UTILIZACIÓN DE MÉTRICAS RIEMANNIANAS EN ANALISIS DE DATOS MULTIDIMENSIONALES Y SU APLICACIÓN A LA BIOLOGÍA

JOSE Mª OLLER SALA

BARCELONA, 25 de NOVIEMBRE de 1982.

$$[i\ j,n] = \frac{1}{2}\ \frac{r}{(1-p^1-\ldots-p^k)}\ (-\ \frac{1}{(p^i)^2}\ \delta_{ijn} + \frac{2}{(1-p^1-\ldots-p^k)^2}\ ) +$$

$$+ \frac{1}{2}\ \frac{r}{(1-p^1-\ldots-p^k)^2}\ (\ \frac{1}{p^i}\ \delta_{in} + \frac{1}{p^j}\ \delta_{jn} - \frac{1}{p^i}\ \delta_{ij}) \qquad (156)$$

A continuación calcularemos los símbolos de Christoffel de segunda especie:

$$\Gamma^n_{ij} = \sum_{\alpha=1}^{k} \frac{(1-p^1-\ldots-p^k)}{r}\ (\delta_{n\alpha}p^n-p^np^\alpha) \left[\frac{1}{2}\ \frac{r}{(1-p^1-\ldots-p^k)}\ (-\ \frac{1}{(p^i)^2}\ \delta_{ij\alpha} + \right.$$

$$\left. + \frac{2}{(1-p^1-\ldots-p^k)^2}\ ) + \frac{1}{2}\ \frac{r}{(1-p^1-\ldots-p^k)^2}\ (\ \frac{1}{p^i}\ \delta_{i\alpha} + \frac{1}{p^j}\ \delta_{j\alpha} - \frac{1}{p^i}\ \delta_{ij}) \right] =$$

$$= \frac{1}{2} \sum_{\alpha=1}^{k} (\delta_{n\alpha}p^n-p^np^\alpha)\cdot(-\ \frac{1}{(p^i)^2}\ \delta_{ij\alpha} + \frac{2}{(1-p^1-\ldots-p^k)^2} +$$

$$+ \frac{1}{1-p^1-\ldots-p^k}\ \cdot\ (\frac{1}{p^i}\ \delta_{i\alpha} + \frac{1}{p^j}\ \delta_{j\alpha} - \frac{1}{p^i}\ \delta_{ij})) =$$

$$= \frac{1}{2} \sum_{\alpha=1}^{k} (-\delta_{n\alpha}p^n\ \frac{1}{(p^i)^2}\ \delta_{ij\alpha} + \frac{2\delta_{n\alpha}p^n}{(1-p^1-\ldots-p^k)^2} + \frac{1}{1-p^1-\ldots-p^k}\ \cdot$$

$$\cdot (\frac{1}{p^i}\ \delta_{i\alpha}\delta_{n\alpha}p^n + \frac{1}{p^j}\ \delta_{j\alpha}\delta_{n\alpha}p^n - \frac{1}{p^i}\ \delta_{ij}\delta_{n\alpha}p^n) + p^np^\alpha\ \frac{1}{(p^i)^2}\ \delta_{ij\alpha} -$$

$$- \frac{2p^np^\alpha}{(1-p^1-\ldots-p^k)^2} - \frac{p^np^\alpha}{1-p^1-\ldots-p^k}\ (\frac{1}{p^i}\ \delta_{i\alpha} + \frac{1}{p^j}\ \delta_{j\alpha} - \frac{1}{p^i}\ \delta_{ij})) =$$

$$= -\ \frac{1}{2}\ \frac{1}{p^i}\ \delta_{ijn} + \frac{p^n}{(1-p^1-\ldots-p^k)^2} + \frac{1}{2(1-p^1-\ldots-p^k)}\ (\delta_{in}+\delta_{jn} - \delta_{ij}\ \frac{p^n}{p^i}) +$$

$$+ \frac{1}{2}\ \frac{p^n}{p^i}\ \delta_{ij} - \frac{p^n(p^1+\ldots+p^k)}{(1-p^1-\ldots-p^k)^2} - \frac{p^n}{1-p^1-\ldots-p^k} + \frac{p^n(p^1+\ldots+p^k)}{2(1-p^1-\ldots-p^k)}\ \frac{1}{p^i}\ \delta_{ij} =$$

$$= \frac{1}{2p^i}\,\delta_{ijn} + \frac{p^n}{1-p^1-\ldots-p^k} + \frac{1}{2(1-p^1-\ldots-p^k)}\,(\delta_{in}+\delta_{jn}-\delta_{ij}\cdot\frac{p^n}{p^i}) +$$

$$+\frac{1}{2}\,\frac{p^n}{p^i}\,\delta_{ij} - \frac{p^n}{(1-p^1-\ldots-p^k)} + \frac{p^n(p^1+\ldots+p^k)}{2(1-p^1-\ldots-p^k)}\,\frac{\delta_{ij}}{p^i} =$$

$$= -\frac{1}{2p^i}\,\delta_{ijn} + \frac{\delta_{in}+\delta_{jn}}{2(1-p^1-\ldots-p^k)} \tag{157}$$

y finalmente:

$$\Gamma^n_{ij} = -\frac{1}{2p^i}\,\delta_{ijn} + \frac{\delta_{in}+\delta_{jn}}{2(1-p^1-\ldots-p^k)} \tag{158}$$

$$i,j,n=1,\ldots,k$$

A continuación calcularemos el tensor de Riemann Christoffel de segunda especie. Para ello calculemos:

$$\Gamma^\beta_{in}\Gamma^a_{\beta j} = \sum_{\beta=1}^{k}(-\frac{1}{2p^i}\,\delta_{in\beta} + \frac{\delta_{i\beta}+\delta_{n\beta}}{2(1-p^1-\ldots-p^k)})\,(-\frac{1}{2p^\beta}\,\delta_{\beta ja} + \frac{\delta_{\beta a}+\delta_{ja}}{2(1-p^1-\ldots-p^k)}) =$$

$$= \frac{1}{4}\sum_{\beta=1}^{k}(\frac{1}{p^ip^\beta}\,\delta_{in\beta}\delta_{\beta ja} - \frac{1}{p^i}\,\delta_{in\beta}\,\frac{(\delta_{\beta a}+\delta_{ja})}{(1-p^1-\ldots-p^k)} - \frac{1}{p^\beta}\,\delta_{\beta ja}\,\frac{(\delta_{i\beta}+\delta_{n\beta})}{(1-p^1-\ldots-p^k)} +$$

$$+\frac{(\delta_{i\beta}+\delta_{n\beta})(\delta_{\beta a}+\delta_{ja})}{(1-p^1-\ldots-p^k)^2}) =$$

$$= \frac{1}{4}\left[\frac{1}{(p^i)^2}\,\delta_{inja} - \frac{\delta_{ina}+\delta_{in}\delta_{ja}}{p^i(1-p^1-\ldots-p^k)} - \frac{\delta_{ija}+\delta_{jna}}{p^a(1-p^1-\ldots-p^k)} + \frac{\delta_{ia}+2\delta_{ja}+\delta_{na}}{(1-p^1-\ldots-p^k)^2}\right] \tag{159}$$

Análogamente, cambiando la j por la n:

$$\Gamma^{\beta}_{ij}\Gamma^{a}_{\beta n} = \frac{1}{4}\left(\frac{1}{(p^i)^2}\delta_{ijna} - \frac{\delta_{ija}+\delta_{ij}\delta_{na}}{p^i(1-p^1-\dots-p^k)} - \frac{\delta_{ina}+\delta_{nja}}{p^a(1-p^1-\dots-p^k)} + \right.$$

$$\left. + \frac{\delta_{ia}+2\delta_{na}+\delta_{ja}}{(1-p^1-\dots-p^k)^2} \right) \tag{160}$$

Por tanto:

$$\Gamma^{\beta}_{in}\Gamma^{a}_{\beta j} - \Gamma^{\beta}_{ij}\Gamma^{a}_{\beta n} = \frac{1}{4}\left(\frac{\delta_{ija}+\delta_{ij}\delta_{na}-\delta_{ina}-\delta_{in}\delta_{ja}}{p^i\ (1-p^1-\dots-p^k)} + \frac{\delta_{ina}-\delta_{ija}}{p^a(1-p^1-\dots-p^k)} + \right.$$

$$\left. + \frac{\delta_{ja}-\delta_{na}}{(1-p^1-\dots-p^k)^2} \right) =$$

$$= \frac{1}{4}\left(\frac{\delta_{ia}(\delta_{aj}-\delta_{an})+\delta_{ij}\delta_{na}-\delta_{in}\delta_{ja}}{p^i(1-p^1-\dots-p^k)} + \frac{\delta_{ia}(\delta_{an}-\delta_{aj})}{p^a(1-p^1-\dots-p^k)} + \frac{\delta_{ja}-\delta_{na}}{(1-p^1-\dots-p^k)^2} \right) =$$

$$= \frac{1}{4}\left(\frac{\delta_{ij}\delta_{na}-\delta_{in}\delta_{ja}}{p^i(1-p^1-\dots-p^k)} + \frac{\delta_{ja}-\delta_{na}}{(1-p^1-\dots-p^k)^2} \right) \tag{161}$$

Por otra parte:

$$\frac{\partial\Gamma^{a}_{in}}{\partial p^j} = \frac{\partial}{\partial p^j}\left(-\frac{1}{2p^i}\delta_{ina} + \frac{\delta_{ia}+\delta_{na}}{2(1-p^1-\dots-p^k)}\right) = \frac{1}{2(p^i)^2}\delta_{inaj} + \frac{\delta_{ia}+\delta_{na}}{2(1-p^1-\dots-p^k)^2} \tag{162}$$

cambiando la n por la j resulta:

$$\frac{\partial\Gamma^{a}_{ij}}{\partial p^n} = \frac{1}{2(p^i)^2}\delta_{ijan} + \frac{\delta_{ia}+\delta_{ja}}{2(1-p^1-\dots-p^k)^2} \tag{163}$$

por tanto:

$$\frac{\partial\Gamma^{a}_{in}}{\partial p^j} - \frac{\partial\Gamma^{a}_{ij}}{\partial p^n} = \frac{\delta_{na}-\delta_{ja}}{2(1-p^1-\dots-p^k)^2} \tag{164}$$

luego resulta:

$$R^{a}_{ijn} = \frac{\delta_{ij}\delta_{na} - \delta_{in}\delta_{ja}}{4p^{i}(1-p^{1}-\ldots-p^{k})} + \frac{\delta_{na} - \delta_{ja}}{4(1-p^{1}-\ldots-p^{k})^{2}} \tag{165}$$

$$a,i,j,n=1,\ldots,k$$

Puesto que el tensor de Riemann-Christoffel no se anula, la variedad definida en (143) no es euclidea.

Vamos a calcular a continuación el tensor de Riemann-Christoffel de primera especie para después efectuar el cálculo de la curvatura Riemanniana.

$$R_{hijn} = \sum_{a=1}^{k} \frac{r}{(1-p^{1}-\ldots-p^{k})} \left(\frac{1}{p^{h}}\delta_{ha} + \frac{1}{1-p^{1}-\ldots-p^{k}}\right)\left(\frac{\delta_{ij}\delta_{na}-\delta_{in}\delta_{ja}}{4p^{i}(1-p^{1}-\ldots-p^{k})} + \right.$$

$$\left. + \frac{\delta_{na}-\delta_{ja}}{4(1-p^{1}-\ldots-p^{k})^{2}}\right) = \frac{r}{4(1-p^{1}-\ldots-p^{k})^{2}} \sum_{a=1}^{k}\left(\frac{1}{p^{i}p^{h}}\delta_{ha}(\delta_{ij}\delta_{na}-\delta_{in}\delta_{ja}) + \right.$$

$$\left. + \frac{\delta_{ha}(\delta_{na}-\delta_{ja})}{p^{h}(1-p^{1}-\ldots-p^{k})} + \frac{\delta_{ij}\delta_{na}-\delta_{in}\delta_{ja}}{p^{i}(1-p^{1}-\ldots-p^{k})} + \frac{\delta_{na} - \delta_{ja}}{(1-p^{1}-\ldots-p^{k})^{2}}\right) =$$

$$= \frac{r}{4(1-p^{1}-\ldots-p^{k})^{2}} \left(\frac{\delta_{ij}\delta_{nh}-\delta_{in}\delta_{jh}}{p^{i}p^{h}} + \frac{\delta_{nh}-\delta_{jh}}{p^{h}(1-p^{1}-\ldots-p^{k})} + \frac{\delta_{ij} - \delta_{in}}{p^{i}(1-p^{1}-\ldots-p^{k})}\right) \tag{166}$$

o equivalentemente:

$$R_{hijn} = \frac{r}{(1-p^{1}-\ldots-p^{k})^{2}} \left(\frac{\delta_{ij}\delta_{nh}-\delta_{in}\delta_{jh}}{4p^{i}p^{h}} + \frac{p^{i}(\delta_{nh}-\delta_{jh})+p^{h}(\delta_{ij}-\delta_{in})}{4p^{i}p^{h}(1-p^{1}-\ldots-p^{k})}\right) \tag{167}$$

$$h,i,j,n=1,\ldots,k$$

Por otra parte:

$$g_{hj}g_{in} = \frac{r^2}{(1-p^1-\ldots-p^k)^2}\left(\frac{1}{p^h}\,\delta_{hj} + \frac{1}{1-p^1-\ldots-p^k}\right)\left(\frac{1}{p^i}\,\delta_{in} + \frac{1}{1-p^1-\ldots-p^k}\right) =$$

$$= \frac{r^2}{(1-p^1-\ldots-p^k)^2}\left(\frac{\delta_{hj}\delta_{in}}{p^i\,p^h} + \frac{\delta_{hn}p^i-\delta_{ij}p^h}{p^ip^h(1-p^1-\ldots-p^k)} + \frac{1}{(1-p^1-\ldots-p^k)^2}\right) \qquad (168)$$

análogamente:

$$g_{hn}g_{ij} = \frac{r^2}{(1-p^1-\ldots-p^k)^2}\left(\frac{\delta_{hn}\delta_{ij}}{p^ip^h} + \frac{\delta_{hj}p^i - \delta_{in}p^h}{p^ip^h(1-p^1-\ldots-p^h)} + \frac{1}{(1-p^1-\ldots-p^k)^2}\right) \qquad (169)$$

por tanto:

$$g_{hj}g_{in}-g_{hn}g_{ij} = \frac{r^2}{(1-p^1-\ldots-p^k)^2}\left(\frac{\delta_{hj}\delta_{in}-\delta_{hn}\delta_{ij}}{p^i\,p^h} + \frac{p^i(\delta_{hj}-\delta_{hn})+p^h(\delta_{in}-\delta_{ij})}{p^ip^h(1-p^1-\ldots-p^k)^2}\right) \qquad (170)$$

luego resulta:

$$R_{hijn} = -\frac{1}{4r}(g_{hj}g_{in}-g_{hn}g_{ij}) \quad h,i,j,n=1,\ldots,k \qquad (171)$$

por tanto la curvatura Riemanniana es constante en todo el espacio, igual a:

$$k = -\frac{1}{4r} \qquad (172)$$

A continuación procederemos a hallar el sistema de ecuaciones diferenciales que definen las geodésicas. Teniendo en cuenta (158), podemos escribir:

$$\frac{d^2p^\gamma}{ds^2} + \sum_{\alpha=1}^{k} \sum_{\beta=1}^{k} \left(- \frac{1}{2}\frac{1}{p^\alpha}\delta_{\alpha\beta\gamma} + \frac{\delta_{\alpha\gamma} + \delta_{\beta\gamma}}{2(1-p^1-\ldots-p^k)}\right) \frac{dp^\alpha}{ds}\frac{dp^\beta}{ds} = 0 \qquad (173)$$

$$\gamma = 1,\ldots,k$$

desarrollando el doble sumatorio obtenemos:

$$\frac{d^2p^\gamma}{ds^2} - \frac{1}{2p^\gamma}\frac{dp^\gamma}{ds}\frac{dp^\gamma}{ds} + \frac{1}{(1-p^1-\ldots-p^k)}\frac{dp^\gamma}{ds}\sum_{\alpha=1}^{k}\frac{dp^\alpha}{ds} = 0 \qquad (174)$$

$$\gamma = 1,\ldots,k$$

que hay que resolver con la condición:

$$\sum_{\mu=1}^{k}\sum_{\nu=1}^{k}\frac{r}{1-p^1-\ldots-p^k}\left(\frac{\delta_{\mu\nu}}{p^\mu} + \frac{1}{1-p^1-\ldots-p^k}\right)\frac{dp^\mu}{ds}\frac{dp^\nu}{ds} = 1 \qquad (175)$$

si llamamos $p^{k+1} = 1-p^1-\ldots-p^k$, podemos escribir (175) como:

$$\frac{r}{p^{k+1}}\left(\sum_{\mu=1}^{k}\frac{1}{p^\mu}\left(\frac{dp^\mu}{ds}\right)^2 + \frac{1}{p^{k+1}}\left(\frac{dp^{k+1}}{ds}\right)^2\right) = 1 \qquad (176)$$

Además se verifica:

$$\frac{dp^{k+1}}{ds} = -\sum_{\alpha=1}^{k}\frac{dp^\alpha}{ds} \qquad \frac{d^2p^{k+1}}{ds^2} = -\sum_{\alpha=1}^{k}\frac{d^2p^\alpha}{ds^2} \qquad (177)$$

por tanto, si sumamos las k ecuaciones del sistema (174), resulta:

$$\sum_{\gamma=1}^{k}\frac{d^2p^\gamma}{ds^2} - \sum_{\gamma=1}^{k}\frac{1}{2p^\gamma}\left(\frac{dp^\gamma}{ds}\right)^2 + \frac{1}{p^{k+1}}\sum_{\gamma=1}^{k}\frac{dp^\gamma}{ds}\sum_{\alpha=1}^{k}\frac{dp^\alpha}{ds} = 0 \qquad (178)$$

y teniendo en cuenta lo anterior:

$$-\frac{d^2p^{k+1}}{ds^2} - \sum_{\gamma=1}^{k}\frac{1}{2p^\gamma}\left(\frac{dp^\gamma}{ds}\right)^2 + \frac{1}{p^{k+1}}\left(\frac{dp^{k+1}}{ds}\right)^2 = 0 \qquad (179)$$

y teniendo en cuenta la condición de que el vector tangente sea unitario, (177), podemos escribir:

$$- \frac{d^2 p^{k+1}}{ds^2} - \frac{p^{k+1}}{2r} + \frac{3}{2p^{k+1}} \left(\frac{dp^{k+1}}{ds} \right)^2 = 0 \qquad (180)$$

dividiendo por p^{k+1} y cambiando el signo resulta:

$$\frac{1}{p^{k+1}} \frac{d^2 p^{k+1}}{ds^2} + \frac{1}{2r} - \frac{3}{2} \left(\frac{1}{p^{k+1}} \frac{dp^{k+1}}{ds} \right)^2 = 0 \qquad (181)$$

efectuando el cambio:

$$\frac{1}{p^{k+1}} \frac{dp^{k+1}}{ds} = u \qquad \frac{d^2 p^{k+1}}{ds^2} = p^{k+1} \frac{du}{ds} + u \frac{dp^{k+1}}{ds} \qquad (182)$$

resulta:

$$\frac{du}{ds} = \frac{1}{2} u^2 - \frac{1}{2r} \qquad (183)$$

ecuación de variables separadas:

$$\int ds = \int \frac{2du}{u^2 - \frac{1}{r}} \qquad (184)$$

que integrando resulta:

$$\sqrt{r} \ln \left(\frac{u - \sqrt{\frac{1}{r}}}{u + \sqrt{\frac{1}{r}}} \right) = s + cte. \qquad (185)$$

despejando u, obtenemos:

$$u = \frac{1 + c e^{s/\sqrt{r}}}{\sqrt{r}(1 - c e^{s/\sqrt{r}})} \qquad (186)$$

siendo c una constante de integración. Por tanto, el sistema (174), teniendo en cuenta (177) y (186), puede ser escrito como:

$$\frac{d^2p^\gamma}{ds^2} - \frac{1}{2p^\gamma}\left(\frac{dp^\gamma}{ds}\right)^2 - \frac{dp^\gamma}{ds}\left(\frac{1 + c\, e^{s/\sqrt{r}}}{\sqrt{r}\,(1 - c\, e^{s/\sqrt{r}})}\right) = 0 \qquad (187)$$

$$\gamma=1,\ldots,k$$

dividiendo cada ecuación por p^γ, resulta:

$$\frac{1}{p^\gamma}\frac{d^2p^\gamma}{ds^2} - \frac{1}{2}\left(\frac{1}{p^\gamma}\frac{dp^\gamma}{ds}\right)^2 - \frac{1}{p^\gamma}\frac{dp^\gamma}{ds}\left(\frac{1 + ce^{s/\sqrt{r}}}{\sqrt{r}\,(1 - ce^{s/\sqrt{r}})}\right) = 0 \qquad (188)$$

$$\gamma=1,\ldots,k$$

sistema que admite el cambio:

$$\frac{1}{p^\gamma}\frac{dp^\gamma}{ds} = y^\gamma \qquad \frac{d^2p^\gamma}{ds^2} = p^\gamma\frac{dy^\gamma}{ds} + \frac{dp^\gamma}{ds}\, y^\gamma \qquad (189)$$

$$\gamma=1,\ldots,k$$

resultando un sistema de ecuaciones de Bernouilli:

$$\frac{dy^\gamma}{ds} + \frac{1}{2}(y^\gamma)^2 - y^\gamma\left(\frac{1 + ce^{s/\sqrt{r}}}{\sqrt{r}\,(1 - ce^{s/\sqrt{r}})}\right) = 0 \qquad (190)$$

$$\gamma=1,\ldots,k$$

Consideremos el caso $y^\gamma=0$, entonces resultan las soluciones:

$$p^\gamma = \text{cte.} \qquad (191)$$

Si $y^\gamma \neq 0$ podemos dividir (190) por $(y^\gamma)^2$, reduciéndose cada una de las k ecuaciones a una ecuación diferencial lineal, con el cambio:

$$\frac{1}{y^\gamma} = z^\gamma \qquad \frac{dy^\gamma}{ds} = -\frac{1}{(z^\gamma)^2}\frac{dz^\gamma}{ds} \tag{192}$$

$$\gamma=1,\ldots,k$$

resultando:

$$\frac{dz^\gamma}{ds} + \frac{(1+ce^{s/\sqrt{r}})}{\sqrt{r}(1-ce^{s/\sqrt{r}})} z^\gamma = \frac{1}{2} \tag{193}$$

$$\gamma=1,\ldots,k$$

cuya integral general es:

$$z^\gamma = e^{-\int((1+ce^{s/\sqrt{r}})/(\sqrt{r}(1-ce^{s/\sqrt{r}})))ds} \cdot$$

$$\cdot(\frac{1}{2}\int e^{\int((1+ce^{s/\sqrt{r}})/(\sqrt{r}(1-ce^{s/\sqrt{r}})))ds} ds + c_\gamma) \tag{194}$$

$$\gamma=1,\ldots,k$$

Hay que hallar pues la primitiva que figura en el exponente, que se resuelve con el cambio:

$$t = ce^{s/\sqrt{r}}, \quad dt = ce^{s/\sqrt{r}}\frac{1}{\sqrt{r}} ds = \frac{t}{\sqrt{r}} ds, \; ds = \frac{\sqrt{r}}{t} dt \tag{195}$$

obteniendo:

$$\int \frac{1+t}{(1-t)}\frac{dt}{t} = \int(\frac{2}{1-t} + \frac{1}{t}) dt = -2\ln(1-t) + \ln t =$$

$$= \ln\left[(1-ce^{s/\sqrt{r}})^{-2} ce^{s/\sqrt{r}}\right] \tag{196}$$

Además, debido a que:

$$\int \frac{e^{s/\sqrt{r}}}{(1-e^{s/\sqrt{r}})^2} ds = \frac{\sqrt{r}}{1-ce^{s/\sqrt{r}}} \tag{197}$$

podemos escribir (194), como:

$$z^{\gamma} = \frac{\sqrt{r}\,(1-ce^{s/\sqrt{r}})}{2ce^{s/\sqrt{r}}} + \frac{c_{\gamma}\,(1-ce^{s/\sqrt{r}})^{2}}{ce^{s/\sqrt{r}}} \qquad (198)$$

$$\gamma=1,\ldots,k$$

y por tanto, por (192), podemos escribir:

$$y^{\gamma} = \frac{2ce^{s/\sqrt{r}}}{(1-ce^{s/\sqrt{r}})\,(\sqrt{r}+2c_{\gamma}-2cc_{\gamma}e^{s/\sqrt{r}})} \qquad (199)$$

$$\gamma=1,\ldots,k$$

y teniendo en cuenta (189), para obtener p^{γ} habrá que integrar previamente (199). Efectuando el cambio (195) resulta:

$$\int y^{\gamma}ds = \int \frac{2\ dt}{(1-t)(1+2\,(c_{\gamma}/\sqrt{r})\,(1-t))} = \int \frac{2}{1-t}\,dt - 2\int \frac{2c_{\gamma}/\sqrt{r}}{1+(2c_{\gamma}/\sqrt{r})\,(1-t)}\,dt =$$

$$= -2\ \ln(1-t) + 2\ \ln\,(1+(2c_{\gamma}/\sqrt{r})\,(1-t)) + cte =$$

$$= \ln\,\left[(1+(2c_{\gamma}/\sqrt{r})(1-ce^{s/\sqrt{r}}))^{2}\,(1-ce^{s/\sqrt{r}})^{-2}\right] + cte. \qquad (200)$$

por tanto si llamamos:

$$B_{k+1} = c \qquad B_{\gamma} = 2c_{\gamma}/\sqrt{r} \qquad \gamma=1,\ldots,k \qquad (201)$$

podemos escribir:

$$p^{\gamma} = A_{\gamma}\left(\frac{1}{1-B_{k+1}e^{s/\sqrt{r}}} + B_{\gamma}\right)^{2} \qquad \gamma=1,\ldots,k \qquad (202)$$

y teniendo en cuenta (182) y (196) podemos escribir:

$$p^{k+1} = A_{k+1}\, B_{k+1} \frac{e^{s/\sqrt{r}}}{(1-B_{k+1}e^{s/\sqrt{r}})^2} \tag{203}$$

Las expresiones (202) y (203), son las ecuaciones de las geodésicas, junto con las soluciones de la forma (191), en la variedad E definida en (143) respecto al sistema de coordenadas $(p^1,\ldots,p^k)$. Habrá que determinar las constantes de integración y s (distancia), para que cuando $s=0$, $p^\gamma=a^\gamma$, $\gamma=1,\ldots,k+1$ y que para un cierto $s \in R^+$, $p^\gamma=b^\gamma$ $\gamma=1,\ldots,k+1$, teniendo en cuenta además la condición, (176) y que la suma de las p^γ es igual a 1.

Nótese que si $a^\beta=b^\beta$ entonces la ecuación de la geodésica que une ambos puntos $(a^1,\ldots,a^k)$ y $(b^1,\ldots,b^k)$ verifica:

$$p^\beta = a^\beta = b^\beta \tag{204}$$

en otras palabras, es constante. Vamos a suponer, de ahora en adelante, por comodidad, que:

$$a^1 \neq b^1,\ldots,a^\tau\neq b^\tau,\ a^{\tau+1}=b^{\tau+1},\ldots,a^k=b^k \tag{205}$$

$$1 \leq \tau \leq k$$

Hallemos en primer lugar, para $\gamma \leq \tau$:

$$\frac{dp^\gamma}{ds} = 2A_\gamma \left(\frac{1}{1-B_{k+1}e^{s/\sqrt{r}}} + B_\gamma\right) \frac{B_{k+1}\, e^{s/\sqrt{r}}}{\sqrt{r}\,(1-B_{k+1}e^{s/\sqrt{r}})^2} \tag{206}$$

por tanto:

$$\frac{1}{p^{\gamma}}\left(\frac{dp^{\gamma}}{ds}\right)^2 = \frac{4A_{\gamma}\, B_{k+1}^2\, e^{2s/\sqrt{r}}}{r(1-B_{k+1}e^{s/\sqrt{r}})^4} \tag{207}$$

Análogamente:

$$\frac{dp^{k+1}}{ds} = A_{k+1}\, B_{k+1}\cdot\left(\frac{(1-B_{k+1}e^{s/\sqrt{r}})^2 e^{s/\sqrt{r}}\; 1/\sqrt{r} + 2B_{k+1}(1-B_{k+1}e^{s/\sqrt{r}})e^{2s/\sqrt{r}}}{(1-B_{k+1}\; e^{s/\sqrt{r}})^4}\right) =$$

$$= \frac{A_{k+1}B_{k+1}e^{s/\sqrt{r}}(1+B_{k+1}e^{s/\sqrt{r}})}{\sqrt{r}(1-B_{k+1}e^{s/\sqrt{r}})^3} \tag{208}$$

por tanto:

$$\frac{1}{p^{k+1}}\left(\frac{dp^{k+1}}{ds}\right)^2 = \frac{A_{k+1}B_{k+1}e^{s/\sqrt{r}}(1+B_{k+1}e^{s/\sqrt{r}})^2}{r(1-B_{k+1}e^{s/\sqrt{r}})^4} \tag{209}$$

como para $\gamma > \tau$:

$$\frac{dp^{\gamma}}{ds} = 0 \tag{210}$$

La condición de vector tangente unitario (176), puede escribirse como:

$$\frac{r(1-B_{k+1}e^{s/\sqrt{r}})^2}{A_{k+1}B_{k+1}e^{s/\sqrt{r}}}\left(\sum_{\gamma=1}^{\tau}\frac{4A_{\gamma}B_{k+1}^2e^{2s/\sqrt{r}}}{r(1-B_{k+1}e^{s/\sqrt{r}})^4} + \frac{A_{k+1}B_{k+1}}{r}\, e^{s/\sqrt{r}}\cdot\frac{(1+B_{k+1}e^{s/\sqrt{r}})^2}{(1-B_{k+1}e^{s/\sqrt{r}})^4}\right) =$$

$$= 1 \tag{211}$$

Simplificando (211) obtenemos:

$$\frac{1}{A_{k+1}} \left(\sum_{\gamma=1}^{\tau} \frac{4A_\gamma B_{k+1} e^{s/\sqrt{r}}}{(1-B_k e^{s/\sqrt{r}})^2} + \frac{A_{k+1}(1+B_{k+1}e^{s/\sqrt{r}})^2}{(1-B_{k+1}e^{s/\sqrt{r}})^2} \right) = 1 \qquad (212)$$

equivalente a:

$$\frac{4\, B_{k+1}\; e^{s/\sqrt{r}}}{A_{k+1}} \left(\sum_{\gamma=1}^{\tau} A_\gamma \right) + (1+B_{k+1}e^{s/\sqrt{r}})^2 = (1-B_{k+1}e^{s/\sqrt{r}})^2 \qquad (213)$$

desarrollando los cuadrados y simplificando resulta:

$$\sum_{\gamma=1}^{\tau} A_\gamma = -A_{k+1} \qquad (214)$$

Examinemos la condición $\sum_{\gamma=1}^{k+1} p^\gamma = 1$, resulta:

$$\sum_{\gamma=1}^{\tau} A_\gamma \frac{(1+B_\gamma - B_\gamma B_{k+1} e^{s/\sqrt{r}})^2}{(1-B_{k+1}e^{s/\sqrt{r}})^2} + \frac{A_{k+1}B_{k+1}e^{s/\sqrt{r}}}{(1-B_{k+1}e^{s/\sqrt{r}})^2} = 1 - \sum_{\alpha=\tau+1}^{k} a^\alpha \qquad (215)$$

llamando:

$$\beta = 1 - \sum_{\alpha=\tau+1}^{k} a^\alpha > 0 \qquad (216)$$

la expresión (215) puede escribirse teniendo en cuenta (214) como:

$$\sum_{\gamma=1}^{\tau} A_\gamma \left[((1+B_\gamma) - B_\gamma B_{k+1} e^{s/\sqrt{r}})^2 - B_{k+1} e^{s/\sqrt{r}} \right] = (1-B_{k+1}e^{s/\sqrt{r}})^2 \beta \qquad (217)$$

desarrollando los cuadrados:

$$\sum_{\gamma=1}^{\tau} A_\gamma \left[(1+B_\gamma)^2 + B_\gamma^2 B_{k+1}^2 e^{2s/\sqrt{r}} - (2(1+B_\gamma)B_\gamma B_{k+1} - B_{k+1}) e^{s/\sqrt{r}} \right] =$$

$$= \beta + \beta\, B_{k+1}^2\; e^{2s/\sqrt{r}} - 2\beta\, B_{k+1}\; e^{s/\sqrt{r}} \qquad (218)$$

Identificando coeficientes, resulta:

$$\sum_{\gamma=1}^{\tau} A_\gamma B_\gamma^2 = \beta \tag{219}$$

además:

$$\sum_{\gamma=1}^{\tau} A_\gamma (1+B_\gamma)^2 = \sum_{\gamma=1}^{\tau} (A_\gamma + A_\gamma B_\gamma^2 + 2A_\gamma B_\gamma) = \beta \tag{220}$$

equivalente, debido a (219), a:

$$\sum_{\gamma=1}^{\tau} A_\gamma = -2 \sum_{\gamma=1}^{\tau} A_\gamma B_\gamma \tag{221}$$

Si se cumplen (219) y (221) se verifica automáticamente:

$$\sum_{\gamma=1}^{\tau} A_\gamma (2(1+B_\gamma) B_\gamma B_{k+1} - B_{k+1}) = 2B_{k+1}\, \beta \tag{222}$$

por lo que no podemos deducir de (221) otra relación que ligue a las A_γ con las B_γ. Tendremos pues el sistema de ecuaciones:

$$a^\gamma = A_\gamma \left(\frac{1}{1-B_{k+1}} + B_\gamma \right)^2 \qquad \text{(I)}$$

$$b^\gamma = A_\gamma \left(\frac{1}{1-B_{k+1} e^{s/\sqrt{r}}} + B_\gamma \right)^2 \qquad \gamma=1,\ldots,\tau \qquad \text{(II)}$$

(223)

$$a^{k+1} = \frac{A_{k+1}\, B_{k+1}}{(1-B_{k+1})^2} \qquad \text{(III)}$$

$$b^{k+1} = \frac{A_{k+1} B_{k+1} e^{s/\sqrt{r}}}{(1-B_{k+1} e^{s/\sqrt{r}})^2} \qquad \text{(IV)}$$

$$\sum_{\gamma=1}^{\tau} A_\gamma = -A_{k+1} \qquad \sum_{\gamma=1}^{\tau} A_\gamma B_\gamma^2 = \beta \qquad \sum_{\gamma=1}^{\tau} A_\gamma = -2 \sum_{\gamma=1}^{\tau} A_\gamma B_\gamma \quad (V) \tag{223}$$

Para facilitar el cálculo vamos a llamar:

$$e^{s/2\sqrt{r}} = t \tag{224}$$

por tanto, dividiendo la (IV) por la (III) resulta, sacando la raíz cuadrada:

$$\sqrt{\frac{b^{k+1}}{a^{k+1}}} = \frac{t(1-B_{k+1})}{1 - B_{k+1}t^2} \tag{225}$$

despejando B_{k+1}, y llamando:

$$\alpha = \sqrt{\frac{a^{k+1}}{b^{k+1}}} \tag{226}$$

resulta:

$$B_{k+1} = \frac{\alpha t - 1}{t(\alpha - t)} \tag{227}$$

además:

$$\frac{1}{1-B_{k+1}} = \frac{t(\alpha - t)}{1 - t^2} \tag{228}$$

y también:

$$\frac{1}{1-B_{k+1}t^2} = \frac{\alpha - t}{\alpha(1 - t^2)} \tag{229}$$

Por tanto, sacando la raíz cuadrada a (I) y (II) y sumándolas y restándolas entre sí, resulta:

$$\sqrt{b^{\gamma}} - \sqrt{a^{\gamma}} = \sqrt{A_{\gamma}} \; \left(\frac{\alpha - t}{1-t^{2}}\right)\left(\frac{1}{\alpha} - t\right)$$

$$\sqrt{b^{\gamma}} + \sqrt{a^{\gamma}} = \sqrt{A_{\gamma}} \left[\left(\frac{\alpha - t}{1-t^{2}}\right)\left(\frac{1}{\alpha} + t\right) + 2B_{\gamma}\right] \qquad \gamma=1,\ldots,\tau \tag{230}$$

sumando las dos expresiones y dividiendo por dos:

$$\sqrt{b^{\gamma}} = \sqrt{A_{\gamma}} \; \left(\frac{\alpha-t}{\alpha(1-t^{2})} + B_{\gamma}\right) \qquad \gamma=1,\ldots,\tau \tag{231}$$

elevando al cuadrado y sumando, desde 1 hasta τ, resulta:

$$\sum_{\gamma=1}^{\tau} b^{\gamma} = \sum_{\gamma=1}^{\tau} A_{\gamma} \left(\left(\frac{\alpha-t}{\alpha(1-t^{2})}\right)^{2} + B_{\gamma}^{2} + 2B_{\gamma}\frac{\alpha-t}{\alpha(1-t^{2})}\right) =$$

$$= \left(\sum_{\gamma=1}^{\tau} A_{\gamma}\right)\left(\frac{\alpha-t}{\alpha(1-t^{2})}\right)^{2} + \beta + 2\left(\sum_{\gamma=1}^{\tau} A_{\gamma}B_{\gamma}\right)\left(\frac{\alpha-t}{\alpha(1-t^{2})}\right) \tag{232}$$

y teniendo en cuenta (V), podemos escribir:

$$\sum_{\gamma=1}^{\tau} b^{\gamma} - \beta = -A_{k+1} \left(\frac{\alpha-t}{\alpha(1-t^{2})}\right)^{2} + A_{k+1}\frac{(\alpha-t)}{\alpha(1-t^{2})} \tag{233}$$

y teniendo en cuenta que:

$$\sum_{\gamma=1}^{\tau} b^{\gamma} - \beta = -b^{k+1} \tag{234}$$

resulta:

$$b^{k+1} = -A_{k+1} \left(-\left(\frac{\alpha-t}{\alpha(1-t^{2})}\right)^{2} + \frac{\alpha-t}{\alpha(1-t^{2})}\right) = -A_{k+1}\frac{t(1-\alpha t)(\alpha-t)}{\alpha^{2}(1-t^{2})^{2}} \tag{235}$$

Por otra parte, elevando al cuadrado (230) y sumando, resulta:

$$\sum_{\gamma=1}^{\tau} (b^{\gamma}+a^{\gamma}-2\sqrt{a^{\gamma}b^{\gamma}}) = -A_{k+1}\left(\frac{\alpha-t}{1-t^2}\right)^2\left(\frac{1}{\alpha}-t\right)^2$$

$$\sum_{\gamma=1}^{\tau} (b^{\gamma}+a^{\gamma}+2\sqrt{a^{\gamma}b^{\gamma}}) = \sum_{\gamma=1}^{\tau} A_{\gamma}\left(\left(\frac{\alpha-t}{1-t^2}\right)\left(\frac{1}{\alpha}+t\right)+2B_{\gamma}\right)^2 \qquad (236)$$

la última ecuación puede escribirse, teniendo en cuenta (V), como:

$$\sum_{\gamma=1}^{\tau} (b^{\gamma}+a^{\gamma}+2\sqrt{a^{\gamma}b^{\gamma}}) = -A_{k+1}\left(\frac{\alpha-t}{1-t^2}\right)^2\left(\frac{1}{\alpha}+t\right)^2 + 2A_{k+1}\left(\frac{\alpha-t}{1-t^2}\right)\left(\frac{1}{\alpha}+t\right)+$$

$$+\,4\left(1-\sum_{\gamma=\tau+1}^{k} b^{\gamma}\right) \qquad (237)$$

Restando la primera ecuación de (236) a (237), obtenemos:

$$4\sum_{\gamma=1}^{\tau}\sqrt{a^{\gamma}b^{\gamma}} = -4A_{k+1}\left(\frac{\alpha-t}{1-t^2}\right)^2\frac{t}{\alpha} + 2A_{k+1}\left(\frac{\alpha-t}{1-t^2}\right)\left(\frac{1}{\alpha}+t\right) + 4\left(1-\sum_{\gamma=\tau+1}^{k} b^{\gamma}\right) \qquad (238)$$

debido a que $a^{\gamma}=b^{\gamma}$ $\gamma > \tau$, podemos escribir (238) como:

$$2\left(1-\sum_{\gamma=1}^{k}\sqrt{a^{\gamma}b^{\gamma}}\right) = -A_{k+1}\left(\frac{\alpha-t}{1-t^2}\right)\left[-\left(\frac{\alpha-t}{1-t^2}\right)\frac{2t}{\alpha}+\left(\frac{1}{\alpha}+t\right)\right] =$$

$$= -A_{k+1}\frac{(\alpha-t)(1-\alpha t)(1+t^2)}{\alpha(1-t^2)^2} \qquad (239)$$

dividiendo (239) por b^{k+1} resulta:

$$\frac{2}{b^{k+1}}\left(1-\sum_{\gamma=1}^{k}\sqrt{a^{\gamma}b^{\gamma}}\right) = \frac{\alpha(1+t^2)}{t} \qquad (240)$$

recordando (226) podemos escribir la ecuación de segundo grado en t:

$$\sqrt{a^{k+1}b^{k+1}}\; t^2 - 2(1 - \sum_{\gamma=1}^{k} \sqrt{a^{\gamma}b^{\gamma}})t + \sqrt{a^{k+1}b^{k+1}} = 0 \qquad (241)$$

por tanto:

$$t = \frac{(1 - \sum_{\gamma=1}^{k} \sqrt{a^{\gamma}b^{\gamma}}) \pm \sqrt{(1 - \sum_{\gamma=1}^{k} \sqrt{a^{\gamma}b^{\gamma}})^2 - a^{k+1}b^{k+1}}}{\sqrt{a^{k+1}b^{k+1}}} \qquad (242)$$

Nótese que debido a que:

$$\sum_{\gamma=1}^{k+1} \sqrt{a^{\gamma}b^{\gamma}} \leq 1 \qquad (243)$$

resulta que:

$$1 - \sum_{\gamma=1}^{k} \sqrt{a^{\gamma}b^{\gamma}} \geq \sqrt{a^{k+1}b^{k+1}} \qquad (244)$$

equivalente a:

$$(1 - \sum_{\gamma=1}^{k} \sqrt{a^{\gamma}b^{\gamma}})^2 \geq a^{k+1}\, b^{k+1} \qquad (245)$$

por tanto el discriminante de (241) es no negativo, admitiendo t soluciones reales siempre. Habrá que elegir la menor solución de t tal que sea mayor que 1, ya que debido a (224), resulta:

$$s = 2\sqrt{r}\; \ln t \qquad (246)$$

Nótese que si llamamos:

$$x = \frac{a^{k+1}b^{k+1}}{1 - \sum_{\gamma=1}^{k} \sqrt{a^{\gamma}b^{\gamma}}} \qquad (247)$$

entonces podemos escribir:

$$t = \frac{1 \pm \sqrt{1-x^2}}{x} \tag{248}$$

Estudiemos la función:

$$f(x) = 1 - \sqrt{1-x^2} - x \qquad x \in [0,1] \tag{249}$$

resulta fácil comprobar que:

$$f(0) = f(1) = 0 \tag{250}$$

y que 0 y 1 son las únicas raices de f en $[0,1]$. Por ser f continua, como que $f(1/\sqrt{2}) < 0$, podemos afirmar que:

$$f(x) < 0 \qquad \forall x \in (0,1) \tag{251}$$

o equivalentemente:

$$\frac{1-\sqrt{1-x^2}}{x} < 1 \qquad \forall x \in (0,1) \tag{252}$$

por tanto, no podemos aceptar la solución negativa de (248). Análogamente, si consideramos:

$$f(x) = 1 + \sqrt{1-x^2} - x \qquad x \in [0,1] \tag{253}$$

resulta fácil comprobar que es una función positiva en (0,1), por tanto:

$$\frac{1 + \sqrt{1-x^2}}{x} > 1 \qquad \forall x \in (0,1) \tag{254}$$

por tanto finalmente podemos escribir:

$$s = 2\sqrt{r}\,\ln\left(\frac{1-\sum_{\gamma=1}^{k}\sqrt{a^{\gamma}b^{\gamma}}+\sqrt{\left(1-\sum_{\gamma=1}^{k}\sqrt{a^{\gamma}b^{\gamma}}\right)^{2}-a^{k+1}b^{k+1}}}{\sqrt{a^{k+1}\,b^{k+1}}}\right) \tag{255}$$

expresión que permite calcular la distancia geodésica entre dos pun-- tos de la variedad E, definida en (143), de coordenadas $(a^{1},\ldots,a^{k})$ y $(b^{1},\ldots,b^{k})$, teniendo en cuenta que $a^{k+1} = 1 - \sum_{\gamma=1}^{k} a^{\gamma}$, $b^{k+1} = 1 - \sum_{\gamma=1}^{k} b^{\gamma}$. Para el cálculo de las geodésicas hace falta encontrar expresiones al gebráicas para los A_{γ} y B_{γ}, constantes de integración.

A partir de (230) podemos escribir:

$$A_{\gamma} = \frac{(1-t^{2})^{2}a^{k+1}b^{k+1}\,(\sqrt{b^{\gamma}}-\sqrt{a^{\gamma}})^{2}}{(\sqrt{a^{k+1}}-\sqrt{b^{k+1}}\,t)^{2}\,(\sqrt{b^{k+1}}-\sqrt{a^{k+1}}\,t)^{2}} \tag{256}$$

$$\gamma=1,\ldots,\tau$$

por otra parte:

$$B_{\gamma} = \frac{\sqrt{b^{\gamma}}+\sqrt{a^{\gamma}}}{2\sqrt{A\gamma}} - \frac{1}{2}\left(\frac{\alpha-t}{1-t^{2}}\right)\left(\frac{1}{\alpha}+t\right) \tag{257}$$

$$\gamma=1,\ldots,\tau$$

y teniendo en cuenta (256) podemos escribir:

$$B_{\gamma} = \frac{(\sqrt{a^{k+1}}-\sqrt{b^{k+1}}\,t)}{2(1-t^{2})\sqrt{a^{k+1}b^{k+1}}}\left(\frac{(\sqrt{b^{\gamma}}+\sqrt{a^{\gamma}})\,(\sqrt{b^{k+1}}-\sqrt{a^{k+1}}\,t)}{\sqrt{b^{\gamma}}-\sqrt{a^{\gamma}}} - (\sqrt{b^{k+1}}+\sqrt{a^{k+1}}\,t)\right) \tag{258}$$

$$\gamma=1,\ldots,\tau$$

A_{k+1} y B_{k+1} pueden ser determinadas a partir de (214) y (227) respectivamente.

Nótese que si fijamos a^{k+1} y b^{k+1}, podemos establecer alguna relación entre (255) y (58), ya que ambas distancias son funciones monótonas decrecientes de la cantidad:

$$\sum_{\gamma=1}^{k} \sqrt{a^{\gamma} b^{\gamma}} \tag{259}$$

por tanto, en estas condiciones, si $P_1, \ldots, P_s \in E$ y sean d_{ij} las distancias calculadas a través de (58) entre P_i y P_j y s_{ij} las distancias calculadas a través de (255) entre los mismos puntos, podemos afirmar:

$$d_{ij} \leq d_{kl} \quad \Leftrightarrow \quad s_{ij} \leq s_{kl} \tag{260}$$

Es posible extender la métrica Riemanniana definida a través de (255) a una parte de la frontera de E: aquellos puntos con algunas de las k coordenadas nulas. Sin embargo, a diferencia del caso de la multinomial positiva, p^{k+1} debe ser siempre estrictamente mayor que cero, ello se debe a la falta de simetría entre $p^1, \ldots, p^k$ y p^{k+1}.

4.9. Distribución binomial negativa

Un caso particular de multinomial negativa es la binomial negativa, k=1. En estas condiciones la variedad E es euclídea, y una transformación normalizante viene definida por:

$$y = A\int \frac{dp}{p\sqrt{1-p}} \tag{261}$$

que con el cambio:

$$t = \sqrt{1-p}\ , \quad p = 1-t^2, \quad dp = -2t\ dt \tag{262}$$

resulta:

$$y = -2A\int \frac{dt}{(1-t^2)} = B\int \frac{dt}{(1-t)(1+t)} = B\int \left[\frac{1/2}{1-t} + \frac{1/2}{1+t}\right] dt =$$

$$= -\frac{1}{2} B \ln(1-t) + \frac{1}{2} B \ln(1+t) + c = D \ln(\frac{1+t}{1-t}) + c =$$

$$= D \ln \left(\frac{1 + \sqrt{1-p}}{1 - \sqrt{1-p}} \right) + c \tag{263}$$

para que el tensor métrico resulte ser constante igual a 1, como:

$$p = 1 - \left(\frac{e^{(y-c)/D}-1}{e^{(y-c)/D}+1} \right)^2 = 1 - \mathrm{tgh}^2(\frac{y-c}{2D}) = \frac{1}{\cosh^2(\frac{y-c}{2D})} \tag{263}$$

por tanto deberemos elegir c y D para que se cumpla:

$$1 = \left(\frac{\mathrm{senh}(\frac{y-c}{2D})}{\cosh^3(\frac{y-c}{2D})} \frac{1}{D} \right)^2 \frac{r}{\left(\frac{1}{\cosh^2(\frac{y-c}{2D})}\right)^2 \mathrm{tgh}^2(\frac{y-c}{2D})} = \frac{r}{D^2} \tag{264}$$

por tanto la más simple transformación buscada será:

$$y = \sqrt{r}\ \ln(\frac{1 + \sqrt{1-p}}{1 - \sqrt{1-p}}) \tag{265}$$

caso de que tengamos k distribuciones binomiales negativas independientes, la distancia entre dos distribuciones conjuntas, de parámetros $a^1,\ldots,a^k$ y $b^1,\ldots,b^k$ vendrá dada por:

$$s = \sqrt{\sum_{i=1}^{n} r_i \left(\ln \left[\left(\frac{1+\sqrt{1-a^i}}{1-\sqrt{1-a^i}}\right) \cdot \left(\frac{1-\sqrt{1-b^i}}{1+\sqrt{1-b^i}}\right)\right]\right)^2} \qquad (266)$$

5. DISTANCIAS ENTRE DISTRIBUCIONES ABSOLUTAMENTE CONTINUAS

Resumen:

En el presente capítulo, se obtiene explícitamente, las expresiones de la distancia definida a través de la matriz de información de Fisher, para algunas distribuciones de probabilidad absolutamente continuas, como las exponenciales independientes, normal univariante, etc. y se plantean las ecuaciones diferenciales de las geodésicas para el caso normal multivariante, encontrándose una cota superior de la distancia para este caso.

Sumario:

5.1. DISTRIBUCIONES EXPONENCIALES INDEPENDIENTES.

Sean $X_1,\ldots,X_n$ variables aleatorias absolutamente continuas cuya función de densidad conjunta viene definida por:

$$f(x^1,\ldots,x^n,\lambda^1,\ldots,\lambda^n) = \begin{cases} \lambda^1 e^{-\lambda^1 x^1}\cdot\ldots\cdot\lambda^n e^{-\lambda^n x^n} & \Leftrightarrow (x^1,\ldots,x^n)\in(\mathbb{R}^+)^n \\ 0 & \Leftrightarrow (x^1,\ldots,x^n)\notin(\mathbb{R}^+)^n \end{cases}$$

$$\lambda^1,\ldots,\lambda^n \in \mathbb{R}^+ \tag{1}$$

Nótese que cada X_i se distribuye según una distribución exponencial de parámetro λ^i y que las X_i son variables aleatorias estocásticamente independientes. El espacio paramétrico vendrá definido por:

$$E = \{(\lambda^1,\ldots,\lambda^n)\in\mathbb{R}^n \;/\; \lambda^i > 0 \quad i=1,\ldots,n\} \tag{2}$$

Es inmediato comprobar que el tensor métrico, definido a partir de la matriz de información de Fisher, es:

$$g_{\mu\nu} = \frac{\delta_{\mu\nu}}{(\lambda^\mu)^2} \qquad \mu,\nu=1,\ldots,n \tag{3}$$

A partir del resultado 3.3.1 podemos afirmar que la variedad Riemanniana E es euclídea, y que hallaremos una transformación que reduzca al tensor métrico a un tensor constante, resolviendo

$$y^i = A_i \int \sqrt{g_{ii}}\; d\lambda^i + B_i \qquad i=1,\ldots,n \tag{4}$$

integrando obtenemos:

$$y^i = A_i \ln \lambda^i + B_i \qquad i=1,\dots,n \tag{5}$$

donde vamos a determinar los A_i y B_i para que el tensor métrico no sólo resulte constante sino que sea igual a la identidad. De (5) se sigue:

$$\lambda^i = e^{(y^i - B_i)/A_i} \tag{6}$$

por tanto

$$1 = \delta_{\mu\mu} = \left(\frac{\partial\lambda^\mu}{\partial y^\mu} \right)^2 g_{\mu\mu} = \left(\frac{e^{(y^i-B_i)/A_i}}{A_i} \right)^2 \cdot \frac{1}{(e^{(y^i-B_i)/A_i})^2} = \frac{1}{A_i^2} \tag{7}$$

por tanto bastará elegir $A_i = 1$, con B_i arbitrario, por ejemplo $B_i=0$. La transformación buscada será:

$$y^\mu = \ln \lambda^\mu \qquad \mu=1,\dots,n \tag{8}$$

y puesto que existe una clara isometría global entre E y $\mathbb{R}^n$ con el producto escalar usual, la distancia entre dos poblaciones estadísticas de parámetros $\lambda^1,\dots,\lambda^n$, y $\mu^1,\dots,\mu^n$, vendrá dada consiguientemente por:

$$d = \sqrt{\sum_{i=1}^{n} \left(\ln \frac{\lambda_i}{\mu_i}\right)^2} \tag{9}$$

Consideremos a continuación algunas distribuciones relacionadas. Supongamos que se dan n procesos de Poisson en un espacio bidimensional (euclídeo), de forma que la probabilidad de que en un volumen v de dicho espacio aparezcan $k_1,\dots,k_n$ sucesos, clase $1,\dots,n$, viene dada por:

$$P[N_1 = k_1, \ldots, N_n = k_n] = e^{-\lambda^1 v} \frac{(\lambda^1 v)^{k_1}}{k_1!} \cdot \ldots \cdot e^{-\lambda^n v} \frac{(\lambda^n v)^{k_n}}{k_n!} \qquad (10)$$

$$k_1, \ldots, k_n \in \mathbb{N} \cup \{0\}$$

Sea X_i la variable aleatoria "distancia de un punto al azar al suceso (objeto)clase i más próximo". Entonces se verifica:

$$P[X_i > x^i] = e^{-\lambda^i \pi (x^i)^2} \qquad x^i > 0 \qquad (11)$$

y por tanto la función de distribución de X_i es:

$$F(x^i) = \begin{cases} 1 - e^{-\lambda^i \pi (x^i)^2} & x^i > 0 \\ 0 & x^i \leq 0 \end{cases} \qquad (12)$$

La independencia de las N_i implica la independencia de las X_i, por tanto es posible escribir:

$$F(x^1, \ldots, x^n, \lambda^1, \ldots, \lambda^n) = \begin{cases} (2\pi)^n \prod_{i=1}^{n} (1-e^{-\lambda^i \pi (x^i)^2}) & \Leftrightarrow (x^1, \ldots, x^n) \in (\mathbb{R}^+)^n \\ 0 & \Leftrightarrow (x^1, \ldots, x^n) \notin (\mathbb{R}^+)^n \end{cases}$$

(13)

o en términos de funciones de densidad:

$$f(x^1, \ldots, x^n, \lambda^1, \ldots, \lambda^n) = \begin{cases} (2\pi)^n \prod_{i=1}^{n} \lambda^i x^i e^{-\lambda^i \pi (x^i)^2} & \Leftrightarrow (x^1, \ldots, x^n) \in (\mathbb{R}^+)^n \\ 0 & \Leftrightarrow (x^1, \ldots, x^n) \in (\mathbb{R}^+)^n \end{cases}$$

(14)

Nótese que el espacio paramétrico E viene definido como en (2) y como:

$$\ln f = \sum_{i=1}^{n} (\ln \lambda^i - \lambda^i \pi (x^i)^2 + \ln 2\pi x^i) \tag{15}$$

resulta que el tensor métrico es idéntico al definido en (3) por tanto la distancia entre dos poblaciones caracterizadas por $\lambda^1,..,\lambda^n$ y $\mu^1,..$ $...,\mu^n$ vendrá dada por (9).

Un resultado análogo se obtendría de considerar procesos de Poisson independientes en un esapcio euclídeo n-dimensional.

5.2. Distribución normal univariante.

Sea X una variable aleatoria cuya función de densidad viene definida por:

$$f(x,\mu,\sigma) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\ \sigma}\ e^{-(x-\mu)^2/2\sigma^2} \qquad \begin{array}{l} x \in \mathbb{R} \\ \mu \in \mathbb{R} \\ \sigma \in \mathbb{R}^+ \end{array} \tag{16}$$

es decir X es una variable aleatoria con distribución normal univa-- riante. El espacio paramétrico viene definido por:

$$E = \{(\mu,\sigma) \in \mathbb{R}^2 \mid -\infty < \mu < \infty \quad \sigma > 0\} \tag{17}$$

como:

$$\ln f = -\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2} - \ln \sqrt{2\pi} - \ln \sigma \tag{18}$$

resulta:

$$\frac{\partial^2 \ln f}{\partial \mu^2} = -\frac{1}{\sigma^2} \qquad \frac{\partial^2 \ln f}{\partial\sigma\partial\mu} = -2\ \frac{x-\mu}{\sigma^3} \qquad \frac{\partial^2 \ln f}{\partial\sigma^2} = -\frac{3(x-\mu)^2}{\sigma^4} + \frac{1}{\sigma^2} \tag{19}$$

y por tanto el tensor métrico vendrá definido por:

$$g_{11} = \frac{1}{\sigma^2} \qquad g_{12} = g_{21} = 0 \qquad g_{22} = \frac{2}{\sigma^2} \tag{20}$$

la referencia es pues ortogonal, y la variedad E una variedad rieman-- niana por ser $g_{\mu\nu}$ definido positivo en todo E.

Los símbolos de Christoffel de primera especie son:

$$\begin{aligned}
|11,1| &= \frac{1}{2} \left(\frac{\partial g_{11}}{\partial \mu} \right) = 0 \\
|11,2| &= -\frac{1}{2} \left(\frac{\partial g_{11}}{\partial \sigma} \right) = \frac{1}{\sigma^3} \\
|12,1| = |21,1| &= \frac{1}{2} \left(\frac{\partial g_{11}}{\partial \sigma} \right) = -\frac{1}{\sigma^3} \\
|22,2| &= \frac{1}{2} \left(\frac{g_{22}}{\partial \sigma} \right) = -\frac{2}{\sigma^3} \\
|22,1| &= -\frac{1}{2} \left(\frac{\partial g_{22}}{\partial \mu} \right) = 0 \\
|21,2| = |12,2| &= \frac{1}{2} \left(\frac{\partial g_{22}}{\partial \mu} \right) = 0
\end{aligned} \tag{21}$$

Como el tensor fundamental contravariante es:

$$g^{11} = \sigma^2 \qquad g^{12} = g^{21} = 0 \qquad g^{22} = \frac{\sigma^2}{2} \tag{22}$$

los símbolos de Christoffel de segunda especie son:

$$
\begin{aligned}
\Gamma^1_{11} &= g^{11}\,[11,1] = 0 \\
\Gamma^2_{11} &= g^{22}\,[11,2] = \frac{1}{2\sigma} \\
\Gamma^1_{12} &= \Gamma^1_{21} = g^{11}\,[12,1] = -\frac{1}{\sigma} \\
\Gamma^2_{22} &= g^{22}[22,2] = -\frac{1}{\sigma} \\
\Gamma^1_{22} &= g^{11}[22,1] = 0 \\
\Gamma^2_{21} &= \Gamma^2_{12} = g^{22}[21,2] = 0
\end{aligned}
\tag{23}
$$

En una variedad de Riemann de dos dimensiones las únicas posibles componentes del tensor de Riemann-Christoffel de primera especie no nulas, son iguales salvo el signo a R_{1212}. Vamos a calcularla:

$$
\begin{aligned}
R_{1212} &= \frac{1}{2}\left(\frac{\partial^2 g_{12}}{\partial\mu\partial\sigma} - \frac{\partial^2 g_{22}}{\partial\mu\partial\mu} - \frac{\partial^2 g_{11}}{\partial\sigma\partial\sigma} + \frac{\partial^2 g_{21}}{\partial\mu\partial\sigma}\right) + \\
&+ g^{11}([21,1]\,[12,1]-[22,1]\,[11,1])+g^{22}([21,2]\,[12,2]-[22,2]\,[11,2])= \\
&= -\frac{1}{\sigma^4}
\end{aligned}
\tag{24}
$$

Por tanto el tensor de Riemann-Christoffel de primera especie no se anula, concluyéndo por consiguiente que la variedad paramétrica definida en (17) no es euclidea, en el sentido de que no existe ninguna transformación admisible de coordenadas que reduzca al tensor métrico a un tensor constante. Como:

$$
|g| = g_{11}g_{22} - g_{12}\cdot g_{21} = \frac{2}{\sigma^4} \tag{25}
$$

obtenemos que la curvatura Gaussiana es igual a:

$$K = -\frac{1}{2} \tag{26}$$

constante en toda la variedad paramétrica, y al ser negativa sera localmente isométrica a una pseudoesfera de radio $\sqrt{2}$.

Las ecuaciones diferenciales de las geodésicas son:

$$\left.\begin{aligned} &\frac{d^2\mu}{ds^2} - \frac{2}{\sigma}\frac{d\mu}{ds}\frac{d\sigma}{ds} = 0 \\ &\frac{d^2\sigma}{ds^2} + \frac{1}{2\sigma}\left(\frac{d\mu}{ds}\right)^2 - \frac{1}{\sigma}\left(\frac{d\sigma}{ds}\right)^2 = 0 \end{aligned}\right\} \tag{27}$$

que habrá que resolver para unas condiciones de contorno adecuadas (que pase por los puntos (μ_A,σ_A) y (μ_B,σ_B)) y además que el vector tangente sea unitario:

$$\frac{1}{\sigma^2}\left(\frac{d\mu}{ds}\right)^2 + \frac{2}{\sigma^2}\left(\frac{d\sigma}{ds}\right)^2 = 1 \tag{28}$$

de la primera, cuando $\frac{d\mu}{ds} \neq 0$ resulta:

$$\frac{d}{ds}\left(\ln\left|\frac{d\mu}{ds}\right|\right) = 2\frac{d}{ds}(\ln\sigma) \tag{29}$$

e integrando:

$$\frac{d\mu}{ds} = c_1\sigma^2 \tag{30}$$