{it}^* = d_{it} \cdot (\mu + \lambda \cdot W_t)$$

donde

•) $Y_t^* = (Y_{it}^*)$ $\qquad i=1,2,\ldots,N$

•) $D_t = -\frac{1}{\lambda}\cdot(A_t)^{-1}\cdot C_t$

$D_t = (d_{it})$ $\quad i=1,2,\ldots,N$

•) $A_t = (a_{ijt})$ $\quad i=1,2,\ldots,N;\ j=1,2,\ldots,N$

$$a_{ijt} = E[U''(\tilde{W}_{t+1})\cdot\tilde{r}^2_{it+1}] \qquad i=j$$
$$a_{ijt} = E[U''(\tilde{W}_{t+1})\cdot\tilde{r}_{it+1}\cdot\tilde{r}_{jt+1}] \qquad i\neq j$$

•) $C_t = (c_{it})$ $\quad i=1,2,\ldots,N$

$$c_{it} = E[U''(\tilde{W}_{t+1})\cdot\tilde{r}_{it+1}]$$

## *5.7. Media Geométrica y maximización directa de la función de utilidad logarítmica*

En el apartado **3.7.** se definió la Media Geométrica de la rentabilidad de la cartera para un periodo como

$$MG = \prod_{s=1}^{S} (\tilde{R}'_{cst+1})^{q_{st+1}} \qquad t=0,1,2,\ldots,T-1$$

donde

$$\tilde{R}'_{ct+1} = 1 + \tilde{R}_{ct+1}$$

y $\tilde{R}_{ct+1}$ es la variable aleatoria que representa la tasa de rentabilidad de la cartera en el momento t+1 $(t=0,1,2\ldots,T-1)$ que puede tomar S valores distintos $(\tilde{R}_{cst+1})$ cada uno de los cuales tiene asociada una probabilidad $q_{st+1}$ $(s=1,2,\ldots,S)$.

En el mismo apartado 3.7. quedó demostrado que si la función de utilidad de la riqueza obtenida al final de un periodo (en t+1, t=0,1,...,T-1) era logarítmica $[U(\tilde{W}_{t+1}) = \ln \tilde{W}_{t+1}]$, entonces maximizar la utilidad esperada equivalía a maximizar la Media Geométrica.

Ahora trataremos de establecer la relación del criterio Media Geométrica con la maximización de la utilidad esperada de la riqueza disponible en T, $[\text{Max } E[U(\tilde{W}_T)]]$.

Sea[248]

•) $U(\tilde{W}_T) = \ln \tilde{W}_T$

•) $\tilde{W}_T = W_0 \cdot \prod_{t=0}^{T-1} (1 + \tilde{R}_{ct+1}) = \tilde{W}_0 \cdot \prod_{t=0}^{T-1} \tilde{R}'_{ct+1}$

la utilidad esperada de la riqueza final es

$$E[U(\tilde{W}_T)] = E\left\{\ln \left[W_0 \cdot \prod_{t=0}^{T-1} \tilde{R}'_{ct+1}\right]\right\} =$$

$$= E\left[\ln W_0 + \ln \prod_{t=0}^{T-1} \tilde{R}'_{ct+1}\right] = \ln W_0 + E\left[\ln \prod_{t=0}^{T-1} \tilde{R}'_{ct+1}\right] =$$

[248] *Véase el apartado* **5.2.** *del presente trabajo donde se deduce la relación entre* $\tilde{W}_T$ y $W_0$.

$$= \ln W_0 + E\left[\sum_{t=0}^{T-1} \ln \tilde{R}'_{ct+1}\right] = \ln W_0 + \sum_{t=0}^{T-1} E(\ln \tilde{R}'_{ct+1}) =$$

$$= \ln W_0 + \sum_{t=0}^{T-1} \left[\sum_{s=1}^{S} (\ln \tilde{R}'_{cst+1})\cdot q_{st+1}\right] =$$

$$= \ln W_0 + \sum_{t=0}^{T-1} \left[\sum_{s=1}^{S} (\ln \tilde{R}'_{cst+1})^{q_{st+1}}\right] =$$

$$= \ln W_0 + \sum_{t=0}^{T-1} \left\{\ln \left[\prod_{s=1}^{S} \tilde{R}'_{cst+1}{}^{q_{st+1}}\right]\right\} =$$

$$= \ln W_0 + \ln \left\{\prod_{t=0}^{T-1}\cdot \left[\prod_{s=1}^{S} \tilde{R}'_{cst+1}{}^{q_{st+1}}\right]\right\}$$

En definitiva, si se cumple que

$$E[U(\tilde{W}_T)] = \ln W_0 + \ln \left\{\prod_{t=0}^{T-1}\cdot \left[\prod_{s=1}^{S} (\tilde{R}'_{cst+1})^{q_{st+1}}\right]\right\}$$

entonces Max $E[U(\tilde{W}_T)]$ equivale a

$$\text{Max} \prod_{s=1}^{S} (\tilde{R}'_{cst+1})^{q_{st+1}} \qquad \forall t,\ t=0,1,2,\dots,T-1$$

Es decir, el inversor que maximiza periodo a periodo la media

**geométrica de la rentabilidad de la cartera está maximizando**[249] **la utilidad esperada de la riqueza disponible en el momento T.** Y como maximizar la media geométrica de cada periodo equivale a maximizar la utilidad esperada de la riqueza disponible al final de cada uno de ellos[250], vuelve a obtenerse la misma conclusión que la obtenida en el apartado **5.6.2.3.** donde, con un carácter más general, se dedujo que para funciones que cumplían

$$- \frac{U'(\tilde{W}_T)}{U''(\tilde{W}_T)} = \lambda \cdot \tilde{W}_T$$

la política miope es la óptima siempre.

**Antón, Bosch, Martínez de Albéniz, Nausirat y Romero**[251] consideran que el objetivo perseguido al utilizar la Media Geométrica como criterio de selección de carteras es el de obtener el máximo crecimiento esperado de la riqueza, lo cual no está en contradicción con el señalado por nosotros puesto que al maximizar el crecimiento se está *maximizando la riqueza en T y cuanto mayor sea ésta mayor será también la* utilidad obtenida de ella (preferencia por la riqueza). Los autores señalan, en coincidencia con nuestros resultados, que

---

[249] Esta conclusión coincide con la obtenida por **Elton** y **Gruber** en sus trabajos:
**E.J.ELTON-M.J.GRUBER**, "On the Maximization of the Geometric Mean with Lognormal Return Distribution", M.S., 1974 b), pp.484-485.
**E.J.ELTON-M.J.GRUBER**, op. cit., 1974 a), pp.232-237.

[250] Véase el apartado **3.7.3.** del presente trabajo donde se demuestra esta conclusión.

[251] **A.ANTON LOPEZ - M.BOSCH PRINCEP - F.J.MARTINEZ DE ALBENIZ SALAS - N.M.NAUSIRAT - Mª.J.ROMERO SANTO-TOMAS**, "Selección de Cartera: el enfoque de la Media Geométrica", artículo no publicado, 1990, pp.3-6.

> ...dado un horizonte multiperiódico, la cartera que maximiza la media geométrica en cada periodo es la que produce el crecimiento máximo esperado de riqueza.

Asimismo, la maximización de $E[U(\tilde{W}_T)]$ donde $U(\tilde{W}_T) = \ln \tilde{W}_T$ es consistente con la maximización de una función de utilidad esperada de la rentabilidad para el conjunto de T periodos:

$$\text{Max } E[U(\tilde{R}_T)]$$

*donde*

•) $U(\tilde{R}_T) = \ln \tilde{R}_T$

•) $\tilde{R}_T = \prod_{t=0}^{T-1} (1 + \tilde{R}_{ct+1})$

De hecho,

$$E[U(\tilde{W}_T)] = E[\ln \tilde{W}_T] = E\left\{\ln\left[W_0 \cdot \prod_{t=0}^{T-1} (1 + \tilde{R}_{ct+1})\right]\right\} =$$

$$= \ln W_0 + E\left\{\ln\left[\prod_{t=0}^{T-1} (1 + \tilde{R}_{ct+1})\right]\right\} = \ln W_0 + E[\ln \tilde{R}_T] = \ln W_0 + E[U(\tilde{R}_T)]$$

de donde se desprende que maximizar $E[U(\tilde{W}_T)]$ equivale a maximizar $E[U(\tilde{R}_T)]$, conclusión que también obtienen **Elton y Gruber**[252].

[252] **E.J.ELTON-M.J.GRUBER**, op. cit., J.B., 1974 a), pp.237-239.