Estabilitat efectiva i tors invariants de sistemes hamiltonians quasi-integrables

Pere Gutiérrez i Serrés

Memòria presentada per aspirar al
grau de Doctor en Ciències Matemàtiques

Departament de Matemàtica Aplicada i Anàlisi
Universitat de Barcelona

Barcelona, abril de 1995

Certifico que la present memòria ha estat realitzada per Pere Gutiérrez i Serrés, i dirigida per mi, al Departament de Matemàtica Aplicada i Anàlisi de la Universitat de Barcelona.

Barcelona, abril de 1995

Amadeu Delshams i Valdés

Índex

Capítol 1

Introducció

L'objecte dels treballs recollits en aquesta memòria és fer algunes contribucions a diversos aspectes del problema de l'estabilitat en sistemes hamiltonians quasi-integrables. Aquests aspectes inclouen, d'una banda, resultats d'estabilitat efectiva, que comporten el confinament de trajectòries durant un interval de temps molt gran. També inclouen resultats que estableixen l'existència de tors invariants, entre els quals cal distingir els tors KAM i tors de dimensió inferior. Els tors KAM asseguren l'estabilitat d'un gran nombre de trajectòries, però al voltant de tors de dimensió inferior poden ésser localitzades zones de comportament caòtic i fins i tot d'inestabilitat.

Comencem descrivint el marc dins el qual ens inscrivim. Considerem un *hamiltonià quasi-integrable,* amb n graus de llibertat, escrit en *variables acció–angle:*

$$H(\phi, I) = h(I) + f(\phi, I), \tag{1.1}$$

on $\phi = (\phi_1, \ldots, \phi_n) \in \mathbf{T}^n$ i $I = (I_1, \ldots, I_n) \in \mathcal{G} \subset \mathbf{R}^n$ són, respectivament, les variables angulars i d'acció, i f és una pertorbació petita, de mida ε, del hamiltonià integrable h. Les equacions hamiltonianes associades a (1.1) són:

$$\dot{\phi}_j = \omega_j(I) + \frac{\partial f}{\partial I_j}(I), \quad \dot{I}_j = -\frac{\partial f}{\partial \phi_j}(I), \qquad j = 1, \ldots, n,$$

essent $\omega_j(I) = \frac{\partial h}{\partial I_j}(I)$.

La dinàmica associada al hamiltonià no pertorbat h és ben senzilla: les accions $I(t)$ són constants per a totes les trajectòries. Per tant, tots els tors n-dimensionals $I = \text{const.}$ a l'espai de fase $\mathbf{T}^n \times \mathcal{G}$ són invariants. El flux sobre cada tor és lineal, amb *freqüències* $\omega_j(I)$, $j = 1, \ldots, n$. Escriurem $\omega(I) = (\omega_1(I), \ldots, \omega_n(I)) = \operatorname{grad} h(I)$ l'aplicació freqüència.

En canvi, per al hamiltonià pertorbat (1.1) quan $\varepsilon \neq 0$, la dinàmica pot ésser molt complicada, com ja havia mostrat H. Poincaré en estudiar problemes de mecànica celest.

En general, pot haver-hi trajectòries caòtiques, i fins i tot és possible la *difusió d'Arnol'd.* Aquest fenomen consisteix en l'existència de trajectòries inestables en el sentit que poden allunyar-se indefinidament de llurs condicions inicials, però generalment és difícil de detectar degut a la seva extrema lentitud. Hom creu que la difusió és habitual entre els sistemes hamiltonians amb més de dos graus de llibertat, i de fet ha estat posada de manifest en alguns casos per V. I. Arnol'd i d'altres autors. Malgrat la possible existència de difusió, han estat obtinguts resultats molt valuosos que asseguren certs tipus d'estabilitat; els principals són els teoremes de Nekhoroshev i KAM (Kolmogorov–Arnol'd–Moser).

El *teorema de Nekhoroshev,* provat per primer cop a [Nek], condueix al concepte d'*estabilitat efectiva.* Dóna una fita superior de la velocitat mitjana de difusió tan petita que no és possible detectar-la per cap ordre d'aproximació de la teoria clàssica de pertorbacions. Aquest teorema estableix que, si la part integrable h satisfà determinades *condicions d'escarpament,* aleshores una fita del tipus

$$|I(t) - I(0)| \le \rho_0\, \varepsilon^b \qquad \text{si} \quad |t| \le T_0 \cdot \exp\left\{ \left(\frac{\varepsilon_0}{\varepsilon}\right)^a \right\} ,$$

és vàlida per a totes les condicions inicials $(\phi(0), I(0)) \in \mathbf{T}^n \times \mathcal{G}$. Els *exponents d'estabilitat* a i b són constants positives.

Les condicions d'escarpament, introduïdes per N. N. Nekhoroshev, inclouen funcions molt generals. Entre elles s'hi compten les funcions *quasiconvexes,* cas en el qual els exponents d'estabilitat han estat millorats al llarg de successius treballs. Així, l'exponent $a = 2/(n^2+n)$ fou trobat a [BGG], i $a < 1/(2n+1)$ a [Lo1]. Finalment, els exponents

$$a = b = \frac{1}{2n} ,$$

han estat obtinguts per P. Lochak, A. I. Neishtadt i J. Pöschel [LN, Pos2]. Precisament, una conjectura de B. V. Chirikov [Chir] estableix que l'exponent $a = 1/2n$ és l'*òptim.*

Un altre cas en què es satisfan fites anàlogues a les de Nekhoroshev és el d'una pertorbació d'un sistema d'*oscil·ladors harmònics:* $H(\phi, I) = \lambda \cdot I + f(\phi, I)$, on el vector de freqüències $\lambda = (\lambda_1, \dots, \lambda_n) \in \mathbf{R}^n$ satisfà una condició diofàntica:

$$|k \cdot \lambda| \ge \frac{\gamma}{|k|_1^\tau} \qquad \forall k \in \mathbf{Z}^n \setminus \{0\}, \tag{1.2}$$

essent $\tau \ge n-1$ i $\gamma > 0$ (és sabut que, si $\tau > n-1$, el conjunt de vectors λ que satisfan aquesta condició amb $\gamma > 0$ donat té mesura relativa $1 - \mathcal{O}(\gamma)$ a $\mathbf{R}^n$). Usem la notació $|k|_1 = \sum_{j=1}^n |k_j|$ per a $k = (k_1, \dots, k_n)$. Direm que un vector λ és τ, γ-*diofàntic* quan satisfaci (1.2). En aquest cas, sembla que l'exponent òptim d'estabilitat és $a = 1/(\tau+1)$. Aquest exponent ha estat obtingut a [Fa, DG1, Pos2]. L'estabilitat efectiva prop d'un punt fix el·líptic d'un hamiltonià, cas molt relacionat amb el dels oscil·ladors harmònics, ha estat establerta a [GDFGS].

El *teorema KAM* estableix, sota una condició de no degeneració adequada, que la major part dels tors invariants n-dimensionals es conserven amb certa deformació al sistema pertorbat (1.1) si la mida ε de la pertorbació és prou petita. Precisant més, la conservació d'un tor és garantida quan el vector de freqüències $\omega(I) = \operatorname{grad} h(I)$ és suficientment no ressonant, concretament quan satisfà una condició diofàntica. D'aquesta manera, hom obté *estabilitat perpètua,* però només per a condicions inicials en un conjunt cantorià, el qual no conté cap subconjunt obert si bé la seva mesura relativa és gran. De fet, primer fou establerta per A. N. Kolmogorov [Ko], per a hamiltonians analítics, la conservació d'un tor fixat, convenientment escollit. Posteriorment, V. I. Arnol'd [Ar1] (vegeu també [Pos1]) provà l'existència d'una extensa família de tors invariants i dóna una fita de la mesura del complementari del conjunt invariant. Un teorema anàleg per a aplicacions del pla que preserven àrea fou provat per J. Moser [Mo1], sense la hipòtesi d'analiticitat.

En relació a la condició de no degeneració requerida per a la validesa del teorema KAM, hom imposa usualment dos tipus de condicions sobre l'aplicació freqüència no pertorbada ω; són la *no degeneració de Kolmogorov* i la *no degeneració isoenergètica* (vegeu les definicions (4.1–4.2)). Hi ha lleus diferències entre les versions del teorema KAM que corresponen a cada tipus de no degeneració. En efecte, a la versió ordinària del teorema KAM, és a dir, sota la condició de Kolmogorov, cada tor invariant que es conserva manté el seu vector de freqüències a la pertorbació. Per contra, a la versió isoenergètica el vector de freqüències habitualment no es conserva però, en canvi, cada tor invariant guarda les raons entre les seves freqüències i, a més, sobre cada nivell d'energia fixat es conserven la majoria dels tors invariants. Una famosa conseqüència d'aquest fet, per a dos graus de llibertat ($n = 2$), és que de la no degeneració isoenergètica es dedueix l'estabilitat del sistema pertorbat.

Esmentem que aquestes condicions de no degeneració s'inclouen en una condició molt general introduïda per H. Rüssmann [Ru2], sota la qual han estat obtingudes recentment proves del teorema KAM [XYQ, Se]. No obstant, en aquesta versió general hom perd el control de les freqüències dels tors pertorbats.

Sobre la possible estabilitat de les trajectòries que no es troben sobre tors invariants n-dimensionals, el teorema KAM no assegura res. Poden aparèixer zones de comportament caòtic i quan $n > 2$ pot tenir-hi lloc la difusió. Aquestes zones caòtiques són properes a ressonàncies; en elles els tors invariants n-dimensionals del sistema no pertorbat generalment es destrueixen però hom hi pot trobar *tors de dimensió inferior* a n, alguns dels quals seran de tipus hiperbòlic o *tors amb bigotis.* De fet, H. Poincaré [Poi] havia mostrat ja l'existència d'òrbites periòdiques (tors invariants unidimensionals), i que la presència d'òrbites periòdiques hiperbòliques pot donar lloc a comportament caòtic si existeixen interseccions homoclíniques o heteroclíniques entre les varietats invariants.

Sobre l'existència de tors hiperbòlics més generals, i llurs varietats invariants, han estat obtinguts diversos resultats [Mo2, Gr, Ze2, De, LW, Tr], però molts d'ells no són satisfactoris car suposen que el hamiltonià no pertorbat ja posseeix tors hiperbòlics. Entre els treballs citats, només a [De, LW, Tr] els tors no pertorbats són degenerats, com al hamiltonià (1.1), però en general la descripció de les varietats invariants es restringeix a un entorn del tor hiperbòlic, la qual cosa fa díficil detectar llur possible intersecció.

Amb la intenció de detectar el fenomen de la difusió, V. I. Arnol'd descrigué, mitjançant un exemple que ha esdevingut famós [Ar1], el mecanisme de les cadenes de transició. Aquest mecanisme es basa en el fet que, si hom troba interseccions heteroclíniques entre varietats invariants de successius tors hiperbòlics d'una cadena, llavors entorns arbitraris del primer i el darrer d'aquests tors són connectats per trajectòries del sistema.

Tornant als teoremes de Nekhoroshev i KAM, llurs proves habituals no posen en relleu la profunda relació que existeix entre els diferents tipus d'estabilitat a què donen lloc aquests teoremes. Així, l'existència dels tors KAM no és usada per a res dins la prova del teorema de Nekhoroshev. D'altra banda, el teorema de Nekhoroshev dóna un temps d'estabilitat uniforme per a totes les trajectòries a l'espai de fase, incloent aquelles que es troben sobre tors KAM, que són les més nombroses, i tenen evidentment un temps d'estabilitat infinit. Hom pot esperar que, per a una trajectòria que comenci prop d'un tor KAM, el temps d'estabilitat sigui molt més gran que el que prediu el teorema de Nekhoroshev. Resultats en aquest sentit, que comporten que els tors KAM són "enganxosos", han estat establerts recentment per A. D. Perry, S. Wiggins, A. Morbidelli i A. Giorgilli [PW, MG2].

Passem a descriure els continguts d'aquesta memòria. En primer lloc, incloem un enfocament unificat per als teoremes de Nekhoroshev i KAM, ja anunciat a [DG2]. Després d'una primera part on establim el mètode comú (capítol 2), provem de manera quantitativa el teorema de Nekhoroshev en el cas quasiconvex amb l'exponent òptim (capítol 3), i el teorema KAM isoenergètic (capítol 4). La nostra prova del teorema isoenergètic és directa, contràriament a les proves usuals on es dedueix del teorema KAM ordinari (vegeu, per exemple, [BH]) o bé fent ús de l'aplicació de Poincaré associada (vegeu [Mo3]).

A més a més, obtenim al capítol 4 un resultat d'estabilitat que constitueix un pont entre els teoremes KAM i de Nekhoroshev, similar als de [PW, MG2] però lleugerament diferent d'aquests. El resultat que provem considera els tors invariants del sistema no pertorbat tals que llur vector de freqüències associat satisfà aproximadament una condició diofàntica, fins una precisió donada r. Al sistema pertorbat, aquests tors sobreviuen en la forma de *tors quasi-invariants,* noció que expressa que les trajectòries que parteixen d'un d'aquests tors hi romanen a prop durant un temps exponencialment gran en $1/r$. D'aquesta manera, la precisió r passa a constituir un paràmetre de pertorbació a més de ε (notem que per a $r = 0$ tenim els tors KAM).

En canvi, les fites d'estabilitat són expressades a [PW, MG2] prenent com a paràmetre de pertorbació la distància a un tor KAM fixat, significant d'aquesta manera que aquest tor és "enganxós". Llavors el temps d'estabilitat és exponencialment gran en l'invers d'aquesta distància (o fins i tot "superexponencialment" gran per a hamiltonians quasi-convexos [MG2]). A la nostra prova, no veiem que els tors KAM són "enganxosos" però creiem que el nostre resultat és més útil a la pràctica, car les fites per a tors quasi-invariants no requereixen l'existència d'un tor KAM proper.

Al capítol 2 descrivim el mètode que seguim per a la prova dels teoremes de Nekhoroshev i KAM, i obtenim les primeres fites. Es tracta d'un procediment, usual dins la teoria clàssica de pertorbacions, que consisteix a construir una transformació canònica Ψ, que porti el nostre hamiltonià H a una *forma normal* $H^* = H \circ \Psi$, la qual hom demana que depengui de menys angles, o de cap si fos possible. La transformació Ψ és construïda de manera iterativa com a producte de transformacions canòniques successives $\Phi^{(1)}, \Phi^{(2)}, \ldots$, properes a la identitat, les quals donen lloc a successius hamiltonians $H^{(1)}, H^{(2)}, \ldots$ cada cop més propers a forma normal.

Construïm les successives transformacions canòniques fent ús del conegut *formalisme de les sèries de Lie,* que descrivim a la secció 2.1. Aquest és un procediment molt apropiat per a aplicacions pràctiques, perquè permet dur a terme càlculs explícits en exemples concrets, i pot ésser directament implementat en ordinadors.

És prou conegut que, en la construcció de la forma normal, apareix un obstacle sobre les ressonàncies o prop d'elles. Una *varietat ressonant* ve caracteritzada per un mòdul $\mathcal{M} \subset \mathbf{Z}^n$:

$$S_{\omega,\mathcal{M}} := \{ I \in \mathcal{G} \ : \ \ k \cdot \omega(I) = 0 \ \ \forall k \in \mathcal{M} \}. \tag{1.3}$$

L'obstacle ve de la presència dels *petits divisors* $k \cdot \omega(I)$, amb $k \in \mathcal{M}$, els quals poden ser zero o massa petits. És per la presència dels petits divisors que hom considera, prop de la ressonància $S_{\omega,\mathcal{M}}$, una *forma normal ressonant,* que pugui dependre de combinacions d'angles $k \cdot \phi$, amb $k \in \mathcal{M}$. La unió de totes les ressonàncies és densa en el conjunt de freqüències, però només cal considerar ressonàncies fins a un *ordre finit* apropiat: $|k|_1 \leq K$, ja que resulta que l'efecte de les ressonàncies d'ordre més alt és exponencialment petit en K. Així, direm que una funció $g(\phi, I)$ és en *forma normal respecte* $\mathcal{M}$ *de grau*

K si el seu desenvolupament de Fourier respecte les variables angulars es restringeix a la forma

$$g(\phi, I) = \sum_{\substack{k\in\mathcal{M}\\ |k|_1\le K}} g_k(I)\, e^{i\,k\cdot\phi},$$

la qual cosa expressarem escrivint $g \in \mathbf{R}(\mathcal{M}, K)$. Notem que una funció és en forma normal respecte el mòdul trivial $\mathcal{M} = 0$ (*forma normal no ressonant*) si no depèn de les variables angulars.

Començarem restringint-nos a un subconjunt $G \subset \mathcal{G}$, en el qual permetrem que el vector $\omega(I)$ satisfaci relacions de ressonància corresponents a un mòdul fixat $\mathcal{M}$, però exclourem un entorn de totes les altres ressonàncies d'ordre més petit o igual que K. En aquest cas direm que $\omega(G)$ és *no ressonant mòdul $\mathcal{M}$ fins ordre K* (vegeu definició (2.31)). En aquest conjunt G farem successives reduccions al tipus de forma normal que hem definit més amunt: els harmònics que corresponen a vectors enters satisfent $k \notin \mathcal{M}$, $|k|_1 \le K$, es fan cada cop més petits en els successius hamiltonians, mentre els harmònics que corresponen a $k \in \mathcal{M}$ o $|k|_1 > K$ han d'ésser guardats ja que en el conjunt G els petits divisors $k \cdot \omega(I)$ associats a aquests harmònics no són evitats. D'aquesta manera, el hamiltonià final $H^* = H \circ \Psi$ pot ésser escrit en la forma

$$H^*(\phi, I) = h\,(I) + Z^*\,(\phi, I) + R^*\,(\phi, I)\,,$$

on $Z^* \in \mathbf{R}(\mathcal{M}, K)$, i essent la resta R^* exponencialment petita en K.

De la mateixa manera que a [Nek, BGG], la prova del teorema de Nekhoroshev es divideix en dues parts, usualment anomenades analítica i geomètrica. Corresponen a la part analítica el procés iteratiu i les fites de les successives restes. A la part geomètrica, hom recobreix l'espai d'accions $\mathcal{G}$ amb una família de blocs associats als diferents mòduls per tal d'obtenir fites d'estabilitat per a les trajectòries corresponents a totes les condicions inicials. Una distinció similar pot ésser duta a terme a la prova del teorema KAM. En aquest cas, corresponen a la part geomètrica les fites de la mesura del complementari del conjunt invariant.

Donats $\mathcal{M}$ i K, considerem un subconjunt $G \subset \mathcal{G}$ en el qual es satisfaci la condició de no ressonància que hem esmentat més amunt. A la secció 2.1, mostrem com apliquem el mètode de les sèries de Lie, en la seva forma més simple, a la construcció del procés iteratiu, el qual és finit en la prova del teorema de Nekhoroshev i infinit per al teorema KAM (en aquest darrer cas, sempre prenem $\mathcal{M} = 0$). De fet, basant-nos en les sèries de Lie descrivim un *algorisme lineal* i un de *quadràtic*. Tot i que l'algorisme lineal és d'aparença més senzilla, mostrem que el càlcul explícit de la forma normal podria ésser una mica més ràpid usant l'algorisme quadràtic.

Definim a la secció 2.2 una *norma per a camps vectorials hamiltonians,* que ens és molt útil per a millorar les fites ja que evita haver de dur a terme certes derivades.

A les seccions 2.3 i 2.4 obtenim les versions lineal i quadràtica del lema iteratiu (proposicions 5 i 7, respectivament), que ens donen les fites per a un pas concret del procés iteratiu en cadascun dels dos algorismes. L'ús de la norma introduïda a la secció 2.2 ens permet d'optimitzar les fites del lema iteratiu lineal.

A la secció 2.5, apliquem successivament la versió lineal del lema iteratiu amb una K fixada i, duent a terme un nombre adequat de passos iteratius, obtenim el teorema de la forma normal (teorema 8), en el qual la fita obtinguda per a la resta R^* és exponencialment petita en K, i d'aquesta manera H^* és una forma normal aproximada, específica per al conjunt G. Aquest teorema completa la part analítica de la prova del teorema de Nekhoroshev. El mètode seguit en l'obtenció del teorema de la forma normal és anàleg al de J. Pöschel [Pos2], però la nostra prova esdevé quelcom més simple degut al fet que el lema iteratiu lineal ha estat optimitzat. D'altra banda, al final de la secció 2.5 veiem que també podem obtenir una versió essencialment equivalent del teorema de la forma normal a partir de la versió quadràtica del lema iteratiu. D'aquesta manera, per a obtenir l'exponent òptim del teorema de Nekhoroshev els dos algorismes són bons.

Els capítols 3 i 4 constitueixen la part central d'aquesta memòria. Al capítol 3 completem la prova del teorema de Nekhoroshev i obtenim altres resultats sobre estabilitat efectiva, i el capítol 4 és dedicat al teorema KAM i als tors quasi-invariants.

A partir del teorema de la forma normal, podem deduir fites d'estabilitat per a les trajectòries que parteixen de $\mathbf{T}^n \times G$, vàlides fins a un temps exponencialment gran. Les fites per a regions no ressonants ($\mathcal{M} = 0$) i ressonants ($\mathcal{M} \neq 0$) són donades a les seccions 3.1 i 3.2, respectivament. En el cas ressonant imposem la condició de quasiconvexitat.

Seguint [Pos2] en aquesta part geomètrica de la prova, a la secció 3.3 recobrim tot l'espai d'accions $\mathcal{G}$ amb una família de conjunts $G = G_{\mathcal{M}}$, que reben el nom de *blocs,* associats als diferents mòduls $\mathcal{M} \subset \mathbf{Z}^n$, amb paràmetres convenientment escollits. De fet, només hem de considerar mòduls generats per vectors enters d'ordre més petit o igual que K (els anomenem K-mòduls).

A la secció 3.4 completem la prova del teorema de Nekhoroshev (teorema 13), amb l'exponent òptim, escollint K convenientment en funció de ε i aplicant les fites d'estabilitat sobre cada bloc $G_{\mathcal{M}}$. D'aquesta manera, obtenim fites per a totes les trajectòries que parteixen de $\mathbf{T}^n \times \mathcal{G}$.

Com a aplicació addicional del teorema de la forma normal, també hem considerat a la secció 3.1 una pertorbació d'un sistema de n oscil·ladors harmònics amb freqüències satisfent una condició diofàntica. Les fites no ressonants del cas $\mathcal{M} = 0$ donen lloc a estabilitat efectiva en un sistema d'aquest tipus (teorema 10).

A la secció 3.5 veiem que podem millorar les fites d'estabilitat efectiva si ens restringim a un entorn de la varietat ressonant associada a un mòdul fixat $\mathcal{M}^*$, i obtenim uns exponents d'estabilitat particulars, que depenen de la dimensió de $\mathcal{M}^*$ (teorema 14). A més, apliquem aquestes fites al conegut exemple d'Arnol'd.

Ja dins el capítol dedicat al teorema KAM, a la secció 4.1 introduïm les condicions de no degeneració de Kolmogorov i isoenergètica sobre l'aplicació freqüència ω, i fem palès que el mètode que usem per a provar la versió isoenergètica del teorema KAM també ens serviria per a la versió ordinària (és a dir, sota la condició de Kolmogorov). També comentem les dificultats tècniques que sorgeixen en el cas isoenergètic, les quals resolem amb els lemes quantitatius que donem a la secció 4.2.

El mètode que usem per a provar el teorema KAM és parallel, en línies generals, al que usa Arnol'd [Ar1]. A la secció 4.3 obtenim el lema inductiu (proposició 19), en el qual donem fites per a un pas concret del procés iteratiu, en el cas isoenergètic, a partir del lema iteratiu lineal de la secció 2.3, amb $\mathcal{M} = 0$.

A la secció 4.4 provem de manera directa el teorema KAM isoenergètic (teorema 21). A l'inrevés que al teorema de Nekhoroshev, en el cas del teorema KAM no és suficient dur el hamiltonià H a una forma normal aproximada amb una resta exponencialment petita. Cal fer un nombre infinit d'iteracions, amb ordres $K_1, K_2, \ldots$ creixent cap a infinit. Així, excloem del domini ressonàncies fins a ordre cada cop més alt durant el procés iteratiu. D'aquesta manera, les restes tendeixen ràpidament cap a zero i el hamiltonià final esdevé integrable: $H^*(\phi, I) = h^*(I)$. Llavors, el domini on la transformació és vàlida és format per tors invariants n-dimensionals amb flux lineal, però aquest domini es redueix a un conjunt cantorià corresponent a freqüències diofàntiques. Per acabar la prova del teorema KAM, podem fitar la mesura del complementari dels tors invariants a partir de la condició de no degeneració satisfeta pel sistema no pertorbat.

Veiem a la secció 4.5 que, dins del mateix esquema iteratiu usat per al teorema KAM però aturant-lo en el moment adequat, en comptes de dur-lo fins al límit, obtenim fites exponencials vàlides per a les trajectòries que parteixen del domini que tenim en el pas on ens hem aturat. Així, aquest domini és compost per tors quasi-invariants, els quals podem considerar que provenen de tors no pertorbats amb freqüències satisfent aproximadament una condició diofàntica (teorema 22). Aquest resultat és, des del punt de vista quantitatiu, molt proper al teorema KAM. Qualitativament, sacrifiquem l'estabilitat perpètua dels tors

KAM però, en canvi, el domini on el resultat és vàlid no té interior buit, i així no és un cantorià.

Val la pena de recordar que el teorema KAM no és gaire significatiu des d'un punt de vista pràctic, tot i la seva importància teòrica. Això és degut al fet que, si coneixem només de manera aproximada un vector de freqüències donat, no podem decidir si aquest vector és diofàntic o no. La noció de tor quasi-invariant pot ésser vista com un intent de compensar aquesta deficiència.

Estudiem a la secció 4.6 l'existència de tors invariants per a un hamiltonià a l'entorn d'un *punt fix el·líptic:*

$$H(q,p) = \frac{1}{2}\sum_{j=1}^{n} \lambda_j \left(q_j^2 + p_j^2\right) + \mathcal{O}\left(|(q,p)|^3\right),$$

on $\lambda = (\lambda_1, \ldots, \lambda_n)$ és el vector de freqüències. Sota les condicions de no ressonància i de no degeneració adequades, aplicant el teorema KAM de la secció 4.4 veiem que en un entorn del punt el·líptic, de radi r prou petit, existeix un gran nombre de tors invariants (proposició 25). Fins i tot, si λ és diofàntic, la mesura del complementari del conjunt format pels tors invariants és exponencialment petita en $1/r$ (teorema 26).

Al capítol 5 estudiem els tors invariants de dimensió inferior prop de la varietat ressonant $S_{\omega,\mathcal{M}}$, essent $\mathcal{M} \subset \mathbf{Z}^n$ un mòdul donat de dimensió d. Com hem dit anteriorment, la localització d'aquests tors és important com a primer pas per a establir l'existència de difusió d'Arnol'd al llarg d'una cadena de transició.

Suposant una condició de no ressonància fins a cert ordre, posem el hamiltonià (1.1) en forma normal respecte $\mathcal{M}$ i la resta és petita. Fent un canvi canònic lineal adequat, podem suposar que el mòdul ve generat per d vectors de la base canònica de $\mathbf{Z}^n$, amb la qual cosa la part en forma normal només depèn de d angles. Menyspreant la resta, podem considerar la forma normal com a hamiltonià reduït, amb només d graus de llibertat. Hem de veure aquesta forma normal com un sistema intermedi entre el hamiltonià no pertorbat i el hamiltonià pertorbat (1.1), d'acord amb els punts de vista de diversos autors [De, LW, Tr]. De fet, ens limitem a l'estudi d'aquesta forma normal, la qual cosa constitueix un primer pas cap a la localització de tors de dimensió inferior del hamiltonià (1.1) prop d'una ressonància. Si bé l'existència dels tors hiperbòlics i llurs varietats invariants ha estat ja establerta per D. V. Treschev [Tr], cal esperar que es trobin molt a prop dels de la forma normal si aquesta ha estat obtinguda fins a ordre prou alt. Si això és cert, podríem obtenir informació sobre les varietats invariants, i no solament local a l'entorn dels tors, la qual cosa no es desprèn directament de [Tr].

Per trobar tors invariants m-dimensionals de la forma normal, essent $m = n - d$, hem de buscar punts fixos del hamiltonià reduït. A la secció 5.1, mostrem que si la pertorbació satisfà certes condicions de no degeneració llavors la forma normal té tors invariants de dimensió m prop de la ressonància, els quals podem classificar en el·líptics, hiperbòlics i d'altres categories intermèdies (teorema 27). A la secció 5.2 especifiquem el canvi lineal a què ens hem referit més amunt, i establim el resultat per a un mòdul $\mathcal{M}$ qualsevol (teorema 30).

En el cas d'una ressonància simple ($\dim \mathcal{M} = 1$), la forma normal és integrable. Per aquesta raó, és senzill estudiar les varietats invariants dels tors hiperbòlics. Incloem a la secció 5.3 un estudi complet de les varietats invariants i les connexions homoclíniques que tenen lloc (teorema 32). Una bona condició per a establir l'existència d'aquestes connexions homoclíniques és la quasiconvexitat del sistema no pertorbat, que permet confinar les esmentades varietats invariants prop de la ressonància.

Finalment, al capítol 6 resumim les principals contribucions aportades en aquesta memòria, i fem esment d'alguns problemes que en constituirien una continuació lògica.

Farem servir sovint la notació següent, força usual. Escriurem $\alpha \preceq \beta$ o també $\alpha = \mathcal{O}(\beta)$ quan existeixi una constant c tal que sempre s'acompleixi $\alpha \leq c\beta$. Quan tinguem $\alpha \preceq \beta$ i $\beta \preceq \alpha$, escriurem $\alpha \sim \beta$. Amb tot, en algunes discussions informals usarem aquesta notació fent-ne un cert abús, quan simplement convingui fer veure el terme més important d'una expressió.

Agraïments Vull expressar el meu reconeixement a totes les persones que m'han fet costat durant la realització d'aquesta tesi. Sobretot, he d'agrair al professor Amadeu Delshams el constant i decidit suport que m'ha donat dirigint la recerca, i el temps que hi ha esmerçat, que ha hagut de treure de la seva agenda sempre atapeïda. He d'agrair també als professors Rafael de la Llave, Anatoly I. Neishtadt i Carles Simó llurs comentaris i suggeriments, els quals m'han estat de gran utilitat.

Capítol 2

Formes normals fent servir sèries de Lie

2.1 Mètode de les sèries de Lie: algorismes lineal i quadràtic

Descrivim en aquesta secció les iteracions que porten el hamiltonià $H(\phi, I) = h(I) + f(\phi, I)$ a forma normal. El plantejament que fem proporciona un marc comú per a les proves dels teoremes de Nekhoroshev i KAM. Procedint com hem descrit a la introducció, restringim el nostre hamiltonià H a un subconjunt $G \subset \mathcal{G}$, sobre el qual suposem que el conjunt de freqüències $\omega(G)$ és no ressonant mòdul $\mathcal{M}$ fins ordre K, essent $\mathcal{M}$ i K donats. Per conveniència de notació, considerem el hamiltonià original H escrit, sobre el conjunt G, en la forma

$$H(\phi, I) = h(I) + Z(\phi, I) + R(\phi, I), \tag{2.1}$$

amb $Z \in \mathbf{R}(\mathcal{M}, K)$. Podem escollir $Z = 0$ i $R = f$. No obstant, si s'escau que el hamiltonià original ja és proper a la forma normal, podem escriure'l com a (2.1), amb R petit en relació a Z, i mirar d'obtenir una aproximació millor a la forma normal.

Construïm la transformació Ψ, que ha de portar H a forma normal, com a producte de transformacions canòniques $\Phi^{(1)}, \Phi^{(2)}, \ldots$ Denotem $\Psi^{(q)} = \Phi^{(1)} \circ \cdots \circ \Phi^{(q)}$. En el pas q, el hamiltonià transformat és escrit en la forma

$$H^{(q)} = H \circ \Psi^{(q)} = h(I) + Z^{(q)}(\phi, I) + R^{(q)}(\phi, I),$$

amb $Z^{(q)} \in \mathbf{R}(\mathcal{M}, K)$. Òbviament comencem amb $Z^{(0)} = Z$ i $R^{(0)} = R$.

Ara, per tal de descriure una iteració concreta, escrivim H, Z, R, $\tilde{Z}$, $\tilde{R}$, Φ, en comptes de $H^{(q-1)}$, $Z^{(q-1)}$, $R^{(q-1)}$, $Z^{(q)}$, $R^{(q)}$, $\Phi^{(q)}$, respectivament. Seguint el mètode de les sèries de Lie, construïm Φ com el flux a temps 1 associat a un hamiltonià generador W a determinar.

Si Φ_t denota el flux a temps t d'un hamiltonià *autònom* W, és un fet conegut de la teoria de sistemes hamiltonians que, per a qualsevol funció f, la derivada de $f \circ \Phi_t$ respecte t pot ésser expressada en termes del parèntesi de Poisson de f i W:

$$\frac{d}{dt}(f \circ \Phi_t) = \{f, W\} \circ \Phi_t.$$

Així, suposant analiticitat en t i prenent el desenvolupament de Taylor, hom té la sèrie de Lie

$$f \circ \Phi_t = \sum_{m=0}^{\infty} \frac{t^m}{m!} L_W^m f,$$

on emprem la notació $L_W^0 f = f$ i $L_W^m f = \left\{L_W^{m-1} f, W\right\}$ per a $m \geq 1$. Per a les restes de la sèrie de Lie, introduïm la notació

$$r_m(f, W, t) := f \circ \Phi_t - \sum_{l=0}^{m-1} \frac{t^l}{l!} L_W^l f = \sum_{l=m}^{\infty} \frac{t^l}{l!} L_W^l f \tag{2.2}$$

amb $m \geq 0$.

A partir de les sèries de Lie descriurem dos mètodes força senzills per a l'obtenció del hamiltonià W; en un cas obtindrem un procés iteratiu lineal i, en l'altre, quadràtic. Tots dos són algorismes constructius i poden ésser implementats en ordinadors, car les operacions es fan amb un nombre finit d'harmònics. A més, veurem que en els dos casos podem obtenir fites que condueixen als exponents òptims del teorema de Nekhoroshev. Per tant ambdós algorismes són adients tant des del punt de vista teòric com pràctic.

De manera general, podem dir que els mètodes basats en sèries de Lie són força escaients per al càlcul efectiu de formes normals. Es contraposen doncs al clàssic mètode basat en l'ús de funcions generatrius que involucren variables mixtes. Hom pot trobar a [LM, apèndixs 7–8] una exposició de les diferents variants de mètodes de sèries de Lie. Esmentem només l'algorisme de Giorgilli–Galgani [GG1, GG2], consistent a generar la transformació a partir d'un únic hamiltonià no autònom (incloem alguns comentaris més sobre aquest algorisme a la pàgina 105). Amb tot, cal dir que és un algorisme més intricat que els que presentem aquí.

Ressenyem en primer lloc l'*algorisme lineal* en una regió no ressonant mòdul $\mathcal{M}$. El plantejament és anàleg al de [BGG, Pos2, DG1]. Amb la notació que hem establert més amunt, tenim per al hamiltonià transformat l'expressió:

$$H \circ \Phi = h + Z + R + \{h, W\} + r_2(h, W, 1) + r_1(Z + R, W, 1). \tag{2.3}$$

Hem d'agafar W de manera que puguem escriure

$$H \circ \Phi = h(I) + \tilde{Z}(\phi, I) + \tilde{R}(\phi, I),$$

amb $\tilde{Z}$ en forma normal, i amb $\tilde{R}$ més petit que R per tal que $H \circ \Phi$ sigui més a prop de la forma normal que H. Convindria doncs escollir W de manera que $R + \{h, W\}$ fos en forma normal respecte $\mathcal{M}$. En realitat, això només ho podem garantir fins ordre K perquè la condició de no ressonància mòdul $\mathcal{M}$ sobre $\omega(G)$ no evita els petits divisors corresponents a ordres més alts. Així, busquem $\Delta Z \in \mathbf{R}(\mathcal{M}, K)$ i W satisfent l'equació funcional lineal

$$\{W, h\} + \Delta Z = R_{\leq K}\,, \tag{2.4}$$

on usem la notació $R_{\leq K}(\phi, I) = \sum_{|k|_1 \leq K} R_k(I)\, e^{i\,k\cdot\phi}$.

La resolució de l'equació (2.4) és prou coneguda. En termes dels coeficients de Fourier, tenim la solució

$$\begin{aligned}
&W_k(I) = \frac{R_k(I)}{i\,k \cdot \omega(I)}\,, \quad && \Delta Z_k(I) = 0, \quad && \text{si} \;\; k \in \mathbf{Z}^n \setminus \mathcal{M},\; |k|_1 \leq K;\\
&W_k(I) = 0, && \Delta Z_k(I) = R_k(I), && \text{si} \;\; k \in \mathcal{M},\; |k|_1 \leq K;\\
&W_k(I) = 0, && \Delta Z_k(I) = 0, && \text{si} \;\; |k|_1 > K.
\end{aligned} \tag{2.5}$$

Aquesta és l'única solució de l'equació (2.4) si demanem que W no tingui termes ressonants respecte $\mathcal{M}$ i sigui de grau K. Denotarem $\mathbf{NR}(\mathcal{M}, K)$ el conjunt de les funcions que satisfan aquests requeriments.

Amb aquesta W tenim, per al nou hamiltonià,

$$\tilde{Z} = Z + \Delta Z \;\in\; \mathbf{R}(\mathcal{M}, K), \tag{2.6}$$

$$\tilde{R} = R_{>K} + r_2(h, W, 1) + r_1(Z + R, W, 1), \tag{2.7}$$

on escrivim $R_{>K} = R - R_{\leq K}$. Notem que, si h, Z i R són reals, es dedueix de (2.5) que ΔZ i W són també reals. Deduïm que Φ transforma dominis reals en dominis reals, i el nou hamiltonià també és real. Recordem que algorisme explicitat a (2.5–2.7) és només un pas del procés iteratiu; descriu com obtenir $H^{(q)} = H^{(q-1)} \circ \Phi^{(q)}$.

L'algorisme que acabem de descriure és lineal. En efecte, si $Z = \mathcal{O}(\varepsilon)$, $R = \mathcal{O}(\mu)$, amb $\mu \preceq \varepsilon$, llavors per (2.7) el terme dominant dels que intervenen a $\tilde{R}$, si ignorem el terme $R_{>K}$, és $r_1(Z, W, 1) = \mathcal{O}(\varepsilon\mu)$, car la funció W obtinguda a (2.5) és del mateix ordre que R. Així, en el pas q del procés iteratiu passaríem de $R^{(q-1)} = \mathcal{O}(\varepsilon^q)$ a $R^{(q)} = \mathcal{O}(\varepsilon^{q+1})$. Pel que respecta al terme $R_{>K}$, com que és exponencialment petit en K la seva influència pot ésser vençuda escollint K prou gran. Si, com a la prova del teorema de Nekhoroshev (secció 2.5 i capítol 3), ens limitem a fer un nombre finit de passos, llavors el valor de K pot mantenir-se fix al llarg del procés iteratiu.

En el cas del teorema KAM (capítol 4), on $\mathcal{M} = 0$, el procés lineal descrit a (2.5–2.7) és, en realitat, quadràtic a condició que prenguem $Z = 0$ a cada pas. Això ens obliga a modificar una mica l'algorisme: incloem ΔZ a la part integrable i així tindrem $\tilde{Z} = 0$ de cara al pas següent. D'aquesta manera, la part integrable canvia a cada pas: comencem una iteració amb $H = h(I) + R(\phi, I)$, i escrivim el nou hamiltonià en la forma

$$H \circ \Phi = \tilde{h}(I) + \tilde{R}(\phi, I), \tag{2.8}$$

on, per (2.5),

$$\tilde{h} = h + \Delta Z = h + R_0 \tag{2.9}$$

(notem que la funció $R_0(I)$ és la mitjana angular de $R(\phi, I)$). Obtenim la nova resta $\tilde{R}$ com a (2.7), amb la qual cosa el procés és ràpidament convergent (més que linealment) si ignorem el terme $R_{>K}$. Per tal de resoldre la dificultat causada per aquest terme, haurem de prendre ordres creixents K_q, amb límit infinit quan $q \to \infty$ (tècnica de fet ja emprada a [Ar1]). Veurem llavors que, per als successius hamiltonians $H^{(q)} = h^{(q)}(I) + R^{(q)}(\phi, I)$, la resta $R^{(q)}$ convergeix cap a zero. Hem de fer notar que la convergència no pot ésser estrictament quadràtica per la presència dels petits divisors. De fet, obtindrem per a $R^{(q)}$ una fita del tipus $\mathcal{O}\left(e^{-2^{(1-\nu)q}}\varepsilon\right)$, amb $\nu > 0$ fix, tan petit com vulguem, i així podem dir que el procés és "gairebé" quadràtic. Tanmateix, quan $q \to \infty$ el hamiltonià és cada cop més proper a integrable, i d'aquesta manera podrem provar l'existència de tors invariants. No obstant això, zones ressonants d'ordres cada cop més alts han d'ésser excloses del domini al llarg del procés iteratiu, i per tant el domini final queda reduït a un conjunt cantorià.

Remarquem també que, a la secció 4.4, provarem el teorema KAM sense veure explícitament que les restes $R^{(q)}$ convergeixen de manera ràpida, sinó lineal. Tot i això, usant la convergència gairebé quadràtica de les restes veurem a la secció 4.5 l'existència dels tors quasi-invariants, amb fites exponencials.

A continuació especifiquem l'*algorisme quadràtic,* amb un mòdul qualsevol $\mathcal{M}$. Considerem, en comptes de (2.3), l'expressió següent per al hamiltonià transformat:

$$H \circ \Phi = h + Z + R + \{h + Z, W\} + r_2(h + Z, W, 1) + r_1(R, W, 1).$$

L'única diferència amb (2.3) és la posició que ocupa el terme $\{Z, W\}$, que ara sí jugarà un paper destacat en l'obtenció de la forma normal. Si aconseguíssim de construir W tal que $R + \{h + Z, W\}$ fos en forma normal respecte $\mathcal{M}$, hauríem millorat en relació al procés lineal: si $Z = \mathcal{O}(\varepsilon)$, $R = \mathcal{O}(\mu)$, i si W és del mateix ordre que R (com veurem), llavors els termes dominants de $\tilde{R}$ serien $r_2(h, W, 1)$ i $r_1(R, W, 1)$, ambdós $\mathcal{O}(\mu^2)$. Ara bé, com ja succeïa a l'algorisme lineal, hem de limitar-nos a demanar forma normal fins ordre K. Així, hem de resoldre aquesta equació funcional lineal:

$$\{W, h\} + \Delta Z = [R - \{W, Z\}]_{\leq K} \ , \tag{2.10}$$

on les incògnites són ΔZ i W. Si demanem $W \in \mathbf{NR}(\mathcal{M}, K)$, llavors $\{W, Z\}$ no té termes ressonants i per tant ΔZ queda fixada de la mateixa manera que a (2.5), és a dir,

$$\begin{aligned} \Delta Z_k(I) &= R_k(I), && \text{si } \ k \in \mathcal{M},\ |k|_1 \leq K; \\ \Delta Z_k(I) &= 0, && \text{en altre cas.} \end{aligned} \tag{2.11}$$

Però malgrat això, no podrem trobar W tan fàcilment com ho hem fet a (2.5), simplement igualant coeficients de Fourier (l'únic cas fàcil seria $\mathcal{M} = 0$). De fet ens conformarem amb una solució aproximada de l'equació (2.10), cosa suficient per als nostres propòsits en aquesta memòria.

Precisem quines dificultats sorgeixen en intentar trobar la solució exacta de (2.10) i com n'obtindrem una solució aproximada. Observem en primer lloc que la solució de (2.10), un cop determinada ΔZ, correspon a un punt fix de l'operador lineal $\mathcal{A} : W \longmapsto \widehat{W}$, que assigna a cada funció $W \in \mathbf{NR}(\mathcal{M}, K)$ l'única solució $\widehat{W} \in \mathbf{NR}(\mathcal{M}, K)$ de l'equació

$$\left\{\widehat{W}, h\right\} + \Delta Z = [R - \{W, Z\}]_{\leq K} \ .$$

Aquesta equació és del mateix tipus que (2.4); per tant pot ésser resolta aplicant (2.5). Si l'operador $\mathcal{A}$ fos contractiu dins d'un espai funcional convenient, llavors per tal de trobar la solució exacta de (2.10) seria suficient aplicar el mètode d'iteració simple. Per estudiar si $\mathcal{A}$ és un operador contractiu, prenem W, W', i escrivim $\widehat{W} = \mathcal{A}W$, $\widehat{W'} = \mathcal{A}W'$; tenim:

$$\left\{\widehat{W} - \widehat{W'}, h\right\} = -\{W - W', Z\}_{\leq K} \ .$$

Com podem veure, podem calcular $\widehat{W} - \widehat{W'}$ a partir de $W - W'$ aplicant (2.5). A més, si $Z = \mathcal{O}(\varepsilon)$, amb una norma funcional adequada (que concretarem a la secció 2.2) tindrem

$$\left|\widehat{W} - \widehat{W'}\right| \leq b\,|W - W'| , \qquad b = \mathcal{O}(\varepsilon) . \tag{2.12}$$

Així, si ε és prou petit tenim $b < 1$ i per tant l'operador $\mathcal{A}$ és aparentment contractiu. Hem dit "aparentment" perquè, quan duguem a terme les fites a la secció 2.4, veurem que la realitat és molt menys falaguera. La norma tindrà en compte la banda d'analiticitat de les funcions i, en conseqüència, la fita (2.12) comportarà una reducció d'aquesta banda, amb la qual cosa l'operador $\mathcal{A}$ no pot ser contractiu dins d'un mateix espai funcional. Per això, no hem pogut esbrinar si el mètode d'iteració simple és convergent. Per a veure-ho caldria que la constant b es mantingués sempre per sota del valor crític 1. Però aquesta constant depèn de la reducció de la banda d'analiticitat que té lloc a cada iteració, i si el procés fos convergent llavors la reducció de la banda a cada pas tendiria a zero, amb la qual cosa b acabaria essent més gran que 1.

Per tot el que acabem de dir, renunciem a obtenir la solució exacta de (2.10), i ens conformarem amb prendre W com l'aproximació resultant d'aplicar un nombre de vegades p el mètode d'iteració simple a l'operador $\mathcal{A}$, escollint p de manera que l'aproximació sigui el millor possible i el caràcter quadràtic de l'algorisme no es perdi. Explicitem a continuació aquestes iteracions (les quals, recordem-ho, s'inscriuen dins de cada iteració de l'algorisme quadràtic). Com a aproximació inicial, prenem $W_{(1)} \in \mathbf{NR}(\mathcal{M}, K)$ tal que

$$\left\{W_{(1)}, h\right\} + \Delta Z = R_{\leq K}\,, \tag{2.13}$$

és a dir, la solució de (2.10) suposant $Z = 0$. Aleshores el procediment consisteix a calcular

$$W_{(m)} = \mathcal{A}W_{(m-1)}, \qquad m \geq 2,$$

és a dir,

$$W_{(m)} = W_{(m-1)} + Y_{(m)}, \tag{2.14}$$

essent $Y_{(m)} \in \mathbf{NR}(\mathcal{M}, K)$ satisfent

$$\left\{Y_{(2)}, h\right\} = -\left\{W_{(1)}, Z\right\}_{\leq K}\,, \tag{2.15}$$

$$\left\{Y_{(m)}, h\right\} = -\left\{Y_{(m-1)}, Z\right\}_{\leq K}\,, \quad m \geq 3. \tag{2.16}$$

Escriurem també $Y_{(1)} = W_{(1)}$. Les equacions (2.13), (2.15), (2.16) són del mateix tipus que (2.4); per tant tenen solució única a $\mathbf{NR}(\mathcal{M}, K)$, que s'obté aplicant les fórmules (2.5). Així les iteracions (2.14–2.16) són unívocament definides. Ens aturarem quan $m = p$, amb $p \geq 1$, i prendrem

$$W = W_{(p)} \tag{2.17}$$

com a solució aproximada de l'equació (2.10). Com que aquesta no s'acompleix exactament, introduïm una "funció d'error" P tal que

$$\{W, h\} + \Delta Z + P = \left[R - \{W, Z\}\right]_{\leq K}\,. \tag{2.18}$$

Aleshores, tindrem $H \circ \Phi = h + \tilde{Z} + \tilde{R}$, amb

$$\tilde{Z} = Z + \Delta Z, \tag{2.19}$$

$$\tilde{R} = P + R_{>K} + \{Z, W\}_{>K} + r_2(h + Z, W, 1) + r_1(R, W, 1). \tag{2.20}$$

Com al cas de l'algorisme lineal, tant el flux Φ com el nou hamiltonià són reals. D'altra banda, és fàcil obtenir una expressió simple per a la funció P. Donat que $W = \mathcal{A}W_{(p-1)}$, tenim

$$\{W, h\} + \Delta Z = \left[R - \left\{W_{(p-1)}, Z\right\}\right]_{\le K}$$

i, restant aquesta equació de (2.18), resulta

$$P = -\left\{Y_{(p)}, Z\right\}_{\le K} . \tag{2.21}$$

Si ignorem els termes P, $R_{>K}$ i $\{Z, W\}_{>K}$, l'algorisme (2.19–2.20) és quadràtic: si $Z = \mathcal{O}(\varepsilon)$, $R = \mathcal{O}(\mu)$, llavors $\tilde{R} = \mathcal{O}(\mu^2)$. Els termes $R_{>K}$ i $\{Z, W\}_{>K}$ són exponencialment petits en K, com ja hem comentat en parlar de l'algorisme lineal. En relació al terme P, veiem fàcilment a partir de (2.15–2.16) que $Y_{(m)} = \mathcal{O}(\varepsilon^{m-1}\mu)$ i, per (2.21), resulta que $P = \mathcal{O}(\varepsilon^p\mu)$. Això ens podria induir a buscar quina p caldria agafar per tenir un algorisme quadràtic. Però, quan duguem a terme les fites a la secció 2.4, veurem que l'efecte de la reducció de la banda d'analiticitat a cada iteració fa que, en realitat, $P = \mathcal{O}((pB\varepsilon)^p\mu)$, on B és una constant. D'aquesta manera, el millor valor de p serà aquell que minimitzi la funció $p \mapsto (pB\varepsilon)^p$, és a dir, $p \sim \frac{1}{eB\varepsilon}$. Llavors el terme P serà exponencialment petit en $1/\varepsilon$, però no serà $\mathcal{O}(\mu^2)$. De tota manera, malgrat que a causa dels termes P, $R_{>K}$ i $\{Z, W\}_{>K}$ l'algorisme no sigui exactament quadràtic, la influència d'aquests termes podrà ésser superada suposant ε prou petita i K prou gran.

Malgrat que l'algorisme lineal té una estructura força més senzilla que el quadràtic, no hem de menystenir aquest darrer ja que, convenientment adaptat, pot ésser útil en problemes on la convergència del procés sigui crucial, sobre tot prop de ressonàncies. N'és un exemple la localització de tors invariants de dimensió inferior prop de ressonàncies (vegeu capítol 5). Això potser seria més fàcil si poguéssim resoldre exactament l'equació funcional (2.10) fent servir el mètode de les característiques. De fet, una situació afí fou tractada per S. M. Graff [Gr, apèndix 2] usant aquest mètode.

Donat un hamiltonià concret, és factible obtenir una millora important de les fites teòriques que donarem a les seccions següents. Això requereix el càlcul explícit de la forma normal, per a la qual cosa és necessari construir un manipulador algèbric per tal de dur a terme els càlculs necessaris amb l'ajut de l'ordinador. En treballs de C. Simó (vegeu, per exemple, [Si1]) és palès que, si hom calcula de manera explícita la forma normal fins a ordre elevat, les fites milloren de manera considerable.

Els algorismes que hem descrit en aquesta secció són constructius i poden ésser implementats sense problemes. Ara bé, les operacions que defineixen els algorismes treballen amb funcions que poden tenir un desenvolupament de Fourier infinit o de grau molt alt, que haurem de truncar a un ordre fixat K. A més, el càlcul de la nova resta $\tilde{R}$ comporta sumar una sèrie de Lie infinita, la qual també hem de truncar a cert ordre M, de manera que la part que menyspreem sigui $\mathcal{O}\left(\varepsilon^{M+1}\right)$. Aquests talls de sèries fan que hom hagi de portar un control analític de la part menyspreada, per assegurar que els resultats finals són fiables.

Veurem a continuació, sense gaire rigor, que l'algorisme quadràtic sembla computacionalment més ràpid que l'algorisme lineal. Suposem que amb tots dos algorismes pretenem que la resta sigui, per exemple, $\mathcal{O}\left(\varepsilon^{M+1}\right)$. Fixem-nos que les úniques operacions que cal fer són parèntesis de Poisson, apart de la resolució d'equacions funcionals lineals igualant-ne coeficients (que comporta relativament poques operacions). Farem una estimació de quants parèntesis de Poisson hem de fer per a cada algorisme.

Pel que respecta a l'algorisme lineal, haurem de fer M passos. En el pas q, partirem de $R^{(q-1)} \sim \varepsilon^q$, tindrem també $W^{(q)} \sim \varepsilon^q$ i arribarem a $R^{(q)} \sim \varepsilon^{q+1}$. D'acord amb (2.7), haurem de calcular M/q parèntesis de Poisson (aproximadament) per a tenir $R^{(q)}$ llevat de termes $\mathcal{O}\left(\varepsilon^{M+1}\right)$. Així, el nombre total de parèntesis requerits en l'algorisme lineal serà

$$\sum_{q=1}^{M} \frac{M}{q} \sim M \ln M.$$

Considerem ara l'algorisme quadràtic. És natural pensar (i de fet ho justificarem al final de la secció 2.5) que el nombre d'iteracions que farem per a resoldre aproximadament l'equació funcional lineal al pas q serà $p_q \sim 2^q$. En el pas q, passarem de $R^{(q-1)} \sim \varepsilon^{2^{q-1}}$ a $R^{(q)} \sim \varepsilon^{2^q}$. Per tant, haurem de fer en total $N \sim \log_2 M$ passos. Al pas q, hem de començar resolent aproximadament l'equació lineal, per a la qual cosa hem de fer els p_q parèntesis requerits a (2.16) i (2.21). A més, haurem de calcular $M/2^{q-1}$ parèntesis més per obtenir $R^{(q)}$ aplicant (2.20). Per tant, obtenim els parèntesis que farem en total a l'algorisme quadràtic:

$$\sum_{q=1}^{N} \left(p_q + \frac{M}{2^{q-1}}\right) \sim 2^N + M \sim M,$$

nombre clarament inferior al que hem obtingut per a l'algorisme lineal.

2.2 Una norma per a camps vectorials hamiltonians

Per tal d'obtenir fites rigoroses de les successives restes, hem de definir normes per a les funcions que prenen part als algorismes introduïts a la secció 2.1.

Una observació important és que a les equacions hamiltonianes no hi intervé de manera directa la funció hamiltoniana H sinó més aviat la seva derivada

$$DH = \left(\frac{\partial H}{\partial \phi} , \frac{\partial H}{\partial I} \right) = \left(\frac{\partial H}{\partial \phi_1} , \ldots , \frac{\partial H}{\partial \phi_n} , \frac{\partial H}{\partial I_1} , \ldots , \frac{\partial H}{\partial I_n} \right).$$

Llavors, per a obtenir les fites d'estabilitat que ens permetin provar els teoremes de Nekhoroshev i KAM, no ens caldrà obtenir fites per a les successives restes donades per (2.7) o (2.20), sinó que fites per a les derivades d'aquestes restes seran suficients.

Mirant atentament, per exemple, les equacions (2.6–2.7) corresponents a l'algorisme lineal, hom s'adona que és factible de fitar les derivades $D\tilde{Z}$ i $D\tilde{R}$ a partir de DZ i DR, ja que les restes de Lie r_1, r_2 han estat definides a (2.2) en termes de parèntesis de Poisson. Així, fóra bo de treballar amb una norma per a camps vectorials i fitar directament les derivades, amb la qual cosa evitaríem usar innecessàriament les desigualtats de Cauchy per tal de fitar aquestes derivades. Aquesta idea ens fou suggerida per A. I. Neishtadt, si bé havia estat ja utilitzada per F. Fassò [Fa], qui desenvolupà de manera completa les fites per al mètode de les sèries de Lie per a camps vectorials, no necessàriament hamiltonians.

Tot i això, no podem evitar del tot l'ús de les desigualtats de Cauchy, ja que cal derivar les restes r_1, r_2 de (2.7) per tal de fitar $D\tilde{R}$. Per aquesta raó, treballarem amb funcions analítiques sobre entorns complexos del domini $\mathbf{T}^n \times G$. Donat $\rho = (\rho_1, \rho_2) \geq 0$ (és a dir $\rho_j \geq 0$, $j = 1, 2$), comencem introduint els conjunts:

$$\mathcal{W}_{\rho_1}(\mathbf{T}^n) := \{\phi \ : \ \operatorname{Re}\phi \in \mathbf{T}^n, \ |\operatorname{Im}\phi|_\infty \leq \rho_1\},$$
$$\mathcal{V}_{\rho_2}(G) := \{I \in \mathbf{C}^n \ : \ |I - I'| \leq \rho_2 \text{ amb } I' \in G\},$$

on $|\cdot|_\infty$ i $|\cdot| = |\cdot|_2$ denoten, respectivament, la norma del màxim i la norma euclidiana per a vectors. Llavors definim:

$$\mathcal{D}_\rho(G) := \mathcal{W}_{\rho_1}(\mathbf{T}^n) \times \mathcal{V}_{\rho_2}(G).$$

Al llarg d'aquesta memòria anirem usant diversos tipus de normes. Primer, considerem funcions de les n variables d'acció. Donada una funció $f(I)$ (real o complexa), definida sobre un entorn complex $\mathcal{V}_\eta(G)$, $\eta \geq 0$, introduïm la norma del suprem:

$$|f|_{G,\eta} := \sup_{I \in \mathcal{V}_\eta(G)} |f(I)| , \qquad |f|_G := |f|_{G,0} \ .$$

Notem que suprimim el subíndex η de la notació quan $\eta = 0$. Aquesta remarca l'aplicarem al llarg de tota aquesta secció.

De manera anàloga, considerem la norma del suprem per a funcions amb valors vectorials, és a dir, camps vectorials. Per a $F : \mathcal{V}_\eta(G) \longrightarrow \mathbf{C}^n$, i donat $1 \leq p \leq \infty$, definim

$$|F|_{G,\eta,p} := \sup_{I \in \mathcal{V}_\eta(G)} |F(I)|_p \ , \qquad |F|_{G,\eta} := |F|_{G,\eta,2} \ .$$

En aquesta definició, $|\cdot|_p$ denota la p-norma per a vectors de $\mathbf{C}^n$, és a dir, $|v|_p = \left(\sum_{j=1}^n |v_j|^p\right)^{1/p}$ si $1 \leq p < \infty$, i $|v|_\infty = \max_{1\leq j\leq n} |v_j|$. Notem que suprimim el subíndex p per a significar la norma euclidiana ($p = 2$).

També definim, anàlogament, la norma del suprem per a funcions matricials o fins i tot funcions tensorials (per exemple, les successives derivades totals d'una funció); simplement considerem per a matrius i tensors la norma induïda per la norma euclidiana per a vectors (només considerem el cas $p = 2$).

A continuació considerem funcions de les variables acció–angle. Donada una funció complexa $f(\phi, I)$ (2π-periòdica en ϕ) definida sobre l'entorn $\mathcal{D}_\rho(G)$, $\rho = (\rho_1, \rho_2) \geq 0$, podem considerar la norma del suprem:

$$|f|_{G,\rho} := \sup_{(\phi,I)\in\mathcal{D}_\rho(G)} |f(\phi, I)|\,. \tag{2.22}$$

Però si f és analítica sobre (un entorn de) $\mathcal{D}_\rho(G)$, podem definir una norma en termes de la sèrie de Fourier de f prenent pesos exponencials. Escrivint $f(\phi, I) = \sum\limits_{k\in\mathbf{Z}^n} f_k(I)\, e^{i\,k\cdot\phi}$, introduïm

$$\|f\|_{G,\rho} := \sum_{k\in\mathbf{Z}^n} |f_k|_{G,\rho_2} \cdot e^{|k|_1\rho_1}. \tag{2.23}$$

Aquesta norma amb pesos exponencials, anàloga a la que és usada a [Pos2], és més profitosa que la norma del suprem a l'hora d'obtenir fites en les quals intervinguin petits divisors. Així, ens permetrà dur a terme fàcilment un control per separat dels harmònics en fitar la solució de l'equació funcional lineal (2.4), sense haver de reduir el domini (vegeu la pàgina 25). A més, quan les freqüències satisfan una condició diofàntica, obtindrem les mateixes fites que amb la norma del suprem però de manera molt més simple, sense un estudi acurat dels petits divisors (pàgina 41).

La relació entre les normes (2.22–2.23) ve donada per les desigualtats següents:

$$|f|_{G,\rho} \leq \|f\|_{G,\rho}\ , \qquad \|f\|_{G,(\rho_1-\delta_1,\rho_2)} \leq \left(\operatorname{cotgh}^n \frac{\delta_1}{2}\right) |f|_{G,\rho}\ , \tag{2.24}$$

essent $0 < \delta_1 < \rho_1$. La primera desigualtat és òbvia, i la segona es dedueix fàcilment del fet que $|f_k|_{G,\rho_2} \leq e^{-|k|_1(\rho_1-\delta_1)}\, |f|_{G,(\rho_1-\delta_1,\rho_2)}$ per a tot k, i de la suma $\sum_{k\in\mathbf{Z}^n} e^{-|k|_1\delta_1} = \operatorname{cotgh}^n \frac{\delta_1}{2}$ (vegeu [Pos2]).

Exactament de la mateixa manera que abans, podem estendre les definicions de les normes (2.22–2.23) al cas de funcions vectorials. Per a $F : \mathcal{D}_\rho(G) \longrightarrow \mathbf{C}^n$ i $1 \leq p \leq \infty$, i escrivint $F(\phi, I) = \sum\limits_{k\in\mathbf{Z}^n} F_k(I)\, e^{i\,k\cdot\phi}$, essent $F_k : \mathcal{V}_{\rho_2}(G) \longrightarrow \mathbf{C}^n$, definim

$$\|F\|_{G,\rho,p} := \sum_{k\in\mathbf{Z}^n} |F_k|_{G,\rho_2,p} \cdot e^{|k|_1\rho_1}, \qquad \|F\|_{G,\rho} := \|F\|_{G,\rho,2}\ .$$

Recordem les desigualtats de Cauchy per a les ϕ-derivades i les I-derivades (vegeu també [Pos2]). Donada f analítica sobre $\mathcal{D}_\rho(G)$, per a $0 < \delta < \rho$ (és a dir $0 < \delta_j < \rho_j$, $j = 1, 2$) tenim

$$\left\| \frac{\partial f}{\partial \phi} \right\|_{G,(\rho_1-\delta_1,\rho_2),1} \le \frac{1}{e\delta_1} \|f\|_{G,\rho} , \qquad \left\| \frac{\partial f}{\partial I} \right\|_{G,(\rho_1,\rho_2-\delta_2),\infty} \le \frac{1}{\delta_2} \|f\|_{G,\rho} .$$

Per tal de disposar d'una notació més compacta i evitar de dur a terme de manera separada les fites per a les ϕ-derivades i les I-derivades durant el procés iteratiu, definim per al camp vectorial $Df = \left(\frac{\partial f}{\partial \phi} , \frac{\partial f}{\partial I} \right)$ la norma

$$\|Df\|_{G,\rho,c} := \max \left(\left\| \frac{\partial f}{\partial \phi} \right\|_{G,\rho,1} , c \left\| \frac{\partial f}{\partial I} \right\|_{G,\rho,\infty} \right) , \tag{2.25}$$

on $c > 0$ és un paràmetre que fixarem més endavant en aquest capítol. Observem que, si $c' > c$, llavors

$$\|Df\|_{G,\rho,c} \le \|Df\|_{G,\rho,c'} \le \frac{c'}{c} \|Df\|_{G,\rho,c} . \tag{2.26}$$

Hem introduït el paràmetre c (el qual té la dimensió física de les variables d'acció) amb la intenció de compensar la diferència entre les desigualtats de Cauchy per a les ϕ-derivades i les I-derivades.

Lema 1 *Siguin f, g funcions analítiques sobre $\mathcal{D}_\rho(G)$. Donats* $0 < \delta = (\delta_1, \delta_2) < \rho$ *i* $c > 0$, *denotem*

$$\hat{\delta}_c := \min(c\,\delta_1, \delta_2).$$

Aleshores,

a) $\|Df\|_{G,\rho-\delta,c} \le \dfrac{c}{\hat{\delta}_c} \|f\|_{G,\rho}$.

b) $\|\{f, g\}\|_{G,\rho} \le \dfrac{2}{c} \|Df\|_{G,\rho,c} \cdot \|Dg\|_{G,\rho,c}$.

c) $\|D(f_{>K})\|_{G,(\rho_1-\delta_1,\rho_2),c} \le e^{-K\delta_1} \cdot \|Df\|_{G,\rho,c}$.

La prova de les propietats contingudes en aquest lema és força simple. Més endavant, veurem que una tria apropiada per al paràmetre c fa possible l'obtenció de fites millors, fins i tot si δ_1, δ_2 són molt diferents.

Ens cal introduir més notació. A cada pas del procés iteratiu descrit a la secció 2.1, la transformació canònica Φ que porta el nostre hamiltonià a forma normal és construïda com a flux associat a un hamiltonià generador W. Per saber com és de propera a l'aplicació identitat aquesta transformació canònica, hem de definir una norma per a aplicacions com $\Phi - \mathrm{id}$. Aquesta aplicació és definida a $\mathcal{D}_\rho(G)$, i podem considerar que pren valors a $\mathbf{C}^{2n}$. Primerament, prenem el paràmetre $c > 0$ de la definició (2.25) i, donat un $2n$-vector $x = (\phi, I)$, definim la seva "c-norma" segons

$$|x|_c := \max\left(c\,|\phi|_\infty\,, |I|\right).$$

Aleshores, donada una aplicació $\Upsilon : \mathcal{D}_\rho(G) \longrightarrow \mathbf{C}^{2n}$, definim les normes:

$$|\Upsilon|_{G,\rho,c} := \sup_{x\in\mathcal{D}_\rho(G)} |\Upsilon(x)|_c\,, \qquad |D\Upsilon|_{G,\rho,c} := \sup_{x\in\mathcal{D}_\rho(G)} |D\Upsilon(x)|_c\,,$$

on, per a la segona definició, la c-norma matricial és la norma induïda per la c-norma vectorial. Amb aquestes notacions, és fàcil de provar la propietat següent: si Υ és analítica sobre $\mathcal{D}_\rho(G)$, llavors

$$|D\Upsilon|_{G,\rho-\delta,c} \leq \frac{|\Upsilon|_{G,\rho,c}}{\hat{\delta}_c}\,. \tag{2.27}$$

Al lema següent, fitem l'efecte del flux associat a un hamiltonià generador en termes de les normes definides en aquesta secció. A més, trobem una fita per a la resta d'una sèrie de Lie.

Lema 2 *Sigui W una funció analítica dobre $\mathcal{D}_\rho(G)$, $\rho > 0$, i Φ_t el seu flux hamiltonià a temps t, essent $t \geq 0$. Siguin $\delta = (\delta_1, \delta_2) > 0$ i $c > 0$ donats. Suposem que $\|DW\|_{G,\rho,c} \leq \hat{\delta}_c$. Aleshores, Φ_t envia $\mathcal{D}_{\rho-t\delta}(G)$ dins $\mathcal{D}_\rho(G)$ i tenim:*

a) $|\Phi_t - \mathrm{id}|_{G,\rho-t\delta,c} \leq t\,\|DW\|_{G,\rho,c}$.

b) $\Phi_t(\mathcal{D}_{\rho'}(G)) \supset \mathcal{D}_{\rho'-t\delta}(G)$ *per a* $\rho' \leq \rho - t\delta$.

c) *Suposant que $\|DW\|_{G,\rho,c} < \hat{\delta}_c/2e$, llavors donada qualsevol funció f, analítica sobre $\mathcal{D}_\rho(G)$, i donat qualsevol enter $m \geq 0$, la fita següent és vàlida:*

$$\begin{aligned} \|r_m(f,W,t)\|_{G,\rho-t\delta} &\leq \left(\sum_{l=0}^{\infty} \frac{1}{\binom{l+m}{m}} \cdot \left(\frac{2e\,\|DW\|_{G,\rho,c}}{\hat{\delta}_c}\right)^l\right) \cdot \frac{t^m}{m!}\,\|L_W^m f\|_{G,\rho} \\ &= \gamma_m\left(\frac{2e\,\|DW\|_{G,\rho,c}}{\hat{\delta}_c}\right) \cdot t^m\,\|L_W^m f\|_{G,\rho}\;, \end{aligned}$$

on, per a $0 \leq x < 1$, definim

$$\gamma_m(x) := \sum_{l=0}^{\infty} \frac{l!}{(l+m)!}\,x^l.$$

Prova Donat $(\phi_0, I_0) \in \mathcal{D}_{\rho-t\delta}(G)$, escrivim $(\phi(s), I(s)) = \Phi_s(\phi_0, I_0)$. En primer lloc, provem que

$$|\phi(s) - \phi_0|_\infty \leq t \left\|\frac{\partial W}{\partial I}\right\|_{G,\rho,\infty}, \qquad |I(s) - I_0| \leq t \left\|\frac{\partial W}{\partial \phi}\right\|_{G,\rho,1}, \tag{2.28}$$

per a $0 \le s \le t$. Sigui s_0 el suprem dels $s \ge 0$ que satisfan les dues desigualtats de (2.28). Clarament $s_0 > 0$, i una d'aquestes desigualtats és una igualtat quan $s = s_0$. D'altra banda, tenim $(\phi(s), I(s)) \in \mathcal{D}_\rho(G)$ per a $0 \le s \le s_0$. Pel teorema del valor mitjà,

$$|\phi(s_0) - \phi_0|_\infty \le s_0 \cdot \sup_{0\le s\le s_0} \left| \frac{\partial W}{\partial I}(\phi(s), I(s)) \right|_\infty \le s_0 \left\| \frac{\partial W}{\partial I} \right\|_{G,\rho,\infty}, \tag{2.29}$$

$$|I(s_0) - I_0| \le s_0 \cdot \sup_{0\le s\le s_0} \left| \frac{\partial W}{\partial \phi}(\phi(s), I(s)) \right| \le s_0 \left\| \frac{\partial W}{\partial \phi} \right\|_{G,\rho} \le s_0 \left\| \frac{\partial W}{\partial \phi} \right\|_{G,\rho,1}. \tag{2.30}$$

Així, $s_0 \ge t$ i per tant tenim (2.28). Això implica que Φ_t és definida a $\mathcal{D}_{\rho - t\delta}(G)$ i que la fita (a) és vàlida. Podem deduir la inclusió (b) del fet que Φ_{-t} és el flux hamiltonià a temps t de $-W$.

Per veure (c), notem que $f \circ \Phi_t$ és definida a $\mathcal{D}_{\rho - t\delta}(G)$. Com que W és analítica, $f \circ \Phi_t$ és també analítica respecte t, i així podem considerar el desenvolupament en sèrie de Lie (2.2) per a $r_m(f, W, t)$. Donat $l \ge m+1$, sigui $\eta = \delta/(l-m)$. Per a $j = m+1, \ldots, l$, tenim

$$\begin{aligned} \left\| L_W^j f \right\|_{G,\rho-(j-m)t\eta} &\le \frac{2}{c} \left\| D\left(L_W^{j-1} f\right) \right\|_{G,\rho-(j-m)t\eta\,,\,c} \cdot \|DW\|_{G,\rho,c} \\ &\le \frac{2}{t\hat{\eta}_c} \left\| L_W^{j-1} f \right\|_{G,\rho-(j-1-m)t\eta} \cdot \|DW\|_{G,\rho,c}\,. \end{aligned}$$

Així,

$$\left\| L_W^l f \right\|_{G,\rho-t\delta} \le \left(\frac{2\, \|DW\|_{G,\rho,c}}{t\hat{\eta}_c} \right)^{l-m} \cdot \|L_W^m f\|_{G,\rho} \le (l-m)! \left(\frac{2e\, \|DW\|_{G,\rho,c}}{t\hat{\delta}_c} \right)^{l-m} \cdot \|L_W^m f\|_{G,\rho}\,,$$

on hem usat que $k^k \le e^k \cdot k!$ per a tot $k \ge 1$. D'aquesta manera, la fita que obtenim per a $\|r_m(f, W, t)\|_{G,\rho-t\delta}$ és

$$\sum_{l=m}^{\infty} \frac{t^l}{l!} \left\| L_W^l f \right\|_{G,\rho-t\delta} \le \left(\sum_{l=m}^{\infty} \frac{(l-m)!}{l!} \cdot \left(\frac{2e\, \|DW\|_{G,\rho,c}}{\hat{\delta}_c} \right)^{l-m} \right) \cdot t^m \|L_W^m f\|_{G,\rho}\,,$$

i és clar que aquesta sèrie convergeix quan $\|DW\|_{G,\rho,c} < \hat{\delta}_c/2e$. □

Nota Les fites (2.29–2.30) es basen en l'estructura especial de les equacions hamiltonianes. La nostra tria de la ∞-norma per a les variables angulars ha estat motivada per (2.29). Pel que respecta a les variables d'acció, la millor tria seria, d'acord amb (2.30), la 1-norma, però l'ús que farem de la geometria euclidiana a les parts geomètriques dels teoremes de Nekhoroshev i KAM ens ha mogut a escollir la 2-norma.

2.3 Fites per a un pas de l'algorisme lineal

Obtenim en aquesta secció fites per a un pas concret de l'algorisme lineal descrit a la secció 2.1, amb l'ajut de la norma introduïda a la secció 2.2. Considerem el hamiltonià (2.1), real analític sobre $\mathcal{D}_\rho(\mathcal{G})$, amb $Z \in \mathbf{R}(\mathcal{M}, K)$, i el restringim a un subconjunt $G \subset \mathcal{G}$ tal que $\omega(G)$ és no ressonant mòdul $\mathcal{M}$ fins ordre K (vegeu aquesta noció a la pàgina 6).

En primer lloc introduïm, seguint [Pos2], una versió quantitativa d'aquesta condició de no ressonància. Donats un mòdul $\mathcal{M}$, un enter K i $\alpha > 0$, direm que un subconjunt F de l'espai de freqüències n-dimensional és α, K*-no ressonant mòdul* $\mathcal{M}$ si

$$|k \cdot v| \geq \alpha \qquad \forall k \in \mathbf{Z}^n \setminus \mathcal{M},\ |k|_1 \leq K,\ \ \forall v \in F. \tag{2.31}$$

Comencem veient que aquesta condició de no ressonància sobre el conjunt $\omega(G)$ es pot estendre a un entorn complex de radi ρ_2 prou petit.

Lema 3 *Sigui $h(I)$ una funció real analítica sobre $\mathcal{V}_{\rho_2}(G)$, escrivim $\omega = \operatorname{grad} h$, i suposem que $\omega(G)$ és α, K-no ressonant mòdul $\mathcal{M}$. Suposem que $\left|\frac{\partial^2 h}{\partial I^2}\right|_{G,\rho_2} \leq M$. Si*

$$\rho_2 \leq \frac{\alpha}{2MK}\ , \tag{2.32}$$

llavors $\omega\left(\mathcal{V}_{\rho_2}(G)\right)$ és $\frac{\alpha}{2}, K$-no ressonant mòdul $\mathcal{M}$.

La prova és una aplicació senzilla del teorema del valor mitjà. Cal remarcar que, com veurem als capítols següents, la condició (2.32) sobre ρ_2 és una restricció important. En general, no serà el domini d'analiticitat allò que determini l'elecció de ρ_2, sinó la condició (2.32). Constitueix una excepció el cas molt particular d'un sistema d'oscil·ladors harmònics, en què $M = 0$ (vegeu secció 3.1).

El resultat següent dóna fites per a les funcions ΔZ i W, que constitueixen la solució de l'equació funcional (2.4), corresponent a l'algorisme lineal.

Proposició 4 *Siguin $h(I)$, $Z(\phi, I)$, $R(\phi, I)$ funcions reals analítiques sobre $\mathcal{D}_\rho(G)$, escrivim $\omega = \operatorname{grad} h$, i suposem que $\omega(G)$ és α, K-no ressonant mòdul $\mathcal{M}$, i que $Z \in \mathbf{R}(\mathcal{M}, K)$. Suposem que $\left|\frac{\partial^2 h}{\partial I^2}\right|_{G,\rho_2} \leq M$. Sigui $c > 0$ donat, i definim:*

$$A := 1 + \frac{2Mc}{\alpha}\ . \tag{2.33}$$

Suposem també que $\rho_2 \le \dfrac{\alpha}{2MK}$. *Aleshores les funcions* ΔZ *i* W *definides per (2.5) són reals analítiques sobre* $\mathcal{D}_\rho(G)$ *i satisfan les fites següents:*

$$\begin{aligned} &\|D(\Delta Z)\|_{G,\rho,c} \le \|DR\|_{G,\rho,c}\,, \quad \|D(R-\Delta Z)\|_{G,\rho,c} \le \|DR\|_{G,\rho,c}\,, \\ &\|DW\|_{G,\rho,c} \le \frac{2A}{\alpha}\,\|DR\|_{G,\rho,c}\,. \end{aligned}$$

Prova Obtenim les fites a partir de la solució explícita donada a (2.5) en termes dels coeficients de Fourier. Les dues primeres fites són clares, ja que ΔZ i $R-\Delta Z$ s'obtenen de R simplement suprimint els harmònics de Fourier adequats. Per obtenir la fita de DW, fitem $\frac{\partial W}{\partial \phi}$ i $\frac{\partial W}{\partial I}$. Usant el lema 3, és fàcil de veure que

$$\left\|\frac{\partial W}{\partial \phi}\right\|_{G,\rho,1} \le \frac{2}{\alpha}\left\|\frac{\partial R}{\partial \phi}\right\|_{G,\rho,1}.$$

Per a $k \in \mathbf{Z}^n \setminus \mathcal{M}$, $|k|_1 \le K$, escrivim

$$\frac{\partial W_k}{\partial I} = \frac{\frac{\partial R_k}{\partial I}}{i\,k\cdot\omega(I)} - \frac{R_k(I)\,\frac{\partial}{\partial I}(i\,k\cdot\omega(I))}{(i\,k\cdot\omega(I))^2} = \frac{\frac{\partial R_k}{\partial I}}{i\,k\cdot\omega(I)} + \frac{\left[\frac{\partial R}{\partial \phi}\right]_k\cdot\frac{\partial \omega}{\partial I}}{(k\cdot\omega(I))^2}\,,$$

on hem usat que $\left[\frac{\partial R}{\partial \phi}\right]_k = i\,R_k(I)\,k$ (derivant el desenvolupament de Fourier de R). A partir del lema 3, obtenim

$$\left|\frac{\partial W_k}{\partial I}\right|_{G,\rho_2,\infty} \le \frac{2}{\alpha}\left|\frac{\partial R_k}{\partial I}\right|_{G,\rho_2,\infty} + \frac{4M}{\alpha^2}\left|\left[\frac{\partial R}{\partial \phi}\right]_k\right|_{G,\rho_2}.$$

Així,

$$\left\|\frac{\partial W}{\partial I}\right\|_{G,\rho,\infty} \le \frac{2}{\alpha}\left\|\frac{\partial R}{\partial I}\right\|_{G,\rho,\infty} + \frac{4M}{\alpha^2}\left\|\frac{\partial R}{\partial \phi}\right\|_{G,\rho}$$

i finalment

$$\|DW\|_{G,\rho,c} \le \left(\frac{2}{\alpha} + \frac{4Mc}{\alpha^2}\right)\|DR\|_{G,\rho,c} = \frac{2A}{\alpha}\,\|DR\|_{G,\rho,c}\,.$$

□

Notes

1. Aquestes fites no requereixen una reducció del domini $\mathcal{D}_\rho(G)$. Això esdevindria més difícil si féssim servir una norma que no tingués en compte explícitament el desenvolupament en sèrie de Fourier (per exemple, la norma de suprem). Constitueix però una excepció el cas $\dim \mathcal{M} = n-1$, és a dir, prop d'òrbites periòdiques. En efecte, en aquest cas hom disposa del mètode de les mitjanes, que dóna expressions integrals per a la solució de l'equació (2.4), i no és necessari truncar les sèries de Fourier (vegeu [Lo1, lema 2] i també [LW]).

2. El valor de A podria ésser gran (de l'ordre de $1/\alpha$). Per tant, seria un obstacle a l'obtenció de l'exponent òptim del teorema de Nekhoroshev, llevat que escollim c petit. Veurem però als capítols següents que la nostra tria de c ens permetrà de trobar una fita de A que no dependrà de α.

Proposició 5 (Lema Iteratiu, versió lineal) *Sigui $H(\phi,I)=h(I)+Z(\phi,I)+R(\phi,I)$ real analític sobre $\mathcal{D}_\rho(G)$, escrivim $\omega=\operatorname{grad} h$, i suposem que $\omega(G)$ és α,K-no ressonant mòdul $\mathcal{M}$, i que $Z\in\mathbf{R}(\mathcal{M},K)$. Suposem que $\left|\frac{\partial^2 h}{\partial I^2}\right|_{G,\rho_2}\le M$. Siguin $\delta<\rho$ i $c>0$ donats, i definim A com a (2.33). Suposem:*

$$\rho_2\le\frac{\alpha}{2MK}\ ,\qquad \|DR\|_{G,\rho,c}\le\frac{\alpha\hat{\delta}_c}{74A}\ . \tag{2.34}$$

Aleshores, existeix una transformació canònica real analítica $\Phi:\mathcal{D}_{\rho-\frac{\delta}{2}}(G)\longrightarrow\mathcal{D}_\rho(G)$ tal que $H\circ\Phi=h+\tilde{Z}+\tilde{R}$, amb $\tilde{Z}\in\mathbf{R}(\mathcal{M},K)$, i tenim:

a) $\left\|D\tilde{Z}\right\|_{G,\rho,c}\ \le\ \|DZ\|_{G,\rho,c}+\|DR\|_{G,\rho,c}\ .$

b) $\left\|D\tilde{R}\right\|_{G,\rho-\delta,c}\ \le\ e^{-K\delta_1}\cdot\|DR\|_{G,\rho,c}+\dfrac{14A}{\alpha\hat{\delta}_c}\left(\|DZ\|_{G,\rho,c}+\|DR\|_{G,\rho,c}\right)\cdot\|DR\|_{G,\rho,c}\ .$

c) $|\Phi-\mathrm{id}|_{G,\rho-\frac{\delta}{2},c}\le\dfrac{2A}{\alpha}\|DR\|_{G,\rho,c}\ .$

d) $\Phi(\mathcal{D}_{\rho'}(G))\supset\mathcal{D}_{\rho'-\frac{\delta}{2}}(G)$ *si* $\rho'\le\rho-\frac{\delta}{2}\,.$

Prova Prenem ΔZ, W i Φ com els hem construïts en parlar de l'algorisme lineal a la secció 2.1. Llavors tenim les fites de la proposició 4 per a $D(\Delta Z)$, $D(R-\Delta Z)$ i DW. En particular,

$$\|DW\|_{G,\rho,c}\le\frac{2A}{\alpha}\|DR\|_{G,\rho,c}\le\frac{\hat{\delta}_c}{37}<\frac{\hat{\delta}_c}{4e}\ ,$$

i per tant podem aplicar el lema 2, amb $t=1$ i amb $\delta/2$ en lloc de δ. Obtenim $\Phi:\mathcal{D}_{\rho-\frac{\delta}{2}}(G)\longrightarrow\mathcal{D}_\rho(G)$. Les expressions (2.6–2.7) són vàlides per al hamiltonià transformat.

A partir de (2.6) i de la proposició 4, fàcilment obtenim l'apartat (a). D'altra banda, usant (2.7) i els apartats (a) i (c) del lema 1,

$$\left\|D\tilde{R}\right\|_{G,\rho-\delta,c}\le e^{-K\delta_1}\cdot\|DR\|_{G,\rho,c}+\frac{2c}{\hat{\delta}_c}\left(\|r_2(h,W,1)\|_{G,\rho-\frac{\delta}{2}}+\|r_1(Z+R,W,1)\|_{G,\rho-\frac{\delta}{2}}\right).$$

Usant l'apartat (c) del lema 2,

$$\|r_2(h,W,1)\|_{G,\rho-\frac{\delta}{2}}\le\gamma_2\left(\frac{4e\,\|DW\|_{G,\rho,c}}{\hat{\delta}_c}\right)\cdot\|\{\{h,W\},W\}\|_{G,\rho}\ ,$$

$$\|r_1(Z+R,W,1)\|_{G,\rho-\frac{\delta}{2}}\le\gamma_1\left(\frac{4e\,\|DW\|_{G,\rho,c}}{\hat{\delta}_c}\right)\cdot\|\{Z+R,W\}\|_{G,\rho}\ .$$

Fitem els parèntesis de Poisson fent ús de l'apartat (b) del lema 1:

$$\|\{Z+R,W\}\|_{G,\rho} \leq \frac{2}{c}\left(\|DZ\|_{G,\rho,c} + \|DR\|_{G,\rho,c}\right) \cdot \|DW\|_{G,\rho,c} \ ,$$
$$\|\{\{h,W\},W\}\|_{G,\rho} = \|\{\Delta Z - R_{\leq K},W\}\|_{G,\rho} \leq \frac{2}{c}\|DR\|_{G,\rho,c} \cdot \|DW\|_{G,\rho,c}$$

on, a la segona fita, hem usat la proposició 4 que ens assegura que

$$\|D(\Delta Z - R_{\leq K})\|_{G,\rho,c} \leq \|D(\Delta Z - R)\|_{G,\rho,c} \leq \|DR\|_{G,\rho,c} \ .$$

Si $0 < x < 1$, hom té

$$\gamma_1(x) = -\frac{\ln(1-x)}{x} \ , \qquad \gamma_2(x) = \frac{x + (1-x)\ln(1-x)}{x^2} \ .$$

Fent servir que aquestes funcions són creixents i avaluant-les per a $x = 4e/37$, obtenim

$$\begin{aligned} &\|r_2(h,W,1)\|_{G,\rho-\frac{\delta}{2}} + \|r_1(Z+R,W,1)\|_{G,\rho-\frac{\delta}{2}} \\ \leq\ & \frac{2}{c}\left(\gamma_2\left(\frac{4e}{37}\right) + \gamma_1\left(\frac{4e}{37}\right)\right) \cdot \left(\|DZ\|_{G,\rho,c} + \|DR\|_{G,\rho,c}\right) \cdot \|DW\|_{G,\rho,c} \\ \leq\ & \frac{7A}{c\alpha}\left(\|DZ\|_{G,\rho,c} + \|DR\|_{G,\rho,c}\right) \cdot \|DR\|_{G,\rho,c} \ . \end{aligned} \tag{2.35}$$

Si reunim totes aquestes fites, hem provat l'apartat (b). Finalment, deduïm del lema 2 (amb $\delta/2$ en lloc de δ) els apartats (c) i (d), referits a la distància de Φ a la identitat. □

Notes

1. Aquesta versió del lema iteratiu dóna fites per a un pas de la transformació a forma normal construïda a la secció 2.1 mitjançant l'algorisme lineal. La millora del lema iteratiu respecte la versió donada a d'altres treballs relacionats (per exemple, [Pos2]), és la principal contribució de la norma per a camps hamiltonians (2.25). Aquesta norma ens estalvia d'aplicar les desigualtats de Cauchy més cops que els estrictament necessaris, amb la qual cosa evitem una altra $\hat{\delta}_c$ al denominador a l'apartat (b).

2. A l'enunciat del lema iteratiu, el valor del paràmetre c encara és lliure. A partir de la secció 2.5, prendrem
$$c = \frac{\delta_2}{\delta_1} \ ,$$
i així $\hat{\delta}_c = \delta_2$. Aquesta tria de c sembla la millor perquè dóna lloc al valor més petit possible per al quocient
$$\frac{\|DR\|_{G,\rho,c}}{\hat{\delta}_c} \ ,$$
que apareix implícitament a la condició (2.34) i a la fita (b).

2.4 Fites per a un pas de l'algorisme quadràtic

Presentem a continuació dos resultats paral·lels a les proposicions 4 i 5 de la secció 2.3, però ara dins el context de l'algorisme quadràtic descrit a la secció 2.1. En primer lloc, obtenim fites per a les funcions ΔZ i W que constitueixen la solució aproximada de l'equació (2.10), i també per a la funció P definida per (2.18). A l'inrevés que a la proposició 4, ara sí que hem de reduir el domini d'analiticitat per tal de fitar les derivades dels parèntesis de Poisson necessaris per a obtenir W i P. El segon resultat que provem en aquesta secció és la versió quadràtica del lema iteratiu.

Proposició 6 *Siguin $h(I)$, $Z(\phi,I)$, $R(\phi,I)$ funcions reals analítiques sobre $\mathcal{D}_\rho(G)$, escrivim $\omega = \operatorname{grad} h$, i suposem que $\omega(G)$ és α, K-no ressonant mòdul $\mathcal{M}$, i que $Z \in \mathbf{R}(\mathcal{M},K)$. Suposem que $\left|\frac{\partial^2 h}{\partial I^2}\right|_{G,\rho_2} \le M$. Sigui $p \ge 1$ enter fixat. Siguin $\delta < \rho$ i $c > 0$ donats, i definim A com a (2.33). Suposem:*

$$\rho_2 \le \frac{\alpha}{2MK}\ , \qquad \|DZ\|_{G,\rho,c} \le \frac{\alpha\hat{\delta}_c}{8pA}\ . \tag{2.36}$$

Aleshores les funcions ΔZ, W i P definides per (2.11), (2.13–2.17) i (2.18), respectivament, són reals analítiques sobre $\mathcal{D}_{\rho-\delta}(G)$ i satisfan les fites següents:

$$\|D(\Delta Z)\|_{G,\rho,c} \le \|DR\|_{G,\rho,c}\ , \quad \|D(R-\Delta Z)\|_{G,\rho,c} \le \|DR\|_{G,\rho,c}\ ,$$
$$\|DW\|_{G,\rho-\frac{(p-1)\delta}{p},c} \le \frac{4A}{\alpha}\|DR\|_{G,\rho,c}\ , \quad \|DP\|_{G,\rho-\delta,c} \le \left(\frac{4pA}{\alpha\hat{\delta}_c}\|DZ\|_{G,\rho,c}\right)^p \cdot \|DR\|_{G,\rho,c}\ .$$

Prova Les fites sobre $D(\Delta Z)$ i $D(R-\Delta Z)$ són, com a la proposició 4, evidents. Com que per a obtenir W hem de resoldre les equacions (2.13), (2.15), (2.16), que són totes del tipus (2.4), aplicarem diversos cops la proposició 4 per tal de fitar DW. En primer lloc, considerant (2.13) i fitant-ne la solució, obtenim

$$\left\|DW_{(1)}\right\|_{G,\rho,c} \le \frac{2A}{\alpha}\|DR\|_{G,\rho,c}\ .$$

Anomenem $\eta = \delta/p$; comprovarem que, per a $m \ge 2$,

$$\left\|DY_{(m)}\right\|_{G,\rho-(m-1)\eta,c} \le \left(\frac{4A}{\alpha\hat{\eta}_c}\|DZ\|_{G,\rho,c}\right)^{m-1} \cdot \left\|DW_{(1)}\right\|_{G,\rho,c}\ . \tag{2.37}$$

Tenint en compte la condició (2.36), aquestes fites decreixen linealment amb raó 1/2 i hom dedueix de la igualtat $W = W_{(1)} + \sum_{m=2}^{p} Y_{(m)}$ la fita de DW:

$$\|DW\|_{G,\rho-(p-1)\eta,c} \le 2\left\|DW_{(1)}\right\|_{G,\rho,c} \le \frac{4A}{\alpha}\|DR\|_{G,\rho,c}\ .$$

Per tal de provar (2.37) procedim per inducció. Per a $m = 2$, fitem la solució de (2.15) i apliquem els apartats (a) i (b) del lema 1:

$$\begin{aligned}\left\|DY_{(2)}\right\|_{G,\rho-\eta,c} &\leq \frac{2A}{\alpha}\left\|D\left\{W_{(1)},Z\right\}\right\|_{G,\rho-\eta,c} \leq \frac{2Ac}{\alpha\hat{\eta}_c}\left\|\left\{W_{(1)},Z\right\}\right\|_{G,\rho} \\ &\leq \frac{4A}{\alpha\hat{\eta}_c}\left\|DZ\right\|_{G,\rho,c}\cdot\left\|DW_{(1)}\right\|_{G,\rho,c}.\end{aligned}$$

A partir de (2.16) i aplicant novament el lema 1, per a $m \geq 3$ obtenim:

$$\begin{aligned}\left\|DY_{(m)}\right\|_{G,\rho-(m-1)\eta,c} &\leq \frac{2A}{\alpha}\left\|D\left\{Y_{(m-1)},Z\right\}\right\|_{G,\rho-(m-1)\eta,c} \\ &\leq \frac{2Ac}{\alpha\hat{\eta}_c}\left\|\left\{Y_{(m-1)},Z\right\}\right\|_{G,\rho-(m-2)\eta,c} \\ &\leq \frac{4A}{\alpha\hat{\eta}_c}\left\|DZ\right\|_{G,\rho,c}\cdot\left\|DY_{(m-1)}\right\|_{G,\rho-(m-2)\eta,c},\end{aligned}$$

i aplicant inducció deduïm (2.37). Finalment, apliquem (2.21) i altre cop el lema 1 per fitar DP:

$$\begin{aligned}\left\|DP\right\|_{G,\rho-\delta,c} &\leq \frac{c}{\hat{\eta}_c}\left\|\left\{Y_{(p)},Z\right\}\right\|_{G,\rho-(p-1)\eta} \leq \frac{2}{\hat{\eta}_c}\left\|DY_{(p)}\right\|_{G,\rho-(p-1)\eta,c}\cdot\left\|DZ\right\|_{G,\rho,c} \\ &\leq \frac{2}{\hat{\eta}_c}\left(\frac{4A}{\alpha\hat{\eta}_c}\left\|DZ\right\|_{G,\rho,c}\right)^{p-1}\cdot\left\|DW_{(1)}\right\|_{G,\rho,c}\cdot\left\|DZ\right\|_{G,\rho,c} \\ &\leq \left(\frac{4A}{\alpha\hat{\eta}_c}\left\|DZ\right\|_{G,\rho,c}\right)^{p}\cdot\left\|DR\right\|_{G,\rho,c}.\end{aligned}$$

□

Nota En comptes de $\eta = \delta/p$, altres subdivisions $\delta = \eta_{(1)} + \cdots + \eta_{(p)}$ són factibles per tal d'obtenir fites. Però la subdivisió que hem considerat és la més adient (dóna una fita millor sobre DP) si tenim en compte que el màxim d'un producte de p nombres amb suma fixada s'assoleix quan els p nombres són iguals.

Podem deduir fàcilment quin és el valor que més ens convé prendre per a l'enter p. Només cal trobar la p que minimitzi la funció

$$p \longmapsto \left(\frac{4pA}{\alpha\hat{\delta}_c}\left\|DZ\right\|_{G,\rho,c}\right)^{p},$$

és a dir,

$$p = \frac{\alpha\hat{\delta}_c}{4eA\left\|DZ\right\|_{G,\rho,c}}. \tag{2.38}$$

Essencialment serà aquest el valor de p que prendrem a la proposició següent. Notem que amb aquesta p la condició (2.36) sobre $\left\|DZ\right\|_{G,\rho,c}$ s'acompleix automàticament.

Proposició 7 (Lema Iteratiu, versió quadràtica) *Sigui* $H(\phi, I) = h(I) + Z(\phi, I) + R(\phi, I)$ *real analític sobre* $\mathcal{D}_\rho(G)$*, escrivim* $\omega = \operatorname{grad} h$*, i suposem que* $\omega(G)$ *és* α, K*-no ressonant mòdul* $\mathcal{M}$*, i que* $Z \in \mathbf{R}(\mathcal{M}, K)$*. Suposem que* $\left|\frac{\partial^2 h}{\partial I^2}\right|_{G,\rho_2} \leq M$*. Siguin* $\delta < \rho$ *i* $c > 0$ *donats, i definim* A *com a (2.33). Suposem:*

$$K\delta_1 \geq 4, \qquad \rho_2 \leq \frac{\alpha}{2MK}\,, \qquad \|DZ\|_{G,\rho,c} \leq \frac{\alpha\hat{\delta}_c}{44A}\,, \qquad \|DR\|_{G,\rho,c} \leq \frac{\alpha\hat{\delta}_c}{176A}\,. \tag{2.39}$$

Aleshores, existeix una transformació canònica real analítica $\Phi : \mathcal{D}_{\rho-\frac{3\delta}{4}}(G) \longrightarrow \mathcal{D}_{\rho-\frac{\delta}{2}}(G)$ *tal que* $H \circ \Phi = h + \tilde{Z} + \tilde{R}$*, amb* $\tilde{Z} \in \mathbf{R}(\mathcal{M}, K)$*, i tenim:*

a) $\left\|D\tilde{Z}\right\|_{G,\rho,c} \leq \|DZ\|_{G,\rho,c} + \|DR\|_{G,\rho,c}\,.$

b) $$\left\|D\tilde{R}\right\|_{G,\rho-\delta,c} \leq \left(\exp\left\{-\frac{\alpha\hat{\delta}_c}{87A\,\|DZ\|_{G,\rho,c}}\right\} + 2\exp\left\{-\frac{K\delta_1}{2}\right\}\right)\cdot\|DR\|_{G,\rho,c} + \frac{84A}{\alpha\hat{\delta}_c}\|DR\|^2_{G,\rho,c}\,.$$

c) $|\Phi - \mathrm{id}|_{G,\rho-\frac{3\delta}{4},c} \leq \frac{4A}{\alpha}\|DR\|_{G,\rho,c}\,.$

d) $\Phi(\mathcal{D}_{\rho'}(G)) \supset \mathcal{D}_{\rho'-\frac{\delta}{4}}(G)$ *si* $\rho' \leq \rho - \frac{3\delta}{4}\,.$

Prova Prenem ΔZ, W, P i Φ segons l'algorisme quadràtic descrit a la secció 2.1. Apliquem la proposició 6 amb $\delta/4$ en lloc de δ, i amb

$$p = \left[\frac{\alpha\hat{\delta}_c}{16eA\,\|DZ\|_{G,\rho,c}}\right] \geq 1\,, \tag{2.40}$$

on $[\cdot]$ denota la part entera. Obtenim les fites per a $D(\Delta Z)$, $D(R - \Delta Z)$, DW i DP. Concretament,

$$\|DW\|_{G,\rho-\frac{(p-1)\delta}{4p},c} \leq \frac{4A}{\alpha}\|DR\|_{G,\rho,c} \leq \frac{\hat{\delta}_c}{44} < \frac{\hat{\delta}_c}{8e}\,, \tag{2.41}$$

$$\begin{aligned}\|DP\|_{G,\rho-\frac{\delta}{4},c} &\leq \left(\frac{16pA}{\alpha\hat{\delta}_c}\|DZ\|_{G,\rho,c}\right)^p \cdot \|DR\|_{G,\rho,c} \leq e^{-p}\cdot\|DR\|_{G,\rho,c} \\ &\leq \exp\left\{-\frac{\alpha\hat{\delta}_c}{87A\,\|DZ\|_{G,\rho,c}}\right\}\cdot\|DR\|_{G,\rho,c}\,,\end{aligned} \tag{2.42}$$

on hem usat que

$$[x] \geq \frac{x}{2} \qquad \text{si } x \geq 1.$$

La fita sobre DW ens permet d'aplicar el lema 2, amb $\delta/4$ en lloc de δ, i obtenim $\Phi : \mathcal{D}_{\rho-\frac{3\delta}{4}}(G) \longrightarrow \mathcal{D}_{\rho-\frac{\delta}{2}}(G)$. Per al hamiltonià transformat, tenim les expressions (2.19–2.20).

De la mateixa manera que a la proposició 5, obtenim l'apartat (a). Per a (b), notem que, tenint en compte (2.20) i els apartats (a) i (c) del lema 1,

$$\begin{aligned}\left\|D\tilde{R}\right\|_{G,\rho-\delta,c} \le\ & \|DP\|_{G,\rho-\delta,c} + e^{-\frac{3K\delta_1}{4}} \cdot \left(\|DR\|_{G,\rho,c} + \|D(\{Z,W\})\|_{G,\rho-\frac{\delta}{4},c}\right) \\ & + \frac{4c}{\hat{\delta}_c}\left(\|r_2(h+Z,W,1)\|_{G,\rho-\frac{3\delta}{4}} + \|r_1(R,W,1)\|_{G,\rho-\frac{3\delta}{4}}\right).\end{aligned}$$

Tenim, pels apartats (a) i (b) del lema 1,

$$\begin{aligned}\|D(\{Z,W\})\|_{G,\rho-\frac{\delta}{4},c} &\le \frac{4pc}{\hat{\delta}_c}\|\{Z,W\}\|_{G,\rho-\frac{(p-1)\delta}{4p}} \le \frac{8p}{\hat{\delta}_c}\|DZ\|_{G,\rho,c}\cdot\|DW\|_{G,\rho-\frac{(p-1)\delta}{4p},c} \\ &\le \|DR\|_{G,\rho,c}\,, \end{aligned} \tag{2.43}$$

on hem usat (2.41) i hem fitat superiorment el valor de p triat a (2.40). D'altra banda, aplicant l'apartat (c) del lema 2,

$$\|r_2(h+Z,W,1)\|_{G,\rho-\frac{3\delta}{4}} \le \gamma_2\left(\frac{8e\|DW\|_{G,\rho-\frac{\delta}{2},c}}{\hat{\delta}_c}\right)\cdot\|\{\{h+Z,W\},W\}\|_{G,\rho-\frac{\delta}{2}}\,,$$

$$\|r_1(R,W,1)\|_{G,\rho-\frac{3\delta}{4}} \le \gamma_1\left(\frac{8e\|DW\|_{G,\rho-\frac{\delta}{2},c}}{\hat{\delta}_c}\right)\cdot\|\{R,W\}\|_{G,\rho-\frac{\delta}{2}}\,.$$

Observem que, per (2.18),

$$\{h+Z,W\} = \Delta Z - R_{\le K} + P + \{Z,W\}_{>K}\,.$$

Com a la proposició 5, fitem els parèntesis de Poisson aplicant l'apartat (b) del lema 1:

$$\begin{aligned}&\|\{R,W\}\|_{G,\rho-\frac{\delta}{2}} \le \frac{2}{c}\|DR\|_{G,\rho,c}\cdot\|DW\|_{G,\rho-\frac{\delta}{2},c}\,,\\ &\|\{\{h+Z,W\},W\}\|_{G,\rho-\frac{\delta}{2}} \\ &\quad\le \frac{2}{c}\left\|D\left(\Delta Z - R_{\le K} + P + \{Z,W\}_{>K}\right)\right\|_{G,\rho-\frac{\delta}{2},c}\cdot\|DW\|_{G,\rho-\frac{\delta}{2},c} \\ &\quad\le \frac{2}{c}\left(1+\exp\left\{-\frac{\alpha\hat{\delta}_c}{87A\|DZ\|_{G,\rho,c}}\right\}+\exp\left\{-\frac{K\delta_1}{4}\right\}\right)\cdot\|DR\|_{G,\rho,c}\cdot\|DW\|_{G,\rho-\frac{\delta}{2},c} \\ &\quad\le \frac{4}{c}\|DR\|_{G,\rho,c}\cdot\|DW\|_{G,\rho-\frac{\delta}{2},c}\,,\end{aligned}$$

on hem fitat DP usant (2.42) i, a més, hem fitat $D\left(\{Z,W\}_{>K}\right)$ aplicant l'apartat (c) del lema 1 juntament amb (2.43). Procedint manera semblant a la proposició 5, avaluem les funcions γ_1 i γ_2 per a $x = 8e/44$ i, usant també (2.41), obtenim:

$$\|r_2(h+Z,W,1)\|_{G,\rho-\frac{3\delta}{4}} + \|r_1(R,W,1)\|_{G,\rho-\frac{3\delta}{4}} \le \frac{21A}{c\alpha}\|DR\|^2_{G,\rho,c}\,.$$

Reunint totes aquestes fites, hem provat l'apartat (b). Els apartats (c) i (d) provenen del lema 2. □

2.5 Fites exponencials per a la forma normal

En aquesta secció partim d'un hamiltonià $H(\phi, I) = h(I) + Z(\phi, I) + R(\phi, I)$ sobre $\mathcal{D}_\rho(G)$, amb G no ressonant mòdul $\mathcal{M}$ fins ordre K. Aplicant un nombre Q de vegades el lema iteratiu, obtenim un hamiltonià transformat i una fita per a la resta. Tant si fem servir la versió lineal del lema iteratiu com la versió quadràtica, podem arribar a una fita exponencialment petita si escollim $Q = Q(K)$ de manera adequada.

Provarem quantitativament aquest resultat fent ús del lema iteratiu lineal, i després mostrarem que també és factible fer-ho a partir del lema quadràtic. D'aquesta manera, ambdós punts de vista són vàlids per a provar el teorema de Nekhoroshev amb l'exponent òptim.

Teorema 8 (Teorema de la Forma Normal) *Sigui* $H = h(I)+Z(\phi, I)+R(\phi, I)$ *real analític sobre* $\mathcal{D}_\rho(G)$*, escrivim* $\omega = \operatorname{grad} h$*, i suposem que* $\omega(G)$ *és* α, K*-no ressonant mòdul* $\mathcal{M}$*, i que* $Z \in \mathbf{R}(\mathcal{M}, K)$*. Suposem que* $\left|\frac{\partial^2 h}{\partial I^2}\right|_{G,\rho_2} \leq M$*. Sigui* $\delta < \rho$ *donat, escrivim* $c = \delta_2/\delta_1$*, i sigui* A *la constant definida a (2.33). Suposem:*

$$\rho_2 \leq \frac{\alpha}{2MK} \,, \qquad \|DZ\|_{G,\rho,c} + \|DR\|_{G,\rho,c} \leq \frac{\alpha\delta_2}{61AK\delta_1} \,. \tag{2.44}$$

Aleshores, existeix una transformació canònica real analítica $\Psi : \mathcal{D}_{\rho-\delta}(G) \longrightarrow \mathcal{D}_\rho(G)$ *tal que* $H \circ \Psi = h + Z^* + R^*$*, amb* $Z^* \in \mathbf{R}(\mathcal{M}, K)$*, i tenim:*

a) $\|DZ^*\|_{G,\rho-\delta,c} + \|DR^*\|_{G,\rho-\delta,c} \leq \|DZ\|_{G,\rho,c} + 2\|DR\|_{G,\rho,c}$.

b) $\|DR^*\|_{G,\rho-\delta,c} \leq 3\, e^{-\frac{K\delta_1}{2}} \cdot \|DR\|_{G,\rho,c}$.

c) $|\Psi - \mathrm{id}|_{G,\rho-\delta,c} \leq \dfrac{4A}{\alpha} \|DR\|_{G,\rho,c}$.

d) $\Psi\left(\mathcal{D}_{\rho'}(G)\right) \supset \mathcal{D}_{\rho'-\frac{\delta}{2}}(G)$ *per a* $\rho' \leq \rho - \delta$*.*

Prova Sigui $Q \geq 1$ enter que escollirem més avall, i introduïm la successió

$$\rho^{(q)} = \rho - \frac{q\delta}{Q} \,, \quad 0 \leq q \leq Q.$$

Prenem $\delta^{(q)} = \delta/Q$ per a $1 \leq q \leq Q$. Construirem una successió finita de transformacions canòniques real analítiques $\Phi^{(q)} : \mathcal{D}_{\rho^{(q)}}(G) \longrightarrow \mathcal{D}_{\rho^{(q-1)}}(G)$, $1 \leq q \leq Q$. Denotant $\Psi^{(q)} = \Phi^{(1)} \circ \cdots \circ \Phi^{(q)}$, escriurem els successius hamiltonians transformats en la forma $H^{(q)} = H \circ \Psi^{(q)} = h + Z^{(q)} + R^{(q)}$, amb $Z^{(q)} \in \mathbf{R}(\mathcal{M}, K)$. A més, mostrarem que, si

$$K\delta_1 \geq 2Q, \tag{2.45}$$

llavors els enunciats següents són certs per a $0 \leq q \leq Q$:

$1_q)$ $\left\|DZ^{(q)}\right\|_{G,\rho^{(q)},c} \leq \|DZ\|_{G,\rho,c} + \sum_{s=0}^{q-1} \left\|DR^{(s)}\right\|_{G,\rho^{(s)},c}$.

$2_q)$ $\left\|DR^{(q)}\right\|_{G,\rho^{(q)},c} \leq \frac{1}{e^q} \|DR\|_{G,\rho,c}$.

Procedim per inducció. Els dos enunciats són òbviament certs si $q = 0$. Per a $1 \leq q \leq Q$, notem que, per (2_{q-1}) i la condició (2.44),

$$\left\|DR^{(q-1)}\right\|_{G,\rho^{(q-1)},c} \leq \frac{1}{e^{q-1}} \|DR\|_{G,\rho,c} \leq \frac{\alpha\delta_2}{61AK\delta_1} \leq \frac{\alpha\delta_2}{122AQ}$$

i així podem aplicar la versió lineal del lema iteratiu (proposició 5) amb δ/Q en comptes de δ, i tenim la transformació canònica $\Phi^{(q)}$. De manera immediata, obtenim (1_q). La fita (2_q) prové de la fita següent:

$$\begin{aligned}
&\left\|DR^{(q)}\right\|_{G,\rho^{(q)},c} \\
&\quad \leq e^{-\frac{K\delta_1}{Q}} \cdot \left\|DR^{(q-1)}\right\|_{G,\rho^{(q-1)},c} \\
&\quad\quad + \frac{14AQ}{\alpha\delta_2} \left(\left\|DZ^{(q-1)}\right\|_{G,\rho^{(q-1)},c} + \left\|DR^{(q-1)}\right\|_{G,\rho^{(q-1)},c} \right) \cdot \left\|DR^{(q-1)}\right\|_{G,\rho^{(q-1)},c} \\
&\quad \leq \left(\frac{1}{e^2} + \frac{28AQ}{\alpha\delta_2} \left(\|DZ\|_{G,\rho,c} + \|DR\|_{G,\rho,c} \right) \right) \cdot \left\|DR^{(q-1)}\right\|_{G,\rho^{(q-1)},c} \\
&\quad \leq \left(\frac{1}{e^2} + \frac{28}{122} \right) \cdot \left\|DR^{(q-1)}\right\|_{G,\rho^{(q-1)},c} \leq \frac{1}{e} \left\|DR^{(q-1)}\right\|_{G,\rho^{(q-1)},c} .
\end{aligned}$$

Ara, suposem que $K\delta_1 \geq 2$ (si $K\delta_1 < 2$, tots els apartats són obvis si prenem com a Ψ l'aplicació identitat). Podem escollir $Q = Q(K)$ com el màxim enter que satisfaci (2.45), és a dir, $Q = \left[\frac{K\delta_1}{2}\right]$. Denotant $\Psi = \Psi^{(Q)}$, $Z^* = Z^{(Q)}$, $R^* = R^{(Q)}$, tenim $H \circ \Psi = h + Z^* + R^*$. Llavors, l'apartat (a) prové de (1_Q). Per a l'apartat (b), usem (2_Q):

$$\|DR^*\|_{G,\rho-\delta,c} \leq \frac{1}{e^Q} \|DR\|_{G,\rho,c} \leq \frac{1}{e^{\frac{K\delta_1}{2}-1}} \|DR\|_{G,\rho,c} \leq 3\, e^{-\frac{K\delta_1}{2}} \cdot \|DR\|_{G,\rho,c} .$$

La prova de (c) és ben simple a partir de la fita anàloga del lema iteratiu lineal i de les desigualtats (2_q):

$$\left|\Psi^{(Q)} - \mathrm{id}\right|_{G,\rho-\delta,c} \leq \sum_{q=1}^{Q} \left|\Phi^{(q)} - \mathrm{id}\right|_{G,\rho^{(q)},c} \leq \sum_{q=1}^{Q} \frac{2A}{\alpha} \left\|DR^{(q-1)}\right\|_{G,\rho^{(q-1)},c} \leq \frac{4A}{\alpha} \|DR\|_{G,\rho,c} . \tag{2.46}$$

Finalment, per a obtenir (d) és suficient provar que, per a $0 \leq q \leq Q$,

$$\Psi^{(q)}\left(\mathcal{D}_{\rho'}(G)\right) \supset \mathcal{D}_{\rho'-\frac{q\delta}{2Q}}(G) \qquad \text{si} \quad \rho' \leq \rho - \tfrac{q\delta}{Q} .$$

En efecte, aquesta inclusió és òbvia si $q = 0$. Per inducció, suposem-la certa per a $q - 1$:

$$\Psi^{(q-1)}\left(\mathcal{D}_{\rho''}(G)\right) \supset \mathcal{D}_{\rho''-\frac{(q-1)\delta}{2Q}}(G) \qquad \text{si} \quad \rho'' \leq \rho - \tfrac{(q-1)\delta}{Q} .$$

Llavors, prenent $\rho'' = \rho' - \frac{\delta}{2Q}$ en aquesta inclusió i aplicant l'apartat (d) del lema iteratiu, obtenim:

$$\Psi^{(q)}\left(\mathcal{D}_{\rho'}(G)\right) = \Psi^{(q-1)}\left(\Phi^{(q)}\left(\mathcal{D}_{\rho'}(G)\right)\right) \supset \Psi^{(q-1)}\left(\mathcal{D}_{\rho'-\frac{\delta}{2Q}}(G)\right) \supset \mathcal{D}_{\rho'-\frac{q\delta}{2Q}}(G).$$

□

Nota Aquest teorema equival essencialment al resultat anàleg de J. Pöschel [Pos2, secció 2], i sembla "òptim" en el sentit que l'exponent de K a la segona condició de (2.44) és 1. Això és molt important de cara a obtenir l'exponent òptim al teorema de Nekhoroshev (capítol 3). La diferència amb [Pos2] és que la nostra prova és més simple degut al fet que el lema iteratiu lineal també és òptim, mentre que la prova que apareix a [Pos2] és basada en una tria molt acurada de les $\delta^{(q)}$ (vegeu també [Nei2]).

No milloraríem pas les fites del teorema 8 escollint les $\delta^{(q)}$ d'una altra manera. Per comprovar-ho, refarem les fites de manera informal (sense tenir en compte les constants), amb $\delta^{(q)}$ qualssevol tals que

$$\delta^{(1)} + \cdots + \delta^{(Q)} = \delta. \tag{2.47}$$

Escrivim

$$\begin{aligned} \rho^{(0)} &= \rho, \\ \rho^{(q)} &= \rho^{(q-1)} - \delta^{(q)}, \quad 1 \le q \le Q, \end{aligned} \tag{2.48}$$

per a les successives bandes d'analiticitat.

Al pas q de l'algorisme, podrem aplicar el lema iteratiu lineal (proposició 5) si

$$\left\| DR^{(q-1)} \right\|_{G,\rho^{(q-1)},c} \preceq \frac{\alpha \delta_2^{(q)}}{A} \, . \tag{2.49}$$

Aplicant l'apartat (b) del lema iteratiu, obtindrem

$$\left\| DR^{(q)} \right\|_{G,\rho^{(q)},c} \le \frac{1}{e} \left\| DR^{(q-1)} \right\|_{G,\rho^{(q-1)},c} \, , \tag{2.50}$$

per a $1 \le q \le Q$, si es satisfan desigualtats dels tipus

$$K\delta_1^{(q)} \succeq 1, \qquad \|DZ\|_{G,\rho,c} + \|DR\|_{G,\rho,c} \preceq \frac{\alpha \delta_2^{(q)}}{A} \, . \tag{2.51}$$

Notem que podem oblidar-nos de la desigualtat (2.49) car és implicada per (2.51). Les desigualtats (2.51) són suficients per a obtenir (2.50) si suposem que c i A no varien al llarg del procés iteratiu. Però, en principi, aquests paràmetres depenen de q:

$$c_q = \frac{\delta_2^{(q)}}{\delta_1^{(q)}} \, , \qquad A_q = 1 + \frac{2Mc_q}{\alpha} \, ,$$

amb la qual cosa caldria considerar les desigualtats (2.26) a l'hora de fer les fites, i llavors les desigualtats a satisfer poden ésser més restrictives que les de (2.51). En efecte, si tenim present (2.26), llavors a (2.50) no hem de comparar $\left\|DR^{(q-1)}\right\|_{G,\rho^{(q-1)},c_q}$ amb $\left\|DR^{(q)}\right\|_{G,\rho^{(q)},c_q}$ sinó amb $\left\|DR^{(q)}\right\|_{G,\rho^{(q)},c_{q+1}}$, per tal que al pas següent puguem aplicar el lema iteratiu amb c_{q+1} en lloc de c_q (vegeu a la secció 4.4 una situació similar dins la prova del teorema KAM). Així, si $c_{q+1} > c_q$ caldrà afegir a les desigualtats (2.51) uns factors c_q/c_{q+1} que les faran més restrictives, i a més A_q pot ésser gran. Per contra, en el cas que $c_{q+1} < c_q$ aquests factors no apareixen. Tanmateix, en ambdós casos ens limitarem a considerar les desigualtats (2.51), amb les quals ja podem mostrar que no millorem les fites del teorema 8.

Com que cal acomplir les desigualtats (2.51) per a $1 \le q \le Q$, la millor tria de les $\delta^{(q)}$ serà aquella que faci que les quantitats

$$\min_{1\le q\le Q} \delta_1^{(q)}, \qquad \min_{1\le q\le Q} \delta_2^{(q)}$$

siguin màximes, és a dir, $\delta^{(q)} = \delta/Q,\ q = 1,\ldots,Q$. És llavors quan les desigualtats (2.51) esdevenen menys restrictives:

$$K\delta_1 \succeq Q, \qquad \|DZ\|_{G,\rho,c} + \|DR\|_{G,\rho,c} \preceq \frac{\alpha\delta_2}{AQ}\,.$$

Escollint $Q \sim K\delta_1$, obtenim les fites de l'enunciat.

Mostrem a continuació, també de manera informal, que podem fer ús de la versió quadràtica del lema iteratiu (proposició 7) en comptes de la versió lineal per tal d'obtenir un enunciat essencialment equivalent per al teorema de la forma normal. Concretament, veurem que amb la condició (2.44) obtenim les fites de l'apartat (b) del teorema 8 (amb unes altres constants). La prova dels altres apartats seria pràcticament igual. Així, l'algorisme quadràtic també permet de provar el teorema de Nekhoroshev amb l'exponent òptim.

Fixant Q enter a escollir, considerem $\delta^{(q)}$, $1 \le q \le Q$, i $\rho^{(q)}$, $0 \le q \le Q$, com a (2.47) i (2.48), respectivament. Ara es tracta de construir transformacions canòniques de manera que, per a $0 \le q \le Q$, tinguem (1_q) i, en comptes de (2_q), una fita del tipus

$$\left\|DR^{(q)}\right\|_{G,\rho^{(q)},c} \preceq \frac{1}{e^{2^q}} \|DR\|_{G,\rho,c}\ . \tag{2.52}$$

Procedint per inducció, suposem certa aquesta desigualtat per a $q-1$ i intentem establir-la per a q. Les hipòtesis (2.39) del lema iteratiu quadràtic s'acompliran si

$$K\delta_1^{(q)} \succeq 1, \qquad \left\|DZ^{(q-1)}\right\|_{G,\rho^{(q-1)},c} \preceq \frac{\alpha\delta_2^{(q)}}{A}\,, \qquad \left\|DR^{(q-1)}\right\|_{G,\rho^{(q-1)},c} \preceq \frac{\alpha\delta_2^{(q)}}{A}\,. \tag{2.53}$$

Notem que, per a obtenir (2.52), és suficient provar la desigualtat:

$$\left\|DR^{(q)}\right\|_{G,\rho^{(q)},c} \preceq \frac{1}{e^{2^{q-1}}} \left\|DR^{(q-1)}\right\|_{G,\rho^{(q-1)},c} .$$

Per la fita de l'apartat (b) de l'esmentat lema quadràtic, caldrà que es satisfaci una desigualtat del tipus

$$\exp\left\{-\frac{\alpha\delta_2^{(q)}}{A\left\|DZ^{(q-1)}\right\|_{G,\rho^{(q-1)},c}}\right\} + \exp\left\{-K\delta_1^{(q)}\right\} + \frac{A}{\alpha\delta_2^{(q)}}\left\|DR^{(q-1)}\right\|_{G,\rho^{(q-1)},c} \preceq \frac{1}{e^{2^{q-1}}} \quad (2.54)$$

(per les raons ja adduïdes més amunt, ens limitem a considerar que c no depèn de q). Les desigualtats (2.53–2.54) es redueixen, tenint en compte les hipòtesis d'inducció sobre $\left\|DZ^{(q-1)}\right\|_{G,\rho^{(q-1)},c}$ i $\left\|DR^{(q-1)}\right\|_{G,\rho^{(q-1)},c}$, a les següents:

$$K\delta_1^{(q)} \succeq 2^{q-1}, \qquad \|DZ\|_{G,\rho,c} + \|DR\|_{G,\rho,c} \preceq \frac{\alpha\delta_2^{(q)}}{2^{q-1}A} , \quad (2.55)$$

que s'han d'acomplir per a $1 \le q \le Q$.

Procedint de manera similar al cas lineal, resulta que la millor tria de les $\delta^{(q)}$ serà aquella que faci que les quantitats

$$\min_{1\le q\le Q} \frac{\delta_1^{(q)}}{2^{q-1}} , \qquad \min_{1\le q\le Q} \frac{\delta_2^{(q)}}{2^{q-1}}$$

siguin màximes. Podem comprovar fàcilment que això s'assoleix escollint

$$\delta^{(q)} = \frac{2^{q-1}\delta}{2^Q-1} , \qquad q = 1, \ldots, Q. \quad (2.56)$$

Amb aquestes $\delta^{(q)}$, les desigualtats (2.55) esdevenen

$$K\delta_1 \succeq 2^Q, \qquad \|DZ\|_{G,\rho,c} + \|DR\|_{G,\rho,c} \preceq \frac{\alpha\delta_2}{A\,2^Q} .$$

La primera d'aquestes desigualtats ens indueix a escollir $Q \sim \log_2(K\delta_1)$. Llavors, la segona desigualtat esdevé la condició

$$\|DZ\|_{G,\rho,c} + \|DR\|_{G,\rho,c} \preceq \frac{\alpha\delta_2}{AK\delta_1} ,$$

i de (2.52) deduïm la fita

$$\|DR^*\|_{G,\rho-\delta,c} \preceq \frac{1}{e^{2^Q}} \|DR\|_{G,\rho,c} \sim e^{-K\delta_1} \|DR\|_{G,\rho,c} ,$$

amb la qual cosa obtenim un enunciat equivalent al del teorema 8, si bé les constants involucrades esdevenen quelcom pitjors.

Una circumstància potser sorprenent d'aquesta prova basada en l'algorisme quadràtic és el fet que a (2.56) hem hagut d'escollir les $\delta^{(q)}$ creixents. A primera vista, això fa inviable qualsevol mena de convergència del procés. Hem de remarcar però que aquesta tria ve condicionada en part pel fet que el paràmetre K (que indica fins a quin ordre han estat excloses les ressonàncies mòdul $\mathcal{M}$) ve fixat per a tot el procés iteratiu. Si volem que les $\delta^{(q)}$ formin una sèrie sumable, és necessari considerar una successió d'ordres K_q creixent, com fem a la prova del teorema KAM (secció 4.4).

Comentem també que la tria de les $\delta^{(q)}$ efectuada a (2.56) per a l'algorisme quadràtic comporta que el nombre p_q d'iteracions, donat per (2.38), que hem de fer dins de cada pas per a resoldre aproximadament l'equació lineal, creix de manera quadràtica, és a dir, $p_q \sim 2^q$. Hem utilitzat això al final de la secció 2.1 per a comptar els parèntesis de Poisson que s'efectuen en el cas quadràtic.

Capítol 3

Teorema de Nekhoroshev i resultats afins

3.1 Fites lluny de ressonàncies: aplicació als oscil·ladors harmònics

A partir del teorema 8, podem obtenir fites per a la variació de les variables d'acció sobre el conjunt G on el teorema pot ésser aplicat. Això és força simple en una regió no ressonant ($\mathcal{M} = 0$), on no caldrà imposar cap condició addicional de tipus geomètric sobre el hamiltonià no pertorbat h.

Lema 9 *Sigui* $H(\phi, I) = h(I) + Z(I) + R(\phi, I)$ *real analític sobre* $\mathcal{D}_\rho(G)$, *escrivim* $\omega = \operatorname{grad} h$, *i suposem que* $\omega(G)$ *és* α, K*-no ressonant mòdul* 0. *Suposem que* $\left|\frac{\partial^2 h}{\partial I^2}\right|_{G,\rho_2} \leq M$. *Sigui* $c = \rho_2/\rho_1$, *i suposem:*

$$\rho_2 \leq \frac{\alpha}{2MK}\,, \qquad \|DZ\|_{G,\rho,c} + \|DR\|_{G,\rho,c} \leq \frac{\alpha\rho_2}{122K\rho_1}\,. \tag{3.1}$$

Aleshores, per a tota trajectòria $(\phi(t), I(t))$ *de* H, *amb* $(\phi(0), I(0)) \in \mathbf{T}^n \times G$, *tenim*

$$|I(t) - I(0)| \leq \frac{24}{\alpha}\,\|DR\|_{G,\rho,c} \qquad si \;\; |t| \leq \frac{2}{\alpha}\,e^{\frac{K\rho_1}{6}}. \tag{3.2}$$

Prova Suposem primer que $K\rho_1 \geq 1$. Sigui $\delta = \rho/3$. A partir de (2.33), veiem que

$$A = 1 + \frac{2M}{\alpha} \cdot \frac{\rho_2}{\rho_1} \leq 1 + \frac{1}{K\rho_1} \leq 2.$$

Llavors, el teorema 8 ens dóna una transformació canònica $\Psi : \mathcal{D}_{\frac{2\rho}{3}}(G) \longrightarrow \mathcal{D}_\rho(G)$ tal que $H \circ \Psi = h + Z^* + R^*$, amb $Z^* = Z^*(I)$, i

$$\|DR^*\|_{G,\frac{2\rho}{3},c} \leq 3\, e^{-\frac{K\rho_1}{6}} \cdot \|DR\|_{G,\rho,c} \, .$$

Escrivim

$$\eta = \frac{8}{\alpha} \|DR\|_{G,\rho,c} \, .$$

Per l'apartat (c) del teorema 8 i la segona condició de (3.1),

$$|\Psi - \mathrm{id}|_{G,\frac{2\rho}{3},c} \leq \eta \leq \frac{\rho_2}{15K\rho_1} \leq \frac{\rho_2}{15} \, .$$

A més, per l'apartat (d) del teorema 8, tenim $\Psi\left(\mathcal{D}_{\frac{2\rho}{3}}(G)\right) \supset \mathcal{D}_{\frac{\rho}{2}}(G) \supset \mathbf{T}^n \times G$ i per tant podem escriure $(\phi(0), I(0)) = \Psi\left(\phi_0^*, I_0^*\right)$ i, com que Ψ conserva els dominis reals, $(\phi_0^*, I_0^*) \in \mathbf{T}^n \times \mathcal{V}_{\frac{\rho_2}{15}}(G)$. Sigui $(\phi^*(t), I^*(t))$ la trajectòria de $H \circ \Psi$ amb $(\phi^*(0), I^*(0)) = (\phi_0^*, I_0^*)$. Definim

$$T = \inf\left\{t > 0 \; : \; |I^*(t) - I^*(0)| > \eta\right\}$$

(el procediment per a temps negatius seria exactament el mateix). Per a $0 \leq t \leq T$, obtenim $(\phi^*(t), I^*(t)) \in \mathcal{D}_{\frac{2\rho}{3}}(G)$. Com que Ψ transforma trajectòries de $H \circ \Psi$ en trajectòries de H, obtenim que $(\phi(t), I(t)) = \Psi\left(\phi^*(t), I^*(t)\right)$ també és definida per a $0 \leq t \leq T$, i obtenim la fita

$$|I(t) - I(0)| \leq |I(t) - I^*(t)| + |I^*(t) - I^*(0)| + |I^*(0) - I(0)| \leq 3\eta.$$

A continuació, obtenim una fita inferior per a T. Sigui $\Delta I^* = I^*(T) - I^*(0)$. Clarament, $|\Delta I^*| = \eta$. D'altra banda, usant la forma de les equacions hamiltonianes i el fet que la forma normal Z^* només depèn de les variables d'acció, obtenim

$$|\Delta I^*| \leq T \cdot \left\| \frac{\partial R^*}{\partial \phi} \right\|_{G,\frac{2\rho}{3}} \leq T \cdot \|DR^*\|_{G,\frac{2\rho}{3},c} \leq T \cdot 3\, e^{-\frac{K\rho_1}{6}} \cdot \|DR\|_{G,\rho,c} \, ,$$

i deduïm que

$$T \geq \frac{\eta}{3\, \|DR\|_{G,\rho,c}}\, e^{\frac{K\rho_1}{6}} \geq \frac{2}{\alpha}\, e^{\frac{K\rho_1}{6}}.$$

Per a $K\rho_1 < 1$, treballem amb les coordenades originals i obtenim

$$|I(t) - I(0)| \leq \frac{24}{\alpha} \|DR\|_{G,\rho,c} \qquad \text{si} \;\; |t| \leq \frac{24}{\alpha} \, ,$$

i és fàcil de veure que aquest temps d'estabilitat és més gran que el que hem enunciat a (3.2). □

Com a aplicació del lema 9, considerem el cas $h(I) = \lambda \cdot I$, és a dir, H és una pertorbació d'un sistema de n *oscil·ladors harmònics.* Suposarem que el vector de freqüències $\lambda \in \mathbf{R}^n$ és τ, γ-diofàntic (vegeu (1.2)), amb $\tau \geq n-1$ i $\gamma > 0$ donats. Aquest cas no requereix fer cap discussió geomètrica, perquè no hi ha zones ressonants que calgui excloure del domini. Com que la part integrable h és lineal, prenem $M = 0$ i llavors la condició (2.32) no imposa cap restricció sobre ρ_2. Aquest fet, com tot seguit veurem, dóna lloc a l'exponent d'estabilitat $a = 1/(\tau+1)$, diferent del que hom obté a les fites de Nekhoroshev.

L'obtenció de fites d'estabilitat en el cas dels oscil·ladors harmònics fou inicialment duta a terme a [GG2, BG] (vegeu també [Ga]). Posteriorment, les fites han estat millorades; l'exponent "òptim" $1/(\tau+1)$ ha estat obtingut a diversos treballs [Fa, Pos2, DG1].

Teorema 10 *Sigui* $H(\phi, I) = \lambda \cdot I + f(\phi, I)$ *real analític sobre* $\mathcal{D}_\rho(\mathcal{G})$*, i suposem que el vector* λ *és* τ, γ*-diofàntic, essent* $\tau \geq n-1$ *i* $\gamma > 0$ *donats. Suposem:*

$$\varepsilon := \|f\|_{\mathcal{G},\rho} \ \leq \ \varepsilon_0 := \frac{\gamma \rho_2}{244} \, .$$

Aleshores, per a tota trajectòria $(\phi(t), I(t))$ *de* H*, amb* $(\phi(0), I(0)) \in \mathbf{T}^n \times \mathcal{G}$*, tenim*

$$|I(t) - I(0)| \leq \frac{\rho_2}{5\rho_1} \left(\frac{\varepsilon}{\varepsilon_0} \right)^{1/(\tau+1)} \qquad \text{si} \ \ |t| \leq \frac{2}{\gamma} \exp \left\{ \frac{\rho_1}{24} \left(\frac{\varepsilon_0}{\varepsilon} \right)^{1/(\tau+1)} \right\}.$$

Prova Sigui $c = \rho_2/\rho_1$. Notem que podem agafar $M = 0$ al lema 9. Fixat K a escollir, el vector λ és clarament $\frac{\gamma}{K^\tau}, K$-no ressonant mòdul 0. Aplicarem el lema 9 amb $Z = 0$, $R = f$, i amb $\rho/2$ en lloc de ρ. Com que

$$\|Df\|_{\mathcal{G}, \frac{\rho}{2}, c} \leq \frac{2\varepsilon}{\rho_1} \, ,$$

la segona condició de (3.1) és satisfeta si

$$\varepsilon \leq \frac{\gamma \rho_2}{244 \, K^{\tau+1}} \, .$$

Llavors, escollim $K = \left[\left(\frac{\varepsilon_0}{\varepsilon} \right)^{1/(\tau+1)} \right]$ i obtenim:

$$|I(t) - I(0)| \leq \frac{24 K^\tau}{\gamma} \cdot \frac{2\varepsilon}{\rho_1} \leq \frac{\rho_2}{5\rho_1} \left(\frac{\varepsilon}{\varepsilon_0} \right)^{1/(\tau+1)} .$$

Pel que respecta al temps d'estabilitat, és fàcil obtenir-lo a partir del temps donat al lema 9 si tenim en compte que $K \geq \frac{1}{2} \left(\frac{\varepsilon_0}{\varepsilon} \right)^{1/(\tau+1)}$. □

Nota Si considerem ε fixat, llavors les fites són encara vàlides si la condició diofàntica (1.2) és requerida només per a $|k|_1 \leq \left(\frac{\varepsilon_0}{\varepsilon} \right)^{1/(\tau+1)}$. Això té interès, pensant en exemples concrets, si el vector de freqüències λ només fos conegut amb precisió finita. En aquest cas no tindria sentit comprovar la condició diofàntica més enllà d'un cert ordre finit, però les fites serien també aplicables. Així el nostre enfocament, a diferència del de [Fa], és força significatiu des del punt de vista pràctic. Idees anàlogues motivaran la noció de tor quasi-invariant a la secció 4.5.

Les nostres fites per a la pertorbació d'un sistema d'oscil·ladors harmònics són lleugerament més dolentes que les fites obtingudes per F. Fassò [Fa]. En efecte, l'exponent $a = 1/(\tau+1)$ és el mateix però, en canvi, nosaltres hem obtingut $b = 1/(\tau+1)$ en comptes de $b = 1$. Aquesta diferència ve del fet que nosaltres no hem aprofitat del tot la condició diofàntica satisfeta pel vector λ: fixada K, hem pres $\alpha = \frac{\gamma}{K^\tau}$ com a fita inferior de tots els petits divisors $k \cdot \lambda$, amb $0 < |k|_1 \leq K$, quan seria més eficient considerar $\frac{\gamma}{|k|_1^\tau}$.

L'equació funcional (2.4) és resolta a [Fa] sense truncar les sèries de Fourier, però fent una reducció de la banda d'analiticitat. Per obtenir fites anàlogues a les de la nostra proposició 4, a [Fa] és usat un resultat de H. Rüssmann [Ru1]. Aquest resultat, traslladat al context de la nostra proposició 4, expressa que

$$|W|_{G,\rho-\delta} \preceq \frac{1}{\gamma\delta_1^\tau} |R|_{G,\rho} \,, \tag{3.3}$$

on la norma emprada és la del suprem. L'exponent τ que apareix en aquesta fita és òptim. Aplicant aquest resultat, les fites obtingudes a [Fa] són millors, però aquesta manera d'obtenir les fites només va bé en el cas diofàntic. Per contra, si bé el nostre punt de vista condueix a fites lleugerament pitjors, evita de tractar amb un nombre infinit de petits divisors ja que les sèries són truncades a ordre K, i a més permet de tractar el cas ressonant ($\mathcal{M} \neq 0$).

Tot i això, veurem de manera informal que si variem una mica el nostre procediment també podem arribar als mateixos exponents de [Fa]. A més, no caldrà considerar sèries infinites sinó que seguirem truncant-les a ordre K.

Habitualment, la fita òptima (3.3) és obtinguda emprant la norma del suprem i fent un estudi acurat dels petits divisors $k\cdot\lambda$, veient que realment molt pocs són tan "petits" com $\frac{\gamma}{|k|_1^\tau}$ (vegeu [Ru1, Sa, Si2]). No obstant, amb la norma introduïda a la secció 2.2 a partir del desenvolupament de Fourier, la fita (3.3) esdevé gairebé immediata. En el cas que ens ocupa, no ressonant i amb vector de freqüències constant, la solució de l'equació (2.4) ve donada per

$$\begin{aligned} W_k(I) &= \frac{R_k(I)}{i\,k\cdot\lambda}\,, \qquad \text{si } \; k \in \mathbf{Z}^n,\ 0 < |k|_1 \leq K; \\ W_k(I) &= 0, \qquad\qquad \text{en altre cas.} \end{aligned}$$

Aleshores, donat $\delta_1 > 0$,

$$\begin{aligned}\|W\|_{G,(\rho_1-\delta_1,\delta_2)} &\leq \sum_{k\in\mathbf{Z}^n} \frac{|k|_1^\tau}{\gamma} |R_k|_{G,\rho_2} \cdot e^{|k|_1(\rho_1-\delta_1)} \\ &\leq \max_{k\in\mathbf{Z}^n} \left(\frac{|k|_1^\tau}{\gamma} e^{-|k|_1\delta_1} \right) \cdot \|R\|_{G,\rho} \leq \frac{1}{\gamma} \left(\frac{\tau}{e\delta_1}\right)^\tau \|R\|_{G,\rho} ,\end{aligned}$$

on hem hagut de trobar el màxim de la funció $x \mapsto x^\tau e^{-x\delta_1}$. De manera similar, duent a terme les fites de les derivades com a la prova de la proposició 4, tenim:

$$\|DW\|_{G,\rho-\delta,c} \preceq \frac{1}{\gamma\delta_1^\tau} \|DR\|_{G,\rho,c} . \tag{3.4}$$

Notem que, com que $M = 0$, no s'ha de considerar el paràmetre definit a (2.33).

Podem deduir de (3.4) un resultat anàleg a la versió lineal del lema iteratiu (proposició 5); només s'ha de canviar α per $\gamma\delta_1^\tau$. Aleshores, escollint $\delta^{(q)} = \delta/Q$, $q = 1, \ldots, Q$, amb $Q \sim K\delta_1$, raonaments anàlegs als del teorema 8 condueixen al resultat següent: suposant una condició del tipus

$$\|DZ\|_{G,\rho,c} + \|DR\|_{G,\rho,c} \preceq \frac{\gamma\delta_1^\tau\delta_2}{Q^{\tau+1}} \sim \frac{\gamma\delta_2}{K^{\tau+1}\delta_1} , \tag{3.5}$$

obtenim les fites

$$\|DR^*\|_{G,\rho-\delta,c} \preceq \frac{1}{e^Q} \|DR\|_{G,\rho,c} \sim e^{-K\delta_1} \|DR\|_{G,\rho,c} , \tag{3.6}$$

$$|\Psi - \mathrm{id}|_{G,\rho-\delta,c} \preceq \frac{Q^\tau}{\gamma\delta_1^\tau} \|DR\|_{G,\rho,c} \sim \frac{K^\tau}{\gamma} \|DR\|_{G,\rho,c} . \tag{3.7}$$

Aquest resultat ens mena altre cop als exponents $a = b = 1/(\tau + 1)$ ja obtinguts al teorema 10. Per obtenir $b = 1$, Fassò [Fa] usa una idea que, traslladada al nostre context, podem expressar de la manera següent. En comptes de dur a terme la fita (3.7) com a (2.46), reduïm una mica més el domini i tenim:

$$|\Psi - \mathrm{id}|_{G,\rho-2\delta,c} \leq \sum_{q=1}^{Q} \left|\Phi^{(q)} - \mathrm{id}\right|_{G,\rho^{(q)}-\delta,c} ,$$

essent $\rho^{(q)} = \rho - \frac{q\delta}{Q}$. Denotant $W^{(q)}$ el hamiltonià que genera la transformació canònica $\Phi^{(q)}$, podem fitar d'aquesta manera:

$$\left|\Phi^{(q)} - \mathrm{id}\right|_{G,\rho^{(q)}-\delta,c} \leq \left\|DW^{(q)}\right\|_{G,\rho^{(q-1)}-\delta,c} \preceq \frac{1}{\gamma\delta_1^\tau} \left\|DR^{(q-1)}\right\|_{G,\rho^{(q-1)},c} .$$

Sumant per a $q = 1, \ldots, Q$, obtenim la fita

$$|\Psi - \mathrm{id}|_{G,\rho-2\delta,c} \preceq \frac{1}{\gamma\delta_1^\tau} \|DR\|_{G,\rho,c} , \tag{3.8}$$

la qual és clarament millor que (3.7). El punt clau ha estat considerar δ i no δ/Q per tal que l'efecte de la fita (3.4) sigui menys important. Aleshores, a partir de (3.5), (3.6) i (3.8), i escollint $K \sim \left(\frac{\gamma}{\varepsilon}\right)^{1/(\tau+1)}$, obtenim per al cas dels oscil·ladors harmònics els exponents d'estabilitat

$$a = \frac{1}{\tau+1}\,, \qquad b = 1.$$

Finim aquesta secció comentant que un cas molt relacionat amb el dels oscil·ladors harmònics és el d'un hamiltonià a l'entorn d'un punt fix el·líptic (vegeu també la secció 4.6). Si el vector de freqüències λ associat al punt el·líptic és τ,γ-diofàntic, ha estat establert per A. Giorgilli i altres [GDFGS] que, per a les trajectòries en un entorn de radi r, una fita inferior del temps d'estabilitat ve donada per

$$T \sim \left(\frac{1}{r}\right)^{1/(\tau+1)}. \tag{3.9}$$

Aquest resultat és vàlid no solament en el cas no ressonant ($\mathcal{M} = 0$), sinó també quan λ satisfà una condició diofàntica respecte un mòdul donat $\mathcal{M} \neq 0$ que satisfaci certes condicions (que permetin fitar les variables d'acció a partir de certes combinacions d'elles mateixes). Aquest resultat constitueix doncs una fita d'estabilitat efectiva en un cas ressonant en què no cal imposar la condició de quasiconvexitat que requerirem a la secció següent.

Restringint-nos al cas $\mathcal{M} = 0$, observem que l'estimació (3.9) no es dedueix directament del teorema 10. Això és degut al fet que, si expressem el hamiltonià en variables acció–angle, llavors en general no és analític a l'entorn del punt fix. Tal com palesarem a la pàgina 106, per tal que el hamiltonià sigui analític respecte les variables d'acció hem d'excloure una part del domini, la qual cosa no ens convé ja que les fites d'estabilitat efectiva han d'ésser vàlides a tot el domini.

Esmentem finalment que hom pot trobar a [Lo4] una exposició dels principals resultats sobre estabilitat efectiva en el cas dels oscil·ladors harmònics i a l'entorn d'un punt fix el·líptic. També s'hi discuteix el nexe existent entre els exponents d'estabilitat en ambdós tipus de hamiltonians, amb les particularitats i dificultats que sorgeixen en el cas del punt fix el·líptic.

3.2 Quasiconvexitat i fites prop de ressonàncies

Ara ens restringim a un entorn de la ressonància associada a un mòdul $\mathcal{M} \subset \mathbf{Z}^n$ donat, i a la secció següent el domini $\mathcal{G}$ serà recobert per regions associades als diferents mòduls de ressonàncies, incloent també una regió no ressonant.

En primer lloc, donat un conjunt $A \subset \mathbf{R}^n$, definim un entorn real de radi η de A per

$$\mathcal{U}_\eta(A) := \{I \in \mathbf{R}^n \ : \ |I - I'| \leq \eta \text{ amb } I' \in G\} = \mathcal{V}_\eta(A) \cap \mathbf{R}^n. \tag{3.10}$$

Donat un conjunt de freqüències $F \subset \mathbf{R}^n$, l'anomenarem *η-proper a $\mathcal{M}$-ressonàncies* si $F \subset \mathcal{U}_\eta\left(\langle\mathcal{M}\rangle^\perp\right)$, on $\langle\mathcal{M}\rangle^\perp$ és l'espai de freqüències $\mathcal{M}$-ressonants:

$$\langle\mathcal{M}\rangle^\perp = \{v \in \mathbf{R}^n \ : \ \ k \cdot v = 0 \ \ \forall k \in \mathcal{M}\}.$$

Notem que F és η-proper a $\mathcal{M}$-ressonàncies si i només si

$$|v - \Pi_\mathcal{M} v| \leq \eta \qquad \forall v \in F,$$

essent $\Pi_\mathcal{M}$ la projecció ortogonal sobre $\langle\mathcal{M}\rangle^\perp$.

Per tal d'obtenir fites d'estabilitat per a les trajectòries amb condició inicial en un conjunt G tal que $\omega(G)$ és proper a una ressonància, ens cal imposar una condició geomètrica sobre el hamiltonià no pertorbat h. A la prova original, N. N. Nekhoroshev [Nek] imposà una condició d'escarpament sobre h, molt general. Però les principals idees geomètriques de la prova són paleses amb la condició de quasiconvexitat, més simple, la qual fou ja suggerida a [Nek]. El teorema de Nekhoroshev per a hamiltonians quasiconvexos ha estat provat a diversos articles, començant pel cas convex [BGG, BG], i passant posteriorment al cas quasiconvex [Lo1, Pos2].

Seguint [Lo1], direm que la funció $h(I)$ és *m-quasiconvexa* sobre un conjunt $A \subset \mathbf{R}^n$ si

$$\left|\frac{\partial^2 h}{\partial I^2}(I)\,(v,v)\right| \geq m\,|v|^2 \qquad \forall v \in \langle\omega(I)\rangle^\perp, \quad \forall I \in A$$

(la definició és un xic diferent de la de [Pos2]). Notem que les hipersuperfícies de nivell de h són convexes si h és una funció quasiconvexa.

Sota aquesta condició, el lema següent dóna fites d'estabilitat sobre una regió $G \subset \mathcal{G}$ tal que $\omega(G)$ és proper a la ressonància associada a un mòdul donat $\mathcal{M}$ i satisfà una condició de no ressonància mòdul $\mathcal{M}$. La prova comença passant a forma normal respecte $\mathcal{M}$, la qual cosa és possible per la condició de no ressonància; aplicant el teorema 8 hom obté una fita exponencialment petita per a la resta. Aquesta fita implica que, pel que respecta a les variables d'acció, el moviment té lloc principalment en la direcció de $\langle\mathcal{M}\rangle$; en altres direccions la velocitat de variació de les accions és exponencialment petita (fent el canvi lineal que descrivim a la secció 5.2, podem distingir entre variables d'acció "ràpides" i "lentes"). Llavors la quasiconvexitat permet de fitar la variació de les accions precisament en la direcció de $\langle\mathcal{M}\rangle$. La idea bàsica és que, si h és quasiconvex, llavors en un punt donat de la ressonància $S_{\omega,\mathcal{M}}$ (vegeu definició (1.3)) la hipersuperfície d'energia que hi passa té per força un contacte d'ordre dos amb la direcció de $\langle\mathcal{M}\rangle$. Llavors, per la conservació de l'energia, hom obté el confinament de les variables d'acció prop de llurs valors inicials, donant lloc a la fita d'estabilitat.

Donem la prova seguint [Lo1, Pos2] en les idees principals, si bé l'ús de la conservació de l'energia per confinar les trajectòries en regions ressonants fou introduït (per a hamiltonians convexos) per G. Benettin i G. Gallavotti [BG]. Aquest mètode de prova constituí una simplificació, almenys conceptualment, respecte les primeres proves del teorema de Nekhoroshev [Nek, BGG], en què era tinguda en compte una altra propietat dels hamiltonians quasiconvexos: la transversalitat en cada punt de la varietat ressonant $S_{\omega,\mathcal{M}}$ i el subspai $\langle\mathcal{M}\rangle$, per a cada mòdul $\mathcal{M}$. Aquesta propietat, juntament amb el fet que el moviment té lloc principalment en la direcció de $\langle\mathcal{M}\rangle$, comporta un "mecanisme de bloqueig" que permet obtenir fites de la variació de les accions prop de ressonàncies (vegeu també a [Ga] una descripció d'aquest mecanisme).

Tot això evidencia que, si bé les zones properes a ressonàncies són en principi les menys estables, la quasiconvexitat té un efecte estabilitzador sobre aquestes zones. Tornarem a posar de relleu aquest fet a la secció 5.3, en referir-nos al confinament de les varietats invariants de tors hiperbòlics prop d'una ressonància.

Lema 11 *Sigui* $H(\phi,I)=h(I)+Z(\phi,I)+R(\phi,I)$ *real analític sobre* $\mathcal{D}_\rho(G)$*, i escrivim* $\omega=\operatorname{grad}h$*. Donat un mòdul* $\mathcal{M}\neq\mathbf{Z}^n$*, suposem que* $\omega(G)$ *és* η*-proper a* $\mathcal{M}$*-ressonàncies, i* α,K*-no ressonant mòdul* $\mathcal{M}$*, amb* $K\geq 1$*, i també que* $Z\in\mathbf{R}(\mathcal{M},K)$*. Suposem que*

$$\left|\frac{\partial^2 h}{\partial I^2}\right|_{G,\rho_2}\leq M,\qquad |\omega|_G\leq L,$$

i que h *és* m*-quasiconvex sobre* $\mathcal{U}_{\rho_2}(G)$*. Sigui* $c=\rho_2/\rho_1$*, i suposem:*

$$\rho_2\leq\frac{m\alpha}{48M^2K}\,,\qquad \eta\leq\frac{m\rho_2}{60}\,,\qquad \|DZ\|_{G,\rho,c}+\|DR\|_{G,\rho,c}\leq\frac{m\sigma\rho_2^2}{350}\,, \tag{3.11}$$

on escrivim $\sigma:=\min\left(1,\dfrac{1}{\sqrt{n}\,\rho_1}\right)$*. Aleshores, per a tota trajectòria* $(\phi(t),I(t))$ *de* H*, amb* $(\phi(0),I(0))\in\mathbf{T}^n\times G$*, tenim*

$$|I(t)-I(0)|\leq\rho_2\qquad si\ \ |t|\leq\frac{m\rho_2^2}{74L\,\|DR\|_{G,\rho,c}}\,e^{\frac{mK\rho_1}{6M}}\,. \tag{3.12}$$

Prova Suposem en primer lloc que $K\rho_1\geq M/m$. Sigui $\delta=\rho/3$. De manera anàloga a la prova del lema 9, tenim $A\leq 2$. Notem que

$$\|DZ\|_{G,\rho,c}+\|DR\|_{G,\rho,c}\leq\frac{m\rho_2^2}{350\rho_1}\leq\frac{\alpha\rho_2}{122K\rho_1}\,. \tag{3.13}$$

Llavors, el teorema 8 ens dóna una transformació canònica $\Psi : \mathcal{D}_{\frac{2\rho}{3}}(G) \longrightarrow \mathcal{D}_\rho(G)$ tal que $H \circ \Psi = h + Z^* + R^*$, amb $Z^* \in \mathbf{R}(\mathcal{M}, K)$, i

$$\|DZ^*\|_{G,\frac{2\rho}{3},c} + \|DR^*\|_{G,\frac{2\rho}{3},c} \leq \|DZ\|_{G,\rho,c} + 2\,\|DR\|_{G,\rho,c} \,,$$
$$\|DR^*\|_{G,\frac{2\rho}{3},c} \leq 3\,e^{-\frac{K\rho_1}{6}} \cdot \|DR\|_{G,\rho,c} \,.$$

A més, per la fita de l'apartat (c) del teorema 8 i la desigualtat (3.13),

$$|\Psi - \mathrm{id}|_{G,\frac{2\rho}{3},c} \leq \frac{8}{\alpha}\,\|DR\|_{G,\rho,c} \leq \frac{\rho_2}{15K\rho_1} \leq \frac{m\rho_2}{15M} \,.$$

Com al lema 9, podem escriure $(\phi(0), I(0)) = \Psi\,(\phi_0^*, I_0^*)$, amb $(\phi_0^*, I_0^*) \in \mathbf{T}^n \times \mathcal{V}_{\frac{m\rho_2}{15M}}(G)$. Sigui $(\phi^*(t), I^*(t))$ la trajectòria de $H \circ \Psi$ tal que $(\phi^*(0), I^*(0)) = (\phi_0^*, I_0^*)$. Definim

$$T = \inf\left\{t > 0 \;:\; |I^*(t) - I^*(0)| > \frac{\rho_2}{2}\right\}.$$

Si $0 \leq t \leq T$, tenim $(\phi^*(t), I^*(t)) \in \mathcal{D}_{\frac{2\rho}{3}}(G)$. Llavors obtenim la fita

$$|I(t) - I(0)| \leq |I(t) - I^*(t)| + |I^*(t) - I^*(0)| + |I^*(0) - I(0)| \leq \frac{m\rho_2}{15M} + \frac{\rho_2}{2} + \frac{m\rho_2}{15M} \leq \rho_2.$$

Introduïm les notacions

$$\Delta\phi^* = \phi^*(T) - \phi^*(0), \qquad \Delta I^* = I^*(T) - I^*(0),$$

i, donada una funció $f\,(\phi, I)$,

$$\Delta f = f\,(\phi^*(T), I^*(T)) - f\,(\phi^*(0), I^*(0))\,.$$

Per la definició de T, és clar que $|\Delta I^*| = \rho_2/2$.

Pel fet que Z^* és en forma normal respecte $\mathcal{M}$, només pot influir en ΔI^* en la direcció de $\langle\mathcal{M}\rangle$. Per concretar més, sigui P la projecció ortogonal sobre el subspai unidimensional $\langle\Pi_{\mathcal{M}}\omega(I(0))\rangle$. Per la forma específica de les equacions hamiltonianes, tenim

$$P\Delta I^* = -\int_0^T P\left(\frac{\partial R^*}{\partial\phi}\,(\phi^*(t), I^*(t))\right)\,dt$$

i se'n segueix que la $\Pi_{\mathcal{M}}\omega(I(0))$-component del vector ΔI^* és petita durant un interval de temps exponencialment gran:

$$|P\Delta I^*| \leq T \cdot \left\|\frac{\partial R^*}{\partial\phi}\right\|_{G,\frac{2\rho}{3}} \leq T \cdot \|DR^*\|_{G,\frac{2\rho}{3},c} \leq T \cdot 3\,e^{-\frac{K\rho_1}{6}} \cdot \|DR\|_{G,\rho,c}\,. \tag{3.14}$$

Per tal de fitar tot el vector ΔI^*, usem la condició de quasiconvexitat sobre h. Per la fórmula de Taylor, tenim

$$\Delta h = \omega(I_0^*) \cdot \Delta I^* + \int_0^1 (1-s)\,\frac{\partial^2 h}{\partial I^2}\,(I_0^* + s\Delta I^*)\,(\Delta I^*, \Delta I^*)\,ds. \tag{3.15}$$

Notem que, com que Ψ conserva els dominis reals, tenim $I_0^*+s\Delta I^* \in \mathcal{U}_{\rho_2}(G)$ si $0 \le s \le 1$. Fixat s, escrivim $\Delta I^* = P_s\Delta I^* + Q_s\Delta I^*$, on P_s i Q_s denoten les projeccions ortogonals sobre $\langle\omega\left(I_0^*+s\Delta I^*\right)\rangle$ i $\langle\omega\left(I_0^*+s\Delta I^*\right)\rangle^\perp$, respectivament. Així, aplicant la condició de quasiconvexitat en el punt $I_0^*+s\Delta I^*$ (i és l'únic cop que l'usem), obtenim

$$\left|\frac{\partial^2 h}{\partial I^2}\left(I_0^*+s\Delta I^*\right)\left(Q_s\Delta I^*, Q_s\Delta I^*\right)\right| \ge m\left|Q_s\Delta I^*\right|^2.$$

Deduïm que

$$\begin{aligned}
&\left|\frac{\partial^2 h}{\partial I^2}\left(I_0^*+s\Delta I^*\right)\left(\Delta I^*, \Delta I^*\right)\right| \\
&\qquad \ge m\left|Q_s\Delta I^*\right|^2 - 2M\left|P_s\Delta I^*\right|\cdot\left|Q_s\Delta I^*\right| - M\left|P_s\Delta I^*\right|^2 \\
&\qquad = m\left|\Delta I^*\right|^2 - \left(m\left|P_s\Delta I^*\right| + 2M\left|Q_s\Delta I^*\right| + M\left|P_s\Delta I^*\right|\right)\cdot\left|P_s\Delta I^*\right| \\
&\qquad \ge m\left|\Delta I^*\right|^2 - 4M\left|\Delta I^*\right|\cdot\left|P_s\Delta I^*\right|.
\end{aligned}$$

A partir de la fórmula (3.15), obtenim

$$\frac{m}{2}\left|\Delta I^*\right|^2 \le |\Delta h| + \left|\omega\left(I_0^*\right)\cdot\Delta I^*\right| + 4M\left|\Delta I^*\right|\int_0^1 (1-s)\left|P_s\Delta I^*\right|\,ds,$$

i per tant

$$\frac{m\rho_2^2}{8} \le |\Delta h| + \left|\omega\left(I_0^*\right)\cdot\Delta I^*\right| + 2M\rho_2\int_0^1 (1-s)\left|P_s\Delta I^*\right|\,ds. \tag{3.16}$$

A continuació fitarem els termes que apareixen a la part de la dreta de la desigualtat (3.16). Per fitar $\left|P_s\Delta I^*\right|$ usem que el vector $\omega\left(I_0^*+s\Delta I^*\right)$ és proper a $\Pi_{\mathcal{M}}\omega(I(0))$. Ho fem aplicant la propietat següent: donats $v, v' \in \mathbf{R}^n$, i denotant $P_{(v)}$ i $P_{(v')}$ les projeccions ortogonals sobre els subspais unidimensionals $\langle v\rangle$ i $\langle v'\rangle$, respectivament, llavors

$$\left|P_{(v)}u - P_{(v')}u\right| \le \frac{4\left|v-v'\right|}{|v|}\cdot|u| \qquad \forall u \in \mathbf{R}^n.$$

Primer notem que, del lema 3 i del fet que $\mathcal{M} \ne \mathbf{Z}^n$ i $K \ge 1$, deduïm que $|\omega(I)| \ge \alpha/2$ si $I \in \mathcal{U}_{\rho_2}(G)$. Aleshores, aplicant la propietat esmentada, tenim:

$$\begin{aligned}
\left|P_s\Delta I^* - P\Delta I^*\right| &\le \frac{4}{\left|\omega\left(I_0^*+s\Delta I^*\right)\right|}\left|\omega\left(I_0^*+s\Delta I^*\right) - \Pi_{\mathcal{M}}\omega(I(0))\right|\cdot\left|\Delta I^*\right| \\
&\le \frac{4\rho_2}{\alpha}\left|\omega\left(I_0^*+s\Delta I^*\right) - \Pi_{\mathcal{M}}\omega(I(0))\right|.
\end{aligned}$$

Fent servir que $\omega(G)$ és η-proper a $\mathcal{M}$-ressonàncies, obtenim

$$\begin{aligned}
\left|\omega\left(I_0^*+s\Delta I^*\right) - \Pi_{\mathcal{M}}\omega(I(0))\right| &\le M\left|I_0^*+s\Delta I^* - I(0)\right| + \left|\omega(I(0)) - \Pi_{\mathcal{M}}\omega(I(0))\right| \\
&\le \left(\frac{m}{15}+\frac{sM}{2}\right)\rho_2 + \eta \le \left(\frac{m}{12}+\frac{sM}{2}\right)\rho_2.
\end{aligned} \tag{3.17}$$

Així,

$$|P_s \Delta I^*| \leq |P\Delta I^*| + |P_s \Delta I^* - P\Delta I^*| \leq |P\Delta I^*| + \frac{4\rho_2^2}{\alpha}\left(\frac{m}{12} + \frac{sM}{2}\right)$$

i, usant la primera condició de (3.11), obtenim

$$\int_0^1 (1-s)\,|P_s \Delta I^*|\; ds \leq \frac{1}{2}|P\Delta I^*| + \frac{4\rho_2^2}{\alpha}\left(\frac{m}{24} + \frac{M}{12}\right) \leq \frac{1}{2}|P\Delta I^*| + \frac{m\rho_2}{96M}\ .$$

Per fitar $|\omega\,(I_0^*) \cdot \Delta I^*|$, posem $s = 0$ a (3.17):

$$|\omega\,(I_0^*) \cdot \Delta I^*| \leq |\Pi_{\mathcal{M}}\omega(I(0))| \cdot |P\Delta I^*| + |\omega\,(I_0^*) - \Pi_{\mathcal{M}}\omega(I(0))| \cdot |\Delta I^*| \leq L\,|P\Delta I^*| + \frac{m\rho_2^2}{24}\ .$$

Finalment, per la conservació de l'energia,

$$\begin{aligned}\Delta h \;=\; -\Delta\,(Z^* + R^*) \;=\; & -\int_0^1 \left(\frac{\partial\,(Z^* + R^*)}{\partial\phi}\,(\phi_0^* + s\Delta\phi^*, I_0^* + s\Delta I^*) \cdot \Delta\phi^*\right.\\ & \left. + \frac{\partial\,(Z^* + R^*)}{\partial I}\,(\phi_0^* + s\Delta\phi^*, I_0^* + s\Delta I^*) \cdot \Delta I^*\right) ds\end{aligned}$$

i deduïm

$$\begin{aligned}|\Delta h| \;&\leq\; \left\|\frac{\partial\,(Z^* + R^*)}{\partial\phi}\right\|_{G,\frac{2\rho}{3},1} \cdot |\Delta\phi^*|_\infty + \left\|\frac{\partial\,(Z^* + R^*)}{\partial I}\right\|_{G,\frac{2\rho}{3}} \cdot |\Delta I^*|\\ &\leq\; \left(\pi + \frac{\sqrt{n}}{c} \cdot \frac{\rho_2}{2}\right) \cdot \|D\,(Z^* + R^*)\|_{G,\frac{2\rho}{3},c}\\ &\leq\; \left(2\pi + \sqrt{n}\,\rho_1\right) \cdot \left(\|DZ\|_{G,\rho,c} + \|DR\|_{G,\rho,c}\right)\\ &\leq\; \frac{(2\pi+1)m\rho_2^2}{350} \;\leq\; \frac{m\rho_2^2}{48}\ .\end{aligned}$$

Insertant totes aquestes fites a (3.16), obtenim:

$$\frac{m\rho_2^2}{8} \leq \left(\frac{1}{48} + \frac{1}{24} + \frac{1}{48}\right) m\rho_2^2 + (L + M\rho_2)\ |P\Delta I^*| \leq \frac{m\rho_2^2}{12} + \frac{49L}{48}\ |P\Delta I^*|\,,$$

on hem usat que $M\rho_2 \leq L/48$ ja que $\alpha \leq L$. Tenint en compte la fita (3.14), deduïm que

$$T \geq \frac{m\rho_2^2}{74L\,\|DR\|_{G,\rho,c}}\, e^{\frac{K\rho_1}{6}} \geq \frac{m\rho_2^2}{74L\,\|DR\|_{G,\rho,c}}\, e^{\frac{mK\rho_1}{6M}}\,.$$

En el cas que $K\rho_1 < M/m$, podem treballar amb les coordenades originals. Així, obtenim:

$$|I(t) - I(0)| \leq \rho_2 \qquad \text{si } \ |t| \leq \frac{\rho_2}{\|DR\|_{G,\rho,c}}\,,$$

i no és difícil de comprovar que aquest temps d'estabilitat és més gran que el que hem enunciat a (3.12). □

Notes

1. Si $R = 0$, aquest lema implica que, si es satisfà la condició de quasiconvexitat, totes les trajectòries partint de $\mathbf{T}^n \times G$ tenen estabilitat perpètua. Amb tot, hom podria deduir aquest fet de manera més directa, perquè en aquest cas el hamiltonià $H = h + Z$ ja es troba en forma normal respecte $\mathcal{M}$.

2. El valor de K hauria de ser, en principi, el més gran possible per tal que el temps d'estabilitat fos més gran. Tanmateix, si K és excessivament gran el domini G pot quedar considerablement reduït, ja que ha de ser no ressonant fins ordre K. A la regió exclosa, per a obtenir les fites d'estabilitat caldria considerar un mòdul de dimensió més gran. Tot plegat comporta una certa indecisió en la tria de K, que serà resolta a la secció 3.4 fent servir el lema geomètric (lema 12), que descompon el domini en blocs, associats als diferents mòduls, de tal manera que el lema 11 és aplicable a tots els blocs.

3.3 Geometria de les ressonàncies

Ara retornem al hamiltonià (1.1), que suposem real analític sobre $\mathcal{D}_\rho(\mathcal{G})$. Les fites d'estabilitat obtingudes als lemes 9 i 11 només s'apliquen a les trajectòries que parteixen d'un subconjunt $G \subset \mathcal{G}$ en el qual les freqüències són properes a la ressonància caracteritzada per un mòdul $\mathcal{M} \subset \mathbf{Z}^n$ fixat, i satisfan una condició de no ressonància mòdul $\mathcal{M}$. Per evitar els problemes de petits divisors a la regió exclosa per la condició de no ressonància, caldrà considerar un mòdul de dimensió més gran. Si volem obtenir fites d'estabilitat per a totes les trajectòries que parteixen de $\mathbf{T}^n \times \mathcal{G}$, hem de recobrir tot l'espai d'accions $\mathcal{G}$ amb una família de conjunts $G_\mathcal{M}$, associats als diferents mòduls $\mathcal{M}$, i que hom sol anomenar *blocs.* Per a $\mathcal{M} = 0$ tindrem el bloc no ressonant i, per a $\mathcal{M} \neq 0$, blocs ressonants. Per a cada mòdul $\mathcal{M}$, requerim que les freqüències sobre el bloc $G_\mathcal{M}$ siguin properes a $\mathcal{M}$-ressonàncies, i satisfacin la condició de no ressonància (2.31) fins un ordre fixat K.

Un recobriment d'aquest tipus ha estat construït a [Nek] i [BGG], i posteriorment n'ha estat millorat l'aspecte quantitatiu a l'article de J. Pöschel [Pos2], del qual hem agafat el lema geomètric que enunciem més avall sense canvis.

En realitat, hom pot treballar a l'espai de freqüències. Obtindrem en aquest espai un recobriment $\{B_\mathcal{M}\}$, el qual ens donarà, a través de l'aplicació freqüència ω, un recobriment $\{G_\mathcal{M}\}$ per a $\mathcal{G}$. Abans d'enunciar el lema geomètric, recordem alguns conceptes i terminologia introduïts a [Pos2].

Per a cada mòdul $\mathcal{M}$, recordem que $\langle\mathcal{M}\rangle^{\perp}$ és el subspai de freqüències $\mathcal{M}$-ressonants. Notem que existeixen molts altres mòduls $\mathcal{M}'$, de la mateixa dimensió que $\mathcal{M}$, que donen lloc al mateix subspai ressonant: $\langle\mathcal{M}'\rangle^{\perp} = \langle\mathcal{M}\rangle^{\perp}$. Entre tots aquests mòduls, serà suficient considerar aquell que sigui maximal. Un mòdul de $\mathbf{Z}^n$ s'anomena *primitiu* o *maximal* si no és pròpiament contingut en cap altre mòdul de la mateixa dimensió. Donat un mòdul $\mathcal{M} \subset \mathbf{Z}^n$, existeix sempre un únic mòdul primitiu de la mateixa dimensió que el conté; ve donat per $\overline{\mathcal{M}} = \{k \in \mathbf{Z}^n : \exists s \in \mathbf{Z} \setminus \{0\} \text{ amb } sk \in \mathcal{M}\}$. A la secció 5.2 donem una caracterització explícita dels mòduls primitius de $\mathbf{Z}^n$, basada en un resultat més general d'àlgebra (vegeu també [LM, apèndix 3]).

Donat un mòdul d-dimensional primitiu $\mathcal{M} \subset \mathbf{Z}^n$, construïm el conjunt $B_{\mathcal{M}}$ prenent un entorn del subspai $\langle\mathcal{M}\rangle^{\perp}$ i excloent-ne un entorn dels subspais ressonants associats als mòduls $(d+1)$-dimensionals. En principi, el conjunt construït d'aquesta manera no contindria cap subconjunt obert. Ara bé, per tal de satisfer la condició de no ressonància (2.31) fins ordre K, és suficient de considerar *K-mòduls*. Donat un mòdul $\mathcal{M} \subset \mathbf{Z}^n$, l'anomenarem un K-mòdul si admet una base de vectors $k^{(1)}, \ldots, k^{(d)}$ tals que $\left|k^{(j)}\right|_1 \leq K$ per a $j = 1, \ldots, d$. Emprarem la notació:

$$\mathcal{M} = \left\langle\!\left\langle k^{(1)}, \ldots, k^{(d)} \right\rangle\!\right\rangle,$$

per a diferenciar aquest mòdul de $\mathbf{Z}^n$ del subspai $\left\langle k^{(1)}, \ldots, k^{(d)} \right\rangle \subset \mathbf{R}^n$ generat pels mateixos vectors.

Per fer un estudi quantitatiu de la geometria de les ressonàncies, hom introdueix la noció de *volum* d'un mòdul [Pos2]. Donat $\mathcal{M} \subset \mathbf{Z}^n$ mòdul d-dimensional, $1 \leq d \leq n$, sigui D una matriu $n \times d$ que tingui com a columnes els vectors d'una base fixada de $\mathcal{M}$. Llavors definim el volum de $\mathcal{M}$ per

$$|\mathcal{M}| := \sqrt{\det(D^{\top} D)},$$

és a dir el volum d-dimensional del paral·lelepípede generat pels vectors de la base escollida. La tria de la base no influeix en aquesta definició.

Siguin $l_d > 0$, per a $1 \leq d \leq n$, paràmetres fixats. Per a cada K-mòdul d-dimensional primitiu $\mathcal{M}$, introduïm

$$\eta_{\mathcal{M}} := \frac{l_d}{|\mathcal{M}|},$$

i llavors definim la zona ressonant associada a $\mathcal{M}$ considerant un entorn de radi $\eta_{\mathcal{M}}$ al voltant de la ressonància $\langle\mathcal{M}\rangle^{\perp}$:

$$A_{\mathcal{M}} := \mathcal{U}_{\eta_{\mathcal{M}}}\left(\langle\mathcal{M}\rangle^{\perp}\right) = \{v \in \mathbf{R}^n \; : \; |v - \Pi_{\mathcal{M}} v| \leq \eta_{\mathcal{M}}\}.$$

Definim llavors el *bloc ressonant* associat a $\mathcal{M}$:

$$B_{\mathcal{M}} := A_{\mathcal{M}} \setminus A^*_{d+1},$$

essent A^*_l, $1 \leq l \leq n$, la unió de totes les zones ressonants corresponents a K-mòduls l-dimensionals primitius, i $A^*_{n+1} = \emptyset$. És obvi que cada bloc ressonant $B_{\mathcal{M}}$ és $\eta_{\mathcal{M}}$-proper a $\mathcal{M}$-ressonàncies. Per al mòdul trivial hom té el *bloc no ressonant:*

$$B_0 := \mathbf{R}^n \setminus A^*_1.$$

És fàcil veure que cada entorn $A_{\mathcal{M}}$ és recobert pels blocs corresponents a K-mòduls primitius $\mathcal{M}'$ contenint $\mathcal{M}$:

$$A_{\mathcal{M}} \subset \bigcup_{\mathcal{M}' \supset \mathcal{M}} B_{\mathcal{M}'} \,. \tag{3.18}$$

En particular, la totalitat de l'espai de freqüències $\mathbf{R}^n$ es pot recobrir amb els blocs corresponents a tots els K-mòduls.

Lema 12 (Lema Geomètric) *Fixem $K \geq 1$, $E > 0$ i $F \geq E + \sqrt{2}$. Suposem:*

$$\frac{l_{d+1}}{l_d} \geq FK$$

per a $1 \leq d < n$. Aleshores, per a tot $\mathcal{M}$ el bloc $B_{\mathcal{M}}$ és $\alpha_{\mathcal{M}}, K$-no ressonant mòdul $\mathcal{M}$, amb

$$\alpha_{\mathcal{M}} := EK\eta_{\mathcal{M}} \quad si \;\; \mathcal{M} \neq 0,$$
$$\alpha_0 := l_1.$$

Vegeu-ne la prova a [Pos2, secció 4]. Observem que els blocs ressonants són més estrets com més gran és K. Per a obtenir el recobriment a l'espai d'accions $\mathcal{G}$, només cal aplicar aquest lema i prendre $G_{\mathcal{M}} = \omega^{-1}(B_{\mathcal{M}})$ per a tots els K-mòduls primitius $\mathcal{M}$ (excepte per als que no intersequin $\omega(\mathcal{G})$).

3.4 Fites globals d'estabilitat efectiva

Donem en aquesta secció fites d'estabilitat efectiva vàlides per a totes les trajectòries de l'espai de fase. Com a la prova de J. Pöschel [Pos2], obtenim aquestes fites considerant el recobriment donat pel lema 12 amb una K fixada (la qual escollim com a funció adequada de la mida ε de la pertorbació) i aplicant llavors les fites d'estabilitat a cada bloc del recobriment.

Teorema 13 (Teorema de Nekhoroshev) *Considerem el hamiltonià* $H(\phi, I) = h(I) + f(\phi, I)$, *real analític sobre* $\mathcal{D}_\rho(\mathcal{G})$, *escrivim* $\omega = \operatorname{grad} h$, *i suposem que*

$$\left|\frac{\partial^2 h}{\partial I^2}\right|_{\mathcal{G},\rho_2} \leq M, \qquad |\omega|_{\mathcal{G}} \leq L.$$

Suposem també que h *és* m*-quasiconvex sobre* $\mathcal{U}_{\rho_2}(\mathcal{G})$. *Sigui* $l > 0$ *donat, i suposem:*

$$l \leq \frac{23M^2\rho_2}{m}, \qquad \varepsilon := \|f\|_{\mathcal{G},\rho} \ \leq\ \varepsilon_0 := \frac{m^{4n-1}\hat{\rho}l^2}{2^{24n-2}M^{4n}}, \tag{3.19}$$

on escrivim $\hat{\rho} := \min\left(\rho_1, \dfrac{2}{\sqrt{n}}\right)$. *Aleshores, per a tota trajectòria* $(\phi(t), I(t))$ *de* H, *amb* $(\phi(0), I(0)) \in \mathbf{T}^n \times \mathcal{G}$ *i satisfent* $|\omega(I(0))| > l$, *tenim*

$$|I(t) - I(0)| \leq \rho_2 \cdot \left(\frac{\varepsilon}{\varepsilon_0}\right)^{1/2n} \qquad si \ \ |t| \leq \frac{4}{L}\exp\left\{\frac{m\rho_1}{24M}\left(\frac{\varepsilon_0}{\varepsilon}\right)^{1/2n}\right\}. \tag{3.20}$$

Prova Sigui $K \geq 1$ a escollir més avall. Prenem

$$F = \frac{2882M^2}{m^2}, \qquad E = F - \sqrt{2}.$$

Per a $1 \leq d \leq n$, definim:

$$l_d = \frac{l}{(FK)^{n-d}}.$$

Llavors, el lema 12 ens dóna un recobriment $\{G_{\mathcal{M}}\}$ de $\mathcal{G}$, amb $G_{\mathcal{M}} = \omega^{-1}(B_{\mathcal{M}})$, i els seus paràmetres són

$$\eta_{\mathcal{M}} = \frac{l}{|\mathcal{M}|\ (FK)^{n-d}}, \qquad \alpha_{\mathcal{M}} = \frac{El}{|\mathcal{M}|\ F^{n-d}K^{n-d-1}} \tag{3.21}$$

per a cada K-mòdul d-dimensional primitiu $\mathcal{M}$, amb $1 \leq d \leq n$, i

$$\alpha_0 = \frac{l}{(FK)^{n-1}}$$

per al mòdul trivial. També posem $\eta_0 = 0$.

Aplicarem el lema 11 amb $Z = 0$ i $R = f$ a tots els blocs, excepte per al bloc corresponent a $\mathcal{M} = \mathbf{Z}^n$. D'aquesta manera, les fites seran vàlides per a totes les condicions inicials satisfent $|\omega(I(0))| > \eta_{\mathbf{Z}^n} = l$. Al revés que en el cas del teorema 10 (oscil·ladors harmònics), la condició (2.32) sobre ρ_2 juga un paper important. Per a cada $\mathcal{M}$ prenem $\rho^{(\mathcal{M})} = \left(\rho_1^{(\mathcal{M})}, \rho_2^{(\mathcal{M})}\right)$, essent

$$\rho_1^{(\mathcal{M})} = \frac{\rho_1}{2}, \quad \rho_2^{(\mathcal{M})} = \frac{m\alpha_{\mathcal{M}}}{48M^2K}, \qquad c_{\mathcal{M}} = \frac{\rho_2^{(\mathcal{M})}}{\rho_1^{(\mathcal{M})}}. \tag{3.22}$$

Per a cada K-mòdul d-dimensional $\mathcal{M}$, amb $0 \le d \le n-1$, tenim

$$\rho_2^{(\mathcal{M})} \le \frac{61l}{m(FK)^{n-d}} \le \frac{\rho_2}{2} \,. \tag{3.23}$$

Llavors tenim

$$\|Df\|_{G_{\mathcal{M}},\rho^{(\mathcal{M})},c_{\mathcal{M}}} \le \frac{\varepsilon}{\rho_1^{(\mathcal{M})}} = \frac{2\varepsilon}{\rho_1} \,. \tag{3.24}$$

Per tal d'aplicar el lema 11 sobre $G_{\mathcal{M}}$, hem de verificar les tres desigualtats de (3.11) per a cada $\mathcal{M}$. La primera és prou clara i, per a les altres dues, notem que

$$\rho_2^{(\mathcal{M})} \ge \frac{60\eta_{\mathcal{M}}}{m} \ge \frac{60}{m} \cdot \frac{l}{(FK)^n} \,,$$

on hem usat que $1 \le |\mathcal{M}| \le K^d$. Llavors,

$$\frac{2\varepsilon}{\rho_1} \le \frac{2\varepsilon_0}{\rho_1 K^{2n}} \le \frac{m\sigma}{350}\left(\frac{60l}{m(FK)^n}\right)^2 \le \frac{m\sigma}{350}\left(\rho_2^{(\mathcal{M})}\right)^2,$$

essent $\sigma = \min\left(1, \dfrac{2}{\sqrt{n}\,\rho_1}\right)$. Així, escollim $K = \left[\left(\frac{\varepsilon_0}{\varepsilon}\right)^{1/2n}\right]$. Per a cada $\mathcal{M}$, obtenim a partir del lema 11 el radi de confinament i el temps d'estabilitat de les trajectòries que parteixen de $\mathbf{T}^n \times G_{\mathcal{M}}$:

$$\rho_2^{(\mathcal{M})} \le \frac{61l}{mFK} \le \frac{122l}{mF}\left(\frac{\varepsilon}{\varepsilon_0}\right)^{1/2n} \le \rho_2 \cdot \left(\frac{\varepsilon}{\varepsilon_0}\right)^{1/2n},$$

$$\frac{m\left(\rho_2^{(\mathcal{M})}\right)^2}{74L \cdot \frac{2\varepsilon}{\rho_1}}\, e^{\frac{mK\rho_1}{12M}} \ge \frac{4}{L}\exp\left\{\frac{m\rho_1}{24M}\left(\frac{\varepsilon_0}{\varepsilon}\right)^{1/2n}\right\}.$$

□

Notes

1. Les constants involucrades en aquestes fites serien un xic millors si, sobre el bloc no ressonant G_0, haguéssim usat el lema 9 en comptes del lema 11. Però els exponents d'estabilitat global serien els mateixos, i per aquesta raó hem usat el lema 11 per a tots els blocs.

2. Aclarim també que, en realitat, la condició (3.19) sobre ε no és essencial, i de fet pot ésser suprimida amb algun esforç addicional. Però notem que, per a valors grans de ε, la fita de Nekhoroshev (3.20) no és gens significativa. Per als teoremes 10 i 14 és vàlida la mateixa observació.

3. A la vista de l'expressió del temps d'estabilitat a (3.20), hom pot pensar que si la pertorbació f és analítica respecte ϕ en una banda complexa d'amplada infinita

($\rho_1 = \infty$), llavors hom té estabilitat perpètua. Això no és cert en general ja que el valor de ε definit a (3.19) depèn de ρ_1, per la definició de la norma (2.23), i a més creix exponencialment en ρ_1. D'altra banda la condició sobre ε no es complirà si ρ_1 és molt gran.

Resta oberta la qüestió de si, considerant un altre punt de vista, seria possible de millorar algun dels exponents d'estabilitat

$$a = b = \frac{1}{2n} \ .$$

La idea emprada a [Fa] que permet d'obtenir $b = 1$ en el cas dels oscil·ladors harmònics (secció 3.1) sembla difícilment extrapolable al cas general del teorema de Nekhoroshev. Això requeriria modificar la part geomètrica de la prova, i més concretament l'estudi de la geometria de les ressonàncies exposat a la secció 3.3, per tal que sobre els diferents blocs es satisfés una condició de tipus diofàntic fins a ordre finit, més que no pas la condició de no ressonància que hem anat fent servir.

En canvi, sí que podem millorar els exponents d'estabilitat sobre certes regions. De fet, a la prova del teorema 13, els exponents han estat obtinguts duent a terme les fites sobre cada bloc $G_{\mathcal{M}}$ i considerant sempre el pitjor cas possible. El punt clau ha consistit a trobar fites superiors i inferiors de $\rho_2^{(\mathcal{M})}$, vàlides per a tots els mòduls $\mathcal{M}$. No obstant això, els exponents d'estabilitat poden ésser millorats mitjançant una anàlisi particular, si hom restringeix les fites a una regió donada.

A la secció següent considerarem, per a un mòdul fixat $\mathcal{M}^*$, un entorn de la varietat ressonant $S_{\omega,\mathcal{M}^*}$. Aquest conjunt pot ésser recobert pels blocs $G_{\mathcal{M}}$ associats als mòduls $\mathcal{M}$ que contenen $\mathcal{M}^*$. Si només considerem aquests mòduls, la fita inferior per a $\rho_2^{(\mathcal{M})}$ és més gran que la que hem obtingut al teorema 13. Això permet d'escollir K més gran la qual cosa, com veurem, comporta els exponents:

$$a = b = \frac{1}{2\nu^*} \ , \tag{3.25}$$

on ν^* és la codimensió de $\mathcal{M}^*$. Aquests exponents són vàlids en un entorn de radi $\mathcal{O}\left(\sqrt{\varepsilon}\right)$ de la ressonància $S_{\omega,\mathcal{M}^*}$.

Un altre cas particular a remarcar és el del bloc no ressonant G_0. Aquest és el cas en què $\rho_2^{(0)}$ és més petit, la qual cosa dóna lloc al radi de confinament més petit. No és difícil provar (vegeu [Pos2, teorema 2] i també [DG1, teorema 3]) que llavors els exponents d'estabilitat són

$$a = \frac{1}{2n} \ , \qquad b = \frac{1}{2} \ .$$

Això no obstant, si el lema 9 és usat en comptes del lema 11 per obtenir les fites, hom arriba als exponents

$$a = \frac{1}{2n}\,, \qquad b = \frac{n+1}{2n}\,. \tag{3.26}$$

Notem que aquest és l'únic cas en el qual es pot obtenir $b > 1/2$ (deixant de banda el teorema 10 sobre oscil·ladors harmònics on ja hem comentat que es pot obtenir $b = 1$). Prop de ressonàncies sempre tindrem $b \le 1/2$ ja que, si considerem el cas simple d'un hamiltonià en forma normal respecte un mòdul ressonant, no és possible d'evitar una variació $\mathcal{O}\left(\sqrt{\varepsilon}\right)$ de les accions en un temps $\mathcal{O}\left(1/\sqrt{\varepsilon}\right)$.

No provem aquí que sobre el bloc no ressonant podem obtenir els exponents (3.26). A la secció 4.5 provarem un resultat millor: en coordenades adequades, el radi de confinament és exponencialment petit. Expressarem això dient que les trajectòries es mantenen molt a prop del que anomenarem "tors quasi-invariants".

3.5 Estabilitat efectiva prop de ressonàncies

Veurem a continuació que els resultats de la secció anterior poden ésser millorats si ens interessem només en un entorn de la ressonància associada a un mòdul fixat $\mathcal{M}^*$. Fites en un entorn de radi $\mathcal{O}\left(\sqrt{\varepsilon}\right)$, amb els exponents d'estabilitat (3.25), han estat obtingudes per J. Pöschel [Pos2, teorema 3] (vegeu també [Lo1, Lo3]). Presentem tot seguit un resultat una mica més general que el de Pöschel: en lloc de fixar un entorn de radi $\mathcal{O}\left(\sqrt{\varepsilon}\right)$, considerem un entorn (dins de l'espai de freqüències) de radi qualsevol $\delta \succeq \sqrt{\varepsilon}$ i expressem les fites d'estabilitat en funció de δ. En particular, quan $\delta \sim \sqrt{\varepsilon}$ el nostre resultat és en essència coincident amb el de Pöschel.

Teorema 14 *Sigui $\mathcal{M}^*$ un K^*-mòdul primitiu de dimensió d^*, $1 \le d^* \le n-1$, i escrivim $\nu^* = n - d^*$. Considerem el hamiltonià $H(\phi, I) = h(I) + Z(\phi, I) + R(\phi, I)$, real analític sobre $\mathcal{D}_\rho(\mathcal{G})$, amb $Z \in \mathbf{R}\left(\mathcal{M}^*, K^*\right)$, i escrivim $\omega = \operatorname{grad} h$. Suposem que $\omega(\mathcal{G})$ és δ-proper a $\mathcal{M}^*$-ressonàncies. Siguin M, L, l i $\hat{\rho}$ com al teorema 13, i suposem que h és m-quasiconvexa sobre $\mathcal{U}_{\rho_2}(\mathcal{G})$. Siguin $\varepsilon := \|Z\|_{\mathcal{G},\rho} + \|R\|_{\mathcal{G},\rho}$, $\mu\,\varepsilon := \|R\|_{\mathcal{G},\rho}$. Escrivim*

$$\delta_0 := \frac{m^{2\nu^*} l}{2^{12\nu^*} M^{2\nu^*}}\,,$$

i suposem

$$0 < \delta \le \frac{\delta_0}{|\mathcal{M}^*|\left(K^*\right)^{\nu^*}}\,, \qquad \varepsilon \le \frac{5\hat{\rho}}{m} \cdot \delta^2. \tag{3.27}$$

Aleshores, per a tota trajectòria $(\phi(t), I(t))$ de H, amb $(\phi(0), I(0)) \in \mathbf{T}^n \times \mathcal{G}$ i satisfent

$|\omega(I(0))| > l,$ *tenim*

$$|I(t) - I(0)| \le \rho_2 \cdot \left(\frac{|\mathcal{M}^*|\ \delta}{\delta_0} \right)^{1/\nu^*} \qquad si\ \ |t| \le \frac{4}{L\,\mu} \exp\left\{ \frac{m\rho_1}{24M} \left(\frac{\delta_0}{|\mathcal{M}^*|\ \delta} \right)^{1/\nu^*} \right\}. \tag{3.28}$$

Prova Fixat $K \ge K^*$ a escollir, i prenent F i E com al teorema 13, obtenim un recobriment $\{G_\mathcal{M}\}$ de $\mathcal{G}$ amb els mateixos paràmetres $\eta_\mathcal{M}$, $\alpha_\mathcal{M}$. Com que $K \ge K^*$, la varietat $S_{\omega,\mathcal{M}^*}$, amb tot un entorn seu, pot ésser recoberta pels blocs $G_\mathcal{M}$ corresponents als K-mòduls primitius $\mathcal{M}$ que continguin $\mathcal{M}^*$. Tenint en compte (3.18), és suficient que

$$\eta_{\mathcal{M}^*} \ge \delta \tag{3.29}$$

per tal que aquests blocs recobreixin $\mathcal{G}$. Per l'expressió de $\eta_{\mathcal{M}^*}$ donada per (3.21), la desigualtat (3.29) es complirà si prenem $K = \left[\left(\frac{\delta_0}{|\mathcal{M}^*|\delta} \right)^{1/\nu^*} \right]$. A més, la condició (3.27) sobre δ assegura que $K \ge K^*$.

Aplicarem el lema 11 sobre els blocs $G_\mathcal{M}$ amb $\mathcal{M} \supset \mathcal{M}^*$ (excepte per a $\mathcal{M} = \mathbf{Z}^n$). Notem que $Z \in \mathbf{R}(\mathcal{M}^*, K^*) \subset \mathbf{R}(\mathcal{M}, K)$. Per als blocs esmentats, escollim $\rho^{(\mathcal{M})}$ i $c_\mathcal{M}$ com a (3.22). Com al teorema 13, tenim les desigualtats (3.23–3.24). També s'acompleix la primera desigualtat de (3.11). A més,

$$\rho_2^{(\mathcal{M})} \ge \frac{60\eta_\mathcal{M}}{m} \ge \frac{60\eta_{\mathcal{M}^*}}{m} \ge \frac{60\delta}{m} \ ,$$

on hem usat la desigualtat $\eta_\mathcal{M} \ge \eta_{\mathcal{M}^*}$, que es dedueix de

$$|\mathcal{M}| \le |\mathcal{M}^*| \cdot K^{d-d^*},$$

essent d la dimensió de $\mathcal{M}$. Llavors,

$$\frac{2\varepsilon}{\rho_1} \le \frac{10\hat{\rho}\delta^2}{m\rho_1} \le \frac{m\sigma}{350} \left(\rho_2^{(\mathcal{M})} \right)^2 .$$

Per tant hem verificat les altres dues desigualtats de (3.11). Aplicant el lema 11 obtenim, per a les trajectòries que parteixen de $\mathbf{T}^n \times G_\mathcal{M}$, el radi de confinament i el temps d'estabilitat de la mateixa manera que al teorema 13. □

Notes

1. Donat un hamiltonià $H = h + f$, podem aplicar aquest lema amb $Z = 0$ i $R = f$. No obstant això, si aquest hamiltonià es troba molt a prop de la forma normal, podrem escriure'l en la forma $H = h + Z + R$, amb $\mu \ll \varepsilon$. Això pot donar un temps d'estabilitat una mica més gran degut al fet que μ apareix dividint a (3.28), però això no varia els exponents d'estabilitat.

2. Les millors fites s'obtenen escollint δ tan petita com ho permet la segona condició de (3.27), és a dir, $\delta \sim \sqrt{\varepsilon}$. Llavors les fites s'expressen en funció de ε, amb els exponents d'estabilitat $a = b = 1/2\nu^*$ establerts a [Pos2].

3. Fixant ε, podem aplicar aquest teorema a entorns de les varietats ressonants associades a diferents mòduls d^*-dimensionals. Però no tots els mòduls són admissibles. Tenint en compte (3.27), només podem considerar els mòduls $\mathcal{M}^*$ tals que
$$|\mathcal{M}^*| \, (K^*)^{\nu^*} = \mathcal{O}\left(\frac{1}{\sqrt{\varepsilon}}\right) .$$

Un hamiltonià al qual es poden aplicar les fites del teorema 14 és l'*exemple d'Arnol'd* [Ar2]:
$$H = \frac{1}{2}\left(I_1^2 + I_2^2\right) + \varepsilon(\cos\phi_1 - 1)(1 + \mu(\sin\phi_2 + \cos t)). \tag{3.30}$$
Aquest hamiltonià, no autònom amb $2\frac{1}{2}$ graus de llibertat i periòdic en el temps, fou utilitzat per Arnol'd per mostrar l'existència de difusió: donats $0 < A < B$, si $0 < \varepsilon\mu \ll \varepsilon \ll 1$ llavors existeix una trajectòria que uneix la regió $I_2 < A$ amb la regió $I_2 > B$. Per a localitzar-la, Arnol'd descriu el mecanisme de les cadenes de transició. Pren com a base els tors hiperbòlics que es troben sobre la ressonància $I_1 = 0$ i, fent el càlcul de la integral de Mel'nikov de primer ordre, dedueix que existeix intersecció transversal heteroclínica entre les varietats invariants o "bigotis" de tors hiperbòlics prou propers, si $\mu \sim \exp\{-1/\sqrt{\varepsilon}\}$. D'aquesta manera, pot enllaçar successius tors hiperbòlics a través de llurs varietats invariants, i veure que entorns arbitraris de tors allunyats són units per trajectòries del sistema. Aquestes trajectòries són contingudes en un entorn de radi $\mathcal{O}(\sqrt{\varepsilon})$ de la ressonància.

Aplicarem el nostre teorema 14 al hamiltonià (3.30) per obtenir una fita superior de la difusió (més concretament, una fita inferior del temps en el qual aquesta difusió pot tenir lloc). Per tal de fer-ho, prenem el temps com a nova variable angular: $t = \phi_3$, i introduïm una nova variable d'acció I_3 (l'energia canviada de signe). D'aquesta manera el hamiltonià (3.30) és equivalent al següent hamiltonià autònom amb 3 graus de llibertat:
$$H = h + Z + R,$$
essent
$$h(I) = \frac{1}{2}\left(I_1^2 + I_2^2\right) + I_3, \quad Z(\phi_1) = \varepsilon(\cos\phi_1 - 1), \quad R(\phi) = \varepsilon\mu(\cos\phi_1 - 1)(\sin\phi_2 + \cos\phi_3).$$
Notem que, com que les equacions hamiltonianes no depenen de I_3, aquesta variable juga un paper totalment irrellevant: el comportament de les altres 5 variables no depèn de

valor inicial que assignem a I_3. Així, podem considerar un espai de fase de dimensió 5, només amb les variables ϕ_1, ϕ_2, ϕ_3, I_1, I_2. Tenim $\omega(I) = (I_1, I_2, 1)$; així la ressonància $I_1 = 0$ correspon al mòdul $\mathcal{M}^* = \langle\langle(1,0,0)\rangle\rangle$ (és una ressonància simple), i veiem que Z és en forma normal respecte aquest mòdul. Tenim $|\mathcal{M}^*| = 1$ i podem agafar $K^* = 1$. Suposarem que en el domini $\mathcal{G}$ tenim $|\omega|_{\mathcal{G}} \leq L$.

Comprovem que el hamiltonià no pertorbat h és quasiconvex. Donat $v = (v_1, v_2, v_3)$ tal que $\omega(I) \cdot v = v_1 I_1 + v_2 I_2 + v_3 = 0$, i escrivint $\overline{v} = (v_1, v_2)$, tenim $|v| = \sqrt{|\overline{v}|^2 + v_3^2} \leq |\overline{v}| \sqrt{1 + L^2}$. Llavors, si $I \in \mathcal{G}$ tenim:

$$\frac{\partial^2 h}{\partial I^2}(I)\,(v, v) = v_1^2 + v_2^2 = |\overline{v}|^2 \geq \frac{1}{1 + L^2}\,|v|^2\,,$$

amb la qual cosa h és $\frac{1}{1+L^2}$-quasiconvex sobre $\mathcal{G}$.

Aplicant el teorema 14 amb $\delta \sim \sqrt{\varepsilon}$, per a una trajectòria $(\phi(t), I(t))$ tal que $|I_1(0)| \leq \delta$ obtenim:

$$|I(t) - I(0)| \leq \rho \qquad \text{si} \ \ |t| \leq T,$$

essent

$$\rho \sim \delta^{1/2} \sim \varepsilon^{1/4}, \qquad T \sim \frac{1}{\mu} \exp\left\{ \left(\frac{1}{\varepsilon}\right)^{1/4} \right\}.$$

Si $B - A \succeq \varepsilon^{1/4}$, tenim una fita inferior del temps necessari per a connectar les regions $I_2 < A$ i $I_2 > B$. Aquest resultat fa de mal comparar amb les estimacions contingudes a [Ar2], perquè quan $\mu \sim \exp\{-1/\sqrt{\varepsilon}\}$ el factor $1/\mu$ que apareix a l'estimació de T trastoca totalment les nostres fites. Però, malgrat que el raonament d'Arnol'd només és vàlid rigorosament si μ és exponencialment petit, hom creu que el seu resultat també és cert per a una potència $\mu \sim \varepsilon^p$. Amb tot, no queda clar que les estimacions donades a [Ar2] siguin les bones.

Afegim que si puguéssim assegurar que la trajectòria donada no surt de l'entorn de radi $\delta \sim \sqrt{\varepsilon}$ aleshores travessaria zones associades a ressonàncies dobles amb la qual cosa la fita inferior del temps necessari per a connectar les dues regions esmentades tindria l'exponent $1/2$ en comptes de $1/4$.

Com a complement considerem, per a un hamiltonià qualsevol, les fites d'estabilitat efectiva prop d'*òrbites periòdiques,* és a dir, en el cas d'un mòdul $\mathcal{M}^*$ de dimensió $d^* = n - 1$. D'acord amb el teorema 14, els exponents d'estabilitat són $a = b = 1/2$. Això s'esdevindrà en un entorn d'un punt on el vector de freqüències és *racional.* Un vector $\lambda \in \mathbf{R}^n \setminus \{0\}$ s'anomena racional si és parallel a un vector de $\mathbf{Z}^n$. Definint

$$\mathcal{M}_\lambda = \{k \in \mathbf{Z}^n : \, k \cdot \lambda = 0\}$$

(que és òbviament un mòdul primitiu), podem comprovar fàcilment que λ és racional si i només si $\dim \mathcal{M}_\lambda = n-1$. Definim el *període* de λ com

$$\tau_\lambda = \min \left\{ t > 0 : \ \frac{t}{2\pi}\lambda \in \mathbf{Z}^n \right\}.$$

Observem que, posant $\phi(t) = \phi(0) + t\lambda$, tenim $\phi(\tau_\lambda) = \phi(0)$. Així, un tor que tingui λ com a vector de freqüències descompon en òrbites periòdiques de període τ_λ. Una observació important és que, si λ és racional, llavors

$$|k \cdot \lambda| \geq \frac{2\pi}{\tau_\lambda} \qquad \forall k \in \mathbf{Z}^n \setminus \mathcal{M}_\lambda. \tag{3.31}$$

Això vol dir que no hi ha petits divisors associats a λ.

Les fites d'estabilitat efectiva en un entorn d'un punt amb freqüència λ poden ésser obtingudes directament a partir del lema 11 sense haver d'usar el lema geomètric. En efecte, per (3.31) no cal excloure cap regió per tal d'acomplir la condició de no ressonància mòdul $\mathcal{M}_\lambda$, necessària per a lema 11. Llavors hom pot prendre K tan gran com ho permeti la primera condició de (3.11), per tal que el temps d'estabilitat sigui més gran i les fites siguin millors. Aquest mètode alternatiu, el més adequat quan hom s'interessa en un entorn d'un punt amb freqüència racional, posa de manifest que aquestes freqüències (i en conseqüència les òrbites periòdiques) es caracteritzen millor per llur període que no pas per un mòdul $(n-1)$-dimensional.

Presentem el resultat tot seguit, expressant-lo en funció del radi de l'entorn δ. El resultat és òptim en el sentit que, si ε és la mida de la pertorbació, cal $\delta \succeq \varepsilon^{1/2}$. El primer en obtenir aquest resultat ha estat P. Lochak [Lo1, teorema 1C] (també [Lo2]), però sense exponents òptims ($\delta \succeq \varepsilon^{1/3}$). La seva principal contribució ha estat reconèixer el període τ_λ com a paràmetre important: si τ_λ és gran, les fites d'estabilitat es deterioren fins al punt que deixen de ser significatives quan $\tau_\lambda \sim 1/\delta$. Posteriorment, Lochak i A. I. Neishtadt han millorat la part analítica basant-se en l'esquema iteratiu usat a [Nei2], i han obtingut així l'exponent òptim [LN, LNN] (vegeu també [Lo3]). Llur resultat equival essencialment al que enunciem a continuació. Remarquem que llur prova és més directa car ja d'entrada només consideren dominis propers a freqüències racionals (en els quals obtenen la forma normal fent servir el mètode de les mitjanes).

Proposició 15 *Sigui* $H(\phi, I) = h(I) + f(\phi, I)$ *real analític sobre* $\mathcal{D}_\rho(\mathcal{G})$, *i escrivim* $\omega = \operatorname{grad} h$. *Donat* $\lambda \in \mathbf{R}^n$ *vector racional, suposem que*

$$|\omega(I) - \lambda| \leq \delta \qquad \forall I \in \mathcal{G}. \tag{3.32}$$

Siguin M, L *i* $\hat{\rho}$ *com al teorema 13, i suposem que* h *és* m*-quasiconvexa sobre* $\mathcal{U}_{\rho_2}(\mathcal{G})$.

Suposem:

$$0 < \delta \leq \min\left(\frac{m^2}{2^{10}M^2 \cdot \tau_\lambda}, \frac{m\rho_2}{120}\right), \qquad \varepsilon := \|f\|_{\mathcal{G},\rho} \leq \frac{5\hat{\rho}}{m} \cdot \delta^2. \tag{3.33}$$

Aleshores, per a tota trajectòria $(\phi(t), I(t))$ *de* H*, amb* $(\phi(0), I(0)) \in \mathbf{T}^n \times \mathcal{G}$*, tenim*

$$|I(t) - I(0)| \leq \frac{60}{m} \cdot \delta \qquad si \ \ |t| \leq \frac{4}{L} \exp\left\{\frac{m^3\rho_1}{2^{15}M^3 \cdot \tau_\lambda\, \delta}\right\}.$$

Prova Aplicarem el lema 11 amb $Z = 0$ i $R = f$, i amb $\rho^* = (\rho_1^*, \rho_2^*)$ en comptes de $\rho = (\rho_1, \rho_2)$, essent

$$\rho_1^* = \frac{\rho_1}{2}, \quad \rho_2^* = \frac{60\delta}{m}, \qquad c = \frac{\rho_2^*}{\rho_1^*}.$$

Notem que $\rho_2^* \leq \rho_2/2$ per (3.33). Llavors

$$\|Df\|_{\mathcal{G},\rho^*,c} \leq \frac{2\varepsilon}{\rho_1} \leq \frac{10\hat{\rho}\delta^2}{m\rho_1} \leq \frac{m\sigma}{350}\left(\rho_2^*\right)^2$$

i per tant la tercera desigualtat de (3.11) s'acompleix. Per (3.32), el conjunt $\omega(\mathcal{G})$ és δ-proper a $\mathcal{M}_\lambda$-ressonàncies. D'altra banda, si

$$K \leq \frac{\pi}{\tau_\lambda \delta} \tag{3.34}$$

deduïm de (3.31) la desigualtat

$$|k \cdot \omega(I)| \geq \frac{2\pi}{\tau_\lambda} - K\delta \geq \frac{\pi}{\tau_\lambda},$$

vàlida per a cada $I \in \mathcal{G}$ i $k \in \mathbf{Z}^n \setminus \mathcal{M}_\lambda$, $|k|_1 \leq K$. Això ens diu que $\omega(\mathcal{G})$ és α, K-no ressonant mòdul $\mathcal{M}_\lambda$, amb $\alpha = \pi/\tau_\lambda$. Si escollim $K = \left[\frac{m^2}{2^{10}M^2\tau_\lambda\delta}\right]$, llavors (3.34) i la primera desigualtat de (3.11) es satisfan, i a més tenim $K \geq 1$ per (3.33). La segona desigualtat de (3.11) és òbvia. Podem aplicar doncs el lema 11 i obtenim el radi de confinament i el temps d'estabilitat enunciats. □

Notes

1. Comparant aquest resultat amb el teorema 14, veiem que els paràmetres $|\mathcal{M}^*|$ i K^*, que depenien del mòdul de ressonàncies concret, han estat substituïts pel període τ_λ.

2. D'acord amb (3.33), podem escollir $\delta \sim \sqrt{\varepsilon}$. Obtenim aleshores que, si $\tau_\lambda = \mathcal{O}(1/\sqrt{\varepsilon})$, el radi de confinament i el temps d'estabilitat vénen donats per

$$\rho \sim \sqrt{\varepsilon}, \qquad T \sim \exp\left\{\frac{1}{\tau_\lambda\sqrt{\varepsilon}}\right\}.$$

Aquesta versió coincideix amb [Lo3, corol·lari 1] i amb [Pos2, teorema 4].

Als treballs de P. Lochak [Lo1, Lo2, LN, LNN], les fites d'estabilitat efectiva prop de freqüències racionals són el punt de partida per a l'obtenció de les fites globals del teorema de Nekhoroshev. Aquest mètode es distancia sensiblement de l'enfocament "tradicional" [Nek, BG, BGG, Pos2] que hem seguit a la present memòria. En la seva prova, Lochak distingeix, a més de les parts analítica i geomètrica, una "part aritmètica" consistent en recobrir tot l'espai de fase per entorns d'òrbites periòdiques fent ús del *teorema de Dirichlet* sobre aproximacions successives. Aquest teorema (vegeu, per exemple, [Sc]) estableix que, donats $v \in \mathbf{R}^n$ i $Q > 1$, existeix q enter, $1 \leq q < Q$, tal que

$$\{qv\} \leq \frac{1}{Q^{1/n}} \ .$$

Hem usat, per a $u \in \mathbf{R}^n$, la notació $\{u\} = \min_{p \in \mathbf{Z}^n} |u - p|_\infty$. De manera intuïtiva, podem mostrar com a partir de la proposició 15 i del teorema de Dirichlet hom pot deduir les fites globals de Nekhoroshev. El raonament és purament aritmètic; no fa servir la condició de quasiconvexitat, ja usada per a establir la proposició 15. Fixem Q, que escollirem després, i que vindrà a ésser el període màxim permès. Donat $I \in \mathcal{G}$, i suposant per exemple que $\omega_n(I) \neq 0$, el teorema de Dirichlet aplicat al vector de $n-1$ components $\left(\frac{\omega_1(I)}{\omega_n(I)}, \ldots, \frac{\omega_{n-1}(I)}{\omega_n(I)}\right)$ ens diu que existeix $\lambda \in \mathbf{R}^n$ racional, de període $\tau_\lambda \preceq Q$, tal que

$$|\omega(I) - \lambda| \preceq \frac{1}{\tau_\lambda Q^{1/(n-1)}} \ .$$

Així, tot l'espai de freqüències és recobert per entorns d'aquestes freqüències racionals. Cal prendre, per a cada λ, un entorn de radi

$$\delta_\lambda \sim \frac{1}{\tau_\lambda Q^{1/(n-1)}} \succeq \frac{1}{Q^{n/(n-1)}} \ .$$

Podem aplicar la proposició 15 sobre aquests entorns. Per acomplir, per a cada λ, la condició $\varepsilon \preceq \delta_\lambda^2$, escollim $Q \sim \left(\frac{1}{\varepsilon}\right)^{(n-1)/2n}$. D'aquesta manera, el radi de confinament i el temps d'estabilitat tenen els exponents òptims:

$$\begin{aligned}
&\delta_\lambda \preceq \frac{1}{Q^{1/(n-1)}} \sim \varepsilon^{1/2n}, \\
&\exp\left\{\frac{1}{\tau_\lambda \delta_\lambda}\right\} \sim \exp\left\{Q^{1/(n-1)}\right\} \sim \exp\left\{\left(\frac{1}{\varepsilon}\right)^{1/2n}\right\}.
\end{aligned}$$

Com veiem, l'elecció dels radis δ_λ i la del període màxim Q juguen un paper decisiu en l'obtenció de l'exponent òptim.

A les primeres versions de Lochak [Lo1, Lo2], l'exponent no era pas l'òptim $1/2n$, sinó essencialment $1/(2n+1)$. Això només era degut a la imperfecció de la part analítica, que ja hem comentat més amunt, i que duia a l'exponent $1/3$ en lloc de $1/2$ per a les fites prop de freqüències racionals. Un cop millorada la part analítica, i sense modificar la part geomètrica ni la part aritmètica, Lochak i Neishtadt [LN] han obtingut l'exponent òptim (vegeu a [LNN] una prova més detallada, i a [Lo3] comentaris informals però força instructius sobre el tema).

Remarquem finalment que, procedint de manera molt similar a la que acabem de descriure, Lochak obté un resultat similar al nostre teorema 14, amb els dos exponents $1/2\nu^*$ en lloc de $1/2n$. La millora de les fites a la regió propera a una ressonància s'explica de manera senzilla en aquest context, car una freqüència ressonant resulta més ben aproximable per vectors racionals que una freqüència qualsevol. De fet, cal aplicar el teorema de Dirichlet en dimensió ν^* en comptes de n (vegeu [Lo1, Lo3]).

Capítol 4

Teorema KAM isoenergètic i tors quasi-invariants

4.1 Condicions de no degeneració

Veurem en aquest capítol que, per a un hamiltonià quasi-integrable $H(\phi, I) = h(I) + f(\phi, I)$, analític sobre $\mathcal{D}_\rho(\mathcal{G})$, la major part de les òrbites es troben sobre tors invariants n-dimensionals si la pertorbació f és prou petita. Per a tenir aquest resultat, el sistema no pertorbat ha de satisfer una condició de no degeneració. Als enunciats habituals del teorema KAM, hom imposa dos tipus de condicions de no degeneració sobre l'aplicació freqüència no pertorbada $\omega = \operatorname{grad} h$. Aquestes condicions són les que anomenarem *no degeneració de Kolmogorov,*

$$\det\left(\frac{\partial\omega}{\partial I}(I)\right) \neq 0 \qquad \forall I \in \mathcal{G}, \tag{4.1}$$

i la *no degeneració isoenergètica* (la qual també rep el nom de no degeneració d'Arnol'd),

$$\det\begin{pmatrix} \frac{\partial\omega}{\partial I}(I) & \omega(I) \\ \omega(I)^\top & 0 \end{pmatrix} \neq 0 \qquad \forall I \in \mathcal{G}. \tag{4.2}$$

Una formulació equivalent per a la no degeneració isoenergètica es demanar que ω no s'anul·li sobre $\mathcal{G}$ i que

$$\frac{\partial\omega}{\partial I}(I)\, v + s\omega(I) \neq 0 \qquad \forall v \in \langle\omega(I)\rangle^\perp \setminus \{0\},\ \forall s \in \mathbf{R},\ \ \forall I \in \mathcal{G}. \tag{4.3}$$

A l'espai d'accions, la condició (4.3) pot ésser interpretada com a transversalitat, a tots els punts, entre un nivell d'energia $M_E = h^{-1}(E)$ i les hipersuperfícies $\omega(I) \cdot v = 0$ (que inclouen les hipersuperfícies ressonants). La interpretació a l'espai de freqüències és que la imatge $\omega\,(M_E)$ de qualsevol nivell d'energia i el subspai $\langle\omega(I)\rangle$ són sempre transversals.

És fàcil de construir exemples que mostrin que les condicions (4.1) i (4.2) són independents:

$$h(I_1, I_2) = \ln \frac{I_2}{I_1}\,, \qquad h(I_1, I_2) = \frac{1}{2} I_1^2 + I_2\,. \tag{4.4}$$

Al primer exemple només es compleix la no degeneració de Kolmogorov, a tot el domini, i al segon només la no degeneració isoenergètica.

Donarem a les seccions següents una prova directa i quantitativa del teorema KAM sota la hipòtesi de no degeneració isoenergètica, si bé deixarem clar que el mateix mètode de prova serviria per a la no degeneració de Kolmogorov. Aquesta manera de provar la versió isoenergètica del teorema KAM difereix de les que hom pot trobar a [Do, BH], on és provat a partir de la versió de Kolmogorov.

Comencem recordant que la versió ordinària del teorema KAM (sota la condició de Kolmogorov) estableix, fixats $\tau > n-1$ i $\gamma > 0$, i suposant per a la mida de la pertorbació f una condició del tipus

$$\varepsilon \preceq \gamma^2, \tag{4.5}$$

que cada tor invariant del hamiltonià no pertorbat h amb freqüències τ, γ-diofàntiques (és a dir, satisfent (1.2)) es conserva al sistema pertorbat amb el mateix vector de freqüències. A més, la mesura del complementari del conjunt que formen els tors invariants és $\mathcal{O}(\gamma)$. En provar aquest resultat és crucial usar que, sota la condició (4.1), l'aplicació ω és un difeomorfisme local, la qual cosa permet de parametritzar localment els tors no pertorbats per llurs freqüències.

La conservació dels tors invariants amb el mateix vector de freqüències pot ésser falsa sota la condició isoenergètica (4.2). Podem veure això molt fàcilment considerant $h(I)$ com al segon exemple de (4.4), en el qual l'aplicació freqüència $\omega(I_1, I_2) = (I_1, 1)$ porta tot el pla dins una recta, i $f(\phi, I) = \varepsilon\, h(I)$ com a pertorbació.

No obstant això, és conegut que en el cas isoenergètic els tors invariants no pertorbats poden ésser parametritzats, sobre cada nivell d'energia M_E, per llurs raons entre freqüències. Precisant més, si suposem (sense pèrdua de generalitat), que la component ω_n no s'anul·la sobre $\mathcal{G}$, llavors la condició isoenergètica és equivalent a demanar que l'aplicació

$$\Omega(I) := \left(\frac{\overline{\omega}(I)}{\omega_n(I)}\,,\, h(I) \right) = \left(\frac{\omega_1(I)}{\omega_n(I)}\,, \,\ldots\,, \,\frac{\omega_{n-1}(I)}{\omega_n(I)}\,,\, h(I) \right) \tag{4.6}$$

sigui un difeomorfisme local sobre $\mathcal{G}$. Usem, en aquesta secció i les que segueixen, la notació $\overline{v} = (v_1, \ldots, v_{n-1})$ per a $v = (v_1, \ldots, v_{n-1}, v_n)$. Notem que, en incloure la darrera component $h(I)$ a la definició de Ω, evitem de considerar cada nivell d'energia separadament. Usant la no degeneració de l'aplicació Ω, podem establir que, si una condició sobre ε del tipus (4.5) és acomplerta, llavors per a cada tor τ, γ-diofàntic del hamiltonià no pertorbat existeix un tor invariant de la pertorbació, amb les mateixes raons entre freqüències (si bé la pròpia freqüència pot variar) i la mateixa energia. A més, com en el cas de Kolmogorov, obtenim per a la mesura del complementari del conjunt invariant l'estimació $\mathcal{O}(\gamma)$. Hom dedueix que en el cas isoenergètic la major part dels tors invariants sobre cada nivell d'energia es conserven sota la pertorbació. En efecte, com que $\omega_n(I) \neq 0$ per a tot $I \in \mathcal{G}$, el vector de freqüències $\omega(I)$ associat a un tor donat és diofàntic si el vector $\left(\frac{\overline{\omega}(I)}{\omega_n(I)}, 1\right)$ és també diofàntic. Això esdevé per a la majoria dels tors no pertorbats d'un nivell d'energia fixat, car aquests tors sempre es poden parametritzar per llurs raons entre freqüències.

Val la pena de recordar que la versió isoenergètica del teorema KAM és més significativa des del punt de vista de l'estabilitat, perquè en aquest cas hom assegura l'existència d'una extensa família de tors invariants sobre cada nivell d'energia fixat. En el cas de dos graus de llibertat ($n = 2$), se'n segueix l'estabilitat del sistema (en el sentit que les trajectòries són fitades), ja que els tors invariants separen sempre el nivell d'energia sobre el qual es troben. En canvi, en el cas de la condició de Kolmogorov, no és possible deduir del teorema KAM que en un nivell d'energia donat es conservi cap tor invariant. D'altra banda, per a més de dos graus de llibertat, l'estabilitat no pot ésser garantida sota cap condició de no degeneració però en el cas isoenergètic els tors KAM semblen barreres més fortes per a la difusió d'Arnol'd.

Una altra observació és que el teorema KAM isoenergètic es pot aplicar eventualment a hamiltonians no autònoms periòdics, prenent el temps com a variable angular afegida.

Fem una breu descripció del mètode que usem per a provar el teorema KAM i de les principals dificultats tècniques que trobem. Com hem anunciat a la secció 2.1, en el procés iteratiu obtenim successius hamiltonians de la forma $H^{(q)} = h^{(q)} + R^{(q)}$, amb la part integrable $h^{(q)}$ que va canviant. A cada pas, restringim el domini excloent-ne bandes ressonants fins a ordres successius K_q que tendeixen a infinit. Un primer problema és que hem de garantir la condició de no degeneració per a l'aplicació freqüència $\omega^{(q)} = \operatorname{grad} h^{(q)}$ a cada iteració. Així, la part analítica i la part geomètrica no poden ésser separades i les hem controlar simultàniament a cada iteració.

Un altre problema tècnic és que, per tal de traslladar les fites de la mesura de les zones ressonants, de l'espai de freqüències a l'espai de fase, necessitem una fita inferior del determinant jacobià del difeomorfisme adient. En el cas de la no degeneració de Kolmogorov, la pròpia aplicació freqüència ω és un difeomorfisme local, i hom pot veure que les successives aplicacions $\omega^{(q)}$ segueixen essent difeomorfismes en llurs dominis respectius. Hom pot suposar doncs que l'aplicació inicial ω és injectiva (restringint el domini si cal). Llavors, per tal de garantir que les successives pertorbacions $\omega^{(q)}$ són també injectives, cal restringir llurs dominis encara una mica més després d'haver-ne exclòs les ressonàncies.

El cas isoenergètic és, en aquest aspecte, més intricat. Com hem vist més amunt, l'aplicació freqüència ω no és necessàriament un difeomorfisme local, però podem fer ús de l'aplicació Ω introduïda a (4.6), la qual suposarem injectiva sobre $\mathcal{G}$. Aleshores, tal com faríem en el cas Kolmogorov, pertorbacions successives $\Omega^{(q)}$ d'aquesta aplicació seran també injectives a condició que restringim una mica llurs dominis.

Notem que les bandes ressonants que hem de treure al llarg de les successives iteracions s'expressen millor a l'espai imatge $\omega(\mathcal{G})$ o $\Omega(\mathcal{G})$, segons el cas. En efecte, a l'espai imatge podem agafar bandes "lineals", que són més fàcilment manejables. Més concretament, en el cas isoenergètic exclourem de $\Omega(\mathcal{G})$ bandes ressonants de la forma

$$\Delta(k,\alpha) := \left\{ J \in \mathbf{R}^n \ : \ \left| \overline{k} \cdot \overline{J} + k_n \right| < \alpha \right\}, \tag{4.7}$$

amb $\alpha > 0$. Això és força apropiat en aquest cas isoenergètic ja que l'aplicació Ω envia cada zona ressonant $|k \cdot \omega(I)| < \delta$ dins una banda lineal. L'única excepció és el cas $k = (0, \ldots, 0, 1)$, ja que llavors $\Delta(k,\alpha)$ és buit si $\alpha < 1$, però aquest vector enter correspon a la ressonància $\omega_n(I) = 0$, que ha estat prèviament treta del domini. Remarquem també que és fàcil fitar la mesura d'una banda lineal com (4.7), i que aquesta fita pot ésser portada a l'espai d'accions si coneixem una fita inferior del determinant jacobià del difeomorfisme.

És possible construir un marc comú que agrupa les dues condicions de Kolmogorov i isoenergètica. En efecte, considerem la condició:

$$\frac{\partial \omega}{\partial I}(I)\, v \neq 0 \qquad \forall v \in \langle \omega(I) \rangle^{\perp} \setminus \{0\}, \quad \forall I \in \mathcal{G},$$

la qual ens diu que la restricció de ω a cada nivell d'energia M_E és un difeomorfisme local. Aquesta condició es pot expressar també en termes matricials:

$$\operatorname{rang} \begin{pmatrix} (\omega(I))^{\top} & \frac{\partial \omega}{\partial I}(I) \end{pmatrix} = n \qquad \forall I \in \mathcal{G}. \tag{4.8}$$

No és difícil veure que aquesta condició és equivalent a demanar que, a cada punt $I \in \mathcal{G}$, es satisfaci la condició de Kolmogorov o bé la isoenergètica.

És prou conegut que, si $\tau > n - 1$, el conjunt de vectors que no satisfan la condició diofàntica (1.2), amb $\gamma > 0$ donat, té mesura relativa $\mathcal{O}(\gamma)$ a $\mathbf{R}^n$ (vegeu [LM, apèndix 4]). Notem també que la condició de no degeneració (4.8) implica que cada ressonància

$k \cdot \omega(I) = 0$, amb $k \neq 0$, és una hipersuperfície regular. Aleshores, la mesura del complementari del conjunt invariant també és $\mathcal{O}(\gamma)$, ja que aquesta estimació s'obté traslladant a l'espai d'accions la mesura de cadascuna de les bandes ressonants que excloem al llarg del procés iteratiu. Aquesta és la idea de les fites de la mesura sota les dues condicions de no degeneració (4.1) i (4.2), i l'única raó per a fer les proves separadament és la qüestió tècnica referent als difeomorfismes apropiats que hem descrit més amunt.

Una condició molt més general sobre l'aplicació freqüència és la *condició de Rüssmann,* anunciada a [Ru2]. Aquesta condició demana que la imatge $\omega(\mathcal{G})$ no sigui continguda en cap hiperplà que passi per l'origen. Una condició equivalent (suposant el hamiltonià analític) és que el desenvolupament de Taylor de ω en un punt I tingui n coeficients linealment independents. D'aquesta manera, la condició (4.8) correspon al cas en què la condició de Rüssmann és vàlida a ordre 1. Notem que, sota la condició general de Rüssmann, la imatge $\omega(\mathcal{G})$ pot ésser continguda en una varietat de qualsevol dimensió; fins i tot pot ésser una corba.

Recentment, J. Xiu, J. You, Q. Qiu i M. B. Sevryuk [XYQ, Se] han provat que el teorema KAM és vàlid sota la condició de Rüssmann, si bé la fita de la mesura del complementari dels tors invariants esdevé més gran: $\mathcal{O}(\gamma^b)$, amb $0 < b < 1$. Amb tot, Sevryuk remarca que en aquest cas no es pot parlar pròpiament de "conservació" de tors invariants, ja que les freqüències dels tors no pertorbats no permeten en general parametritzar els tors pertorbats. Esmentem també que Ch.-Q. Cheng i Y.-S. Sun [CS] han provat una altra versió similar del teorema KAM, però la condició que imposen és més aviat una generalització de la condició de Kolmogorov (4.1) que no pas de la condició (4.8).

Assenyalem finalment que Sevryuk [Se] anomena "KAM–estable" el hamiltonià no pertorbat $h(I)$ si donat $\delta > 0$ existeix $\varepsilon > 0$ tal que, per a tota pertorbació $f(\phi, I)$ tal que $|f| \leq \varepsilon$, el hamiltonià $h + f$ té tors invariants, els quals omplen un conjunt tal que la mesura del seu complementari és més petita que δ. De manera força simple, Sevryuk prova que la condició de Rüssmann és necessària (a més de suficient) per a la KAM–estabilitat, basant-se en el fet que, si la imatge per l'aplicació freqüència és continguda en un hiperplà per l'origen, llavors és possible construir una pertorbació que la faci caure dins d'una ressonància.

4.2 No degeneració isoenergètica: resultats quantitatius

Farem ús d'una versió quantitativa de l'expressió (4.3) de la condició de no degeneració isoenergètica. Donada una funció $h(I)$ definida a $G \subset \mathbf{R}^n$, i donat $\mu > 0$, direm que l'aplicació freqüència $\omega = \operatorname{grad} h$ és *μ-isoenergèticament no degenerada* si ω no s'anul·la sobre G i

$$\left| \frac{\partial \omega}{\partial I}(I)\, v + s\omega(I) \right| \geq \mu\, |v| \qquad \forall v \in \langle \omega(I) \rangle^{\perp},\ \forall s \in \mathbf{R},\ \ \forall I \in G. \tag{4.9}$$

Modifiquem lleugerament l'aplicació definida a (4.6). Fixada una constant $a > 0$, definim

$$\Omega_{\omega,h,a}(I) := \left(\frac{\overline{\omega}(I)}{\omega_n(I)}\,,\, a\, h(I) \right), \qquad I \in G. \tag{4.10}$$

Aquesta constant a és introduïda per raons quantitatives. Tindrà les dimensions físiques adequades per tal que les components de l'aplicació (4.10) siguin dimensionalment coherents. Però la principal motivació és que les fites donades al lema següent són millors amb una bona tria de a.

Lema 16 *Sigui h una funció real de classe $\mathcal{C}^3$ sobre $G \subset \mathbf{R}^n$, i escrivim $\omega = \operatorname{grad} h$. Suposem les fites:*

$$\left| \frac{\partial^2 h}{\partial I^2} \right|_G \leq M, \qquad \left| \frac{\partial^3 h}{\partial I^3} \right|_G \leq M', \qquad |\omega|_G \leq L \qquad i \qquad |\omega_n(I)| \geq l \ \ \forall I \in G.$$

Suposem també que ω és μ-isoenergèticament no degenerada sobre G. Sigui $a \geq 2M/l^2$ constant fixada, i denotem $\Omega = \Omega_{\omega,h,a}$. Tenim:

a) $\displaystyle \left| \frac{\partial \Omega}{\partial I} \right|_G \leq 2La.$

b) $\displaystyle \left| \frac{\partial \Omega}{\partial I}(I)\, v \right| \geq \frac{\mu}{2L}\, |v| \quad \forall v \in \mathbf{R}^n,\ \forall I \in G.$

c) $\displaystyle \left| \det \left(\frac{\partial \Omega}{\partial I}(I) \right) \right| \geq \frac{\mu^{n-1} a}{L^{n-2}} \quad \forall I \in G.$

d) $\displaystyle \left| \frac{\partial^2 \Omega}{\partial I^2} \right|_G \leq \left(\frac{M'}{2M} + \frac{3M}{l} \right) La.$

Prova Amb un simple càlcul obtenim, per a $I \in G$ i $v \in \mathbf{R}^n$,

$$\frac{\partial \Omega}{\partial I}(I)\, v = \left(\frac{\partial \overline{\Omega}}{\partial I}(I)\, v\,,\, \frac{\partial \Omega_n}{\partial I}(I)\, v \right) = \left(\frac{1}{\omega_n(I)} \left(\frac{\partial \overline{\omega}}{\partial I}(I)\, v - \frac{\frac{\partial \omega_n}{\partial I}(I)\, v}{\omega_n(I)}\, \overline{\omega}(I) \right)\,,\, a\, \omega(I) \cdot v \right).$$

Tenim la fita

$$\begin{aligned}\left|\frac{\partial\overline{\Omega}}{\partial I}(I)\,v\right| &\le \frac{1}{\omega_n(I)^2}\left(\left|\frac{\partial\overline{\omega}}{\partial I}(I)\,v\right|\cdot|\omega_n(I)|+\left|\frac{\partial\omega_n}{\partial I}(I)\,v\right|\cdot|\overline{\omega}(I)|\right)\\ &\le \frac{1}{\omega_n(I)^2}\left|\frac{\partial\omega}{\partial I}(I)\,v\right|\cdot|\omega(I)| \le \frac{M\,|\omega(I)|}{l^2}\,|v| \qquad (4.11)\end{aligned}$$

i llavors obtenim la fita de l'apartat (a):

$$\left|\frac{\partial\Omega}{\partial I}\right|_G \le \sqrt{\left(\frac{ML}{l^2}\right)^2+(aL)^2} \le 2La. \qquad (4.12)$$

Per tal de provar els apartats (b) i (c) usem la condició isoenergètica. Per a tot $v\in\langle\omega(I)\rangle^\perp$, tenim

$$\begin{aligned}\left|\frac{\partial\overline{\Omega}}{\partial I}(I)\,v\right| &= \left|\frac{1}{\omega_n(I)}\left(\frac{\partial\overline{\omega}}{\partial I}(I)\,v-\frac{\frac{\partial\omega_n}{\partial I}(I)\,v}{\omega_n(I)}\,\overline{\omega}(I)\right)\right|\\ &= \left|\frac{1}{\omega_n(I)}\left(\frac{\partial\omega}{\partial I}(I)\,v-\frac{\frac{\partial\omega_n}{\partial I}(I)\,v}{\omega_n(I)}\,\omega(I)\right)\right| \ge \frac{\mu}{|\omega_n(I)|}\,|v|\,, \qquad (4.13)\end{aligned}$$

on hem usat el fet que la component n-èsima del vector

$$\frac{\partial\omega}{\partial I}(I)\,v-\frac{\frac{\partial\omega_n}{\partial I}(I)\,v}{\omega_n(I)}\,\omega(I)$$

és nul·la. A més, hem usat la no degeneració isoenergètica per tal de fitar inferiorment la norma d'aquest vector. Ara, considerem una base ortonormal $e_1,\dots,e_n$ de $\mathbf{R}^n$ tal que els primers $n-1$ vectors pertanyin a $\langle\omega(I)\rangle^\perp$ i el darrer pertanyi a $\langle\omega(I)\rangle$. Sigui $P=\begin{pmatrix}\overline{P} & P_n\end{pmatrix}$ la matriu $n\times n$ que té aquests vectors com a columnes. Escrivim:

$$\frac{\partial\Omega}{\partial I}(I)\,P=\begin{pmatrix}\frac{\partial\overline{\Omega}}{\partial I}(I)\,\overline{P} & \frac{\partial\overline{\Omega}}{\partial I}(I)\,P_n\\ \frac{\partial\Omega_n}{\partial I}(I)\,\overline{P} & \frac{\partial\Omega_n}{\partial I}(I)\,P_n\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}A & \overline{b}\\ 0 & b_n\end{pmatrix}. \qquad (4.14)$$

Deduïm directament de (4.13) que

$$|A\overline{v}|\ge\frac{\mu}{|\omega_n(I)|}\,|\overline{v}| \qquad \forall\overline{v}\in\mathbf{R}^{n-1}.$$

Notem també que $\left|\overline{b}\right|\le M\,|\omega(I)|\,/l^2$ per (4.11). A més, $b_n=a\,\omega(I)\cdot e_n$ i així $|b_n|=a\,|\omega(I)|$. Llavors, calculant la inversa de la matriu (4.14) i duent a terme una fita grollera de la seva norma,

$$\begin{aligned}\left|\left(\frac{\partial\Omega}{\partial I}(I)\right)^{-1}\right| &\le \left|\begin{pmatrix}A^{-1} & -\frac{1}{b_n}A^{-1}\overline{b}\\ 0 & \frac{1}{b_n}\end{pmatrix}\right| \le \left|A^{-1}\right|+\frac{1}{|b_n|}\left|A^{-1}\right|\left|\overline{b}\right|+\frac{1}{|b_n|}\\ &\le \frac{|\omega_n(I)|}{\mu}+\frac{1}{a\,|\omega(I)|}\cdot\frac{|\omega_n(I)|}{\mu}\cdot\frac{M\,|\omega(I)|}{l^2}+\frac{1}{a\,|\omega(I)|}\\ &\le \frac{L}{\mu}+\frac{LM}{l^2\mu a}+\frac{1}{al} \le \frac{L}{\mu}\left(1+\frac{2M}{l^2a}\right). \qquad (4.15)\end{aligned}$$

Aquesta fita implica (b), per la nostra condició sobre a. Per obtenir la fita inferior (c) per al determinant, tenim en compte altre cop l'expressió (4.14):

$$\left|\det\left(\frac{\partial\Omega}{\partial I}(I)\right)\right| \geq \left(\frac{\mu}{|\omega_n(I)|}\right)^{n-1} \cdot a\,|\omega(I)| \geq \frac{\mu^{n-1}a}{L^{n-2}} .$$

Finalment, provem (d). Per a $I \in G$ i $u, v \in \mathbf{R}^n$,

$$\begin{aligned}\frac{\partial^2\Omega}{\partial I^2}(I)\,(u,v) &= \left(\frac{\partial^2\overline{\Omega}}{\partial I^2}(I)\,(u,v), \frac{\partial^2\Omega_n}{\partial I^2}(I)\,(u,v)\right)\\ &= \left(\frac{\frac{\partial^2\overline{\omega}}{\partial I^2}(I)\,(u,v)}{\omega_n(I)} - \frac{\left(\frac{\partial\omega_n}{\partial I}(I)\,u\right)\left(\frac{\partial\overline{\omega}}{\partial I}(I)\,v\right) + \left(\frac{\partial\omega_n}{\partial I}(I)\,v\right)\left(\frac{\partial\overline{\omega}}{\partial I}(I)\,u\right)}{\omega_n(I)^2}\right.\\ &\quad \left. - \frac{\left(\frac{\partial^2\omega_n}{\partial I^2}(I)\,(u,v)\right)\overline{\omega}(I)}{\omega_n(I)^2} + \frac{2\left(\frac{\partial\omega_n}{\partial I}(I)\,u\right)\left(\frac{\partial\omega_n}{\partial I}(I)\,v\right)\overline{\omega}(I)}{\omega_n(I)^3}\,,\ a\,\frac{\partial^2 h}{\partial I^2}(I)\,(u,v)\right).\end{aligned}$$

Podem fitar aquesta expressió com a (4.11–4.12):

$$\begin{aligned}\left|\frac{\partial^2\overline{\Omega}}{\partial I^2}(I)\,(u,v)\right| &\leq \frac{1}{\omega_n(I)^2}\left(\left|\frac{\partial^2\omega}{\partial I^2}(I)\,(u,v)\right|\cdot|\omega(I)| + \left|\frac{\partial\omega}{\partial I}(I)\,u\right|\cdot\left|\frac{\partial\omega}{\partial I}(I)\,v\right|\right)\\ &\quad + \frac{2}{|\omega_n(I)|^3}\left|\frac{\partial\omega_n}{\partial I}(I)\,u\right|\cdot\left|\frac{\partial\omega_n}{\partial I}(I)\,v\right|\cdot|\overline{\omega}(I)|\\ &\leq \left(\frac{M'L}{l^2} + \frac{3M^2L}{l^3}\right)|u|\,|v|\,,\end{aligned}$$

i deduïm la fita (d):

$$\left|\frac{\partial^2\Omega}{\partial I^2}\right|_G \leq \sqrt{\left(\frac{M'L}{l^2} + \frac{3M^2L}{l^3}\right)^2 + (aM)^2} \leq \left(\frac{M'}{2M} + \frac{3M}{l}\right)La.$$

□

Nota Si la condició $a \geq 2M/l^2$ és suprimida, llavors la fita (b) ha d'ésser substituïda per la fita (4.15), la qual és més dolenta si prenem a massa petit.

Establim a continuació de quina manera la constant μ de la condició de no degeneració isoenergètica es veu afectada per una petita variació de l'aplicació freqüència. Aquest resultat pot ésser expressat en termes de vectors i matrius.

Lema 17 *Siguin* $\lambda, \tilde\lambda \in \mathbf{R}^n$ *vectors, i* $A, \tilde A$ *matrius* $n \times n$*. Escrivim* $\varepsilon = \left|\tilde\lambda - \lambda\right|$, $\varepsilon' = \left|\tilde A - A\right|$, *i siguin* $l \leq \min\left(|\lambda|, \left|\tilde\lambda\right|\right)$, $M \geq \max\left(|A|, \left|\tilde A\right|\right)$*. Suposem que, per a certa* $\mu > 0$,

$$|Av + s\lambda| \geq \mu\,|v| \qquad \forall v \in \langle\lambda\rangle^\perp, \quad \forall s \in \mathbf{R}.$$

Aleshores,

$$\left|\tilde{A}v + s\tilde{\lambda}\right| \geq \left(\mu - \frac{4M\varepsilon}{l} - \varepsilon'\right)|v| \qquad \forall v \in \left\langle\tilde{\lambda}\right\rangle^{\perp}, \quad \forall s \in \mathbf{R}.$$

Prova Clarament, és suficient de comprovar el resultat per als vectors $v \in \left\langle\tilde{\lambda}\right\rangle^{\perp}$ tals que $|v| = 1$. Tenim $|\lambda \cdot v| \leq \varepsilon$ per als vectors esmentats. Escrivint $v = v_1 + v_2$, amb $v_1 \in \langle\lambda\rangle^{\perp}$ i $v_2 \in \langle\lambda\rangle$, deduïm que

$$|v_2| \leq \frac{\varepsilon}{|\lambda|}, \qquad |v_1| \geq 1 - \frac{\varepsilon}{|\lambda|}.$$

Per la hipòtesi,

$$|Av + s\lambda| \geq |Av_1 + s\lambda| - |Av_2| \geq \mu\,|v_1| - |A| \cdot |v_2| \geq \mu\left(1 - \frac{\varepsilon}{|\lambda|}\right) - |A|\,\frac{\varepsilon}{|\lambda|} \geq \mu - \frac{2\,|A|\,\varepsilon}{|\lambda|}.$$

Llavors, si suposem que $\left|s\tilde{\lambda}\right| \leq 2\left|\tilde{A}\right|$, obtenim

$$\begin{aligned}
\left|\tilde{A}v + s\tilde{\lambda}\right| &\geq |Av + s\lambda| - \left|\left(\tilde{A} - A\right)v\right| - \left|s\left(\tilde{\lambda} - \lambda\right)\right| \\
&\geq \mu - \frac{2\,|A|\,\varepsilon}{|\lambda|} - \varepsilon' - \frac{2\left|\tilde{A}\right|}{\left|\tilde{\lambda}\right|}\varepsilon \geq \mu - \frac{4M\varepsilon}{l} - \varepsilon'.
\end{aligned}$$

En el cas en què $\left|s\tilde{\lambda}\right| > 2\left|\tilde{A}\right|$, la prova és molt més fàcil:

$$\left|\tilde{A}v + s\tilde{\lambda}\right| \geq \left|s\tilde{\lambda}\right| - \left|\tilde{A}v\right| \geq \left|\tilde{A}\right| \geq |A| - \varepsilon' \geq \mu - \varepsilon'.$$

□

Finalment, veurem que una petita pertorbació d'una aplicació injectiva també és injectiva si en restringim lleugerament el domini. Prèviament, donat $b \geq 0$ definim el conjunt

$$G - b := \{I \in G \;:\; \mathcal{U}_b(I) \subset G\},$$

essent $\mathcal{U}_b(I)$ la bola tancada de radi b centrada a I, d'acord amb (3.10).

Lema 18 *Sigui $G \subset \mathbf{R}^n$ compacte, i siguin $\Omega, \tilde{\Omega} : G \longrightarrow \mathbf{R}^n$ aplicacions de classe $\mathcal{C}^2$, amb $\left|\tilde{\Omega} - \Omega\right|_G \leq \varepsilon$. Suposem que Ω és injectiva sobre G, i escrivim $F = \Omega(G)$. Suposem les fites:*

$$\left|\frac{\partial\Omega}{\partial I}\right|_G \leq M, \qquad \left|\frac{\partial\tilde{\Omega}}{\partial I}\right|_G \leq \tilde{M}, \qquad \left|\frac{\partial^2\tilde{\Omega}}{\partial I^2}\right|_G \leq \tilde{M}',$$

$$\left|\frac{\partial\Omega}{\partial I}(I)\,v\right| \geq m\,|v|, \quad \left|\frac{\partial\tilde{\Omega}}{\partial I}(I)\,v\right| \geq \tilde{m}\,|v| \quad \forall v \in \mathbf{R}^n, \quad \forall I \in G,$$

amb $0 < \tilde{m} < m$, $\tilde{M} > M$. *Suposem també que*

$$\varepsilon \leq \frac{\tilde{m}^2}{4\tilde{M}'} \ . \tag{4.16}$$

Definim

$$\tilde{F} = F - \frac{4M\varepsilon}{\tilde{m}}, \qquad \tilde{G} = \left(\tilde{\Omega}\right)^{-1}\left(\tilde{F}\right);$$

aleshores:

a) $\tilde{\Omega}$ *és bijectiva entre* $\tilde{G}$ *i* $\tilde{F}$.

b) $G - \dfrac{5M\varepsilon}{m\tilde{m}} \subset \tilde{G} \subset G - \dfrac{2\varepsilon}{\tilde{m}}$.

c) $\left|\left(\tilde{\Omega}\right)^{-1} - \Omega^{-1}\right|_{\tilde{F}} \leq \dfrac{\varepsilon}{m}$.

d) *Donat un subconjunt* $\tilde{F}' \subset \tilde{F}$ *i escrivint* $\tilde{G}' = \left(\tilde{\Omega}\right)^{-1}\left(\tilde{F}'\right)$, *hom té la inclusió* $\Omega\left(\tilde{G}'\right) \supset \tilde{F}' - \varepsilon$.

Prova Fixat $J \in \tilde{F}$, hem de provar que existeix un únic punt $I^* \in G$ solució de $\tilde{\Omega}(I^*) = J$. Per veure això, fem servir una modificació del mètode de Newton. Considerem

$$I^{(0)} = \Omega^{-1}(J) \in G - \frac{4\varepsilon}{\tilde{m}}$$

com a primera aproximació, i hem de veure que l'aplicació

$$\Lambda(I) = I - \left(\frac{\partial\tilde{\Omega}}{\partial I}\left(I^{(0)}\right)\right)^{-1}\left(\tilde{\Omega}(I) - J\right)$$

té un únic punt fix a G. Calculem primer la derivada d'aquesta aplicació:

$$\frac{\partial\Lambda}{\partial I}(I) = \mathrm{Id} - \left(\frac{\partial\tilde{\Omega}}{\partial I}\left(I^{(0)}\right)\right)^{-1}\frac{\partial\tilde{\Omega}}{\partial I}(I) = \left(\frac{\partial\tilde{\Omega}}{\partial I}\left(I^{(0)}\right)\right)^{-1}\left(\frac{\partial\tilde{\Omega}}{\partial I}\left(I^{(0)}\right) - \frac{\partial\tilde{\Omega}}{\partial I}(I)\right);$$

tenim

$$\left|\frac{\partial\Lambda}{\partial I}(I)\right| \leq \frac{\tilde{M}'}{\tilde{m}}\left|I - I^{(0)}\right| \qquad \text{si } \left|I - I^{(0)}\right| \leq \frac{4\varepsilon}{\tilde{m}}, \tag{4.17}$$

ja que tot el segment que uneix $I^{(0)}$ amb I és contingut a G. Començant amb $I^{(0)}$, considerem la successió definida per $I^{(k)} = \Lambda\left(I^{(k-1)}\right)$, $k \geq 1$. Comprovem per inducció que

$$\left|I^{(k)} - I^{(k-1)}\right| \leq \frac{\varepsilon}{2^{k-1}\tilde{m}}$$

i que $I^{(k)} \in G$ per a tot $k \geq 1$. En efecte, això és cert per a $k = 1$. Per a $k > 1$, la hipòtesi d'inducció implica que la distància de $I^{(0)}$ a $I^{(k-1)}$ o a $I^{(k-2)}$ és més petita que $2\varepsilon/\tilde{m}$.

El mateix és vàlid per a cada punt del segment que uneix $I^{(k-1)}$ amb $I^{(k-2)}$. Llavors, usant (4.17) i (4.16) obtenim

$$\left|I^{(k)}-I^{(k-1)}\right|=\left|\Lambda\left(I^{(k-1)}\right)-\Lambda\left(I^{(k-2)}\right)\right|\leq\frac{\tilde{M}'}{\tilde{m}}\cdot\frac{2\varepsilon}{\tilde{m}}\left|I^{(k-1)}-I^{(k-2)}\right|\leq\frac{1}{2}\left|I^{(k-1)}-I^{(k-2)}\right|.$$

Així, la successió $I^{(k)}$ convergeix, quan $k\to\infty$, cap a un punt fix de Λ, el qual anomenem I^*. Aquest punt satisfà

$$\left|I^*-I^{(0)}\right|\leq\frac{2\varepsilon}{\tilde{m}} \tag{4.18}$$

i, en conseqüència,

$$I^*\in G-\frac{2\varepsilon}{\tilde{m}}\,. \tag{4.19}$$

Llavors,

$$\Omega(I^*)\in F-\frac{2\varepsilon m}{\tilde{m}}\subset F-2\varepsilon. \tag{4.20}$$

El punt I^* és l'únic punt fix de Λ. En efecte, suposant que existeix un altre punt fix $I^{**}\neq I^*$, tenim $\tilde{\Omega}\,(I^*)=\tilde{\Omega}\,(I^{**})$ i així $|\Omega\,(I^*)-\Omega\,(I^{**})|\leq 2\varepsilon$. Llavors, tenim $|I^*-I^{**}|\leq 2\varepsilon/m$ ja que tot el segment que uneix $\Omega(I^*)$ amb $\Omega\,(I^{**})$ és contingut a F, per (4.20). Deduïm de (4.18) que la distància de $I^{(0)}$ a cada punt del segment que uneix I^* amb I^{**} és més petita o igual que $\frac{2\varepsilon}{\tilde{m}}+\frac{2\varepsilon}{m}<\frac{4\varepsilon}{\tilde{m}}$. Aplicant (4.17), arribem a una contradicció:

$$|I^*-I^{**}|=|\Lambda\,(I^*)-\Lambda\,(I^{**})|<\frac{\tilde{M}'}{\tilde{m}}\cdot\frac{4\varepsilon}{\tilde{m}}\,|I^*-I^{**}|\leq|I^*-I^{**}|\,.$$

Hem provat així l'apartat (a). A més, tenim $\tilde{G}\subset G-\dfrac{2\varepsilon}{\tilde{m}}$ per (4.19).

Per a (d), notem que $\tilde{\Omega}\left(G\setminus\tilde{G}'\right)\cap\tilde{F}'=\emptyset$. Aleshores, com que $\left|\tilde{\Omega}-\Omega\right|_G\leq\varepsilon$, tenim $\Omega\left(G\setminus\tilde{G}'\right)\cap\left(\tilde{F}'-\varepsilon\right)=\emptyset$, d'on deduïm la inclusió $\Omega\left(\tilde{G}'\right)\supset\tilde{F}'-\varepsilon$; hem provat així l'apartat (d). Quan $\tilde{F}'=\tilde{F}$, aquesta inclusió implica que $\tilde{G}\supset\Omega^{-1}\left(\tilde{F}-\varepsilon\right)\supset\Omega^{-1}\left(\tilde{F}\right)-\frac{\varepsilon}{m}$. Tenint en compte també que $\Omega^{-1}\left(\tilde{F}\right)\supset G-\frac{4M\varepsilon}{m\tilde{m}}$, deduïm la inclusió $\tilde{G}\supset G-\frac{5M\varepsilon}{m\tilde{m}}$, que completa la prova de l'apartat (b).

Finalment, comprovem (c). Fixat $J\in\tilde{F}$, escrivim $I=\Omega^{-1}(J)$, $\tilde{I}=\left(\tilde{\Omega}\right)^{-1}(J)$. Tenim $\left|\Omega\left(\tilde{I}\right)-\Omega(I)\right|=\left|\Omega\left(\tilde{I}\right)-\tilde{\Omega}\left(\tilde{I}\right)\right|\leq\varepsilon$, i per tant el segment que uneix $\Omega(I)$ amb $\Omega\left(\tilde{I}\right)$ és contingut a F, ja que $\Omega(I)\in\tilde{F}\subset F-\varepsilon$. Per tant, obtenim $\left|\tilde{I}-I\right|\leq\varepsilon/m$. □

4.3 Fites analítiques i geomètriques per a un pas

Donem tot seguit, a la proposició 19, fites quantitatives d'un pas concret del procés iteratiu, descrit a la secció 2.1, per al teorema KAM isoenergètic. Un resultat paral·lel per a la versió ordinària del teorema es troba dins la prova original obtinguda per Arnol'd [Ar1].

Descrivim breument el que anomenarem la "part analítica". Si el hamiltonià amb què comencem un pas del procés iteratiu és escrit en la forma $H(\phi, I) = h(I) + R(\phi, I)$, obtenim, a partir de la versió lineal del lema iteratiu (proposició 5), fites per al nou hamiltonià $\tilde{H}(\phi, I) = \tilde{h}(I) + \tilde{R}(\phi, I)$. Suposant que les freqüències inicials $\omega(I)$ són diofàntiques fins un ordre donat K, podem aplicar el lema iteratiu amb $\mathcal{M} = 0$. De fet, modifiquem lleument la condició diofàntica fins ordre K (vegeu la condició (4.21)) a la vista de les bandes ressonants introduïdes a (4.7). D'aquesta manera, obtenim les fites dels apartats (a–e) de la proposició 19, les quals podrien ésser establertes sense la hipòtesi de no degeneració isoenergètica.

D'altra banda, també és necessària una "part geomètrica". En efecte, suposant que ω és isoenergèticament no degenerada sobre el domini G, hem de garantir que la nova aplicació freqüència $\tilde{\omega} = \operatorname{grad} \tilde{h}$ també és isoenergèticament no degenerada, amb un nou paràmetre, per tal de permetre iteracions posteriors. Això ve donat per l'apartat (f) de la proposició 19. A més, si l'aplicació $\Omega_{\omega,h,a}$ introduïda a (4.10) és injectiva, veiem a l'apartat (g) que la nova aplicació $\Omega_{\tilde{\omega},\tilde{h},a}$ també és injectiva en un nou domini $\tilde{G} \subset G$.

Proposició 19 (Lema Inductiu) *Sigui $G \subset \mathbf{R}^n$ compacte, i $H(\phi, I) = h(I) + R(\phi, I)$ real analític sobre $\mathcal{D}_\rho(G)$. Escrivim $\omega = \operatorname{grad} h$, i suposem les fites:*

$$\left|\frac{\partial^2 h}{\partial I^2}\right|_{G,\rho_2} \leq M, \qquad |\omega|_G \leq L \qquad i \qquad |\omega_n(I)| \geq l \quad \forall I \in G.$$

Suposem també que ω és μ-isoenergèticament no degenerada sobre G. Siguin $\tilde{M} > M$, $\tilde{L} > L$, $\tilde{l} < l$ i $\tilde{\mu} < \mu$ donats. Fixada una constant $a \geq 2\tilde{M}/\tilde{l}^2$, suposem que l'aplicació $\Omega = \Omega_{\omega,h,a}$ és injectiva sobre G, i escrivim $F = \Omega(G)$. Donats $\tau > 0$, $0 < \beta \leq 1$ i K donats, amb K enter, suposem la condició de no ressonància:

$$F \cap \Delta\left(k, \frac{\beta}{|k|_1^\tau}\right) = \emptyset \qquad \forall k = \left(\overline{k}, k_n\right) \in \mathbf{Z}^n,\ |k|_1 \leq K,\ \overline{k} \neq 0. \tag{4.21}$$

Sigui $\delta < \rho$ donat, i escrivim $c = \delta_2/\delta_1$ i

$$A = 1 + \frac{2McK^\tau}{l\beta}\ .$$

Siguin $\varepsilon := \|DR\|_{G,\rho,c}$, $\eta := |R_0|_{G,\rho_2}$ i $\xi := \left|\frac{\partial R_0}{\partial I}\right|_{G,\rho_2}$ (on $R_0(I)$ és la mitjana angular de $R(\phi, I)$), i suposem:

$$\rho_2 \leq \frac{\tilde{l}\beta}{2\tilde{M}K^{\tau+1}}\ , \tag{4.22}$$

$$\varepsilon \leq \frac{l\beta\delta_2}{74AK^\tau}\,, \qquad \xi \leq \min\left(\left(\tilde{M}-M\right)\delta_2\,,\,\tilde{L}-L\,,\,l-\tilde{l}\,,\,\frac{(\mu-\tilde{\mu})\,\rho_2}{3}\right), \quad (4.23)$$

$$\eta' := \frac{L\xi}{2\tilde{M}} + \eta \leq \frac{\tilde{\mu}^2(\rho_2-\delta_2)}{32\tilde{L}^3a^2}\,. \quad (4.24)$$

Aleshores, existeix una transformació canònica real analítica $\Phi : \mathcal{D}_{\rho-\frac{\delta}{2}}(G) \longrightarrow \mathcal{D}_\rho(G)$ *i una descomposició* $H \circ \Phi = \tilde{h}(I) + \tilde{R}(\phi, I)$ *tal que, escrivint* $\tilde{\omega} = \operatorname{grad}\tilde{h}$ *i* $\tilde{\Omega} = \Omega_{\tilde{\omega},\tilde{h},a}$, *tenim:*

a) $|\tilde{\omega}-\omega|_{G,\rho_2} = \xi, \quad \left|\tilde{h}-h\right|_{G,\rho_2} = \eta.$

b) $\tilde{\varepsilon} := \left\|D\tilde{R}\right\|_{G,\rho-\delta,c} \leq e^{-K\delta_1}\cdot\varepsilon + \dfrac{14AK^\tau}{l\beta\delta_2}\cdot\varepsilon^2.$

c) $\tilde{\eta} := \left|\tilde{R}_0\right|_{G,\rho_2-\frac{\delta_2}{2}} \leq \dfrac{7AK^\tau}{c\,l\beta}\cdot\varepsilon^2.$

d) $|\Phi - \mathrm{id}|_{G,\rho-\frac{\delta}{2},c} \leq \dfrac{2AK^\tau}{l\beta}\cdot\varepsilon\,.$

e) $\left|\dfrac{\partial^2\tilde{h}}{\partial I^2}\right|_{G,\rho_2-\delta_2} \leq \tilde{M}, \quad |\tilde{\omega}|_G \leq \tilde{L} \quad i \quad |\tilde{\omega}_n(I)| \geq \tilde{l} \ \ \forall I \in G.$

f) $\tilde{\omega}$ *és* $\tilde{\mu}$*-isoenergèticament no degenerada sobre* G.

g) *Donat un subconjunt* $\tilde{F} \subset F - \dfrac{16L\tilde{L}a^2\eta'}{\tilde{\mu}}$ *i escrivint* $\tilde{G} = \left(\tilde{\Omega}\right)^{-1}\left(\tilde{F}\right)$, *l'aplicació* $\tilde{\Omega}$ *és bijectiva entre* $\tilde{G}$ *i* $\tilde{F}$, *i hom té les inclusions*

$$\tilde{G} \subset G - \frac{4\tilde{L}a\eta'}{\tilde{\mu}}\,, \qquad \Omega\left(\tilde{G}\right) \supset \tilde{F} - a\eta'.$$

A més, les fites següents són vàlides:

$$\left|\tilde{\Omega}-\Omega\right|_G \leq a\eta', \qquad \left|\left(\tilde{\Omega}\right)^{-1} - \Omega^{-1}\right|_{\tilde{F}} \leq \frac{2La\eta'}{\mu}\,.$$

Prova Per la condició (4.21) tenim, per a tot $I \in G$ i $0 < |k|_1 \leq K$, $\overline{k} \neq 0$,

$$|k\cdot\omega(I)| \geq \frac{\beta}{|k|_1^\tau}\,|\omega_n(I)| \geq \frac{l\beta}{K^\tau}\,.$$

Aquesta fita és vàlida també si $\overline{k} = 0$ ja que $|\omega_n(I)| \geq l$ i $\beta \leq 1$. Llavors, el conjunt $\omega(G)$ és $\frac{l\beta}{K^\tau}, K$-no ressonant mòdul 0. Aquest fet i les condicions (4.22) i (4.23) sobre ρ_2 i ε permeten d'aplicar el lema iteratiu (proposició 5) amb $Z = 0$, $\mathcal{M} = 0$ i $\alpha = \frac{l\beta}{K^\tau}$. Obtenim així la transformació canònica Φ i, d'acord amb (2.8–2.9), el nou hamiltonià pot ésser escrit en la forma $H \circ \Phi = \tilde{h} + \tilde{R}$, on $\tilde{h} = h + \tilde{Z}$, i tenim $\tilde{Z} = R_0$. Veiem fàcilment les fites de (a) usant que

$$|\tilde{\omega} - \omega|_{G,\rho_2} = \left|\frac{\partial R_0}{\partial I}\right|_{G,\rho_2} = \xi. \tag{4.25}$$

Les fites de (b) i (d) es dedueixen directament del lema iteratiu. La fita (c) prové de la desigualtat (2.35) dins el lema iteratiu. Les fites de l'apartat (e) provenen de (4.25), de la condició (4.23) sobre ξ i de la desigualtat de Cauchy

$$\left|\frac{\partial^2 \tilde{h}}{\partial I^2} - \frac{\partial^2 h}{\partial I^2}\right|_{G,\rho_2-\delta_2} \leq \frac{\xi}{\delta_2}\ .$$

Per provar (f), apliquem el lema 17, el qual ens diu que $\tilde{\omega}$ és μ'-isoenergèticament no degenerada sobre G, essent

$$\mu' = \mu - \frac{4\tilde{M}}{\tilde{l}}\,|\tilde{\omega} - \omega|_G - \left|\frac{\partial^2 \tilde{h}}{\partial I^2} - \frac{\partial^2 h}{\partial I^2}\right|_G \geq \mu - \frac{4\tilde{M}}{\tilde{l}} \cdot \xi - \frac{\xi}{\rho_2} \geq \mu - \frac{3\xi}{\rho_2} \geq \tilde{\mu}.$$

Hem usat (4.25), la condició (4.23) sobre ξ, la desigualtat

$$\left|\frac{\partial^2 \tilde{h}}{\partial I^2} - \frac{\partial^2 h}{\partial I^2}\right|_G \leq \frac{\xi}{\rho_2}$$

i la desigualtat $\rho_2 \leq \tilde{l}/2\tilde{M}$, que es dedueix de (4.22).

Abans de continuar, remarquem que les fites de les derivades de Ω donades al lema 16 són també vàlides per a $\tilde{\Omega}$, sobre G, si substituïm M, L, l, μ per $\tilde{M}$, $\tilde{L}$, $\tilde{l}$, $\tilde{\mu}$, respectivament. No necessitem canviar la constant a ja que estem suposant que $a \geq 2\tilde{M}/\tilde{l}^2$. Aplicarem ara el lema 18 però substituint els paràmetres M, m, $\tilde{M}$, $\tilde{m}$ pels valors que obtinguem aplicant el lema 16 a Ω i a $\tilde{\Omega}$. Primer trobem el valor que ha de substituir ε al lema 18, és a dir, una fita per a $\left|\tilde{\Omega} - \Omega\right|_G$. Tenim

$$\begin{aligned}
\left|\overline{\tilde{\Omega}}(I) - \overline{\Omega}(I)\right| &\leq \frac{|\tilde{\omega}_n(I) - \omega_n(I)| \cdot |\overline{\omega}(I)| + \left|\overline{\tilde{\omega}}(I) - \overline{\omega}(I)\right| \cdot |\omega_n(I)|}{|\omega_n(I)| \cdot |\tilde{\omega}_n(I)|} \\
&\leq \frac{|\tilde{\omega}(I) - \omega(I)| \cdot |\omega(I)|}{|\omega_n(I)| \cdot |\tilde{\omega}_n(I)|} \leq \frac{L\xi}{l\tilde{l}}\ , \qquad (4.26) \\
\left|\tilde{\Omega}_n(I) - \Omega_n(I)\right| &= a\left|\tilde{h}(I) - h(I)\right| \leq a\eta. \qquad (4.27)
\end{aligned}$$

Per tant,

$$\left|\tilde{\Omega} - \Omega\right|_G \leq \sqrt{\left(\frac{L\xi}{l\tilde{l}}\right)^2 + (a\eta)^2} \leq a\eta',$$

on hem usat la condició sobre a. Aleshores, podem aplicar el lema 18 si verifiquem la desigualtat següent (que substitueix (4.16) a l'esmentat lema):

$$a\eta' \leq \frac{\left(\frac{\tilde{\mu}}{2\tilde{L}}\right)^2}{4\left(\frac{\tilde{M}'}{2\tilde{M}} + \frac{3\tilde{M}}{\tilde{l}}\right)\tilde{L}a}\ , \tag{4.28}$$

havent tingut en compte la desigualtat

$$\left|\frac{\partial^3 \tilde{h}}{\partial I^3}\right|_G \leq \tilde{M}' := \frac{\tilde{M}}{\rho_2 - \delta_2} .$$

És fàcil de comprovar que la desigualtat (4.28) és garantida per la condició (4.24) sobre η'. Aleshores, prenent $\tilde{F}' = \tilde{F}$, $\tilde{G}' = \tilde{G}$ al lema 18, obtenim l'apartat (g). $\square$

4.4 Convergència de les iteracions i tors invariants

Donem en aquesta secció la prova del teorema KAM sota la condició de no degeneració isoenergètica. Remarquem però que l'esquema bàsic de la prova seria el mateix per a la no degeneració de Kolmogorov.

Per tal de fitar la mesura de les bandes ressonants que anem excloent al llarg de les iteracions, hem d'imposar una condició raonable sobre el domini. Donats $F \subset \mathbf{R}^n$ i $D > 0$, direm que F és un *D-conjunt* si, sempre que $0 \leq b_1 < b_2$,

$$\operatorname{mes}\left[(F - b_1) \setminus (F - b_2)\right] \leq D(b_2 - b_1).$$

Notem que la constant D pot ésser considerada una fita superior de l'"àrea" de la frontera de F, la qual ha d'ésser per força finita.

El lema tècnic que establim tot seguit ens dóna les fites de la mesura que hem de tenir en compte quan excloem de F bandes ressonants del tipus introduït a (4.7). Aclarim que és suficient excloure bandes ressonants corresponents a vectors enters $k = \left(\overline{k}, k_n\right) \in \mathbf{Z}^n$ amb $\overline{k} \neq 0$, ja que suposem que $\omega_n(I) \neq 0$ a tot el domini.

Lema 20 *Sigui $F \subset \mathbf{R}^n$ un D-conjunt, i escrivim $P = \operatorname{diam} F$. Donats $d \geq 0$, $\tau > 0$, $\beta \geq 0$ i $K \geq 0$, amb K enter, denotem*

$$F(d, \beta, K) := (F - d) \setminus \bigcup_{\substack{|k|_1 \leq K \\ \overline{k} \neq 0}} \Delta\left(k, \frac{\beta}{|k|_1^{\tau}}\right).$$

Aleshores:

a) *Donats $d' \geq d$, $\beta' \geq \beta$ i $K' \geq K$,*

$$\begin{aligned} &\operatorname{mes}\left[F(d, \beta, K) \setminus F(d', \beta', K')\right] \\ &\quad \leq D(d' - d) + 2P^{n-1}\left(\sum_{\substack{|k|_1 \leq K \\ \overline{k} \neq 0}} \frac{\beta' - \beta}{|k|_1^{\tau} \cdot \left|\overline{k}\right|} + \sum_{\substack{K < |k|_1 \leq K' \\ \overline{k} \neq 0}} \frac{\beta'}{|k|_1^{\tau} \cdot \left|\overline{k}\right|}\right). \end{aligned}$$

b) *Per a tot* $b \geq 0$,

$$\text{mes}\,[F(d,\beta,K) \setminus (F(d,\beta,K)-b)] \leq \left(D + 2^{n+1}P^{n-1}K^n\right) b\,.$$

Prova La fita de l'apartat (a) prové de la inclusió

$$\begin{aligned} F(d,\beta,K) \setminus F(d',\beta',K') \quad \subset \quad & ((F-d) \setminus (F-d')) \\ & \cup \bigcup_{\substack{|k|_1 \leq K \\ \overline{k} \neq 0}} \left((F-d) \cap \left(\Delta\left(k, \frac{\beta'}{|k|_1^\tau}\right) \setminus \Delta\left(k, \frac{\beta}{|k|_1^\tau}\right)\right)\right) \\ & \cup \bigcup_{\substack{K < |k|_1 \leq K' \\ \overline{k} \neq 0}} \left((F-d) \cap \Delta\left(k, \frac{\beta'}{|k|_1^\tau}\right)\right) \end{aligned}$$

i del fet que, per a $0 \leq \alpha \leq \alpha'$ i $\overline{k} \neq 0$,

$$\text{mes}\,[(F-d) \cap (\Delta(k,\alpha') \setminus \Delta(k,\alpha))] \leq P^{n-1} \cdot \frac{2(\alpha'-\alpha)}{\left|\overline{k}\right|}\,. \tag{4.29}$$

Referent a l'apartat (b), observem primer que, si $b \geq 0$,

$$F(d,\beta,K) - b \supset (F-(d+b)) \setminus \bigcup_{\substack{|k|_1 \leq K \\ \overline{k} \neq 0}} \Delta\left(k\,,\, \frac{\beta}{|k|_1^\tau} + \left|\overline{k}\right| b\right).$$

Llavors, procedint com a l'apartat (a) i aplicant (4.29) novament,

$$\text{mes}\,[(F(d,\beta,K) \setminus (F(d,\beta,K)-b)] \leq Db + \sum_{\substack{|k|_1 \leq K \\ \overline{k} \neq 0}} P^{n-1} \cdot 2b\,.$$

A partir del fet que el nombre de vectors enters $k \in \mathbf{Z}^n \setminus \{0\}$ amb $|k|_1 \leq K$ pot ésser fitat per $2^n K^n$, obtenim la fita de l'apartat (b). Val la pena de remarcar que aquesta fita expressa el "creixement" de la frontera del domini quan les ressonàncies en són excloses.

□

La nostra prova del teorema KAM isoenergètic consisteix, com la prova original de la versió ordinària feta per Arnol'd [Ar1], a iterar les fites del lema 19 amb els paràmetres adequats, que donen lloc a un procés ràpidament convergent (és a dir, més que lineal). Ara bé, contràriament a [Ar1], per a la prova del teorema KAM només necessitem mostrar explícitament que les restes decreixen de manera lineal. No obstant això, a la secció següent (sobre tors quasi-invariants) mostrem la convergència ràpida per tal d'obtenir fites exponencials d'estabilitat.

Sobre el paràmetre ν que apareix al teorema 21 que donem tot seguit, hem d'incloure un comentari. L'enunciat i la prova són lleugerament més complicats del que en principi caldria, degut a la presència d'aquest paràmetre. En realitat, aquesta llibertat en la tria de ν no és estrictament necessària però en farem ús a la secció següent, on veurem que un valor de ν petit dóna lloc a un procés gairebé quadràtic (amb exponent $2^{1-\nu}$) i, en conseqüència, a fites d'estabilitat millors. No és possible d'escollir $\nu = 0$, que donaria lloc a un procés exactament quadràtic.

Hem de dir que una prova del teorema KAM (en la versió ordinària) veient només que les restes decreixen de manera lineal ja fou obtinguda per J. Pöschel [Pos1]. D'altra banda, esmentem que a [Pos1] és provat que els tors KAM formen una família diferenciable en el sentit de Whitney, parametritzada per un conjunt cantorià. Vegeu a [BH] la versió isoenergètica d'aquest resultat, que s'obté a partir de la versió ordinària de [Pos1].

Teorema 21 (Teorema KAM Isoenergètic) *Sigui $\mathcal{G} \subset \mathbf{R}^n$ compacte, amb $n \geq 2$, i considerem el hamiltonià $H(\phi, I) = h(I) + f(\phi, I)$, real analític sobre $\mathcal{D}_\rho(\mathcal{G})$. Escrivim $\omega = \operatorname{grad} h$, i suposem les fites:*

$$\left|\frac{\partial^2 h}{\partial I^2}\right|_{\mathcal{G},\rho_2} \leq M, \qquad |\omega|_{\mathcal{G}} \leq L \qquad i \qquad |\omega_n(I)| \geq l \ \ \forall I \in \mathcal{G}.$$

Suposem també que ω és μ-isoenergèticament no degenerada sobre $\mathcal{G}$. Prenent $a = 16M/l^2$, suposem que l'aplicació $\Omega = \Omega_{\omega,h,a}$ és injectiva sobre $\mathcal{G}$, i que la imatge $F = \Omega(\mathcal{G})$ és un D-conjunt; escrivim $P = \operatorname{diam} F$. Siguin $\tau > n-1$, $\gamma > 0$ i $0 < \nu < 1$ donats, i suposem:

$$\varepsilon := \|f\|_{\mathcal{G},\rho} \ \leq \ \frac{\nu^2 l^6 \mu^2 \hat{\rho}^{2\tau+2}}{2^{4\tau+32} L^6 M^3} \cdot \gamma^2, \qquad \gamma \leq \min\left(\frac{8LM\rho_2}{\nu l \hat{\rho}^{\tau+1}}\,, \, l\right), \tag{4.30}$$

on escrivim $\hat{\rho} := \min\left(\dfrac{\nu\rho_1}{12(\tau+2)}\,, \, 1\right)$. Definim el conjunt

$$\widehat{G} = \widehat{G}_\gamma := \left\{ I \in \mathcal{G} - \frac{2\gamma}{\mu} \ : \ \omega(I) \text{ és } \tau, \gamma\text{-diofàntic} \right\}.$$

Aleshores, existeix una aplicació real contínua $\mathcal{T} : \mathcal{W}_{\frac{\rho_1}{4}}(\mathbf{T}^n) \times \widehat{G} \longrightarrow \mathcal{D}_\rho(\mathcal{G})$, analítica respecte les variables angulars, tal que:

a) *Per a tot $I \in \widehat{G}$, el conjunt $\mathcal{T}(\mathbf{T}^n \times \{I\})$ és un tor invariant de H, contingut a $\mathbf{T}^n \times \mathcal{G}$, el seu vector de freqüències és paral·lel a $\omega(I)$ i la seva energia és $h(I)$.*

b) *Escrivint*

$$\mathcal{T}(\phi, I) = (\phi + \mathcal{T}_\phi(\phi, I), I + \mathcal{T}_I(\phi, I)),$$

hom té les fites

$$|\mathcal{T}_\phi|_{\widehat{G},(\frac{\rho_1}{4},0),\infty} \leq \frac{2^{2\tau+15} L^2 M}{\nu^2 l^2 \hat{\rho}^{2\tau+1}} \cdot \frac{\varepsilon}{\gamma^2}\,, \qquad |\mathcal{T}_I|_{\widehat{G},(\frac{\rho_1}{4},0)} \leq \frac{2^{\tau+16} L^3 M}{\nu l^3 \mu \hat{\rho}^{\tau+1}} \cdot \frac{\varepsilon}{\gamma}\,.$$

c) mes $\left[(\mathbf{T}^n \times \mathcal{G}) \setminus \mathcal{T}\left(\mathbf{T}^n \times \widehat{G}\right)\right] \le (C_1 D + C_2 P^{n-1})\,\gamma$, *on* C_1, C_2 *són constants que només depenen de* n, τ, $\hat{\rho}$, M, L, l, μ.

Prova

A. Tria dels paràmetres. Farem servir iterativament la proposició 19, escollint a cada pas les constants adequades. Per aquesta raó, comencem introduint successions de paràmetres que substituiran les constants de la proposició esmentada. Per a $q \ge 0$, definim

$$M_q = \left(2 - \frac{1}{2^q}\right) M, \quad L_q = \left(2 - \frac{1}{2^q}\right) L, \quad l_q = \left(1 + \frac{1}{2^q}\right) \frac{l}{2}\,, \quad \mu_q = \left(1 + \frac{1}{2^q}\right) \frac{\mu}{2}\,.$$

Notem que M_q, L_q creixen de M, l cap a $2M$, $2L$, respectivament, quan $q \to \infty$, i que l_q, μ_q decreixen de l, μ cap a $l/2$, $\mu/2$. Definim també

$$K_0 = 0, \qquad K_q = K \cdot 2^{q-1}, \ q \ge 1,$$

essent $K \ge 1$ un enter que fixarem més avall. A més, definim

$$\beta := \frac{\gamma}{L} \ \le \ 1$$

i, per a $q \ge 0$, considerem $\rho^{(q)} = \left(\rho_1^{(q)}, \rho_2^{(q)}\right)$ amb

$$\rho_1^{(q)} = \left(1 + \frac{1}{2^{\nu q}}\right) \frac{\rho_1}{4}\,, \qquad \rho_2^{(q)} = \frac{\nu l \beta}{32 M K_{q+1}^{\tau+1}}\,.$$

Notem que $\rho_1^{(q)}$ decreix de $\rho_1/2$ cap a $\rho_1/4$, i que $\rho_2^{(q)}$ decreix cap a 0. També escrivim

$$\delta_1^{(q)} = \rho_1^{(q-1)} - \rho_1^{(q)}, \qquad \delta_2^{(q)} = \rho_2^{(q-1)} - \rho_2^{(q)}, \qquad c_q = \frac{\delta_2^{(q)}}{\delta_1^{(q)}}\,.$$

Tenint en compte que les desigualtats $\frac{\nu}{2} \le 1 - \frac{1}{2^\nu} \le \nu$ i $1 - \frac{1}{2^{\tau+1}} \ge \frac{1}{2}$, són vàlides per a $0 < \nu < 1$ i $\tau > 0$ respectivament, és fàcil de veure que, per a tot $q \ge 1$,

$$\frac{\nu \rho_1}{8 \cdot 2^{\nu(q-1)}} \le \delta_1^{(q)} \le \frac{\nu \rho_1}{4 \cdot 2^{\nu(q-1)}}\,, \qquad \delta_2^{(q)} \ge \frac{\nu l \beta}{64 M K_q^{\tau+1}}\,, \tag{4.31}$$

$$\frac{l\beta \cdot 2^{\nu(q-1)}}{16 M K_q^{\tau+1} \rho_1} \le c_q \le \frac{l\beta \cdot 2^{\nu(q-1)}}{4 M K_q^{\tau+1} \rho_1}\,. \tag{4.32}$$

Finalment, definim les successions

$$\beta_q = \left(1 - \frac{1}{2^{\nu q}}\right) \beta, \qquad \beta_q' = \frac{\beta_q + \beta_{q+1}}{2}\,,$$

totes dues creixents amb límit β. També és fàcil de comprovar que $\beta_q' \ge \nu\beta/4$ per a tot $q \ge 0$.

Escollim K com el mínim enter tal que $K\hat{\rho} \geq 1$. Llavors tenim $K \leq 2/\hat{\rho}$. Usant aquesta desigualtat, la nostra tria $\beta = \gamma/L$ i la desigualtat $\hat{\rho} \leq \nu\rho_1$, deduïm de les condicions (4.30) les desigualtats

$$\varepsilon \leq \min\left(\frac{\nu^3 l^2 \rho_1 \beta^2}{2^{2\tau+20} M K^{2\tau+1}}, \frac{\nu^2 l^6 \mu^2 \beta^2}{2^{\tau+30} L^4 M^3 K^{2\tau+2}}\right), \qquad \beta \leq \frac{8MK^{\tau+1}\rho_2}{\nu l}. \tag{4.33}$$

B. Inducció. Començant amb $G_0 = \mathcal{G}$, construirem ara una successió decreixent de compactes $G_q \subset \mathcal{G}$ i una successió de transformacions canòniques reals analítiques $\Phi^{(q)} : \mathcal{D}_{\rho^{(q)}}(G_q) \longrightarrow \mathcal{D}_{\rho^{(q-1)}}(G_{q-1})$, $q \geq 1$. Denotant $\Psi^{(q)} = \Phi^{(1)} \circ \cdots \circ \Phi^{(q)}$, escrivim els successius hamiltonians transformats en la forma $H^{(q)} = H \circ \Psi^{(q)} = h^{(q)}(I) + R^{(q)}(\phi, I)$. A més, escrivim $\omega^{(q)} = \operatorname{grad} h^{(q)}$ i $\Omega^{(q)} = \Omega_{\omega^{(q)},h^{(q)},a}$. Provarem que els enunciats següents són vàlids per a tot $q \geq 0$:

1_q) $\varepsilon_q := \left\|DR^{(q)}\right\|_{G_q,\rho^{(q)},c_{q+1}} \leq \dfrac{8\varepsilon}{\nu\rho_1 \cdot 2^{(2\tau+2)q}}$.

2_q) $\eta_q := \left|R_0^{(q)}\right|_{G_q,\rho_2^{(q)}} \leq \dfrac{\varepsilon}{2^{(2\tau+3)q}}$, $\quad \xi_q := \left|\dfrac{\partial R_0^{(q)}}{\partial I}\right|_{G_q,\rho_2^{(q)}} \leq \dfrac{2^6 MK^{\tau+1}\varepsilon}{\nu l\beta \cdot 2^{(\tau+2)q}}$.

3_q) $\left|\dfrac{\partial^2 h^{(q)}}{\partial I^2}\right|_{G_q,\rho_2^{(q)}} \leq M_q$, $\quad \left|\omega^{(q)}\right|_{G_q} \leq L_q \quad$ i $\quad \left|\omega^{(q)}(I)\right| \geq l_q \ \ \forall I \in G_q$.

4_q) $\omega^{(q)}$ és μ_q-isoenergèticament no degenerada sobre G_q.

5_q) $\Omega^{(q)}$ és injectiva sobre G_q, i $\Omega^{(q)}(G_q) = F_q$, on definim

$$F_q := (F - \beta_q) \setminus \bigcup_{\substack{|k|_1 \leq K_q \\ k \neq 0}} \Delta\left(k, \frac{\beta_q}{|k|_1^\tau}\right). \tag{4.34}$$

Procedim per inducció. Per a $q = 0$, triem $G_0 = \mathcal{G}$, $h^{(0)} = h$, $R^{(0)} = f$. Notem que

$$\rho_1^{(0)} = \frac{\rho_1}{2}, \qquad \rho_2^{(0)} = \frac{\nu l\beta}{32MK^{\tau+1}} \leq \frac{\rho_2}{2}$$

per (4.33). Aleshores,

$$\varepsilon_0 = \|Df\|_{\mathcal{G},\rho^{(0)},c_1} \leq \frac{\varepsilon}{\delta_1^{(1)}} \leq \frac{8\varepsilon}{\nu\rho_1}, \tag{4.35}$$

és a dir (1_0). La primera fita de (2_0) és òbvia, i la segona prové de la desigualtat de Cauchy

$$\xi_0 \leq \frac{2}{\rho_2}\left|R_0^{(0)}\right|_{\mathcal{G},\rho_2} \leq \frac{2\varepsilon}{\rho_2} \leq \frac{\varepsilon}{\rho_2^{(0)}}.$$

Els altres enunciats (3_0–5_0) són clars.

Per a $q \geq 1$, suposem que els enunciats són certs per a $q-1$ i els provarem per a q. Amb aquesta intenció, aplicarem la proposició 19 al hamiltonià $H^{(q-1)} = h^{(q-1)} + R^{(q-1)}$, amb K_q en comptes de K. No obstant, per tal de satisfer la condició (4.21), hem de substituir els dominis G_{q-1} i F_{q-1} per subconjunts adequats en els quals les ressonàncies d'ordre entre $K_{q-1}+1$ i K_q hagin estat excloses. Concretament, definim

$$F'_{q-1} := (F - \beta_{q-1}) \setminus \bigcup_{\substack{|k|_1 \leq K_q \\ k \neq 0}} \Delta\left(k, \frac{\beta'_{q-1}}{|k|_1^\tau}\right), \qquad G'_{q-1} := \left(\Omega^{(q-1)}\right)^{-1}\left(F'_{q-1}\right). \tag{4.36}$$

Llavors la condició de no ressonància (4.21) és acomplerta posant F'_{q-1}, β'_{q-1} i K_q en els llocs de F, β i K, respectivament (prenent β'_{q-1} en comptes de β_{q-1}, evitem haver d'aplicar la proposició 19 amb $\beta_0 = 0$ quan $q=1$). Els altres paràmetres que intervenen a la proposició 19 són M_{q-1}, L_{q-1}, l_{q-1}, μ_{q-1}, $\rho^{(q-1)}$, $\delta^{(q)}$, c_q, M_q, L_q, l_q, μ_q, que fan els papers de M, L, l, μ, ρ, δ, c, $\tilde{M}$, $\tilde{L}$, $\tilde{l}$, $\tilde{\mu}$, respectivament, i

$$a = \frac{16M}{l^2} \geq \frac{2M_q}{l_q^2} .$$

És clar que la condició (4.22) sobre $\rho_2^{(q-1)}$ és acomplerta amb la nostra tria dels paràmetres. Pel que respecta a la condició (4.23) sobre ε_{q-1}, observem en primer lloc que, per (4.32) i per la nostra tria de K,

$$A_q := 1 + \frac{2M_{q-1}c_q K_q^\tau}{l_{q-1}\beta'_{q-1}} \leq 1 + \frac{32M}{\nu l\beta} \cdot \frac{l\beta}{4MK\rho_1} = 1 + \frac{8}{\nu K \rho_1} \leq 2.$$

Llavors, haurem vist que es satisfà la condició (4.23) si comprovem la desigualtat

$$\varepsilon_{q-1} \leq \frac{l_{q-1}\beta'_{q-1}\delta_2^{(q)}}{148K_q^\tau} .$$

En efecte, recordant les definicions dels paràmetres i aplicant (1_{q-1}) i (4.31), és suficent veure que

$$\frac{8\varepsilon}{\nu\rho_1} \leq \frac{\nu l\beta}{2^{11}K^\tau} \cdot \frac{\nu l\beta}{64MK^{\tau+1}} ,$$

cosa que es dedueix de (4.33). Verifiquem ara la segona condició de (4.23), és a dir,

$$\xi_{q-1} \leq \min\left((M_q - M_{q-1})\delta_2^{(q)} , L_q - L_{q-1} , l_{q-1} - l_q , \frac{(\mu_{q-1} - \mu_q)\rho_2^{(q-1)}}{3}\right).$$

Per (2_{q-1}) i (4.31), aquesta condició és satisfeta, ja que podem deduir de (4.33) la desigualtat

$$\frac{2^6 MK^{\tau+1}\varepsilon}{\nu l\beta} \leq \min\left(\frac{M}{2} \cdot \frac{\nu l\beta}{64MK^{\tau+1}} , \frac{L}{2} , \frac{l}{4} , \frac{\mu}{12} \cdot \frac{\nu l\beta}{32MK^{\tau+1}}\right).$$

Finalment, hem de comprovar la condició (4.24):

$$\eta'_{q-1} := \frac{L_{q-1}\xi_{q-1}}{2M_q} + \eta_{q-1} \ \leq \ \frac{\mu_q^2 \rho_2^{(q)}}{32 L_q^3 a^2} \ . \tag{4.37}$$

Per (2_{q-1}), tenim la fita

$$\eta'_{q-1} \leq \frac{L}{2M} \cdot \frac{2^6 M K^{\tau+1} \varepsilon}{\nu l \beta \cdot 2^{(\tau+2)(q-1)}} + \frac{\varepsilon}{2^{(2\tau+3)(q-1)}} \leq \frac{2^6 L K^{\tau+1} \varepsilon}{\nu l \beta \cdot 2^{(\tau+2)(q-1)}} \ . \tag{4.38}$$

Tenint en compte el valor de a, la desigualtat (4.37) és vàlida, ja que

$$\frac{2^6 L K^{\tau+1} \varepsilon}{\nu l \beta} \leq \frac{l^4 \mu^2}{2^{18} L^3 M^2} \cdot \frac{\nu l \beta}{2^{\tau+6} M K^{\tau+1}} \ ,$$

cosa que deduïm de (4.33).

Aplicant la proposició 19 amb els paràmetres considerats més amunt, obtenim una transformació canònica $\Phi^{(q)}$ i un nou hamiltonià $H^{(q)} = h^{(q)} + R^{(q)}$. Escollirem el nou domini $G_q \subset G'_{q-1}$ més avall. En primer lloc, provem $(1_q$–$4_q)$. Per la fita (b) de la proposició 19 i la desigualtat $c_{q+1} \leq c_q$,

$$\varepsilon_q \leq \left\| DR^{(q)} \right\|_{G_q, \rho^{(q)}, c_q} \leq e^{-K_q \delta_1^{(q)}} \cdot \varepsilon_{q-1} + \frac{14 A_q K_q^\tau}{l_{q-1} \beta'_{q-1} \delta_2^{(q)}} \cdot \varepsilon_{q-1}^2 \ . \tag{4.39}$$

Fitem els termes d'aquesta suma. Per (4.31) i la desigualtat $K\hat{\rho} \geq 1$,

$$K_q \delta_1^{(q)} \geq \frac{\nu K \rho_1}{8} \cdot 2^{(1-\nu)(q-1)} \geq (2\tau + 3) \ln 2, \tag{4.40}$$

i per tant

$$e^{-K_q \delta_1^{(q)}} \leq \frac{1}{2^{2\tau+3}} \ .$$

A més, aplicant (4.31), (1_{q-1}) i (4.33),

$$\frac{14 A_q K_q^\tau}{l_{q-1} \beta'_{q-1} \delta_2^{(q)}} \cdot \varepsilon_{q-1} \leq \frac{2^8 K_q^\tau}{\nu l \beta} \cdot \frac{64 M K_q^{\tau+1}}{\nu l \beta} \cdot \frac{8\varepsilon}{\nu \rho_1 \cdot 2^{(2\tau+2)(q-1)}} \leq \frac{1}{2^{2\tau+3} \cdot 2^{q-1}} \ . \tag{4.41}$$

Llavors, deduïm de (4.39) la desigualtat

$$\varepsilon_q \leq \frac{\varepsilon_{q-1}}{2^{2\tau+2}} \ ,$$

la qual ens dóna (1_q). Per a (2_q), usem l'apartat (c) de la proposició 19. Escrivint $\sigma_2^{(q)} = \rho_2^{(q-1)} - \delta_2^{(q)}/2$, tenim:

$$\eta_q \leq \left| R_0^{(q)} \right|_{G_q, \sigma_2^{(q)}} \leq \frac{7 A_q K_q^\tau}{c_q l_{q-1} \beta'_{q-1}} \cdot \varepsilon_{q-1}^2 \leq \frac{\delta_1^{(q)} \varepsilon_{q-1}}{2} \cdot \frac{1}{2^{2\tau+3} \cdot 2^{q-1}} \leq \frac{\varepsilon}{2^{(2\tau+3)q}} \ , \tag{4.42}$$

on hem usat les desigualtats (4.41), (4.31) i (1_{q-1}). Obtenim l'altra fita de (2_q) fent servir la desigualtat de Cauchy i (4.31):

$$\xi_q \leq \frac{2}{\delta_2^{(q)}} \left| R_0^{(q)} \right|_{G_q, \sigma_2^{(q)}} \leq \frac{2}{\delta_2^{(q)}} \cdot \frac{\varepsilon}{2^{(2\tau+3)q}} \; .$$

Els enunciats $(3_q$–$4_q)$ són clars a partir de la proposició 19. Per a (5_q), apliquem l'apartat (g) de la proposició 19 al subconjunt F_q. Hem de comprovar que

$$F_q \subset F'_{q-1} - \frac{16 L_{q-1} L_q a^2 \eta'_{q-1}}{\mu_q} \; . \tag{4.43}$$

Definint

$$d_q := \frac{\beta_q - \beta_{q-1}}{2 K_q^{\tau+1}}$$

i tenint presents (4.36) i (4.34), resulta que

$$F'_{q-1} - d_q \supset (F - (\beta_{q-1} + d_q)) \setminus \bigcup_{\substack{|k|_1 \leq K_q \\ \overline{k} \neq 0}} \Delta \left(k \, , \, \frac{\beta'_{q-1}}{|k|_1^\tau} + \left|\overline{k}\right| d_q \right) \supset F_q \, , \tag{4.44}$$

on hem usat les desigualtats

$$\beta_{q-1} + d_q \leq \beta_q \, , \qquad \frac{\beta'_{q-1}}{|k|_1^\tau} + \left|\overline{k}\right| d_q \leq \frac{\beta_q}{|k|_1^\tau} \; .$$

A més, aplicant la fita (4.38) per a η'_{q-1} i (4.33),

$$\frac{16 L_{q-1} L_q a^2 \eta'_{q-1}}{\mu_q} \leq \frac{2^{15} L^2 M^2}{l^4 \mu} \cdot \frac{2^6 L K^{\tau+1} \varepsilon}{\nu l \beta \cdot 2^{(\tau+2)(q-1)}} \leq \frac{\nu \beta}{4 \cdot 2^{\nu(q-1)} K_q^{\tau+1}} \leq d_q \, .$$

Aquesta fita i la inclusió (4.44) impliquen (4.43). Així, l'apartat (g) de la proposició 19 ens diu que $\Omega^{(q)}$ és injectiva sobre $G_q := \left(\Omega^{(q)}\right)^{-1}(F_q)$. Això ens dóna (5_q), amb la qual cosa completem la inducció.

C. Convergència dels difeomorfismes. Veurem ara la convergència de les successives aplicacions $\Omega^{(q)} : G_q \longrightarrow F_q$. Aplicant novament l'apartat (g) de la proposició 19, obtenim per a $q \geq 1$ les fites

$$\left| \Omega^{(q)} - \Omega^{(q-1)} \right|_{G_q} \leq a \eta'_{q-1} \, , \qquad \left| \left(\Omega^{(q)}\right)^{-1} - \left(\Omega^{(q-1)}\right)^{-1} \right|_{F_q} \leq \frac{2 L_{q-1} a \eta'_{q-1}}{\mu_{q-1}} \; . \tag{4.45}$$

Aleshores, per la fita (4.38) sobre η'_{q-1}, les successions $\Omega^{(q)}$ i $\left(\Omega^{(q)}\right)^{-1}$ convergeixen respectivament a aplicacions que denotarem Ω^* i Υ, definides sobre els conjunts

$$G^* := \bigcap_{q \geq 0} G_q , \qquad F^* := \bigcap_{q \geq 0} F_q = (F - \beta) \setminus \bigcup_{\substack{k \in \mathbf{Z}^n \\ \overline{k} \neq 0}} \Delta \left(k, \frac{\beta}{|k|_1^\tau} \right) . \tag{4.46}$$

Notem que hem usat la compacitat de F^* en establir la segona igualtat. A partir de (4.45) deduïm:

$$\left|\Omega^* - \Omega^{(q)}\right|_{G^*} \le \sum_{s\ge q} a\eta'_s\,, \qquad \left|\Upsilon - \left(\Omega^{(q)}\right)^{-1}\right|_{F^*} \le \sum_{s\ge q} \frac{2L_s a\eta'_s}{\mu_s}\,. \tag{4.47}$$

Notem també que, per a tot q,

$$G_q \subset G_{q-1} - \frac{4L_q a\eta'_{q-1}}{\mu_q}\,, \qquad F_q \subset F_{q-1} - \frac{16L_{q-1}L_q a^2\eta'_{q-1}}{\mu_q}\,.$$

Iterant aquestes inclusions en deduïm les següents:

$$G^* \subset G_q - \sum_{s\ge q} \frac{4L_{s+1} a\eta'_s}{\mu_{s+1}}\,, \qquad F^* \subset F_q - \sum_{s\ge q} \frac{16L_s L_{s+1} a^2\eta'_s}{\mu_{s+1}}\,, \tag{4.48}$$

les quals usarem més avall. Veurem a continuació que Ω^* és injectiva sobre G^* i que $\Omega^*(G^*) = F^*$. Donat $I \in G^*$, tenim $\Omega^{(q)}(I) \in F_q$ per a tot q. Així $\Omega^*(I) \in F^*$, i deduïm que $\Omega^*(G^*) \subset F^*$. Anàlogament, tenim $\Upsilon(F^*) \subset G^*$. Provem a més a més que $\Upsilon(\Omega^*(I)) = I$ per a tot $I \in G^*$. En efecte, per a cada q,

$$\begin{aligned}
&|\Upsilon(\Omega^*(I)) - I| \\
&\quad\le \left|\Upsilon(\Omega^*(I)) - \left(\Omega^{(q)}\right)^{-1}(\Omega^*(I))\right| + \left|\left(\Omega^{(q)}\right)^{-1}(\Omega^*(I)) - \left(\Omega^{(q)}\right)^{-1}\left(\Omega^{(q)}(I)\right)\right| \\
&\quad\le \left|\Upsilon - \left(\Omega^{(q)}\right)^{-1}\right|_{F^*} + \frac{2L_q}{\mu_q}\left|\Omega^* - \Omega^{(q)}\right|_{G^*}\,.
\end{aligned} \tag{4.49}$$

Per a la fita del segon terme, hem usat els dos fets següents: en primer lloc, l'apartat (b) del lema 16 ens dóna la fita

$$\left|\frac{\partial\Omega^{(q)}}{\partial I}(I')\,v\right| \ge \frac{\mu_q}{2L_q}\,|v| \qquad \forall v \in \mathbf{R}^n, \quad \forall I' \in G_q\,;$$

d'altra banda, per (4.47–4.48) el segment que uneix $\Omega^{(q)}(I)$ i $\Omega^*(I)$ és contingut a F_q. Llavors, com que la fita obtinguda a (4.49) tendeix a zero quan $q \to \infty$, deduïm que $\Upsilon(\Omega^*(I)) = I$, i per tant Ω^* és injectiva. Un argument simètric permet de provar que $\Omega^*(\Upsilon(J)) = J$ per a tot $J \in F^*$. Això implica que $\Omega^*(G^*) \supset F^*$. Així, l'aplicació Ω^* és injectiva i $\Omega^*(G^*) = F^*$.

Veiem també, a partir de la proposició 19, que

$$\left|\omega^{(q)} - \omega^{(q-1)}\right|_{G_q,\rho_2^{(q-1)}} \le \xi_{q-1}, \qquad \left|h^{(q)} - h^{(q-1)}\right|_{G_q,\rho_2^{(q-1)}} \le \eta_{q-1}.$$

Això implica que les successions $\omega^{(q)}$ i $h^{(q)}$ convergeixen a aplicacions contínues ω^* i h^*, respectivament. Notem també que, per a $I \in G^*$,

$$\Omega^*(I) = \left(\frac{\overline{\omega^*}(I)}{\omega_n^*(I)}\,,\, a\,h^*(I)\right). \tag{4.50}$$

A partir de (2_q) deduïm, per a tot $q \geq 0$, la fita següent, que usarem més endavant:

$$\left|\omega^* - \omega^{(q)}\right|_{G^*} \leq \sum_{s \geq q} \xi_s \leq \frac{2^7 M K^{\tau+1}\,\varepsilon}{\nu l \beta \cdot 2^{(\tau+2)q}} \;. \tag{4.51}$$

D. Convergència de les transformacions canòniques. A continuació fitem la distància de les transformacions $\Psi^{(q)}$ a l'aplicació identitat. Aplicant l'apartat (d) de la proposició 19 i usant (1_{q-1}), (4.31) i (4.33), hom dedueix que, per a cada $q \geq 1$,

$$\begin{aligned} \left|\Phi^{(q)} - \mathrm{id}\right|_{G_q,\sigma^{(q)},c_q} &\leq \frac{2 A_q K_q^\tau}{l_{q-1}\beta'_{q-1}} \cdot \varepsilon_{q-1} \leq \frac{2^5 K_q^\tau}{\nu l \beta} \cdot \frac{8\varepsilon}{\nu\rho_1 \cdot 2^{(2\tau+2)(q-1)}} \\ &= \frac{2^8 K^\tau\,\varepsilon}{\nu^2 l \rho_1 \beta \cdot 2^{(\tau+2)(q-1)}} \leq \frac{\delta_2^{(q)}}{8 \cdot 2^{q-1}} \;, \end{aligned} \tag{4.52}$$

on hem escrit $\sigma^{(q)} = \rho^{(q-1)} - \delta_2^{(q)}/2$. Llavors, aplicant la propietat (2.27) de la secció 2.2,

$$\left|D\Phi^{(q)} - \mathrm{Id}\right|_{G_q,\rho^{(q)},c_q} \leq \frac{2}{\delta_2^{(q)}} \left|\Phi^{(q)} - \mathrm{id}\right|_{G_q,\sigma^{(q)},c_q} \leq \frac{1}{4 \cdot 2^{q-1}} \;.$$

Siguin x, y tals que el segment que els uneix és contingut a $\mathcal{D}_{\rho^{(q)}}(G_q)$. El teorema del valor mitjà ens dóna la fita:

$$\left|\Phi^{(q)}(x) - \Phi^{(q)}(y)\right|_{c_q} \leq \left|D\Phi^{(q)}\right|_{G_q,\rho^{(q)},c_q} \cdot |x-y|_{c_q} \,.$$

Per (4.52),

$$\left|\Phi^{(q)}(x) - x\right|_{c_q} \leq \delta_2^{(q)}, \qquad \left|\Phi^{(q)}(y) - y\right|_{c_q} \leq \delta_2^{(q)}.$$

Llavors, com que $\rho^{(q)} + \delta^{(q)} = \rho^{(q-1)}$, resulta que el segment que uneix $\Phi^{(q)}(x)$ i $\Phi^{(q)}(y)$ és contingut a $\mathcal{D}_{\rho^{(q-1)}}(G_{q-1})$. Per tant,

$$\begin{aligned} &\left|\Phi^{(q-1)}\left(\Phi^{(q)}(x)\right) - \Phi^{(q-1)}\left(\Phi^{(q)}(y)\right)\right|_{c_{q-1}} \\ &\quad\leq \left|D\Phi^{(q-1)}\right|_{G_{q-1},\rho^{(q-1)},c_{q-1}} \cdot \left|\Phi^{(q)}(x) - \Phi^{(q)}(y)\right|_{c_{q-1}} \\ &\quad\leq 2^{\tau+1-\nu} \left|D\Phi^{(q-1)}\right|_{G_{q-1},\rho^{(q-1)},c_{q-1}} \cdot \left|\Phi^{(q)}(x) - \Phi^{(q)}(y)\right|_{c_q} \;, \end{aligned}$$

on hem usat que $c_{q-1}/c_q = 2^{\tau+1-\nu}$. Iterant aquest argument i reunint les successives fites obtingudes, arribem a la fita

$$\begin{aligned} &\left|\Psi^{(q)}(x) - \Psi^{(q)}(y)\right|_{c_1} \\ &\quad\leq 2^{(\tau+1-\nu)(q-1)} \left|D\Phi^{(1)}\right|_{G_1,\rho^{(1)},c_1} \cdot \left|D\Phi^{(2)}\right|_{G_2,\rho^{(2)},c_2} \cdots \left|D\Phi^{(q)}\right|_{G_q,\rho^{(q)},c_q} \cdot |x-y|_{c_q} \\ &\quad\leq 2^{(\tau+1-\nu)(q-1)} \left(1 + \frac{1}{4}\right)\left(1 + \frac{1}{4\cdot 2}\right) \cdots \left(1 + \frac{1}{4 \cdot 2^{q-1}}\right) \cdot |x-y|_{c_q} \\ &\quad\leq 2^{(\tau+1-\nu)(q-1)} \cdot e^{1/2}\,|x-y|_{c_q} \leq 2^{(\tau+1-\nu)(q-1)} \cdot 2\,|x-y|_{c_q} \,, \end{aligned} \tag{4.53}$$

la qual és vàlida per a $q \geq 1$, i per a cada x, y tals que el segment que els uneix és contingut a $\mathcal{D}_{\rho^{(q)}}(G_q)$. Ara, donat $q \geq 2$ i $x \in \mathcal{D}_{\rho^{(q)}}(G_q)$, escrivim $y = \Phi^{(q)}(x)$ i apliquem (4.53) amb $q-1$ en comptes de q. Obtenim:

$$\begin{aligned} \left|\Psi^{(q)}(x) - \Psi^{(q-1)}(x)\right|_{c_1} &= \left|\Psi^{(q-1)}\left(\Phi^{(q)}(x)\right) - \Psi^{(q-1)}(x)\right|_{c_1} \\ &\leq 2^{(\tau+1-\nu)(q-2)} \cdot 2\left|\Phi^{(q)}(x) - x\right|_{c_{q-1}} \\ &\leq 2^{(\tau+1-\nu)(q-1)} \cdot 2\left|\Phi^{(q)}(x) - x\right|_{c_q} \\ &\leq \frac{2^9 K^\tau \varepsilon}{\nu^2 l \rho_1 \beta \cdot 2^{(1+\nu)(q-1)}}\ , \end{aligned} \tag{4.54}$$

on hem usat (4.52). Aquesta fita és vàlida per a $q \geq 2$, però hom veu fàcilment a partir de (4.52) que també és vàlida per a $q = 1$ (posant $\Psi^{(0)} = \mathrm{id}$). Clarament, la fita (4.54) implica que les successives transformacions $\Psi^{(q)}$ convergeixen cap a una aplicació

$$\Psi^* : \mathcal{D}_{\left(\frac{\rho_1}{4},0\right)}(G^*) = \mathcal{W}_{\frac{\rho_1}{4}}(\mathbf{T}^n) \times G^* \longrightarrow \mathcal{D}_\rho(G)$$

i deduïm, per a tot $q \geq 0$, la fita

$$\left|\Psi^* - \Psi^{(q)}\right|_{G^*,\left(\frac{\rho_1}{4},0\right),c_1} \leq \frac{2^{10} K^\tau \varepsilon}{\nu^2 l \rho_1 \beta \cdot 2^{(1+\nu)q}}\ . \tag{4.55}$$

A més, portant al límit l'equació $H \circ \Psi^{(q)} = h^{(q)} + R^{(q)}$, veiem que $H \circ \Psi^* = h^*(I)$ sobre $\mathcal{D}_{\left(\frac{\rho_1}{4},0\right)}(G^*)$.

E. Fites d'estabilitat. Ara veurem que, quan $q \to \infty$, les trajectòries associades al hamiltonià transformat $H^{(q)} = h^{(q)} + R^{(q)}$ i les trajectòries quasiperiòdiques de $h^{(q)}$ esdevenen cada cop més properes. Escrivim $x^{(q)}(t) = \left(\phi^{(q)}(t), I^{(q)}(t)\right)$ la trajectòria de $H^{(q)}$ que correspon a una condició inicial donada $x^{(q)}(0) = x_0^* = (\phi_0^*, I_0^*) \in \mathbf{T}^n \times G_q$, i denotem $\hat{x}^{(q)}(t) := \left(\hat{\phi}^{(q)}(t), I_0^*\right) = \left(\phi_0^* + \omega^{(q)}(I_0^*)\, t, I_0^*\right)$ la trajectòria corresponent de la part integrable $h^{(q)}$. És clar que $\hat{x}^{(q)}(t)$ és definida per a tot $t \in \mathbf{R}$. De manera semblant al lema 9, definim

$$T_q := \inf\left\{t > 0\ :\ \left|I^{(q)}(t) - I_0^*\right| > \delta_2^{(q+1)} \text{ o } \left|\phi^{(q)}(t) - \hat{\phi}^{(q)}(t)\right|_\infty > \delta_1^{(q+1)}\right\}. \tag{4.56}$$

Clarament, $x^{(q)}(t)$ és definida i pertany a $\mathcal{D}_{\rho^{(q)}}(G_q)$ per a $0 \leq t \leq T_q$ (remarquem que l'ús que fem de $\delta^{(q+1)}$ en comptes de $\rho^{(q)}$ és motivat pel fet que podrem obtenir les fites més còmodament usant la "c_{q+1}-norma"). A partir de les equacions hamiltonianes associades a $H^{(q)}$

$$\dot{I}^{(q)}(t) = -\frac{\partial R^{(q)}}{\partial \phi}\left(x^{(q)}(t)\right), \qquad \dot{\phi}^{(q)}(t) = \omega^{(q)}\left(I^{(q)}(t)\right) + \frac{\partial R^{(q)}}{\partial I}\left(x^{(q)}(t)\right),$$

obtenim les fites:

$$\left|\dot{I}^{(q)}(t)\right| \le \left\|\frac{\partial R^{(q)}}{\partial \phi}\right\|_{G_q,\rho^{(q)}} \le \varepsilon_q\,, \tag{4.57}$$

$$\begin{aligned}\left|\dot{\phi}^{(q)}(t) - \omega^{(q)}\left(I_0^*\right)\right|_\infty &\le M_q\left|I^{(q)}(t) - I_0^*\right| + \left\|\frac{\partial R^{(q)}}{\partial I}\right\|_{G_q,\rho^{(q)},\infty} \\ &\le 2M\left|I^{(q)}(t) - I_0^*\right| + \frac{\varepsilon_q}{c_{q+1}} \\ &\le 2M\delta_2^{(q+1)} + \frac{\varepsilon_q}{c_{q+1}} \le 3M\delta_2^{(q+1)}.\end{aligned} \tag{4.58}$$

A la segona fita, hem usat la desigualtat

$$\frac{\varepsilon_q}{c_{q+1}} \le M\delta_2^{(q+1)}, \tag{4.59}$$

que prové de les fites (1_q) i (4.31–4.33). Així, com que una de les desigualtats que defineixen (4.56) és una igualtat per a $t = T_q$, tenim

$$\delta_2^{(q+1)} = \left|I^{(q)}\left(T_q\right) - I_0^*\right| \le T_q\varepsilon_q$$

o bé

$$\delta_1^{(q+1)} = \left|\phi^{(q)}\left(T_q\right) - \hat{\phi}^{(q)}\left(T_q\right)\right|_\infty \le T_q \cdot 3M\delta_2^{(q+1)}\,. \tag{4.60}$$

Per tant,

$$T_q \ge \min\left(\frac{\delta_2^{(q+1)}}{\varepsilon_q}, \frac{\delta_1^{(q+1)}}{3M\delta_2^{(q+1)}}\right) \;\ge\; T_q' := \frac{1}{3Mc_{q+1}}\,, \tag{4.61}$$

on hem tornat a fer servir la desigualtat (4.59). Això implica:

$$\left|x^{(q)}(t) - \hat{x}^{(q)}(t)\right|_{c_{q+1}} \le \delta_2^{(q+1)} \qquad \text{si} \;\; |t| \le T_q'\,. \tag{4.62}$$

Com que $H^{(q)} = H \circ \Psi^{(q)}$ i $\Psi^{(q)}$ és canònica, resulta que $\Psi^{(q)}\left(x^{(q)}(t)\right)$ és una trajectòria de H, definida per a $|t| \le T_q'$. Quan el valor de q és gran, aquesta trajectòria roman prop del tor $\Psi^{(q)}\left(\mathbf{T}^n \times \{I_0^*\}\right)$. Notem que T_q' tendeix a infinit quan $q \to \infty$.

F. Tors invariants. Suposant ara $x_0^* \in \mathbf{T}^n \times G^*$, escrivim $x^*(t) = \left(\phi_0^* + \omega^*\left(I_0^*\right)t, I_0^*\right)$, $t \in \mathbf{R}$. Tenim:

$$\left|\hat{x}^{(q)}(t) - x^*(t)\right|_{c_{q+1}} \le c_{q+1}\left|\omega^{(q)}\left(I_0^*\right) - \omega^*\left(I_0^*\right)\right|_\infty \cdot |t| \le c_{q+1}\left|\omega^{(q)} - \omega^*\right|_{G^*,\infty} \cdot T_q'' \le \delta_2^{(q+1)}$$

per a

$$|t| \le T_q'' := \frac{\delta_1^{(q+1)}}{\left|\omega^{(q)} - \omega^*\right|_{G^*,\infty}}\,.$$

Notem que T_q'' també tendeix a infinit, per (4.51). Llavors,

$$\left|x^{(q)}(t) - x^*(t)\right|_{c_{q+1}} \le 2\delta_2^{(q+1)} \qquad \text{si} \;\; |t| \le T_q''' := \min\left(T_q', T_q''\right).$$

A continuació, vegem que la trajectòria $\Psi^{(q)}\left(x^{(q)}(t)\right)$ és molt propera a $\Psi^*\left(x^*(t)\right)$ quan q és gran. En efecte, per a $|t| \leq T_q'''$,

$$\begin{aligned}
&\left|\Psi^{(q)}\left(x^{(q)}(t)\right) - \Psi^*\left(x^*(t)\right)\right|_{c_1} \\
&\leq \left|\Psi^{(q)}\left(x^{(q)}(t)\right) - \Psi^{(q)}\left(x^*(t)\right)\right|_{c_1} + \left|\Psi^{(q)}\left(x^*(t)\right) - \Psi^*\left(x^*(t)\right)\right|_{c_1} \\
&\leq 2^{(\tau+1-\nu)(q-1)} \cdot 4\delta_2^{(q+1)} + \left|\Psi^{(q)} - \Psi^*\right|_{G^*,\left(\frac{\rho_1}{4},0\right),c_1} \\
&= 4c_1\,\delta_1^{(q+1)} + \left|\Psi^{(q)} - \Psi^*\right|_{G^*,\left(\frac{\rho_1}{4},0\right),c_1}, \qquad (4.63)
\end{aligned}$$

on hem aplicat (4.53). La fita obtinguda a (4.63) tendeix a zero, per (4.55). Veiem doncs que, per a cada t fixat, $\Psi^{(q)}\left(x^{(q)}(t)\right)$ existeix per a q prou gran, i el seu límit és $\Psi^*\left(x^*(t)\right)$. Aquest fet i la continuïtat del flux de H impliquen que $\Psi^*\left(x^*(t)\right)$ també és una trajectòria de H, la qual és definida per a tot $t \in \mathbf{R}$. Això és cert per a cada condició inicial $x_0^* = (\phi_0^*, I_0^*) \in \mathbf{T}^n \times G^*$. D'aquesta manera, $\Psi^*\left(\mathbf{T}^n \times \{I_0^*\}\right)$ és un tor invariant de H, amb vector de freqüències $\omega^*\left(I_0^*\right)$. A més, l'energia sobre el tor és $H\left(\Psi^*\left(\phi_0^*, I_0^*\right)\right) = h^*\left(I_0^*\right)$.

Així, els tors invariants que es conserven al sistema pertorbat vénen parametritzats per les noves accions $I_0^* \in G^*$. Provarem ara que també els podem parametritzar per llurs accions originals. Primer, vegem que $\Omega\left(\widehat{G}\right) \subset F^*$ (el conjunt diofàntic F^* ha estat introduït a (4.46)). En efecte, usant l'apartat (b) del lema 16 i el fet que $\beta = \gamma/L$, resulta que $\Omega\left(\mathcal{G} - \frac{2\gamma}{\mu}\right) \subset F - \beta$. D'altra banda, donat $I \in \widehat{G}$, deduïm de la condició diofàntica satisfeta per $\omega(I)$ que

$$\left|\overline{k} \cdot \overline{\Omega}(I) + k_n\right| \geq \frac{\gamma / \left|\omega_n(I)\right|}{|k|_1^\tau} \geq \frac{\beta}{|k|_1^\tau}$$

i per tant $\Omega(I) \notin \Delta\left(k, \frac{\beta}{|k|_1^\tau}\right)$ per a tot $k \neq 0$ (aclarim que aquesta fita és la que ha motivat la nostra tria $\beta = \gamma/L$). Així tenim $\Omega\left(\widehat{G}\right) \subset F^*$ i, com que $\Omega^* : G^* \longrightarrow F^*$ és injectiva, podem parametritzar el conjunt de tors invariants per $I_0 \in \widehat{G}$ (notem que, d'aquesta manera, alguns dels tors invariants han estat exclosos). Definim, per a $(\phi_0, I_0) \in \mathcal{W}_{\frac{\rho_1}{4}}\left(\mathbf{T}^n\right) \times \widehat{G}$,

$$\mathcal{T}(\phi_0, I_0) = \Psi^*\left(\phi_0, I_0^*\right),$$

on $I_0^* = \left(\Omega^*\right)^{-1}\left(\Omega(I_0)\right) \in G^*$. Obtenim així l'apartat (a): el conjunt $\mathcal{T}\left(\mathbf{T}^n \times \{I_0\}\right)$ és un tor invariant de H, amb freqüència $\omega^*\left(I_0^*\right)$ i energia $h^*\left(I_0^*\right)$. Com que $\Omega^*\left(I_0^*\right) = \Omega(I_0)$, deduïm de (4.50) que $\omega^*\left(I_0^*\right)$ és paral·lel a $\omega(I_0)$ i que $h^*\left(I_0^*\right) = h(I_0)$.

Per veure (b), escrivim, per a $(\phi_0, I_0^*) \in \mathcal{W}_{\frac{\rho_1}{4}}\left(\mathbf{T}^n\right) \times G^*$,

$$\Psi^*\left(\phi_0, I_0^*\right) = \left(\phi_0 + \Psi_\phi^*\left(\phi_0, I_0^*\right), I_0^* + \Psi_I^*\left(\phi_0, I_0^*\right)\right).$$

Llavors, si $(\phi_0, I_0) \in \mathcal{W}_{\frac{\rho_1}{4}}\left(\mathbf{T}^n\right) \times \widehat{G}$, tenim

$$\mathcal{T}_\phi(\phi_0, I_0) = \Psi_\phi^*\left(\phi_0, I_0^*\right), \qquad \mathcal{T}_I(\phi_0, I_0) = \Psi_I^*\left(\phi_0, I_0^*\right) + I_0 - I_0^*.$$

Usant (4.55) i (4.32), obtenim les fites següents:

$$\left|\Psi_\phi^*(\phi_0, I_0^*)\right|_\infty \leq \frac{1}{c_1}\left|\Psi^* - \mathrm{id}\right|_{G^*,\left(\frac{\rho_1}{4},0\right),c_1} \leq \frac{2^{14} M K^{2\tau+1}\,\varepsilon}{\nu^2 l^2 \beta^2}\,,$$
$$\left|\Psi_I^*(\phi_0, I_0^*)\right| \leq \left|\Psi^* - \mathrm{id}\right|_{G^*,\left(\frac{\rho_1}{4},0\right),c_1} \leq \frac{2^{10} K^\tau\,\varepsilon}{\nu^2 l \rho_1 \beta}\,.$$

Per (4.47) i (4.38),

$$\begin{aligned} |I_0^* - I_0| &\leq \left|(\Omega^*)^{-1} - \Omega^{-1}\right|_{F^*} \leq \sum_{s\geq 0} \frac{2L_s a\eta_s'}{\mu_s} \leq \frac{8La}{\mu}\sum_{s\geq 0}\eta_s' \\ &\leq \frac{2^7 LM}{l^2\mu}\cdot\frac{2^7 LK^{\tau+1}\,\varepsilon}{\nu l\beta} = \frac{2^{14} L^2 M K^{\tau+1}\,\varepsilon}{\nu l^3 \mu\beta}\,. \end{aligned}$$

Reunint aquestes fites, aplicant les desigualtats $\hat\rho \leq \nu\rho_1$ i $K \leq 2/\hat\rho$, i escrivint la fita final en termes de γ en comptes de β, obtenim l'apartat (b). També veiem que $|\mathcal{T}_I|_{\widehat{G},\left(\frac{\rho_1}{4},0\right)} \leq \frac{2\gamma}{\mu}$ i per tant $\mathcal{T}\left(\mathbf{T}^n \times \widehat{G}\right) \subset \mathbf{T}^n \times \mathcal{G}$.

G. Fita de la mesura. Finalment, obtindrem la fita de l'apartat (c). Escrivint $\widehat{G}^* = (\Omega^*)^{-1}\left(\Omega\left(\widehat{G}\right)\right)$, els tors invariants que hem trobat omplen el conjunt $\mathcal{T}\left(\mathbf{T}^n \times \widehat{G}\right) = \Psi^*\left(\mathbf{T}^n \times \widehat{G}^*\right)$. Com que les transformacions $\Psi^{(q)}$ són canòniques,

$$\mathrm{mes}\left[\Psi^{(q)}\left(\mathbf{T}^n \times \widehat{G}^*\right)\right] = \mathrm{mes}\left(\mathbf{T}^n \times \widehat{G}^*\right) = (2\pi)^n \cdot \mathrm{mes}\left(\widehat{G}^*\right).$$

Usant la fita (4.55) i la compacitat de $\Psi^*\left(\mathbf{T}^n \times \widehat{G}^*\right)$, obtenim la desigualtat

$$\mathrm{mes}\left[\Psi^*\left(\mathbf{T}^n \times \widehat{G}^*\right)\right] \geq (2\pi)^n \cdot \mathrm{mes}\left(\widehat{G}^*\right).$$

Veiem doncs que, per tal de fitar la mesura del complementari del conjunt invariant, és suficient de trobar una fita de la mesura de $\mathcal{G} \setminus \widehat{G}^*$.

En primer lloc, construïm un conjunt auxiliar, inclòs a $\widehat{G}^*$, sobre el qual les fites esdevinguin més fàcils. Sigui

$$\tilde\beta = \frac{64LM\gamma}{l^2\mu}\,, \qquad \tilde\beta_q = \left(1 - \frac{1}{2^{\nu q}}\right)\tilde\beta,$$

per a $q \geq 0$, i notem que $\tilde\beta \geq \beta$. Definim els conjunts

$$\tilde F_q = \left(F - \tilde\beta_q\right) \setminus \bigcup_{\substack{|k|_1 \leq K_q \\ k\neq 0}} \Delta\left(k, \frac{\tilde\beta_q}{|k|_1^\tau}\right), \qquad \tilde G_q = \left(\Omega^{(q)}\right)^{-1}\left(\tilde F_q\right),$$

i

$$\tilde F^* = \bigcap_{q\geq 0} \tilde F_q = \left(F - \tilde\beta\right) \setminus \bigcup_{\substack{k\in\mathbf{Z}^n \\ k\neq 0}} \Delta\left(k, \frac{\tilde\beta}{|k|_1^\tau}\right), \qquad \tilde G^* = \bigcap_{q\geq 0} \tilde G_q.$$

A partir del fet que $\Omega^{(q)}\left(\tilde{G}_q\right) = \tilde{F}_q$ per a tot q, deduïm que $\Omega^*\left(\tilde{G}^*\right) = \tilde{F}^*$. Comprovem que $\Omega\left(\widehat{G}\right) \supset \tilde{F}^*$. En efecte, per l'apartat (a) del lema 16, veiem que $\Omega\left(\mathcal{G} - \frac{2\gamma}{\mu}\right) \supset F - \tilde{\beta}$. A més, donat $J = \Omega(I) \in \tilde{F}^*$, per a tot $k \in \mathbf{Z}^n$ amb $\overline{k} \neq 0$ tenim

$$\left|\overline{k} \cdot \overline{J} + k_n\right| \geq \frac{\tilde{\beta}}{|k|_1^\tau}$$

i per tant

$$|k \cdot \omega(I)| \geq \frac{\tilde{\beta}\,|\omega_n(I)|}{|k|_1^\tau} \geq \frac{l\tilde{\beta}}{|k|_1^\tau} \geq \frac{\gamma}{|k|_1^\tau} .$$

És clar que, per a $\overline{k} = 0$, la condició diofàntica també s'acompleix, ja que $|\omega_n(I)| \geq l \geq \gamma$. Així, $\Omega\left(\widehat{G}\right) \supset \tilde{F}^*$ i per tant $\widehat{G}^* \supset \tilde{G}^*$. Aleshores,

$$\operatorname{mes}\left(\mathcal{G} \setminus \widehat{G}^*\right) \leq \sum_{q=1}^{\infty} \operatorname{mes}\left(\tilde{G}_{q-1} \setminus \tilde{G}_q\right).$$

Per a $q \geq 1$, tenim la fita

$$\operatorname{mes}\left(\tilde{G}_{q-1} \setminus \tilde{G}_q\right) \leq \frac{2^{2n-7} l^2 L^{n-2}}{\mu^{n-1} M} \cdot \operatorname{mes}\left(\tilde{F}_{q-1} \setminus \left(\tilde{F}_q - a\eta'_{q-1}\right)\right).$$

Hem usat que $\Omega^{(q-1)}\left(\tilde{G}_{q-1}\right) = \tilde{F}_{q-1}$ i que $\Omega^{(q-1)}\left(\tilde{G}_q\right) \supset \tilde{F}_q - a\eta'_{q-1}$; aquesta inclusió prové de l'apartat (g) de la proposició 19. Un altre fet que hem usat és la fita següent, donada per l'apartat (c) del lema 16:

$$\left|\det\left(\frac{\partial \Omega^{(q-1)}}{\partial I}(I)\right)\right| \geq \frac{\mu_{q-1}^{n-1} a}{L_{q-1}^{n-2}} \geq \frac{\mu^{n-1} M}{2^{2n-7} l^2 L^{n-2}} ,$$

En la notació del lema 20, tenim $\tilde{F}_{q-1} = F\left(\tilde{\beta}_{q-1}, \tilde{\beta}_{q-1}, K_{q-1}\right)$, $\tilde{F}_q = F\left(\tilde{\beta}_q, \tilde{\beta}_q, K_q\right)$. Llavors, aplicant el lema esmentat,

$$\begin{aligned}
\operatorname{mes}\left(\tilde{F}_{q-1} \setminus \tilde{F}_q\right) \;&\leq\; D\left(\tilde{\beta}_q - \tilde{\beta}_{q-1}\right) \\
&\quad + 2P^{n-1}\left(\sum_{\substack{|k|_1 \leq K_{q-1} \\ \overline{k} \neq 0}} \frac{\tilde{\beta}_q - \tilde{\beta}_{q-1}}{|k|_1^\tau \cdot \left|\overline{k}\right|} + \sum_{\substack{K_{q-1} < |k|_1 \leq K_q \\ \overline{k} \neq 0}} \frac{\tilde{\beta}_q}{|k|_1^\tau \cdot \left|\overline{k}\right|}\right), \\
\operatorname{mes}\left(\tilde{F}_q \setminus \left(\tilde{F}_q - a\eta'_{q-1}\right)\right) \;&\leq\; \left(D + 2^{n+1} P^{n-1} K_q^n\right) \cdot a\eta'_{q-1} .
\end{aligned}$$

Reunint aquestes fites, obtenim

$$\begin{aligned}
\operatorname{mes}\left(\mathcal{G} \setminus \widehat{G}^*\right) \;\leq\; \frac{2^{2n-7} l^2 L^{n-2}}{\mu^{n-1} M} &\left(D\tilde{\beta} + 2P^{n-1} \sum_{\substack{k \in \mathbf{Z}^n \\ \overline{k} \neq 0}} \frac{\tilde{\beta}}{|k|_1^\tau \cdot \left|\overline{k}\right|} \right. \\
&\left. + D \sum_{q=1}^{\infty} a\eta'_{q-1} + 2^{n+1} P^{n-1} \sum_{q=1}^{\infty} K_q^n a\eta'_{q-1} \right). \qquad (4.64)
\end{aligned}$$

És crucial l'ús de la condició $\tau > n-1$ en comprovar que les tres sèries que prenen part a (4.64) són convergents. En efecte, per a la primera sèrie,

$$\sum_{\substack{k\in\mathbf{Z}^n\\ \overline{k}\neq 0}} \frac{1}{|k|_1^{\tau}\cdot\left|\overline{k}\right|} \leq \sum_{\substack{\overline{k}\in\mathbf{Z}^{n-1}\\ \overline{k}\neq 0}} \sum_{k_n\in\mathbf{Z}} \frac{\sqrt{n}}{\left(\left|\overline{k}\right|_1+|k_n|\right)^{\tau}\cdot\left|\overline{k}\right|_1} \leq \sqrt{n}\,2^{n-1}\sum_{j=1}^{\infty}\sum_{k_n\in\mathbf{Z}}\frac{j^{n-3}}{(j+|k_n|)^{\tau}}\ ,$$

on hem fet servir que el nombre de vectors $\overline{k}\in\mathbf{Z}^{n-1}$ amb $\left|\overline{k}\right|_1 = j \geq 1$ pot ésser fitat per $2^{n-1}j^{n-2}$. La sèrie indexada per k_n pot ésser fitada comparant-la amb una integral:

$$\sum_{k_n\in\mathbf{Z}}\frac{1}{(j+|k_n|)^{\tau}} \leq \frac{1}{j^{\tau}}+2\int_0^{\infty}\frac{dx}{(j+x)^{\tau}} = \frac{1}{j^{\tau}}+\frac{2}{(\tau-1)j^{\tau-1}} \leq \frac{\tau+1}{\tau-1}\cdot\frac{1}{j^{\tau-1}}\ .$$

Hem usat que $\tau > 1$ ja que $n \geq 2$. Llavors,

$$\sum_{\substack{k\in\mathbf{Z}^n\\ \overline{k}\neq 0}} \frac{1}{|k|_1^{\tau}\cdot\left|\overline{k}\right|} \leq \frac{\sqrt{n}\,2^{n-1}(\tau+1)}{\tau-1}\sum_{j=1}^{\infty}\frac{1}{j^{\tau-n+2}}\ ,$$

sèrie que convergeix per la condició $\tau > n-1$. És fàcil de comprovar que la segona i la tercera sèries de (4.64) convergeixen, usant la fita

$$a\eta'_{q-1} \leq \frac{\nu l^3\mu^2}{2^{\tau+20}L^3M^2K^{\tau+1}\cdot 2^{(\tau+2)(q-1)}}\cdot\beta\,,$$

la qual prové de les fites (4.38) i (4.33). Escrivint totes les fites en termes de γ en comptes de $\tilde{\beta}$ o β, obtenim de (4.64) una fita del tipus

$$\operatorname{mes}\left(\mathcal{G}\setminus\widehat{G}^*\right) \leq \left(C_1'D + C_2'P^{n-1}\right)\gamma,$$

on C_1', C_2' són constants depenents de n, τ, K, M, L, l, μ. Així, obtenim l'apartat (c), amb $C_j = (2\pi)^n C_j'$, $j = 1, 2$. □

Notes

1. Totes les successions introduïdes al començament de la prova tenen convergència lineal. Com és evident, tries alternatives d'aquestes successions són factibles sempre que s'acompleixin les restriccions imposades per la proposició 19.

2. La motivació de la tria de K_q i $\delta_1^{(q)}$ serà transparent a la secció següent, on veurem que, si ν és petit, les successives restes decreixen de manera gairebé quadràtica.

3. Les fites de l'apartat (b) sobre la deformació dels tors invariants pertorbats respecte dels no pertorbats són essencialment les mateixes que a [Nei1].

Els resultats enunciats al teorema 21 són millors com més petita és γ ja que aleshores, d'acord amb l'apartat (c), la mesura del complementari del conjunt invariant és més petita. Si fixem ε, la primera condició de (4.30) ens diu que el mínim valor que podem prendre per a γ és

$$\gamma \sim \sqrt{\varepsilon}.$$

Llavors la mesura del complementari és $\mathcal{O}\left(\sqrt{\varepsilon}\right)$, i la deformació dels tors pertorbats a partir dels no pertorbats és també $\mathcal{O}\left(\sqrt{\varepsilon}\right)$.

Com ja havíem anunciat a la pàgina 78, hem provat el teorema KAM usant només la convergència lineal de les restes quan, en realitat, decreixen més ràpidament. Aquest fet sembla indicar que també podríem obtenir la conservació de tors invariants quan les freqüències satisfan alguna condició de no ressonància més feble que la condició diofàntica (1.2). Resultats en aquesta direcció han estat obtinguts per diversos autors. Així, per a difeomorfismes canònics sobre el tor, R. de la Llave [Ll] ha provat un resultat afí al teorema KAM imposant sobre les freqüències una condició del tipus següent: en comptes de considerar la fita inferior $\frac{\gamma}{|k|_1^\tau}$ per als petits divisors, n'imposa una altra que decreix exponencialment en $|k|_1$. També A. D. Bryuno (vegeu, per exemple, [Br]) ha establert condicions similars per als petits divisors, més febles que la condició diofàntica.

Podem veure que seria consistent una modificació de la nostra prova substituint la condició diofàntica sobre les $\omega(I)$ per una altra de més feble, almenys pel que respecta a la convergència de les ε_q cap a zero, que dóna la clau de la prova. Definim, per a $K \geq 1$,

$$\alpha_K = \gamma\, e^{-K^\sigma},$$

essent $0 < \sigma < 1$ fixada, i justificarem la conservació dels tors per als quals el vector de freqüències satisfà

$$|k \cdot \omega(I)| \geq \alpha_{|k|_1} \qquad \forall k \in \mathbf{Z}^n \setminus \{0\}\,.$$

De fet, la condició imposada a [Ll] és encara més feble, ja que s'apropa molt més al cas $\sigma = 1$, en què ja no es pot assegurar la convergència.

A la proposició 19, imposant una condició del tipus $\varepsilon \preceq \alpha_K \delta_2$, tindríem la fita

$$\tilde{\varepsilon} \preceq e^{-K\delta_1} \cdot \varepsilon + \frac{1}{\alpha_K \delta_2} \cdot \varepsilon^2. \tag{4.65}$$

Per a les iteracions, escolliríem K_q, $\delta^{(q)}$ igual que al teorema 21, però ara demanaríem $0 < \nu < 1 - \sigma$. Podem veure per inducció que si ε és prou petit llavors és vàlida una fita del tipus

$$\varepsilon_q \preceq \varepsilon \cdot e^{-2^{(1-\nu)q}}, \qquad \forall q \geq 0, \tag{4.66}$$

que substituiria la fita lineal (1_q) de la pàgina 81. Suposant-ho cert per a $q-1$, tindríem $\varepsilon_{q-1} \preceq \alpha_{K_q} \delta_2^{(q)}$, per la qual cosa podríem aplicar (4.65) i obtindríem:

$$\varepsilon_q \preceq e^{-K_q \delta_1^{(q)}} \cdot \varepsilon_{q-1} + \frac{1}{\alpha_{K_q} \delta_2^{(q)}} \cdot \varepsilon_{q-1}^2.$$

Suposant $\varepsilon \preceq \gamma^2$, de la hipòtesi d'inducció deduiríem (4.66) per a q, tenint en compte que $\sigma < 1 - \nu$ i que $\alpha_{K_q} \sim \gamma \, e^{-2^{\sigma q}}$. La fita (4.66) comportaria la convergència del procés quan $q \to \infty$. De tota manera, la mesura del complementari dels tors que es conserven seria $\mathcal{O}(\gamma)$, igual que al teorema 21. Escollint $\gamma \sim \sqrt{\varepsilon}$, la mesura seria $\mathcal{O}(\sqrt{\varepsilon})$. Així, la millora respecte el teorema 21 es referiria principalment a les constants involucrades.

4.5 Convergència ràpida i tors quasi-invariants

Hem vist al teorema 21 la convergència lineal cap a zero de les successives restes. Aquest tipus de convergència és suficient (i prou adequat) per a establir la conservació de tors invariants amb freqüències satisfent una condició diofàntica. Com hem comentat al final de la secció anterior, veient que les restes decreixen més ràpidament podríem obtenir la conservació de tors invariants sota condicions de no ressonància més generals.

Al teorema 22 d'aquesta secció veurem, també a partir de la convergència ràpida de les restes, que si aturem el procés iteratiu en un pas adequat en comptes de dur-lo fins al límit, el domini que tenim en aquest pas és format per *tors quasi-invariants,* en el sentit que fites exponencials d'estabilitat efectiva (de tipus Nekhoroshev) seran vàlides per a les trajectòries que parteixin d'aquests tors. Els tors quasi-invariants vindran associats a tors no pertorbats amb freqüències aproximadament diofàntiques.

El resultat d'aquesta secció pot ésser vist com un intent d'apropar els teoremes KAM i de Nekhoroshev. De fet, les fites d'estabilitat efectiva que donem són molt properes, quantitativament, al teorema KAM. Però des del punt de vista pràctic, aquest resultat és més significatiu que el teorema KAM. En efecte, si les coordenades d'un tor invariant no pertorbat fixat són conegudes només aproximadament, amb una precisió r, no és possible decidir si la freqüència associada al tor donat és diofàntica o no, i per tant no podem deduir que aquest tor sobrevisqui a la pertorbació. De fet, en comprovar la condició diofàntica, no té sentit anar més enllà d'un ordre finit $K^{(r)}$ (que tendeix a infinit per a $r \to 0$). No obstant, aquesta comprovació finita és suficient per tal d'assegurar que el tor encara és inclòs al domini en un pas adequat del procés iteratiu i que aquest tor sobreviu a la pertorbació almenys sota la forma de tor quasi-invariant: una trajectòria que parteix d'aquest tor roman molt a prop d'ell durant un temps d'estabilitat exponencialment gran en $1/r$.

El nostre resultat és similar al d'un article d'A. Morbidelli i A. Giorgilli [MG1], però aquest article no tracta amb exponents òptims. A més, les fites d'estabilitat s'expressen a l'article esmentat en termes del temps d'estabilitat, prèviament fixat, en comptes de la nostra r.

Un altre resultat relacionat, però que correspon a un punt de vista diferent, ha estat obtingut recentment per A. D. Perry i S. Wiggins [PW] i pels mateixos Morbidelli i Giorgilli [MG2]; estableixen que els tors KAM són "enganxosos", donant fites inferiors del temps necessari per tal que una trajectòria s'allunyi d'un tor KAM fixat. Les fites són exponencials a [PW] i "superexponencials", però només per a sistemes quasiconvexos, a [MG2]. Aquest resultat requereix que la transformació a forma normal sigui vàlida en tot un entorn del tor KAM donat, la qual cosa és aconseguida als articles esmentats basant-se en el mètode de Kolmogorov per al teorema KAM en comptes del mètode d'Arnol'd. Però en el nostre cas l'existència prèvia d'un tor KAM no és usada per a les fites, per la qual cosa pensem que el nostre resultat és més útil a la pràctica.

Recordem que el teorema 21 dóna una extensa família de tors invariants si el paràmetre γ de la condició diofàntica és petit. Però, per a valors grans de γ, hom no pot pas garantir la conservació de cap tor ni tan sols si la condició (4.30) és satisfeta, ja que el conjunt $\widehat{G}_\gamma$ pot ésser buit. En realitat, hi ha un valor màxim γ_0 tal que $\widehat{G}_\gamma$ és buit per a $\gamma > \gamma_0$ (en el cas $n = 2$, el conjunt $\widehat{G}_{\gamma_0}$ correspon a les freqüències nobles). No obstant, al teorema 22 els tors quasi-invariants vénen parametritzats per un conjunt $G_\gamma^{(r)}$ (definit més avall) que conté pròpiament $\widehat{G}_\gamma$. Llavors, en algun interval de valors $\gamma > \gamma_0$ encara podem assegurar l'existència de tors quasi-invariants.

Teorema 22 *Considerem notacions i hipòtesis com al teorema 21 i suposem també que*

$$\varepsilon \ \le \ \frac{\nu^2 \sigma l^2 \hat{\rho}^{2\tau+2}}{2^{2\tau+17} L^2 M} \cdot \gamma^2, \tag{4.67}$$

on definim $\sigma := \min\limits_{s \ge 0} \dfrac{e^{\left(2-2^{1-\nu}\right) \cdot 2^{(1-\nu)s}}}{2^{(2\tau+1)s}} > 0$. *Sigui*

$$0 \ < \ r \ \le \ r_0 := \frac{\hat{\rho}^{\tau+1}}{2^{\tau+2} M} \cdot \gamma \tag{4.68}$$

donat, i escrivim

$$\begin{aligned} \widehat{G}^{(r)} = \widehat{G}_\gamma^{(r)} &:= \left\{ I \in \mathcal{G} - \frac{2\gamma}{\mu} \ : \ |k \cdot \omega(I)| \ge \frac{\gamma}{|k|_1^\tau} \quad \forall k \in \mathbf{Z}^n, \ 0 < |k|_1 \le K^{(r)} \right\}, \\ G^{(r)} = G_\gamma^{(r)} &:= \mathcal{U}_r \left(\widehat{G}^{(r)} \right), \end{aligned} \tag{4.69}$$

essent

$$K^{(r)} := \frac{2}{\hat{\rho}} \left(\frac{r_0}{r} \right)^{1/(\tau+1+\nu)}. \tag{4.70}$$

Aleshores, existeix una aplicació analítica $A^{(r)} : G^{(r)} \longrightarrow \mathcal{G}$ *i una transformació canònica real analítica* $\Upsilon^{(r)} : \mathcal{D}_{\left(\frac{\rho_1}{4},\frac{\nu l\, r}{2^{\tau+5}L}\right)}\left(A^{(r)}\left(G^{(r)}\right)\right) \longrightarrow \mathcal{D}_\rho(\mathcal{G})$ *tals que, escrivint* $\mathcal{T}^{(r)} = \Upsilon^{(r)} \circ \left(\mathrm{id} \times A^{(r)}\right)$*, cada tor* $\mathcal{T}^{(r)}\left(\mathbf{T}^n \times \{I_0\}\right)$ *amb* $I_0 \in G^{(r)}$ *té la propietat que, per a tota trajectòria* $(\phi(t), I(t)) = \Upsilon^{(r)}\left(\hat\phi(t), \hat I(t)\right)$ *de* H *amb* $(\phi(0), I(0))$ *pertanyent al tor, hom té:*

$$\left|\hat I(t) - A^{(r)}(I_0)\right| \le \sqrt{\frac{2\varepsilon}{M}} \cdot \exp\left\{-\frac{1}{2}\left(\frac{r_0}{r}\right)^{(1-\nu)/(\tau+1+\nu)}\right\}, \tag{4.71}$$

$$\left|\hat\phi(t) - \left(\hat\phi(0) + \lambda^{(r)}(I_0)t\right)\right|_\infty \le \frac{\nu\rho_1}{4}\left(\frac{r}{r_0}\right)^{\nu/(\tau+1+\nu)}, \tag{4.72}$$

si

$$|t| \le \frac{\nu\rho_1}{51\sqrt{M\,\varepsilon}}\left(\frac{r}{r_0}\right)^{\nu/(2\tau+2)} \cdot \exp\left\{\frac{1}{2}\left(\frac{r_0}{r}\right)^{(1-\nu)/(\tau+1+\nu)}\right\}, \tag{4.73}$$

on el vector $\lambda^{(r)}(I_0)$ *és paral·lel a* $\omega(I_0)$*. A més, si* E *denota l'energia de la trajectòria* $(\phi(t), I(t))$*,*

$$|E - h(I_0)| \le \frac{2^{2n+1}\varepsilon}{\hat\rho} \cdot \exp\left\{-\left(\frac{r_0}{r}\right)^{(1-\nu)/(\tau+1+\nu)}\right\}. \tag{4.74}$$

Prova Tornem a ficar-nos dins el procés iteratiu de la prova del teorema 21. Millorant l'argument donat allà per a la fita lineal (1_q), veurem que la mida de les successives restes admet una fita gairebé quadràtica. Observem en primer lloc que, escollint K com a la prova del teorema 21, i tenint en compte la definició $\beta = \gamma/L$ i les desigualtats $\hat\rho \le 2/K$ i $\hat\rho \le \nu\rho_1/16$, deduïm de (4.67) la desigualtat

$$\varepsilon \le \frac{\nu^3 \sigma l^2 \rho_1 \beta^2}{2^{20} M K^{2\tau+1}}. \tag{4.75}$$

A continuació provem, per a tot $q \ge 0$, la fita

$$\varepsilon_q \le \frac{32\varepsilon}{\nu\rho_1} \cdot e^{-2^{(1-\nu)q}}. \tag{4.76}$$

En efecte, això és cert per a $q = 0$ per (4.35). Donat $q \ge 1$ i suposant que la fita és certa per a $q-1$, l'establirem per a q. A partir de (4.40) i la desigualtat $K\hat\rho \ge 1$, deduïm

$$K_q\delta_1^{(q)} \ge \frac{\nu K \rho_1}{8} \cdot 2^{(1-\nu)(q-1)} \ge \ln 2 + 2^{(1-\nu)(q-1)},$$

i per tant

$$e^{-K_q\delta_1^{(q)}} \le \frac{1}{2}\, e^{-2^{(1-\nu)(q-1)}}.$$

A més, aplicant les desigualtats (4.31) i (4.75), la definició de σ i la hipòtesi que la fita (4.76) és vàlida per a ε_{q-1},

$$\begin{aligned}\frac{14 A_q K_q^\tau}{l_{q-1}\beta'_{q-1}\delta_2^{(q)}} \cdot \varepsilon_{q-1} &\le \frac{2^8 K_q^\tau}{\nu l \beta} \cdot \frac{64 M K_q^{\tau+1}}{\nu l \beta} \cdot \frac{32\varepsilon}{\nu\rho_1} \cdot e^{-2^{(1-\nu)(q-1)}} \\ &\le \frac{1}{2}\, e^{-\left(2^{1-\nu}-1\right)\cdot 2^{(1-\nu)(q-1)}}.\end{aligned} \tag{4.77}$$

Aleshores, de (4.39) deduïm:

$$\varepsilon_q \leq \left(\frac{1}{2}\, e^{-2^{(1-\nu)(q-1)}} + \frac{1}{2}\, e^{-\left(2^{1-\nu}-1\right)\cdot 2^{(1-\nu)(q-1)}}\right) \cdot \varepsilon_{q-1} \leq e^{-\left(2^{1-\nu}-1\right)\cdot 2^{(1-\nu)(q-1)}} \cdot \varepsilon_{q-1}\,,$$

que ens dóna la fita (4.76) per a ε_q.

El temps d'estabilitat obtingut a (4.62) també pot ésser millorat. Recordem que $x^{(q)}(t) = \left(\phi^{(q)}(t), I^{(q)}(t)\right)$ denota la trajectòria de $H^{(q)}$ tal que $x^{(q)}(0) = (\phi_0^*, I_0^*) \in \mathbf{T}^n \times G_q$. Deduïm de la desigualtat (4.57) que, per a $0 \leq t \leq T_q$,

$$\left|I^{(q)}(t) - I_0^*\right| \leq T_q \varepsilon_q$$

(T_q ha estat definit a (4.56)). Llavors, podem substituir (4.58) per la següent fita alternativa:

$$\left|\dot{\phi}^{(q)}(t) - \omega^{(q)}\left(I_0^*\right)\right|_\infty \leq 2MT_q\varepsilon_q + \frac{\varepsilon_q}{c_{q+1}} \leq 5MT_q\varepsilon_q,$$

on hem usat (4.61). D'aquesta manera, la desigualtat (4.60) esdevé

$$\delta_1^{(q+1)} \leq T_q^2 \cdot 5M\varepsilon_q,$$

i obtenim:

$$T_q \geq \min\left(\frac{\delta_2^{(q+1)}}{\varepsilon_q}, \sqrt{\frac{\delta_1^{(q+1)}}{5M\varepsilon_q}}\right) = \tilde{T}_q := \sqrt{\frac{\delta_1^{(q+1)}}{5M\varepsilon_q}}\,,$$

on hem usat (4.59) per veure que el mínim ve donat pel segon terme. Així, per a cada condició inicial $(\phi_0^*, I_0^*) \in \mathbf{T}^n \times G_q$, la trajectòria corresponent de $H^{(q)}$ satisfà:

$$\left|I^{(q)}(t) - I_0^*\right| \leq \tilde{T}_q\varepsilon_q = \sqrt{\frac{\delta_1^{(q+1)}\varepsilon_q}{5M}}\,, \quad \left|\phi^{(q)}(t) - \left(\phi_0^* + \omega^{(q)}\left(I_0^*\right)t\right)\right|_\infty \leq \delta_1^{(q+1)}, \qquad (4.78)$$

per a

$$|t| \leq \tilde{T}_q\,. \qquad (4.79)$$

Aquest temps d'estabilitat és molt millor que el de (4.62), degut al comportament quadràtic de ε_q. La fita d'estabilitat (4.78–4.79) ens diu que $\mathbf{T}^n \times \{I_0^*\}$ és un tor quasi-invariant de $H^{(q)}$ per a tot $I_0^* \in G_q$, car tota trajectòria que parteixi d'un punt d'aquest tor roman prop d'una trajectòria quasiperiòdica amb vector de freqüències $\omega^{(q)}\left(I_0^*\right)$ durant un temps gran. Aleshores, el tor $\Psi^{(q)}\left(\mathbf{T}^n \times \{I_0^*\}\right)$ és també quasi-invariant sota el flux de H.

Tot seguit escollirem $q = q(r) \geq 1$, tan gran com sigui possible, tal que $F_q \supset \Omega\left(G^{(r)}\right)$. Donat $I_0 \in G^{(r)}$, existeix $I_0' \in \widehat{G}^{(r)}$ tal que $|I_0' - I_0| \leq r$. Obtenim $I_0 \in \mathcal{G} - \left(\frac{2\gamma}{\mu} - r\right)$, i llavors

$$\Omega(I_0) \in F - \left(\beta - \frac{\mu r}{2L}\right) \qquad (4.80)$$

per l'apartat (b) del lema 16. D'altra banda, per a $0 < |k|_1 \le K^{(r)}$,

$$|k \cdot \omega(I_0)| \ge \frac{\gamma}{|k|_1^\tau} - |k| \cdot Mr$$

i per tant

$$\left|\overline{k} \cdot \overline{\Omega}(I_0) + k_n\right| \ge \frac{1}{|\omega_n(I_0)|} \left(\frac{\gamma}{|k|_1^\tau} - |k| \cdot Mr \right) \ge \frac{\beta}{|k|_1^\tau} - \frac{|k| \cdot Mr}{L} \,. \tag{4.81}$$

Deduïm de (4.80–4.81) que $J_0 \in F_q$, si escollim q de manera que s'acompleixin les desigualtats següents:

$$K^{(r)} \ge K_q \,, \qquad r \le \frac{L}{M} \cdot \frac{\beta - \beta_q}{K_q^{\tau+1}} \,.$$

Observant que $\beta - \beta_q = \beta/2^{\nu q}$ i recordant la desigualtat $K \le 2/\hat{\rho}$, veiem que és suficient escollir q satisfent la desigualtat

$$2^{(\tau+1+\nu)(q-1)} \le \frac{r_0}{r} \,. \tag{4.82}$$

Per això, triem $q \ge 1$ com el màxim enter complint (4.82). També tenim

$$2^{(\tau+1+\nu)q} \ge \frac{r_0}{r} \,. \tag{4.83}$$

Amb aquesta tria de q, resulta que $\Omega\left(G^{(r)}\right) \subset F_q$. Definim $A^{(r)} := \left(\Omega^{(q)}\right)^{-1} \circ \Omega$, i notem que $A^{(r)}\left(G^{(r)}\right) \subset G_q$. La transformació $\Upsilon^{(r)} := \Psi^{(q)}$ és definida sobre $\mathcal{D}_{\rho^{(q)}}(G_q)$, i tenim les desigualtats $\rho_1^{(q)} \ge \rho_1/4$ i

$$\rho_2^{(q)} = \frac{\nu l \beta}{32 M K^{\tau+1} \cdot 2^{(\tau+1)q}} \ge \frac{\nu l \hat{\rho}^{\tau+1} \beta}{2^{\tau+6} M \cdot 2^{(\tau+1)q}} = \frac{\nu l r_0}{2^4 L \cdot 2^{(\tau+1)q}} \ge \frac{\nu l\, r}{2^{\tau+5} L} \,,$$

on hem fet servir la desigualtat (4.82). Això ens dóna, en funció de r, el domini complex sobre el qual $\Upsilon^{(r)}$ és definida. Per a $(\phi_0, I_0) \in \mathbf{T}^n \times G^{(r)}$, posem

$$\mathcal{T}^{(r)}(\phi_0, I_0) = \Psi^{(q)}\,(\phi_0, I_0^*) \,,$$

essent $I_0^* = A^{(r)}(I_0) \in G_q$. Si $(\phi(t), I(t))$ és una trajectòria de H amb condició inicial sobre el tor $\mathcal{T}^{(r)}\left(\mathbf{T}^n \times \{I_0\}\right)$, llavors $\left(\hat{\phi}(t), \hat{I}(t)\right)$ és una trajectòria de $H^{(q)}$, amb $\hat{I}(0) = I_0^*$. Així podem aplicar la fita d'estabilitat de (4.78–4.79). Usant les desigualtats (4.76), (4.31) i (4.82–4.83), obtenim les fites

$$\begin{aligned}
\varepsilon_q &\le \frac{32\varepsilon}{\nu\rho_1} \cdot \exp\left\{ -\left(\frac{r_0}{r}\right)^{(1-\nu)/(\tau+1+\nu)} \right\}, \\
\delta_1^{(q+1)} &\le \frac{\nu\rho_1}{4 \cdot 2^{\nu q}} \le \frac{\nu\rho_1}{4} \left(\frac{r}{r_0}\right)^{\nu/(\tau+1+\nu)}, \\
\delta_1^{(q+1)} &\ge \frac{\nu\rho_1}{16 \cdot 2^{\nu(q-1)}} \ge \frac{\nu\rho_1}{16} \left(\frac{r}{r_0}\right)^{\nu/(\tau+1+\nu)}.
\end{aligned}$$

Incloent aquestes fites a (4.78–4.79), obtenim (4.71–4.73). Hem posat $\lambda^{(r)}(I_0) = \omega^{(q)}(I_0^*)$, que és un vector paral·lel a $\omega(I_0)$ ja que $\Omega^{(q)}(I_0^*) = \Omega(I_0)$. Finalment, l'energia de la trajectòria $(\phi(t), I(t))$ és

$$E = H(\phi(0), I(0)) = H^{(q)}\left(\hat{\phi}(0), I_0^*\right) = h(I_0) + R^{(q)}\left(\hat{\phi}(0), I_0^*\right)$$

ja que $h^{(q)}(I_0^*) = h(I_0)$. Deduïm que

$$|E - h(I_0)| \leq \left|R^{(q)}\left(\hat{\phi}(0), I_0^*\right)\right| \leq \left|R_0^{(q)}\right|_{G_q} + \left|\frac{\partial R^{(q)}}{\partial \phi}\right|_{G_q} \cdot \pi^n \leq \eta_q + \pi^n \varepsilon_q .$$

Per tal d'obtenir una fita quadràtica per a η_q, procedim com a (4.42) però ara usem (4.77), (4.31) i (4.76):

$$\eta_q \leq \frac{7A_qK_q^\tau}{c_q l_{q-1}\beta'_{q-1}} \cdot \varepsilon_{q-1}^2 \leq \frac{\delta_1^{(q)}\varepsilon_{q-1}}{2} \cdot \frac{1}{2}\, e^{-\left(2^{1-\nu}-1\right)\cdot 2^{(1-\nu)(q-1)}} \leq 2\varepsilon \cdot e^{-2^{(1-\nu)q}} .$$

Llavors,

$$|E - h(I_0)| \leq \left(2 + \frac{32\pi^n}{\nu\rho_1}\right)\varepsilon \cdot e^{-2^{(1-\nu)q}} \leq \frac{2^{2n+1}\varepsilon}{\hat{\rho}} \cdot \exp\left\{-\left(\frac{r_0}{r}\right)^{(1-\nu)/(\tau+1+\nu)}\right\} .$$

□

Notes

1. Per donar una idea de com caldria aplicar aquest teorema a la pràctica, suposem que I_0 és l'acció d'un tor no pertorbat donat, de la qual només en coneixem una aproximació I'_0, amb $|I'_0 - I_0| \leq r$. Si $I'_0 \in \widehat{G}_\gamma^{(r)}$, és a dir, les raons entre les freqüències de $\omega(I'_0)$ satisfan la condició diofàntica (1.2) fins ordre $K^{(r)}$, aleshores el tor invariant que correspon a l'acció I_0 sobreviu com a tor quasi-invariant.

2. Hem omès enunciar els anàlegs dels apartats (b) i (c) del teorema 21 ja que serien exactament els mateixos, amb $\mathcal{T}^{(r)}$ en comptes de $\mathcal{T}$. En particular, i d'acord amb el que hem dit a la pàgina 93, la deformació dels tors quasi-invariants respecte els no pertorbats és $\mathcal{O}(\sqrt{\varepsilon})$ si escollim $\gamma \sim \sqrt{\varepsilon}$.

3. Si fixem la mida ε de la pertorbació, podem agafar r petit i llavors la fita d'estabilitat donada a (4.71–4.73) és molt millor que la que dóna el teorema de Nekhoroshev. Això és degut al fet que la fita ha estat expressada en les noves coordenades $\left(\hat{\phi}, \hat{I}\right)$ donades per la transformació canònica $\Upsilon^{(r)}$. Aquestes coordenades són millors perquè els tors quasi-invariants vénen donats per simples equacions $\hat{I} = \text{const.}$ Al teorema de Nekhoroshev, que ve expressat en les coordenades originals, la fita d'estabilitat ha d'incloure el canvi de coordenades.

4. Comparant les fites (4.71) i (4.72) per a les variables d'acció i angulars, veiem que la separació respecte un tor donat roman molt més petita que la separació respecte un flux lineal dins d'aquest tor.

5. Un tor quasi-invariant no és en general inclòs a un nivell d'energia, però hi queda molt proper, degut a la fita (4.74).

6. L'exponent d'estabilitat donat a (4.73) és més gran (tan proper a $1/(\tau+1)$ com vulguem) com més proper a zero escollim el paràmetre ν.

7. Parlant sense rigor, podem dir que el conjunt $G_\gamma^{(r)}$ que parametritza els tors quasi-invariants té una frontera molt extensa quan r és petit. No obstant això, l'"àrea" d'aquesta frontera és finita, la qual cosa vol dir que el conjunt $G_\gamma^{(r)}$ no és tan estrany com el conjunt cantorià $\widehat{G}_\gamma$ donat pel teorema KAM. Una manera alternativa d'expressar aquest fet és usada a [MG1]: el conjunt omplert pels tors quasi-invariants conté boles de radi convenient, i en conseqüència conté punts interiors.

De manera semblant a [MG2], també podem obtenir fites d'estabilitat "superexponencials". No obstant, ens cal suposar que el hamiltonià no pertorbat h és quasiconvex. Aplicant el procés iteratiu del teorema KAM, el hamiltonià original H és transformat, després de q passos, en $H^{(q)} = h^{(q)} + R^{(q)}$. Si h és m-quasiconvex amb $m > 0$ i suposem $\varepsilon \preceq m$, llavors $h^{(q)}$ també és quasiconvex i el teorema de Nekhoroshev pot ésser aplicat a $H^{(q)}$. D'aquesta manera, obtenim per a cada trajectòria $\left(\phi^{(q)}(t), I^{(q)}(t)\right)$ de $H^{(q)}$, amb condició inicial a $\mathbf{T}^n \times G_q$, una fita d'estabilitat del tipus

$$\left|I^{(q)}(t) - I^{(q)}(0)\right| \le \rho \qquad \text{si} \quad |t| \le T,$$

amb

$$\rho \sim \varepsilon_q^{1/2n}, \qquad T \sim \exp\left\{\left(\frac{1}{\varepsilon_q}\right)^{1/2n}\right\}.$$

Escollint $q = q(r)$ com a (4.82–4.83), resulta que

$$\rho \sim \left(\varepsilon \cdot \exp\left\{-\left(\frac{1}{r}\right)^c\right\}\right)^{1/2n}, \qquad T \sim \exp\left\{\left(\frac{1}{\varepsilon} \cdot \exp\left\{\left(\frac{1}{r}\right)^c\right\}\right)^{1/2n}\right\},$$

on hem posat $c = (1-\nu)/(\tau+1+\nu)$. El radi de confinament ρ i el temps d'estabilitat T substitueixen els que hem obtingut a (4.71) i (4.73), respectivament.

Una altra observació d'interès, que constitueix l'objecte de la proposició següent, és que si a (4.69) escollim r adequadament, llavors el conjunt $G_\gamma^{(r)}$ conté el bloc no ressonant emprat a la prova del teorema de Nekhoroshev. Recordem que, fixat un ordre K, el bloc no ressonant B_0 venia donat, a l'espai de freqüències, pel lema geomètric (lema 12), i era α_0, K-no ressonant mòdul 0, amb

$$\alpha_0 \sim \frac{1}{K^{n-1}} \ . \tag{4.84}$$

A l'espai d'accions, posàvem $G_0 = \omega^{-1}(B_0)$. Dins la prova del teorema de Nekhoroshev (teorema 13), preníem

$$K \sim \left(\frac{1}{\varepsilon}\right)^{1/2n} . \tag{4.85}$$

Proposició 23 *En el context del teorema 22, si escollim $\gamma \sim \sqrt{\varepsilon}$ i $r \sim \varepsilon$, i si ε és prou petit, aleshores*

$$G_\gamma^{(r)} \supset G_0 \cap \left(\mathcal{G} - \frac{2\gamma}{\mu}\right). \tag{4.86}$$

Prova Ja ha estat justificat a la pàgina 93 que podem escollir $\gamma \sim \sqrt{\varepsilon}$. Llavors, d'acord amb (4.68), també podem escollir $r \sim \varepsilon$. D'altra banda, $B_0 = \omega(G_0)$ és α_0, K-no ressonant mòdul 0, amb

$$\alpha_0 \sim \varepsilon^{(n-1)/2n}, \qquad K \sim \left(\frac{1}{\varepsilon}\right)^{1/2n},$$

on hem tingut en compte (4.84–4.85). Per provar (4.86), és suficient veure que si

$$|k \cdot \omega(I)| \geq \alpha_0 \qquad \forall k \in \mathbf{Z}^n,\ 0 < |k|_1 \leq K,$$

llavors

$$|k \cdot \omega(I)| \geq \gamma \qquad \forall k \in \mathbf{Z}^n,\ 0 < |k|_1 \leq K^{(r)}.$$

En primer lloc, és clar que $\alpha_0 > \gamma$ si ε és prou petit. A més, per (4.70) tenim

$$K^{(r)} \sim \left(\frac{1}{\varepsilon}\right)^{1/2(\tau+1+\nu)} .$$

Llavors $K > K^{(r)}$ si ε és prou petit ja que $\tau > n-1$ i $\nu > 0$. □

Com hem comentat a la pàgina 55, per a les trajectòries amb condicions inicials sobre $\mathbf{T}^n \times G_0$, el radi de confinament i el temps d'estabilitat donats per la teoria de Nekhoroshev vénen donats per

$$\rho \sim \varepsilon^{(n+1)/2n}, \qquad T \sim \exp\left\{\left(\frac{1}{\varepsilon}\right)^{1/2n}\right\}.$$

Amb el teorema 22 i la proposició 23 recuperem les fites d'estabilitat efectiva sobre el bloc no ressonant, però amb una millora important del radi de confinament:

$$\rho \sim \exp\left\{-\left(\frac{1}{r}\right)^{(1-\nu)/(\tau+1+\nu)}\right\} \sim \exp\left\{-\left(\frac{1}{\varepsilon}\right)^{(1-\nu)/2(\tau+1+\nu)}\right\},$$

si bé el temps d'estabilitat esdevé quelcom més petit:

$$T \sim \exp\left\{\left(\frac{1}{r}\right)^{(1-\nu)/(\tau+1+\nu)}\right\} \sim \exp\left\{\left(\frac{1}{\varepsilon}\right)^{(1-\nu)/2(\tau+1+\nu)}\right\}.$$

No obstant això, assenyalem com a principal mancança d'aquestes estimacions el fet que no poden ésser aplicades directament a totes les trajectòries amb condicions inicials sobre $\mathbf{T}^n \times G_0$. En efecte, aquestes fites són vàlides sobre els tors quasi-invariants associats a accions $I \in G_0$. Aquests tors, com hem dit a la nota 2 del teorema 22, es troben (igual que els tors KAM) a distància $\mathcal{O}(\sqrt{\varepsilon})$ dels tors no pertorbats. Amb tot, malgrat que es faci difícil precisar quines condicions inicials donen un radi exponencialment petit, sí que podem garantir que aquesta estimació del radi és aplicable a una gran majoria de condicions inicials: la mesura del complementari és $\mathcal{O}(\sqrt{\varepsilon})$.

El fet que el radi de confinament sigui exponencialment petit en ε es deu, com ja hem comentat a la nota 3, al fet que les fites han estat expressades en coordenades més adequades que les originals. A més a més, però, si al teorema 22 escollim $r \ll \varepsilon$ aleshores el radi és encara molt més petit, i el temps molt més gran. En conseqüència podem parlar d'una graduació de les fites d'estabilitat efectiva sobre dominis no ressonants: a les accions que tenen freqüències més properes a diofàntiques els corresponen tors més propers a invariants. Tot plegat culmina en els tors KAM, quan $r = 0$.

Finalment, assenyalem que a les regions ressonants no podem esperar tenir un radi de confinament exponencialment petit en ε. En general, si per exemple considerem un hamiltonià en forma normal (sense la resta), resulta que sobre una varietat invariant d'un tor hiperbòlic l'allunyament d'una trajectòria respecte la seva condició inicial és $\mathcal{O}(\sqrt{\varepsilon})$ en un temps $\mathcal{O}(1/\sqrt{\varepsilon})$. Una extensió dels resultats d'aquesta secció a les regions ressonants podria venir donada per algunes idees que exposarem a la pàgina 140 (i que de fet apareixen en un cas simple a [Nei2]), sobre la possible separació exponencialment petita de les varietats invariants d'un tor hiperbòlic del hamiltonià complet (afegint-hi la resta) respecte les varietats invariants de la forma normal.

4.6 Teorema KAM a l'entorn d'un punt fix el·líptic

Ens ocupem en aquesta secció de l'existència de tors invariants n-dimensionals a l'entorn d'un punt fix el·líptic d'un sistema hamiltonià amb n graus de llibertat. Sota condicions adequades, aplicant els resultats de la secció 4.4 veurem que en un entorn del punt fix, de radi r prou petit, existeix un gran nombre de tors invariants, de manera que la mesura de llur complementari és exponencialment petita en $1/r$ si el vector de freqüències és diofàntic.

Sigui H un hamiltonià real analític en un entorn d'un punt fix el·líptic, o punt d'equilibri el·líptic, que situem a l'origen, amb exponents característics $i\lambda_1, \ldots, i\lambda_n$, essent $\lambda_j \in \mathbf{R}$, $j = 1, \ldots, n$. Si les λ_j són diferents, és sabut que existeix un canvi lineal a coordenades canòniques $(q, p) = (q_1, \ldots, q_n, p_1, \ldots, p_n)$, en les quals el hamiltonià es pot escriure en la forma

$$H(q, p) = \sum_{s \geq 2} H_s(q, p), \tag{4.87}$$

on cada H_s és un polinomi homogeni de grau s en (q, p), i concretament

$$H_2(q, p) = \frac{1}{2} \sum_{j=1}^{n} \lambda_j \left(q_j^2 + p_j^2\right).$$

Les λ_j són les freqüències angulars del punt el·líptic; escriurem $\lambda = (\lambda_1, \ldots, \lambda_n)$. És habitual d'introduir les variables d'acció $I = (I_1, \ldots, I_n)$, definides per

$$I_j = \frac{1}{2} \left(q_j^2 + p_j^2\right), \qquad j = 1, \ldots, n, \tag{4.88}$$

amb la qual cosa tenim $H_2 = \lambda \cdot I$.

Suposem que el vector λ és no ressonant mòdul 0 fins un cert ordre K, és a dir,

$$k \cdot \lambda \neq 0 \qquad \forall k \in \mathbf{Z}^n,\ 0 < |k|_1 \leq K.$$

El *teorema de Birkhoff* [Bi, Mo3] estableix que existeix una transformació canònica $\Psi^{(K)}$, definida en un entorn de l'origen i propera a la identitat (és a dir, $D\Psi^{(K)}(0) = \mathrm{Id}$), tal que $\mathcal{H}^{(K)} = H \circ \Psi^{(K)}$ és en *forma normal de Birkhoff fins a grau* K (o forma normal no ressonant):

$$\mathcal{H}^{(K)}(q, p) = \lambda \cdot I + \mathcal{Z}^{(K)}(I) + \mathcal{R}^{(K)}(q, p),$$

essent

$$\mathcal{Z}^{(K)}(I) = \sum_{\substack{4 \leq s \leq K \\ s \text{ parell}}} \mathcal{Z}_s(I), \qquad \mathcal{R}^{(K)}(q, p) = \sum_{s \geq K+1} \mathcal{R}_s^{(K)}(q, p), \tag{4.89}$$

on cada $\mathcal{Z}_s(I)$ és un polinomi homogeni de grau $s/2$ en I, i cada $\mathcal{R}_s^{(K)}(q, p)$ és un polinomi homogeni de grau s en (q, p). El hamiltonià

$$h^{(K)}(I) := \lambda \cdot I + \mathcal{Z}^{(K)}(I)$$

és, com és sabut, integrable, i rep el nom de forma normal de Birkhoff de grau K. Malgrat que la transformació $\Psi^{(K)}$ no és única, sí que ho és el polinomi $h^{(K)}(I)$, ja que les $\mathcal{Z}_s(I)$ vénen determinades pel hamiltonià de partida [Mo3, pàg. 9].

El hamiltonià $\mathcal{H}^{(K)}$ és quasi-integrable si ens restringim a un entorn petit del punt el·líptic. Aquest fet és posat de manifest passant a variables acció–angle. Fent el conegut canvi canònic

$$q_j = \sqrt{2I_j} \cdot \cos \phi_j, \qquad p_j = \sqrt{2I_j} \cdot \sin \phi_j, \qquad j = 1, \ldots, n,$$

les I_j coincideixen amb les que hem definit a (4.88). Aleshores tenim, en les coordenades (ϕ, I),

$$\mathcal{H}^{(K)}(\phi, I) = h^{(K)}(I) + \mathcal{R}^{(K)}(\phi, I), \tag{4.90}$$

que és un hamiltonià quasi-integrable en un entorn del punt el·líptic de radi r petit, car $\mathcal{R}^{(K)} = \mathcal{O}\left(r^{K+1}\right)$.

Imposant les condicions adequades, aplicarem el teorema KAM al hamiltonià (4.90) per tal d'establir l'existència de tors invariants en un entorn de radi r i fitar la mesura del complementari. Però abans de tot hem de veure com ha d'ésser r per tal que la transformació a forma normal de Birkhoff sigui vàlida a tot l'entorn. Això requereix disposar d'una versió més quantitativa del teorema de Birkhoff. Donem més avall aquest resultat quantitatiu (proposició 24), el qual enunciem a partir de resultats continguts a l'article d'A. Giorgilli i altres [GDFGS].

Per tal d'obtenir més còmodament la forma normal i dur a terme les acotacions, hom sol considerar les coordenades canòniques complexes (x, y) definides pel canvi lineal

$$x_j = \frac{1}{\sqrt{2}}(q_j - ip_j), \qquad y_j = -\frac{i}{\sqrt{2}}(q_j + ip_j), \qquad j = 1, \ldots, n. \tag{4.91}$$

Notem que

$$I_j = i\, x_j y_j, \qquad j = 1, \ldots, n. \tag{4.92}$$

Les H_s que componen el hamiltonià (4.87) també són polinomis homogenis de grau s en (x, y). Usant la notació $x^l = x_1^{l_1} \cdots x_n^{l_n}$, $y^m = y_1^{m_1} \cdots y_n^{m_n}$, escriurem

$$H_s(x, y) = \sum_{\substack{l,m \in \mathbf{N}^n \\ |l+m|_1 = s}} h_{l,m} x^l y^m.$$

Donat que, pel canvi (4.91), tenim q, p reals si i només si $\overline{y} = ix$, veiem que el hamiltonià és "real" si els seus coeficients satisfan la relació $h_{l,m} = i^{|l+m|_1} \cdot \overline{h_{m,l}}$.

Introduïm algunes definicions. Donat $r > 0$, considerem els polidiscs, real i complex, centrats a l'origen i de radi r:

$$\begin{aligned} \mathcal{B}_r &:= \left\{(q, p) \in \mathbf{R}^{2n} \;:\; |(q, p)| \leq r\right\} = \left\{(x, y) \in \mathbf{C}^{2n} \;:\; |(x, y)| \leq r,\ \overline{y} = ix\right\}, \\ \widehat{\mathcal{B}}_r &:= \left\{(x, y) \in \mathbf{C}^{2n} \;:\; |(x, y)| \leq r\right\}, \end{aligned}$$

essent

$$|(q, p)| := \max_{j=1,\ldots,n} \sqrt{q_j^2 + p_j^2}, \qquad |(x, y)| := \max_{j=1,\ldots,n} \sqrt{|x_j|^2 + |y_j|^2}.$$

Com a [GDFGS], donat un polinomi homogeni

$$f_s(x, y) = \sum_{|l+m|_1 = s} f_{l,m} x^l y^m,$$

definim la norma

$$\|f_s\| := \sum_{|l+m|_1=s} |f_{l,m}| \,. \tag{4.93}$$

Podem estendre aquesta definició al cas que f_s sigui una funció vectorial o matricial; en aquest cas els coeficients $f_{l,m}$ són vectors o matrius i $|f_{l,m}|$ denota llur norma euclidiana. Observem que, donada $f = \sum_s f_s$, si existeixen a, b tals que $\|f_s\| \le a^s b$ per a tot s llavors f és analítica sobre $\widehat{\mathcal{B}}_r$ si $r < 1/a$.

Proposició 24 *Sigui* $H(x,y) = \sum_{s\ge 2} H_s$ *hamiltonià real amb* $H_2 = \lambda \cdot I$, *i suposem que* $\|H_s\| \le c^{s-2}d$ *per a* $s \ge 3$. *Suposem que el vector* λ *és* α_K, K*-no ressonant mòdul* 0, *amb* $0 < \alpha_K \le 1$ *i* $K \ge 4$. *Aleshores, existeix una transformació canònica real* $\Psi^{(K)}$, *analítica en un entorn de l'origen i propera a la identitat, tal que* $\mathcal{H}^{(K)} = H \circ \Psi^{(K)}$ *és en forma normal de Birkhoff fins a grau* K*:*

$$\mathcal{H}^{(K)}(x,y) = h^{(K)}(I) + \mathcal{R}^{(K)}(x,y),$$
$$h^{(K)}(I) = \lambda \cdot I + \mathcal{Z}^{(K)}(I),$$

essent $\mathcal{Z}^{(K)}$, $\mathcal{R}^{(K)}$ *com a (4.89). Existeixen constants* $c_1 \ge 1$, c_2, c_3 *depenents només de* c *i* d *tals que, si definim*

$$r_K^* = \frac{\alpha_K}{c_1 K} \,, \tag{4.94}$$

llavors:

a) $\|\mathcal{Z}_s\| \le \dfrac{c_2}{(r_K^*)^{s-3}}$ *per a tot* s *parell,* $4 \le s \le K$.

b) $\left\|\mathcal{R}_s^{(K)}\right\| \le \dfrac{c_3}{(r_K^*)^{s-1}}$ *per a tot* $s \ge K+1$.

c) *La transformació* $\Psi^{(K)}$ *és analítica sobre* $\widehat{\mathcal{B}}_{r_K^*}$, *i la desigualtat següent és vàlida:*

$$\left|\Psi^{(K)}(x,y) - (x,y)\right| \le \frac{1}{2}\,|(x,y)| \qquad \forall (x,y) \in \widehat{\mathcal{B}}_{r_K^*}.$$

Aquest resultat prové bàsicament del teorema 5.5 i de la proposició 3.5 de [GDFGS]. Hem agafat, per a més comoditat, un valor de r_K^* un xic més petit del que apareix al teorema 5.5, el qual ens dóna directament les fites sobre les $\mathcal{R}_s^{(K)}$. En canvi, les fites sobre les $\mathcal{Z}_s$ no apareixen directament al citat teorema però es poden deduir fàcilment de la prova de la proposició 5.1 del referit article. De fet, potser podríem haver millorat les fites tenint en compte que $\mathcal{Z}_s = 0$ per a s senar. En relació a la distància de la transformació $\Psi^{(K)}$ a la identitat, obtenim la fita corresponent prenent les constants adequades a la proposició 3.5 i reduint encara més el valor de r_K^*.

Comentem que, a [GDFGS], la transformació canònica necessària per al pas a forma normal és generada mitjançant l'*algorisme de Giorgilli–Galgani*. Aquest constitueix una variant del mètode de les sèries de Lie, consistent a obtenir la transformació canònica com a flux d'un únic hamiltonià generador no autònom (mentre que a la secció 2.1 usem successives transformacions generades per hamiltonians autònoms). L'algorisme de Giorgilli–Galgani fou desenvolupat a [GG1]; posteriorment permeté de controlar el radi d'analiticitat de la forma normal fins a cert ordre d'un hamiltonià, a [GG2] i al resultat de [GDFGS] que acabem de presentar. Això no havia estat possible fins aleshores amb l'ús del clàssic mètode consistent a definir les transformacions canòniques fent ús de funcions generatrius de variables mixtes.

D'altra banda, hem de dir que els resultats provats a [GDFGS] s'apliquen a un cas més general que el que considerem aquí, car els autors suposen sobre λ una condició de no ressonància respecte qualsevol mòdul $\mathcal{M}$, i consideren una forma normal ressonant. Això els permet deduir, com ja hem comentat a la secció 3.1, un resultat d'estabilitat efectiva prop del punt el·líptic, sempre que el mòdul $\mathcal{M}$ satisfaci certes condicions.

Volem assegurar, sota condicions adequades, i si r és prou petit, l'existència de tors invariants per al hamiltonià $\mathcal{H}^{(K)}$ a l'entorn $\mathcal{B}_r$, i fitar la mesura del complementari. Ja hem dit que, per aplicar el teorema KAM, expressem $\mathcal{H}^{(K)}$ en les coordenades acció–angle (ϕ, I). La relació entre aquestes coordenades i les (x, y) ve donada per

$$x_j = \sqrt{I_j} \cdot e^{-i\phi_j}, \qquad y_j = -i\sqrt{I_j} \cdot e^{i\phi_j}, \qquad j = 1, \dots, n. \tag{4.95}$$

Per tal d'obtenir tors invariants a $\mathcal{B}_r$, en principi escollim el conjunt d'accions que correspon a aquest entorn:

$$\mathcal{G}_r := \left\{ I \in \mathbf{R}^n \ : \ I \geq 0, \ |I|_\infty \leq \frac{r^2}{2} \right\}. \tag{4.96}$$

Usem la notació $I \geq x$, essent $x \in \mathbf{R}$, per a expressar que $I_j \geq x$ per a $j = 1, \dots, n$. El canvi

$$(\phi, I) \in \mathbf{T}^n \times \mathcal{G}_r \longmapsto (x, y) \in \mathcal{B}_r$$

és bijectiu, llevat de la singularitat que presenten les coordenades acció–angle sobre els hiperplans coordenats $I_j = 0$. Però, per acomplir les condicions del teorema 21, caldria que $\mathcal{H}^{(K)}$ fos analític en un entorn complex $\mathcal{D}_\rho(\mathcal{G}_r)$, la qual cosa no podem pas garantir degut precisament al fet que no és possible definir $\sqrt{I_j}$ de manera analítica al voltant de $I_j = 0$. Així doncs, no podem estendre el canvi (4.95) a un entorn de $\mathcal{G}_r$, la qual cosa ens obliga a excloure un entorn dels hiperplans coordenats si volem fer ús del teorema 21. Tot i així, veurem a la prova de la proposició 25 que això no afecta de manera important la fita de la mesura del complementari. Un enfocament semblant ha estat dut a terme per J. Pöschel [Pos1], també amb la intenció d'aplicar el teorema KAM a un hamiltonià en forma normal de Birkhoff fins a cert ordre. Així, per a r, ρ_2 donats, definim el conjunt

$$\mathcal{G}_{r,\rho_2} := \left\{ I \in \mathbf{R}^n \ : \ I \geq 2\rho_2, \ |I|_\infty \leq \frac{r^2}{2} \right\}, \tag{4.97}$$

el qual és no buit si $\rho_2 < r^2/4$.

Per aplicar el teorema 21, hem de demanar que l'aplicació freqüència $\omega^{(K)} = \operatorname{grad} h^{(K)}$ sigui isoenergèticament no degenerada a l'entorn considerat. Si r és prou petit, és suficient imposar aquesta condició a l'origen mateix. Definint

$$A := \frac{\partial^2 \mathcal{Z}_4}{\partial I^2} ,$$

matriu simètrica constant, tenim

$$\omega^{(K)}(I) = \lambda + AI + \sum_{\substack{6 \le s \le K \\ s \text{ parell}}} \frac{\partial \mathcal{Z}_s}{\partial I}(I),$$

i per tant és raonable demanar que

$$\Delta_0 := \det \begin{pmatrix} A & \lambda \\ \lambda^\top & 0 \end{pmatrix} \neq 0. \tag{4.98}$$

Ara bé, no expressarem la condició isoenergètica com a (4.98) sinó en la forma (4.99). Això ens permetrà usar la versió quantitativa (4.9) de la no degeneració isoenergètica, amb una $\mu > 0$, tal com hem fet al llarg de tot el present capítol.

Hem de dir que, quan $\Delta_0 = 0$, tanmateix és possible d'imposar condicions "d'ordre superior" per tal que $\omega^{(K)}$ sigui isoenergèticament no degenerada. Considerant el determinant

$$\Delta^{(K)}(I) := \det \begin{pmatrix} \frac{\partial \omega^{(K)}}{\partial I}(I) & \omega^{(K)}(I) \\ \left(\omega^{(K)}(I)\right)^\top & 0 \end{pmatrix}$$

i desenvolupant-lo en polinomis homogenis en I:

$$\Delta^{(K)}(I) = \Delta_\sigma(I) + \Delta_{\sigma+1}(I) + \cdots,$$

essent σ el grau del primer polinomi homogeni no idènticament nul (aquest polinomi no depèn de K si $K/2 \ge \sigma+2$), una condició suficient per tal que $\omega^{(K)}$ sigui isoenergèticament no degenerada en un entorn de l'origen (però excloent-ne l'origen mateix) és que existeixi una constant $a > 0$ tal que

$$|\Delta_\sigma(I)| \ge a\, |I|^\sigma \qquad \forall I \ge 0.$$

En aquest cas, per a expressar la no degeneració isoenergètica en la seva formulació quantitativa (4.9) caldria excloure tot un entorn de l'origen (cosa que per cert ja hem fet a (4.97)), car altrament tindríem $\mu = 0$.

Remarquem també que podríem fer consideracions similars per demanar que $\omega^{(K)}$ fos no degenerada de Kolmogorov, si vulguéssim aplicar la versió ordinària del teorema KAM.

Proposició 25 *En les mateixes condicions de la proposició 24, suposem que $K \geq 10$ i també que existeix $\mu > 0$ tal que*

$$|Av + s\lambda| \geq \mu\,|v| \qquad \forall v \in \langle\lambda\rangle^{\perp}\,,\ \forall s \in \mathbf{R}, \tag{4.99}$$

essent $A = \frac{\partial^2 \mathcal{Z}_4}{\partial I^2}$. Escrivim $\omega^{(K)} = \operatorname{grad} h^{(K)}$. Sigui $\tau > n-1$. Aleshores, existeixen constants c_4, c_5, c_6 depenents només de n, τ, c_2, λ, A, μ, de manera que, donat

$$0 \ < \ r \ \leq \ c_4\,(r_K^*)^{3/2} \tag{4.100}$$

i definint

$$\delta_r^{(K)} = c_5 r^{1/2}\left(\frac{7r}{r_K^*}\right)^{K/2}, \tag{4.101}$$

llavors:

a) *Existeix un subconjunt $\widehat{G}_r^{(K)} \subset \mathcal{G}_r$ satisfent que, per a cada $I \in \widehat{G}_r^{(K)}$, el vector $\omega^{(K)}(I)$ és $\tau, \delta_r^{(K)}$-diofàntic, i existeix un tor invariant n-dimensional del hamiltonià $\mathcal{H}^{(K)}$, contingut a $\mathcal{B}_r$, amb vector de freqüències paral·lel a $\omega^{(K)}(I)$ i energia $h^{(K)}(I)$.*

b) *Escrivint $\mathcal{T}_r^{(K)}$ el conjunt omplert pels tors invariants de l'apartat (a), hom té la fita*

$$\operatorname{mes}\left[\mathcal{B}_r \setminus \mathcal{T}_r^{(K)}\right] \leq \frac{c_6 (7r)^{(K-3)/2}}{(r_K^*)^{K/2}} \cdot \operatorname{mes} \mathcal{B}_r\ .$$

Prova Sempre que usem els símbols $\preceq$ i $\sim$ en aquesta prova, serà per expressar que les constants involucrades només depenen, i eventualment, de n, τ, c_2, λ, A, μ, i no pas de r, ρ_2 ni K.

Podem suposar que $\lambda_n \neq 0$; en cas contrari podem fer una permutació de variables. Definim

$$M = |A|\,, \qquad L = |\lambda|\,, \qquad l = |\lambda_n|\,. \tag{4.102}$$

Com que volem aplicar el teorema 21 a la forma normal $\mathcal{H}^{(K)} = h^{(K)} + \mathcal{R}^{(K)}$, començarem veient que, si r és prou petit, $\omega^{(K)}$ satisfà sobre $\mathcal{G}_{r,\rho_2}$ les condicions requerides per a l'aplicació freqüència, amb les constants $2M$, $2L$, $l/2$, $\mu/2$, en el lloc de M, L, l, μ, respectivament. De fet, en aquesta primera part de la prova no és necessari que ens restringim al conjunt $\mathcal{G}_{r,\rho_2}$, car $\omega^{(K)}$ és una aplicació polinòmica. Per raons de tipus tècnic que farem paleses més avall, considerem el conjunt

$$\widetilde{\mathcal{G}}_r = \left\{ I \in \mathbf{R}^n \ : \ |I|_\infty \leq \frac{3r^2}{4} \right\}, \tag{4.103}$$

en el qual no hem imposat la restricció $I \geq 0$; aquest conjunt conté un entorn de $\mathcal{G}_{r,\rho_2}$.

Fitarem les funcions

$$\omega^{(K)}(I)-\lambda=\sum_{\substack{4\le s\le K\\ s\text{ parell}}}\frac{\partial\mathcal{Z}_s}{\partial I}(I),\qquad \frac{\partial\omega^{(K)}}{\partial I}(I)-A=\sum_{\substack{6\le s\le K\\ s\text{ parell}}}\frac{\partial^2\mathcal{Z}_s}{\partial I^2}(I)$$

sobre $\widetilde{\mathcal{G}}_r$ i $\mathcal{V}_{\rho_2}\left(\widetilde{\mathcal{G}}_r\right)$, respectivament, essent ρ_2 paràmetre que fixarem més endavant. Tenint en compte (4.92), podem veure les derivades $\frac{\partial\mathcal{Z}_s}{\partial I_j}$, $\frac{\partial^2\mathcal{Z}_s}{\partial I_j\,\partial I_{j'}}$ com a polinomis homogenis en x, y, de graus $s-2$ i $s-4$, respectivament, i considerar llur norma d'acord amb la definició (4.93). Tenim:

$$\left\|\frac{\partial\mathcal{Z}_s}{\partial I_j}\right\|=\sum_{2|l|_1=s} l_j\left|Z_{l,l}\right|,\qquad \left\|\frac{\partial^2\mathcal{Z}_s}{\partial I_j\,\partial I_{j'}}\right\|=\sum_{2|l|_1=s} l_jl_{j'}\left|Z_{l,l}\right|,$$

d'on fàcilment deduïm que

$$\left\|\frac{\partial\mathcal{Z}_s}{\partial I}\right\|\le\frac{s}{2}\left\|\mathcal{Z}_s\right\|,\qquad \left\|\frac{\partial^2\mathcal{Z}_s}{\partial I^2}\right\|\le\frac{s^2}{4}\left\|\mathcal{Z}_s\right\|. \tag{4.104}$$

Notem que si $I\in\mathcal{V}_{\rho_2}\left(\widetilde{\mathcal{G}}_r\right)$, amb $\rho_2<r^2/4$, llavors $|I|_\infty\le r^2$. Emprant les notacions de la secció 2.2,

$$\left|\omega^{(K)}-\lambda\right|_{\widetilde{\mathcal{G}}_r}\le\sum_{\substack{4\le s\le K\\ s\text{ parell}}}\frac{s}{2}\left\|\mathcal{Z}_s\right\|\left(\frac{3r^2}{4}\right)^{(s-2)/2}\le\frac{c_2}{2}\sum_{\substack{4\le s\le K\\ s\text{ parell}}}\frac{sr^{s-2}}{\left(r_K^*\right)^{s-3}}\preceq\frac{r^2}{r_K^*}, \tag{4.105}$$

$$\begin{aligned}\left|\frac{\partial\omega^{(K)}}{\partial I}-A\right|_{\widetilde{\mathcal{G}}_r,\rho_2}&\le\sum_{\substack{6\le s\le K\\ s\text{ parell}}}\frac{s^2}{4}\left\|\mathcal{Z}_s\right\|\left(r^2\right)^{(s-4)/2}\\ &\le\frac{c_2}{4}\sum_{\substack{6\le s\le K\\ s\text{ parell}}}\frac{s^2r^{s-4}}{\left(r_K^*\right)^{s-3}}\preceq\frac{r^2}{\left(r_K^*\right)^3},\end{aligned} \tag{4.106}$$

on hem fitat les sumes finites per les sèries corresponents (afins a la sèrie geomètrica) suposant, per exemple, que $r\le r_K^*/2$. De fet, si tenim en compte que $c_1\ge 1$, veiem a (4.94) que $r_K^*\le 1/4$, i llavors de (4.100) podem deduir que $r\le r_K^*/2$ a condició que prenguem $c_4\le 1$. De (4.105–4.106), també prenent c_4 prou petita (però independent de r i de K), deduïm les desigualtats

$$\left|\frac{\partial\omega^{(K)}}{\partial I}\right|_{\widetilde{\mathcal{G}}_r,\rho_2}\le 2M,\qquad \left|\omega^{(K)}\right|_{\widetilde{\mathcal{G}}_r}\le 2L\qquad\text{i}\qquad \left|\omega_n^{(K)}(I)\right|\ge\frac{l}{2}\quad\forall I\in\widetilde{\mathcal{G}}_r. \tag{4.107}$$

Vegem ara també que $\omega^{(K)}$ és $\frac{\mu}{2}$-isoenergèticament no degenerada sobre $\widetilde{\mathcal{G}}_r$. Això es dedueix de (4.99) i del lema 17, si suposem r prou petita. En efecte, per aplicar aquest lema prenem $\left|\omega^{(K)}-\lambda\right|_{\widetilde{\mathcal{G}}_r}$, $\left|\frac{\partial\omega^{(K)}}{\partial I}-A\right|_{\widetilde{\mathcal{G}}_r}$, $\frac{l}{2}$, $2M$, fent els papers de ε, ε', l, M, respectivament. Tenint en compte les fites (4.105–4.106), és suficient que es compleixi la condició (4.100) amb c_4 prou petita.

A continuació provarem que l'aplicació $\Omega^{(K)} := \Omega_{\omega^{(K)},h^{(K)},a}$, definida segons (4.10) i prenent $a = 2^7 M/l^2$, és injectiva sobre $\mathcal{G}_r \subset \widetilde{\mathcal{G}}_r$. Considerem primer el cas $K = 4$:

$$\Omega^{(4)}(I) = \left(\frac{\overline{\lambda} + \overline{A} I}{\lambda_n + A_n I} \, , \, a \left(\lambda \cdot I + \frac{1}{2} I^\top A I \right) \right) ,$$

on $\overline{A}$ i A_n denoten, respectivament, les $n-1$ primeres files i la darrera fila de la matriu A. Per les propietats descrites a la secció 4.1, aquesta aplicació és injectiva sobre $\widetilde{\mathcal{G}}_r$ si r és prou petita, i concretament ho serà per a $r \le r_0$, essent r_0 una constant que només depèn del vector λ i de la matriu A. Per deduir que $\Omega^{(K)}$ és injectiva a $\mathcal{G}_r$ si r és prou petit, aplicarem el lema 18. De manera similar a (4.105–4.106), i usant també que $r \le r_K^*/2$, obtenim les fites següents:

$$\left| \omega^{(K)} - \omega^{(4)} \right|_{\widetilde{\mathcal{G}}_r} \preceq \frac{r^4}{(r_K^*)^3} \, , \qquad \left| h^{(K)} - h^{(4)} \right|_{\widetilde{\mathcal{G}}_r} \le \frac{2 c_2 r^6}{(r_K^*)^3} \, .$$

Llavors si procedim com a (4.26–4.27), obtenim per a $I \in \widetilde{\mathcal{G}}_r$ les desigualtats:

$$\begin{aligned}
\left| \overline{\Omega^{(K)}}(I) - \overline{\Omega^{(4)}}(I) \right| &\le \frac{\left| \omega^{(K)}(I) - \omega^{(4)}(I) \right| \cdot \left| \omega^{(4)}(I) \right|}{\left| \omega_n^{(4)}(I) \right| \cdot \left| \omega_n^{(K)}(I) \right|} \preceq \frac{r^4}{(r_K^*)^3} \, , \\
\left| \Omega_n^{(K)}(I) - \Omega_n^{(4)}(I) \right| &= a \left| h^{(K)}(I) - h^{(4)}(I) \right| \preceq \frac{r^6}{(r_K^*)^3} \, .
\end{aligned}$$

Sumant aquestes fites, obtenim:

$$\left| \Omega^{(K)} - \Omega^{(4)} \right|_{\widetilde{\mathcal{G}}_r} \preceq \frac{r^4}{(r_K^*)^3} \, .$$

Aquesta fita farà el paper de ε al lema 18. Pel que respecta als paràmetres M, $\tilde{M}$, m, $\tilde{m}$, $\tilde{M}'$ de l'esmentat lema, vénen donats pel lema 16. Hem de tenir en compte (4.107), i també la fita

$$\left| \frac{\partial^3 h^{(K)}}{\partial I^3} \right|_{\widetilde{\mathcal{G}}_r} \le \sum_{\substack{6 \le s \le K \\ s \text{ parell}}} \frac{s^3}{8} \left\| \mathcal{Z}_s \right\| \left(\frac{3 r^2}{4} \right)^{(s-6)/2} \le \frac{c_2}{8} \sum_{\substack{6 \le s \le K \\ s \text{ parell}}} \frac{s^3 r^{s-6}}{(r_K^*)^{s-3}} \preceq \frac{1}{(r_K^*)^3} \, ,$$

la qual prové de la desigualtat

$$\left\| \frac{\partial^3 \mathcal{Z}_s}{\partial I^3} \right\| \le \frac{s^3}{8} \left\| \mathcal{Z}_s \right\| ,$$

que s'obté de manera similar a (4.104). Aplicant el lema 16, veiem que podem prendre com a M, $\tilde{M}$, m, $\tilde{m}$ unes constants que només depenen de les actuals M, L, l, μ definides a (4.102) i (4.99). A més, podem prendre

$$\tilde{M}' = \left(\frac{1}{4M} \left| \frac{\partial^3 h^{(K)}}{\partial I^3} \right|_{\widetilde{\mathcal{G}}_r} + \frac{12 M}{l} \right) \frac{2^8 M L}{l^2} \preceq \frac{1}{(r_K^*)^3} \, .$$

Ara ja ens trobem en condicions d'aplicar el lema 18 i, per tal de satisfer la condició (4.16), hem de suposar que

$$\frac{r^4}{\left(r_K^*\right)^3} \preceq \frac{\left(\frac{\mu}{8L}\right)^2}{4\tilde{M}'} \ ,$$

la qual cosa es pot deduir de (4.100) tenint en compte la fita que hem trobat per a $\tilde{M}'$. El lema 18 ens diu que $\Omega^{(K)}$ és injectiva sobre el conjunt $\widetilde{\mathcal{G}}_r - \frac{c_2' r^4}{\left(r_K^*\right)^3}$, on c_2' és una altra constant. Aquest conjunt conté $\mathcal{G}_r$ si tenim en compte les definicions (4.96) i (4.103), i suposem

$$\frac{r^2}{2} + \frac{c_2' r^4}{\left(r_K^*\right)^3} \le \frac{3r^2}{4} \ ,$$

cosa que també ve garantida per la condició (4.100) si escollim c_4 convenientment. Hem de fer notar que si haguéssim aplicat el lema 18 directament sobre $\mathcal{G}_r$ o $\mathcal{G}_{r,\rho_2}$, hauríem hagut d'excloure un entorn de radi relativament gran dels plans coordenats $I_j = 0$, la qual cosa afectaria de manera greu la fita de la mesura del complementari que donem a l'apartat (b). A partir d'ara ja ens restringim a $\mathcal{G}_{r,\rho_2}$; observem que $\Omega^{(K)}\left(\mathcal{G}_{r,\rho_2}\right)$ és un D-conjunt, amb $D \sim \left(r^2\right)^{n-1}$, i el seu diàmetre és $P \sim r^2$.

Resta comprovar la condició (4.30) per poder aplicar el teorema 21. El paràmetre $\delta_r^{(K)}$ definit a (4.101) farà el paper de γ. Fixem $\nu = 1/2$ i $\rho_1 = 1$, amb la qual cosa $\hat{\rho}$ només depèn de τ. Escollim

$$\rho_2 = \frac{\delta_r^{(K)}}{M} \ .$$

Amb aquesta tria, per acomplir la segona desigualtat de (4.30) només cal que $\delta_r^{(K)} \le l$, per a la qual cosa és suficient escollir c_5 de manera adequada. Comprovem també que $\rho_2 < r^2/4$. Per veure-ho, notem que si apliquem (4.100), prenent la constant c_4 prou petita, tenim

$$\frac{7r}{r_K^*} = \frac{7r^{2/3}}{r_K^*} \cdot r^{1/3} \le r^{1/3},$$

i per tant

$$\rho_2 = \frac{c_5}{M}\, r^{1/2} \left(\frac{7r}{r_K^*}\right)^{K/2} \preceq r^{1/2} \cdot r^{K/6} \preceq r^2,$$

on hem usat que $K \ge 10$. Així, si triem c_5 prou petita, tindrem $\rho_2 < r^2/4$.

Observem que la resta $\mathcal{R}^{(K)}(\phi, I)$ és analítica sobre l'entorn complex $\mathcal{D}_\rho\left(\mathcal{G}_{r,\rho_2}\right)$, essent $\rho = (1, \rho_2)$, ja que tenim $\operatorname{Re} I_j > 0$ sobre aquest entorn i per tant podem definir-hi el canvi (4.95) de manera analítica. Per comprovar la primera desigualtat de (4.30), hem de considerar la norma (2.23), definida en termes de coeficients de Fourier. Fent ús de la propietat (2.24), tindrem

$$\left\|\mathcal{R}^{(K)}\right\|_{\mathcal{G}_{r,\rho_2},\rho} \le \left(\operatorname{cotgh}^n \frac{1}{2}\right) \left|\mathcal{R}^{(K)}\right|_{\mathcal{G}_{r,\rho_2},(2,\rho_2)} . \tag{4.108}$$

A la part dreta d'aquesta desigualtat hi tenim la norma del suprem sobre $\mathcal{D}_{(2,\rho_2)}(\mathcal{G}_{r,\rho_2})$, la qual podem fitar passant a les coordenades (x,y). Recordant que $\rho_2 < r^2/4$, si $(\phi, I) \in \mathcal{D}_{(2,\rho_2)}(\mathcal{G}_{r,\rho_2})$ llavors

$$|x_j|, |y_j| \le \sqrt{|I_j|} \cdot e^{\operatorname{Im}\phi_j} \le \sqrt{\frac{r^2}{2} + \frac{r^2}{4}} \cdot e^2 \le 7r.$$

Per tant, aplicant l'apartat (b) de la proposició 24,

$$\left|\mathcal{R}^{(K)}(x,y)\right| \le \sum_{s \ge K+1} \left\|\mathcal{R}_s^{(K)}\right\| (7r)^s \le c_3 \sum_{s \ge K+1} \frac{(7r)^s}{(r_K^*)^{s-1}} \le \frac{2c_3(7r)^{K+1}}{(r_K^*)^K}, \tag{4.109}$$

si suposem que $r \le r_K^*/14$, condició que podem incloure dins de (4.100). Reunint les fites (4.108–4.109), i tenint en compte (4.101), veiem que $\left\|\mathcal{R}^{(K)}\right\|_{\mathcal{G}_{r,\rho_2},\rho} \preceq \left(\delta_r^{(K)}\right)^2$ i en conseqüència es satisfà la primera desigualtat de (4.30), si prenem la constant c_5 prou gran.

Apliquem doncs el teorema 21, i obtenim una família de tors invariants parametritzats pels $I \in \mathcal{G}_{r,\rho_2} - \frac{4\delta_r^{(K)}}{\mu}$ tals que $\omega(I)$ és $\tau, \delta_r^{(K)}$-diofàntic, amb la qual cosa hem provat l'apartat (a). Denotem $\mathcal{S}_r^{(K)}$ el conjunt omplert per aquests tors invariants en les coordenades acció–angle, i $\mathcal{T}_r^{(K)}$ el mateix conjunt traslladat a les coordenades originals. Per l'apartat (c) del teorema 21, i recordant que $D \sim r^{2n-2}$, $P \sim r^2$, veiem que

$$\operatorname{mes}\left[(\mathbf{T}^n \times \mathcal{G}_{r,\rho_2}) \setminus \mathcal{S}_r^{(K)}\right] \preceq r^{2n-2}\delta_r^{(K)} \sim r^{2n-\frac{3}{2}} \left(\frac{7r}{r_K^*}\right)^{K/2}.$$

Com que, en realitat, volem fitar la mesura del complementari respecte tot l'entorn de radi r, hem de fitar també la mesura del tros que hem exclòs en passar de $\mathcal{G}_r$ a $\mathcal{G}_{r,\rho_2}$. Resulta però que la mesura d'aquest tros és del mateix ordre que la del complementari del conjunt invariant:

$$\operatorname{mes}(\mathcal{G}_r \setminus \mathcal{G}_{r,\rho_2}) \le n\left(r^2\right)^{n-1} \cdot 2\rho_2 \sim r^{2n-2}\delta_r^{(K)} \sim r^{2n-\frac{3}{2}} \left(\frac{7r}{r_K^*}\right)^{K/2},$$

i per tant

$$\begin{aligned} \operatorname{mes}\left[(\mathbf{T}^n \times \mathcal{G}_r) \setminus \mathcal{S}_r^{(K)}\right] &\le \operatorname{mes}\left[(\mathbf{T}^n \times \mathcal{G}_{r,\rho_2}) \setminus \mathcal{S}_r^{(K)}\right] + (2\pi)^n \cdot \operatorname{mes}(\mathcal{G}_r \setminus \mathcal{G}_{r,\rho_2}) \\ &\preceq r^{2n-\frac{3}{2}} \left(\frac{7r}{r_K^*}\right)^{K/2}. \end{aligned} \tag{4.110}$$

Finalment, hem de traslladar aquesta fita a l'entorn $\mathcal{B}_r$, definit en termes de les coordenades originals. El canvi realitzat per a introduir les variables acció–angle conserva àrea, ja que és canònic. Com que aquest canvi és bijectiu entre $\mathbf{T}^n \times \mathcal{G}_r$ i $\mathcal{B}_r$, llevat d'un conjunt de mesura zero, obtenim per a la mesura de $\mathcal{B}_r \setminus \mathcal{T}_r^{(K)}$ la mateixa fita que a (4.110). Tenint en compte que $\operatorname{mes}\mathcal{B}_r \sim r^{2n}$, deduïm la fita de l'apartat (c), que es refereix de fet a la mesura relativa dins de $\mathcal{B}_r$. □

Notes

1. L'exponent $(K-3)/2$ de l'apartat (b) també ha estat obtingut per J. Pöschel [Pos1, secció 5] usant una tècnica similar a la nostra. Però el resultat de Pöschel, en no provenir d'una versió quantitativa del teorema de Birkhoff, és valid simplement "si r és prou petit" i no imposa cap condició explícita com (4.100). Com veurem, aquesta condició ens durà, en el cas que λ satisfaci una condició diofàntica, a una fita exponencialment petita de la mesura del complementari.

2. L'exponent 3/2 que apareix a (4.100) esdevindria més petit si milloréssim les fites sobre les $\mathcal{Z}_s$ a la proposició 24. Concretament, seria un 1 si a les esmentades fites hi aparegués l'exponent $s-4$ en lloc de $s-3$.

Finalment, provem que si el vector de freqüències λ satisfà una condició diofàntica, llavors podem escollir K en funció de r i obtenir, per al complementari del conjunt omplert pels tors invariants de la forma normal $\mathcal{H}^{(K)}$ a l'entorn de radi r, una fita exponencialment petita en $1/r$. El fet que la transformació $\Psi^{(K)}$ és canònica permet assegurar que la fita també és vàlida per al complementari dels tors invariants del hamiltonià original H. L'exponent d'aquesta fita és $a = 2/3(\tau+1)$.

Teorema 26 *Sigui* $H(x,y) = \sum_{s\geq 2} H_s$ *hamiltonià real amb* $H_2 = \lambda \cdot I$*, i suposem que* $\|H_s\| \leq c^{s-2}d$ *per a* $s \geq 3$*. Suposem que el vector* λ *és* τ,γ*-diofàntic, amb* $\tau > n-1$ *i* $\gamma > 0$*. Suposem també que es satisfà la condició isoenergètica (4.99) amb* $\mu > 0$*. Aleshores, existeixen constants* c_7*,* c_8*,* c_9 *depenents només de* n*,* τ*,* c*,* d*,* λ*,* A*,* μ *de manera que, per a cada*

$$0 < r \leq c_7 \gamma^{3/2}, \tag{4.111}$$

existeix un subconjunt $T_r \subset \mathcal{B}_r$ *tal que tot punt de* T_r *pertany a un tor invariant* n*-dimensional de* H*, i hom té la fita*

$$\operatorname{mes}\left[\mathcal{B}_r \setminus T_r\right] \leq \frac{c_8}{r^{3/2}} \cdot \exp\left\{ -\frac{1}{4}\left(\frac{c_9\gamma^{3/2}}{r}\right)^{2/3(\tau+1)} \right\} \cdot \operatorname{mes}\mathcal{B}_r \ .$$

Prova Fixem $K \geq 10$ a escollir. Com que λ és $\frac{\gamma}{K^\tau}, K$-no ressonant mòdul 0, aplicant la proposició 24 obtenim una transformació canònica $\Psi^{(K)}$ tal que $\mathcal{H}^{(K)} = H \circ \Psi^{(K)}$ és en forma normal fins a grau K. La transformació $\Psi^{(K)}$ és analítica sobre $\widehat{\mathcal{B}}_{r_K^*}$, essent

$$r_K^* = \frac{\gamma}{c_1 K^{\tau+1}} \ .$$

Per l'apartat (c) de la proposició 24, tenim $\Psi^{(K)}(\mathcal{B}_{2r}) \supset \mathcal{B}_r$ si $r \leq r_K^*/2$. Aplicarem la proposició 25 amb $2r$ en comptes de r per a tenir tors invariants de $\mathcal{H}^{(K)}$ sobre $\mathcal{B}_{2r}$, i a través de la transformació $\Psi^{(K)}$ molts d'aquests tors donaran tors invariants de H sobre $\mathcal{B}_r$. Per tal de satisfer la desigualtat (4.100), però amb $2r$ en comptes de r, triem $K = \left[\left(\frac{c_4 \gamma^{3/2}}{2 c_1^{3/2} \cdot r} \right)^{2/3(\tau+1)} \right]$. Tindrem $K \geq 10$ si es compleix (4.111) amb c_7 convenient. Notem també que de (4.100) es dedueix, modificant si cal la constant c_4, la desigualtat

$$r \leq \frac{r_K^*}{14e} \ .$$

Aleshores, la proposició 25 ens diu que existeix un subconjunt $\mathcal{T}_{2r}^{(K)} \subset \mathcal{B}_{2r}$ que descompon en tors invariants de $\mathcal{H}^{(K)}$, i es satisfà la fita

$$\text{mes} \left[\mathcal{B}_{2r} \setminus \mathcal{T}_{2r}^{(K)} \right] \leq \frac{c_6}{(14r)^{3/2}} \cdot e^{-K/2} \cdot \text{mes}\, \mathcal{B}_r \leq \frac{c_8}{r^{3/2}} \cdot \exp \left\{ -\frac{1}{4} \left(\frac{c_9 \gamma^{3/2}}{r} \right)^{2/3(\tau+1)} \right\} \cdot \text{mes}\, \mathcal{B}_r \ .$$

Prenent $T_r := \Psi^{(K)} \left(\mathcal{T}_{2r}^{(K)} \right) \cap \mathcal{B}_r$, tenim $\Psi^{(K)} \left(\mathcal{B}_{2r} \setminus \mathcal{T}_{2r}^{(K)} \right) \supset \mathcal{B}_r \setminus T_r$ i, pel fet que $\Psi^{(K)}$ conserva la mesura, resulta que $\text{mes}\, [\mathcal{B}_r \setminus T_r] \leq \text{mes} \left[\mathcal{B}_{2r} \setminus \mathcal{T}_{2r}^{(K)} \right]$. □

Notes

1. Els tors invariants que ens dóna aquest teorema són τ, δ_r^*-diofàntics, si definim $\delta_r^* \sim e^{-K/2} \sim \exp \left\{ - \left(\frac{\gamma^{3/2}}{r} \right)^{2/3(\tau+1)} \right\}$.
2. Per les raons ja adduïdes a la nota 2 de la proposició 25, potser podríem obtenir un exponent més gran que $2/3(\tau+1)$, si bé mai no superaria $1/(\tau+1)$. També milloraríem l'exponent $3/2$ que apareix a la condició (4.111).

Esmentem, per la seva relació amb aquest teorema, un resultat anunciat per A. Morbidelli i A. Giorgilli [MG2]. Aquest resultat expressa que, per a un hamiltonià quasi-integrable al qual s'aplica la versió ordinària del teorema KAM, en un entorn de radi r prou petit d'un tor KAM fixat existeix un gran nombre de tors invariants n-dimensionals, de manera que la mesura de llur complementari és exponencialment petita en $1/r$.

Capítol 5

Tors hiperbòlics i llurs varietats invariants

5.1 Tors invariants de dimensió inferior prop de ressonàncies

Ens proposem d'estudiar l'existència de tors invariants de dimensió inferior a n per a un sistema hamiltonià quasi-integrable amb n graus de llibertat:

$$H_\varepsilon(\phi, I) = h(I) + \varepsilon\, f(\phi, I), \tag{5.1}$$

essent $\phi \in \mathbf{T}^n$, $I \in \mathcal{G} \subset \mathbf{R}^n$ (en aquest capítol escriurem explícitament la ε de la pertorbació ja que farem desenvolupaments en ε). Buscarem els tors invariants prop d'una varietat ressonant $S_{\omega,\mathcal{M}}$, essent $\mathcal{M} \subset \mathbf{Z}^n$ un mòdul de ressonàncies fixat, i $\omega = \operatorname{grad} h$ l'aplicació freqüència (vegeu definició (1.3)).

Per al sistema integrable ($\varepsilon = 0$),

$$H_0(\phi, I) = h(I), \tag{5.2}$$

cada tor n-dimensional $I = I^*$, amb $I^* \in \mathcal{G}$, és invariant. És conegut que, si $\mathcal{M} \neq 0$, el tor corresponent a una acció $I^* \in S_{\omega,\mathcal{M}}$ (*tor ressonant*) descompon en una família de tors invariants de dimensió $m = n - d$, essent $d = \dim \mathcal{M}$. Tots els tors d'aquesta família tenen les mateixes freqüències, i són degenerats.

Per a la pertorbació ($\varepsilon \neq 0$), la situació típica és que aquests tors ressonants associats a $\mathcal{M}$ no sobreviuen però tampoc no es destrueixen completament. En general, un nombre finit dels tors de dimensió inferior sobreviuen, sofrint certa deformació, si $|\varepsilon|$ és petit i les freqüències són prou irracionals. Aquests tors que es conserven esdevenen no degenerats: hiperbòlics, el·líptics o d'altres categories intermèdies (vegeu-ne una definició a la pàgina 121).

L'interès de la localització de tors hiperbòlics de dimensió inferior, anomenats també "tors amb bigotis", rau en el fet que les probables interseccions entre les varietats invariants de diferents tors hiperbòlics constitueixen la base del mecanisme de les cadenes de transició per a detectar l'existència de difusió d'Arnol'd. Aquest mecanisme fou descrit per primer cop per V. I. Arnol'd [Ar2], mitjançant l'exemple que hem considerat a (3.30). Vegeu també [AA, § 23], i altres exemples a [CG, Chie].

Els primers resultats en el camp de la conservació de tors invariants de dimensió inferior foren obtinguts per H. Poincaré [Poi], en el cas que els tors són òrbites periòdiques ($\dim \mathcal{M} = n - 1$). Poincaré mostra que, si la pertorbació satisfà certa condició de no degeneració, diverses òrbites periòdiques degenerades del sistema no pertorbat es conserven, i algunes d'aquestes esdevenen hiperbòliques. També posa de manifest que l'existència d'un gran nombre d'òrbites periòdiques hiperbòliques pot constituir un obstacle a la integrabilitat d'un sistema hamiltonià.

Problemes d'existència de tors invariants de dimensió inferior a n han estat estudiats a [Mo2, Gr, Ze2], entre d'altres, però suposant que en absència de pertorbació el tor invariant en discussió és no degenerat, que no és el cas que ens ocupa. J. Moser [Mo2] usa essencialment els mateixos mètodes de la teoria KAM per tal d'obtenir la conservació de tors invariants $(n-1)$-dimensionals no degenerats: hiperbòlics o el·líptics. Posteriorment, S. M. Graff [Gr] desenvolupa també tècniques de tipus KAM per provar l'existència de tors hiperbòlics prop d'un punt fix no el·líptic. La dimensió dels tors ve determinada pel nombre d'exponents característics del punt fix que tenen part real no nul·la. En aquest cas la part integrable del sistema ja presenta tors hiperbòlics, i els que tenen freqüències prou irracionals es conserven. Per la seva banda, E. Zehnder desenvolupa un teorema de la funció implícita generalitzat [Ze1] i l'aplica a diversos problemes de petits divisors [Ze2]; d'aquesta manera obté proves del teorema KAM (casos analític i diferenciable) i del resultat de Graff.

Més recentment, diversos autors han estudiat la conservació de tors invariants de dimensió inferior quan els tors no pertorbats són degenerats. En línies generals, per trobar tors invariants prop de la ressonància associada a un mòdul $\mathcal{M}$, hom considera la forma normal respecte aquest mòdul, fins l'ordre que sigui necessari. Aquesta forma normal constitueix de fet un sistema intermedi entre el sistema no pertorbat (5.2) i el sistema pertorbat (5.1). Si la pertorbació satisfà alguna condició de no degeneració, tors invariants no degenerats apareixen ja en aquest sistema intermedi, com veurem més avall.

Llavors, aplicant tècniques pertorbatives hom prova que, d'aquests tors, els que tenen freqüències prou irracionals sobreviuen en el sistema (5.1) si la pertorbació és petita. A. Delshams [De] duu a terme aquest esquema a l'entorn d'un punt fix el·líptic amb vector de freqüències proper a una ressonància simple ($\dim \mathcal{M} = 1$) per trobar tors invariants de dimensió $n-1$, hiperbòlics i el·líptics. D. V. Treschev [Tr] considera el sistema (5.1) i, mitjançant una adaptació del mètode de [Gr], prova que alguns del tors de dimensió inferior en què descompon un tor ressonant associat a un mòdul $\mathcal{M}$ sobreviuen a la pertorbació i esdevenen hiperbòlics.

Un punt de vista diferent és el de R. de la Llave i C. E. Wayne [LW]: primer tracten de la conservació d'òrbites periòdiques ($\dim \mathcal{M} = n-1$), que no comporta petits divisors, i després proven l'existència de tors invariants hiperbòlics prop d'aquestes òrbites periòdiques, la dimensió dels quals depèn de l'índex de l'òrbita periòdica considerada (definició a la pàgina 121).

Cal remarcar que, tant a [LW] com a [De], els tors hiperbòlics s'obtenen a partir del teorema de la varietat central (vegeu, per exemple, [CH, capítol 9]) i aplicant teoria KAM sobre la varietat central. L'ús del teorema de la varietat central presenta alguns inconvenients de tipus tècnic ja que, fins i tot en el cas que el sistema original sigui analític, no permet assegurar que els tors obtinguts són analítics ni tampoc infinitament diferenciables, sinó tan sols finitament diferenciables. A [Gr] i [Tr] hom evita l'aplicació d'aquest teorema a base de fer servir tècniques de teoria KAM més elaborades.

A més de la verificació de l'existència de tors invariants de dimensió inferior, la major part dels treballs citats inclouen alguna descripció de les varietats invariants d'un tor hiperbòlic. Però llur tractament és en general local: es limita a un entorn de cada tor i, per tant, no permet decidir si les varietats invariants corresponents a diferents tors hiperbòlics es poden intersecar. Aquesta intersecció és important, com ja hem comentat, de cara a detectar la difusió d'Arnol'd.

Esmentem que un estudi més complet de les varietats invariants sí és factible en el treball d'A. Delshams [De], a l'entorn d'un punt fix el·líptic amb freqüències properes a una ressonància simple, ja que prova que les varietats invariants no abandonen l'entorn on la forma normal és definida. Llavors dedueix, del fet que en el seu cas la forma normal és integrable, que les varietats invariants dels tors hiperbòlics de la forma normal constitueixen connexions homoclíniques. Per tant, pot dur a terme els càlculs requerits per al mètode de Mel'nikov de primer ordre i veure que, en aquesta aproximació, les varietats invariants es tallen transversalment. Però cal dir que aquesta aproximació no és suficient per a garantir que efectivament hi ha intersecció entre les varietats invariants.

Donat $\mathcal{M} \subset \mathbf{Z}^n$ mòdul d-dimensional, el nostre objectiu és establir quins dels tors m-dimensionals en què descompon un tor ressonant associat a $\mathcal{M}$ poden sobreviure a la pertorbació (5.1). D'acord amb el que hem expressat més amunt, farem un pas de transformació a forma normal respecte $\mathcal{M}$ fins un cert grau K, que es pot escollir convenientment. Ens restringim a un subconjunt $G \subset \mathcal{G}$ no ressonant mòdul $\mathcal{M}$ fins grau K:

$$k \cdot \omega(I) \neq 0 \qquad \forall k \in \mathbf{Z}^n \setminus \mathcal{M},\ |k|_1 \leq K,\ \ \forall I \in G.$$

Tal com descrivim a la secció 2.1, hom pot construir sobre $\mathbf{T}^n \times G$ una transformació canònica que porti el nostre hamiltonià H_ε a la forma

$$\tilde{H}_\varepsilon(\phi, I) = h(I) + \varepsilon\, Z(\phi, I) + R_\varepsilon(\phi, I),$$

on

$$Z \in \mathbf{R}(\mathcal{M}, K), \qquad R_\varepsilon = \mathcal{O}\left(e^{-K}\varepsilon + \varepsilon^2\right).$$

Recordem que, com havíem vist a (2.5), Z consisteix en els harmònics de f corresponents a $k \in \mathcal{M}$, $|k|_1 \leq K$. En aquesta memòria ens limitarem a mostrar l'existència de tors invariants m-dimensionals per a la *forma normal*

$$\Gamma_\varepsilon(\phi, I) := h(I) + \varepsilon\, Z(\phi, I), \tag{5.3}$$

és a dir, menyspreant la resta R_ε. Podem dir que Γ_ε és un sistema intermedi entre (5.2) i (5.1) que conté la informació rellevant en relació als tors invariants m-dimensionals. Constitueix de fet el punt de partida per a la localització dels tors en el sistema complet (5.1). Aquesta estratègia és anàloga a l'emprada a [De] i [LW] en casos més específics: punt fix el·líptic amb ressonància simple i òrbites periòdiques, respectivament.

Veurem que serà suficient imposar certa condició de no degeneració sobre Z per tal d'assegurar l'existència de tors invariants de dimensió m per a la forma normal Γ_ε. Concretament, en un dels casos que es poden considerar aquesta condició dóna lloc a tors hiperbòlics.

De fet, la mateixa condició permet a Treschev [Tr] assegurar l'existència de tors hiperbòlics (associats a freqüències diofàntiques respecte el mòdul de ressonàncies), amb llurs varietats invariants, per al hamiltonià original H_ε, els quals depenen analíticament de $\sqrt{\varepsilon}$. Tot i això, creiem interessant dur a terme un estudi exhaustiu de la forma normal Γ_ε per les raons següents. Si apliquem el teorema de la forma normal (secció 2.5), posarem el hamiltonià en forma normal respecte el mòdul $\mathcal{M}$ llevat d'una resta exponencialment petita:

$$H^*_\varepsilon(\phi, I) = h(I) + \varepsilon\, Z^*(\phi, I) + R^*_\varepsilon(\phi, I),$$

on $Z^* \in \mathbf{R}(\mathcal{M}, K)$, i amb

$$Z^* - Z = \mathcal{O}(\varepsilon), \qquad R^*_\varepsilon = \mathcal{O}(\mu),$$

essent $\mu \sim e^{-K}\varepsilon$. Podríem escollir K com una potència de $1/\varepsilon$. Les condicions que imposarem sobre Z per a l'existència dels tors hiperbòlics no es veuran afectades per petites pertorbacions. Així, si ε és prou petit aquestes condicions sobre la pròpia Z (més fàcils de verificar que sobre Z^*) permetran d'assegurar l'existència de tors hiperbòlics per a

$$\Gamma_\varepsilon^*(\phi, I) = h(I) + \varepsilon\, Z^*(\phi, I). \tag{5.4}$$

El hamiltonià original H_ε s'obté afegint una pertorbació molt petita, d'ordre $\mu \ll \varepsilon$, a la forma normal Γ_ε^* (deixem de banda el canvi canònic). En conseqüència, cal esperar trobar els tors hiperbòlics de H_ε a partir dels de Γ_ε^* prenent μ com a paràmetre de pertorbació, en comptes de ε. Això permetria, d'una banda, localitzar els tors hiperbòlics de H_ε a partir del càlcul explícit de Γ_ε^*. D'altra banda, en el cas d'una ressonància simple podríem confinar llurs varietats invariants, durant un temps exponencialment gran, a partir dels resultats que exposarem a la secció 5.3.

Com ja hem dit, ens limitarem a l'estudi de la forma normal introduïda a (5.3). En aquesta secció, suposarem que el mòdul de ressonàncies escollit és

$$\mathcal{N}_d := \left\{ k = (k', k'') \in \mathbf{Z}^n = \mathbf{Z}^m \times \mathbf{Z}^d \ : \ \ k' = 0 \right\} = \{0\} \times \mathbf{Z}^d,$$

i a la secció següent mostrarem que els nostres resultats s'estenen a qualsevol altre mòdul. Emprem la notació $v' = (v_1, \ldots, v_m)$, $v'' = (v_{m+1}, \ldots, v_n)$, per a qualsevol vector $v = (v_1, \ldots, v_n)$. Per a més comoditat, escrivim

$$\psi = \phi', \quad q = \phi'', \quad J = I', \quad p = I''.$$

Observem que si Z és en forma normal respecte $\mathcal{N}_d$ llavors no depèn de ψ, i per tant escriurem $Z(q, I)$. Les variables J són constants al llarg de totes les trajectòries ($\dot{J} = 0$).

Per a $\varepsilon = 0$, els tors ressonants sobre $S_{\omega,\mathcal{N}_d}$ tenen una estructura molt simple. Com que aquesta varietat ressonant ve definida per l'equació

$$\omega''(I) = 0, \tag{5.5}$$

essent $\omega''(I) = (\omega_{m+1}(I), \ldots, \omega_n(I))$, resulta que $\dot{q} = 0$ sobre $S_{\omega,\mathcal{N}_d}$. Llavors, cada tor n-dimensional definit per

$$I = I^*, \quad \phi \in \mathbf{T}^n,$$

amb $I^* \in S_{\omega,\mathcal{N}_d}$, descompon en una família d-paramètrica de tors invariants de dimensió m: per a cada $q^* \in \mathbf{T}^d$, el tor

$$I = I^*, \quad q = q^*, \quad \psi \in \mathbf{T}^m \tag{5.6}$$

és invariant. El flux sobre aquest tor és lineal, amb vector de freqüències

$$\dot{\psi} = \omega'\left(I^*\right) = \left(\omega_1\left(I^*\right), \ldots, \omega_m\left(I^*\right)\right).$$

Fixant $I^* = (J^*, p^*) \in S_{\omega,\mathcal{N}_d}$, $q \in \mathbf{T}^d$, el teorema següent dóna condicions per tal que el tor (5.6) sobrevisqui en la forma normal (5.3) si $\varepsilon \neq 0$ és prou petit. La primera condició és que $\frac{\partial^2 h}{\partial p^2}(I^*)$ sigui invertible. Això implica que la varietat $S_{\omega,\mathcal{N}_d}$ és regular (i m-dimensional) en el punt I^*, i que a l'entorn d'aquest punt la podem parametritzar aïllant

$$p = p_J \tag{5.7}$$

de l'equació (5.5). Escriurem també $I_J = (J, p_J)$.

Una altra condició expressa que q^* és un punt crític no degenerat de la funció

$$V_{I^*}(q) := Z(q, I^*), \qquad q \in \mathbf{T}^d. \tag{5.8}$$

Els tors m-dimensionals que corresponen als diferents q^* que satisfacin aquesta condició són aïllats dins el tor n-dimensional $I = I^*$, però formen una família m-paramètrica amb els que corresponen a accions $I_J = (J, p_J) \in S_{\omega,\mathcal{N}_d}$ properes a I^*. En efecte, si q^* és un d'aquests punts crítics, tenim

$$\frac{\partial Z}{\partial q}(q^*, J^*, p^*) = 0, \qquad \frac{\partial^2 Z}{\partial q^2}(q^*, J^*, p^*) \quad \text{invertible,}$$

i llavors a l'entorn de $q = q^*$, $J = J^*$ podem aïllar

$$q = q_J \tag{5.9}$$

de $\frac{\partial Z}{\partial q}(q, J, p_J) = 0$ i obtenim també punts crítics no degenerats de la funció V_{I_J} per a cada J propera a J^*.

Observem que, pel fet que Γ_ε no depèn de les variables ψ, hom pot prendre J com a simple paràmetre i considerar el sistema com a *hamiltonià reduït* amb d graus de llibertat, car només dependrà de (q, p). Escriurem $\Gamma_{J,\varepsilon}$ per denotar el hamiltonià reduït que correspon a un valor fixat de J. Per localitzar tors invariants m-dimensionals de Γ_ε, n'hi ha prou a buscar punts fixos del hamiltonià reduït.

Pel que hem vist, el hamiltonià $\Gamma_{J^*,0}$ té una família de punts fixos degenerats: (q, p^*), amb $q \in \mathbf{T}^d$. D'aquests, només els que corresponguin a valors $q = q^*$ satisfent les condicions que hem esmentat més amunt sobreviuran a la pertorbació i esdevindran punts fixos no degenerats.

Recordem que un punt fix o punt d'equilibri d'un sistema hamiltonià amb d graus de llibertat s'anomena no degenerat si no té el 0 com a exponent característic (és a dir, si la matriu del sistema linealitzat en aquest punt és invertible). Podem definir l'*índex* d'un punt fix com la meitat del nombre d'exponents característics amb part real no nul·la, comptats amb multiplicitat. L'índex l sempre és un nombre enter comprès entre 0 i d. Si $l=0$, el punt fix s'anomena el·líptic i, si $l=d$, hiperbòlic. Si $l \geq 1$, podem aplicar el teorema de la varietat estable [CL, capítol 13] i, tenint en compte a més el caràcter hamiltonià del sistema, hom dedueix que el punt fix té varietats invariants estable i inestable de dimensió l.

Amb cert abús del llenguatge, referirem als tors invariants m-dimensionals de la forma normal Γ_ε les mateixes nocions que als punts fixos dels quals provenen, ja que s'obtindran simplement afegint la variable ψ que havia estat ignorada. Així, parlarem de *tors invariants no degenerats*, de l'*índex* d'un tor invariant, de *tors el·líptics* i de *tors hiperbòlics* o *tors amb bigotis.* A un tor d'índex $l \geq 1$ podrem associar *varietats invariants estable* i *inestable* de dimensió $m+l$. En el cas d'un tor hiperbòlic les varietats invariants estable i inestable s'anomenen també *bigoti entrant* i *bigoti sortint,* respectivament, i tenen dimensió n. Els nostres tors amb bigotis ho són també segons la definició més habitual, i més intrínseca, en termes de varietats invariants (vegeu, per exemple, [AA, § 23]), amb l'única diferència que en el nostre cas no exigim que les freqüències sobre el tor siguin incommensurables ja que això no ens serà necessari per a la seva localització en la forma normal. Remarquem també que un tor amb bigotis o hiperbòlic no és "normalment hiperbòlic" ja que no totes les direccions complementàries són hiperbòliques (també n'hi ha de neutres).

Teorema 27 *Siguin* $1 \leq d \leq n-1$ *i* $m=n-d$, *i considerem el hamiltonià* $\Gamma_\varepsilon(\phi,I)=h(I)+\varepsilon Z(q,I)$, *que suposem analític sobre* $\phi=(\psi,q)\in \mathbf{T}^m\times\mathbf{T}^d$, $I=(J,p)\in G$, *amb* $G\subset \mathbf{R}^m\times\mathbf{R}^d$ *obert. Escrivim* $\omega=\operatorname{grad} h$. *Sigui* $I^*=(J^*,p^*)\in S_{\omega,\mathcal{N}_d}$ *tal que la matriu*

$$A:=\frac{\partial^2 h}{\partial p^2}(I^*)$$

és invertible. Sigui $q^*\in\mathbf{T}^d$ *un punt crític no degenerat de la funció* $V_{I^*}(q)=Z(q,I^*)$, *i escrivim*

$$B:=\frac{\partial^2 Z}{\partial q^2}(q^*,I^*).$$

Siguin p_J *i* q_J *definits com a (5.7) i (5.9), respectivament. Aleshores, existeix una aplicació analítica* $(J,\varepsilon)\mapsto(q_{J,\varepsilon},p_{J,\varepsilon})$, *definida per a* $|\varepsilon|$ *i* $|J-J^*|$ *prou petits, tal que:*

a) *Per a cada* J, ε, *el conjunt*

$$\mathcal{T}_{J,\varepsilon}=\{(\psi,q_{J,\varepsilon},J,p_{J,\varepsilon})\ :\ \psi\in\mathbf{T}^m\}$$

és un tor invariant de Γ_ε, *amb flux lineal donat pel vector de freqüències* $\omega'(J,p_{J,\varepsilon})+\varepsilon\frac{\partial Z}{\partial J}(q_{J,\varepsilon},J,p_{J,\varepsilon})$. *A més,* $q_{J,0}=q_J$, $p_{J,0}=p_J$.

b) *Si la matriu* AB *té* $d-l$ *valors propis positius i* l *valors propis entre negatius i no reals, essent* $0\leq l\leq d$, *i els valors propis positius són tots diferents, llavors* *per a $\varepsilon > 0$ i $|J - J^*|$ prou petits (restringint més, si convé, l'entorn on és vàlid l'apartat (a)) el tor invariant $\mathcal{T}_{J,\varepsilon}$ és no degenerat d'índex l.*

Prova Per trobar tors invariants m-dimensionals de Γ_ε, buscarem punts fixos (q,p) de hamiltonià reduït $\Gamma_{J,\varepsilon}$, amb J fixada. Aquests punts fixos seran solució del sistema d'equacions

$$\frac{\partial \Gamma_{J,\varepsilon}}{\partial p}(q,p) = 0, \qquad -\frac{\partial \Gamma_{J,\varepsilon}}{\partial q}(q,p) = 0,$$

és a dir,

$$\omega''(J,p) + \varepsilon \frac{\partial Z}{\partial p}(q,J,p) = 0, \qquad \frac{\partial Z}{\partial q}(q,J,p) = 0. \tag{5.10}$$

Per a $J = J^*$, $\varepsilon = 0$, tenim com a solució $q = q^*$, $p = p^*$. Les hipòtesis ens diuen que les matrius A i B són invertibles, la qual cosa permet d'aplicar el teorema de la funció implícita. Obtenim d'aquesta manera la solució $q = q_{J,\varepsilon}$, $p = p_{J,\varepsilon}$ en un entorn de $J = J^*$, $\varepsilon = 0$, i això prova l'apartat (a).

Per classificar el punt fix de $\Gamma_{J,\varepsilon}$ que hem obtingut, hem de considerar la matriu $(2d) \times (2d)$ del sistema linealitzat en aquest punt:

$$\mathcal{D}_{J,\varepsilon} = \begin{pmatrix} \dfrac{\partial^2 \Gamma_{J,\varepsilon}}{\partial q\,\partial p}(q_{J,\varepsilon}, p_{J,\varepsilon}) & \dfrac{\partial^2 \Gamma_{J,\varepsilon}}{\partial p^2}(q_{J,\varepsilon}, p_{J,\varepsilon}) \\ -\dfrac{\partial^2 \Gamma_{J,\varepsilon}}{\partial q^2}(q_{J,\varepsilon}, p_{J,\varepsilon}) & -\dfrac{\partial^2 \Gamma_{J,\varepsilon}}{\partial q\,\partial p}(q_{J,\varepsilon}, p_{J,\varepsilon}) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathcal{O}(\varepsilon) & A_{J,\varepsilon} + \mathcal{O}(\varepsilon) \\ -\varepsilon\, B_{J,\varepsilon} & \mathcal{O}(\varepsilon) \end{pmatrix}, \tag{5.11}$$

essent $A_{J,\varepsilon} = \frac{\partial^2 h}{\partial p^2}(J, p_{J,\varepsilon})$ i $B_{J,\varepsilon} = \frac{\partial^2 Z}{\partial q^2}(q_{J,\varepsilon}, J, p_{J,\varepsilon})$. El punt fix serà no degenerat si $\mathcal{D}_{J,\varepsilon}$ és invertible, i llavors podrem determinar el seu índex comptant quants dels valors propis de $\mathcal{D}_{J,\varepsilon}$ són imaginaris purs. Aquest problema és un xic delicat ja que per a $\varepsilon = 0$ és degenerat, però ho podem resoldre fàcilment elevant la matriu al quadrat (vegeu a [LW] una situació anàloga en el cas d'aplicacions de Poincaré). Tenim:

$$\mathcal{D}_{J,\varepsilon}^2 = \varepsilon\, \widetilde{\mathcal{D}}_{J,\varepsilon}\ ,$$

essent

$$\widetilde{\mathcal{D}}_{J,\varepsilon} = \begin{pmatrix} -A_{J,\varepsilon}B_{J,\varepsilon} + \mathcal{O}(\varepsilon) & \mathcal{O}(1) \\ \mathcal{O}(\varepsilon) & -B_{J,\varepsilon}A_{J,\varepsilon} + \mathcal{O}(\varepsilon) \end{pmatrix}.$$

Del fet que la matriu $\mathcal{D}_{J,\varepsilon}$ és infinitesimalment simplèctica, hom dedueix fàcilment que els valors propis de $\widetilde{\mathcal{D}}_{J,\varepsilon}$ són tots de multiplicitat parella. Observem que

$$\widetilde{\mathcal{D}}_{J^*,0} = \begin{pmatrix} -AB & \mathcal{O}(1) \\ 0 & -BA \end{pmatrix}.$$

Tenint en compte que $BA = (AB)^\top$ ja que A i B són simètriques, de la hipòtesi de l'apartat (b) sobre els valors propis de la matriu AB deduïm que la matriu $\widetilde{\mathcal{D}}_{J^*,0}$ té $d - l$

valors propis negatius dobles, tots diferents, i $2l$ valors propis (comptats amb multiplicitat) entre positius i no reals. Si ε i $|J - J^*|$ són prou petits (més petits, si cal, que a l'apartat (a)), la mateixa situació és vàlida per als valors propis de $\widetilde{\mathcal{D}}_{J,\varepsilon}$, car aquests varien de manera contínua amb la matriu, i a més els valors propis negatius dobles no poden bifurcar-se en un parell de valors propis complexos conjugats perquè esdevindrien simples. Multiplicant per $\varepsilon > 0$ els valors propis obtinguts i prenent-ne l'arrel quadrada, deduïm que el punt fix $(q_{J,\varepsilon}, p_{J,\varepsilon})$ és no degenerat d'índex l, ja que $\mathcal{D}_{J,\varepsilon}$ té $2(d-l)$ valors propis imaginaris purs i $2l$ amb part real no nul·la. Afegint la variable ψ, hem provat l'apartat (b): el tor invariant $\mathcal{T}_{J,\varepsilon}$ és no degenerat d'índex l. □

Notes

1. L'enunciat de l'apartat (b) per a $\varepsilon < 0$ seria anàleg. L'única diferència és que en aquest cas $d - l$ hauria de denotar el nombre de valors propis negatius de AB, els quals caldria suposar tots diferents, i l el nombre de valors propis entre positius i no reals.

2. Si la matriu A és definida positiva, tots els valors propis de AB són reals, i el nombre de valors propis positius i negatius d'aquesta matriu coincideix amb el de B. En efecte, considerant la descomposició de Cholesky $A = LL^\top$, amb L triangular inferior, veiem que els valors propis de AB són els mateixos que els de $L^{-1}ABL = L^\top BL$, que és simètrica i té, per la coneguda llei d'inèrcia, el mateix nombre de valors propis positius i negatius que B. Observacions anàlogues es poden formular quan A és definida negativa.

3. El teorema garanteix l'existència d'una família m-paramètrica de tors invariants m-dimensionals, si ε és prou petit, per a cada $q^* \in \mathbf{T}^d$ que sigui punt crític no degenerat de la funció $V_{I^*}(q)$ definida a (5.8). Si tots els punts crítics de V_{I^*} són no degenerats, aleshores hom pot aplicar la teoria de Morse [Mi] i deduir que existeixen almenys 2^d punts crítics. A més, la teoria de Morse assegura que, per a cada l entre 0 i d, hi ha almenys $\binom{d}{l}$ punts crítics d'índex l (l'índex d'un punt crític és el nombre de valors propis negatius de la matriu hessiana corresponent). Si la matriu A és definida, podem aplicar les observacions de la nota anterior i, en conseqüència, hi haurà tors invariants no degenerats de tots els índexs entre 0 i d.

4. Per tal que la matriu A sigui definida, és suficient que $h(I)$ sigui quasiconvexa.

A l'enunciat del teorema 27 no hem assegurat que el tor $\mathcal{T}_{J,\varepsilon}$ tingui les mateixes freqüències que el tor no pertorbat del qual prové. Per tenir això, hem d'imposar a més una condició de no degeneració sobre l'aplicació freqüència ω. Podem imposar tant la condició de no degeneració de Kolmogorov com la isoenergètica, les quals donen lloc a versions diferents del resultat.

Proposició 28 *En les mateixes condicions que al teorema 27, suposem també que l'aplicació freqüència ω és no degenerada de Kolmogorov en I^*. Aleshores, existeix una aplicació analítica $(J,\varepsilon) \mapsto \tilde{J}(J,\varepsilon)$, definida per a $|\varepsilon|$ i $|J-J^*|$ prou petits, tal que, per a cada J, ε, el tor invariant m-dimensional $\mathcal{T}_{\tilde{J}(J,\varepsilon),\varepsilon}$ té per vector de freqüències $\omega'(I_J)$. A més, $\tilde{J}(J,0)=J$.*

Prova Per trobar un tor invariant de Γ_ε amb vector de freqüències $\omega'(I_J)$, buscarem $\tilde{J}$, q, p de manera que (q,p) és un punt fix de $\Gamma_{\tilde{J},\varepsilon}$, i que

$$\omega'\left(\tilde{J},p\right)+\varepsilon\frac{\partial Z}{\partial J}\left(q,\tilde{J},p\right)=\omega'\left(J,p_J\right). \tag{5.12}$$

Això dóna lloc a un sistema d'equacions, del qual les dues primeres equacions són les de (5.10), però amb $\tilde{J}$ en comptes de J, i la tercera és (5.12). Per a $\varepsilon=0$, $J=J^*$, tenim la solució $\tilde{J}=J^*$, $q=q^*$, $p=p^*$. Les hipòtesis que ω és no degenerada en I^* i que q^* és un punt crític no degenerat de la funció V_{I^*} permeten d'aplicar el teorema de la funció implícita i obtenir $\tilde{J}=\tilde{J}(J,\varepsilon)$, $q=q(J,\varepsilon)$, $p=p(J,\varepsilon)$ a l'entorn de $\varepsilon=0$, $J=J^*$. D'altra banda, com que les dues primeres equacions que satisfan aquestes funcions són les de (5.10) que havíem considerat al teorema 27, tenim $q(J,\varepsilon)=q_{\tilde{J}(J,\varepsilon),\varepsilon}$, $p(J,\varepsilon)=p_{\tilde{J}(J,\varepsilon),\varepsilon}$, que són els paràmetres que corresponen al tor $\mathcal{T}_{\tilde{J}(J,\varepsilon),\varepsilon}$. □

Proposició 29 *En les mateixes condicions que al teorema 27, suposem també que l'aplicació freqüència ω és isoenergèticament no degenerada en I^*. Aleshores, existeix una aplicació analítica $(J,\varepsilon) \mapsto \tilde{J}(J,\varepsilon)$, definida per a $|\varepsilon|$ i $|J-J^*|$ prou petits, tal que, per a cada J, ε, el tor invariant m-dimensional $\mathcal{T}_{\tilde{J}(J,\varepsilon),\varepsilon}$ té vector de freqüències paral·lel a $\omega'(I_J)$ i energia $h(I_J)$. A més, $\tilde{J}(J,0)=J$.*

Prova Com que $\omega''(I^*)=0$, tindrem $\omega'(I^*)\neq 0$. Suposarem, per fixar idees, que $\omega_m(I^*)\neq 0$. Aleshores cal aïllar $\tilde{J}$, q, p del sistema d'equacions:

$$\begin{aligned}
&\omega''\left(\tilde{J},p\right)+\varepsilon\frac{\partial Z}{\partial p}\left(q,\tilde{J},p\right)=0,\\
&\frac{\partial Z}{\partial q}\left(q,\tilde{J},p\right)=0,\\
&\frac{\overline{\omega'}\left(\tilde{J},p\right)+\varepsilon\frac{\partial Z}{\partial \bar{J}}\left(q,\tilde{J},p\right)}{\omega_m\left(\tilde{J},p\right)+\varepsilon\frac{\partial Z}{\partial J_m}\left(q,\tilde{J},p\right)}=\frac{\overline{\omega'}\left(J,p_J\right)}{\omega_m\left(J,p_J\right)}\ ,\\
&h\left(\tilde{J},p\right)+\varepsilon\, Z\left(q,\tilde{J},p\right)=h\left(J,p_J\right),
\end{aligned}$$

en el qual hem escrit $\overline{\omega'}(I) = (\omega_1(I), \ldots, \omega_{m-1}(I))$, $\overline{J} = (J_1, \ldots, J_{m-1})$. Per a $\varepsilon = 0$, $J = J^*$, tenim la solució $\tilde{J} = J^*$, $q = q^*$, $p = p^*$. Podem dividir ambdós costats de la primera equació per $\omega_m\left(\tilde{J}, p\right)$. Llavors, per aplicar el teorema de la funció implícita ens cal que la matriu jacobiana en $I^* = (J^*, p^*)$ de l'aplicació

$$\Omega(I) = \left(\frac{\overline{\omega'}(I)}{\omega_m(I)}, \frac{\omega''(I)}{\omega_m(I)}, h(I)\right)$$

tingui determinant no nul. Això ve garantit per la condició isoenergètica en I^*, ja que aquesta aplicació Ω és la mateixa que hem definit a (4.6) canviant-ne els papers de ω_n i ω_m. També ens cal que q^* sigui un punt crític no degenerat de V_{I^*}. Aleshores, podem aplicar el teorema de la funció implícita, i la resta del raonament és com a la proposició 28.

□

Nota Si suprimíssim, en aquestes dues proposicions, la hipòtesi que la matriu $A = \frac{\partial^2 h}{\partial p^2}(I^*)$ és invertible, podríem veure tanmateix que existeix un tor invariant proper a $\mathcal{T}_{J^*,0}$, i amb les mateixes freqüències (o les mateixes raons entre freqüències en el cas isoenergètic). Això no obstant, no podríem assegurar que els tors invariants formen una família m-paramètrica ni veure que són no degenerats, com hem fet al teorema 27. Veurem a la secció següent que aquesta hipòtesi sobre la matriu A és molt més relacionada amb la quasiconvexitat que no pas amb la no degeneració de Kolmogorov o isoenergètica.

5.2 Mòduls de ressonàncies i tors de dimensió inferior

Al teorema 27 ens hem ocupat de l'existència de tors invariants de dimensió m prop de la varietat associada al mòdul de ressonàncies $\mathcal{N}_d$. A continuació veurem que el resultat s'estén a la varietat ressonant associada a qualsevol altre mòdul de dimensió d. Un senzill canvi lineal simplèctic ens permetrà de portar el problema a la situació del teorema 27. No cal dir que podem restringir-nos a mòduls primitius (vegeu-ne la definició a la pàgina 50).

Considerem doncs un mòdul primitiu $\mathcal{M}$ de dimensió d. Seguim escrivint $m = n - d$. És un conegut resultat d'àlgebra (vegeu, per exemple, [Co]) que tota base de $\mathcal{M}$ es pot estendre a una base de $\mathbf{Z}^n$. És a dir, si D és una matriu $n \times d$ tal que les seves columnes constitueixen una base donada de $\mathcal{M}$, llavors podem trobar D', matriu $n \times m$, de manera que la matriu $n \times n$

$$C = \begin{pmatrix} D' & D \end{pmatrix} \tag{5.13}$$

té determinant 1. Al final d'aquesta secció descriurem un mètode explícit per a trobar aquesta matriu a partir de D. Observem que

$$\mathcal{M} = D\mathbf{Z}^d = C\mathcal{N}_d,$$

i així C és la matriu d'un isomorfisme de $\mathbf{Z}^n$ que relaciona $\mathcal{M}$ amb $\mathcal{N}_d$.

Considerem ara el canvi lineal simplèctic $\mathcal{C} : \left(\hat{\phi}, \hat{I}\right) \mapsto (\phi, I)$ definit per

$$\phi = \left(C^{-1}\right)^{\top} \hat{\phi}, \qquad I = C\hat{I}. \tag{5.14}$$

Notem que el canvi $\phi \in \mathbf{T}^n \mapsto \hat{\phi} \in \mathbf{T}^n$ és bijectiu ja que, pel fet que la matriu C té determinant 1, la seva inversa C^{-1} també té components enteres. Escriurem $\hat{\phi} = (\psi, q)$, $\hat{I} = (J, p)$. Aplicant el canvi (5.14) a la forma normal definida a (5.3) obtenim $\widehat{\Gamma}_{\varepsilon} = \Gamma_{\varepsilon} \circ \mathcal{C}$, que escrivim

$$\widehat{\Gamma}_{\varepsilon}\left(\hat{\phi}, \hat{I}\right) = h\left(C\hat{I}\right) + \varepsilon\, Z\left(\left(C^{-1}\right)^{\top} \hat{\phi}, C\hat{I}\right) = \widehat{h}\left(\hat{I}\right) + \varepsilon\, \widehat{Z}\left(\hat{\phi}, \hat{I}\right). \tag{5.15}$$

L'aplicació freqüència associada a la part integrable $\widehat{h}\left(\hat{I}\right) = h\left(C\hat{I}\right)$ ve donada per $\widehat{\omega}\left(\hat{I}\right) = C^{\top}\omega\left(C\hat{I}\right)$. Com que les columnes de D són una base de $\mathcal{M}$, és fàcil comprovar que la varietat $S_{\omega,\mathcal{M}}$ ve definida per l'equació $D^{\top}\omega(I) = 0$. Deduïm llavors que el nostre canvi relaciona la varietat ressonant associada a $\mathcal{M}$ respecte ω amb la varietat ressonant associada a $\mathcal{N}_d$ respecte $\widehat{\omega}$:

$$C^{-1}S_{\omega,\mathcal{M}} = S_{\widehat{\omega},\mathcal{N}_d}\,.$$

D'altra banda, si apliquem el canvi $\phi \mapsto \hat{\phi} = (\psi, q)$ a una funció de les variables angulars que sigui en forma normal respecte $\mathcal{M}$,

$$g(\phi) = \sum_{k\in\mathcal{M}} g_k\, e^{i\,k\cdot\phi}, \qquad \phi \in \mathbf{T}^n,$$

obtenim una funció que no depèn de ψ. En efecte, usant que cada $k \in \mathcal{M}$ es pot escriure com $k = Dl$, amb $l \in \mathbf{Z}^d$, i tenint en compte que $q = D^{\top}\phi$,

$$g(\phi) = \sum_{l\in\mathbf{Z}^d} g_{Dl}\, e^{i(Dl)\cdot\phi} = \sum_{l\in\mathbf{Z}^d} g_{Dl}\, e^{i\,l\cdot q} = \widehat{g}(q).$$

Amb això veiem que la funció $\widehat{Z}$ introduïda a (5.15) no depèn de ψ, i per tant podem escriure $\widehat{Z}\left(q, \hat{I}\right)$. En conseqüència, el hamiltonià transformat $\widehat{\Gamma}_{\varepsilon}$ és del mateix tipus que el del teorema 27.

Fixem $I^* \in S_{\omega,\mathcal{M}}$, i escrivim $\hat{I}^* = C^{-1}I^* \in S_{\widehat{\omega},\mathcal{N}_d}$. Pel que hem vist a la secció anterior, si $\varepsilon = 0$ el tor n-dimensional $I = I^*$ descompon en una família d-paramètrica de tors invariants de dimensió m. Tenim a (5.6) la parametrització d'aquests tors en les coordenades (ψ, q). Escrivim $\left(C^{-1}\right)^\top = \begin{pmatrix} E' & E \end{pmatrix}$, essent E' i E matrius $n \times m$ i $n \times d$, respectivament; llavors el canvi lineal en les coordenades angulars ve donat per

$$\phi = E'\psi + Eq.$$

D'aquesta manera podem obtenir els tors (5.6) en les coordenades originals: per a cada $q^* \in \mathbf{T}^d$ tenim el tor invariant m-dimensional

$$I = I^*, \quad \phi = E'\psi + Eq^*, \quad \psi \in \mathbf{T}^m. \tag{5.16}$$

Veiem per tant que la disposició dels tors de dimensió inferior dins de cada tor n-dimensional ressonant ve donada per la matriu E'. Remarquem de passada que les columnes de E' formen una base del subspai $\langle \mathcal{M} \rangle^\perp$, que dóna la direcció en la qual té lloc el moviment dins del tor ressonant.

Hem de veure també com s'expressen les hipòtesis del teorema 27 en les coordenades originals. Donats I^*, q^*, per a garantir que el tor m-dimensional (5.16) sobreviu per a $\varepsilon \neq 0$, hem de suposar:

$$\frac{\partial^2 \widehat{h}}{\partial p^2}\left(\hat{I}^*\right) = D^\top \frac{\partial^2 h}{\partial I^2}(I^*)\, D \ \text{ invertible,}$$

$$\frac{\partial \widehat{Z}}{\partial q}\left(q^*, \hat{I}^*\right) = \frac{\partial Z}{\partial \phi}(Eq^*, I^*)\, E = 0, \tag{5.17}$$

$$\frac{\partial^2 \widehat{Z}}{\partial q^2}\left(q^*, \hat{I}^*\right) = E^\top \frac{\partial^2 Z}{\partial \phi^2}(Eq^*, I^*)\, E \ \text{ invertible.} \tag{5.18}$$

Això ens diu quines condicions han de complir les funcions $h(I)$ i $Z(\phi, I)$ per tal que el teorema 27 pugui ésser aplicat al hamiltonià $\widehat{\Gamma}_\varepsilon$ obtingut mitjançant el canvi lineal. Amb tot, si considerem la igualtat $Z(E'\psi + Eq, I) = \widehat{Z}\left(q, \hat{I}\right)$ (la qual expressa que Z és constant sobre cada tor (5.16)) i la derivem respecte ψ, obtenim que

$$\frac{\partial Z}{\partial \phi}(\phi, I) E' = 0 \quad \forall (\phi, I).$$

Derivant novament aquesta identitat, veiem que el rang de la matriu $\frac{\partial^2 Z}{\partial \phi^2}(\phi, I)$ no pot ésser més gran que d. Deduïm fàcilment d'aquests fets que les condicions (5.17–5.18) equivalen a imposar que $\frac{\partial Z}{\partial \phi}(Eq^*, I^*) = 0$ i que el rang de $\frac{\partial^2 Z}{\partial \phi^2}(Eq^*, I^*)$ sigui exactament d.

Teorema 30 *Sigui $\mathcal{M} \subset \mathbf{Z}^n$ mòdul primitiu de dimensió d, $1 \leq d \leq n-1$, i escrivim $m = n - d$. Siguin D, C, E' i E matrius associades al mòdul $\mathcal{M}$, com hem descrit més amunt. Considerem el hamiltonià $\Gamma_\varepsilon(\phi, I) = h(I) + \varepsilon Z(\phi, I)$, analític sobre $\mathbf{T}^n \times G$, amb $G \subset \mathbf{R}^n$ obert, i en forma normal respecte $\mathcal{M}$. Escrivim $\omega = \operatorname{grad} h$. Sigui $I^* \in S_{\omega,\mathcal{M}}$ tal que la matriu*

$$D^\top \frac{\partial^2 h}{\partial I^2}(I^*)\, D \tag{5.19}$$

és invertible. Sigui $q^* \in \mathbf{T}^d$ *tal que*

$$\frac{\partial Z}{\partial \phi}(Eq^*, I^*) = 0, \qquad \text{rang}\left(\frac{\partial^2 Z}{\partial \phi^2}(Eq^*, I^*)\right) = d. \tag{5.20}$$

Aleshores, el canvi simplèctic $\mathcal{C}$ *definit a (5.14) transforma* Γ_ε *en un nou hamiltonià al qual es pot aplicar el teorema 27 en el punt* $\hat{I}^* = C^{-1}I^*$, q^*.

Notes

1. Les condicions (5.20) no s'alteren si en el lloc de Eq^* hi posem qualsevol altre punt del tor: $E'\psi + Eq^*$, $\psi \in \mathbf{T}^m$.
2. El fet que la matriu (5.19) sigui o no invertible és independent de la matriu D escollida per al mòdul $\mathcal{M}$.
3. Per garantir la invertibilitat de la matriu (5.19) en tots els casos (és a dir, sobre qualsevol ressonància), és suficient imposar que $h(I)$ sigui quasiconvexa a tot el domini.

Completem aquesta secció descrivint un algorisme elemental per a construir la matriu C, considerada a (5.13), a partir de la matriu D, és a dir, estendre una base donada d'un mòdul primitiu $\mathcal{M}$ a una base de $\mathbf{Z}^n$.

De fet, si no suposem que el mòdul és primitiu, és vàlid un resultat més general (vegeu, per exemple, [Co, capítol 10] i també [LM, apèndix 3]): si $\mathcal{M}$ és un mòdul d-dimensional qualsevol de $\mathbf{Z}^n$ i $D_{n\times d}$ és una matriu de rang d que té per columnes els vectors d'una base donada de $\mathcal{M}$ (quan calgui posarem les dimensions de les matrius com a subíndexs) aleshores existeixen $\pi_1, \ldots, \pi_d$ enters no nuls tals que π_j és divisor de π_l si $j \le l$, i matrius $P_{d\times d}$ i $Q_{n\times n}$ amb determinant 1, de manera que

$$D = Q\Pi P, \tag{5.21}$$

essent

$$\Pi_{n\times d} = \begin{pmatrix} \pi_1 & & \\ & \ddots & \\ & & \pi_d \\ & & \\ & 0 & \end{pmatrix}. \tag{5.22}$$

La matriu Π rep el nom de *forma normal de Smith* del mòdul $\mathcal{M}$. Els nombres $\pi_1, \ldots, \pi_d$ vénen determinats (llevat del signe) per $\mathcal{M}$; s'anomenen *invariants* o *divisors elementals* de $\mathcal{M}$. Poden ésser calculats mitjançant la fórmula

$$\pi_j = \frac{\Delta_j}{\Delta_{j-1}}, \qquad j = 1, \ldots, d,$$

essent Δ_j el màxim comú divisor de tots els menors d'ordre j de la matriu D (i posant $\Delta_0 = 1$). Si $q^{(1)}, \ldots, q^{(n)}$ són les columnes de Q (les quals formen una base de $\mathbf{Z}^n$), llavors $\pi_1 q^{(1)}, \ldots, \pi_d q^{(d)}$ formen una base de $\mathcal{M}$ (que no coincidirà amb la base de partida, si $P \neq \mathrm{Id}$).

Comprovem que $\mathcal{M}$ és primitiu si i només si $|\pi_j| = 1$, $j = 1, \ldots, d$. En efecte, si $\mathcal{M}$ és primitiu, llavors $\mathcal{M} = \left\langle\!\left\langle \pi_1 q^{(1)}, \ldots, \pi_d q^{(d)} \right\rangle\!\right\rangle = \left\langle\!\left\langle q^{(1)}, \ldots, q^{(d)} \right\rangle\!\right\rangle$ i per tant totes les π_j són ± 1. D'altra banda, si $|\pi_j| = 1$ per a $j = 1, \ldots, d$, tenim $\mathcal{M} = \left\langle\!\left\langle q^{(1)}, \ldots, q^{(d)} \right\rangle\!\right\rangle$; considerant un mòdul $\mathcal{M}' \supset \mathcal{M}$ que també tingui dimensió d, hem de veure que $\mathcal{M}' = \mathcal{M}$. Donat $k \in \mathcal{M}'$, $k \neq 0$, existeix $s \geq 1$ tal que $sk \in \mathcal{M}$. Així, podem escriure $sk = c_1 q^{(1)} + \cdots + c_d q^{(d)}$. A més, $k = b_1 q^{(1)} + \cdots + b_n q^{(n)}$. Deduïm que $b_{d+1} = \cdots = b_n = 0$, i per tant $k \in \mathcal{M}$.

Vegem també que si $\mathcal{M}$ és primitiu llavors les columnes de D formen part d'una base de $\mathbf{Z}^n$, la qual ens dóna la matriu C. Suposant, per fixar idees, que totes les π_j són 1, tenim $D = Q\Pi P = Q\overline{P}\Pi$, essent

$$\overline{P}_{n\times n} = \begin{pmatrix} P_{d\times d} & \\ & \mathrm{Id}_{m\times m} \end{pmatrix}.$$

Aleshores les n columnes de $Q\overline{P}$ constitueixen una base de $\mathbf{Z}^n$, i entre elles les d primeres coincideixen amb les columnes de D. Amb això obtenim la matriu C, prenent D' com la matriu de les m darreres columnes de $Q\overline{P}$.

Finalment donem, per a un mòdul qualsevol $\mathcal{M}$, un algorisme per a obtenir la transformació a la forma normal de Smith (5.21–5.22). Trobarem matrius senzilles $P^{(\mu)}_{d\times d}$, $\mu = 1, \ldots, M$, $Q^{(\nu)}_{n\times n}$, $\nu = 1, \ldots, N$, totes amb determinant ± 1, que comportaran successives transformacions que aniran reduint D a la forma normal:

$$Q^{(N)} \cdots Q^{(1)} D P^{(1)} \cdots P^{(M)} = \Pi.$$

Llavors tindrem $P = \left(P^{(1)} \cdots P^{(M)}\right)^{-1}$, $Q = \left(Q^{(N)} \cdots Q^{(1)}\right)^{-1}$.

En primer lloc recordem que, donats $a, b \in \mathbf{Z}$ no nuls, existeixen $x, y \in \mathbf{Z}$ satisfent la identitat de Bézout $ax + by = r$, essent r el màxim comú divisor de a i b. Aleshores tenim les igualtats:

$$\begin{pmatrix} a & b & \cdots \\ \vdots & \vdots & \ddots \end{pmatrix}_{n\times d} \cdot \begin{pmatrix} x & -b/r & \\ y & a/r & \\ & & \mathrm{Id} \end{pmatrix}_{d\times d} = \begin{pmatrix} r & 0 & \cdots \\ \vdots & \vdots & \ddots \end{pmatrix}_{n\times d}, \tag{5.23}$$

$$\begin{pmatrix} x & y & \\ -b/r & a/r & \\ & & \mathrm{Id} \end{pmatrix}_{n\times n} \cdot \begin{pmatrix} a & \cdots \\ b & \cdots \\ \vdots & \ddots \end{pmatrix}_{n\times d} = \begin{pmatrix} r & \cdots \\ 0 & \cdots \\ \vdots & \ddots \end{pmatrix}_{n\times d}. \tag{5.24}$$

Farem servir matrius $P^{(\mu)}$, $Q^{(\nu)}$ dels quatre tipus següents (totes amb determinant ± 1):

* matrius de permutació: canvien d'ordre columnes o files;
* matrius amb coeficients ± 1 a la diagonal: canvien de signe algunes columnes o files;
* matrius amb coeficients 1 a la diagonal i coeficients no nuls només a una columna o fila: sumen a una columna/fila una combinació lineal de les altres columnes/files;
* matrius dels tipus considerats a (5.23–5.24): converteixen dos coeficients a, b situats a l'extrem superior esquerre en r, 0, essent r el màxim comú divisor de a i b.

Descrivim breument el procés a seguir, a partir de $D = \begin{pmatrix} \alpha_{jl} \end{pmatrix}$. Permutant files i columnes, podem suposar que $\alpha_{11} \neq 0$. Hem de fer que α_{11} divideixi α_{1l} per a $l = 2, \ldots, d$. Per aconseguir-ho, quan α_{11} no divideixi algun α_{1l} intercanviem les columnes segona i l-èsima, apliquem la transformació (5.23) i comencem de nou. Només cal fer un nombre finit de passos ja que, cada cop que apliquem (5.23), el nou element que ocupa el lloc de α_{11} esdevé estrictament més petit (en el pitjor dels casos, ens aturaríem quan $\alpha_{11} = \pm 1$). Així aconseguim que α_{11} sigui divisor de α_{1l} per a $l = 2, \ldots, d$. Mitjançant un procés similar, però duent a terme manipulacions de files en comptes de columnes i aplicant ara la transformació (5.24) els cops que sigui necessari, fem que α_{11} sigui divisor de α_{j1} per a $j = 2, \ldots, n$. Però llavors els α_{1l} hauran variat i pot succeir que deixin d'ésser múltiples de α_{11}. Per tant haurem d'aplicar alternativament els processos per tal que α_{11} sigui divisor de tots els α_{1l} i de tots els α_{j1}. Només caldrà fer-ho un nombre finit de cops perquè el valor de α_{11} disminueix cada cop que apliquem (5.23) o (5.24). Quan α_{11} sigui divisor de tots els elements de la primera fila i de tots els de la primera columna, busquem un α_{jl}, amb $j \geq 2$, $l \geq 2$ tal que α_{11} no en sigui divisor, llavors sumem la j-èsima fila a la primera i altre cop resulta que α_{1l} no és múltiple de α_{11}. Apliquem de nou tot el procés, tants cops com sigui necessari fins que $\alpha_{11} = \pi_1$ sigui divisor de tots els α_{jl}. Aleshores, restem a cada columna un múltiple adequat de la primera columna i a cada fila un múltiple adequat de la primera fila, per tal d'obtenir una matriu del tipus

$$\begin{pmatrix} \pi_1 & \\ & D^{(1)}_{(n-1)\times(d-1)} \end{pmatrix},$$

on π_1 és divisor de tots els coeficients de $D^{(1)}$. Repetint tot el procés, ara amb la matriu $D^{(1)}$, obtenim

$$\begin{pmatrix} \pi_1 & & \\ & \pi_2 & \\ & & D^{(2)}_{(n-2)\times(d-2)} \end{pmatrix},$$

i continuant d'aquesta manera arribem a la forma normal de Smith.

5.3 Varietats invariants de tors hiperbòlics prop de ressonàncies simples

Estudiem en aquesta secció les varietats invariants de tors hiperbòlics $(n-1)$-dimensionals prop d'una ressonància simple, és a dir, quan apliquem els resultats de les seccions anteriors prenent un mòdul de ressonàncies unidimensional. Aquest és l'únic cas en què podem assegurar que la forma normal és integrable (menyspreant la resta), per la qual cosa podem dur a terme un estudi complet de les varietats invariants i llurs connexions homoclíniques.

L'interès de les ressonàncies simples rau en el fet que prop d'elles sembla més factible l'estudi de les interseccions entre varietats invariants associades a diferents tors quan considerem tot el hamiltonià (5.1). De fet aquest estudi per a ressonàncies simples seria suficient per establir l'existència de difusió d'Arnol'd. Com ja hem comentat a la secció anterior, resultats en aquest sentit han estat obtinguts per A. Delshams [De] a l'entorn d'un punt fix el·líptic.

Ara tindrem $d = 1$, $m = n - 1$. Un mòdul $\mathcal{M}$ de dimensió 1 és primitiu si el màxim comú divisor de les components del vector que n'és base és 1. D'acord amb el que hem vist a la secció anterior, serà suficient considerar el cas del mòdul $\mathcal{N}_1 = \langle\!\langle (0, \ldots, 0, 1) \rangle\!\rangle$. La varietat $S_{\omega,\mathcal{N}_1}$ ve definida per l'equació $\omega_n(I) = 0$.

Seguint amb la notació de la secció 5.1, escrivim

$$\psi = (\phi_1, \ldots, \phi_{n-1}), \quad q = \phi_n, \quad J = (I_1, \ldots, I_{n-1}), \quad p = I_n.$$

El hamiltonià

$$\Gamma_\varepsilon(\phi, I) = h(I) + \varepsilon\, Z(q, I),$$

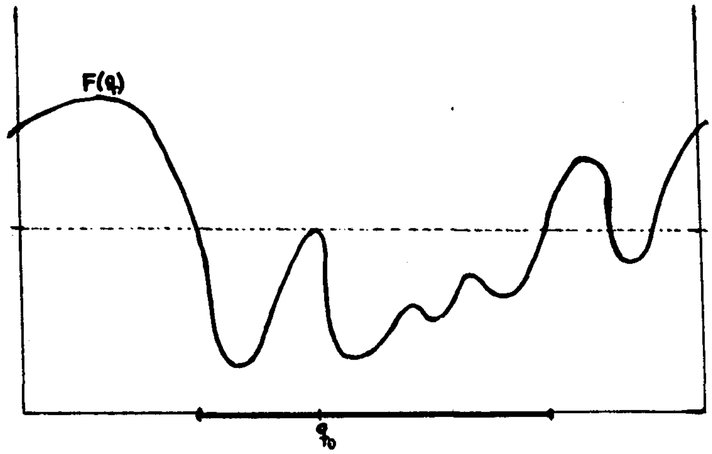
en forma normal respecte $\mathcal{N}_1$, és ara integrable, car si prenem J com a paràmetre llavors el hamiltonià reduït $\Gamma_{J,\varepsilon}$ només té un grau de llibertat: el que correspon a les variables (q, p).

Fixarem $I^* = (J^*, p^*) \in S_{\omega,\mathcal{N}_1}$, $q^* \in \mathbf{T}$. Pel teorema 27, si $\frac{\partial^2 h}{\partial p^2}(I^*) \neq 0$ i si q^* és un punt crític no degenerat de la funció 2π-periòdica

$$V_{I^*}(q) = Z(q, I^*), \qquad q \in \mathbf{T},$$

llavors per a $|\varepsilon|$ i $|J - J^*|$ prou petits tenim un tor invariant $(n-1)$-dimensional $\mathcal{T}_{J,\varepsilon}$, que correspon a un punt fix $(q_{J,\varepsilon}, p_{J,\varepsilon})$ del hamiltonià reduït $\Gamma_{J,\varepsilon}$. Suposarem, per tal de fixar idees, que $\frac{\partial^2 h}{\partial p^2}(I^*) > 0$. Aleshores, si $\varepsilon > 0$, el punt fix (i el tor) és hiperbòlic o el·líptic segons si q^* és un màxim no degenerat de V_{I^*} o un mínim, respectivament. Veurem que les varietats invariants estable i inestable d'un tor hiperbòlic queden confinades molt a prop de la ressonància i coincideixen, és a dir, constitueixen connexions homoclíniques.

Cal però afegir una condició tècnica que haurà de complir el punt q^* respecte la funció V_{I^*}. Donats $q, q' \in \mathbf{T}$, podem considerar l'interval que va de q a q', el qual denotarem $[q, q']$, definit de manera òbvia segons l'orientació usual de $\mathbf{T}$. Donada una funció $F : \mathbf{T} \rightarrow \mathbf{R}$, si q_0 és un màxim (local) de F, definim l'*interval dominat* des de q_0 per a F com la component connexa que conté q_0 del conjunt $\{q \in \mathbf{T} : F(q) \leq F(q_0)\}$. Notem que l'interval dominat des d'un màxim és sempre un interval, d'acord amb la definició anterior, llevat que el màxim sigui absolut, en què l'interval dominat és tot $\mathbf{T}$. Donat un màxim q_0, direm que és un *màxim solitari* de F si l'interval dominat des de q_0 per a F no conté cap altre punt crític q_1 tal que $F(q_1) = F(q_0)$. Podem visualitzar aquestes nocions a la figura.



El lema següent ens ve a dir que la noció de màxim solitari és estable sota una petita pertorbació de la funció.

Lema 31 *Sigui $F_\varepsilon(q)$ funció definida per a $q \in \mathbf{T}$ i $|\varepsilon|$ petit, que sigui C^2 en q i ε. Sigui q_0 un màxim solitari no degenerat de F_0. Aleshores, per a $|\varepsilon|$ prou petit existeix un màxim solitari $q_{0,\varepsilon}$ de F_ε, amb dependència C^1 respecte ε, i que coincideix amb q_0 per a $\varepsilon = 0$.*

Prova Com que $F_0'(q_0) = 0$, $F_0''(q_0) \neq 0$, pel teorema de la funció implícita existeix una solució $q_{0,\varepsilon}$ de $F_\varepsilon'(q) = 0$, per a $|\varepsilon|$ prou petit, la qual coincideix amb q_0 per a $\varepsilon = 0$. Anomenant $a = |F_0''(q_0)|$, existeix $\delta > 0$ tal que

$$|F_\varepsilon''(q)| \geq \frac{a}{2} \qquad \forall q \in [q_0 - \delta, q_0 + \delta], \quad \forall |\varepsilon| \text{ prou petit.}$$

Resulta doncs que aquest interval $[q_0 - \delta, q_0 + \delta]$ no pot contenir més que un punt crític de F_ε, el qual per força ha de ser $q_{0,\varepsilon}$.

Si q_0 és màxim absolut de F_0, definim

$$r = \inf \{F_0(q_0) - F_0(q) \;:\; q \in \mathbf{T} \setminus (q_0 - \delta, q_0 + \delta)\}.$$

Com que q_0 és màxim solitari, tenim $r > 0$. Llavors, si ε és prou petit, tindrem

$$F_\varepsilon\,(q_{0,\varepsilon}) - F_\varepsilon(q) \geq \frac{r}{2} \qquad \forall q \in \mathbf{T} \setminus (q_0 - \delta, q_0 + \delta).$$

Deduïm doncs que $q_{0,\varepsilon}$ és un màxim solitari de F_ε, car no pot haver-hi cap altre punt crític que l'iguali.

Si q_0 no és màxim absolut de F_0, l'interval dominat des de q_0 és del tipus $[q_1, q_2]$, i els punts q_1 i q_2 compleixen que $F_0(q_1) = F_0(q_2) = F_0(q_0)$, i que $F_0'(q_1) \neq 0$, $F_0'(q_2) \neq 0$. Pel teorema de la funció implícita, existeixen $q_{1,\varepsilon}$, $q_{2,\varepsilon}$ tals que $F_\varepsilon(q_{1,\varepsilon}) = F_\varepsilon(q_{2,\varepsilon}) = F_\varepsilon(q_{0,\varepsilon})$, per a $|\varepsilon|$ prou petit, i que coincideixen amb q_1, q_2, respectivament, per a $\varepsilon = 0$. Anomenant $b_1 = |F_0'(q_1)|$, $b_2 = |F_0'(q_2)|$, existeix $\delta' > 0$ tal que

$$|F_\varepsilon'(q)| \geq \frac{b_1}{2} \qquad \forall q \in [q_1 - \delta', q_1 + \delta']\,, \quad \forall\,|\varepsilon| \text{ prou petit.}$$
$$|F_\varepsilon'(q)| \geq \frac{b_2}{2} \qquad \forall q \in [q_2 - \delta', q_2 + \delta']\,, \quad \forall\,|\varepsilon| \text{ prou petit.}$$

Així, aquests intervals no contenen cap altre punt crític de F_ε, i és segur que contenen els punts $q_{1,\varepsilon}$, $q_{2,\varepsilon}$, per a $|\varepsilon|$ prou petit. Aleshores, si definim

$$s = \inf\{F_0(q_0) - F_0(q) \;:\; q \in [q_1 + \delta', q_0 - \delta] \cap [q_0 + \delta, q_2 - \delta']\}\,,$$

tenim $s > 0$ i, amb un raonament anàleg al que hem fet anteriorment, resulta que l'interval dominat des de $q_{0,\varepsilon}$ per a F_ε és $[q_{1,\varepsilon}, q_{2,\varepsilon}]$, i que $q_{0,\varepsilon}$ és un màxim solitari de F_ε. □

Teorema 32 *Considerem les mateixes notacions i hipòtesis que al teorema 27, però amb $d = 1$, $m = n - 1$. Suposem que $A > 0$ i que q^* és un màxim no degenerat de V_{I^*}, és a dir, $B < 0$. Aleshores, per a $\varepsilon > 0$ i $|J - J^*|$ prou petits, el tor invariant $\mathcal{T}_{J,\varepsilon}$ donat pel teorema 27 és hiperbòlic. Si, a més, q^* és un màxim solitari de V_{I^*}, aleshores les varietats invariants estable i inestable de $\mathcal{T}_{J,\varepsilon}$ coincideixen, i constitueixen una connexió homoclínica: tota trajectòria $(\phi(t), I(t))$ de Γ_ε continguda a la varietat invariant és asimptòtica al tor $\mathcal{T}_{J,\varepsilon}$ per a $t \to \pm\infty$.*

Prova Un punt important a usar és la convexitat de h respecte la variable p, que ens permetrà d'assegurar que les varietats invariants no s'allunyen de la ressonància $S_{\omega,\mathcal{N}_1}$. Donat que $A = \frac{\partial^2 h}{\partial p^2}(J^*, p^*) > 0$, existeix $a > 0$ (independent de J i ε) tal que

$$\frac{\partial^2 h}{\partial p^2}(J, p) \geq \frac{A}{2} \qquad \forall p \in [p^* - a, p^* + a]\,, \quad \forall\,|J - J^*| \text{ prou petit.}$$

Considerem la banda

$$\mathcal{B}_a := \mathbf{T} \times [p^* - a, p^* + a]\,.$$

Usant que $\frac{\partial^2 Z}{\partial p^2}(q,J,p)$ és fitada per a $(q,p)\in\mathcal{B}_a$ i J proper a J^*, obtenim

$$\frac{\partial^2\Gamma_{J,\varepsilon}}{\partial p^2}(q,p)=\frac{\partial^2 h}{\partial p^2}(J,p)+\varepsilon\frac{\partial^2 Z}{\partial p^2}(q,J,p)\geq\frac{A}{4}\qquad\forall(q,p)\in\mathcal{B}_a,\ \forall\left|J-J^*\right|,|\varepsilon|\ \text{prou petits.}\tag{5.25}$$

Com hem comentat anteriorment, el tor $\mathcal{T}_{J,\varepsilon}$ ve donat pel punt fix $(q_{J,\varepsilon},p_{J,\varepsilon})$ del hamiltonià reduït $\Gamma_{J,\varepsilon}$. Com hem vist a la prova del teorema 27, aquest punt fix prové d'aplicar el teorema de la funció implícita al sistema d'equacions (5.10). Considerem ara la primera equació d'aquest sistema:

$$\frac{\partial\Gamma_{J,\varepsilon}}{\partial p}(q,p)=\omega_n(J,p)+\varepsilon\frac{\partial Z}{\partial p}(q,J,p)=0.\tag{5.26}$$

Com que $\frac{\partial\omega_n}{\partial p}(J^*,p^*)=A\neq 0$, de l'equació (5.26) hom pot aïllar p en funció de J, ε, q a l'entorn de $J=J^*$, $\varepsilon=0$ i $q=\overline{q}$, essent $\overline{q}\in\mathbf{T}$ qualsevol. De la compacitat de $\mathbf{T}$ deduïm que podem empalmar les funcions així obtingudes per als diferents valors de $\overline{q}$, donant lloc a una funció

$$p=g_{J,\varepsilon}(q)\tag{5.27}$$

definida globalment per a $q\in\mathbf{T}$, i per a ε i $|J-J^*|$ prou petits. Tenim $g_{J,0}(q)=p_J$ per a tot $q\in\mathbf{T}$ (vegeu definició (5.7)) i, per tant,

$$\max_{q\in\mathbf{T}}|g_{J,\varepsilon}(q)-p_J|=\mathcal{O}(\varepsilon).\tag{5.28}$$

Aquesta estimació, juntament amb el fet que $|p_J-p^*|=\mathcal{O}\left(|J-J^*|\right)$, implica que la corba

$$C_{J,\varepsilon}:=\{(q,p)\ :\ q\in\mathbf{T},\ p=g_{J,\varepsilon}(q)\}$$

és continguda a la banda $\mathcal{B}_{a/2}$ si ε i $|J-J^*|$ són prou petits. Aquesta corba conté tots els punts fixos de $\Gamma_{J,\varepsilon}$ propers a la ressonància, entre els quals el punt $(q_{J,\varepsilon},p_{J,\varepsilon})$ que ens ocupa; tenim $p_{J,\varepsilon}=g_{J,\varepsilon}(q_{J,\varepsilon})$. D'altra banda, substituint (5.27) a l'equació (5.26) i derivant implícitament, obtenim

$$g'_{J,\varepsilon}(q)=-\varepsilon\,\frac{\frac{\partial^2 Z}{\partial q\,\partial p}\left(q,J,g_{J,\varepsilon}(q)\right)}{\frac{\partial^2\Gamma_{J,\varepsilon}}{\partial p^2}\left(q,g_{J,\varepsilon}(q)\right)}$$

i de (5.25) deduïm que

$$\max_{q\in\mathbf{T}}\left|g'_{J,\varepsilon}(q)\right|=\mathcal{O}(\varepsilon),\tag{5.29}$$

cosa que ens dóna una estimació del màxim pendent de la corba $C_{J,\varepsilon}$.

La desigualtat (5.25) ens diu que, fixat $q\in\mathbf{T}$, la funció $p\mapsto\Gamma_{J,\varepsilon}(q,p)$ és convexa per a $p\in[p^*-a,p^*+a]$. El mínim d'aquesta funció s'assoleix quan p satisfà l'equació (5.26);

correspon doncs a un punt de $C_{J,\varepsilon}$, i per tant cau dins de l'interval de convexitat que hem considerat. Prenent els valors de $\Gamma_{J,\varepsilon}$ sobre la corba $C_{J,\varepsilon}$, definim la funció

$$W_{J,\varepsilon}(q) := \Gamma_{J,\varepsilon}(q, g_{J,\varepsilon}(q)), \qquad q \in \mathbf{T}. \tag{5.30}$$

Deduïm de (5.25) la desigualtat

$$\Gamma_{J,\varepsilon}(q,p) \geq W_{J,\varepsilon}(q) + \frac{A}{8}\left(p - g_{J,\varepsilon}(q)\right)^2 \qquad \forall (q,p) \in \mathcal{B}_a. \tag{5.31}$$

D'altra banda, tenint en compte un altre cop l'equació (5.26), trobem que

$$W'_{J,\varepsilon}(q) = \frac{\partial \Gamma_{J,\varepsilon}}{\partial q}\left(q, g_{J,\varepsilon}(q)\right) = \varepsilon \frac{\partial Z}{\partial q}\left(q, J, g_{J,\varepsilon}(q)\right), \tag{5.32}$$

$$W''_{J,\varepsilon}(q) = \varepsilon \left(\frac{\partial^2 Z}{\partial q^2}\left(q, J, g_{J,\varepsilon}(q)\right) + \frac{\partial^2 Z}{\partial q\, \partial p}\left(q, J, g_{J,\varepsilon}(q)\right) \cdot g'_{J,\varepsilon}(q) \right). \tag{5.33}$$

Del fet que $(q_{J,\varepsilon}, p_{J,\varepsilon})$ és solució del sistema (5.10) deduïm de l'expressió de la primera derivada que $q_{J,\varepsilon}$ és un punt crític de la funció $W_{J,\varepsilon}$. En realitat, tot punt fix (proper a la ressonància) del hamiltonià reduït $\Gamma_{J,\varepsilon}$ s'associa a un punt crític de $W_{J,\varepsilon}$. De l'expressió de la segona derivada, de (5.29), i de la hipòtesi que q^* és un màxim no degenerat de V_{I^*}, resulta que, per a $\varepsilon > 0$ i $|J - J^*|$ prou petits, el punt crític $q_{J,\varepsilon}$ és un màxim de $W_{J,\varepsilon}$.

A més a més, si q^* és un màxim solitari de V_{I^*} llavors $q_{J,\varepsilon}$ també ho és de $W_{J,\varepsilon}$ si $\varepsilon > 0$ i $|J - J^*|$ són prou petits. En efecte, usant (5.28) i el fet que $p \mapsto h(J,p)$ té el seu mínim en $p = p_J$, obtenim

$$h\left(J, g_{J,\varepsilon}(q)\right) = h(J, p_J) + \mathcal{O}(\varepsilon^2).$$

Llavors,

$$W_{J,\varepsilon}(q) = h\left(J, g_{J,\varepsilon}(q)\right) + \varepsilon\, Z\left(q, J, g_{J,\varepsilon}(q)\right) = h\left(J, p_J\right) + \varepsilon\, Z\left(q, J, p_J\right) + \mathcal{O}(\varepsilon^2). \tag{5.34}$$

Per tant, i donat que $h(J, p_J)$ no depèn de q i que $\varepsilon > 0$, és suficient veure que $q_{J,\varepsilon}$ és un màxim solitari de la funció $q \mapsto Z(q, J, p_J) + \mathcal{O}(\varepsilon)$. En efecte, això es dedueix del lema 31, car aquesta funció és una petita pertorbació de V_{I^*} si ε i $|J - J^*|$ són prou petits.

El paper que jugarà la funció $W_{J,\varepsilon}$ en aquesta prova és anàleg al del potencial en sistemes hamiltonians del tipus "energia cinètica + potencial". Serà essencial l'ús de la conservació de l'energia i de la convexitat respecte p. Sigui $(q(t), p(t))$ una trajectòria de $\Gamma_{J,\varepsilon}$ continguda a la varietat inestable del punt fix $(q_{J,\varepsilon}, p_{J,\varepsilon})$, és a dir, asimptòtica a aquest punt per a $t \to -\infty$. Provarem que també és asimptòtica al mateix punt per a $t \to \infty$, i en conseqüència serà una trajectòria homoclínica.

Anomenem E l'energia d'aquesta trajectòria. Tenint en compte la definició (5.30), tenim

$$E = \Gamma_{J,\varepsilon}(q(t), p(t)) = \Gamma_{J,\varepsilon}\left(q_{J,\varepsilon}, p_{J,\varepsilon}\right) = W_{J,\varepsilon}\left(q_{J,\varepsilon}\right).$$

Comprovem que la trajectòria $(q(t),p(t))$ es pot prolongar a tot $t\in\mathbf{R}$, i és tota continguda a la banda $\mathcal{B}_a$. Si l'abandona, considerem $t_0=\inf\{t:\ |p(t)-p^*|>a\}$. Deduïm llavors de (5.31) que, per a tot $t\le t_0$,

$$E-W_{J,\varepsilon}(q(t))\ge\frac{A}{8}\left(p(t)-g_{J,\varepsilon}(q(t))\right)^2. \tag{5.35}$$

Tenint en compte que $|p(t_0)-p^*|=a$ i que $C_{J,\varepsilon}\subset\mathcal{B}_{a/2}$, obtenim la desigualtat

$$W_{J,\varepsilon}(q_{J,\varepsilon})-W_{J,\varepsilon}(q(t_0))\ge\frac{A}{8}\left(\frac{a}{2}\right)^2,$$

que es contradiu, si ε és prou petit, amb l'estimació

$$W_{J,\varepsilon}(q_{J,\varepsilon})-W_{J,\varepsilon}(q(t_0))\le\pi\cdot\max_{q\in\mathbf{T}}\left|W'_{J,\varepsilon}(q)\right|=\mathcal{O}(\varepsilon),$$

deduïda del teorema del valor mitjà i de (5.32). Així, la trajectòria $(q(t),p(t))$ no surt de la banda $\mathcal{B}_a$ i per tant és definida per a tot $t\in\mathbf{R}$. Obtenim també que la desigualtat (5.35) és vàlida per a tot $t\in\mathbf{R}$. Per tant,

$$W_{J,\varepsilon}(q(t))\le W_{J,\varepsilon}(q_{J,\varepsilon})=E\qquad\forall t\in\mathbf{R}.$$

En paraules, $q(t)$ no pot sortir de l'interval dominat des de $q_{J,\varepsilon}$ per a la funció $W_{J,\varepsilon}$. A més, tenim

$$W_{J,\varepsilon}(q(t))=E\quad\text{si i només si}\quad(q(t),p(t))\in C_{J,\varepsilon}. \tag{5.36}$$

Estudiem finalment el comportament de la trajectòria $(q(t),p(t))$ quan s'allunya del punt $(q_{J,\varepsilon},p_{J,\varepsilon})$. Primer comprovem que les varietats invariants són transversals a la corba $C_{J,\varepsilon}$ en el punt $(q_{J,\varepsilon},p_{J,\varepsilon})$. És suficient veure que els pendents respectius són diferents. El pendent de les varietats invariants és el dels vectors propis de la matriu $\mathcal{D}_{J,\varepsilon}$ considerada a (5.11), dins la prova del teorema 27. Ara aquesta matriu és 2×2. Farem ús de la propietat següent: donada una matriu

$$D=\begin{pmatrix} d_{11} & d_{12}\\ d_{21} & d_{22}\end{pmatrix}$$

tal que $d_{12}\ne 0$, i amb valors propis reals ($(\operatorname{tr}D)^2-4\det D\ge 0$), el pendent dels seus vectors propis és

$$\frac{d_{22}-d_{11}\pm\sqrt{(\operatorname{tr}D)^2-4\det D}}{2d_{12}}.$$

Aplicant aquest fet a la matriu $\mathcal{D}_{J,\varepsilon}$ obtenim que, si $\varepsilon>0$, els vectors propis en qüestió tenen pendent

$$\frac{\mathcal{O}(\varepsilon)\pm\sqrt{-\varepsilon A_{J,\varepsilon}B_{J,\varepsilon}+\mathcal{O}\left(\varepsilon^2\right)}}{A_{J,\varepsilon}+\mathcal{O}(\varepsilon)}=\sqrt{\varepsilon}\left(\pm\sqrt{-\frac{B_{J,\varepsilon}}{A_{J,\varepsilon}}}+\mathcal{O}\left(\sqrt{\varepsilon}\right)\right).$$

Recordem que $A_{J^*,0} = A > 0$, $B_{J^*,0} = B < 0$. Aleshores, per a $\varepsilon > 0$ i $|J - J^*|$ prou petits, els pendents de les varietats invariants en el punt $(q_{J,\varepsilon}, p_{J,\varepsilon})$ no poden coincidir amb el pendent de $C_{J,\varepsilon}$, que es regeix per (5.29). Així la trajectòria $(q(t), p(t))$ que prové de $(q_{J,\varepsilon}, p_{J,\varepsilon})$ entra necessàriament en una de les dues regions en què la corba $C_{J,\varepsilon}$ divideix la banda $\mathcal{B}_a$:

$$\mathcal{B}^+_{a,J,\varepsilon} = \{(q,p) \in \mathcal{B}_a \ : \ p \geq g_{J,\varepsilon}(q)\}, \qquad \mathcal{B}^-_{a,J,\varepsilon} = \{(q,p) \in \mathcal{B}_a \ : \ p \leq g_{J,\varepsilon}(q)\}.$$

Notem que del fet que $p \mapsto \Gamma_{J,\varepsilon}(q,p)$ és convexa i assoleix el seu mínim quan es satisfà (5.27) es dedueix que

$$\dot{q} > 0 \ \text{ a } \mathcal{B}^+_{a,J,\varepsilon}, \qquad \dot{q} < 0 \ \text{ a } \mathcal{B}^-_{a,J,\varepsilon} \qquad \text{i} \qquad \dot{q} = 0 \ \text{ a } C_{J,\varepsilon}.$$

Suposem, per fixar idees, que la trajectòria $(q(t), p(t))$ entra a la regió $\mathcal{B}^+_{a,J,\varepsilon}$. A la figura de la pàgina següent apareixen il·lustrats els dos casos que es poden donar: que la trajectòria abandoni aquesta regió o que no l'abandoni. Si no l'abandona, tindrem $\dot{q}(t) > 0$ per a tot $t \in \mathbf{R}$. Per (5.36), tenim $q(t) \neq q_{J,\varepsilon}$ per a tot $t \in \mathbf{R}$, i per tant resulta que $q(t)$ ha de tendir a algun $\hat{q} \in \mathbf{T}$ per a $t \to \infty$. Tindrem $\dot{q}(t) = \frac{\partial \Gamma_{J,\varepsilon}}{\partial p}(q(t), p(t)) \to 0$. Per (5.25),

$$\left| \frac{\partial \Gamma_{J,\varepsilon}}{\partial p}(q(t), p(t)) \right| \geq \frac{A}{4} \left| p(t) - g_{J,\varepsilon}(q(t)) \right| \qquad \forall t \in \mathbf{R}$$

i així deduïm que $p(t) \to \hat{p} = g_{J,\varepsilon}(\hat{q})$. Així, la trajectòria $(q(t), p(t))$ tendeix al punt $(\hat{q}, \hat{p}) \in C_{J,\varepsilon}$, que serà un punt fix de $\Gamma_{J,\varepsilon}$ i per tant $\hat{q}$ és un punt crític de la funció $W_{J,\varepsilon}$. Per la conservació de l'energia, $W_{J,\varepsilon}(\hat{q}) = E$. Com que $q_{J,\varepsilon}$ és un màxim solitari de $W_{J,\varepsilon}$, només pot ser $\hat{q} = q_{J,\varepsilon}$ i en conseqüència $(q(t), p(t))$ és una trajectòria homoclínica del hamiltonià reduït.

Resta per estudiar el cas en què la trajectòria $(q(t), p(t))$ abandona la regió $\mathcal{B}^+_{a,J,\varepsilon}$. Sigui

$$t_1 = \min\{t \ : \ (q(t), p(t)) \in C_{J,\varepsilon}\} = \min\{t \ : \ \dot{q}(t) = 0\}.$$

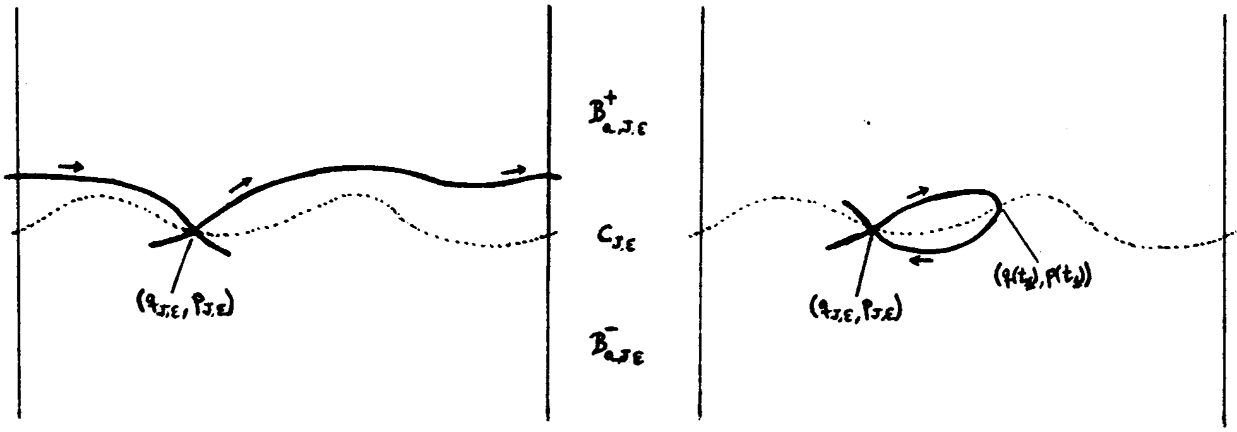
Del fet que $(q(t_1), p(t_1)) \in C_{J,\varepsilon}$ i de (5.36) deduïm que $W_{J,\varepsilon}(q(t_1)) = E$ i, a més,

$$W_{J,\varepsilon}(q(t)) < E \qquad \forall t < t_1. \tag{5.37}$$

Com que $(q(t_1), p(t_1))$ no és un punt fix de $\Gamma_{J,\varepsilon}$, resulta que $q(t_1)$ no és un punt crític de $W_{J,\varepsilon}$. D'altra banda,

$$\ddot{q}(t_1) = \frac{\partial^2 \Gamma_{J,\varepsilon}}{\partial p^2}(q(t_1), p(t_1)) \cdot \dot{p}(t_1) \neq 0$$

i, en conseqüència, per a $t > t_1$ la trajectòria entra a la regió $\mathcal{B}^-_{a,J,\varepsilon}$, en la qual $\dot{q}(t) < 0$. Comprovem que ja no pot tornar a sortir d'aquesta regió. Si en surt, podem definir $t_2 = \min\{t > t_1 : (q(t), p(t)) \in C_{J,\varepsilon}\}$. Com que, per (5.36), tenim $q(t) \neq q_{J,\varepsilon}$ per a tot t, resulta que $q(t_2) \in [q_{J,\varepsilon}, q(t_1)]$. Per tant, $q(t_2) = q(t_3)$ per algun $t_3 < t_1$ i, aplicant novament (5.36), deduïm que $W_{J,\varepsilon}(q(t_3)) = W_{J,\varepsilon}(q(t_2)) = E$, la qual cosa contradiu (5.37). Per tant la trajectòria ja no surt de $\mathcal{B}^-_{a,J,\varepsilon}$, i tenim $q(t) \in [q_{J,\varepsilon}, q(t_1)]$ per a tot $t \in \mathbf{R}$. Raonant com més amunt veiem que $(q(t), p(t))$ tendeix a un punt $(\hat{q}, \hat{p}) \in C_{J,\varepsilon}$, amb $W_{J,\varepsilon}(\hat{q}) = E$. Pel fet que $q_{J,\varepsilon}$ és un màxim solitari de $W_{J,\varepsilon}$, ha de ser $\hat{q} = q_{J,\varepsilon}$ i per tant la trajectòria és homoclínica. □



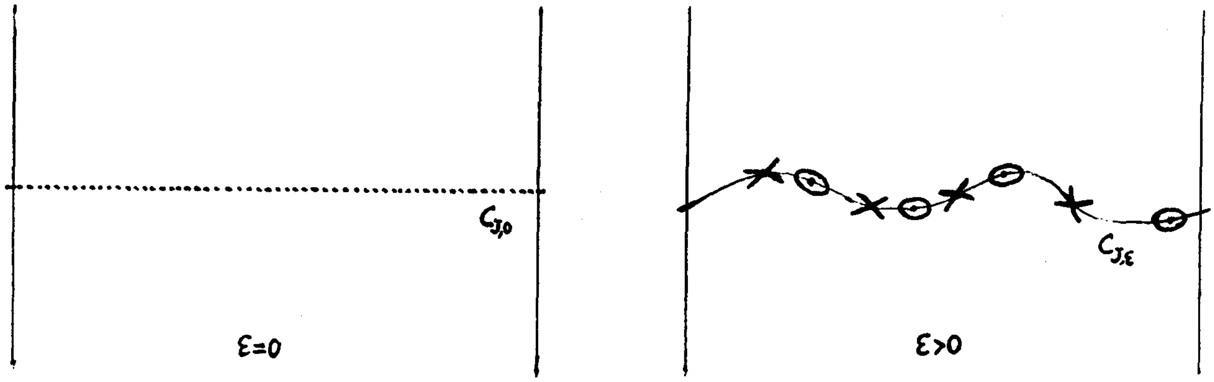
Notes

1. L'enunciat és vàlid també per a $A < 0$, $\varepsilon < 0$. En canvi, si $A\varepsilon < 0$, els tors hiperbòlics s'obtenen quan $B > 0$ i per tant corresponen a mínims de V_{I^*}.

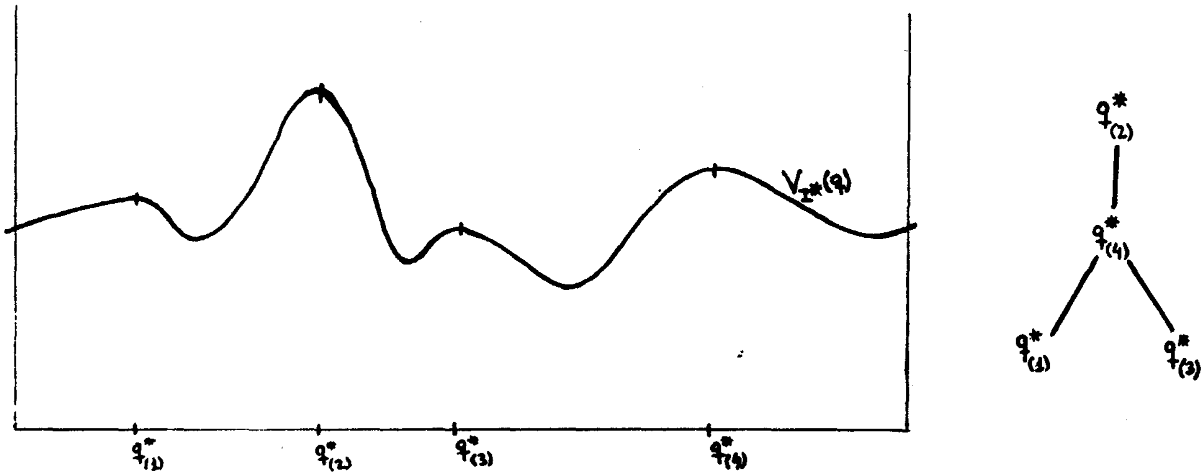
2. Si els màxims de $W_{J,\varepsilon}$ no fossin solitaris, tindríem connexions heteroclíniques entre màxims del mateix nivell. Aquest cas no ha estat inclòs perquè correspon a una situació que queda genèricament destruïda sota petites pertorbacions, a menys que el problema presenti simetries que garanteixin la conservació de les connexions heteroclíniques.

Arran d'aquest teorema, hom pot esbrinar l'estructura del retrat de fase de la forma normal Γ_ε prop de la ressonància. Donat $I^* = (J^*, p^*) \in S_{\omega,\mathcal{N}_1}$, i suposant que tots els punts crítics de la funció V_{I^*} són no degenerats, n'hi haurà un nombre finit $2r$, dels quals r seran màxims i els altres r seran mínims. Denotem aquests punts crítics $q^*_{(j)}$, $j = 1, \ldots, 2r$. Pel que hem vist al teorema 27, per a $\varepsilon > 0$ i $|J - J^*|$ prou petits existeixen $\left(q_{(j),J,\varepsilon}, p_{(j),J,\varepsilon}\right) \in C_{J,\varepsilon}$, $j = 1, \ldots, 2r$, punts fixos del hamiltonià reduït $\Gamma_{J,\varepsilon}$, de manera que $q_{(j),J^*,0} = q^*_{(j)}$, $p_{(j),J^*,0} = p^*$. El punt $\left(q_{(j),J,\varepsilon}, p_{(j),J,\varepsilon}\right)$ és hiperbòlic o el·líptic segons $q^*_{(j)}$ sigui màxim o mínim de V_{I^*}, respectivament. Ja hem dit a la prova del teorema 32 que, per (5.32), els punts fixos de $\Gamma_{J,\varepsilon}$ es corresponen amb els punts crítics de la funció $W_{J,\varepsilon}$. Així, cada $q_{(j),J,\varepsilon}$ és un punt crític de $W_{J,\varepsilon}$ el qual, per (5.33), és màxim o mínim segons el que sigui $q^*_{(j)}$ de V_{I^*}. A més, l'expressió (5.34) juntament amb un raonament similar al de la prova del lema 31 permet assegurar que $W_{J,\varepsilon}$ no té altres punts crítics que els $q_{(j),J,\varepsilon}$ si $\varepsilon > 0$ i $|J^* - J|$ són prou petits.

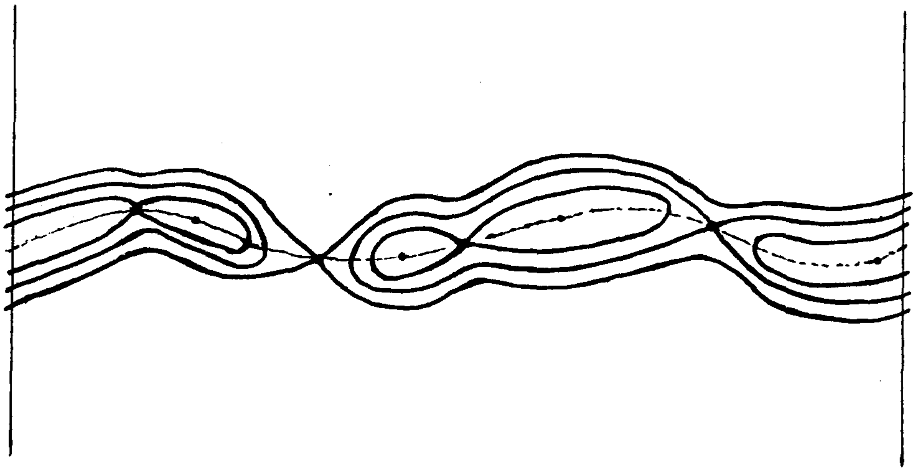
Així, la corba de punts fixos $C_{J,0}$ (definida per $p = p_J$) que hom té per a $\varepsilon = 0$ és substituïda quan $\varepsilon > 0$ per un nombre finit de punts fixos de $\Gamma_{J,\varepsilon}$. Aquests es troben tots sobre la corba $C_{J,\varepsilon}$, la distància màxima de la qual a $C_{J,0}$ és $\mathcal{O}(\varepsilon)$ per (5.28).



Si tots els màxims de V_{I^*} són solitaris podrem establir una jerarquia entre ells. Primer de tot tindríem el màxim absolut. Després, el màxim que ocupés el segon lloc segons el valor de V_{I^*}. Aquests dos màxims divideixen $\mathbf{T}$ en dos intervals, dins de cadascun dels quals prendríem el màxim on V_{I^*} pren el seu valor més gran. Aquests nous màxims (dos com a molt) estarien situats en un tercer nivell jeràrquic. D'aquesta manera continuaríem el procés: cada màxim que prenguem dins d'un interval divideix aquest en dos nous intervals, dins dels quals podem escollir nous màxims, que corresponen al nivell jeràrquic següent, etc., i així fins esgotar tots els màxims. A la figura següent veiem un exemple de funció V_{I^*} i la jerarquia entre els seus màxims.



La jerarquia entre els màxims de la funció $W_{J,\varepsilon}$ és exactament la mateixa si $\varepsilon > 0$ i $|J - J^*|$ són prou petits. D'acord amb l'estudi de les varietats invariants d'un màxim concret dut a terme dins la prova del teorema 32, podem veure quin és l'abast de les varietats invariants de cada tor hiperbòlic, és a dir, quins dels altres tors queden enclosos per aquestes varietats. Per al cas de la figura anterior, esbossem a continuació el retrat de fase corresponent.



Observem també que podríem establir fàcilment el resultat anàleg al teorema 32 per a un mòdul unidimensional qualsevol. Tenint en compte (5.19), si el mòdul és $\mathcal{M} = \langle\langle k^{(0)} \rangle\rangle$ cal demanar que

$$\left(k^{(0)}\right)^{\top} \frac{\partial^2 h}{\partial I^2}(I^*)\, k^{(0)} \neq 0,$$

la qual cosa s'acomplirà si h és quasiconvexa.

Per al hamiltonià Γ_ε considerat a (5.3), en forma normal respecte $\mathcal{M}$, les variables d'acció només poden variar en la direcció de $\langle \mathcal{M} \rangle$; aleshores la quasiconvexitat de h implica convexitat en la direcció de $\langle \mathcal{M} \rangle$, i per la conservació de l'energia les trajectòries que tenen condicions inicials properes a la ressonància són confinades a restar-hi a prop perpètuament. Aquesta idea, introduïda a [BG] i que hem usat a la secció 3.2 per a establir fites d'estabilitat prop de ressonàncies, ens ha permès ara de confinar les varietats invariants, fent palès novament el caràcter estabilitzador de la quasiconvexitat.

Remarquem finalment que, com que les condicions del teorema 32 no es veuen afectades per petites pertorbacions, els resultats obtinguts en aquesta secció s'estenen a la forma normal Γ_ε^* considerada a (5.4). Recordem que el hamiltonià original (5.1) s'obté, llevat d'un canvi canònic, afegint una pertorbació d'ordre μ, exponencialment petita en ε, a la forma normal Γ_ε^*. Si podem assegurar la conservació dels tors hiperbòlics i llurs varietats invariants al hamiltonià original, amb μ com a paràmetre de pertorbació, llavors deduiríem que les esmentades varietats invariants per a H_ε són contingudes en un entorn de les de Γ_ε^*, el radi del qual tendiria a zero per a $\mu \to 0$. D'aquesta manera, com que Γ_ε^* té connexions homoclíniques, el probable trencament de les varietats invariants de H_ε seria exponencialment petit en ε (vegeu a [Nei2] un resultat anàleg en un cas més senzill).

Capítol 6

Cloenda

Fem en aquest breu capítol una relació de les principals contribucions aportades pels capítols anteriors, incloent tant els resultats que són originals com la nova perspectiva amb què alguns problemes han estat tractats. També esmentem alguns problemes i qüestions estretament lligats als treballs continguts en aquesta memòria i que en constituirien llur continuació lògica.

Com a contribucions, citem les següents:

* Usar una norma per a camps vectorials hamiltonians, que fa més fàcil l'obtenció de les fites òptimes del teorema de Nekhoroshev.

* Desenvolupar un algorisme quadràtic per passar a forma normal, basat en sèries de Lie, amb el qual s'obté l'exponent d'estabilitat òptim.

* Obtenir l'exponent d'estabilitat $b = 1$ en el cas dels oscil·ladors harmònics, sense usar sèries infinites.

* Expressar el resultat sobre estabilitat efectiva prop de ressonàncies en funció del radi δ de l'entorn considerat.

* Enfocament comú per als teoremes de Nekhoroshev i KAM.

* Prova directa de la versió isoenergètica del teorema KAM, sense fer servir una aplicació de Poincaré.

* Introduir la noció de tor quasi-invariant prenent la precisió r, amb què hom verifica la condició diofàntica, com a paràmetre de pertorbació.

* Prova del teorema KAM a l'entorn d'un punt fix el·líptic, amb una fita exponencialment petita per a la mesura del complementari.

* Estudi de les varietats invariants de tors hiperbòlics d'una forma normal prop d'una ressonància simple.

Ens plantegem a continuació algunes possibles extensions i aplicacions dels mètodes desenvolupats al llarg dels capítols anteriors.

En primer lloc, és evident que les fites generals d'estabilitat efectiva obtingudes al capítol 3 poden ésser millorades en exemples concrets. Podem obtenir certa millora de les fites teòriques en funció de les simetries del problema. Però una millora important de les fites requereix el càlcul explícit de la forma normal fent ús de l'ordinador. La construcció d'un manipulador algèbric que implementi els algorismes lineal i quadràtic desenvolupats a la secció 2.1 no presentaria complicacions, car les úniques operacions requerides són el càlcul de parèntesis de Poisson i la resolució de certes equacions funcionals lineals igualant coeficients. Tanmateix, hauríem de truncar a ordres prou alts les sèries de Lie i les sèries de Fourier, i portar un control analític de la part que menyspreem per tal que aquesta no afecti de manera notable el resultat final. També hauríem de veure si l'algorisme quadràtic és realment més ràpid que el lineal, cosa que hem justificat de manera poc rigorosa al final de la secció 2.1.

Un hamiltonià concret del qual seria interessant millorar les fites d'estabilitat efectiva és l'exemple d'Arnol'd, considerat a la pàgina 57. Aquest hamiltonià té l'avantatge que ja ve expressat en variables acció–angle i per tant li podem aplicar directament els algorismes de la secció 2.1 per al càlcul de la forma normal. Això permetria obtenir estimacions del temps necessari per a la difusió, assignant valors als paràmetres ε i μ.

A més de millorar les fites d'estabilitat efectiva, el càlcul efectiu de forma normal d'un hamiltonià fins a ordre prou alt serviria, en algun exemple concret, per a situar els tors hiperbòlics i llurs varietats invariants, seguint les idees del capítol 5. Són bons exemples on dur a terme això els que podem trobar a [CG, Chie]. Els tors hiperbòlics, com és sabut, són a la base dels mètodes per a establir l'existència de difusió d'Arnol'd.

Ja en un camp més teòric, assenyalem que amb els mètodes usats al capítol 4 podríem obtenir una prova rigorosa del teorema KAM en el cas que vulguéssim assegurar la conservació de tors invariants quan les freqüències satisfan una condició de no ressonància més feble que la condició diofàntica. De fet, al final de la secció 4.4 hem esbossat ja la prova d'aquest resultat.

Els resultats sobre tors quasi-invariants de la secció 4.5 deixen obertes qüestions diverses. En primer lloc, ens hem referit a la pàgina 100 a les fites "superexponencials" obtingudes a [MG2], sota la condició de quasiconvexitat. Caldria esbrinar si la quasiconvexitat és realment necessària, car habitualment hom imposa aquesta condició per obtenir l'estabilitat sobre regions ressonants, com hem comentat a diversos capítols.

A més, la proposició 23 sembla suggerir que és possible recobrir tot l'espai de fase amb els tors quasi-invariants i els blocs ressonants (de fet, la proposició esmentada estableix això dins l'espai de freqüències). Si això fos possible, conduiria a una millora del segon exponent d'estabilitat del teorema de Nekhoroshev: $b > 1/2n$, si expressem les fites en coordenades adequades.

Dins la secció 4.6, dedicada al teorema KAM a l'entorn d'un punt fix el·líptic, si milloréssim les fites per a la forma normal de [GDFGS] obtindríem, al teorema 26, un exponent més gran que $2/3(\tau+1)$, possiblement $1/(\tau+1)$.

Esmentem també que la condició isoenergètica "d'ordre superior" a l'entorn d'un punt fix el·líptic, a què ens hem referit a la pàgina 107, sembla complicada de tractar en general, però per a hamiltonians concrets sí que podríem obtenir sense dificultat resultats anàlegs als de la secció 4.6.

En referència als resultats del capítol 5, seria interessant esbrinar si una adaptació de l'algorisme quadràtic de la secció 2.1 permetria provar l'existència de tors invariants de dimensió inferior prop de ressonàncies, especialment tors hiperbòlics amb llurs varietats invariants, a partir de la forma normal d'un hamiltonià. En relació amb aquest problema, hauríem de veure si l'equació funcional lineal (2.10) que correspon a l'algorisme quadràtic pot ésser resolta exactament fent ús del mètode de les característiques. Això simplificaria l'obtenció de fites per a l'algorisme quadràtic i potser seria més factible veure l'existència de tors de dimensió inferior.

Si bé l'existència de tors hiperbòlics amb llurs varietats invariants és un resultat ja establert a [Tr], hem dit a la pàgina 119 que convindria expressar el resultat en termes del paràmetre μ, exponencialment petit, que dóna la mida de la diferència entre el hamiltonià original i la seva forma normal. També, d'aquesta manera podríem fitar la separació de les varietats invariants del hamiltonià original respecte les de la forma normal, les quals constitueixen connexions homoclíniques en el cas d'una ressonància simple que hem considerat a la secció 5.3. D'altra banda hem de dir que, per tal d'estudiar posteriorment les probables interseccions entre varietats invariants, aniria bé que la informació que obtinguéssim sobre aquestes varietats no es restringís a un entorn dels tors hiperbòlics.

Bibliografia

[Ar1] V. I. ARNOL'D. "Proof of a theorem of A. N. Kolmogorov on the invariance of quasi-periodic motions under small perturbations of the Hamiltonian". *Russian Math. Surveys 18* (1963), p. 9–36.

[Ar2] V. I. ARNOL'D. "Instability of dynamical systems with several degrees of freedom". *Sov. Math. Dokl. 5* (1964), p. 581–585.

[AA] V. I. ARNOL'D, A. AVEZ. *"Problèmes ergodiques de la mécanique classique"*. *Monographies Internationales de Mathématiques Modernes*. Gauthier-Villars, Paris 1967.

[BGG] G. BENETTIN, L. GALGANI, A. GIORGILLI. "A proof of Nekhoroshev's theorem for the stability times in nearly integrable Hamiltonian systems". *Celest. Mech. 37* (1985), p. 1–25.

[BG] G. BENETTIN, G. GALLAVOTTI. "Stability of motions near resonances in quasi-integrable Hamiltonian systems". *J. Stat. Phys. 44* (1986), p. 293–338.

[Bi] G. D. BIRKHOFF. *"Dynamical systems"*. *Am. Math. Soc. Colloq. Publ. IX*. American Mathematical Society, New York 1927.

[BH] H. W. BROER, G. B. HUITEMA. "A proof of the isoenergetic KAM–theorem from the 'ordinary' one". *J. Diff. Eq. 90* (1991), p. 52–60.

[Br] A. D. BRYUNO. "A comparison of conditions on small divisors". *Conférence "Petits Diviseurs"*. École Polytechnique, Palaiseau (France) 1990.

[CS] CH.-Q. CHENG, Y.-S. SUN. "Existence of KAM tori in degenerate Hamiltonian systems". *J. Diff. Eq. 114* (1994), p. 288–335.

[Chie] L. CHIERCHIA. "Arnol'd instability for nearly-integrable analytic Hamiltonian systems", 1995. Preprint 'mp-archive', n. 95-96.

[CG] L. CHIERCHIA, G. GALLAVOTTI. "Drift and diffusion in phase space". *Ann. Inst. H. Poincaré (Physique Théorique) 60* (1994), p. 1–144.

[Chir] B. V. CHIRIKOV. "A universal instability of many-dimensional oscillator systems". *Physics Reports 52* (1979), p. 263–379.

[CH] S.-N. CHOW, J. K. HALE. *"Methods of bifurcation theory"*. *Grundlehren der Mathematischen Wissenschaften*, vol. *251*. Springer-Verlag, New York 1982.

[CL] E. A. CODDINGTON, N. LEVINSON. *"Theory of ordinary differential equations"*. *International Series in Pure and Applied Mathematics*. McGraw-Hill, New York–Toronto–London 1955.

[Co] P. M. COHN. *"Algebra"*, vol. *1*, 2ª edició. Wiley, Chichester 1982.

[De] A. DELSHAMS. *"Porqué la difusión de Arnol'd aparece genéricamente en los sistemas hamiltonianos con más de 2 grados de libertad"*. Tesi doctoral, Universitat de Barcelona, 1983.

[DG1] A. DELSHAMS, P. GUTIÉRREZ. "Effective stability for nearly integrable Hamiltonian systems", a *"Proceedings of the International Conference on Differential Equations, Barcelona 1991"* (C. Perelló, C. Simó, J. Solà-Morales, ed.), vol. *1*, p. 415–420. World Scientific, Singapore 1993.

[DG2] A. DELSHAMS, P. GUTIÉRREZ. "Nekhoroshev and KAM theorems revisited via a unified approach", a *"Hamiltonian Mechanics: Integrability and Chaotic Behavior"* (J. Seimenis, ed.), p. 299–306. Plenum, New York 1994.

[DG3] A. DELSHAMS, P. GUTIÉRREZ. "Effective stability and KAM theory". Research Report MA2-IR-95-0007. U.P.C., Barcelona 1995.

[Do] R. DOUADY. *"Applications du théorème des tores invariants"*. Thèse de 3ᵉ cycle, Université Paris VII, 1982.

[Fa] F. FASSÒ. "Lie series method for vector fields and Hamiltonian perturbation theory". *J. Appl. Math. Phys. (ZAMP) 41* (1990), p. 843–864.

[Ga] G. GALLAVOTTI. "Quasi-integrable mechanical systems", a *"Les Houches, Session XLIII, 1984. Phénomènes critiques, systèmes aléatoires, théories de jauge"* (K. Osterwalder, R. Stora, ed.), vol. *2*, p. 539–624. North Holland, Amsterdam 1986.

[GDFGS] A. GIORGILLI, A. DELSHAMS, E. FONTICH, L. GALGANI, C. SIMÓ. "Effective stability for a Hamiltonian system near an elliptic equilibrium point, with an application to the restricted three body problem". *J. Diff. Eq. 77* (1989), p. 167–198.

[GG1] A. GIORGILLI, L. GALGANI. "Formal integrals for an autonomous Hamiltonian system near an equilibrium point". *Celest. Mech. 17* (1978), p. 267–280.

[GG2] A. Giorgilli, L. Galgani. “Rigorous estimates for the series expansions of Hamiltonian perturbation theory”. *Celest. Mech. 37* (1985), p. 95–112.

[Gr] S. M. Graff. “On the conservation of hyperbolic invariant tori for Hamiltonian systems”. *J. Diff. Eq. 15* (1974), p. 1–69.

[Ko] A. N. Kolmogorov. “The general theory of dynamical systems and classical mechanics”, apèndix de *“Foundations of mechanics”* (R. H. Abraham, J. E. Marsden), 2ª edició, p. 741–757. Benjamin/Cummings, Reading (Massachusetts) 1978.

[Ll] R. de la Llave. “Introduction to K.A.M. theory”. C.E.C.S., 1986. A publicar per Plenum (C. Teitelboim, ed.).

[LW] R. de la Llave, C. E. Wayne. “Whiskered and low dimensional tori in nearly integrable Hamiltonian systems”. Preprint, 1988.

[Lo1] P. Lochak. “Stabilité en temps exponentiels des systèmes hamiltoniens proches de systèmes integrables: résonances et orbites fermées”. Preprint E.N.S., Paris 1990.

[Lo2] P. Lochak. “Canonical perturbation theory via simultaneous approximation”. *Russian Math. Surveys 47* (1992), p. 57–133.

[Lo3] P. Lochak. “Hamiltonian perturbation theory: periodic orbits, resonances, intermittency”, 1992. Per aparèixer a *Dynamics Reported*.

[Lo4] P. Lochak. “Stability of Hamiltonian systems over exponentially long times. The near-linear case”, a *“Proceedings of the Cincinnati 1992 Conference on Hamiltonian Dymamical Systems”*. Birkäuser, 1993.

[LM] P. Lochak, C. Meunier. *“Multiphase averaging for classical systems: with applications to adiabatic theorems”*. *Applied Mathematical Sciences*, vol. *72*. Springer-Verlag, New York 1988.

[LN] P. Lochak, A. I. Neishtadt. “Estimates of stability time for nearly integrable systems with a quasiconvex Hamiltonian”. *Chaos 2* (1992), p. 495–499.

[LNN] P. Lochak, A. I. Neishtadt, L. Niederman. “Stability of nearly integrable convex Hamiltonian systems over exponentially long times”, a *“Proceedings of the 1991 Euler Institute Conference on Dynamical Systems”*. Birkhäuser, 1993.

[Mi] J. Milnor. *“Morse theory”*. Princeton University Press, Princeton (New Jersey) 1963.

[MG1] A. MORBIDELLI, A. GIORGILLI. "Quantitative perturbation theory by successive elimination of harmonics". *Celest. Mech. 55* (1993), p. 131–159.

[MG2] A. MORBIDELLI, A. GIORGILLI. "Superexponential stability of KAM tori", 1994. Per aparèixer a *J. Stat. Phys.*

[Mo1] J. MOSER. "On invariant curves of area-preserving mappings of an annulus". *Nachr. Akad. Wiss. Göttingen: Math. Phys. Kl. II* (1962), p. 1–20.

[Mo2] J. MOSER. "Convergent series expansions for quasi-periodic motions". *Math. Annalen 169* (1967), p. 136–176.

[Mo3] J. MOSER. "Lectures on Hamiltonian systems". *Memoirs Am. Math. Soc. 81*, p. 1–60. American Mathematical Society, Providence (Rhode Island) 1968.

[Nei1] A. I. NEISHTADT. "Estimates in the Kolmogorov theorem on conservation of conditionally periodic motions". *J. Appl. Math. Mech. 45* (1982), p. 766–772.

[Nei2] A. I. NEISHTADT. "The separation of motions in systems with rapidly rotating phase". *J. Appl. Math. Mech. 48* (1984), p. 133–139.

[Nek] N. N. NEKHOROSHEV. "An exponential estimate of the time of stability of nearly-integrable Hamiltonian systems". *Russian Math. Surveys 32* (1977), p. 1–65.

[PW] A. D. PERRY, S. WIGGINS. "KAM tori are very sticky: rigorous lower bounds on the time to move away from an invariant Lagrangian torus with linear flow". *Physica D 71* (1994), p. 102–121.

[Poi] H. POINCARÉ. *"Les méthodes nouvelles de la mécanique céleste"*, vol. *3*. Gauthier-Villars, Paris 1899.

[Pos1] J. PÖSCHEL. "Integrability of Hamiltonian systems on Cantor sets". *Comm. Pure Appl. Math. XXXV* (1982), p. 653–696.

[Pos2] J. PÖSCHEL. "Nekhoroshev estimates for quasi-convex Hamiltonian systems". *Math. Zeitschrift 213* (1993), p. 187.

[Ru1] H. RÜSSMANN. "On optimal estimates for the solutions of linear partial differential equations of first order with constant coefficients on the torus", a *"Dynamical systems, theory and applications"* (J. Moser, ed.), p. 598–624. *Lect. Notes in Phys. 38*. Springer-Verlag, New York 1975.

[Ru2] H. RÜSSMANN. "Nondegeneracy in the perturbation theory of integrable dynamical systems", a *"Stochastics, algebra and analysis in classical and quantum dynamics"* (S. Albeverio, Ph. Blanchard, D. Testard, ed.), p. 211–223. *Mathematics and its Applications*, vol. *59*. Kluwer Academic Publishers, Dordrecht 1990.

[Sa] D. Salamon. "The Kolmogorov–Arnol'd–Moser theorem". Preprint E.T.H. Zürich, 1986.

[Sc] W. Schmidt. *"Diophantine approximations"*. *Lect. Notes in Math. 785*. Springer-Verlag, Berlin–Heidelberg–New York 1980.

[Se] M. B. Sevryuk. "KAM–stable Hamiltonians", 1994. Per aparèixer a *J. Dyn. Control Syst.*

[Si1] C. Simó. "Estabilitat de sistemes hamiltonians". *Memòries de l'Acadèmia de Ciències i Arts de Barcelona XLVIII* (1989), p. 303–344.

[Si2] C. Simó. "Averaging under fast quasiperiodic forcing", a *"Hamiltonian Mechanics: Integrability and Chaotic Behavior"* (J. Seimenis, ed.), p. 13–34. Plenum, New York 1994.

[Tr] D. V. Treschev. "The mechanism of destruction of resonance tori of Hamiltonian systems". *Math. USSR Sb. 68* (1991), p. 181–203.

[XYQ] J. Xiu, J. You, Q. Qiu. "Invariant tori for nearly integrable Hamiltonian systems with degeneracy". Preprint E.T.H. Zürich, 1994.

[Ze1] E. Zehnder. "Generalized implicit function theorems with applications to some small divisor problems I". *Comm. Pure Appl. Math. XXVIII* (1975), p. 91–140.

[Ze2] E. Zehnder. "Generalized implicit function theorems with applications to some small divisor problems II". *Comm. Pure Appl. Math. XXIX* (1976), p. 49–111.