

**UTILIZACIÓN DE MÉTRICAS RIEMANNIANAS
EN ANALISIS DE DATOS MULTIDIMENSIONALES
Y SU APLICACIÓN A LA BIOLOGÍA**

JOSE M^a OLLER SALA

BARCELONA, 25 de NOVIEMBRE de 1982.

TABLA XI

(Datos cedidos por L. Serra (1977))

Línea generación sexo genotipo media desviac. standard tamaño muestral

{	LH1	2	♀	++	93.57	1.16	23
	LH1	2	♀	+-	93.50	1.05	6
	LH1	2	♀	--	93.83	1.47	6
{	LH1	5	♀	++	94.73	0.90	11
	LH1	5	♀	+-	93.89	1.27	9
	LH1	5	♀	--	93.38	0.92	8
{	LL1	2	♀	++	86.38	0.74	8
	LL1	2	♀	+-	86.50	2.31	20
	LL1	2	♀	--	86.41	1.42	17
{	LL1	5	♀	++	86.33	0.71	9
	LL1	5	♀	+-	86.36	0.81	11
	LL1	5	♀	--	85.50	0.76	8
{	RWL1	0	♀	++	92.08	2.61	12
	RWL1	0	♀	+-	91.56	1.80	34
	RWL1	0	♀	--	90.17	1.99	12
{	RWL1	2	♀	++	89.40	3.03	10
	RWL1	2	♀	+-	89.32	2.21	22
	RWL1	2	♀	--	87.29	2.75	7

TABLA XI

(Continuación)

Línea generación sexo genotipo media desviac. standard tamaño muestral

{	LH1	2	♂	++	83.22	1.28	23
	LH1	2	♂	+-	83.50	1.90	10
	LH1	2	♂	--	82.71	1.11	7
{	LH1	5	♂	++	84.89	1.62	9
	LH1	5	♂	+-	84.64	1.36	11
	LH1	5	♂	--	83.73	1.01	11
{	LL1	2	♂	++	76.00	0.58	7
	LL1	2	♂	+-	78.15	1.86	13
	LL1	2	♂	--	77.38	0.96	13
{	LL1	5	♂	++	76.75	1.04	8
	LL1	5	♂	+-	77.20	1.23	10
	LL1	5	♂	--	75.75	1.04	8
{	RWL1	0	♂	++	82.75	2.44	16
	RWL1	0	♂	+-	82.50	2.08	32
	RWL1	0	♂	--	81.64	2.54	11
{	RWL1	2	♂	++	81.00	3.60	16
	RWL1	2	♂	+-	81.00	2.55	13
	RWL1	2	♂	--	77.86	1.77	7

Asumiendo normalidad, comprobada por Serra (1977), podemos aplicar el test estadístico sugerido en el apartado 9.1.1 entre algunas de dichas poblaciones estadísticas, para ver si podemos aceptar si son iguales o no. Vamos a comparar entre sí solamente a aquellas poblaciones estadísticas que sólo difieren en el genotipo (encerradas en una llave en la tabla XI).

9.2. Resultados estadísticos

Línea LH1, generación 2, hembras

Comparaciones	genotipos	tamaños muestrales
++/+-	U=0.114	23 , 6
++/--	U=0.720	23 , 6
+--/--	U=0.886	6 , 6

Línea LH1, generación 5, hembras

Comparaciones	genotipos	tamaños muestrales
++/+-	U=4.098	11 , 9
++/--	U=9.380	11 , 8
+--/--	U=1.799	9 , 8

Línea LL1, generación 2, hembras

Comparaciones genotipos		tamaños muestrales
++/+-	U=14.849	8 , 20
++/--	U= 4.626	8 , 17
+--/--	U= 4.373	20 , 17

Línea LL1, generación 5, hembras

Comparacion genotipos		tamaños muestrales
++/+-	U=0.180	9 , 11
++/--	U=5.177	9 , 8
+--/--	U=5.341	11 , 8

Línea RWL1, generación 0, hembras

Comparación genotipos		tamaños muestrales
++/+-	U=2.947	12 , 34
++/--	U=4.931	12 , 12
+--/--	U=4.851	34 , 12

Línea RWL1, generación 2, hembras

Comparación genotipos		tamaños muestrales
++/+-	U=1.376	10 , 22
++/--	U=2.227	10 , 7
+--/--	U=3.984	22 , 7

Línea LH1, generación 2, machos

Comparación genotipos		tamaños muestrales
++/+-	U=2.393	23 , 10
++/--	U=1.190	10 , 7
+--/--	U=3.528	10 , 7

Línea LH1, generación 5, machos

Comparación genotipos		tamaños muestrales
++/+-	U=0.443	9 , 11
++/--	U=6.012	9 , 11
+--/--	U=4.164	11 , 11

Línea LL1, generación 2, machos

Comparación genotipos		tamaños muestrales
++/+-	U=26.325	7 , 13
++/--	U=15.571	7 , 13
+--/--	U= 7.671	13 , 13

Línea LL1, generación 5, machos

Comparación genotipos		tamaños muestrales
++/+-	U=0.946	8 , 10
++/--	U=3.564	8 , 8
+--/--	U=7.074	10 , 8

Línea RWL1, generación 0, machos

Comparación genotipos		tamaños muestrales
++/+-	U=0.674	16 , 32
++/--	U=1.306	16 , 11
+--/--	U=1.785	32 , 11

Línea RWL1, generación 2, machos

Comparación genotipos		tamaños muestrales
++/+-	U=1.706	16 , 13
++/--	U=11.480	16 , 7
+--/--	U=10.181	13 , 7

9.2.3. Discusión

Vamos a escoger como valor crítico del estadístico U, 7.12, que corresponde a un nivel de significación $\epsilon=0.05$, para tamaños muestrales del orden de 15.

A partir del apartado 9.2.2, obtenemos que hemos encontrado diferencias significativas en las siguientes comparaciones:

- Línea LH1, generación 5, hembras, comparación genotipo ++ con --
- Línea LL1, generación 2, hembras, comparación genotipo ++ con +-
- Línea LL1, generación 2, machos, comparación genotipos ++ con +-
- Línea LL1, generación 2, machos, comparación genotipos ++ con --
- Línea LL1, generación 2, machos, comparación genotipos +- con --
- Línea RWL1, generación 2, machos, comparación genotipos ++ con --
- Línea RWL1, generación 2, machos, comparación genotipos +- con --

Hemos obtenido pues un total de 7 contrastes significativos de 36. Si no hubiesen diferencias significativas entre las poblaciones estadísticas comparadas, con un nivel de significación del 5% el número esperado de test estadísticos significativos sería de $36 \frac{5}{100} = 1.80$, bastante inferior a 7, hecho que queda patente calculando:

$$\chi^2 = \frac{(7-1.80)^2}{1.80} + \frac{(29-34.2)^2}{34.2} = 15.81 \gg 3.841$$

(siendo 3.841 el valor crítico para una cola a la derecha del 5% en una distribución ji-cuadrado con 1 grado de libertad). Por tanto

podemos aceptar que hay diferencias significativas entre los grupos considerados.

Las poblaciones estadísticas comparadas sólo diferían en el genotipo, concretamente en el locus que determina la síntesis de la Adh, si consideramos exclusivamente las variables o factores que se controlaron en los experimentos. Una interpretación posible puede ser que realmente el tamaño se vea influido según el genotipo, ++, +- ó --, para el locus de la Adh. Las diferencias enzimáticas podrían alterar no sólo los valores medios del tamaño, sino también la dispersión del mismo. Sin embargo, esta interpretación estadística de los resultados no es única, ya que las poblaciones estadísticas comparadas pueden diferir en factores que no controlamos: pensar en algún gen fuertemente ligado al locus de la Adh.

10. RESUMEN DE LOS RESULTADOS

La distancia estudiada, definida a través de la matriz de información de Fisher, goza de buenas propiedades de invarianza: no sólo es invariante frente a las transformaciones admisibles de los parámetros, consecuencia de estar definida a través de un tensor covariante de segundo orden, en la variedad paramétrica, sino que es invariante también frente a transformaciones admisibles de variables aleatorias.

Por otra parte, si se pretende definir, en la variedad paramétrica, al tensor métrico, $g_{\mu\nu}$, a través del sistema de ecuaciones:

$$g_{\mu\nu} = E(I_{,\mu\nu}) \quad \mu, \nu = 1, \dots, n \quad (1)$$

siendo I el invariante información (en la variedad paramétrica), resulta que la única solución de (1) viene dada por las componentes de la matriz de información de Fisher. Además, se cumple que:

$$ds^2 = E(dI^2) \quad (2)$$

es decir, el cuadrado del elemento de la línea es igual a la esperanza del incremento infinitesimal de información, al cuadrado.

Se han obtenido también algunas condiciones suficientes de euclidianidad. Cabe destacar que si las variables aleatorias, con las que trabajamos, son estocásticamente independientes, y admiten funciones de densidad de probabilidad uniparamétricas, entonces la variedad paramétrica es euclídea.



Por otra parte, bajo algunas condiciones generales, si restringimos la métrica riemanniana de la variedad paramétrica, a una cierta subvariedad, la distancia entre dos puntos de ésta no es menor que la distancia obtenida definiendo el tensor métrico de la subvariedad a partir de la matriz inversa de varianzas y covarianzas, en un sistema de coordenadas particular.

Se ha obtenido además, la distribución asintótica del estadístico D , distancia entre dos puntos estimada por máxima verosimilitud, en función de los tamaños muestrales y de la distancia real. Es conveniente notar que dadas dos poblaciones estadísticas asociadas a la misma función de densidad de probabilidad (paramétrica), si estimamos la distancia entre ambas, D , a través de dos muestras de tamaño N_A y N_B respectivamente, entonces se cumple que el estadístico:

$$U = \frac{N_A N_B}{N_A + N_B} D^2 \quad (3)$$

converge a una distribución ji-cuadrado con tantos grados de libertad como dimensiones tenga la variedad paramétrica.

También es posible establecer una relación funcional aproximada, para muestras de tamaño elevado, entre D y la razón de verosimilitud, Λ , asociada al contraste cuya hipótesis nula asume que las dos poblaciones estadísticas comparadas llevan asociadas la misma distribución de probabilidad.

Además, se ha obtenido explícitamente la expresión de la distancia entre dos poblaciones estadísticas para el caso de que la distribución de probabilidad sea multinomial, distribuciones de Poisson independientes, multinomial negativa, exponenciales independientes, normal univariante, etc. El caso normal multivariante ha sido planteado, obteniendo una cota superior de la distancia entre dos normales multivariantes.

Es posible afirmar, además, que la distancia entre funciones de densidad paramétrica finitas es la distancia euclídea inducida en una cierta subvariedad incluida en una hipersfera de un espacio euclídeo.

Se han sugerido, también, métodos aproximados para evaluar la distancia entre dos puntos.

En cuanto a las aplicaciones se refiere, se propone una determinada metodología para analizar las tablas de contingencia multidimensionales que aparecen en la observación de secuencias de comportamiento animal. Dicha metodología se basa en la representación de colecciones de funciones de densidad condicionada, obtenidas de la citada tabla, mediante técnicas de análisis de proximidades ("multidimensional scaling") y clasificación jerárquica de las mismas, a través de los métodos propios de la taxonomía numérica. Se ha aplicado dicha metodología al estudio de la conducta agonística del lúgano, poniéndose de relieve los factores que inciden en ella: tolerancia-intolerancia, acti

vidad-pasividad, movimiento-tamaño, esperanza de éxito, "determinismo agresivo", etc., y quedando claro el valor comunicativo de los despliegues agresivos.

En el terreno de la diagnosis, se sugiere un algoritmo basado en una función distancia y en la aplicación de una decisión bayesiana, con propiedades de aprendizaje. Se ha aplicado al diagnóstico de algunas enfermedades hematológicas, principalmente neoplásicas, a través de la interpretación de mielogramas, con resultados prometedores.

Finalmente, se ha propuesto un test estadístico como alternativa al test t de student de muestras independientes (o al problema de Behrens-Fisher). En este contraste se comparan simultáneamente las medias y las varianzas entre dos poblaciones. Se ha ilustrado con el estudio de la influencia de la alcohol deshidrogenasa (Adh) en el tamaño en *Drosophila melanogaster*, obteniéndose diferencias significativas entre las poblaciones estadísticas comparadas, que diferían en el genotipo del locus de la Adh, aunque no es posible concluir con seguridad que la causa de estas diferencias sea debida al polimorfismo enzimático del locus de la Adh. Esto sólo es una posible interpretación.

BIBLIOGRAFIA

- ALONSO, G. (1975). Estudio de la distribución geográfica del polimorfismo cromosómico en *Drosophila subobscura*. Tesina. Facultad de Biología, Universidad de Barcelona (inédita).
- ANDERSON, T.W. (1958). An Introduction to Multivariate Statistical Analysis. John Wiley & Sons, Inc.
- ARCAS, A. (1982). Contribuciones a las clasificaciones estratificadas. Tesina. Universidad de Barcelona (inédita).
- ATCHLEY, W.R. (1971). Components of Sexual Dimorphism in *Chironomus Larvae*. Amer. Naturalist, 105(945), 455-466.
- ATCHLEY, W.R. & BRYANT, E.H. (1975a). Multivariate Statistical Methods: Among-Groups Covariation (vol. 1). Dowden, Hutchinson & Ross, Inc.
- ATCHLEY, W.R. & BRYANT, E.H. (1975b). Multivariate Statistical Methods: Withing Groups Covariation (vol. 2). Dowden, Hutchinson & Ross, Inc.
- AUGE, J. (1972). Lecciones sobre ecuaciones en derivadas parciales. Seminario Matemático. Universidad de Barcelona.
- BAKER, R.J., ATCHLEY, W.R. & McDANIEL, V.R. (1972). Karyology and Morphometrics of Peter's Tent-Making Bat, *Uroderma bilobatum* Peters (Chiroptera, Phyllostomatidae). Syst. Zool., 21, 414-429.
- BALAKRISHNAN, V. & SANGHVI, L.A. (1968). Distance between populations on the basis of attribute data. Biometrics 24, December 1968. 859-865.
- BENZECRI, J.P. (1973). L'Analyse des Données. I. La taxonomie. L'Analyse des Données. II. L'Analyse des correspondances. Dunod. París.
- BERNARD, J. & BESSIS, M. (1965). Hematología Fundamental. Toray-Masson, S.A. Barcelona.

- BHATTACHARYYA, A. (1942). On a measure of divergence between two multinomial populations. *Sannya*, 7, 401-406.
- BINET, D., GABORIT, M., DESSIER, A. & ROUX, M. (1972). Premières données sur les copépodes pélagiques de la région congolaise. II. Analyse de correspondances. *Cah. O.R.S.T.O.M., sér. Océanogra.* 10: 125-137.
- BLACKITH, R.E. (1960). A synthesis of multivariate techniques to distinguish patterns of growth in Grasshoppers. *Biometrics* 16, pp. 28-40.
- BLACKITH, R.E. & REYEMENT, R.A. (1971). *Multivariate Morphometrics*. Academic Press, Inc. London Ltd.
- BURNABY, T.P. (1966). Growth-invariant discriminant functions and generalized distances. *Biometrics*, 22(1), 96-110.
- CAMPA, J., CUADRAS, C. y MONTORIOL, J. (1971). Aplicación del análisis canónico al estudio de la mineralización del yacimiento de Osor (Gerona). *Acta Geológica Hispánica*. Año VI, nº5 Septiembre-October 1971, 29-32.
- CASINOS, A. & OCAÑA, J. (1979). A craniometrical study of the gnus *Inia d'Orbigny*, 1834 (Cetacea, Platanistoidea). *Sondedruck aus "Sauger-tierkundlinche Mitteilungen"*. BLV Verlags gesellschaft mb H Munchen 40, 27. Jhg., Heft 3, Seite 194-206, Juli 1979.
- CATTELL, R.B. (1965). Factor analysis: An introduction to essentials. I. The purpose and underlying models. *Biometrics*, 21(1), 190-215 (1965).
- CHERNOFF, H. (1973). Some measures for discriminating between normal multivariate distributions with unequal covariance matrices. En: *Multivariate Analysis* (P.R. Krishnaiah, ed.). Academic Press, New York.
- CHERNOFF, H. (1977). Some applications of a method of identifying an element of a large multidimensional population. En: *Multivariate Analysis IV* (P.R. Krishnaiah, ed.) North-Holland Publishing Company.

- COLGAN, P.W. & SMITH, J.T. (1978). Multidimensional Contingency Table Analysis in Quantitative Ethology. Wiley & Sons, New York.
- COLLATZ, L. (1966). Functional Analysis and Numerical Mathematics. Academic Press.
- CUADRAS, C.M., CAMPA, J.A. y MONTORIOL, J. El análisis canónico y su aplicación en Geología. Acta Geológica Hispánica. Año VI, nº5, Septiembre-Octubre 1971, 22-25.
- CUADRAS, C.M. (1974a). Análisis Estadístico Multivariante y Representación Canónica de Funciones Paramétricas Estimables. Universidad de Barcelona, Secretariado de Publicaciones.
- CUADRAS, C. (1974b). Análisis discriminante de funciones paramétricas estimables. Trabajos de Estadística y de Investigación Operativa, vol. XXV, (1974), 3-31.
- CUADRAS, C.M. y SANCHEZ, M. (1975). Aplicaciones del Análisis Multivariante Canónico en la Investigación Psicológica. Revista de Psicología General y Aplicada. Vol. XXX, nº133-134, 371-382.
- CUADRAS, C.M. (1977). Sobre la reducción de la dimensión en análisis estadístico multivariante. Trabajos de estadística y de investigación operativa, vol. XXVIII, 63-76.
- CUADRAS, C.M. (1979a). Memoria sobre el concepto, método y fuentes de la Bioestadística. Publicaciones Bioestadística. Fac. Biología, Universidad de Barcelona.
- CUADRAS, C.M. (1979b). Metodes de Representació de Dades i la seva aplicació a la Biología. Col·loquis de la Societat Catalana de Biología (1979). (matemàtica i Biologia) 96-133.
- CUADRAS, C.M. (1981). Métodos de Análisis Multivariante. Eunibar. Barcelona.
- CZEKANOWSKI, J. (1909). Zur Differentialdiagnose der Neandertalgruppe. Korrespondenz-Blatt deutsch. Ges. Anthropol. Ethnol. Urgesch. 40: 44-47.

- DELACHET, A. (1968). Cálculo Vectorial y Cálculo Tensorial. Tecnos.
- DILGER, W.C. (1960). Agonistic and social behaviour of captive Redpolls. *Wilson Bull.* 72: 114-132.
- EDWARDS, A.W.F. & CAVALLI-SFORZA, L.L. (1964). Reconstruction of evolutionary trees. In *Phenetic and Phylogenetic Classification*, Publ. N°6, 67-76, Systematics Association, London.
- EDWARDS, A.W.F. (1971). Distances between populations on the basis of gene frequencies. *Biometrics* 27, 873-81, Dec. 1971.
- EINSTEIN, A. (1921). *Mi visión del mundo*. Cuadernos infimos 91. Tusquets editores.
- ELSGOLTZ, L. (1977). *Ecuaciones diferenciales y cálculo variacional*. Ed. Mir.
- FISHER, R.A. (1936). The use of multiple measurements in taxonomic problems. *Ann. Eugenics*, 7, 179-188 (1936) also appears in *Collected Papers of R.A. Fisher* (5 vols.), University of Adelaide, Australia (1971-1974).
- FONTDEVILA, A., RUIZ, A., ALONSO, G. & OCAÑA, J. (1981). Evolutionary History of *Drosophila buzzatii*. I. Natural chromosomal polymorphism in colonized populations of the old world. *Evolution*, 35(1), 1981, pp. 148-157.
- GARDNER, M. (1981). Juegos Matemáticos. *Investigación y Ciencia*, Dic. 1981. 122-128.
- GITTINS, R. (1969). The application of ordination techniques. *Ecological Aspects of the Mineral Nutrition of Plants* (British Ecol. Soc. Sysmp. 9). Rorison, ed., Blackwell Scientific Publications, Oxford 1969, 37-66.
- GOOD, I.J. (1969). What is the use of a distribution? En: *Multivariate Analysis II* (P.R. Krishnaiah, ed.) Academic Press, New York.
- GOWER, J.C. (1971). A general coefficient of similarity and some of its properties. *Biometrics.*, 27, 857-874.

- GYIRES, B. (1980). On a characterization of the generalized multinomial distribution. En: Multivariate Analysis V (P.R. Krishnaiah, ed.). North Holland Publishing Co.
- HAZLETT, B.A. (1977). Quantitative Methods in the Study of Animal Behavior. Academic Press, London.
- HICKS, Noel. J. (1974). Notas sobre geometria diferencial. Hispano Europea.
- HINDE, R.A. (1954). The courtship and copulation of the Greenfinch (*Chloris chloris*). Behaviour 7: 207-232.
- HODSON, F.R. & KENDALL, D.G. & TAUTU, P. Mathematics in the Archaeological and Historical Sciences. Edinburgh University Press (1970).
- HOTTELLING, H. (1933). Analysis of a complex of Statistical variables into principal components. J. Educ. Psychol., 24 (6), 417-441.
- JAMES, A.T. (1973). The variance information manifold and its boundary. En: Multivariate Analysis III (P.R. Krishnaiah, ed.) Academic Press. New York.
- JOLICOEUR, P. (1959). Multivariate geographical variation in the wolf *Canis Lupus L.* Evolution, 13(3), 283-299.
- JOLICOEUR, P. & MOSIMANN, J.E. (1960). Size and shape variation in the painted turtle. A principal component analysis. Growth, 24(4), 339-354 (1960).
- KENDALL, M.A. (1957). A Course in Multivariate Analysis. Griffin's Statistical Monographs & Courses. C. Griffin & Co. Ltd.
- KHATRI, C.G. & MITRA, S.K. (1969). Some Identities and Approximations Concerning Positive and Negative Multinomial Distributions. En: Multivariate Analysis (P.R. Krishnaiah, ed.). Academic Press, New York.
- KRISHNAIAH, P.R. & HESEEB RIZVI, M. (1966). Some procedures for selection of multivariate normal populations better than a control. En: Multivariate Analysis I (P.R. Krishnaiah, ed.) Academic Press, New York.

- KRZANOWSKI, W.J. (1971). A comparison of some Distance Measures Applicable to Multinomial Data. Using a Rotational Fit Technique. *Biometrics*. Dec. 1971, 1063-1068.
- KURCZYNSKI, T.W. (1980). Generalized Distance and Discrete variable. *Biometrics*. Sep. 1980 525-534.
- LANCE & WILLIAMS (1966). Computer Programs for classification. Proc. ANCCAC Conference, Canberra, May 1966, Paper 12/3.
- LEFEBVRE, J. (1976). Introduction aux Analyses Statistiques Multidimensionnelles. Masson.
- LEGENDRE, L. & LEGENDRE, P. (1979). Ecologie numérique. V. 2. La structure des données écologiques 1979. Masson.
- LINDGREN, B.W. (1976). Statistical Theory. Macmillan Publishing Co., New York.
- LINGOES, J.C. (1971). A General survey of the Guttman-Lingoes nonmetric program series. En *Multidimensional Scaling I*, 49-68 Seminar Press, New York.
- LIPSCHUTZ, M. (1971). Geometría diferencial. McGraw-Hill.
- LUKACS, E. (1969). A characterization of the multivariate geometric distribution. En: *Multivariate Analysis II* (P.R. Krishnaiah, ed.). Academic Press, New York.
- MAHALANOBIS, P.C. (1936). On the generalized distance in statistics. *Proc. Natl. Inst. Sci. India*, 2(1), 49-55.
- MANNING, A. (1972). Introducción a la conducta animal. Alianza Editorial. Madrid.
- MARDIA, K.V. (1978). Some properties of classical multidimensional scaling. *Comm. Stat.*, A7 (13), 1233-1241.

- MARDIA, K.V.; KENT, J.T y BIBBY, J.M. (1979). *Multivariate Analysis*. Academic Press, London.
- MARLER, P. (1957). Consummatory behaviour. *Br. J. Anim. Behav.* 4: 23-30.
- MARTINELL, J. & CUADRAS, C.M. (1977). Bioestadística y Análisis Multi variable aplicados a la comparación de una población actual y otra fósil, atribuidas a *Sphaeronassa mutabilis* (Linne): Aportación a la sistemática del género *Sphaeronassa* Locard, 1886. *Studia Geologia XIII*, pag. 89-103, 1977.
- MATUSITA, K. (1966). A distance and Related statistics in Multivariate Analysis. En: *Multivariate Analysis I* (P.R. Krishnaiah, ed.) Academic Press, New York.
- MIALE, J. B. (1982). *Laboratory medicine Hematology*. The C.V. Mosby Company.
- MOOD y GRAYBILL (1969). *Introducción a la teoría de la Estadística*. Aguilar.
- NEI, M. (1972). Genetic distance between populations. *Amer. Natur.* 106: 283-292.
- OCAÑA REBULL, J. (1975). *Sobre la distancia genética*. Tesina. Universidad de Barcelona, (inédita).
- ORLOCI, L. (1967). An agglomerative method for classification of plant communities. *J. Ecol.* 55: 193-205.
- PEARSON, K. (1901). On lines and Planes of Closest Fit to Systems of Points in Space. *Phil Mag., Ser. 6*, 2(11), 559-572.
- PEARSON, K. (1926). On the coefficient of racial likeness. *Biometrika* 18: 105-117.
- PEREZ DE VARGAS, A., MARTINEZ, C., LOPEZ, J. (1981). *Elementos de Bio matemáticas*. Fragua. Madrid.

- POREBSKI, O.R. (1966). On the interrelated nature of the multivariate statistics used in discriminatory analysis. *British J. Math. Stat. Psychol.*, 19, p.2, 197-214 (Nov. 1966).
- PETITPIERRE, E. y CUADRAS, C. (1977). The canonical analysis applied to the taxonomy and evolution of the genus *Timarcha* Latr. (Col. Chrysomelidae). *Mediterránea*, 1, 13-28.
- PREVOSTI, A., OCAÑA, J., ALONSO, G. (1975). Distances between Populations of *Drosophila subobscura*. Based on Chromosome Arrangement Frequencies. *Theoretical & Applied Genetic* 45, 231-241 (1975).
- PUIG ADAM, P. (1975). Curso teórico-práctico de Ecuaciones diferenciales aplicado a la física y técnica. Biblioteca Matemática, S.L.
- RAO, C.R. (1948a). The utilization of Multiple Measurements in Problems of Biological Classification. *J. Roy. Stat. Soc. B10(2)*, 159-203 (1948).
- RAO, C.R. (1948b). On the distance between two populations. *Sankhya*, 9, 246-248.
- RAO, C.R. (1952). Advanced statistical methods in Biometrics Research (1952). Hafner Publishing Company.
- RAO, C.R. (1955). Estimation and test of significance in factor analysis. *Psychometrika*, 20(2), 93-111 (1955).
- RAO, C.R. (1964). The use and interpretation of principal component analysis in applied research. *Sankhya, Serv. A*, 26, 329-358 (1964).
- RASHEVSKY, N. (1969). Some consequences of Henri Poincaré's hypothesis about the biological nature of the three-dimensionality of our space. *Bull. Mathematical Biophysics* vol. 31. 1969, 199-203.
- RIOS, Sixto (1977). Métodos Estadísticos (segunda edición). Ediciones del Castillo, Madrid.
- ROUVIER, R. (1966). L'Analyse en Composantes principales: son utilisation en Genetique et ses raapports avec l'analyse discriminatoire. *Biometrics* 22(2), 343-257.

- ROZMAN, C. (1979). Medicina Interna. Marin.
- SAMEJIMA, F. (1980). Latent Trait Theory and its applications. En: Multivariate Analysis V (P.R. Krishnaiah, ed.) North Holland Publishing Co.
- SANDOZ, (1972). Planches d'Hematologie. Edité per SANDOZ (1972).
- SCHWARTZ, L. (1969). Métodos matemáticos para las ciencias físicas. Seleccionadas Científicas (Madrid).
- SENAR, J.C. (1982). La conducta agonística y organización social de Lúgano en cautividad. Tesina. Universidad de Barcelona (inédita).
- SERRA, L. (1977). Relación entre la variabilidad enzimática de los sistemas que controlan la α -glicerofosfato-deshidrogenasa-1 y la alcohol deshidrogenasa y la selección por el tamaño en *Drosophila melanogaster*. Tesis Doctoral. Universidad de Barcelona.
- SHEPARD, R.N. (1962). The analysis of proximities: Multidimensional scaling with an unknown distance function. I. *Psychometrica*, 27, 125-140, II. *Psychometrika* 27, 219-246.
- SOKAL, R.R. & ROHLF, F.J. (1969). Biometría. Blume. Madrid.
- SOKOLNIKOFF, I.S. (1971). Análisis Tensorial (1971). Index.
- SPIEGEL, M.R. (1970). Análisis vectorial. McGraw-Hill.
- SPIVAK, M. (1970). Cálculo en variedades. Reverté.
- SRIVASTAVA, J.N. (1973). An information function approach to dimensionality analysis and Curved manifold clustering. En: Multivariate Analysis III (P.R. Krishnaiah, ed.) Academic Press, New York.
- STEPHENSON, W., WILLIAMS, W.T. & COOK, S.A. (1974). The benthic fauna of soft bottoms, southern Moreton Bay. *Mem. Queensl. Mus.* 17: 73-123.

- STRUIK, D.J. (1966). Geometría diferencial clásica. Aguilar.
- TORDOFF, H.B. (1954). Social Organization and behavior in a flock of captive, nonbreeding Red Crossbills. Condor 56: 346-358.
- TUCKER, H.G. (1973). Introducción a la teoría matemática de las probabilidades y a la estadística. Vicens Vives.
- WADDINGTON, C.H. y otros (1969). Hacia una biología teórica. Alianza Universidad.
- WARD, F.A. (1971). A primer of Haematology. London: Butterwords & Co. (Publishers).
- WILLIAMS, W.T. & STEPHENSON, W. (1973). The analysis of three-dimensional data (sites x species x times) in marine ecology. J. Exp. mar. Biol. Ecol. 11: 207-227.
- YAKOWITZ, SIDNEY J. (1977). Computational Probability and Simulation. Addison-Wesley Publishing Company, Inc. Advanced Book Program.

UNIVERSIDAD DE BARCELONA

Leída esta Memoria el día 23 de Febrero de 1983 en la Facultad de Biología, ante el siguiente Tribunal:

PRESIDENTE

Juan José

VOCALES

Juan José

Antonio

Marcos

Antonio

fue calificada de Sobresaliente con laude

